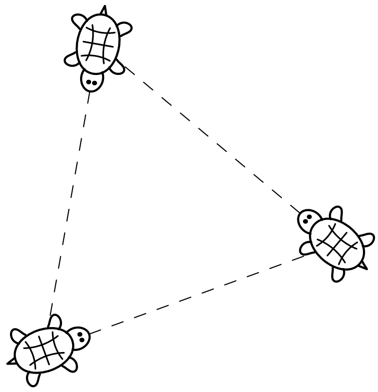


Кинематика.

Новосибирск, 2005

Оглавление

Предисловие

В этом сборнике собраны задачи, которые по разным причинам не вошли в сборник задач под редакцией О.Я. Савченко[a]. По своей структуре этот сборник отличается от вышеупомянутого тем, что кроме самих задач каждому разделу предшествует кратко изложенный материал, освоение которого обычно достаточно для решения задач раздела. Естественно, что в более поздних разделах материал даётся в предположении, что предыдущие темы уже изучены.

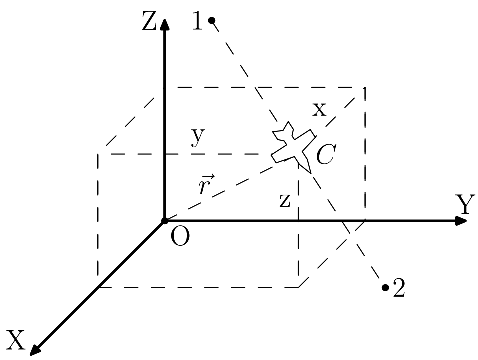
[a] *И.И. Воробьёв, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я. Савченко, А.М. Трубачёв, В.Г. Харитонов.* **Задачи по физике:** учебное пособие под ред. О.Я. Савченко. 4-е изд. С. Петербург. Изд. «Лань». 2001.

Глава 1

Кинематика

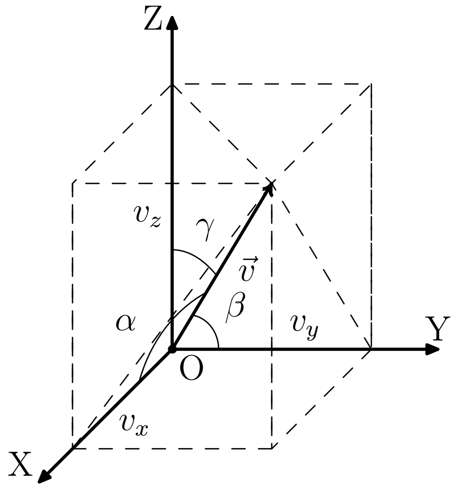
Основной задачей кинематики является описание движения твёрдого тела. В этом разделе для описания используются уравнения классической механики, которые не являются истиной в последней инстанции, так как все уравнения являются только моделью реального мира. Для повседневного же использования точности этих уравнений достаточно.

1.1 Движение с постоянной скоростью



Поезд движется от железнодорожной станции в одном направлении, и расстояние между станцией и поездом за любой промежуток времени t увеличивается на vt, где v — постоянная величина. Рассмотренный пример — движение тела с постоянной скоростью v по прямой линии. На рисунке изображено движение самолёта C по прямой, проходящей через точки 1 и 2. Как и в первом примере, расстояние между точкой 1 и самолётом за время t изменяется на величину vt, когда самолёт движется по этой прямой с постоянной скоростью V. Но расстояние r между самолётом C и аэродромом O[1] уже не пропорционально t, если аэродром не находится на пути самолёта. Однако расстояния самолёта до выделенных плоскостей линейно зависят от времени:

[1]Точка O расположена на пересечении трёх взаимно перпендикулярных плоскостей (ZOY), (ZOX) и (XOY)

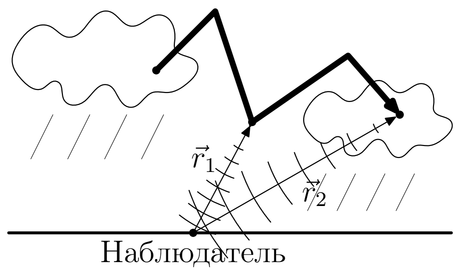


$$\begin{cases} x = x_0 + V_x t, \\ y = y_0 + V_y t, \\ z = z_0 + V_z t, \end{cases}$$

где x_0, y_0, z_0 — расстояние до плоскостей (ZOX), (XOZ) и (XOY), соответственно, в нулевой момент времени, v_x, v_y, v_z — составляющие вектора скорости $\vec{v}$ по осям X, Y, Z, которые связаны с величиной скорости v формулой:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

где $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\cos\beta$, $v_z = v\cos\gamma$. α, β и γ — углы между вектором скорости $\vec{v}$ и осями координат X, Y и Z.



Пример 1.1.1 Звуковая волна удаляется от источника звука с постоянной скоростью. В воздухе скорость звука равна 330 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Докажите, что гром, который длится более четырёх секунд, рождён молнией, длина которой больше километра.

$\diamondsuit$ [2] *Доказательство*: Длительность грома, умноженная на скорость звука, равна $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ — разности расстояний от наблюдателя до самого удалённого и самого близкого участка

[2] Условный знак $\diamondsuit$ отмечает примеры, задачи, решения и ответы, снабжённые рисунками.

молнии (см. рис.). Длина молнии больше километра, так как она заведомо больше длины отрезка $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, который, соответственно, длиннее $330\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \times 4\,\text{с} \simeq 1.32\,\text{км}$.

Задачи к § 1.1

1.1.1 Путь длиною 120 км автобус проходит за 2.5 часа. На пути тридцать одинаковых остановок. Между остановками автобус движется со скоростью $60\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Определите продолжительность каждой остановки.

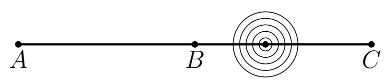
1.1.2 Из двух населённых пунктов, расположенных на расстоянии ℓ друг от друга, одновременно вышли навстречу друг другу два путника: один со скоростью v, другой — u. Через какое время они встретятся?

1.1.3 Через какое время автомобиль догонит велосипедиста, если велосипедист движется со скоростью $20\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$, автомобиль со скоростью $100\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$, а расстояние между автомобилем и велосипедистом 40 км?

1.1.4 Число автомобилей, перегоняющих пешехода, в 1.2 раза меньше числа встречных автомобилей, хотя автомобили двигаются по трассе одинаково в обеих направлениях со скоростью $65\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$. С какой скоростью движется пешеход?

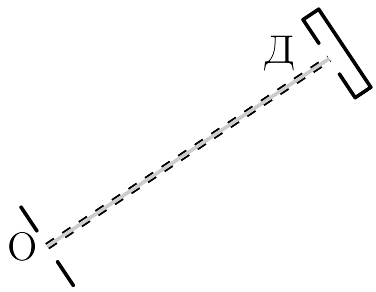
1.1.5 Колонна машин двигается после поворота со скоростью в k раз меньшей, чем до поворота. Во сколько раз изменилась длина колонны после поворота?

◇ 1.1.6 Три микрофона, расположены на одной прямой в точках A, B, C. Расстояния между соседними микрофонами L. Микрофоны в точках A и B зарегистрировали в моменты времени t_A, t_B и t_C звук от взрыва, который произошёл на этой прямой между точками B и C. Определите скорость взрывной волны, место и момент времени взрыва.



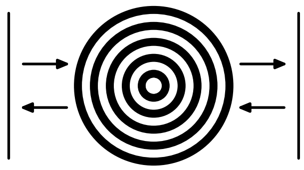
К задаче 1.1.6

◇ 1.1.7 Два сорта частиц A и B проходят через отверстие O в один и тот же момент времени. В детектор D частицы сорта A попадают на $\delta t = 10^{-6}\,\text{с}$ позднее чем частицы сорта B. Скорость частиц сорта A равна $v_A = 5 \cdot 10^6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Чему равна скорость частиц сорта B, если расстояние между отверстием O и детектором D равно $S = 10\,\text{м}$?



К задаче 1.1.7

1.1.8 Счётчики A и B, регистрирующие проход γ-кванта, расположены на расстоянии 5 м друг от друга. Между счётчиками произошёл распад π^0-мезона на два γ-кванта. Найдите положение мезона, если счётчик A зарегистрировал γ-квант на 10^{-8} с позднее, чем счётчик B. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.



К задаче 1.1.9

$\Diamond$ 1.1.9 Стрелок пытается попасть в диск радиуса R, который движется между стенками с постоянной по величине скоростью так, что стрелок не в состоянии за ним уследить. Расстояние между стенками L. Выстрелы производятся на уровне центра диска перпендикулярно его плоскости. Диск движется так, как показано на рисунке. В какой точке прицеливания вероятность попадания наибольшая? Чему она равна?

1.1.10 Короткие звуковые импульсы наземного локатора, испускаемые через время τ, возвращаются после отражения от самолёта, который удаляется от локатора, следуя друг за другом через время $k\tau$, где $k > 1$. Определите, во сколько раз скорость самолёта меньше скорости звука?

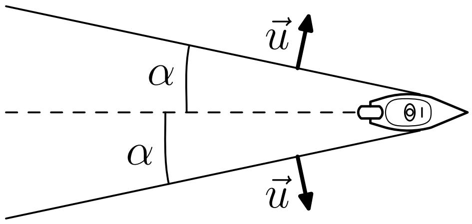
1.1.11 Частота следования коротких звуковых импульсов, испускаемых локатором самолёта, в k раз меньше частоты следования импульсов, которые фиксируют датчики самолёта у звуковых импульсов, отражённых от неподвижного тела, находящегося на пути самолёта. Во сколько раз скорость самолёта меньше скорости звука?

1.1.12 а) Два звуковых датчика расположены на пути движения автомобиля, один — впереди, другой — позади. Первый датчик регистрировал звуковой сигнал автомобиля в течение 0.9 с, второй — в течение 1.1 с. Скорость звука $330\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. С какой скоростью двигался автомобиль?

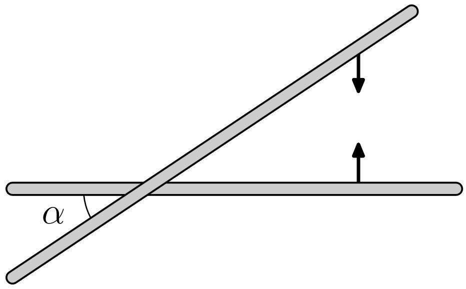
б) Звуковой сигнал наземного локатора, отражённый от самолёта, движущегося от локатора, в четыре раза длиннее посланного сигнала. Определите скорость самолёта.

1.1.13 Два человека стоят на расстоянии h_1 и h_2 от стенки и ℓ — друг от друга. Один из них сказал слово, другой услышал конец слова, совпавшее с началом эха этого же слова. Скорость звука c. Определите длительность звучания слова.

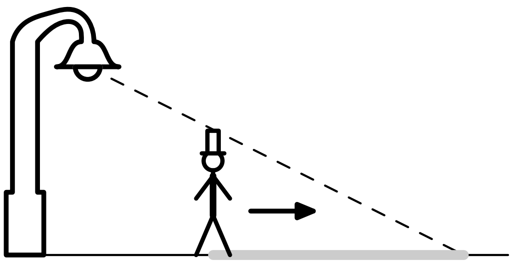
1.1.14 Самолёт летит горизонтально на высоте 4 км от поверхности земли. Звук дошёл до наблюдателя через 10 с после того, как над ним пролетел самолёт. Во сколько раз скорость самолёта превышает скорость звука? Скорость звука $300\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.



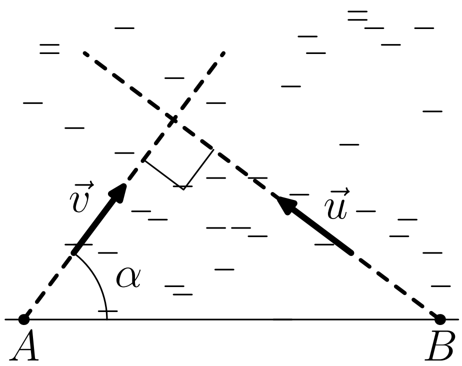
К задаче 1.1.15



К задаче 1.1.16



К задаче 1.1.17



К задаче 1.1.18

◊ 1.1.15 Фронт волны от моторной лодки образует угол α с направлением её движения. Угол не меняется при движении лодки. Скорость волны u. Определите скорость лодки.

◊ 1.1.16 Навстречу друг другу по плоскости со скоростью v движутся две длинные палки, расположенные так, как изображено на рисунке. С какой скоростью движется точка их пересечения?

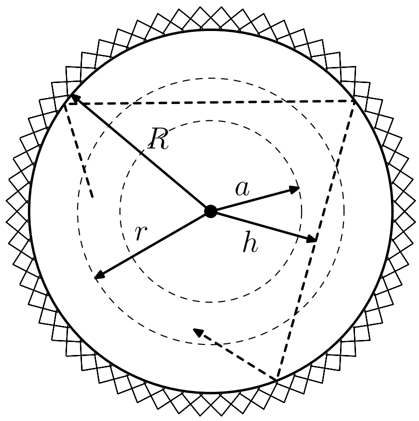
◊ 1.1.17 Человек высоты h идёт от фонаря, подвешенного на высоте H, со скоростью u. С какой скоростью движется конец тени человека?

◊ 1.1.18 Два портовых города A и B находятся на расстоянии L друг от друга. Пароход отчалил от города A и движется со скоростью v под углом α к линии, соединяющей эти города. Через какое время должен отчалить катер из города B, чтобы, двигаясь со скоростью u курсом, перпендикулярным курсу парохода, встретиться с ним?

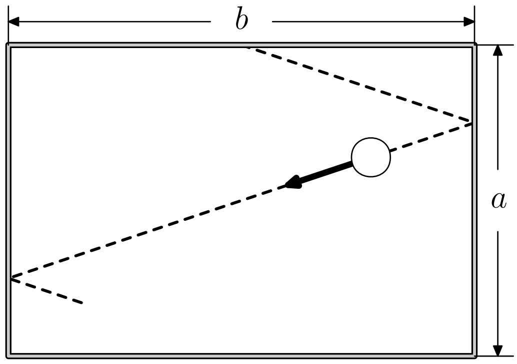
1.1.19 Оператор радиолокационной станции обнаружил на расстоянии 20 км от станции самолёт, летящий с постоянной скоростью. Через 2 мин оператор повернул луч локатора на 90° и обнаружил этот же самолёт на том же расстоянии, что и в первый раз. Определить скорость самолёта.

1.1.20 Первый луч локатора обнаружил объект, движущийся с постоянной скоростью, на расстоянии r_1, а через время τ — на расстоянии r_2. Углы, которые образовывал луч с осями X и Y, были соответственно равны α_1 и β_1, а во второй раз — α_2 и β_2. С какой скоростью двигался объект?

1.1.21 Две стенки образуют угол α. Под каким углом к одной из стенок должен влететь шарик, чтобы вылететь по траектории влёта после трёх упругих ударов о стенки? После пяти ударов? После $2n+1$ ударов? Движение шарика происходит в плоскости, перпендикулярной стенкам. При упругом ударе угол падения шара равен углу отражения.



К задаче 1.1.22



К задаче 1.1.23

$\diamondsuit$ 1.1.22 а) Внутри сферической полости радиуса R летает маленький шарик, упруго отражаясь от поверхности полости. Минимальное расстояние шарика от центра полости h. Чему равна вероятность обнаружить шарик на расстоянии, меньшем, чем r, от центра полости? Большем чем r?

б) Чему равна вероятность, что шарик из задачи а) находится на расстоянии, большем чем a, но меньшем, чем r от центра полости?

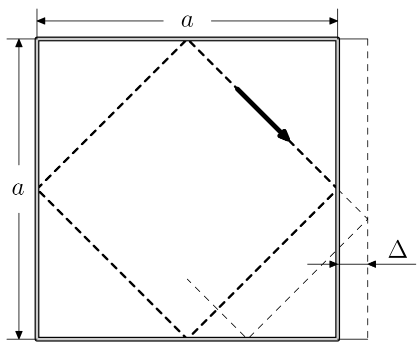
$\diamondsuit$ 1.1.23 По бильярдному столу с бортами длины a и b пустили шар от середины борта длины b и он, упруго отражаясь от бортов, вернулся в то же место, из которого он начал своё движение. Первый удар шар совершил о борт длины a. Расстояние от места первого удара до ближайшего угла a/n, где n — целое положительное число. Сколько всего ударов о борта длины a совершил шар?

$\diamondsuit$ 1.1.24 Траектория атома, упруго отражённого от стенок куба, размеры которого $a \times a \times a$, — квадрат. Скорость атома v.

а) С какой средней скоростью станет перемещаться по каждой стенке место удара, если сместить одну стенку на Δ?

б) Через какое время в задаче а) атом вернётся на место, из которого он летел, если $\Delta = \frac{a}{n}$, где n — положительное целое число, а атом летел в сторону смещённой стенки сразу же после его отражения от стенки? Чему равно расстояние между ближайшими параллельными участками траектории?

в) Решите задачу б), если $\Delta = a\frac{k}{n}$, где k и n целые положительные числа, не имеющие общего делителя, и $k < n$.



К задаче 1.1.24

г) Почему обычно считают, что расстояние между ближайшими параллельными участками траекторий в в) сколь угодно малы?

1.1.25 Со скоростью v навстречу друг другу ползут черепахи. Когда расстояние между черепахами было L, с одной из них слетела муха и со скоростью u, $u > v$ полетела навстречу второй черепахе. Долетев до неё, развернулась, и с той же скоростью полетела назад к первой черепахе. Долетев до неё, развернулась, и полетела ко второй и т. д. Какой путь пролетела муха, прежде чем черепахи встретились?

1.2 Прямолинейное движение с постоянным ускорением

Если промежуток времени dt очень мал, то скорость тела не успевает измениться. Следовательно, в течение этого промежутка времени тело движется с постоянной скоростью. Поэтому расстояние dS, пройденное телом за время dt, определяется формулой

$$dS = v\,dt,$$

где величина v, называется *мгновенной скоростью* или просто — *скоростью*.

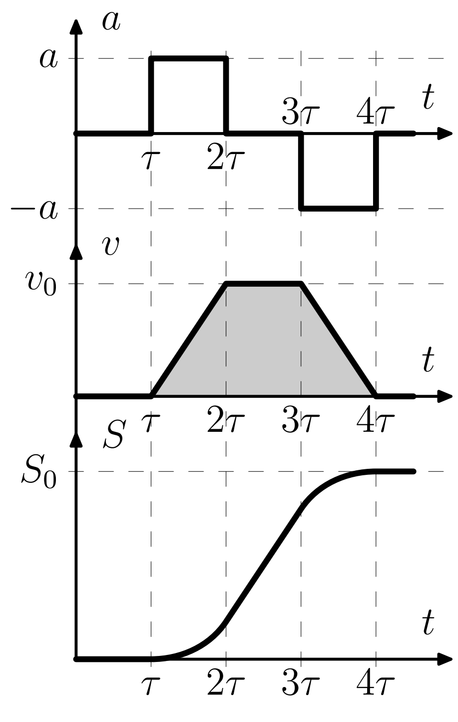
Мгновенная скорость не обязана быть константой. Её величина может меняться с течением времени. Представляет интерес случай, когда скорость линейно зависит от времени:

$$v = v_0 + at,$$

где величина a называется ускорением тела.

В качестве примера подобного поведения скорости можно привести:

- скорость падающего камня: $v = gt$, где $g = 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения;
- скорость стартующего автомобиля линейно зависит от времени: $v = at$, где a — ускорение автомобиля, а t — время от начала старта;
- скорость поезда, который, подходя к железнодорожной станции, тормозит так, что его скорость линейно уменьшается: $v = v_0 - at$, где v_0 — скорость поезда до начала торможения, $-a$ — отрицательное ускорение поезда, t — время торможения.



Расстояние S, пройденное телом, которое движется в течение времени t с постоянным ускорением a, равно средней скорости тела, умноженной на время t. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}(v_0 + v_t) \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

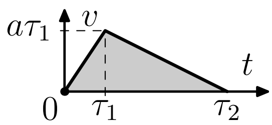
где v_0 — скорость тела в нулевой момент времени t.

Наглядную картину движения тела дают графические изображения зависимостей ускорения, скорости и расстояния от времени. Три графика на рисунке дают значения ускорения, скорости и расстояния, пройденное автомобилем в любой момент времени, когда он двигался по прямому участку дороги. Наклон графика скорости в каждый момент времени равен ускорению в этот же момент времени. Аналогично, наклон графика расстояния, пройденного автомобилем, равен его скорости. Поэтому расстояние, пройденное телом на момент 4τ, равно «закрашенной» площади под графиком скорости. Подробнее это обсуждается в §9 и §10.

Пример 1.2.1 Поезд двигался равноускоренно от станции в течение времени τ_1 с ускорением a, а затем равнозамедленно в течение времени τ_2 вплоть до полной остановки. На каком расстоянии от станции остановился поезд?

◇ *Решение*: На рисунке изображён график зависимости скорости поезда от времени. Искомое расстояние — площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}a\tau_1 \cdot (\tau_1 + \tau_2).$$



К примеру 1.2.1

Задачи к § 1.2

1.2.1 а) Камень бросили вертикально вверх со скоростью 9.8 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через какое время камень вернётся?

б) Первую половину пути сосулька летела 1 с. Сколько времени ей осталось лететь до земли?

Ускорение свободного падения $g = 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.2.2 Двигаясь с постоянным ускорением, автомобиль на участке длины 50 м увеличил свою скорость с 20 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ до 25 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить ускорение автомобиля.

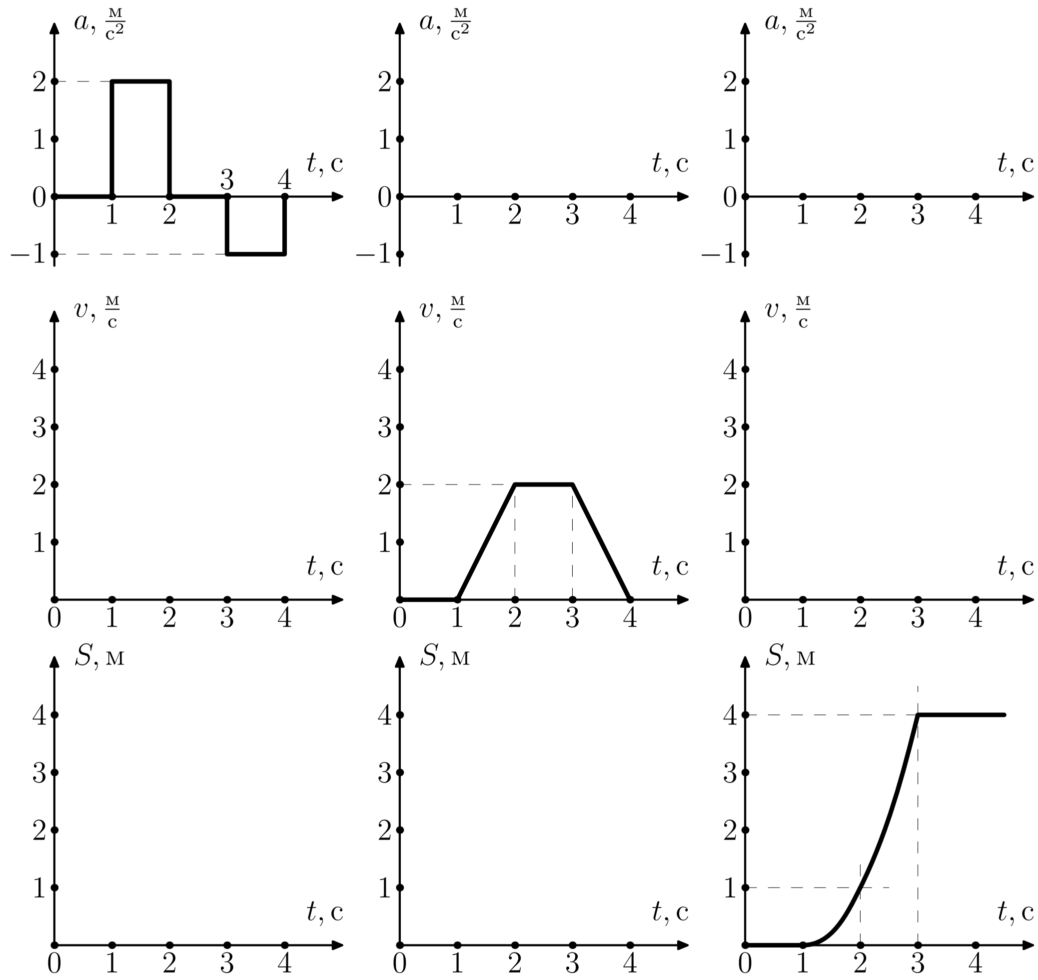
1.2.3 Поезд начинает тормозиться на расстоянии ℓ от железнодорожной станции, имея скорость v. С каким отрицательным ускорением он должен двигаться, чтобы остановиться на станции? Чему равно время торможения?

1.2.4 На неподвижный космический корабль со скоростью v летит поток метеоритов. Двигатель корабля может развить ускорение a. На каком расстоянии от корабля нужно обнаружить этот поток, чтобы, включив двигатель, избежать столкновения?

1.2.5 Предпоследний вагон прошёл мимо пассажира за время t_1, последний — за t_2, $t_2 < t_1$. Электричка с вокзала двигалась равноускоренно. На какое время опоздал пассажир?

1.2.6 Спортсмен может пробежать первую половину дистанции с ускорением a, а вторую — с $2a$. Это же он может сделать наоборот: первую половину дистанции пробежать с ускорением $2a$, а вторую — с ускорением a. В каком случае он пробежит дистанцию быстрее?

1.2.7 Тело в течение времени τ двигалось с ускорением a_1, а затем равнозамедленно с ускорением a_2 вплоть до остановки. Какое рассто-



К задаче 1.2.10

яние прошло тело, если в начале оно а) было неподвижно? б) имело скорость v?

1.2.8 а) Поезд, двигаясь от станции равноускоренно, через время τ после отправления изменил величину и направление ускорения, а через время τ после этого проехал мимо станции со скоростью v. На какое максимальное расстояние поезд удалялся от станции?

б) Решите задачу а), если поезд проехал мимо станции через время T после изменения ускорения?

1.2.9 а) Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом времени τ выброшены два шарика со скоростью v. Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

б) С какой скоростью нужно выбросить второй шарик в задаче а), чтобы столкновения не произошло?

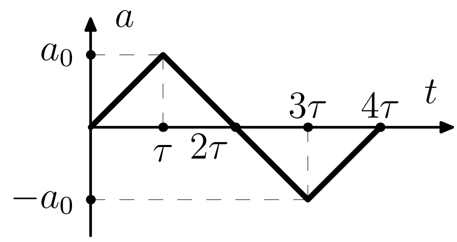
в) С вертолёта, поднимающегося вертикально вверх со скоростью v, с высоты h над землёй отпускают груз. Через какое время груз упадёт на землю? С какой скоростью упадёт груз? Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

♢ 1.2.10 Восстановите, если это возможно, недостающие графики на рисунках, если в диапазоне от 0 с до 1 с для всех графиков $S = 0$ м.

1.2.11 Нарисуйте график зависимости модуля скорости теннисного шарика от времени, подпрыгивающего в поле тяжести над упругой горизонтальной плоскостью. Известно, что шарик отпускают без начальной скорости с высоты 1 м.

1.2.12 Тело в течение времени τ двигается с постоянной скоростью v_0. Затем скорость линейно возрастает во времени так, что в момент времени 3τ она равна $3v_0$. Сохранив достигнутую скорость в течение времени τ, тело затем начинает замедляться так, что к моменту времени 6τ оно имеет скорость $3v_0$, но в противоположном направлении. Построить график зависимости скорости, ускорения и перемещения от времени.

♢ 1.2.13 Постройте график зависимости скорости от времени по графику зависимости ускорения от времени. Скорость в нулевой момент времени равна нулю. Определите скорость в момент времени 2τ и в момент времени 4τ.



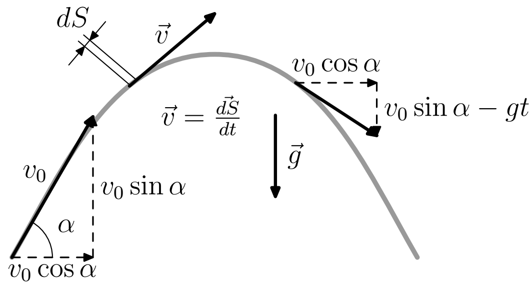
К задаче 1.2.13

1.2.14 Какое максимальное расстояние может пробежать спортсмен от остановки до остановки за время T, если он может разгоняться с ускорением a, а замедляться с ускорением $2a$?

1.2.15 а) Определите минимальное время движения автобуса от одной остановки до другой, если расстояние между остановками ℓ. При движении автобуса от остановки он может развивать ускорение a_1, а при подходе к остановке тормозиться с ускорением a_2.

б) Решить задачу а) при условии, что скорость автобуса на трассе не больше v.

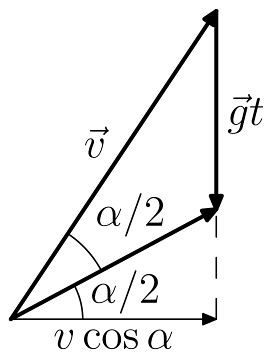
1.3 Баллистика



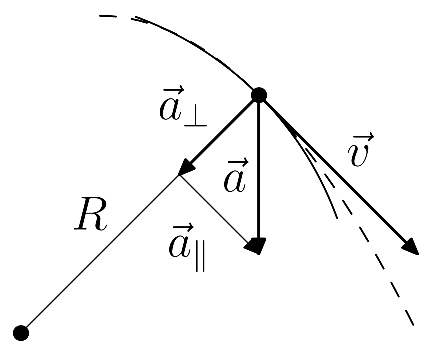
Движение в поле тяжести

На рисунке изображена траектория тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью $\vec{v_0}$. Если промежуток времени dt предельно мал, то тело в течение этого времени движется по касательной с постоянной скоростью и расстояние, пройденное телом за время dt, определяется формулой: $d\vec{S} = \vec{v}dt$, где $\vec{v}$ — вектор скорости, направленный по касательной к траектории тела. В момент броска вертикальная составляющая скорости равна $v_0 \sin\alpha$, а горизонтальная составляющая скорости равна $v_0 \cos\alpha$. Ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз. Поэтому через время t после броска вертикальная составляющая скорости уменьшится на gt и будет равна $v_0 \sin\alpha - gt$, а горизонтальная составляющая не будет меняется.

$\diamondsuit$ **Пример 1.3.1** Камень бросают со скоростью v под углом α к горизонту. Через какое время угол наклона скорости к горизонту уменьшится в 2 раза?



К примеру 1.3.1



К решению 1.3.1

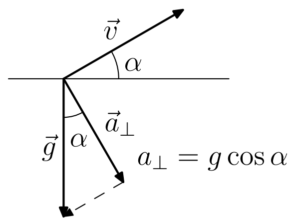
$\diamondsuit$ *Решение*: Вертикальная составляющая скорости в момент броска равна $v\sin\alpha$, а через время t равна $v\cos\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$ (См. рисунок к примеру). Значит, время

$$t = v\sin\alpha - v\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}(\alpha/2) = v\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

На рисунке изображены вектор скорости $\vec{v}$ и вектор ускорения $\vec{a}$. Штрихованной линией изображена траектория тела. За время dt составляющая ускорения $a_{\|}$, параллельная скорости, изменит величину скорости на $a_{\|}dt$, а составляющая ускорения $a_{\perp}$, перпендикулярная вектору скорости,изменит направление скорости тела на угол $d\varphi = a_{\perp}dt/v$, и тело будет двигаться по дуге окружности радиуса $R = v^2/a_{\perp}$. Величина R называется радиусом кривизны траектории.

Пример 1.3.2 Определите максимальный и минимальный радиус кривизны траектории снаряда, выпущенного под углом α к горизонту со скоростью v. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

◇ *Решение*: Максимальный радиус кривизны будет в начале полёта снаряда, когда $a_{\perp}$ минимально (см. рис.), а скорость снаряда максимальна и равна v: $R_{max} = v^2/g\cos\alpha$. Минимальный радиус кривизны траектории будет на максимальной высоте, когда скорость снаряда минимальна и равна $v\cos\alpha$, а $a_{\perp} = g$ — максимально: $R_{min} = v^2\cos^2\alpha/g$.



К примеру 1.3.2

Задачи к § 1.3

1.3.1 а) Камень бросают со скоростью v под углом α к горизонту. Определите время полёта камня.

б) Решите задачу а) в случае, когда камень бросают с высоты h.

1.3.2 Пушка стреляет под углом α к горизонту. Скорость снаряда в момент выстрела v_0. Как зависит от времени скорость и расстояние снаряда от пушки?

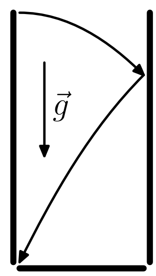
1.3.3 Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость броска $8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, и направлена под углом $60°$ к горизонту. С какой скоростью мяч влетел в кольцо, если он долетел до него за 1 с?

1.3.4 С высоты h бросают камень под углом к горизонту. После прохождения точки наивысшего подъёма, находящейся на высоте H от поверхности земли, за оставшееся время падения он переместился по горизонтали на расстояние S. Найти величину начальной скорости камня.

1.3.5 Спортсмен толкает ядро под углом $45°$ к горизонту со скоростью $20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через какое время после толчка угол наклона скорости к горизонту уменьшится до $30°$?

1.3.6 Камень бросили с крутого берега вверх под углом $30°$ к горизонту со скоростью $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. С какой скоростью он упал в воду, если время полёта камня 2 с?

◇ 1.3.7 С балкона, находящегося на высоте 20 м, бросают мяч со скоростью 20 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Мяч упруго ударяется о стену соседнего дома и падает на землю под балконом. Определите расстояние до соседнего дома, если время полёта мяча 1.4 с.



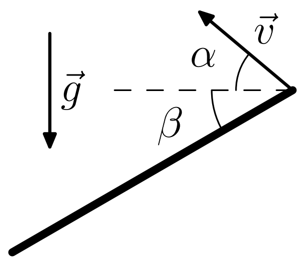
К 1.3.7

1.3.8 а) Зенитный снаряд, взлетающий вертикально, через время τ достигает максимальной высоты и взрывается. Скорость осколков в момент взрыва равна v. Какой участок земли засыпят осколки через время τ после взрыва?

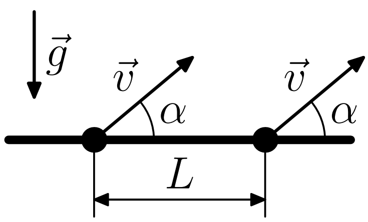
б) На каком участке окажутся осколки задачи а), когда все они упадут на землю?

1.3.9 а) Со склона с углом α к горизонту бросают камень в горизонтальном направлении со скоростью v. Через какое время камень упадёт на склон? На каком расстоянии от места броска будет место падения камня?

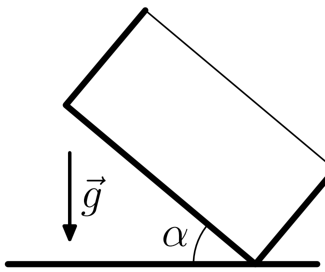
◇ б) Из миномёта, расположенного на склоне горы, ведут стрельбу вниз по склону, образующему угол β с горизонтом. На каком расстоянии от миномёта будут падать мины, если их начальная скорость v направлена под углом α к горизонту?



К задаче 1.3.9 б)



К задаче 1.3.12



К задаче 1.3.13

1.3.10 Самолёт пролетает над зенитной пушкой на высоте h со скоростью v, которая направлена горизонтально. Под каким углом к горизонту должна в этот момент выстрелить пушка, и какова должна быть скорость снаряда, чтобы поразить самолёт?

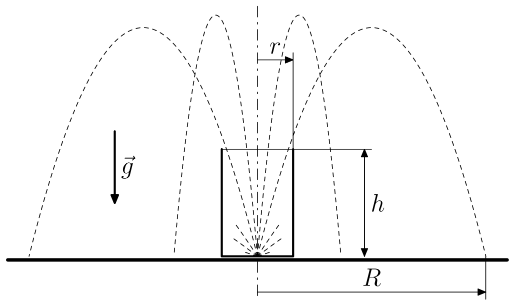
1.3.11 С какой скоростью в момент старта ракеты должен вылететь из пушки снаряд, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением a, если расстояние от пушки до места старта ракеты равно ℓ, и пушка стреляет под углом α к горизонту?

◇ 1.3.12 На расстоянии L друг от друга находятся две одинаковые пушки, стволы которых направленны в одну сторону под углом α к горизонту. Начальная скорость снаряда v. На какой высоте можно поразить снаряд одной пушки снарядом другой?

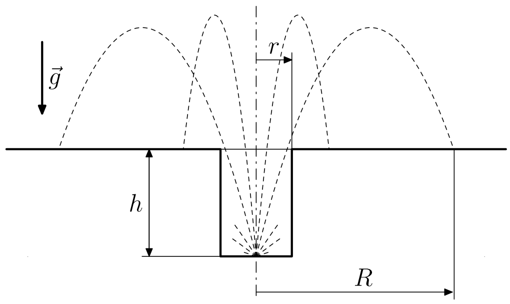
◊ 1.3.13 В прямоугольной коробке, упруго ударяясь о дно и правую стенку, по одной траектории туда и обратно прыгает шарик. Промежуток времени между ударами о дно и стенки равен T. Дно коробки образует угол α с горизонтом. Определить минимальную скорость шарика.

1.3.14 В сферической лунке радиуса R, упруго отражаясь от стенок лунки, по одной траектории туда и обратно движется шарик. Места ударов находятся на одной горизонтали. Время от удара до удара T. Определить скорость шарика в момент удара.

1.3.15 Из миномёта выстреливают под углом α к горизонту. Скорость вылетающей мины v. Через какое время мина будет на максимальном расстоянии от миномёта?



К задаче 1.3.16 а)



К задаче 1.3.16 б)

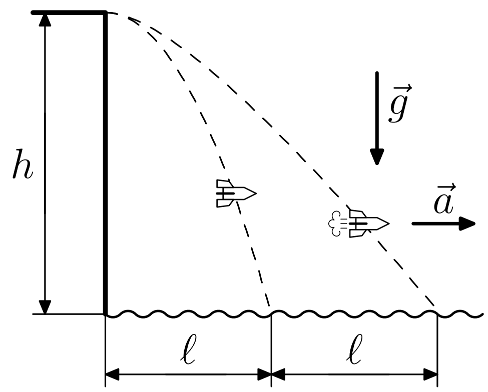
◊ 1.3.16 а) После взрыва снаряда, лежащего в центре дна прочного стакана, осколки снаряда, вылетевшие из стакана, усеяли область радиуса R вокруг него. Высота стакана h, радиус r. осколки разлетелись в момент взрыва во все стороны с одинаковой скоростью. Определите эту скорость.

◊ б) После взрыва снаряда, лежащего в центре дна цилиндрического колодца глубины h и радиуса r, осколки снаряда, вылетевшие из колодца, усеяли область радиуса R вокруг него. Осколки в момент взрыва разлетелись во все стороны с одинаковой скоростью. Определите эту скорость.

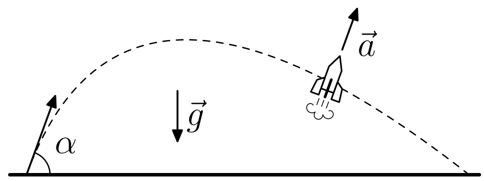
1.3.17 С какой минимальной скоростью можно перебросить камень через здание высоты H с куполообразной крышей радиуса R?

1.3.18 а) С какой скоростью должен скользить шарик радиуса r по горизонтальной доске, чтобы, достигнув края доски, оторваться от неё?

б) Горизонтальная доска имеет на конце закругление радиуса R. С какой скоростью должен скользить по доске шарик радиуса r, чтобы, достигнув начала скругления доски, оторваться от неё?



К задаче 1.3.19



К задаче 1.3.21

$\diamondsuit$ 1.3.19 Какое дополнительное ускорение в горизонтальном направлении должен развить реактивный снаряд, выстреливаемый горизонтально с высоты h, чтобы удвоить дальность полёта в сравнении с дальностью ℓ, которая была при выключенном двигателе.

1.3.20 Ракета на старте развивает дополнительное ускорение a под углом α к горизонту, $a > g\sin\alpha$. Через время τ после старта тяга выключается. Определите длительность и дальность полёта ракеты.

$\diamondsuit$ 1.3.21 Из орудия под углом α к горизонту произведён выстрел реактивным снарядом. Начальная скорость снаряда v, и он сразу же после выстрела развивает постоянное дополнительное ускорение a в направлении выстрела. Определите время полёта, дальность полёта и максимальную высоту подъёма снаряда.

1.4 Движение с переменным ускорением

Тело только в редких случаях в течение длительного времени движется с постоянным ускорением. Чем меньше рассматриваемый промежуток времени, тем меньше меняется ускорение. В предельно малом промежутке времени dt ускорение постоянно, и изменение скорости в этот промежуток времени определяется формулой:

$$d\vec{v} = \vec{a}dt,$$

где вектор $\vec{a}$ называется *мгновенным ускорением* или ускорением.

Пример 1.4.1 По прямой линии движутся два тела. Расстояние, которое проходит за время t первое тело, равно Ct^2, а второе Ct^3. Как меняется со временем скорость и ускорение этих тел?

Решение: Скорость и ускорение первого тела в момент времени t определяется равенствами:

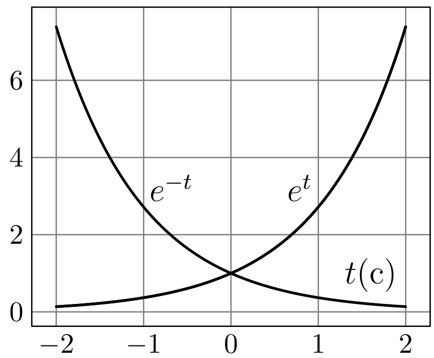
$$v = \frac{C(t+dt)^2 - Ct^2}{dt} = 2Ct + Cdt \underset{dt\to 0}{=} 2Ct,$$
$$a = \frac{2C(t+dt) - 2Ct}{dt} = 2C,$$

а скорость и ускорение второго тела — равенствами:

$$v = \frac{C(t+dt)^3 - Ct^3}{dt} = 3Ct^2 + 3Ctdt + C(dt)^2 \underset{dt\to 0}{=} 3Ct^2,$$
$$a = \frac{3C(t+dt)^2 - 3Ct^2}{dt} = 6Ct + 3Cdt \underset{dt\to 0}{=} 6Ct,$$

так как dt стремится к 0.

Зависимость $Ce^{\alpha t}$ называется *экспоненциальной зависимостью*, а $e^{\alpha t}$ — экспонентой с показателем α. Через промежуток времени $\tau = 1/|\alpha|$ экспонента с положительным показателем α увеличится в $e = 2.718281828459045\ldots$ раз, а с отрицательным — во столько же раз уменьшится. Экспоненциальное возрастание и затухание имеет место тогда, когда скорость изменения величины x пропорциональна x: $\frac{dx}{dt} = \alpha x$. Показатель экспоненты равен коэффициенту пропорциональности α. Поэтому, когда α положительно, и скорость изменения величины тем больше, чем больше эта величина, имеет место экспоненциальное возрастание этой величины, а когда α отрицательно, и скорость уменьшения величины тем меньше, чем меньше величина, имеет место экспоненциальное затухание этой величины. На рисунке выше изображена возрастающая и затухающая экспонента с $1/|\alpha| = 1$ с.



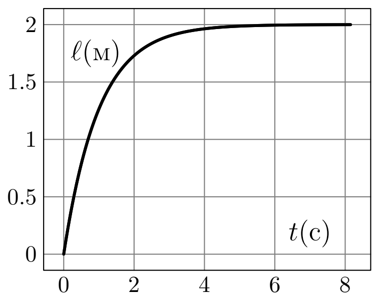
Экспонента

Пример 1.4.2 Чем меньше скорость лодки v, тем слабее она тормозится: $a = dv/dt = -\alpha v$. Какое расстояние пройдёт лодка, которой сообщили скорость v_0, до её остановки? Как зависит путь, пройденный лодкой от времени?

♢ *Решение*: Уменьшение скорости $(-dv) = \alpha v dt = \alpha d\ell$ — пропорционально пройденному пути $d\ell$. Поэтому искомое расстояние $\ell = v_0/\alpha$, так как скорость лодки уменьшилась на v_0. Скорость изменения скорости пропорциональна скорости, Коэффициент пропорциональности равен $-\alpha$. Поэтому скорость убывает экспоненциально: $v = v_0 e^{-\alpha t}$, т. е.:

$$\ell = (v_0/\alpha)(1 - e^{-\alpha t}),$$

так как за время t скорость уменьшилась на $v_0(1 - e^{-\alpha t})$.



Движения лодки когда $\alpha = 1\,\text{с}^{-1}$ и $v = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Зависимость расстояния от времени изображена на рисунке в случае, когда $\alpha = 1\,\text{с}^{-1}$ и $v = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Если чуть отклонить маятник, а затем отпустить его, то он будет двигаться к положению равновесия с ускорением тем большим, чем больше его отклонение x:

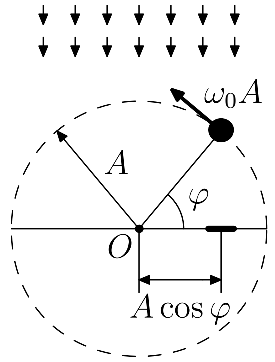
$$a = -\omega_0^2 x,$$

ω_0^2 — положительная постоянная величина, разная у разных маятников. Подобная зависимость ускорения тел при малых отклонения от положения устойчивого равновесия универсальна, и поэтому вблизи равновесия все тела движутся синусоидально:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\sin(\omega_0 t + \varphi + \pi/2).$$

При малых колебаниях тела вблизи равновесия амплитуда колебаний A и фаза φ могут иметь любые значения, но ω_0 — *угловая частота колебаний* — для этого тела является неизменной величиной.

♢ **Пример 1.4.3** На рисунке изображено небольшое тело, которое движется со скоростью $\omega_0 A$ по окружности радиуса A. В нулевой момент времени радиус, соединяющий тело с центром окружности, образует с осью X угол φ. На ось X падает перпендикулярно световой поток. Как зависит от времени расстояние тени тела до центра окружности, а также скорость и ускорение тела?



К примеру 1.4.3

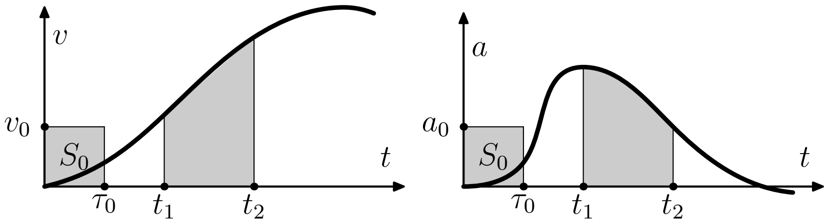
Решение: Расстояние тени до центра окружности O в момент времени t определяется формулой:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

а скорость и ускорение тени — формулами:

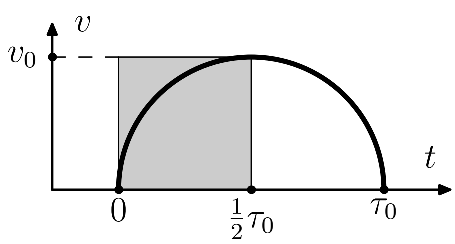
$$\begin{aligned} v &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ a &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x. \end{aligned}$$

Этот результат можно получить, если спроектировать скорость и ускорение на ось X. Таким образом, тень тела, движущегося по окружности радиуса A со скоростью $A\omega_0$, повторяет колебательное движение тела с амплитудой A и фазой φ в случае, если угловая частота колебаний равна ω_0.



Когда скорость и ускорение сложным образом зависят от времени, например так, как это изображено на рисунке, то используется графический метод. В первом случае расстояние, пройденное телом за время t_2–t_1, равно площади закрашенной фигуры, сначала делённой на площадь S_0, а затем умноженной на $v_0\tau_0$. Во втором случае изменение скорости за время t_2–t_1 равно заштрихованной площади, делённой на S_0, а затем умноженной на $a_0\tau_0$.

◇ **Пример 1.4.4** График зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности. Максимальная скорость тела v_0, время движения τ_0. Определите путь, пройденный телом.



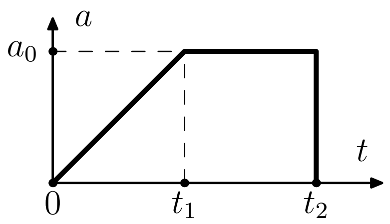
Решение: Площадь заштрихованного квадрата (см. рис.) равна R^2, если R — радиус полуокружности. Она соответствует пути $\frac{1}{2}v_0\tau_0$. Путь ℓ, пройденный телом во столько раз больше $\frac{1}{2}v_0\tau_0$, во сколько раз площадь полуокружности больше площади квадрата. Поэтому:

$$\ell = \frac{1}{2}v_0\tau_0\left(\frac{1}{2}\pi R^2/R^2\right) = \frac{1}{4}\pi v_0\tau_0.$$

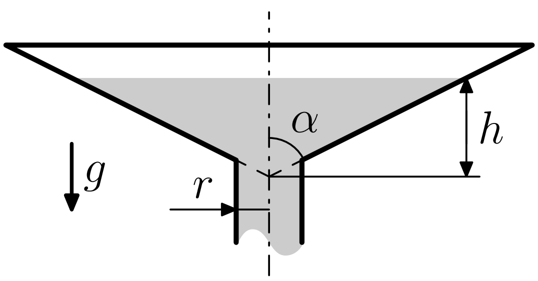
Задачи к § 1.4

1.4.1 Стартуя, гонщик линейно наращивает ускорение своего автомобиля. Через время τ после старта он имел скорость v. На каком расстоянии от старта он находился в это время?

1.4.2 Ускорение сначала неподвижного тела в течение времени τ линейно увеличилось с 0 до a, а затем с такой же скоростью уменьшилось до 0. Определить максимальную скорость тела.



К задаче 1.4.3



К задаче 1.4.6

◇ 1.4.3 Зависимость ускорения ракеты от времени изображена на рисунке. Определите скорость и расстояние ракеты от места старта в момент времени $t > t_2$.

1.4.4 Мальчик начал надувать воздушный шарик, и через время t его радиус стал R. С какой скоростью в этот момент времени двигалась поверхность шарика, если считать, что шарик раздувался равномерно?

1.4.5 Через какое время исчезнет капля радиуса R, если с единицы поверхности в единицу времени испаряется объём жидкости q?

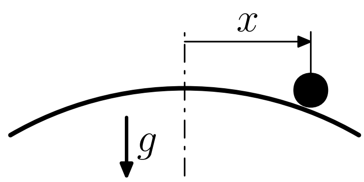
◇ 1.4.6 Из конической воронки с углом α при вершине конуса через трубку радиуса r со скоростью v_0 вытекает жидкость. В нулевой момент времени уровень жидкости в воронке находится на расстоянии h от вершины конуса. Как зависит от времени скорость движения уровня жидкости?

1.4.7 Нефть, равномерно вытекающая из танкера, потерпевшего аварию, через время t_0 растеклась по воде вокруг него в радиусе R. Толщина слоя нефти h. Какой объём нефти в единицу времени вытекает из танкера? С какой скоростью увеличивается радиус пятна через время t после аварии?

1.4.8 Через 2 с после толчка скорость лодки уменьшилась в два раза. Во сколько раз уменьшится скорость лодки через 10 с после толчка, если торможение лодки пропорционально её скорости?

1.4.9 Скользящая с постоянной скоростью шайба попадает на вязкую дорожку ширины h, на которой ускорение шайбы отрицательно и линейно зависит от скорости: $a = -\alpha v$. На сколько уменьшится скорость шайбы после дорожки?

◊ 1.4.10 а) Если шарик скатывается с горки, то его ускорение пропорционально расстоянию x до вершины горки: $a = \alpha^2 x$. Докажите, что ускорение так зависит от расстояния x до вершины горки, когда расстояние x следующим образом зависит от времени: $x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.



К задаче 1.4.10

б) В задаче а) на вершине горки шарик имеет скорость v_0. На каком расстоянии от вершины будет находиться шарик и какую скорость он будет иметь спустя время t?

1.4.11 Определите, пользуясь рисунком к примеру 1.4.3 на стр. 18, период колебания тела вблизи равновесия, если его максимальная скорость v_0, а максимальное отклонение от положения равновесия x_0.

1.4.12 Колеблющееся вблизи равновесия тело за время 0.01 с сместилось на расстояние 0.5 см от положения равновесия до наибольшего, равного 1 см. Каков период колебания тела?

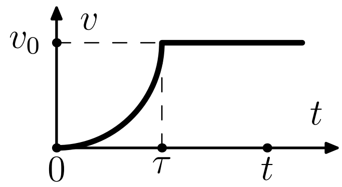
1.4.13 Зависимость скорости центра мяча при ударе его о стенку — полупериод косинусоиды: $v = v_0 \cos(\omega t)$, $0 < t < \pi/\omega$, если время отсчитывается от начала контакта мяча со стенкой. Определите путь, пройденный мячом в направлении к стенке во время контакта с нею, пользуясь рисунком к примеру 1.4.3 на странице 18.

1.4.14 Горизонтальная мембрана совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой A. На мембране лежит грузик. При каких амплитудах A он будет колебаться вместе с мембраной, а при каких начнёт подскакивать? Ускорение свободного падения равно g.

◊ 1.4.15 а) Зависимость скорости тела от времени изображена на рисунке а). Кривая линия на этом рисунке — четверть окружности. Начиная с момента времени τ, тело движется с постоянной скоростью v_0. Определите путь, пройденный телом за время t, если $t > \tau$.

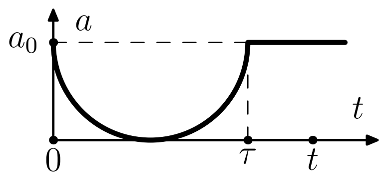
◊ б) Зависимость ускорения тела от времени изображена на рисунке б). Кривая линия на графике состоит из полуокружности. Начиная с момента времени τ, тело движется с постоянным ускорением a_0. Определите скорость тела в момент времени t, если $t > \tau$.

1.4.16 Мотоциклист, движущийся со скоростью $72\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$, на повороте радиуса 200 м тормозит и через 20 с останавливается. Скорость на повороте вплоть до остановки мотоциклиста уменьшалась линейно от времени. Чему равно нормальное и полное ускорение в начале поворота? Изобразите это ускорение на рисунке.



К задаче 1.4.15 а)

1.4.17 а) Тело движется по окружности радиуса R со скоростью, которая линейно зависит от времени: $v = a_0 t$. Как зависит от времени полное ускорение тела?



К задаче 1.4.15 б)

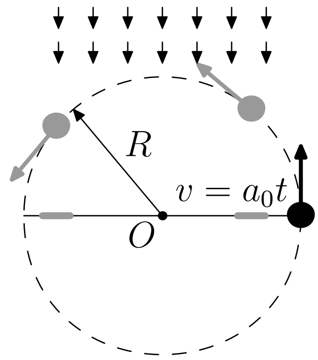
б) Решите задачу а) в случае, если скорость квадратично зависит от времени: $v = \alpha t^2$.

◊ 1.4.18 По окружности радиуса R движется тело, скорость которого пропорциональна времени $v = a_0 t$. В нулевой момент времени тело находилось на оси справа от центра окружности. Тело освещается светом, падающим перпендикулярно к оси x. Чему равна скорость и ускорение тени тела на ось x в момент времени t?

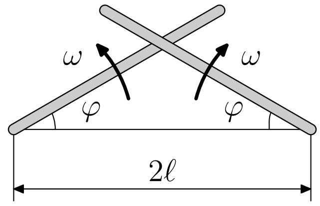
1.4.19 Частица движется по спирали радиуса R и с шагом h. Чему равно ускорение частицы, если она движется по спирали с постоянной по величине скоростью v_0? Если её скорость линейно увеличивается по закону $v = a_0 t$.

◊ 1.4.20 Определить скорость линии пересечения двух лучей прожекторов, которые вращаются в противоположных направлениях с угловой скоростью ω, в момент, когда угол к горизонту обоих прожекторов равен φ. Расстояние между прожекторами равно 2ℓ.

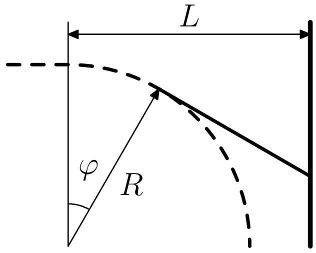
◊ 1.4.21 Автомобиль с включёнными фарами движется со скоростью v_0 перпендикулярно стене. На расстоянии L от стены он делает поворот радиуса R. Как зависит скорость световых пятен от лучей фар, от угла поворота автомобиля, от времени движения на повороте? Скорость автомобиля постоянна.



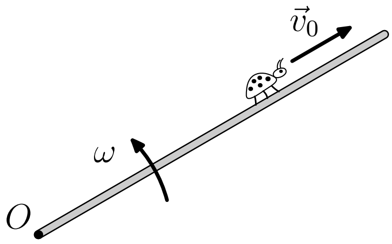
К задаче 1.4.18



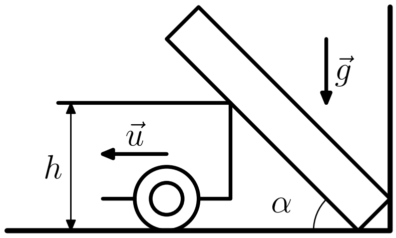
К задаче 1.4.20



К задаче 1.4.21



К задаче 1.4.22



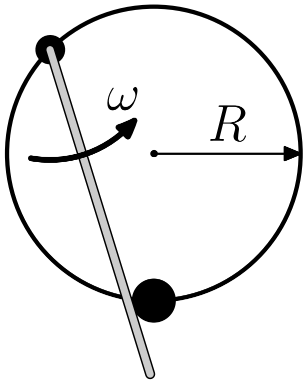
К задаче 1.4.23

♢ 1.4.22 По палочке, которая вращается вокруг точки O так, как показано на рисунке, ползёт жук. Угловая скорость палочки ω. Жук удаляется от центра O со скоростью v_0. Определите скорость и ускорение жука на расстоянии ℓ от точки O.

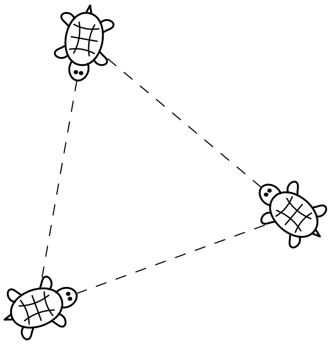
♢ 1.4.23 Бревно, упираясь нижним концом в угол между стенкой и землёй, касается кузова грузовика на высоте h от земли. Длина бревна ℓ. Определите скорость и ускорение верхнего конца бревна в зависимости от угла α между бревном и горизонталью, если грузовик отъезжает от стены со скоростью u.

♢ 1.4.24 Бусинка может двигаться по кольцу радиуса R, подталкиваемая спицей, которая равномерно вращается с угловой скоростью ω в плоскости кольца. Ось вращения спицы находится на кольце. Определите максимальное ускорение бусинки.

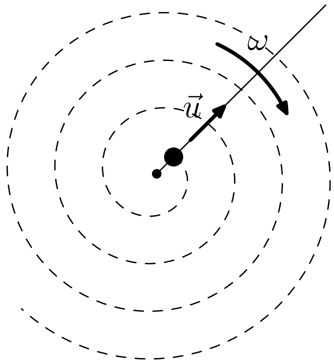
1.4.25 Скорость протяжки магнитофонной плёнки v_0. Начальный радиус бобины (с плёнкой) R, а конечный (без плёнки) r. Толщина плёнки h, $h \ll r$. Как зависит от времени радиус бобины? С какой скоростью он уменьшается?



К задаче 1.4.24



К задаче 1.4.27 б)



К задаче 1.4.28

1.4.26 За лисой, бегущей прямолинейно с постоянной скоростью v, гонится собака со скоростью u, скорость которой всегда направлена на лису. В момент, когда векторы скоростей собаки и лисы перпендикулярны, расстояние между ними ℓ. С каким ускорением двигалась в этот время собака?

1.4.27 а) Четыре черепахи находятся в нулевой момент времени в вершинах квадрата со стороной ℓ. Они двигаются с постоянной по величине скоростью v. Каждая черепаха движется по направлению к своей соседке по часовой стрелке. С каким ускорением двигаются черепахи в нулевой момент времени? В момент времени t?

$\diamondsuit$ б) Три черепахи находятся в нулевой момент времени в вершинах правильного треугольника со стороной ℓ. Они двигаются с постоянной скоростью v, каждая по направлению к своей соседке. Их движение происходит по часовой стрелке. Где встретятся черепахи и в какой момент времени? С каким ускорением двигались черепахи в нулевой момент времени? В момент времени t?

$\diamondsuit$ 1.4.28 По палочке, которая вращается вокруг своего конца с угловой скоростью ω, движется бусинка, удаляясь от центра со скоростью u. Как зависит радиус кривизны траектории бусинки от расстояния до центра вращения?

1.5 Кинематика твёрдого тела

При поступательном движении твёрдого тела скорости всех его точек одинаковы (Рис. 1.5.1). При вращательном движении скорость любой точки твёрдого тела перпендикулярна радиусу $\vec{r}$, который соединяет эту точку с осью вращения O (Рис. 1.5.2). Величина скорости при вращательном движении пропорциональна r:

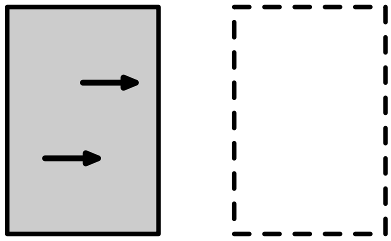


Рис. 1.5.1.

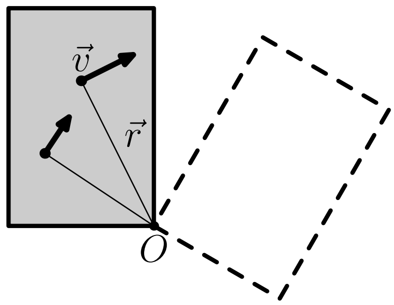


Рис. 1.5.2.

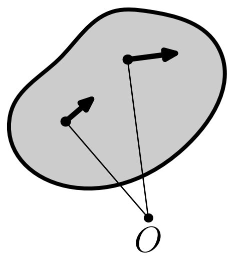


Рис. 1.5.3.

$$v = \omega r,$$

где ω — угловая скорость тела. В течение малого промежутка времени dt любое движение твёрдого тела можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг точки, которая в этот момент времени неподвижна. Эта точка называется мгновенной осью вращения (Рис. 1.5.3).

Движение твёрдого тела, имеющего ось симметрии, чаще всего рассматривается как наложение вращательного движения вокруг оси симметрии и поступательного движения. Колесо радиуса R, изображённое на рисунке, катится по плоскости со скоростью v. В любой момент времени это движение можно представить как мгновенное вращение с угловой скоростью $\omega = v/R$ по часовой стрелки вокруг точки касания колеса с плоскостью. Но можно представить это движение как наложение поступательного движения колеса со скоростью v и его вращения вокруг центра колеса с угловой скоростью $\omega = v/R$ по часовой стрелке.

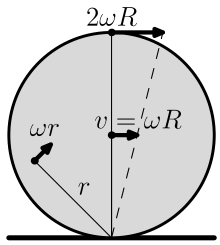
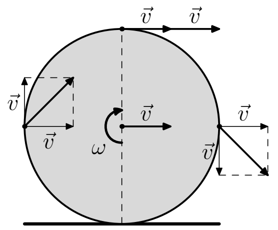
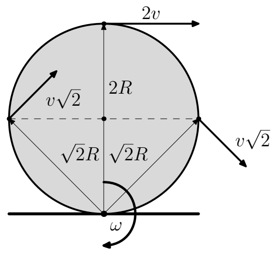


Рис. 1.5.4.

Пример 1.5.1 Определите скорость на ободе диска радиуса R в верхней части обода и на уровне центра диска, который катится по плоскости со скоростью v.



К решению 1.5.1 а)



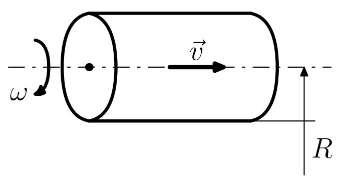
К решению 1.5.1 б)

◇ *Решение*: Движение диска должно быть таким, чтобы нижний участок диска был неподвижен, так как диск катится, а не скользит. Это происходит при наложении поступательного движения со скоростью v и такого вращения по часовой стрелке вокруг центра диска, когда скорости участков диска на ободе равны v (см. рис. а)). Наложение этих двух движений даёт на ободе нулевую скорость внизу, скорость $2v$ наверху и скорость $\sqrt{2}v$ на уровне центра.

Это же движение можно рассматривать и как мгновенное вращение диска вокруг нижней точки с угловой скоростью $\omega = v/R$ по часовой стрелке, когда мгновенный центр вращения перемещается со скоростью v (см. рис. б)). В этом случае верхний участок обода движется со скоростью $v_\text{в} = \omega \cdot 2R = 2v$, а участки обода на уровне центра — со скоростью $v_\text{ц} = \omega \cdot R\sqrt{2} = v\sqrt{2}$.

Задачи к § 1.5

1.5.1 Скорость на краю наждачного диска $v_\text{к} = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Радиус диска $R = 20$ см. Сколько оборотов он делает в секунду? Какова его угловая скорость? С какой скоростью движутся участки диска на расстоянии $r = 10$ см от оси вращения?



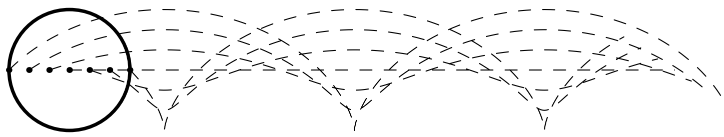
К задаче 1.5.2

◇ 1.5.2 Цилиндрический снаряд, летящий в направлении своей оси со скоростью v, одновременно вращается вокруг этой оси с угловой скоростью ω. Определите минимальную и максимальную скорость на поверхности снаряда, если радиус снаряда R.

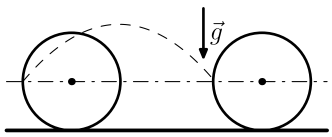
1.5.3 Определите скорость Земли, связанную с её вращением вокруг Солнца. На сколько меняется величина этой скорости из-за движения Земли вокруг своей оси? Расстояние до Солнца $1.5 \cdot 10^8$ км, радиус Земли $6.4 \cdot 10^3$ км.

1.5.4 Луна обращена к Земле одной стороной. Расстояние от Земли до Луны $3.8 \cdot 10^5$ км, радиус Луны $1.7 \cdot 10^3$ км. На сколько отличается скорость поверхности Луны в точке наиболее близкой к Земле и наиболее удалённой от неё?

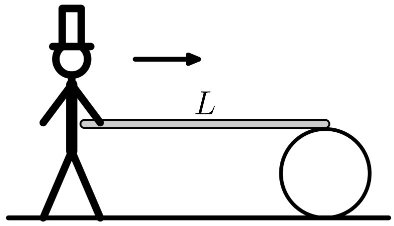
1.5.5 а) Автомобиль движется без проскальзывания колёс со скоростью v_0. Определите максимальную скорость на ободе колеса.



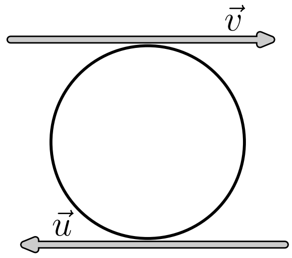
К задаче 1.5.8



К задаче 1.5.9



К задаче 1.5.10



К задаче 1.5.11

б) Чему равны скорости верхних участков гусеницы трактора, который движется со скоростью v_0? Как меняется скорость этих участков в зависимости от их расстояния до земли h, если радиус колеса трактора R?

1.5.6 Диск радиуса R катится по плоскости со скоростью v.

а) Определите скорости точек на ободе диска на уровне $\frac{1}{2}R$ и $\frac{3}{2}R$ от поверхности.

б) Определите минимальную и максимальную скорость точки, которая находится на расстоянии r от центра диска, $r < R$.

в) Чему равно ускорение точек на ободе диска? На расстоянии r от центра диска (r<R)?

1.5.7 Как зависит ускорение точек на ободе колеса радиуса R в верхней части обода и на уровне центра от его скорости, если колесо катится с ускорением a_0?

$\diamondsuit$ 1.5.8 а) На каком расстоянии находятся соседние вершины траектории точки обода диска радиуса R, который катится по плоскости? Как зависит радиус кривизны траектории от расстояния до плоскости?

Эта траектория называется цикло́идой от греческого $\varkappa\upsilon\varkappa\lambda o\varepsilon\iota\delta\zeta$ — кругообразный, круглый. На рисунке представлен пример циклоиды.

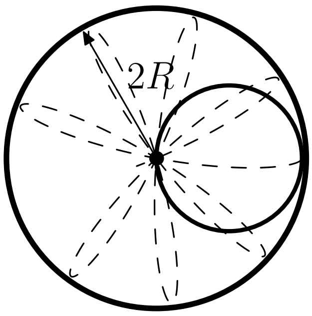
б) Решите задачу а) для траектории точки, которая находится на расстоянии r от центра диска, $r < R$.

$\diamondsuit$ 1.5.9 Колесо радиуса R катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. От задней точки колеса, находящейся на уровне оси отрывается комочек грязи. С какой скоростью движется колесо, если комочек опустился на то же место, с которого он оторвался?

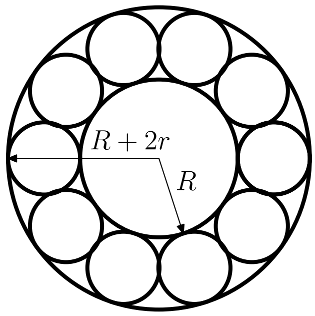
$\diamondsuit$ 1.5.10 Человек держит один край длинной доски. Второй её край лежит на круглой бочке. Человек, толкая доску, идёт к бочке. Какое расстояние он пройдёт, прежде чем приблизится к ней? Доска параллельна полу. Проскальзывание между доской и бочкой, бочкой и полом отсутствует. Длина доски L.

$\diamondsuit$ 1.5.11 а) Шарик радиуса R находится между двумя параллельными плоскостями, одна из которых движется вправо со скоростью v, а вторая — влево со скоростью u. Проскальзывания между плоскостями и шариком нет. С какой скоростью движется центр шарика? С какой угловой скоростью вращается шарик относительно оси, проходящей через его центр?

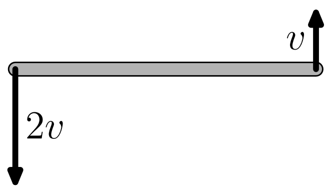
б) Решите задачу а) в случае, когда скорости $\vec{v}$ и $\vec{u}$ образуют угол α.



К задаче 1.5.12



К задаче 1.5.13

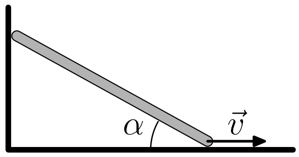


К задаче 1.5.14

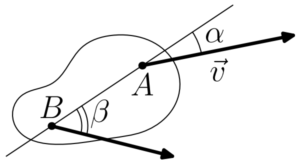
$\diamondsuit$ 1.5.12 По внутренней поверхности закреплённого цилиндра радиуса $2R$ катится без проскальзывания колесо радиуса R. Как зависит от времени скорость и ускорение точки обода? За начало отсчёта времени возьмём момент, когда точка соприкасается с поверхностью цилиндра.

$\diamondsuit$ 1.5.13 Внутренний радиус подшипника R, внешний — $(R+2r)$. Определите скорость шариков, когда внешняя часть подшипника, которая опирается на шарики, двигается с угловой скоростью ω, а внутренняя часть неподвижна. Проскальзывания шариков с поверхностями, с которыми они имеют контакт, нет.

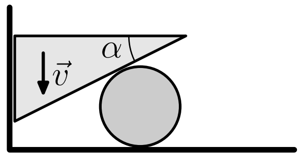
$\diamondsuit$ 1.5.14 Скорости концов палки длины ℓ равны v и $2v$, перпендикулярны палке и направлены в разные стороны. На каком расстоянии от ближайшего конца находится неподвижный участок палки?



К задаче 1.5.15



К задаче 1.5.16



К задаче 1.5.17

$\diamondsuit$ 1.5.15 Стержень длины ℓ упирается своими концами в стороны прямого угла. Нижний конец стержня движется со скоростью v. С какой скоростью движется верхний конец стержня и его центр, когда стержень образует угол α с нижней стороной угла?

$\diamondsuit$ 1.5.16 Скорость точки A твёрдого тела образует угол α с прямой AB, а точки B — угол β. Скорость точки A равна v. Чему равна скорость точки B, если обе скорости лежат в плоскости чертежа? Чему равна скорость в центре прямой AB?

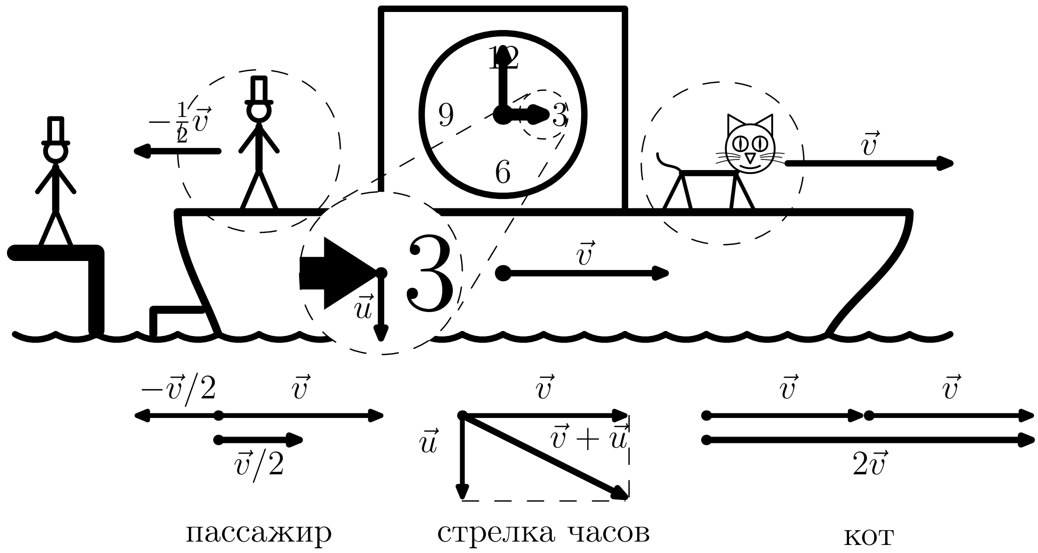
$\diamondsuit$ 1.5.17 Клин с углом α, движущийся со скоростью v по вертикальной стенке, заставляет двигаться по горизонтальной плоскости цилиндр радиуса R. С какой скоростью движется цилиндр? Чему равна угловая скорость цилиндра относительно его центра, если нет проскальзывания между цилиндром и горизонтальной плоскостью? Если нет проскальзывания между цилиндром и клином?

1.6 Преобразование Галилея

Когда скорости тел много меньше скорости света $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, из одного состояния движения можно получить другое, если к скоростям всех тел в первом состоянии прибавить постоянную скорость $\vec{v}$.

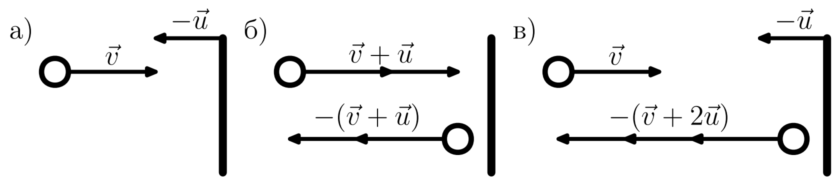
$\diamondsuit$ **Пример 1.6.1** Вы находитесь на пристани, от которой со скоростью $\vec{v}$ отплывает пароход. Данное событие схематично изображено на рисунке. С какой скоростью удаляются от Вас предметы на пароходе, выделенные на рисунке кружками? Скорости этих предметов относительно парохода указаны на рисунке.

$\diamondsuit$ *Решение*: На палубе относительно пристани все предметы приобретают дополнительную скорость $\vec{v}$ (см. рис.). Пассажир имеет скорость $\frac{1}{2}v$. Кот, бегущий по палубе, движется со скоростью $2v$, а конец стрелки часов — со скоростью $\sqrt{v^2 + u^2}$.



К примеру 1.6.1 Пристань и пароход

$\diamondsuit$ **Пример 1.6.2** При нормальном упругом ударе тела о неподвижную стенку его скорость $\vec{v}$ меняется лишь по направлению. Определите, на какую величину изменится после удара скорость этого тела, если стенка движется со скоростью $-\vec{u}$ навстречу телу.



К примеру 1.6.2 Упругий удар о движущуюся стенку

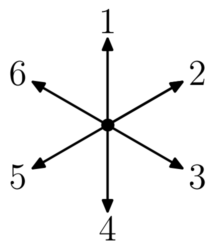
Решение: На рис. б) изображено отражение шарика, имеющего скорость $\vec{v}+\vec{u}$, от неподвижной стенки, (в) — состояние движения, полученное из первого состояния, когда скоростям всех тел прибавить скорость $(-\vec{u})$. В новом состоянии стенка движется со скоростью $(-\vec{u})$ навстречу шарику, летящему на стенку со скоростью $\vec{v}$. Отражённый шарик в этом состоянии летит от стенки с абсолютной скоростью $v+2u$. Значит, шарик при отражении от стенки увеличил свою абсолютную скорость на $2u$.

Пример 1.6.3 Две одинаковые космические станции движутся навстречу друг другу со скоростями v и $3v$. Определите скорости станции после их стыковки.

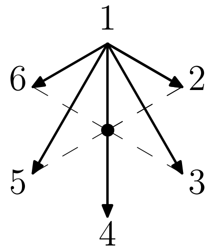
Решение: Две одинаковые станции, летящие навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $2v$, после стыковки останавливаются. Ситуация абсолютно симметричная. Если ко всем скоростям добавить скорость v в направлении движения какой-либо из станции, то мы получим картину движения, приведённую в условии задачи. Из описанного выше следует, что после стыковки станции будут двигаться со скоростью v.

◇ **Пример 1.6.4** На рис. а) изображены скорости шести зайцев, выпущенных старым Мазаем в системе координат, в которой Мазай неподвижен. Нарисуйте вектор скорости Мазая и векторы скоростей остальных зайцев в системе координат, в которой один из зайцев неподвижен.

Решение: Согласно принципу относительности Галилея, в системе координат, в которой один из зайцев, например, заяц 1, неподвижен, мир выглядит таким же, как и в неподвижной системе координат, если ко всем скоростям зайцев и Мазая прибавить скорость, которая равна по величине скорости зайца 1, но направлена противоположно. Эта ситуация представлена на рис. б).



К 1.6.4 а)



К 1.6.4 б)

Задачи к § 1.6

◇ 1.6.1 Пароход отчаливает от пристани со скоростью $\vec{v}$. С какой скоростью удаляются от пристани объекты, выделенные на рисунке? Скорости этих объектов указаны на рисунке.

◇ 1.6.2 а) При нормальном упругом ударе шарика о неподвижную поверхность его скорость меняет направление, но величина скорости не меняется. Определите, во сколько раз изменится скорость шарика при нормальном упругом ударе о стенку, которая движется со скоростью, в три раза меньшей, чем скорость шарика в том же направлении, что и шарик.

◇ б) Тело движется под углом 45° к плоскости стенки, как это изображено на рисунке. Стенка движется со скоростью $\vec{u}$, которая перпендикулярна плоскости стенки. Скорость тела до удара о стенку $\vec{v}$. Определите величину скорости тела после упругого удара о стенку.

в) Навстречу автомобилю «КАМАЗ» со скоростью $5.5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ летит упругий шарик. Скорость автомобиля «КАМАЗ» — $40\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Во сколько раз ско-

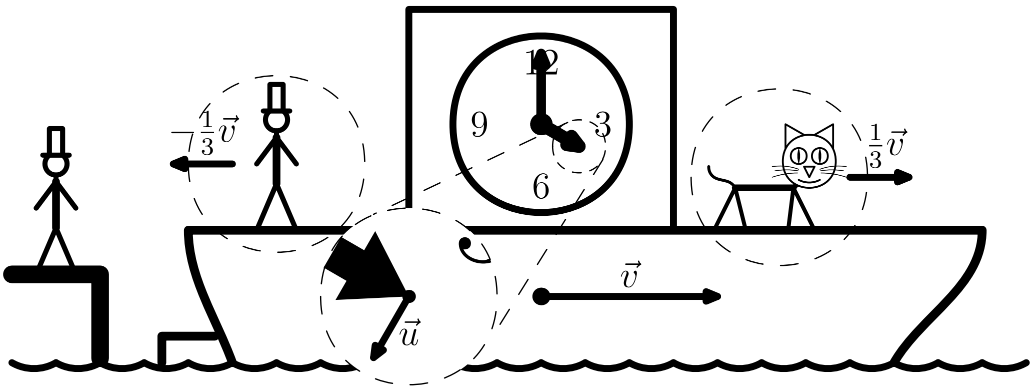
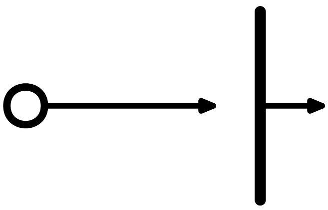
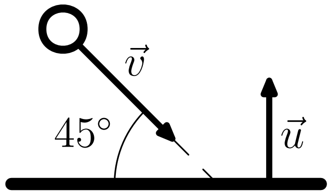


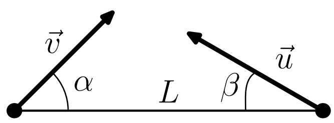
Рис. 1.6.5. К задаче №1.6.1



К задаче 1.6.2 (а)



К задаче 1.6.2 (б)



К задаче 1.6.4

рость шарика сразу же после удара будет больше скорости автомобиля «КАМАЗ»?

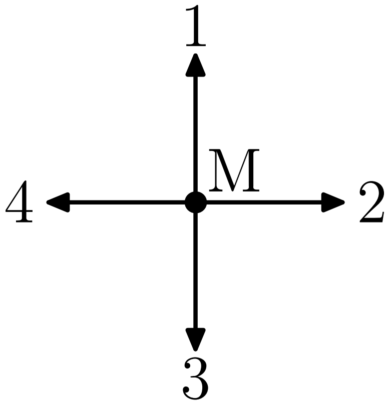
1.6.3 Две одинаковые космические станции летят навстречу друг другу со скоростями v и $5v$. Определите скорости этих двух станций после их стыковки.

◇ 1.6.4 Крейсер движется со скоростью $\vec{v}$, а миноносец со скоростью $\vec{u}$. Когда корабли были на расстоянии L, их скорости образовывали с линией, соединяющей корабли, углы α и β, соответственно. На каком минимальном расстоянии пройдут корабли друг от друга?

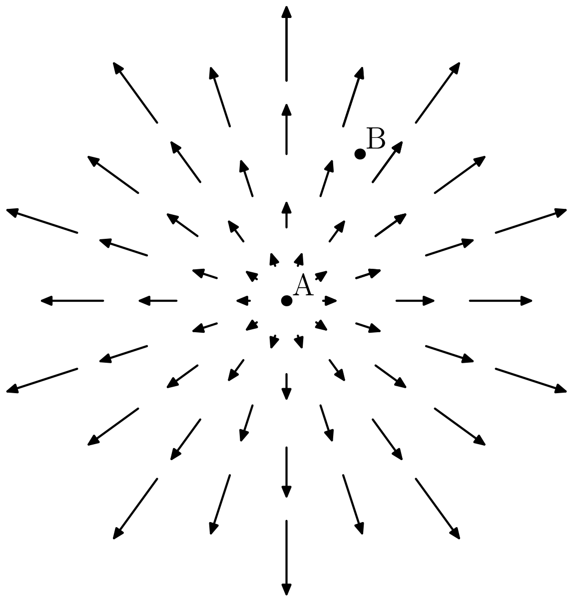
◇ 1.6.5 На рисунке изображены скорости четырёх зайцев, выпущенных Мазаем. Система координат выбрана такой, в которой Мазай неподвижен. Нарисуйте векторы скоростей остальных зайцев и Мазая в системе координат, в которой один из зайцев неподвижен.

◇ 1.6.6 Одна из частиц пылевого облака (частица А) покоится, а все остальные разлетаются от неё в различные стороны со скоростями пропорциональными расстоянию от частицы А. Какую картину движения обнаружит наблюдатель, движущийся вместе с частицей В?

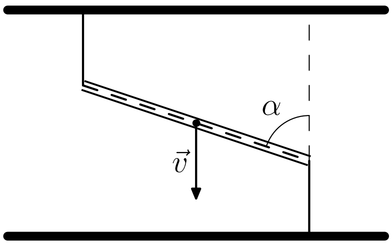
◇ 1.6.7 Нить, привязанная концами к потолку и полу, проходит через тонкую прямую трубу, как это показано на рисунке. В некоторый момент времени труба составляет угол α с вертикалью и движется со скоростью



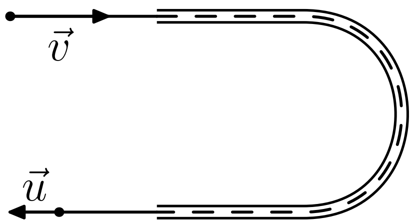
К задаче 1.6.5



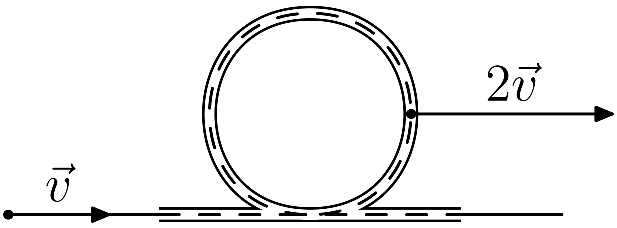
К задаче 1.6.6



К задаче 1.6.7



К задаче 1.6.8 а)



К задаче 1.6.8 б)

$\vec{v}$, которая направлена вниз. Участки нити вне трубы вертикальны. С какой скоростью движется в этот момент времени нить в трубе?

◇ 1.6.8 а) В U-образной тонкой трубе скользит упругая нить. Скорость входящего в трубу конца равна $\vec{v}$, выходящего — $\vec{u}$. С какой скоростью движется труба?

◇ б) Тонкая труба изогнута в виде почти замкнутой окружности. В этой трубе скользит упругая нить. Скорость участка нити, входящего в трубу $\vec{v}$, скорость трубы $2\vec{v}$. Обе скорости одинаково направлены. С какой максимальной скоростью движется участок нити в трубе?

1.6.9 а) В поток космической пыли влетает шар радиуса R. Скорость пылинок $\vec{v}$, скорость шара перпендикулярна скорости пылинок и равна

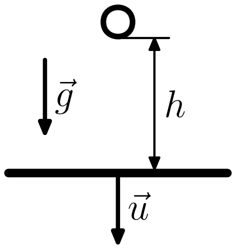
$\vec{u}$. Количество пылинок в единице объёма n, время пребывания шара в потоке T. Определите число пылинок, попавших на поверхность шара.

б) Решить задачу а), если в поток влетел цилиндр радиуса R и длины L. Ось цилиндра ориентирована вдоль его скорости. Как нужно изменить ориентацию цилиндра, чтобы количество пылинок, осевших на его поверхности, было минимальным?

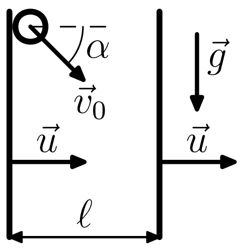
1.6.10 С угла квадратного плота спрыгнул пёс и плывёт вокруг плота, двигаясь вдоль его сторон. Нарисуйте траекторию движения пса относительно берега, если скорость пса относительно воды составляет половину скорости течения.

1.6.11 При порывах ветра капли дождя, ранее падавшие из-за ветра под углом α к горизонту, падают под более острым углом β. Во сколько раз увеличивается скорость ветра при порывах?

1.6.12 Скорость самолёта относительно воздуха u. Во сколько раз изменится длительность рейса самолёта туда и обратно, проходящего по прямой, если в течение всего полёта под углом α к траектории дует ветер со скоростью v.



К задаче 1.6.15



К задаче 1.6.16

1.6.13 а) Дым из выхлопной трубы автомобиля, который движется со скоростью v по просёлочной дороге, стелется под углом α к ней, а дым от костра — под углом β. Определите скорость ветра.

б) Два корабля идут встречным курсом с одинаковой скоростью v. Дым от одного корабля стелется под углом α, а от другого — под углом β к их общей трассе. Определите скорость ветра над морем.

в) Решите задачу б) в случае, если скорость первого корабля v_1, а второго v_2.

1.6.14 На быстрине скорость течения реки $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а на разливе реки — $5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Расстояние между берегами на быстрине 40 м, на разливе 100 м. Пловец плывёт прямо на берег. Где отнесёт его больше: на равнине или на быстрине?

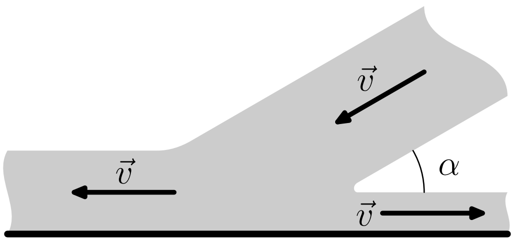
$\diamondsuit$ 1.6.15 Тело отпускают в поле тяжести на высоте h от горизонтально расположенной плиты, которая движется вниз со скоростью $\vec{u}$. Определите время между последовательными ударами тела о плиту. Удары абсолютно упругие. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

$\diamondsuit$ 1.6.16 Двигаясь в поле тяжести, тело влетает со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту в пространство между двумя вертикальными пластинами, которые движутся с постоянной скоростью $\vec{u}$, как показано на рисунке. Определите скорость тела после n-го удара. Расстояние между стенками много больше размеров тела и равно ℓ. Удары абсолютно упругие. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

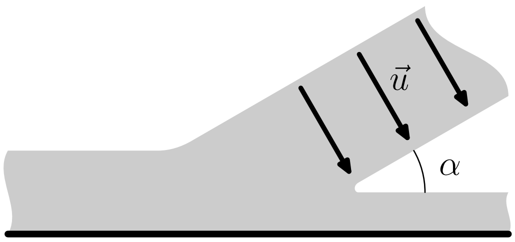
1.6.17 Ядра, движущиеся в пучке со скоростью u, распадаются на осколки. Экспериментатор измеряет скорости осколков, вылетающих в направлении, перпендикулярном пучку. Скорость осколков в этом направлении оказалась равной w. Нужно определить направление, в котором летят самые быстрые осколки, и их скорость.

1.6.18 Ядро, летящее со скоростью u, распадается на два одинаковых осколка. Определите максимально возможный угол между скоростью одного из осколков и первоначальной скоростью ядра, если при распаде покоящегося ядра осколки разлетаются со скоростью v, $v < u$.

1.6.19 Имеется пучок одинаковых ядер, движущихся параллельно со скоростью u. Ядра в пучке самопроизвольно делятся на два одинаковых осколка. Скорость осколков, движущихся в направлении пучка, в k раз больше скорости ядер. Найдите скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку.



К задаче 1.6.20 а)

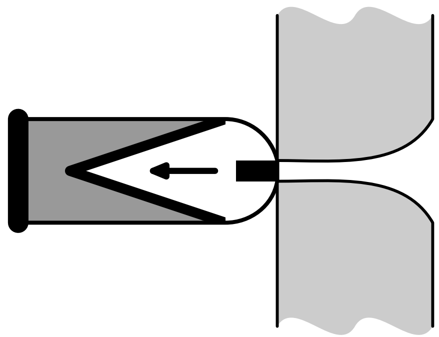


К задаче 1.6.20 б)

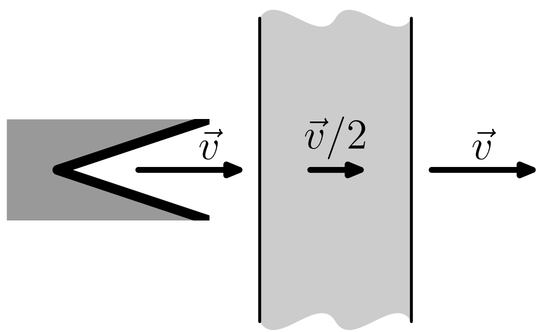
◇ 1.6.20 Скорость невязкой жидкости, падающей под углом α на жёсткую плоскость, вдали от места падения имеет одну и ту же величину, если скорость в падающей жидкости направлена вдоль струи (см. рис. а)). Определить минимальную и максимальную скорость жидкости, если скорость падающей жидкости направлена поперёк струи (см. рис. б)) и равна $\vec{u}$.

1.6.21 Две длинные и широкие пластины, расположенные под углом 2α друг к другу, движутся со скоростью u по нормали к своим поверхностям. Найдите скорость струй, возникающих при столкновении пластин, если движение материала пластин рассматривать как движение идеальной жидкости.

◇ 1.6.22 Академик М.А.Лаврентьев рассказывал: «...В 1941 году немцы придумали кумулятивный противотанковый снаряд. На конусе снаряда — запал. При ударе он вызывает детонацию и воспламеняет весь снаряд. Снаряд пробивает броню (рис. а)). В 1944 году такие снаряды



К задаче 1.6.22 а)



К задаче 1.6.22 б)

попали в наши руки и руки союзников. Начался широкий эксперимент. При этом обнаружили много дополнительных эффектов и парадоксов. Стали выяснять — что же летит, что пробивает? Сперва думали, что этот снаряд бронепрожигающий, что броню пронзает струя горящего газа. Нет, оказалось, что летит металл, причём самым необъяснимым образом: перед плитой скорость около 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, внутри плиты 4 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, за плитой – снова 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$ (рис. б)). Как это может быть? Ни механика, ни газовая динамика не могли дать ответа. А решение оказалось чрезвычайно простым! Даже математический аппарат уже был: за 15 лет до этого в гидродинамики уже была теория — теория жидких струй. И она целиком подошла к этой задаче.

Дело в том, что при давлении в тысячи атмосфер прочность металла уже не важна. И как это ни парадоксально — железо можно считать жидкостью. . . » Объясните это явление.

1.7 Уравнение движения

Высота подъёма камня, брошенного вертикально вверх, через время t после броска, определяется формулой:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1.7.1}$$

где h_0 и v_0 — высота и скорость тела в момент броска.

Колебание тела массы m, связанного пружиной жёсткости k со стенкой, описывается формулой:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \tag{1.7.2}$$

где x, x_0 — соответственно, расстояние до положения равновесия тела в момент времени t и в нулевой момент времени, v_0 — скорость тела в нулевой момент времени, в $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Уравнения (1.7.1) и (1.7.2) называются уравнениями движения и описывают все возможные варианты движения тел: (1.7.1) — в поле тяжести, (1.7.2) — при наличии упругой силы. Приведённые примеры демонстрируют общие свойства движений в механике по прямой линии. Уравнение движения включает в себя два произвольных параметра. Не обязательно эти параметры являются координатой и скоростью в нулевой момент времени.

Уравнение движения по вертикали в поле тяжести удобнее записать следующим образом:

$$h = A + Bt - \frac{1}{2}gt^2, \tag{1.7.3}$$

а уравнение движения тела на пружине часто записывают в форме:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1.7.4}$$

где A и B в (1.7.3) и A и φ в (1.7.4) — параметры, определяемые условиями движения.

Пример 1.7.1 Тело, брошенное вертикально вверх, в момент времени t_0 находилось на высоте h_0, а в момент времени t — на высоте h. Как зависит высота подъёма тела от времени t?

Решение: Уравнение движения тела:

$$h = A + Bt - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} h_0 = A + Bt_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 \\ h_1 = A + Bt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$h_1 - h_0 = B(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1^2 - t_0^2),$$

следовательно:

$$\begin{cases} B = \frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} + \frac{1}{2}g(t_1 + t_0) \\ A = h_0 - Bt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{t_1 h_0 - t_0 h_1}{t_1 - t_0} - \frac{1}{2}gt_1 t_0 \end{cases}$$

Поэтому:

$$h = \frac{h_0 t_1 - h_1 t_0}{t_1 - t_0} - \frac{1}{2}gt_1 t_0 + \left(\frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} + \frac{1}{2}g(t_1 + t_0)\right)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Пример 1.7.2 Колебания тела на пружине происходят с частотой ω_0. В нулевой момент тело находилось на расстоянии x_0 от положения равновесия, и скорость тела была равна $\omega_0 x_0$. Определите амплитуду и начальную фазу колебания.

Решение: Уравнение движения

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Поэтому скорость равна

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Следовательно:

$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi = x_0 \\ \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin\varphi = x_0\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \\ A = x_0/cos\varphi = \sqrt{2}x_0 \end{cases}$$

При движении тела по плоскости уравнение движения содержит четыре произвольные постоянные, в пространстве — шесть. Обычно, эти постоянные определяются по начальным координатам (2 координаты на плоскости, 3 — в пространстве) и по начальным скоростям (2 составляющие скорости на плоскости, 3 — в пространстве) так, как это сделано в примере 1.7.2.

Задачи к § 1.7

1.7.1 Тело, брошенное вертикально вверх, в момент времени t_0 находилось на высоте h и имело скорость v. На какой высоте находилось тело в момент времени t?

1.7.2 Колебания тела на пружине происходят с частотой ω_0. В момент времени t_0 тело находилось на расстоянии x_0 от положения равновесия, и скорость тела был равна v_0. Как скорость тела зависит от времени?

1.7.3 Через время t после выстрела снаряд находился на высоте h и на расстоянии ℓ по горизонтали от пушки. Определите время и дальность полёта снаряда.

1.7.4 Через промежуток времени t угол наклона скорости снаряда к горизонту уменьшился с α до β. Как изменилась за это время высота полёта? Какое расстояние по горизонтали пролетел снаряд?

1.7.5 Брошенный камень в момент времени t_1 был на высоте h_1, а в момент t_2 — на высоте h_2. За этот промежуток времени камень пролетел в горизонтальном направлении расстояние ℓ. Определите максимальную высоту подъёма и дальность полёта камня.

1.7.6 Уравнение движения тела, соскальзывающего с вершины сферического купола при достаточно малых расстояниях по его вершине имеет следующий вид:

$$x = A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t},$$

где x — расстояние до вершины купола, а $A_\pm$ — постоянные, определённые условиями движения. Определите положение и скорость тела через время t после того, как его положили на купол на расстоянии x_0 от вершины.

1.7.7 Найдите уравнение движения тела, торможение которого пропорционально скорости: $\ddot{x} = \gamma \dot{x}$. Как будет меняться скорость тела, если в нулевой момент времени ему сообщили скорость v_0?

1.7.8 В атмосфере Земли отрицательное ускорение метеорита пропорционально квадрату его скорости: $a = -\alpha v^2$. Метеорит влетает в атмосферу Земли со скоростью v_0. Через какое время эта скорость уменьшится в два раза?

1.7.9 Уравнение движения тела массы m, связанного пружиной жёсткости k, при «жидком» трении определяется формулой:

$$x = Ae^{\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\; t + \varphi\right),$$

где x — отклонение от положения равновесия, A и φ — постоянные, определяемые начальными условиями, $\omega_0 = \sqrt{k/m} < \gamma$. Как зависит от времени x и $\dot{x}$ для тела, которое в нулевой момент времени проходит положение равновесия со скоростью v_0?

1.7.10 Для тела массы m, связанного пружиной плотностью k, при «жидком» трении с $\gamma > \sqrt{k/m} = \omega_0$, уравнение движения имеет следующий вид:

$$x = A_+ e^{-\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t} + A_- e^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t},$$

где x — отклонение от положения равновесия, $A_\pm$ — постоянные, определённые начальными условиями. Телу в положении равновесия сообщили скорость v_0. Определите максимальное отклонение тела от положения равновесия. К какой величине стремится это отклонение при $\omega_0 \to 0$?

Математика в кинематике

Пусть от бед тебя хранит
Сгрызенный тобой гранит.
Молитва атеиста.

Основываясь на своём опыте общения со школой[3], я сформулирую два утверждения:

- математика, которую изучают в школе, как правило, не достаточна для изучения физики,

- физику в школе не изучают (это следствие предыдущего пункта).

Признаюсь, что я немного утрирую ситуацию. Сами по себе, учебники по физике очень даже неплохие, на уроках рассказывают о великих открытиях и даже дают решать задачи. Есть одно но: практически все школьные задачи — это задачи на подстановку формулы. Вы выучили формулу, и тут же в эту формулу следует подставить числа, и получить новое число в качестве ответа, при этом совершенно выпускается физический смысл задачи. Формулы не выводятся, а даются, так как школьники не владеют адекватным математическим аппаратом.

Конечно 99.99% жителей планеты Земля совершенно замечательно могут прожить без этих знаний, но тот 0.01%, который связал или планирует связать свою жизнь с какой-либо наукой рано или поздно обнаруживает, что школьных знаний ему недостаточно. Невозможно заниматься химией или биологией, не зная физики[4]. Занятие физикой невозможно без овладения определёнными математическими приёмами.

Можно, конечно, встать в позу и сказать: «А зачем изучать всем эти странные вещи ради какого-то 0.01%?». Ответ на этот вопрос существует только один: «Всё что вы имеете сейчас, всё, что на вас надето и обуто,

[3] В качестве ученика я провёл в школе 10 лет — так что я знаю, что говорю.
P.S. Здесь и далее говорит Е.М. Балдин.

[4] Л.Д. Ландау приписывают фразу: «Всё научного в химии это физика, остальное — кухня»

всё на чём вы ездите, возникло благодаря именно этому 0.01%». Чуть больше 100 лет назад электричество было фундаментальной наукой и занимался этой наукой тот же 0.01%. Каждый новый человек, который *может* заниматься физикой, воистину бесценен и нельзя упускать никого. Если Вы что-то понимаете, то Вы *обязаны* это делать, потому что иначе *нельзя*.

В этом тексте вводятся некоторые понятия и показаны приёмы, которые сильно облегчают понимание физики. Помните, что понятия «интегрирование», «дифференцирование» и др. вводятся для облегчения понимания и упрощения анализа физической картины мира, а вовсе не для усложнения жизни. Освоив эти приёмы, в дальнейшем Вы сможете изучать более изощрённые и эффективные методы и даже (чего в жизни не бывает) придумывать свои.

Вам не следует бояться новых слов и выражений — это не развлекательная литература, поэтому, если какой-то абзац Вам не понятен, то перечитайте его ещё раз. «Повторение — мать учения»[5].

В конце хотелось бы добавить, что специально для школьников великий физик Я.Б. Зельдович написал книжку «Высшая математика для начинающих»[6]. К сожалению, последний выпуск этой книги был сделан очень давно, но так как книга вышла относительно большим тиражом, то её можно найти в букинистических магазинах или в библиотеках.

8 Численные примеры

Математика — это язык!
— *Гаусс. К вопросу о выделении денег на изучение языков.*

Если человек просто лежит на диване и ничего не делает, то даже в этом случае его мозг потребляет 10% от общей энергии человека, а если человек начинает хоть что-то делать, например, решать задачи по физике, то энергопотребление возрастает более чем в два раза. Поэтому, обычно у человека вырабатывается отрицательный рефлекс на умственную работу, так как всё стремится к минимизации потребления энергии. Одним из следствий такой минимизации стало распространение калькуляторов. Калькулятор — хорошая вещь, но если вы не умеете считать, то он вам не поможет. Поэтому следующие задачи и примеры решайте с помощью листочка бумаги, ручки и вашей головы.

[5] Готов подписаться под каждым словом.

[6] *Я.Б. Зельдович* «Высшая математика для начинающих и её приложения к физике» М., 1970 г. 560 стр. с илл. Издательство «Наука».

В физике не бывает абсолютно точных численных ответов. Любую величину можно измерить только с определённой точностью. Обычно эта точность не превышает[7] 10%, поэтому при вычислении какой-либо величины вовсе не обязательно выписывать 10 знаков после запятой[8], достаточно правильно посчитать $2 \div 3$ значащих цифры.

В процессе численных вычислений лучше всего следовать правилу: «Сначала вычисляем порядок, затем всё остальное». Разберём следующий пример:

$$\pi \frac{1200 + 2^{10}}{8 \cdot 10^8 - 3600^2 + 1500^2 \cdot 10^3}$$

Вычислим порядки, чтобы определить, какими величинами можно пренебречь.

$$\pi \frac{1.2 \cdot 10^3 + 1.024 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^8 - 3.6^2 \cdot 10^6 + 1.5^2 \cdot 10^9} = \pi \frac{(1.2 + 1.024) \cdot 10^3}{(800 - 3.6^2 + 1.5^2 \cdot 1000) \cdot 10^6}.$$

Теперь начнём всё упрощать[9]: $1.024 \simeq 1$. Величиной $3.6^2 \simeq 10 \ll 800$ можно пренебречь. $1.5^2 = 2.25$, $\pi \simeq 3$. Итого:

$$\frac{\pi \cdot 2.2}{0.8 + 2.25} \cdot 10^{3-9} \simeq 2.2 \cdot 10^{-6}.$$

Все промежуточные выкладки лучше всего проделывать в уме, после некоторой тренировки, Вы без проблем обгоните любой калькулятор. Если вычислить этот пример с помощью калькулятора, то получится $2.31965775434589182 \cdot 10^{-6}$ — мы ошиблись на 5.5%, что в подобных вычислениях вполне приемлемо.

Когда вы вычисляете что-то более осмысленное, то пытайтесь запоминать полученные результаты и закономерности. Например:

- $2^{10} \simeq 1000$;
- $\pi^2 \simeq g$, где g — ускорение свободного падения — это не закон природы, просто так получилось;
- число секунд в году примерно равно $\pi \times 10^7$.

[7] Это не относится к таким уникальным экспериментам, как измерение скорости света, определение заряда электрона — здесь точность намного превышает доли процента.

[8] Столько, сколько влезает в окошко калькулятора.

[9] Нам не нужна точность выше чем 10%.

Если вы решаете задачу, в которой надо получить ответ, то следует этот ответ *получить в буквах. Цифры следует подставлять в самом конце.* Это простое правило подчас сильно облегчает жизнь

Для получения быстрого ответа часто бывает полезно воспользоваться приближёнными формулами. Наиболее часто используемые формулы для приближённого вычисления приведены ниже[10]:

$$\sin\alpha \simeq \alpha \tag{8.1}$$

$$(1+\alpha)^n \simeq 1 + n\alpha \tag{8.2}$$

В обоих вышеизложенных примерах $\alpha \ll 1$, а n — любое число. В случае синуса α берётся в радианах.

Задачи к § 8

8.1 Решите на скорость перечисленные ниже примеры без помощи калькулятора. Точность должна быть не хуже чем 10%.

$$\text{а)}\quad \pi \times \frac{2200^2 + 1.6\cdot 10^5}{1.5\cdot 10^4 - 2^{13}};$$

$$\text{б)}\quad \left(\pi - \frac{0.27}{0.3^2}\right) \times \frac{5.3\cdot 10^6 - 300^4}{7\cdot 10^6 - 300^2 + 0.2};$$

$$\text{в)}\quad \frac{0.3 + 10^4 \times 1.21 - 300 + 1024}{11^2 - 1.3 \times \frac{2.54}{10^7 - 200^2}};$$

8.2 Проверьте, что с точностью в 10% следующие равенства выполняются:

- $\pi^2 = g$,
- $2^{10} = 1000$,
- в году $\pi \times 10^7$ с.

[10]Примерный вывод этих формул показан в разделе 9.

8.3 Оцените, без помощи калькулятора с точностью 10% следующие числа: 2^{30}, 2^{20}, 3^{15}, 5^{10} и 9^5. Какое из этих чисел самое большое? Какое самое маленькое?

8.4 Производители жёстких дисков считают, что в одном килобайте 1000 байт ($2^{10} = 1024$). Быстро оцените на сколько вас «обманули» если вы купили винчестер ёмкостью 100 гигабайт.

8.5 Оцените чему равны следующие выражения: а) $\sin 2°$, б) $\cos 85°$, в) $\operatorname{tg} 10°$.

8.6 Оцените с точностью до 20% число ударов, которое совершило ваше сердце за время вашей жизни.

8.7 Оцените с точностью до 0.1%, чему равен $\cos 6°$. Воспользуйтесь формулой $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

8.8 Оцените Вашу скорость относительно центра Земли. Все необходимые параметры задачи вам должны быть известны.

8.9 Оцените, во сколько раз скорость Луны относительно вас меньше Вашей скорости относительно Солнца? Расстояние до Луны приблизительно в 400 раз меньше расстояния до Солнца.

8.10 Оцените, сколько надо аннигилировать вещества, чтобы обеспечить электроэнергией всё население России в течение одного года.

9 Дифференцирование

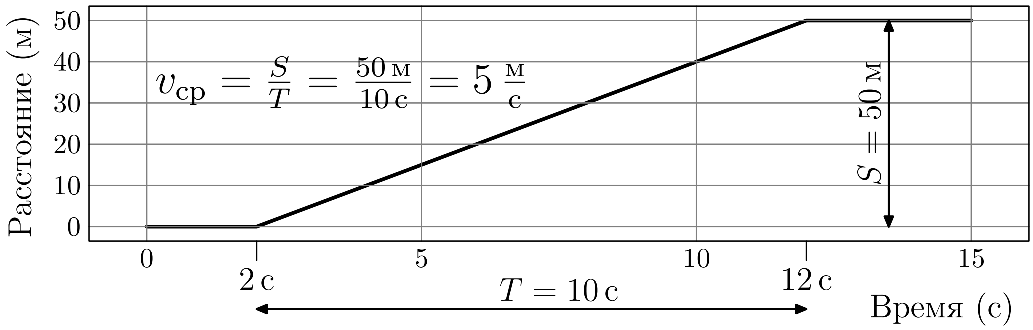
Чай тоже можно продифференцировать.
— *Заметки к студенческой чайной церемонии.*

Понятие «дифференцирование» неразрывно связано с именем Ньютона[11]. Введение понятий дифференцирования и интегрирования стало началом физики как самостоятельной науки, и без этих понятий изучение физики невозможно.

Основной идеей возникновения дифференциального исчисления является желание изучить изменение физической картины (положение тела, например) за малые промежутки времени. Если мы знаем скорость этих изменений (скорость тела) в любой момент времени, то мы знаем, как развивается система (можем вычислить положение тела в любое время). Идея простая, как и всё гениальное.

[11] Ньютон Исаак (Newton Isaac) (04.01.1643–31.03.1727) — английский физик и математик, создавший основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике. Сам же Ньютон важнейшей своей работой считал написание трудов по теологии — великие люди даже ошибаются по крупному.

Рассмотрим задачу: тело начинает двигаться с постоянной скоростью $v(t) = 5$ м/с в момент времени $t = 2$ с и останавливается в момент времени $t = 12$ с. График перемещения тела от времени изображён на рисунке ниже:

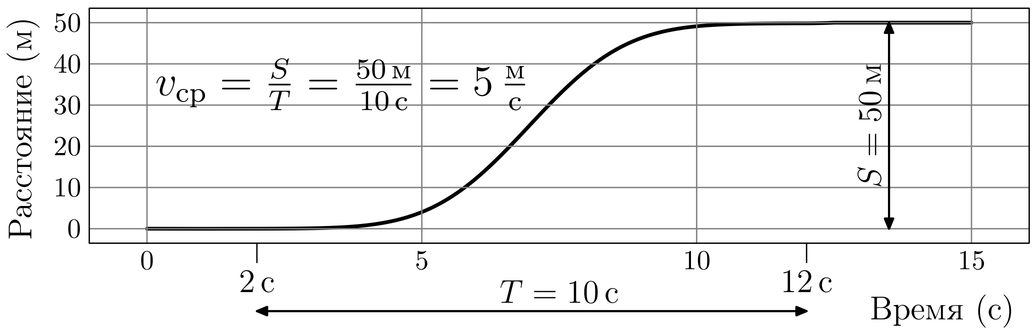


В этом случае скорость тела находится легко:

$$\text{скорость} = \frac{\text{пройденное расстояние}}{\text{потраченное время}} \tag{9.1}$$

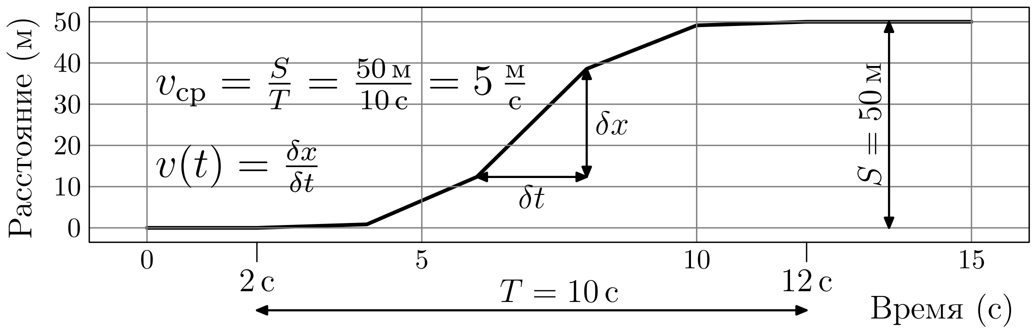
Если присмотреться к графику перемещения тела, то станет понятно, что скорость есть просто *тангенс угла его наклона* к оси времени.

К сожалению, в реальности тела двигаются отнюдь не с постоянными скоростями. Рассмотрим ситуацию, когда тело покоилось, затем начало разгоняться, а после разгона сразу начало тормозить до полного покоя. Следующий график подходит под это описание:

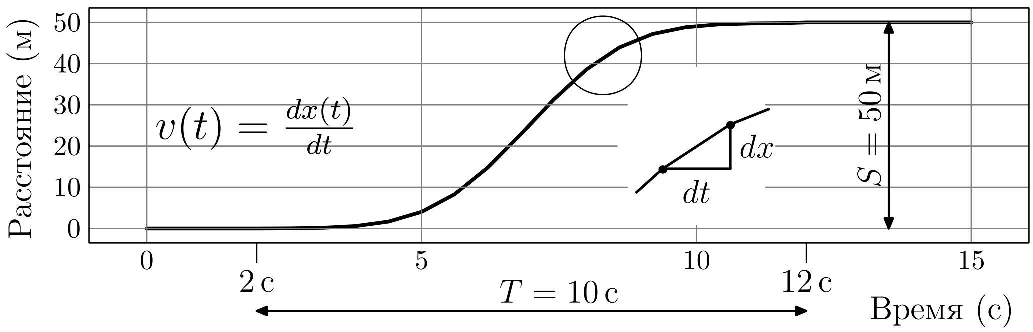


Как и в предыдущем случае, *средняя скорость* движения не меняется ($v_{\text{ср}} = S/T = 50$ м/с), а *мгновенная скорость* тела зависит от времени.

Угол наклона графика, соответственно, и скорость тела меняется со временем. Для того чтобы воспользоваться известным нам стандартным приёмом определения скорости (9.1), разобьём график на относительно небольшие участки и заменим гладкую кривую прямыми:



Скорость на каждом из участков определяется так же, как и в случае равномерного движения. Остаётся одна проблема: выбранный нами шаг по времени δt для разбивки слишком груб, и реальный график сильно отличается от того, что мы имели изначально. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, уменьшим шаг разбивки так, что на глаз «кусочная» кривая не будет отличаться от исходной зависимости:



Здесь что-то разглядеть можно только под увеличительным стеклом. Сильно увеличенный участок почти не отличается от прямой и фактически совпадает с касательной к графику в исследуемой окрестности. Скорость в любой момент времени находится по формуле:

$$v(t) = \lim_{\delta t \to 0} \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{9.2}$$

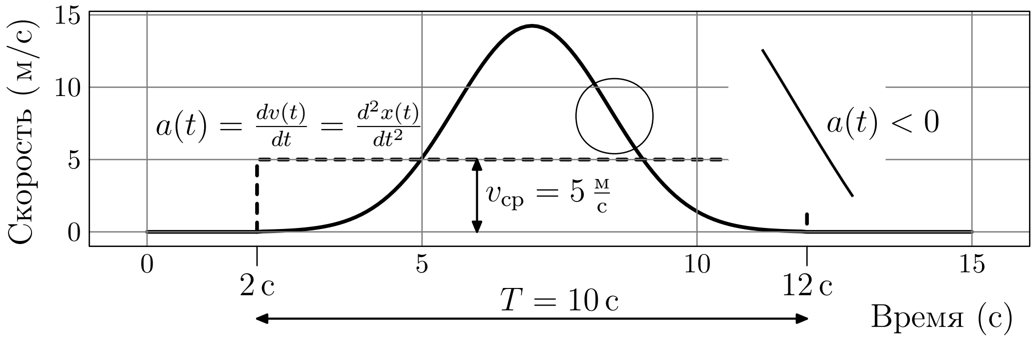
Обычно для упрощения записи $\frac{dx}{dt}$ записывают как x'. Читается как «дэ икс по дэ тэ» или «икс штрих». По сути формула (9.2) означает, что скорость есть первая *производная* координаты от времени. Для получение функции скорости нам пришлось *продифференцировать* функцию координаты.

Выражение $\lim_{t \to 0} f(t)$ читается как «предел функции $f(t)$ при t стремящимся[12] к 0».

[12] Не всегда можно приравнять t к нулю сразу, поэтому его приходится к 0 устремлять.

Так как мы действовали достаточно формально, то никто не мешает, в случае необходимости, заменить координату x и время t на какие-то *другие* физические величины.

Пользуясь понятием (9.2), построим график скорости v от времени t и по этому графику найдём скорость изменения скорости, т. е. ускорение:

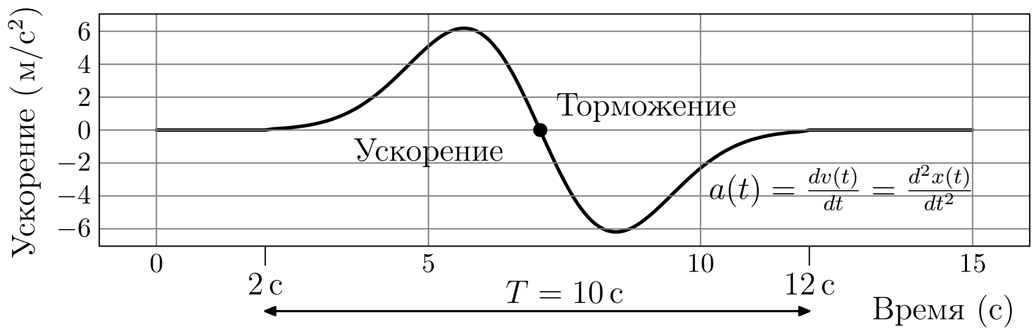


Следует обратить внимание на пунктирную линию, которая соответствует графику равномерного движения. Ускорение — это первая производная от скорости по времени, что соответствует второй производной от координаты по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{9.3}$$

Выражение $\frac{d^2x}{dt^2}$ читается как «дэ два икс по дэ тэ дважды». Для упрощения записи (9.3) можно записать как: $a = v' = x''$.

На этом графике, кроме возрастающих участков, есть и убывающие, которые соответствуют ускорению и торможению. Один из убывающих участков специально увеличен — тангенс угла наклона касательной к этому участку (ускорение a) отрицателен. График зависимости ускорения от времени имеет вид:



Положительные и отрицательные значения функции соответствуют ускорению и торможению. При переходе от ускорения к торможению график *должен* пересечь 0. В этот момент скорость либо максимальна (торможение после ускорения), либо минимальна (ускорение после торможения). Таким образом, условием на поиск локальных минимумов и максимумов функции v является выражение: $v' = 0$. Иначе говоря, для нахождения максимальной/минимальной скорости надо взять производную, приравнять её к нулю, разрешить получившееся уравнение, подставить все корни в исходную функцию и выбрать, соответственно, минимум и максимум из них. Естественно, при этом следует учесть и граничные значения.

Теперь, когда разобрались с понятиями *производная* и *дифференцирование*, научимся *брать производные от функции.* Перепишем ещё раз определение производной (9.2), вместо x формально подставив f, а вместо $t - x$:

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \right) \tag{9.4}$$

df и dx называют *дифференциалами.* Из (9.4) следует, что

$$f(x + \delta x) \simeq f(x) + f'(x)\delta x, \tag{9.5}$$

при $\delta x \to 0$. Очень похоже на формулу движения с постоянной скоростью. Если интервал изменения аргумента очень мал, то график функции можно описать прямой. Воспользуемся (9.5) для вывода основных свойств взятия производной:

а) C' — производная от постоянной равна 0, и действительно: $\frac{df}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}(\frac{C - C}{\delta x}) = \lim_{\delta x \to 0}(\frac{0}{\delta x}) \equiv 0$, так как δx хоть и очень маленькая величина, но она больше 0. Кроме того тангенс угла наклона касательной к функции $y = C$ равен 0.

б) $(f(x) + g(x))' = f' + g'$ — производная суммы равна сумме производных (тангенсы углов наклона складываются),

в) $(f(x)g(x))' = f'g + g'f$ — при дифференцировании произведения сомножители дифференцируются по очереди. Докажем это:

$$\begin{aligned}(fg)' &= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta(fg)}{\delta x} \right) = \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \delta x)g(x + \delta x) - f(x)g(x)}{\delta x} \right).\end{aligned}$$

Теперь вспомним формулу (9.5), при этом учтём, что δx — очень маленькая величина:

$$
\begin{aligned}
(fg)' &= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{(f + f'\delta x)(g + g'\delta x) - fg}{\delta x} \right) = \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{fg + gf'\delta x + fg'\delta x + f'g'(\delta x)^2 - fg}{\delta x} \right) = \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \left(f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + f'(x)g'(x)\delta x \right) = \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}
$$

г) $f'(g(x)) = f'g'$ — докажем и это свойство, умножив[13] числитель и знаменатель на dg:

$$
f'(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx} = f'g'.
$$

Пример 9.1 Покажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Треугольник Паскаля

$(a+b)^n =$

$= \sum C_n^k a^k b^{n-k}$

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1
7: 1 7 21 35 35 21 7 1
8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13: 1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

Решение: Для решения этой задачи нам необходимо уметь раскладывать выражение вида $(1 + \delta x)^n$. Для это можно воспользоваться треугольником Паскаля[14]. Треугольник Паскаля или арифметический треугольник — треугольная числовая таблица для составления биномиальных коэффициентов. По боковым сторонам треугольника Паскаля стоят

[13] Не совсем корректно, но показательно.

[14] Назван в честь Блейза Паскаля — первооткрывателя основного закона гидростатики (Закон Паскаля).

единицы. Внутри треугольника Паскаля числа образуются сложением двух чисел, стоящих над данным. $(n+1)$-я строка даёт биномиальные коэффициенты для разложения бинома n-ой степени. Если приглядеться к треугольнику внимательно, то можно заметить, что:

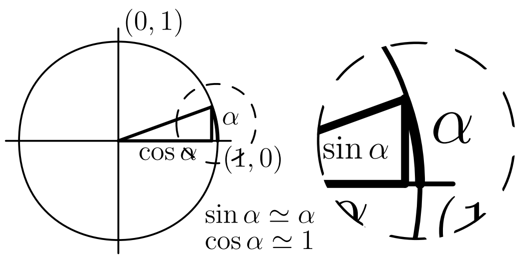
$$(1+\delta x)^n = \sum C_n^k 1^k \delta x^{n-k} = 1 + n\delta x + O(\delta x^2),$$

где $O(\delta x^2)$ — выражение, каждая из частей которого имеет δx в степени выше или равной 2.

Воспользуемся выражением (9.4) для вычисления производной:

$$(x^n)' = \lim_{\delta x\to 0} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\left(x^n \frac{(1+\delta x/x)^n - 1}{\delta x}\right) =$$
$$= \lim_{\delta x\to 0}\left(x^n \frac{1 + n\frac{\delta x}{x} + O(\delta x^2) - 1}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + O(\delta x)\right) = nx^{n-1}.$$

Пример 9.2 Покажем, что $\sin' x = \cos x$, где x измеряется в радианах.



Решение: Воспользуемся тем, что $\sin\alpha \simeq \alpha$, а $\cos\alpha \simeq 1$ при маленьком α. Данное утверждение становится очевидным после внимательного разглядывания рисунка к примеру, на котором изображена окружность единичного радиуса. От оси абсцисс под углом альфа изображён радиус-вектор. $\sin\alpha$ — это длина высоты, опущенной из точки пересечения радиус-вектора с окружностью на ось абсцисс[15]. $\cos\alpha$ — расстояние между центром окружности и основанием высоты. α — длина дуги, ограниченная осью абсцисс и радиус-вектором. Видно, что если угол α мал, то длина дуги примерно равна высоте, т. е. $\sin\alpha \simeq \alpha$.

$$\frac{d\sin x}{dx} \simeq \frac{\sin(x+\delta x) - \sin x}{\delta x} = \frac{\sin x\cos\delta x + \cos x \sin\delta x - \sin x}{\delta x} \xrightarrow{\delta x\to 0}$$
$$\xrightarrow{\delta x\to 0} \frac{\sin x + \cos x \times \delta x - \sin x}{\delta x} = \cos x$$

[15]Увеличенная часть картинки.

Пример 9.3 Найдём производную от $\sin^2 x$.

Решение: Мы знаем производную от $\sin x$ и производную от функции x^2. Воспользуемся формулой вычисления от сложной функции, приведённой на стр. 50. Пусть $g(x) = \sin x$, а $f(g) = g^2$, следовательно:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dx} = \frac{dg^2}{dg} \times \frac{d\sin x}{dx} = 2\sin x \times \cos x = \sin 2x.$$

Пример 9.4 Найдём производную от $\arcsin x$.

Решение: Мы знаем производную от $\sin x$, которая является обратной функцией для $\arcsin x$. Переопределим f как sin, а g как arcsin, следовательно $f(g(x)) = x$:

$$f(g(x)) = x \Rightarrow \frac{df(g(x))}{dx} = 1 = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx},$$

откуда получаем полезную формулу:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{dg}}, \quad \text{где } f = g^{-1} \tag{9.6}$$

Подставив в формулу (9.6) наши функции, получим:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В таблице 9.1 приведён список простейших функций и их производных. Возможно, новыми для Вас окажутся функции e^x — экспонента и $\ln x$ — натуральный логарифм. В дальнейшем вы не раз столкнётесь с этими функциями, а сейчас вам достаточно знать, что $\ln e^x = x = e^{lnx}$, то есть эти функции являются обратными по отношению к друг другу.

$(const)' = 0$	$\sin' x = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\cos' x = -\sin x$	$\ln' x = \frac{1}{x}$

Таблица 9.1. Таблица производных

Задачи к § 9

9.1 Найти производные по x от следующих функций:

ax^2	$2\sqrt{x}$	x^{-1}
$\sin^3 x$	$\operatorname{tg} x$	$\sin x \cos x$
$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
a^x	$x \ln x$	$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

9.2 а) При пересечении оси абсцисс при $x = 0$ касательная к графику функции e^x имеет угол наклона в $45°$, то есть $e^x \simeq 1 + x$ [16] при малых x. На основании этой информации найдите производную от экспоненты.

б) Используя предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \alpha\frac{x}{n}\right)^n = e^{\alpha x},$$

докажите, что производная от $e^{\alpha x}$ равна той же функции, умноженной на постоянную α.

9.3 Найдите производную для $\ln x$, пользуясь информацией из условия задачи 9.2.

9.4 Координата тела изменяется как функция от времени $x(t)$, найдите ускорение тела от времени $a(t)$.

а) $x(t) = v_0 t + x_0$

б) $x(t) = at^2/2 + v_0 t + x_0$

в) $x(t) = \alpha\sqrt{t}$

г) $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

д) $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \varphi)$.

9.5 Приведите пример, когда производная функции равна 0, но в то же время эта точка не является ни минимумом, ни максимумом функции.

9.6 Координата тела изменяется как функция от времени $x(t) = t^3/3 + t^2 - 8t + 12$, где t измеряется в секундах и лежит в интерва-

[16] Эйлер первый обратил на это внимание. $e = 2.718281828459045\ldots$, где 2.7 надо запомнить, 1828 — год рождения Льва Толстого дважды, а 45–90–45 — углы прямоугольного треугольника.

ле от -2 с до 10 с. Найдите время t, которому соответствует глобальный максимум и глобальный минимум функции в этом интервале.

9.7 Местоположение тела определяется формулой $x(t) = \cos^2 t - \sin t$. Найдите точки локальных минимумов и максимумов.

9.8 Определим объект i таким образом, что $i^2 = -1$. Подобный объект называется комплексной единицей.

а) Докажите, что сумма $\cos\omega t + i\sin\omega t$ имеет производную, равную этой же сумме, умноженной на $i\omega$.

б) Покажите, что конструкции вида $(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$ и $(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$ ведут себя как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, соответственно.

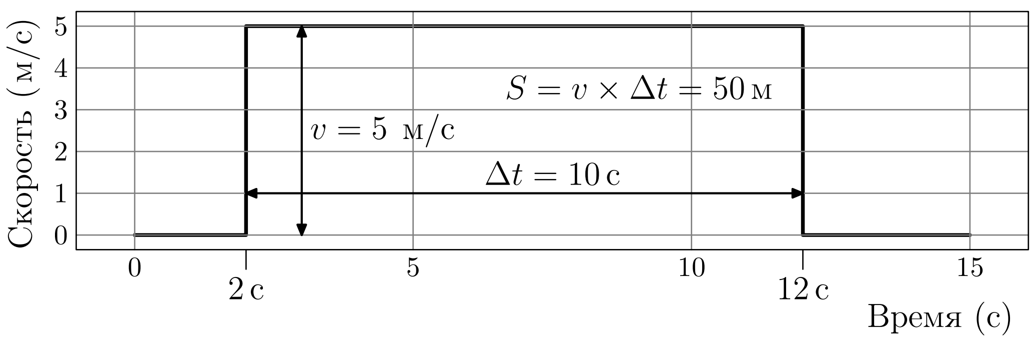
9.9 Докажите, что n-ая производная по t от многочлена $\sum\limits_{i=0}^{i=k} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ совпадает при $t = 0$ с коэффициентом a_n $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$.

9.10 Координаты тела на плоскости описываются как $(x(t), y(t)) = A(\sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t)$, где A — константа. Чему равно ускорение этого тела по величине?

10 Интегрирование

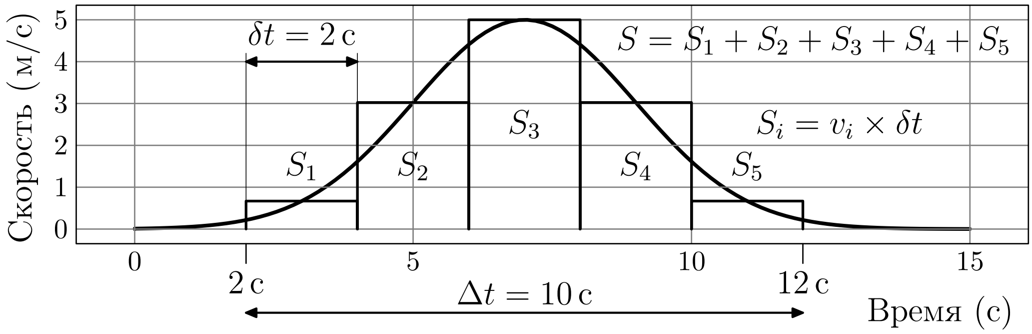
Нет ничего более ценного
и постоянного чем площадь.
— *Квартирный вопрос.*

Для начала рассмотрим ту же задачу, что разобрали в начале предыдущего раздела: тело начинает двигаться с постоянной скоростью $v(t) = 5$ м/с в момент времени $t = 2$ с и останавливается в момент времени $t = 12$ с. График скорости тела от времени изображён на рисунке ниже:



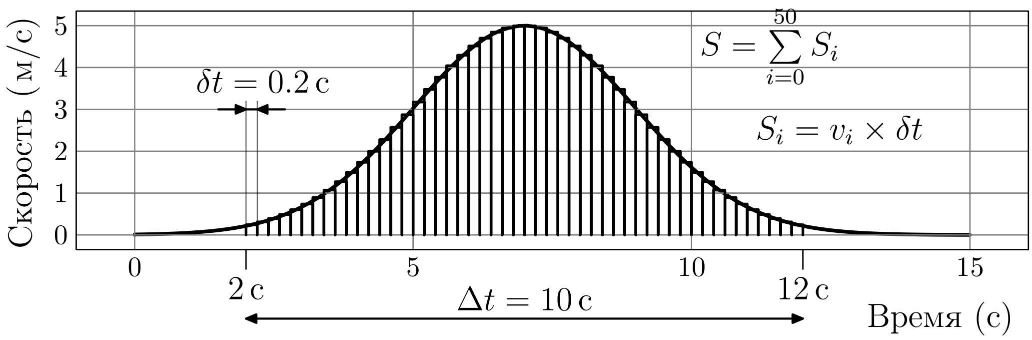
Вы знаете, что пройденное расстояние в этом случае есть произведение скорости на интервал времени: $S = v \times \Delta t = 5$ м, что по своей сути является площадью прямоугольника, который представляет из себя обсуждаемый график скорости от времени.

К сожалению, не всегда, а точнее в подавляющем числе случаев, можно описать скорость тела какой-либо константой. Возьмём какую-либо «гладкую» функцию скорости от времени. Например такую, какая изображена на рисунке ниже. Посмотрим, что можно сказать по этому графику. Конкретно нас интересует пройденное телом расстояние за промежуток времени $t \in [2\,\text{с}, 12\,\text{с}]$[17].



Для решения этой проблемы разобьём исследуемый период на пять участков длительностью по $\delta t = 2\,\text{с}$ каждый. Каждому из участков припишем постоянную скорость, соответствующую значению скорости в «центре» участка, как это показано на рисунке. В результате получается «разрывная» зависимость скорости от времени, которая немножко напоминает поведение интересующей нас «гладкой» зависимости. Пройденное расстояние для каждого из участков с постоянной скорости мы можем найти по формуле: $S_i = v_i \times \delta t$, где i — номер участка, а полное расстояние равно сумме $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$.

Понятно, что найденное таким образом значение пройденного за $\Delta t = 10\,\text{с}$ пути отличается от истинного, причём отличается довольно сильно. Для повышения точности вычисления следует увеличить количество участков с постоянной скоростью, например, как это сделано на следующем рисунке:

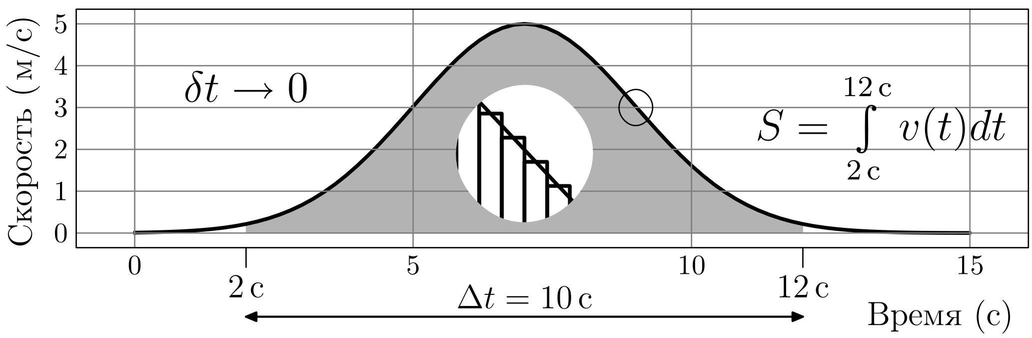


[17]Знак $\in$ показывает принадлежность переменной указанному интервалу.

Здесь число таких участков равно 50, и разница между «гладкой» и «разрывной» зависимостями уже не так заметна. Точный ответ мы таким образом не получим, но в физике нет необходимости иметь *абсолютно точные* ответы, так как наше понимание мира ограничивает *точность* наших экспериментов.

Пройденное в каждый из промежутков с постоянной скоростью расстояние есть просто площадь получившегося прямоугольника, а полное пройденное расстояние есть сумма площадей всех таких прямоугольничков: $S = \sum_{i=0}^{50} v_i \times \delta t$, где v_i — приписанная к i-ому участку скорость.

Чтобы повысить точность вычисления расстояния, необходимо уменьшать длительность «участков». В пределе следует устремить[18] δt к 0 ($\delta t \to 0$), как это показано на следующем рисунке:



Отличить «разрывную» зависимость от «гладкой» здесь можно только с помощью сильного увеличения. На рисунке есть увеличенный кусочек одного из «склонов» графика. Закрашенная область представляет из себя совокупность прямоугольничков под «разрывной» зависимостью. Площадь этой области фактически совпадает с истинным значением пройденного расстояния и стремится к площади под исследуемой функцией. Для того чтобы как-то отличить сумму площадей в случае, когда длительность интервалов стремится к 0, от обычной конечной суммы, знак суммы $\sum$ заменяют на вытянутую по вертикали букву S[19]: $\int$.

Итак, введём новое понятие: *интеграл от функции есть площадь под ней.* Интеграл является пределом суммы площадей прямоугольничков в случае, когда длительность интервала для каждого из участков стремится к 0. В исследуемом случае интеграл от скорости является *точным* ответом на вопрос о пройденном расстоянии. Интеграл записывают как:

[18] Не приравнять, а именно устремить.

[19] От слова sum — сумма.

$$S = \int\limits_{2\,\text{с}}^{12\,\text{с}} v(t)dt,$$

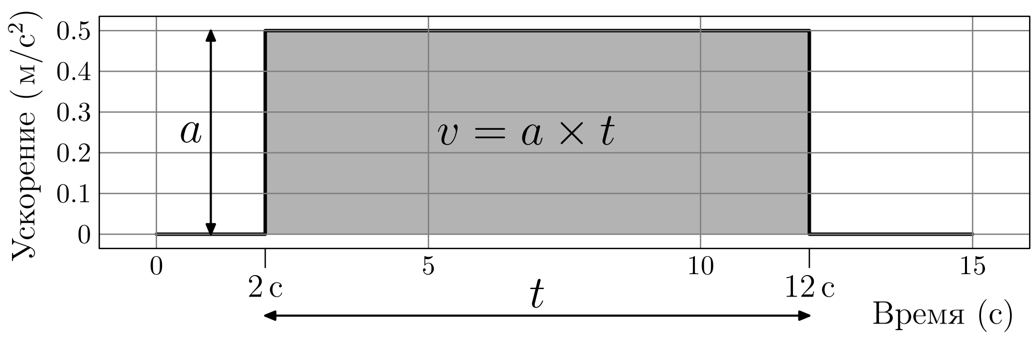
где S — пройденное расстояние, $[2\,\text{с}, 12\,\text{с}]$ — интервал интегрирования, $v(t)$ — зависимость скорости от времени, а dt — предел δt, в случае когда $\delta t \to 0$. Данное выражение читается как: «S равно интегралу v от t по dt в интервале от 2 с до 12 с».

В разделе 9 рассказывалось о том, как из графика расстояния от времени найти скорость. В этом разделе производится обратная операция. *Интегрирование есть обратная функция от дифференцирования*:

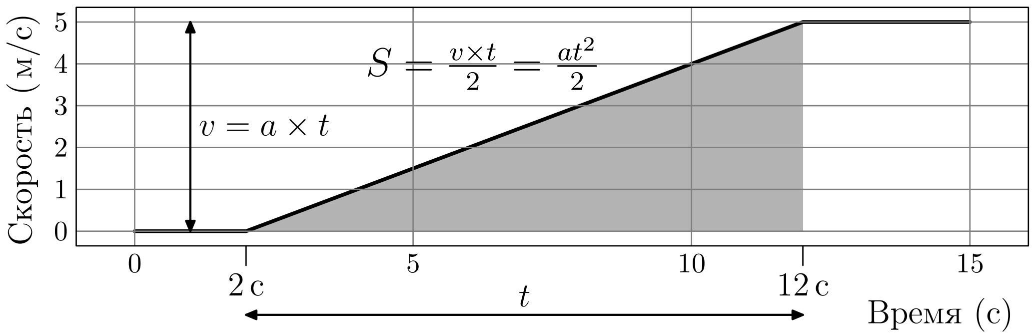
$$S(t) = \int v(t)dt = \int \frac{dS}{dt}dt = \int dS$$

Таким образом, нахождение интеграла от функции $v(t)$ эквивалентно нахождению ещё одной функции $S(t)$, производная от которой равна $v(t)$. Если $v(t)$ это производная функции $S(t)$, то $S(t)$ является *первообра́зной* для $v(t)$.

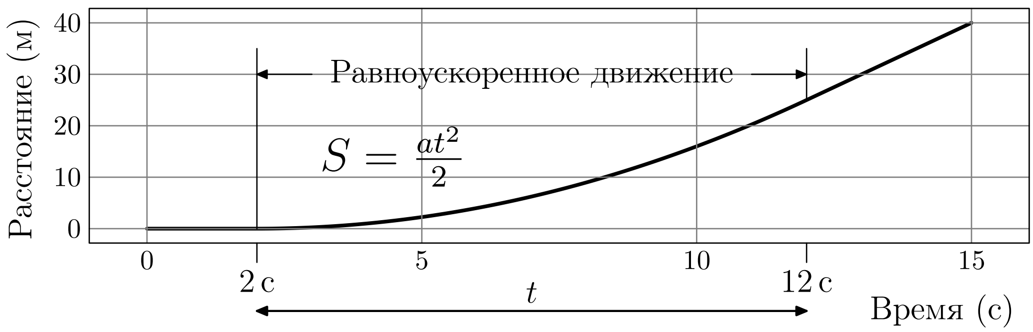
Пример 10.1 Тело движется с постоянным ускорением $a = 0.5$ м/с^2 в интервале времени от 2 с до 12 с, как это показано на графике ускорения от времени. В начальный момент времени тело покоилось. Найти пройденное телом расстояние в этот же интервал времени.



Решение: Скорость есть первообразная по отношению к ускорению. Площадь под графиком ускорения есть само ускорение, умноженное на время с начала старта, и имеет вид зависимости, представленной на следующем графике:



Пройденное расстояние есть первообразная по отношению к скорости. Площадь под получившемся треугольником есть максимальная скорость, умноженная на интервал времени, делённая пополам. Искомая зависимость представлена ниже:



Используя полученную информацию, легко найти, что в момент времени $t = 12$ с тело прошло 25 метров

Пример 10.2 Получить общую формулу для равноускоренного движения.

Решение: Подойдём к решению формально:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = const \Rightarrow v(t) = \int adt = v_0 + at, \tag{10.1}$$

где v_0 — скорость в начальный момент времени $t = 0$. Следует отметить, что до этого мы имели дело с *определёнными* интегралами, то есть с интегралами, для которых определён интервал действия (например, от 2 до 12 с). В уравнении (10.1) «взят» *неопределённый* интеграл. В отличии от определённого интеграла, который представляет из себя просто число (площадь под функцией), неопределённый интеграл тоже является функцией, плюс в неопределённом интеграле при его взятии всегда появляется константа. Это не удивительно, так как при взятии производной от константы мы получаем 0.

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (v_0 + at)dt = \int v_0 dt + a\int tdt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (10.2)$$

где x_0 — положение тела в момент времени $t = 0$. Полученное выражение полностью соответствует стандартной школьной формуле, которая, как правило, даётся без вывода. Как видно, это выражение получается с помощью формальных действий, которые по своей сути не сложнее более привычных операций, таких как: сложение, умножение, вычитание и т. д.

Проверим, что полученное выражение является первообразной для функции скорости, а та в свою очередь является первообразной для ускорения:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2})}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + v_0\frac{dt}{dt} + \frac{a}{2}\frac{dt^2}{dt} = v_0 + at, \\ a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(v_0 + at)}{dt} = a. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Пример 10.3 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Решение: $\arcsin x$ является первообразной для подынтегральной функции (см. пример 9.4 на стр. 52), следовательно:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Из верхнего предела следует вычесть нижний. Так «берутся» определённые интегралы, то есть те, у которых заданы пределы.

Задачи к § 10

10.1 Найти первообра́зные для следующих функций :

$2ax$	$x^{-1/2}$	$-x^{-2}$
$3\sin^2 x \cos x$	$\cos^{-2} x$	$\cos 2x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$a^x \ln a$	$\ln x + 1$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

10.2 Стартуя, гонщик линейно наращивает ускорение своего автомобиля: $a = \alpha t$. На каком расстоянии находится гонщик от места старта в момент времени t_0?

10.3 Как с помощью миллиметровки, циркуля, аптекарских весов и ножниц вычислить число π.

10.4 Возьмите интеграл от функции $y(x) = \sqrt{2 - x^2}$ в интервале от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$.

10.5 Вычислите определённый интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. Для решения этой задачи полезно будет вычислить производную от $\ln x/x$ и учесть, что функция $\ln x$ растёт медленнее любой степенной функции.

10.6 Вычислите объём пирамиды высотой h и с площадью основания S.

10.7 Покажите истинность следующей формулы $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

10.8 Очень часто интересно знать среднее значение функции за длительный промежуток времени. Чему равно усреднённое значение $\cos^2 \omega t$? Кратко это записывается как $< \cos^2 \omega t >$.

10.9 Работа есть интеграл силы по перемещению, то есть $A = \int F dx$. Найдите работу совершаемую

а) в поле тяжести ($F = mg$) при перемещении тела на высоту h,

б) пружинкой ($F = kx$) при перемещении незакреплённого конца пружинки на расстояние x,

в) полем точечного заряда Q над другим зарядом q ($F = kqQ/r^2$), при изменении расстояния между зарядами с r_1 до r_2.

10.10 Через 2 с после толчка скорость лодки уменьшилась с $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ до $5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Какое расстояние прошла лодка за это время? Торможение лодки пропорционально её скорости.

Ответы

Здесь собраны ответы на задачи. Для некоторых задач даны подробные разъяснения. Как правило, эти задачи являются ключевыми для восприятия изложенного в этом разделе материала.

Прежде чем смотреть в ответ, попробуйте решите задачу самостоятельно. Важно не само по себе решение задачи, а умение сделать это самостоятельно без «сторонних» подсказок.

Ответы к задачам из § 1.1

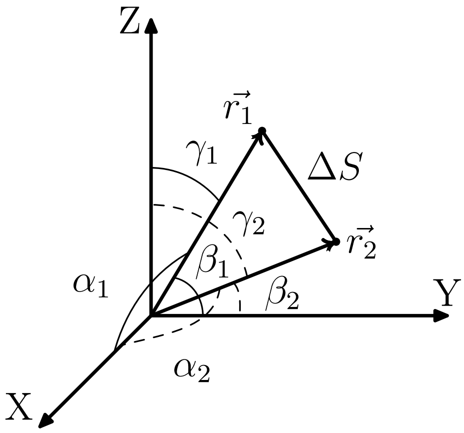
1.1.1 $t = 1$ мин.
1.1.2 $t = \ell/(v+u)$.
1.1.3 $t = 30$ мин.
1.1.4 $v = 6\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$.
1.1.5 Уменьшится в k раз.
1.1.6 $c = \frac{L}{t_A - t_B}$. На расстоянии $L\frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}$ от точки A. $t = \frac{2t_B - t_A + t_C}{2}$.
1.1.7 $v = 10^7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
1.1.8 На расстоянии 1 м от счётчика B.
1.1.9 При $L > 4R$ на расстоянии от стенок большем $2R$; $P = \frac{2R}{L-2R}$. При $4R > L > 2R$ на расстоянии от стенок большем, $L - 2R$; $P = 1$.

1.1.10 $n = \frac{k+1}{k-1}$. Пусть c — скорость звука, а v — скорость тела. Когда от тела отразился звуковой импульс, следующий за ним импульс находился от тела на расстоянии $c\tau$. За время $\tau_1 = ct/(c-v)$ он догонит тело и тоже отразится от него. В этот момент первый отражённый импульс будет находиться от тела на расстоянии

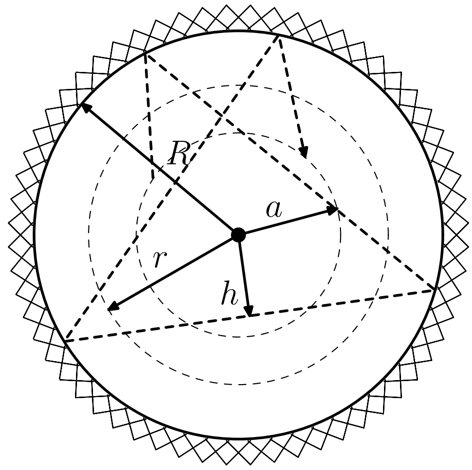
$$l = \tau_1 \cdot (c+v) = c\tau_0 \cdot \frac{c+v}{c-v}.$$

Поэтому на локатор возвращаются импульсы, разделённые временным интервалом

$$\tau = l/c = \tau\frac{c+v}{c-v} = k\tau.$$



К решению 1.1.20



К решению 1.1.22

Из последнего равенства следует, что скорость v в $\frac{k+1}{k-1}$ раз меньше скорости звука.

1.1.11 $n = \frac{k+1}{k-1}$.
1.1.12 а) $v \simeq 60\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$, б) $v \simeq 200\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
1.1.13 $\tau = (\sqrt{l^2 + 4h_1h_2} - \ell)/c$.
1.1.14 $n \simeq 1.8$.
1.1.15 $v = u/\cos\alpha$.
1.1.16 $u = v\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
1.1.17 $v = u\frac{H}{H-h}$.
1.1.18 $\tau = L\left(\frac{\cos\alpha}{v} - \frac{\sin\alpha}{u}\right)$.
1.1.19 $v \simeq 240\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
$\Diamond$ 1.1.20 За время $(t_2 - t_1)$ координаты тела изменились на

$$\Delta x = r_2\cos\alpha_2 - r_1\cos\alpha_1$$
$$\Delta y = r_2\cos\beta_2 - r_1\cos\beta_1$$
$$\Delta z = r_2\cos\gamma_2 - r_1\cos\gamma_1$$

Поэтому скорость тела определяется формулой:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{t_1 - t} =$$
$$= \frac{\sqrt{(r_2\cos\alpha_2 - r_1\cos\alpha_1)^2 + (r_2\cos\beta_2 - r_1\cos\beta_1)^2 + (r_2\cos\gamma_2 - r_1\cos\gamma_1)^2}}{t_1 - t},$$

$\cos\gamma_1$ и $\cos\gamma_2$ в этой формуле определяется из равенства:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ответ:

$$v = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)}}{t_2 - t_1},$$

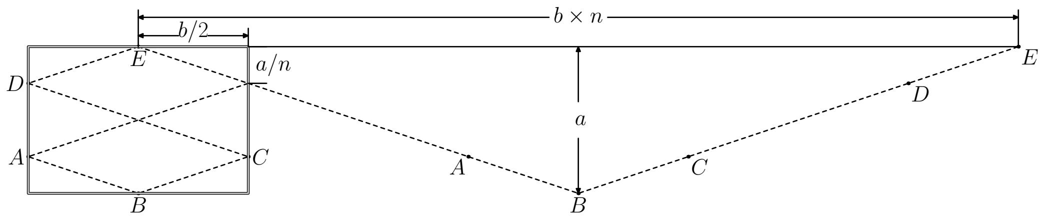
где $\cos\gamma_1 = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1}$, $\cos\gamma_2 = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\beta_2}$.

1.1.21 $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, если $\alpha < \frac{\pi}{2}$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, если $\alpha < \frac{\pi}{4}$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - n\alpha$, если $\alpha < \frac{\pi}{n}$.

◊ 1.1.22 а) $P = \sqrt{\frac{r^2-h^2}{R^2-h^2}}$, при $r > h$, и $P = 0$ при $r < h$.

На рисунке изображена часть траектории шарика. При упругом ударе угол падения равен углу отражения, и поэтому шарик после очередного отражения опять пролетит на расстоянии h от центра полости. Вероятность обнаружить шарик на расстоянии меньшем r определяется долей времени, когда шарик находится внутри окружности радиуса r. Поэтому при $r > h$ вероятность P равна $\sqrt{r^2 - h^2}/\sqrt{R^2 - h^2}$ — отношение длины хорды окружности радиуса r к длине хорды окружности радиуса R.

б) $P = \frac{\sqrt{r^2-h^2}-\sqrt{a^2-h^2})}{\sqrt{R^2-h^2}}$ при $a > h$; $P = \sqrt{\frac{r^2-h^2}{R^2-h^2}}$ при $a < h < r$; $P = 0$ при $r < h$.



К решению 1.1.23

◊ 1.1.23 n раз. На рисунке к ответу траектория движения развёрнута зеркальными отображениями из траектории движения между двумя параллельными прямыми. Соответствующие точки на траекториях отмечены одинаковыми буквами. Из рисунка следует, что шар вернётся на прежнее место после n ударов о борта, длина которых равна a.

1.1.24 а) $u = \frac{\Delta}{a\sqrt{8}}v$.

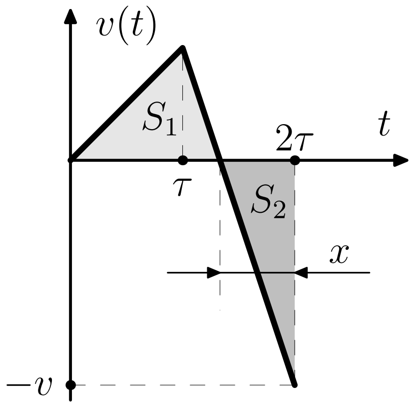
б) $T = \frac{a^2\sqrt{2}}{v\Delta}$, $h = \Delta\sqrt{2}$.

в) $T = \frac{a^2\sqrt{2}}{v\Delta} \cdot k$, $h = \frac{\Delta\sqrt{2}}{k}$.

г) Пусть $\Delta/a = k/n$, где k и n — целые положительные числа в интервале от 0 до N, и вероятность появления каждой пары чисел k и n — одинакова. Тогда при $N \to \infty$ вероятность события, для которого число $k < K$, где K — сколь угодно большое, но ограниченное число, стремится к нулю. Но это означает нулевую вероятность того, что $h > \Delta\sqrt{2}/K$, где K — сколь угодно большое, но ограниченное число.

1.1.25 $S = (u/2v)L$.

Ответы к задачам из § 1.2



К решению 1.2.8

1.2.1 а) $t = 2$ с, б) $t = (\sqrt{2} - 1)$ с.

1.2.2 $a = 2.25\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.2.3 $a = v^2/2\ell$, $t = 2\ell/v$.

1.2.4 $\ell > v^2/2a$.

1.2.5 $\tau = [t_1t_2 - \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)]/(t_1 - t_2)$.

1.2.6 Во втором случае.

1.2.7 $S_1 = \frac{a_1(a_1+a_2)}{2a_2}\tau^2$;
$S_2 = v_0\tau + \frac{1}{2}a_1\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{(v_0+a_1\tau)^2}{a_2}$.

◇ 1.2.8 а) $\ell = \frac{1}{3}v\tau$. Площади треугольников S_1 и S_2 на графике зависимости скорости поезда от времени одинаковы. Поэтому время движения поезда по направлению к станции равно $\frac{2}{3}\tau$, а площадь нижнего треугольника, которая определяет максимальное удаление поезда от станции равно $\frac{1}{2}xv = \frac{1}{3}v\tau$.

б) $\ell = (\tau + T)\cdot vT/2(\tau + 2T)$.

1.2.9 а) $t = \frac{v}{9} - \frac{1}{2}\tau$, если $\tau < \frac{2v}{9}$, и не будет сталкиваться, если $\tau > \frac{2v}{g}$.

б) $v < \frac{1}{2}g\tau$.

в) $\tau = \frac{\sqrt{v^2+2gh}+v}{g}$, $u = \sqrt{v^2 + 2gh}$.

◇ 1.2.10 См. рис.

◇ 1.2.11 $v_{max} = \sqrt{2Sg} = 4.43\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\tau = \sqrt{\frac{2S}{g}} = 0.452$ с.

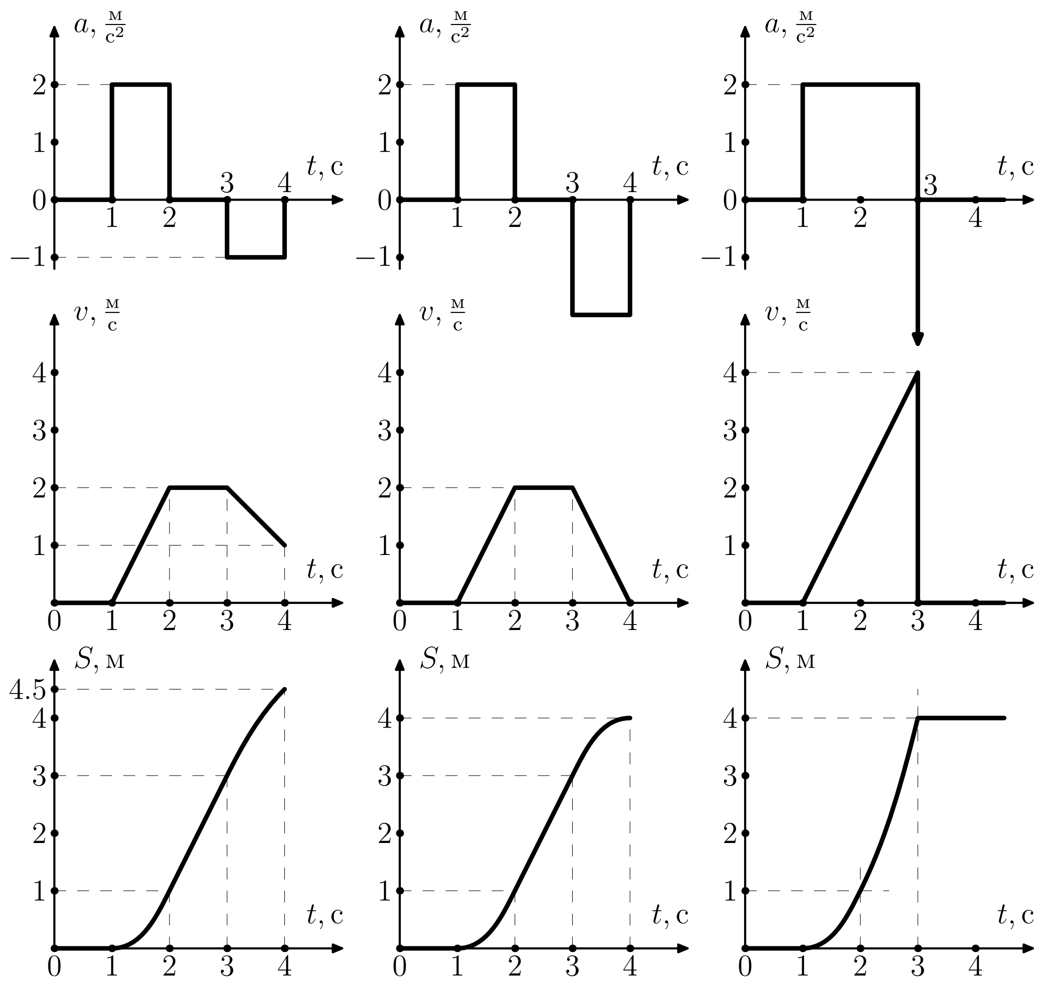
◇ 1.2.12 См. рис.

◇ 1.2.13 См. рис.

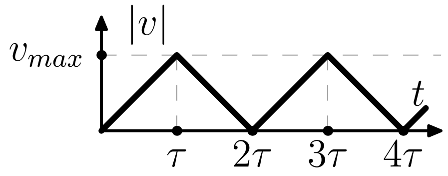
1.2.14 $\ell = \frac{1}{3}a\tau^2$.

1.2.15 а) $T = \sqrt{2\ell\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$,

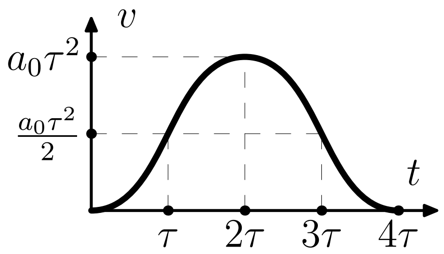
б) $T = \sqrt{2\ell\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$, если $v > \sqrt{2\ell/\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$ и $T = \frac{\ell}{v} + \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$, если $v < \sqrt{2\ell/\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$.



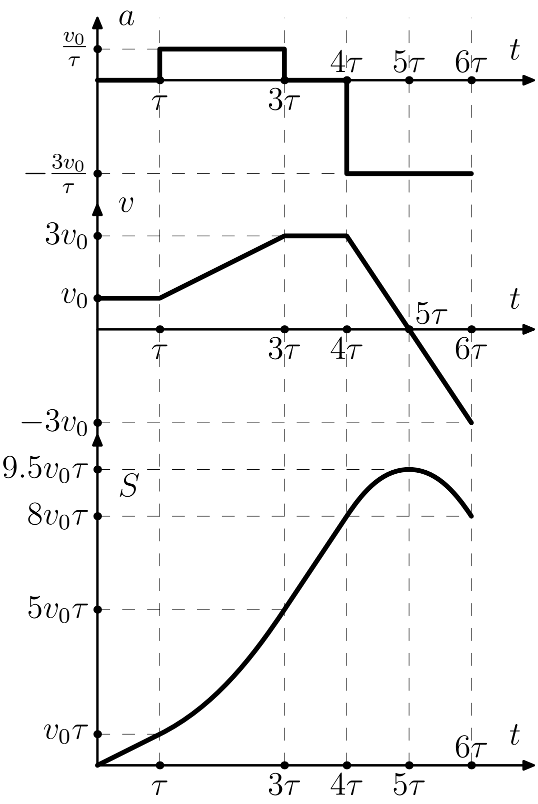
К решению 1.2.10



К решению 1.2.11



К решению 1.2.13



К решению 1.2.12

Ответы к задачам из § 1.3

1.3.1 а) $T = 2v\sin\alpha/g$, б) $T = \left(\sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh} + v\sin\alpha\right)/g$.

1.3.2 $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0 gt\sin\alpha}$, $r = t\sqrt{v_0^2 + \frac{1}{4}(gt)^2 - v_0 gt\sin\alpha}$.

1.3.3 $v \simeq 5.7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

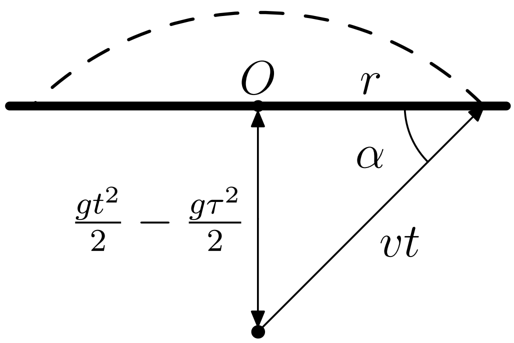
1.3.4 $v = \sqrt{2g(H - h + S^2/4H)}$.

1.3.5 $t \simeq 0.61$ с.

1.3.6 $v \simeq 17\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.3.7 $S \simeq 13$ м.

1.3.8 а) Круг радиуса $v\tau$. ◇ б) В момент времени t после взрыва осколки находятся на сферической поверхности радиуса $R = vt$, центр которой находится на высоте $h - \frac{gt^2}{2}$, где $h = \frac{g\tau^2}{2}$ — высота, на которой произошёл взрыв снаряда. На рисунке участок этой сферической поверхности изображён в момент времени, когда $h - \frac{gt^2}{2} < 0$. Радиус области, покрытой осколками r. Граница этой области движется со скоростью $u = \frac{v}{\cos\alpha} - gt\operatorname{tg}\alpha$. Первое слагаемое связано с увеличением радиуса сфе-



К решению 1.3.8 б)

ры, второе — с опусканием её центра тяжести со скоростью gt. Пусть в момент времени t_0 скорость u обращается в 0. При $t < t_0$ $u > 0$, а при $t > t_0$ $u < 0$, следовательно при $t = t_0$ осколки падают на Землю на максимальном расстоянии от центра O. Используя рисунок, получаем:

$$t_0 = \frac{v}{g\sin\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{g(t^2-\tau^2)}{vt}.$$

Из последних равенств следует, что $t_0 = \sqrt{\tau^2 + 2(v/g)^2}$, поэтому радиус круга, покрытого осколками, определяется формулой:

$$r_0 = \sqrt{(vt_0)^2 - \left[\frac{1}{2}g(t_0^2 - \tau^2)\right]^2} = v\tau\sqrt{1 + (v/g\tau)^2}.$$

1.3.9 а) $t = (2v/g)\operatorname{tg}\alpha$, $\ell = (2v^2/g)\sin\alpha/\cos^2\alpha$.

б) $\ell = (2v^2/g)\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha/\cos^2\beta$.

1.3.10 $\cos\alpha = v/u$, где u — скорость снаряда должна быть больше $\sqrt{v^2 + 2gh}$.

1.3.11 $v = \sqrt{2(g+a)\ell/\sin 2\alpha}$.

1.3.12 $h = \frac{(v\sin\alpha)^2}{2g} - \frac{gL^2}{8(v\cos\alpha)^2}$.

1.3.13 $v = \frac{1}{2}gT\sin 2\alpha$.

1.3.14 $v = 2R/T$.

1.3.15 $t = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}\right)\frac{v}{g}$, если $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2\sqrt{2}$, $t = 2v\sin\alpha/g$, если $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2\sqrt{2}$.

1.3.16 а) $v = \sqrt{gR}$, если $\frac{hR}{r(R-r)} < 1$, и $v = \sqrt{\frac{1}{2}gR\left(\frac{hR}{r(R-r)} + \frac{r(R-r)}{hR}\right)}$, если $\frac{hR}{r(R-r)} > 1$.

б) $v=\sqrt{(\sqrt{R^2+h^2}+h)g}$, если $\frac{hR}{r(R-r)}<1$, и $v=\sqrt{\left[\frac{1}{2}R\left(\frac{hR}{r(R-r)}+\frac{r(R-r)}{hR}\right)+2h\right]g}$. если $\frac{hR}{r(R-r)}>1$.

1.3.17 а) $v=\sqrt{rg}$, б) $v=\sqrt{(R+2H)g}$.

1.3.18 $v=\sqrt{(R+r)g}$.

1.3.19 $a=g\ell/h$.

1.3.20 Через время τ ракета поднимется на высоту $y=(a\sin\alpha-g)\tau^2/2$ и переместится в горизонтальном направлении на расстояние $x=(a\cos\alpha)\tau^2/2$. В этот момент времени вертикальная составляющая скорости $v_y=(a\sin\alpha-g)\tau$, а горизонтальная $v_x=a\cos\alpha\tau$. В момент приземления вертикальная составляющая скорости

$$v'_y=-\sqrt{v_y^2+2gy}=-\tau\sqrt{(a\sin\alpha-g)^2+(a\sin\alpha-g)g},$$

поэтому время свободного полёта

$$t=\frac{v'_y-v_y}{g}=\left(\frac{a}{g}\sin\alpha-1+\sqrt{\left(\frac{a}{g}\sin\alpha-1\right)\frac{a}{g}\sin\alpha}\right)\tau,$$

а дальность полёта

$$\ell=x+v_xt=a\tau\left(t+\frac{1}{2}\tau\right)\cos\alpha.$$

1.3.21 $t=2v\sin\alpha/(g-a\sin\alpha)$, $\ell=gv^2\sin 2\alpha/(g-a\sin\alpha)^2$.

Ответы к задачам из § 1.4

1.4.1 $\ell=\frac{1}{3}v\tau$.

1.4.2 $v=a\tau$.

1.4.3 $v=a_0(t_2-\frac{1}{2}t_1)$, $\ell=a_0\left[\frac{1}{3}t_1^2+\frac{1}{2}t_1t_2-\frac{1}{2}t_2^2+t(t_2-\frac{1}{2}t_1)\right]$.

1.4.4 $v=R/3t$.

1.4.5 $t=R/q$.

1.4.6 $v=v_0r^2/(h^3-r^2vt/\sin\alpha)^{2/3}$.

1.4.7 $q=\pi R^2h/t_0$, $v=R/2\sqrt{tt_0}$.

1.4.8 В 32 раза.

1.4.9 $|\Delta v|=\alpha h$.

1.4.10 б) $\ell=(v_0/2\alpha)(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t})$, $v=\frac{1}{2}v_0(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})$.

1.4.11 $T=2\pi x_0/v_0$.

1.4.12 $T=0.06$с.

1.4.13 $T = v_0/\omega$.
1.4.14 $A > g/\omega$.
1.4.15 а) $\ell = v_0 t - \frac{1}{4}\pi v_0 \tau$, б) $v = a_0(t - \frac{1}{2}\tau)$.
1.4.16 $a_н = 2\frac{м}{с^2}$, $a = \sqrt{5}\frac{м}{с^2}$, $a_1 = \sqrt{2}\frac{м}{с^2}$.
1.4.17 а) $a = a_0\sqrt{1 + (a_0 t^2/R)^2}$, б) $a = \alpha t\sqrt{4 + (\alpha t^3/R)^2}$.
1.4.18 $v = a_0 t\cos\varphi$, $a = a_0(\cos\varphi - \omega^2 t^2 \sin\varphi$, где $\varphi = \frac{1}{2}a_0 t^2/R$.
1.4.19 $a_1 = v_0^2/(R + H/4\pi^2 R)$, $a_2 = a_0\sqrt{1 + [a_0 t^2/(R + h^2/4\pi^2 R)]^2}$.
1.4.20 $v = \omega\ell/\cos^2\varphi$.
1.4.21 $v = v_0(L/R - \sin\varphi)$, где $\varphi = (v_0/R)t$.
1.4.22 $v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2\ell^2}$, $a = \omega\sqrt{4v_0^2 + \omega^2\ell^2}$.
1.4.23 $v = (4\ell/h)\sin^2\alpha$, $a = (\ell u^2/h^2)\sin^3\alpha\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$.
1.4.24 $a = 4\omega^2 R$.
1.4.25 $x = \sqrt{R^2 - hv_0 t/\pi}$, $v = hv_0/2\pi\sqrt{R^2 - hv_0 t/\pi}$.
1.4.26 $a = uv/\ell$.
1.4.27 а) $a_0 = v^2/\ell$, $a_1 = v^2/(\ell - vt)$. б) В центре треугольник через $t = \frac{2}{3}(\ell/v)$. $a_0 = v^2\sqrt{3}/2\ell$, $a_1 = v^2\sqrt{3}/(2\ell - 3vt)$.
1.4.28 $r = (v_0^2 + \omega^2\ell^2)^{3/2}/\omega(2v_0^2 + \omega^2\ell^2)$.

Ответы к задачам из § 1.5

1.5.1 $N = v/2\pi R = 8\,\frac{1}{с}$, $\omega = 50\,\frac{1}{с}$, $v = 5\,\frac{м}{с}$.
1.5.2 $v_{min} = v$, $v_{max} = \sqrt{v^2 + (\omega R)^2}$.
1.5.3 $v = 30\,\frac{км}{с}$, $v_{max} = v(1 + r/R)$.
1.5.4 $\Delta v \simeq 31\,\frac{км}{час}$.
1.5.5 а) $v = 2v_0$, б) $v = v_0\sqrt{2h/R}$.
1.5.6 а) $v_1 = v$, $v_2 = v\sqrt{3}$, б) $v_{min} = v(1 - r/R)$, $v_{max} = v(1 + r/R)$, в) $f = v^2/R$, $a_r = (v/R)^2 r$.
1.5.7 $a = \sqrt{a_0^2 + (v^2/R)^2}$.
1.5.8 а) $L = 2\pi R$, $r = R\sqrt{8R/h}$, б) $L = 2\pi R$, $r_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{(r^2 - R^2 + 2Rh)^{3/2}}{R^2 - r^2 - Rh}$.
1.5.9 $v = \sqrt{\pi Rgn}$, где $n \in [1, \infty)$ — число оборотов колеса.
1.5.10 $x = 2L$.
1.5.11 а) $v_1 = \frac{1}{2}(v - u)$, $\omega = (v + u)/2R$,
б) $v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha}$, $\omega = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos\alpha}/2R$.
1.5.12 $v = 2r\omega\sin\omega t$, $a = 2r\omega^2\cos\omega t$.
1.5.13 $v = \frac{1}{2}\omega(R + 2r)$.
1.5.14 $x = \frac{1}{3}\ell$.
1.5.15 $v_1 = 2v\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $v_2 = v/2\sin\alpha$.
1.5.16 $u_1 = v\cos\alpha/\cos\beta$, $u_2 = v\sin(\alpha + \beta)/2\cos\beta$.
1.5.17 $u = v\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\omega_1 = \frac{v}{R}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\omega_2 = \frac{v}{R}\sec\alpha$.

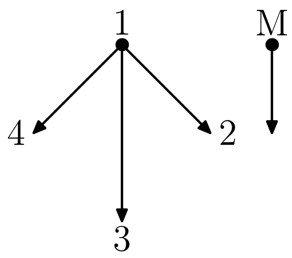
Ответы к задачам из § 1.6

1.6.1 $v_1 = \frac{2}{3}v$, $v_2 = \sqrt{v^2 + u^2 - vu}$, $v_3 = \frac{4}{3}v$.

1.6.2 а) Уменьшится в три раза. б) $v_1 = \sqrt{v^2 + s\sqrt{2}vu + 4u^2}$. в) 2.5.

1.6.3 $u = 2v$.

1.6.4 $h = |(v \sin\alpha - u \sin\beta)/(v \cos\alpha + u \cos\beta)|L$.



К решению 1.6.5

◊ 1.6.5 На рисунке изображены скорости Мазая и зайцев 2–4 в системе координат, в которой заяц 1 неподвижен.

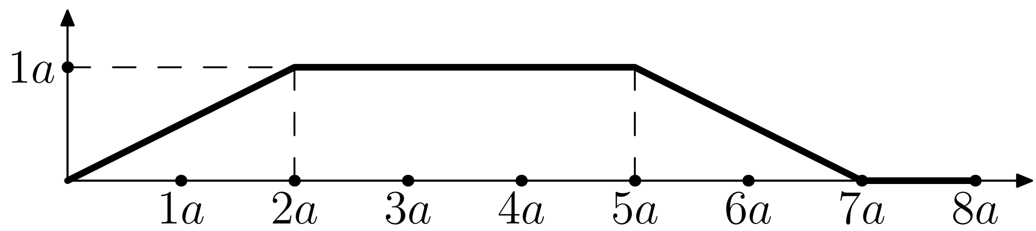
1.6.6 Такую же.

1.6.7 $u = 2v \sin\frac{\alpha}{2}$.

1.6.8 а) $v = \frac{1}{2}(v - u)$. б $u = 3v$.

1.6.9 а) $N = n\pi R^2 T\sqrt{v^2 + u^2}$.

б) $N = n(2RLu + \pi R^2 v)T$. Тангенс угла между осью цилиндра и направлением его движения равен v/u, если $L > \frac{\pi}{2}R$, и $\frac{u}{v}$, если $L = \frac{\pi}{2}R$.



К решению 1.6.10

◊ 1.6.10 Пусть a — длина плота, тогда траектория плывущей собаки изображена на рисунке.

1.6.11 В $\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$ раз.

1.6.12 Увеличится в $\frac{v\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2\alpha}}{v^2 - u^2}$ раз.

1.6.13 а) $u = v \sin\alpha/\sin(\beta - \alpha)$.

б) $u = v\sqrt{2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)/\sin^2(\alpha + \beta) - 1}$.

в) $u = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(v_1 - v_2)^2 - (v_1 + v_2)^2 \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}\right] - 2\frac{v_1^2 \sin\beta\cos\alpha + v_2^2 \sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}}$.

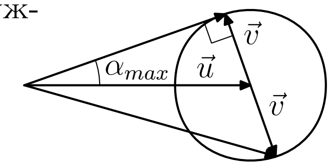
1.6.14 На разливе.

1.6.15 Так как время между ударами шарика о плиту не зависит от преобразования Галилея, то лучше решать эту задачу для такого движущегося состояния, где плита неподвижна, а шарик будет в начальный момент иметь скорость u вверх. После удара скорость шарика в этом состоянии будет равна $v = \sqrt{u^2 + 2gh}$. Поэтому время между двумя последовательными ударами будет равно $T = 2v/g = 2\sqrt{u^2/g^2 + 2h/g}$.

1.6.16 Проекция на горизонталь $v_x = v_0 \cos\alpha - 2u$; проекция на вертикаль $v_y = v_0 \sin\alpha + (2n-1)\ell g/(v_0 \cos\alpha - u)$.

1.6.17 $v = u + \sqrt{u^2 - w^2}$.

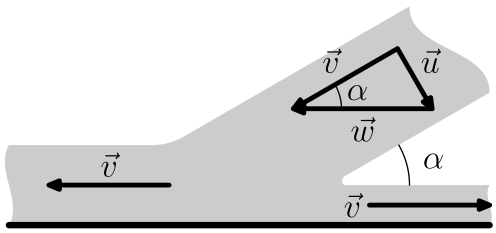
◊ 1.6.18 На рисунке представлено решение. Окружность представляет из себя возможные варианты для векторов скоростей распада. Максимальный угол для вектора скорости соответствует углу для касательного вектора к этой окружности и равен $\alpha_{max} = \arcsin(u/v)$.



К решению 1.6.18

1.6.19 $u = v\sqrt{k(k-2)}$. При $k \leqslant 2$ таких осколков нет.

◊ 1.6.20 Перейдём в состояние, в котором жидкость направлена вдоль падающей струи, как на рисунке. Для этого необходимо перейти в систему отсчёта, двигающуюся со скоростью $-\vec{w}$, где $w = u/\sin\alpha$. При переходе в первоначальное состояние надо будет прибавить ко всем скоростям $-\vec{w}$. Как следствие:



К решению 1.6.20

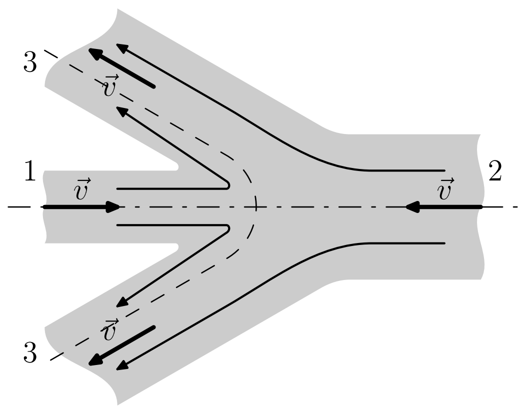
$$v_{min} = v_{\leftarrow} = v - w = u \operatorname{ctg}\alpha - u/\sin\alpha = u(1-\cos\alpha)/\sin\alpha = u \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$
$$v_{max} = v_{\rightarrow} = v + w = u \operatorname{ctg}\alpha + u/\sin\alpha = u(1+\cos\alpha)/\sin\alpha = u \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

1.6.21 Решение для этой задачи почти полностью эквивалентно решению задачи №1.6.20. В силу симметрии среднюю линию можно представить как горизонтальную плиту, ничего при этом не изменив. $v_{min} = u \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $v_{max} = u \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

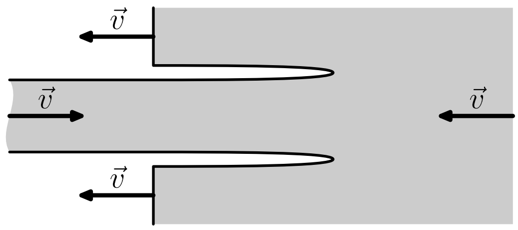
◊ 1.6.22 Как формируется струя металла, которая пробивает броню, кратко описано в решениях задач 1.6.20 и 1.6.21. Далее обсудим почему скорость струи металла внутри брони в два раз меньше, чем вне её.

Рассмотрим две летящие с одинаковой скоростью друг на встречу другу струи 1 и 2, изображённые на рис. а). По аналогии с решением задачи 1.6.21 можно заключить, что результатом встречи этих двух струй будет конический «зонтик» 3–3. «Зонтик» будет иметь ту же скорость, что и встречающиеся струи.

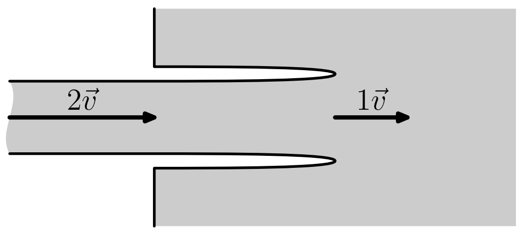
При увеличении радиуса струи 2 угол конуса «зонтика» уменьшается. В предельном случае, когда струя 2 очень толстая, мы получаем ситуацию, изображённую на рис. б). В этом случае струя 2 моделирует броневую плиту, а струя 1 кумулятивную струю, которая прожигает в броне «нору» с радиусом близким к радиусу струи 1.



К решению 1.6.22 а)



К решению 1.6.22 б)



К решению 1.6.22 в)

Теперь перейдём в систему отсчёта, где плита становится неподвижной (см. рис. в)). В этом случае скорость струи становится равной $2v$, а место встречи струи будет двигаться в плите со скоростью v. Это означает, что налетающая на неподвижную плиту струя дырявит её со скоростью в два раза меньшей скорости жидкости в струе. Таким образом, утверждение «...летит металл, причём самым необъяснимым образом: перед плитой около 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, внутри плиты 4 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, а за плитой 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$ » расшифровывается так: Металл из снаряда вылетает со скоростью 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, затем дырявит плиту со скоростью 4 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, а, проделав дыру, летит через неё опять со скоростью 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Ответы к задачам из § 1.7

1.7.1 $x = h + v(t - t_0) - \dfrac{1}{2}g(t - t_0)^2$.

1.7.2 $\dot x = \sqrt{x_0^2\omega_0^2 + v_0^2}\ \cos\left(\omega_0(t - t_0) + \operatorname{arctg}(x_0\omega_0/v_0)\right)$.

1.7.3 $T = 2\left(t_0 + \dfrac{v}{g}\right)$, $L = 2\ell\left(1 + \dfrac{v}{gt_0}\right)$.

1.7.4 $h = \dfrac{1}{2}gt^2\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$, $\ell = \dfrac{gt^2}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

1.7.5 $H = \dfrac{1}{2}(h_1 + h_2) + \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1}\right)^2 + \dfrac{1}{8}g(t_2 - t_1)^2$, $L = \dfrac{\ell}{t_2 - t_1}\sqrt{\dfrac{8H}{g}}$.

1.7.6 $x = \frac{1}{2}x_0\left(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}\right)$, $\dot{x} = \frac{1}{2}\gamma x_0\left(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}\right)$.
1.7.7 $x = A + Be^{-\gamma t}$, $\dot{x} = v_0 e^{-\gamma t}$.
1.7.8 $t = \frac{1}{\alpha v_0}$.
1.7.9 $x = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\ t\right)$, $\dot{x} = v_0 e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\ t\right)$.
1.7.10 $x_m = \frac{v_0(\gamma - \omega_1)}{2\omega_1\omega_0} \times \left[\left(\frac{\gamma + \omega_1}{\omega_0}\right)^{\gamma/\omega_1} - \left(\frac{\gamma - \omega_1}{\omega_0}\right)^{\gamma/\omega_1}\right]$, где $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$; при $\omega_0 \to 0$, $x_m \to v_0/\gamma$.

Ответы к задачам из § 8

8.1 Теперь решите эти примеры не спеша или опробуйте их на своих друзьях и сравните результаты. В крайнем случае воспользуйтесь калькулятором, хотя это и не желательно. Если Вы придумаете свой интересный пример, то дайте знать мне об этом по электронной почте E.M.Baldin@inp.nsk.su и, если вы позволите, то этот пример войдёт в следующую ревизию сборника. Это касается любой задачи этого параграфа.

8.2 Смотри ответ к задаче 8.1.

8.3 Первое число — самое большое, последнее — самое маленькое.

8.4 В одном килобайте $2^{10} = 1024$ байта, а в одном гигабайте $2^{30} = 1024^3 = 10^9 \times (1 + 0.024)^3 \simeq 10^9 \times (1 + 3 \times 0.024) = 1.072 \cdot 10^9$. Результат отличается от того гигабайта, как его вычисляют производители жёстких дисков, на 7%.

8.5 Следует учесть, что в формуле $\sin\alpha \simeq \alpha$ используются радианы.

8.6 В году $\pi \times 10^7$ с, ваш пульс 60–70 ударов в минуту, вы знаете сколько вам лет — ответ очевиден.

8.7 $\cos\alpha \simeq 1 - \alpha^2/2$, 6° это примерно 1/10 радиана, следовательно $\cos 6^\circ \simeq 0.995$, что отличается от более точного значения: 0.9945218953682 меньше чем на 0.1%.

8.8 Я оценивал скорость на широте г. Новосибирска (55° северной широты) и при быстрой оценке у меня получилось 340 м/с. При более точном вычислении вышло 380 м/с. Отличие чуть больше 10%.

8.9 $h = 400/12 \simeq 30$.

8.10 При аннигиляции вещества выделяется энергия равная mc^2, где m — масса вещества, а c — скорость света. Поэтому $m = N\lambda/c^2 \simeq 1.5$ кг, где $N \simeq 150 \cdot 10^6$ — население России, $\lambda \simeq 10^9$ Дж — расход электроэнергии на одного человека в год, а $c \simeq 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Ответы к задачам из § 9

9.1	$2ax$	$x^{-1/2}$	$-x^{-2}$
	$3\sin^2 x\cos x$	$\cos^{-2} x$	$\cos 2x$
	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
	$a^x \ln a$	$\ln x + 1$	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

9.2 а) $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$

9.3 $\dfrac{d\ln x}{dx} = 1/x$

9.4 а) $a(t) = 0$

б) $a(t) = a$

в) $a(t) = \alpha t^{3/2}/4$

г) $a(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

д) $a(t) = Ae^{-\gamma t}\left((\gamma^2 - \omega_1^2)\sin(\omega_1 t + \varphi) - 2\gamma\omega\cos(\omega_1 t + \varphi)\right)$

9.5 Например, x^3 в точке $x = 0$. Это точка «перегиба». Посмотрите на график этой функции.

9.6 Минимум будет при $t = 4$с, а максимум будет на границе при $t = 10$ с.

9.7 $\pi/2 + \pi n$ и $\pi/2 \pm \pi/3 + 2\pi n$, где n — целое.

9.8 б) Описанные конструкции — это одна из записей косинуса и синуса. Так называемые, формулы *Эйлера.* Достаточно показать, что сумма квадратов равна 1 и что при дифференцировании эти конструкции ведут себя сообразно косинусу и синусу.

9.10 $a = A\omega^2$.

Ответы к задачам из § 10

10.1	$2x^2$	$2x^{1/2}$	x^{-1}
	$\sin^3 x$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{2}\sin 2x$
	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
	a^x	$x\ln x$	$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

10.3 Нарисовать круг, взвесить его. Точно так же взвесить квадратный кусок миллиметровки со стороной равной радиусу круга. Отношение масс и будет равно π. Академик Л.М. Барков рассказывал, что подобным образом с помощью взвешивания он вычислял интеграл, необходимый для написания его дипломной работы. При этом утверждалось, что точность была вполне адекватная.

10.4 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx = \pi.$

10.5 $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = 1.$

10.6 $V_{\text{пирамиды}} = Sh/3.$

10.7 Производные от левой и правой части равенства в задаче 10.7 одинаковы.

10.8 $< \cos^2 \omega t >= 1/2.$

10.9 а) $A = mgh$, б) $A = kx^2/2$, в) $A = \frac{kqQ}{r_1} - \frac{kqQ}{r_1}.$

10.10 $\ell = (10/\ln 2)$ м.

Послесловие

Данный документ распространяется под лицензией GNU FDL (GNU Free Documentation License) версии 1.1 с ограничением изложенным ниже. Основные положения GNU FDL лицензии: Вы можете распространять этот документ в любом виде при условии предоставления исходных текстов; Вы можете распечатывать этот документ для себя; Вы можете его модифицировать (или копировать часть информации) при условии *сохранения на результат текущей лицензии*; при печати больших тиражей ($>$ 100 экземпляров), а также для изменения текущей лицензии Вам следует получить разрешение *всех* авторов. Для получения более подробной информации об этом типе лицензии следует обратиться к первоисточнику по адресу www.gnu.org. Существует русский перевод лицензии выполненный и прокомментированный Еленой Тяпкиной.

Дополнительное ограничение к GNU FDL лицензии на этот текст: *Запрещается модифицировать существующий текст и все его производные, добавляя решения к уже существующим задачам. Так же запрещается создавать сборники решений для задач из этого пособия.* Это не «решебник» — это «ЗАДАЧНИК», и он *должен* таковым и остаться.

Замечания, связанные с содержанием и оформлением данного пособия, просьба высылать Балдину Евгению Михайловичу по электронной почте E.M.Baldin@inp.nsk.su . *Предложения и исправления принимаются с благодарностью.* По этому же адресу следует связаться для получения исходников.

Авторы выражают признательность Ольге Леонардовне Белобородовой, Андрею Михайловичу Карташову, Илье Олеговичу Орлову, Александре Аристовой, Олегу Замятину, Тимуру Заляеву, Александру Нуждину и Игорю Ловинскому за замеченные ошибки и интересные замечания.