

# Физика плазмы

**Часть 5. Теоретические модели, используемые  
при исследовании плазмы.**

**Кинетическое уравнение**

**Поступаев Владимир Валерьевич**

Кафедра физики плазмы НГУ

ИЯФ СО РАН, 339-42-74, V.V.Postupaev@inp.nsk.su

<http://www.inp.nsk.su/chairs/plasma/sk/fpl.ru.shtml>



# Иерархия теоретических моделей

---

Полный и точный учёт всех полей и взаимодействий частиц в плазме обычно невозможен, поэтому для её описания применяют одну из упрощённых моделей.

Расчёт движения частиц



Кинетический подход (расчёт функции распределения)

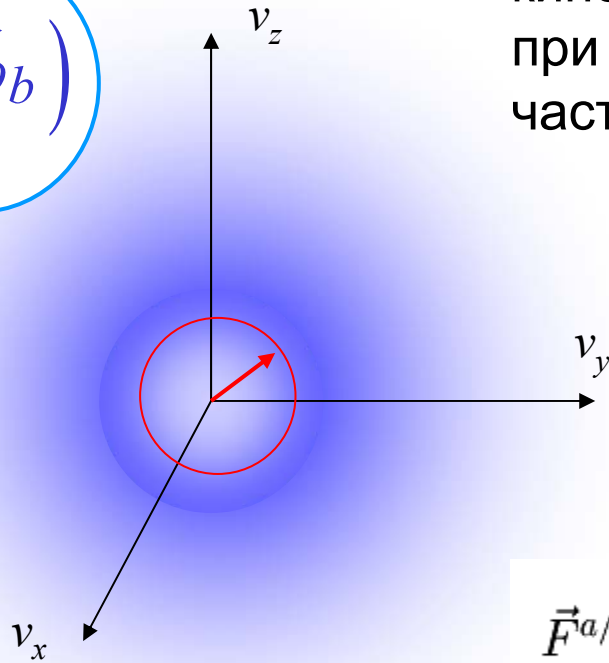


Магнитная гидродинамика (расчёт макроскопических параметров)

переход к модели более высокого уровня обычно означает, что приходится пренебрегать частью физических эффектов, т.е. модели более высокого уровня ограничивают классы описываемых физических явлений!

# Кинетическое уравнение с самосогласованным полем

$$f_b(\vec{v}_b)$$



кинетический подход уже использовался  
при выводе силы торможения пробной  
частицы в плазме

$$\vec{F}^{a/b} = \int d\vec{F}^a = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \int f_b(\vec{v}_b) \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3} d\vec{v}_b$$

$f_b(\vec{v}_b)$  - функция распределения частиц сорта  $b$  по скоростям

# Функция распределения

самое полное описание плазмы

$$f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dN}{d\vec{r} \cdot d\vec{v}}$$

$a$  – сорт частиц (электроны, ионы, атомы .....

$dN$  – число частиц в фазовом объёме  $d\vec{r} \cdot d\vec{v}$ ,  $dN \gg 1$

Через функцию распределения можно выразить  
макроскопические параметры:


плотность частиц:  $n_a(\vec{r}, t) = \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$

плотность тока:  $\vec{j}_a(\vec{r}, t) = q_a \int \vec{v} f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad \dots \text{ и т.п.}$



Частицы изменяют положение и скорость  $\rightarrow$  функция распределения изменяется

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{q_a}{m_a} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \quad \star$$

# Самосогласованное и случайное поле

в уравнении  поля можно разбить на две составляющие:

$$\vec{E} = \underbrace{\langle \vec{E} \rangle}_{\text{blue}} + \underbrace{\vec{E}_{сл}}_{\text{pink}} \qquad \vec{B} = \underbrace{\langle \vec{B} \rangle}_{\text{blue}} + \underbrace{\vec{B}_{сл}}_{\text{pink}}$$

-  - получается усреднением по объёму с большим числом частиц (**самосогласованное поле**)  $\Rightarrow$  плавное изменение скорости
-  - случайное поле, создаваемое отдельными частицами  $\Rightarrow$  изменение скорости скачком (**столкновения**)

$$\underbrace{\frac{\partial f_a}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{X}_n f_a}{\partial X_n}}_{\text{blue}} + \underbrace{\sum_b St_{ab}}_{\text{pink}}$$

**уравнение непрерывности**  
в шестимерном пространстве  
 $n = 1 \dots 6, X = (\vec{r}, \vec{v})$

**интеграл столкновений**  
с частицами сорта  $b$

# Кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \dot{X}_n f_a}{\partial X_n} = \frac{\partial \vec{v} f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{a} f_a}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \vec{v} f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left( \frac{q_a}{m_a} \left( \langle \vec{E} \rangle + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \langle \vec{B} \rangle \right] \right) f_a \right) =$$

(далее угловые скобки - знак усреднения опускаем)

$$= (\vec{v} \nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} + \underbrace{\frac{q_a}{m_a c} \frac{\partial [\vec{v} \times \vec{B}]}{\partial \vec{v}} f_a}_{= 0}$$

так как  $\frac{\partial}{\partial v_a} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta B_\gamma = \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma \equiv 0$

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \sum_b St_{ab}$$

кинетическое уравнение с самосогласованным полем

# Интеграл столкновений

## физический смысл интеграла столкновений:

количество частиц, которые появляются или исчезают в единицу времени в единице шестимерного фазового пространства в результате близких столкновений с другими частицами

## Некоторые модели интеграла столкновений:

- бесстолкновительное кинетическое уравнение (**уравнение Власова**)

$$St_{ab} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df_a}{dt} = 0 \quad - \text{теорема Лиувилля}$$

- тау-приближение

$$St_{ab} = -\nu_{ab} (f_a - f_{a,\text{максв}}) = -\frac{f_a - f_{a,\text{максв}}}{\tau_{ab}}, \quad \tau_{ab} = \text{const}$$

- в общем случае  $St_{ab}$  – сложная интегро-дифференциальная функция от  $f_a$  и  $f_b$

# Свойства интеграла столкновений

---

сохранение числа частиц

$$\int St_{ab} d\vec{v}_a = 0$$

сохранение импульса

$$\int m_a \vec{v}_a St_{ab} d\vec{v}_a + \int m_b \vec{v}_b St_{ba} d\vec{v}_b = 0$$

сохранение энергии

$$\int \frac{m_a v_a^2}{2} St_{ab} d\vec{v}_a + \int \frac{m_b v_b^2}{2} St_{ba} d\vec{v}_b = 0$$

если  $St \neq 0$ , то энтропия плазмы возрастает

# Формула для электропроводности

Используем кинетическое уравнение

- тау-приближение, нет магнитного поля, водородная плазма  $\rightarrow e, i$

$$St_{ei} = -v_{ei}(f_e - f_0) = -\frac{f_e - f_0}{\tau_{ei}}, \quad \tau_{ei} = const$$

- кинетическое уравнение для этой задачи имеет вид:

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \sum_b St_{ab}$$

в силу стационарности



$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$

пусть  $f = f_0 + f_1$

пренебрегаем произведением малых сомножителей

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}$$

Тогда:

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = -\frac{f_1}{\tau_{ei}}$$

# Формула для электропроводности (2)

Отсюда:

$$\vec{j} = -e \int \vec{v} f(\vec{v}) d\vec{v} = -e \int \vec{v} f_1(\vec{v}) d\vec{v} = e\tau_{ei} \frac{e\vec{E}}{m_e} \int f_0(\vec{v}) d\vec{v} = \frac{ne^2}{m_e} \tau_{ei} \vec{E}$$

Ранее получали:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu} \sim \frac{T_e^{3/2}}{4\pi\Lambda e^2 \sqrt{m_e}}$$

см. лекцию 2

Смысл приближения слабого электрического поля:

условие  $f_1 \ll f_0$  означает, что:

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = -\frac{f_1}{\tau_{ei}} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \sim \frac{f_0}{v_T} \right\} \Rightarrow \frac{eE}{m_e} \frac{\tau_{ei}}{v_T} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{eE\lambda_{ei}}{T_e} \ll 1$$

Энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле на длине свободного пробега, должна быть намного меньше тепловой

# Коэффициент теплопроводности

Стационарное состояние, поля отсутствуют. Одномерный случай.

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \sum_b St_{ab}$$

- кинетическое уравнение для этой задачи имеет вид:

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_0 - f}{\tau} \quad \text{где } x \text{ - направление градиента температуры}$$

для  $\lambda \sim v\tau \ll L$  функцию распределения можно представить как

$$f = f_0 + f_1 + \dots$$

$$f_0 = n \sqrt{\frac{m}{2\pi T(x)}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T(x)}\right)$$



$$f_1 = -\tau v \frac{\partial f_0}{\partial x} = -n\tau v \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left( \frac{mv^2}{2T^{5/2}} - \frac{1}{2T^{3/2}} \right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

# Коэффициент теплопроводности (2)

Поток тепла:

$$q = \int v \frac{mv^2}{2} f(v) dv = \underbrace{\int v \frac{mv^2}{2} f_0(v) dv}_{=0} + \int v \frac{mv^2}{2} f_1(v) dv$$

интегрируем:  $q = -3n\tau \frac{T}{m} \frac{\partial T}{\partial x} \equiv -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$

Коэффициент теплопроводности

Точное выражение:

$$\kappa = 3.2n\tau_{ei} \frac{T_e}{m}$$

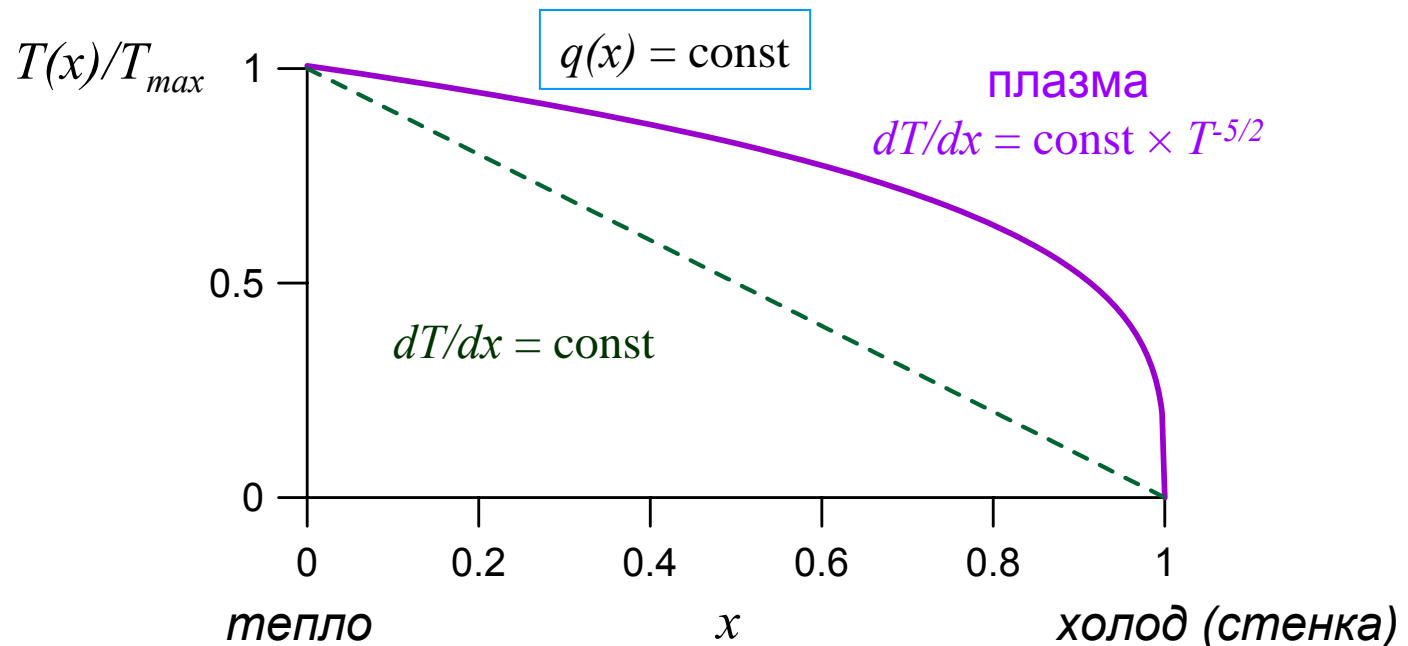
$$\tau_{ei} = \frac{3.5 \cdot 10^5 T_e^{3/2}}{\Lambda n}$$

# Коэффициенты переноса

- ток и тепло переносятся электронами
- коэффициенты переноса не зависят от плотности

$$\sigma \propto T_e^{3/2}, \quad \kappa \propto T_e^{5/2}$$

Сравнение переноса тепла в плазме и при постоянном  $\kappa$



# Комментарий по поводу закона Ома

При выводе формулы для проводимости плазмы используем кинетическое уравнение в тау-приближении

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$

Если в системе есть магнитное поле, то нужно брать

$$\frac{e}{m_e} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$



эта скобка отвечает за появление эффекта Холла !!!

# Конец темы

---

**Теоретические модели, используемые при исследовании плазмы. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем. Функция распределения, выражение параметров плазмы через нее. Физический смысл кинетического уравнения. Коэффициенты электропроводности и теплопроводности плазмы, их зависимость от температуры (плотности).**