

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г. И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ГРАБОВСКИЙ АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**Развитие методов исследования эффектов больших глюонных
плотностей в КХД**

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор В. С. Фадин

Новосибирск — 2020

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Уравнения эволюции	19
1.1 Определения	19
1.2 Факторизация по быстрой	20
1.3 Уравнение эволюции для барионной вильсоновской петли .	23
1.3.1 C -четный обмен	26
1.3.2 C -нечетный обмен	29
1.4 Связный вклад в уравнение для барионной вильсоновской петли	30
1.4.1 Вклад второй итерации борновского ядра	30
1.4.2 Диаграммы с двумя глюонами, пересекающими ударную волну	31
1.4.3 Диаграммы с одним глюоном, пересекающим ударную волну	35
1.5 Эволюция барионной вильсоновской петли в СГЛП	40
1.5.1 Эволюция вильсоновских линий.	40
1.5.2 Построение ядра: глюонная часть.	47
1.5.3 Построение ядра: кварковая часть	52
1.5.4 Уравнение эволюции для составного оператора.	54
1.5.5 Линеаризация	59
1.5.6 Результаты	69
1.6 Уравнения эволюции для 4-точечных операторов	76
1.6.1 Исходные выражения	76
1.6.2 Ядро для квадрупольного оператора в СГП	79
1.6.3 Ядро для дважды дипольного оператора в СГП	83

1.6.4	Составные операторы	85
1.6.5	Квазиконформное ядро для квадруполья	87
1.6.6	Квазиконформное ядро для двойного диполя.	91
1.6.7	Проверка	92
1.7	Решение линейного уравнения для рассеяния вперед в СГЛП	93
Глава 2. Дифракционное фоторождение		99
2.1	Необходимые определения	99
2.2	Импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$	101
2.2.1	Импакт фактор в ГП	102
2.2.2	Импакт фактор в СГП	103
2.3	Импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$	112
2.4	Импакт-фактор перехода $\gamma^* \rightarrow V_L$	114
2.5	Построение сечения $\gamma^* P \rightarrow q\bar{q}P'$	120
2.5.1	Борновское сечение $d\sigma_0$	123
2.5.2	Диполь - дипольный вклад в СГП $d\sigma_1$	124
2.5.3	Вклад диполь - двойной диполь в СГП $d\sigma_2$	128
2.6	Сечение $\gamma^* P \rightarrow q\bar{q}gP'$	130
2.7	Сечение $\gamma^* P \rightarrow 2jets P'$	132
Глава 3. Преобразование калибровочно инвариантных операторов		138
3.1	Необходимые выражения	138
3.2	Связь между полным и мебиусовским представлениями	141
3.3	Восстановление U_2 по мебиусовской форме.	145
3.4	Мебиусовская форма \hat{U}	148
3.5	Обсуждение	152
Заключение		154
Приложение А. $SU(3)$ -тождества		157
Приложение Б. Компоненты ядер.		161
Приложение В. Построение 4-точечного конформного оператора.		164

Приложение Г. Необходимые для линеаризации интегралы	167
Приложение Д. Конечная часть виртуальных поправок	169
Приложение Е. Реальные поправки	176
Список литературы	183

Введение

Квантовая хромодинамика (КХД) является экспериментально подтвержденной калибровочной теорией сильных взаимодействий. В КХД элементарными частицами являются кварки и глюоны. Они обладают квантовым числом, цветом, определяющим поведение полей при преобразованиях калибровочной цветовой группы $SU(3)$. Калибровочная инвариантность, перенормируемость и P -четность однозначно фиксируют взаимодействия полей и вид лагранжиана КХД. Важнейшими характеристиками КХД являются асимптотическая свобода и конфайнмент. Асимптотическая свобода заключается в том, что при достаточно больших передачах импульса кварки и глюоны становятся слабо связанными и для вычислений можно применять теорию возмущений. Конфайнмент состоит в том, что цветные объекты, кварки и глюоны, не были обнаружены в свободном виде, а экспериментально наблюдаются только их бесцветные составные состояния — адроны. Это означает, что на больших расстояниях, то есть при малых передачах импульса цветные объекты сильно связаны. Характерным энергетическим масштабом, определяющим смену режима взаимодействия, является $\Lambda_{QCD} \simeq 250$ МэВ.

Одним из наиболее интересных режимов квантовой хромодинамики является режим больших глюонных плотностей и высоких энергий, который достигается в реджевском пределе, то есть при $\sqrt{s} \gg Q$, где s — это квадрат энергии в системе центра инерции и Q — это характерный масштаб поперечных импульсов. Для применимости расчетов, выполненных по теории возмущений, требуют также $Q \gg \Lambda_{QCD}$. Процессы, для которых справедливы оба условия, $\sqrt{s} \gg Q \gg \Lambda_{QCD}$, называют полужесткими.

По определению реджевская кинематика имеет место для процессов с двумя начальными и двумя конечными частицами, когда $s \gg |t|$, где t — это квадрат передачи импульса, являющийся масштабом поперечных импульсов. В

столкновениях с участием адронов характерный масштаб поперечных импульсов Q может задаваться не только передачей t , но и виртуальностью фотона, инвариантной массой или поперечным импульсом рожденной адронной системы. Сечения таких процессов зависят от партонных функций распределения, прежде всего, глюонной, то есть “числа глюонов в адроне”, которое велико при $\sqrt{s} \gg Q$. В данной диссертации мы говорим о реджевском пределе именно в этом более широком значении, не ограничиваясь узкими рамками реджевской кинематики.

С экспериментальной точки зрения реджевский режим реализуется в таких процессах как глубоко неупругое лептон - адронное рассеяние (ГНР) при большой виртуальности фотона и жесткая дифракция в ГНР, что актуально для установок HERA, LeHC, EIC. Изучение режима больших глюонных плотностей входит в физическую программу планируемых ускорителей LeHC и EIC как важнейшая неотъемлемая часть.

На адронных коллайдерах реджевский режим имеет место в центральных столкновениях тяжелых ионов и pp столкновениях с большой множественностью, так как характерные $x = \frac{Q^2}{s}$ для рожденных частиц в центральной области быстрот малы (до $\sim 10^{-4}$ для pp с $\sqrt{s} = 14$, например). Величины импульсов этих частиц часто недостаточны для применимости теории возмущений. Типичные наблюдаемые, для которых можно делать расчеты в рамках теории возмущений, — это дифференциальные сечения инклюзивного рождения струй с большим поперечным импульсом $\sim Q$ в центральной области быстрот и азимутальная угловая декорреляция струй с максимальной разностью быстрот, называемых струями Мюллера - Навале. Реджевский режим также достигается в ультрапериферических столкновениях адронов и ядер, когда одно из ядер испускает квазиреальный фотон, который взаимодействует со вторым ядром с образованием системы с жестким масштабом, например струй, Υ или j/ψ , что актуально для RHIC и LHC. Жесткие матричные элементы для этих процессов можно вычислять в рамках теории возмущений.

Итак, на лептон - адронных машинах наблюдаемые, позволяющие изучать КХД в реджевском режиме, — это дифференциальные сечения по x и Q^2 (и следовательно структурные функции и функции распределения партонов, прежде всего глюона), дифракционные функции распределения, сечения и угловые распределения дифракционного рождения струй и мезонов. В ультрапериферических адрон - адронных столкновениях в реджевской области измеряются сечения и угловые распределения дифракционного рождения струй и мезонов и дифракционные функции распределения. В центральных столкновениях типичными наблюдаемыми являются сечения инклюзивного рождения струй, угловые спектры для струй Мюллера - Навале, распределения рожденных частиц по быстроте, энергии, поперечному импульсу и т.д. Все эти наблюдаемые позволяют изучать волновые функции адронов до взаимодействия.

С теоретической точки зрения при фиксированном Q при уменьшении x растет плотность глюонов в пространстве поперечном оси столкновения, то есть отношение числа глюонов с поперечным импульсом меньше Q и долей x продольного импульса исходного адрона к поперечной площади адрона. Пока плотность числа глюонов с поперечным импульсом меньше Q много меньше 1, $\frac{dN}{dn\frac{1}{x}} \ll 1$, этот рост описывается линейным уравнением, так как необходимо учитывать только процессы расщепления глюона. А при достаточно больших плотностях уравнения становятся нелинейными и рост практически прекращается. В этом случае говорят о достижении режима больших глюонных плотностей в реджевском пределе.

Прекращение роста глюонной плотности при малых x называется насыщением. При этом динамически генерируется масштаб — масштаб насыщения $Q_s(x)$ — характерный поперечный импульс, при котором процессы слияния глюонов в волновой функции адрона становятся одного порядка с процессами расщепления глюона. При насыщении характерное межпартонное расстояние становится порядка поперечного размера партона. Поэтому нельзя пренебрегать партон - партонным взаимодействием. Именно масштаб насыщения определя-

ет глюонную плотность и, следовательно, наблюдаемые при очень малых x . В результате любые наблюдаемые, зависящие от одного поперечного масштаба, оказываются функциями отношения этого масштаба и масштаба насыщения. Например, после выделения размерного множителя сечение ГНР зависит от отношения $\frac{Q}{Q_s(x)}$, а не от Q и x по-отдельности: $\sigma \sim \frac{1}{Q^2} f\left(\frac{Q}{Q_s(x)}\right)$. Такое поведение называется геометрический скейлинг. Оно наблюдалось в ер, еА и рр столкновениях.

В настоящее время становится актуальным изучение более сложных наблюдаемых, зависящих от нескольких масштабов. Например, рассматривается глубоко виртуальное комптоновское рассеяние, глубоко виртуальное рождение мезонов и струй с ненулевой передачей импульса. Наличие третьего масштаба, передачи импульса, позволяет восстановить не только зависимость адронных матричных элементов от x , то есть исследовать распределение партонов по продольному импульсу, но и изучать распределение партонов по поперечному импульсу. Соответствующие наблюдаемые — это непроинтегрированные партоновые распределения.

Описание процессов в реджевском пределе возможно в нескольких подходах: подходе Балицкого - Фадына - Кураева - Липатова (БФКЛ) [1]–[4], подходе конденсата цветного стекла (КЦС) [5]–[11], подходе вильсоновских линий, ударных волн или высокоэнергетического операторного разложения Балицкого (ВЭОР) [12]–[14]. В данной диссертации использованы методы ВЭОР и БФКЛ.

Подход БФКЛ основан на реджезации глюона. Говорят, что частица с массой m и спином j реджезуется, если амплитуды процессов с обменом в t -канале квантовыми числами этой частицы ведут себя как $s^{j(t)}$, причем $j(m^2) = j$. Здесь $j(t)$ — это реджевская траектория частицы, m — ее масса. Реджезация глюона определяет амплитуды с обменом цветовым октетом в t -канале. С помощью соотношения унитарности из октетных амплитуд строятся амплитуды с обменом другими цветовыми представлениями. Наиболее важная из этих амплитуд — амплитуда с вакуумными квантовыми числами в t -канале. Она

определяет зависимость полных сечений от s .

Подход КЦС основан на большом различии во времени жизни и длине взаимодействия быстрых и медленных партонов, составляющих фоковское разложение волновой функции быстро движущейся частицы. Мягкие партоны воспринимают жесткие как “замороженные” точечные классические цветовые заряды, которые являются источниками для мягких квантовых полей. Для источников вводится функционал W , определяющий вероятность нахождения конкретного распределения источников в адроне. Наблюдаемые величины вычисляются в 2 этапа. Сначала для фиксированного распределения источников они вычисляются как функции глюонных полей при наличии источников. Затем полученные результаты усредняются с помощью W . Функционал W подчиняется уравнению Джалилиан-Мариана, Янку, МакЛеррана, Вейгерта, Леонидова и Ковнера (JIMWLK) [5]–[11].

Альтернативный подход основан на модели цветовых диполей [15]–[18], которая формулируется в координатном представлении. В рамках этой модели, например, сечение ГНР представляется в виде свертки импакт фактора, описывающего переход фотона в кварк - антикварковую пару, и функции Грина цветового диполя, описывающей рассеяние этой пары на мишени. Дипольная функция Грина подчиняется линейному уравнению эволюции. Подход ВЭОР является развитием этой идеи. Он основан на эйкональном приближении, в рамках которого взаимодействие быстрой частицы с классическим внешним полем сводится к вильсоновской линии вдоль траектории быстрой частицы в этом поле. Схема ВЭОР формулируется в терминах факторизации по быстроте $\eta = \ln \frac{1}{x}$ (см. обзоры [19, 20]).

Во-первых, вводится промежуточная “быстрота факторизации” η между быстротами налетающей частицы Y_P и мишени Y_T и все петлевые фейнмановские интегралы по продольному импульсу (или быстроте) разбиваются на две части: коэффициентные функции (называемые импакт факторами) с $Y > \eta$ и матричные элементы T -упорядоченных операторов вильсоновских ли-

ний с $Y < \eta$. Как уже упоминалось выше, взаимодействие быстрых частиц с медленными может быть описано в эйкональном приближении, поэтому соответствующими операторами являются вильсоновские линии. Импакт-факторы выражаются через волновые функции входящих и исходящих частиц, которые описывают их расщепление на кварки и глюоны, распространяющиеся через ударную волну, образованную частицей-мишенью.

Во-вторых, выводятся уравнения эволюции для T -упорядоченных операторов вильсоновских линий относительно масштаба факторизации — быстроты η .

В-третьих, эти уравнения решаются и решения продолжают до быстрот порядка быстроты мишени, так что энергии глюонов в системе мишени становятся порядка нескольких ГэВ.

Далее результат эволюции сворачивается с начальными условиями - импакт фактором мишени. Если мишень может быть описана в пертурбативной КХД (как виртуальный фотон или мезон из тяжелых кварков), эти начальные условия могут быть вычислены в пертурбативной КХД. Если мишенью является протон или ядро, начальные условия часто строятся в рамках модели Мюллера-Глаубера.

Таким образом, в рамках ВЭОР базис операторов, по которому проводится операторное разложение для функций Грина в реджевском пределе, составляют T -упорядоченные операторы вильсоновских линий.

Метод ВЭОР является общим, но изначально он был применен к случаю глубоко неупругого рассеяния или рассеяния мезонов, где соответствующий оператор, построенный из вильсоновских линий, является цветовым диполем. Матричный элемент этого дипольного оператора соответствует дипольной функции Грина из подхода цветных диполей.

В подходе ВЭОР эволюция цветных диполей изучалась Я. Балицким в главном логарифмическом приближении (ГЛП) в работе [12] и независимо Ю. Ковчegovым в работе [13] для рассеяния на больших ядрах. Полученное

нелинейное уравнение известно как уравнение Балицкого-Ковчегова (БК). В линейном 2-глюонном приближении C -четная часть этого уравнения переходит в синглетное уравнение БФКЛ [1], [21], [4], описывающее C -четное t -канальное состояние известное как померон.

Учет бегущей константы связи при эволюции цветового диполя был получен в [22] и [23], а полное ядро в следующем за главным приближении (СГП) было найдено в [24], [25]. Решения БК с учетом изменения константы связи сейчас широко используются для описания экспериментов с протонами и тяжелыми ионами на LHC и RHIC.

Но многие интересные процессы описываются эволюцией более сложных операторов, таких как “цветовые триполи” (след трех вильсоновских линий в кварковом представлении $\varepsilon^{i'j'h'}\varepsilon_{ijh}U_{1i'}^iU_{2j'}^jU_{3h'}^h$, известный как барионная или трехкварковая вильсоновская петля) и “цветовые квадруполи” (след четырех вильсоновских линий). Для описания эволюции таких операторов уравнение БК в следующем за главным логарифмическом приближении (СГЛП) было обобщено на полную иерархию эволюции вильсоновских линий в работе [26]. Связный вклад в уравнение эволюции для трех вильсоновских линий, вошедший в иерархию в СГЛП [26], был вычислен в работе [27], включенной в данную диссертацию. Аналогичное вычисление в рамках подхода КЦС проделано в [28].

Оператор барионной вильсоновской петли (БВП) имеет особое значение, так как с точки зрения цветовой группы он обладает симметрией протона и может служить главным оператором в описании протона в рамках ВЭОР. С другой стороны, в линейном приближении, так же как матричный элемент дипольного оператора описывает C -четный померонный обмен в t -канале, матричный элемент БВП описывает оддеронный C -нечетный обмен в общем виде.

Эволюция по быстрой барионной вильсоновской петли в линеаризованном главном приближении (ГП) была изучена в C -нечетном случае в формализме КЦС в [29]. В этой работе было доказано, что она эквивалентна C -нечетному уравнению Бартельса - Квичинского - Прашаловича (БКП) [30]-[31]. Функция

Грина, подчиняющаяся уравнению БКП, описывает S -нечетное t -канальное состояние известное как оддерон. Авторы [29] показали, что линеаризованное уравнение для барионной вильсоновской петли в ГП можно свести к уравнению БКП после перехода от координатного пространства к импульсному. В импульсном представлении эволюция барионного оператора впервые была рассмотрена в [32], а нелинейное уравнение изучалось в [33]. В S -нечетном случае линейное уравнение эволюции в СГЛП для функции Грина оддерона было получено в [34] в рамках подхода БФКЛ. Однако все нелинейные поправки к уравнению эволюции БВП в ГЛП и СГЛП были вычислены в работах, вошедших в данную диссертацию: полное нелинейное уравнение эволюции для данного оператора в ГЛП было получено в рамках подхода ВЭОР в [35], связный вклад в ядро уравнения в СГЛП был рассчитан в [27], полное нелинейное уравнение для этого оператора в СГЛП получено в [36]. Аналогичный расчет в рамках подхода JIMWLK выполнен в [37].

Уравнения эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов были выведены в ГЛП в [38] и [12]. Квадрупольный и дважды дипольный операторы необходимы для описания сечения рождения двух струй. Уравнения эволюции для этих операторов в СГЛП были получены в работе [39], вошедшей в данную диссертацию.

Построение решений уравнений эволюции является актуальной задачей. В ГЛП линейное уравнение для дипольного оператора совпадает с уравнением БФКЛ. Ядро этого уравнения в мебиусовской форме конформно инвариантно, что позволяет использовать собственные функции операторов Казимира группы Мебиуса как собственные функции ядра. Собственные значения борновского ядра БФКЛ были найдены в [40]. Поправки СГП для ядра БФКЛ для рассеяния вперед были рассчитаны в [41]. Однако из-за бегущей константы связи борновские собственные функции не являются собственными функциями этого уравнения в СГЛП. Уравнение БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед и различные подходы к его решению, допускающие эффекты изменения константы

связи, активно изучались, начиная с [42]. В [43] это уравнение было переписано как неоднородное дифференциальное уравнение в пространстве собственных функций уравнения БФКЛ в ГП. В [44] решение с бегущей константой связи изучалось в приближении седловой точки. Детальное обсуждение решения уравнения БФКЛ описано в лекциях [45] и приведенных там ссылках. Различные методы решения нелинейных уравнений описаны в монографии [46]. В работе [47] были построены собственные функции ядра уравнения БФКЛ в СГП для рассеяния вперед, которые использовались для построения решения уравнения БФКЛ для рассеяния вперед. В работе [48], вошедшей в данную диссертацию, показано, что можно решить уравнение БФКЛ в СГП для рассеяния вперед в пространстве борновских собственных функций без построения собственных функций в СГП, сведя его к уравнению в частных производных.

Хотя подход БФКЛ изначально развивался в импульсном представлении, много лет назад было осознанно, что его координатное представление очень полезно, особенно в поперонном случае, который является наиболее важным для феноменологии. Действительно, конформная инвариантность синглетного ядра БФКЛ в ГЛП, показанная в [40], была сформулирована в координатном представлении. Сравнение подходов БФКЛ и ВЭОР также потребовало перехода от полного к мебиусовскому представлению ядра БФКЛ.

Полным представлением называется представление, введенное в [49] в подходе БФКЛ, в котором ядро и импакт факторы в СГП определены в пространстве поперечных импульсов двух взаимодействующих реджеонов. Мебиусовское представление — это представление на функциях от двух поперечных координат реджеонов, которые равны 0 при совпадении этих координат. Это свойство означает, что бесцветная мишень не взаимодействует с глюонами, длина волны которых существенно превышает ее размер. Мебиусовское представление является естественным для подхода ВЭОР, в котором дипольный оператор пропорционален $1 - \frac{\text{tr}(U_{z_1} U_{z_2}^\dagger)}{N_c}$ и исчезает при совпадении z_1 и z_2 . Здесь вильсоновская линия U_z является эйкональным фактором, приобретаемым быстрым

кварком при движении сквозь мишень.

Известно, что ядро БФКЛ в СГП в мебиусовском представлении после преобразований совпадает с линеаризованным ядром уравнения Балицкого - Ковчегова (БК) в СГП [50]. Также известно преобразование, приводящее это ядро в СГП к квазиконформному виду [50].

Квазиконформным называется такой вид уравнения, ядро которого инвариантно относительно группы дробно линейных преобразований координат с точностью до членов, пропорциональных β -функции. Квазиконформные ядра уравнений особенно интересны, так как конформная инвариантность помогает в решении уравнений.

Переход от полного представления к мебиусовскому заключается в преобразовании Фурье из импульсного в координатное представление и упрощении оператора таким образом, чтобы матричные элементы, вычисленные по импакт факторам, обладающим дипольным свойством, совпадали с исходными.

Задача восстановления полного оператора по его мебиусовской форме является нетривиальной, так как в процессе упрощения отбрасываются члены равные 0 при свертке с дипольными импакт факторами. Эта задача была решена в [51], вошедшей в данную диссертацию.

Изучение дифракционных процессов было важной частью физической программы HERA [52]. Оказалось, что около 10 % событий ГНР $\gamma^*p \rightarrow X$ имеют пробел по быстроте между продуктами распада протона Y и адронами в области фрагментации виртуального фотона X . Эти события называются глубоко неупругим дифракционным рассеянием (ГНДР) и выглядят так $\gamma^*p \rightarrow X Y$ [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]. Здесь Y — это или протон, или его возбужденные состояния, а X называется дифракционным конечным состоянием. Изучались как инклюзивная дифракция, так и эксклюзивные наблюдаемые: рождение струй и мезонов.

Наличие пробела по быстроте между X и Y и бесцветность Y делают естественным описание дифракционных процессов с помощью померонного об-

мена. В рамках коллинеарного подхода была доказана теорема о факторизации [61], утверждающая, что как в ГНР для дифракционных процессов можно ввести дифракционные структурные функции, которые представимы в виде сверток коэффициентных функций и дифракционных партонных функций распределения. Дифракционные партонные функции распределения описывают партонный состав померона, так же как обычные партонные распределения описывают состав протона. Такое описание называется моделью “разрешенного” (resolved) померона.

В области высоких энергий естественно описывать дифракционные процессы моделью прямого (direct) померона, в которой померон непосредственно взаимодействует с дифракционным состоянием X массы M . При малых M , в X основной вклад дает $q\bar{q}$ пара, а при больших M , $X = q\bar{q}g$. Рассматривая померон как двуглюонный обмен, было получено хорошее описание данных HERA по ГНДР [62]. В этой модели дифракционное состояние $q\bar{q}g$ изучалось в двух пределах. Во-первых, при больших Q^2 использовалось коллинеарное приближение, в котором поперечный импульс глюона считался малым по сравнению с Q^2 [63, 64, 65]. Во-вторых, при больших M^2 рассматривались вклады сильно упорядоченные по продольному импульсу [66, 67]. Комбинация этих двух приближений была применена для описания данных HERA в [68]. В работах [69] и [70], вошедших в данную диссертацию, приведен полный расчет импакт фактора для дифракционного рождения струй в СГП в ВЭОР без этих приближений.

Эксклюзивное дифракционное рождение легкого векторного мезона $V(\rho, \phi, \omega)$ [71, 72, 73, 74, 75], $\gamma^{(*)}p \rightarrow Vp$ исследовалось на установке HERA как в случае рассеяния вперед [76, 77], так и при больших t [78, 79, 80, 77]. Как было показано в [81, 82], можно описать эксклюзивное рождение мезона из $q\bar{q}$ пары в рамках коллинеарной факторизации: амплитуда представима в виде свертки обобщенных партонных распределений протона, амплитуды распределения для легкого мезона и жесткой амплитуды, вычислимой по теории возмущений [83, 84]. Амплитуда распределения и обобщенные партонные рас-

пределения подчиняются уравнениям эволюции [85, 86, 87]. Такая факторизация доказана только для перехода между продольно поляризованным фотоном и продольно поляризованным мезоном, в который основной вклад дают операторы твиста 2 [83]. Явное нарушение коллинеарной факторизации начинается на уровне твиста 3 в эксклюзивном электророждении поперечных векторных мезонов [88].

В СГП в импульсном представлении в рамках подхода БФКЛ вычислен импакт фактор перехода виртуального фотона в легкий продольно поляризованный векторный мезон для рассеяния вперед в [89], [90]. В работе [91], вошедшей в данную диссертацию, этот результат был обобщен. Там методом ВЭОР был вычислен импакт фактор перехода произвольно поляризованного виртуального фотона в легкий продольно поляризованный векторный мезон для рассеяния на произвольный угол.

Итак, для описания экспериментов необходимо вычислять импакт факторы, выводить и решать уравнения эволюции и вычислять свертки импакт факторов и матричных элементов функций Грина. Диссертация посвящена всем этим этапам. В данной работе представлен вывод уравнений эволюции по x для различных функций Грина в рамках ВЭОР, обсуждается связь с подходом БФКЛ, найдено решение линеаризованного уравнения и вычислены импакт факторы дифракционного фоторождения 2 и 3 струй, легкого векторного мезона.

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе дан вывод уравнения эволюции для барионной вильсоновской петли в главном и следующем за главным логарифмических приближениях, получены квазиконформное и линеаризованное ядра этого уравнения, построено решение линейного уравнения эволюции для рассеяния вперед в СГЛП. Для квадрупольного оператора и дважды дипольного оператора получены ядра уравнений эволюции в СГЛП и соответствующие квазиконформные ядра.

Сначала представлен вывод уравнения эволюции для БВП в ГП, в кото-

ром изменение БВП с быстротой выражается только через одну БВП и произведения двух БВП и не зависит от других операторов. Такой вид полностью аналогичен уравнению Балицкого - Ковчегова. В пределе больших N_c для рассеяния на большом ядре он позволяет с точностью $\sim \frac{1}{N_c^2}$ привести это уравнение к замкнутому виду, то есть к уравнению, содержащему только матричный элемент одной БВП, заменяя матричный элемент произведения бесцветных операторов на произведение их матричных элементов. Попытки написать уравнение для БВП в замкнутом виде предпринимались и ранее, но это впервые удалось в данной работе.

Далее произведен расчет связной части ядра уравнения эволюции для БВП. Диаграммы, дающие вклад в эту часть, не встречаются при вычислении ядра для дипольного оператора. Используя эту часть ядра и дипольное ядро в СГЛП, было построено уравнение эволюции для БВП в СГЛП. Это уравнение было приведено к квазиконформному виду и линеаризовано.

Используя полученные результаты, также были построены и приведены к квазиконформному виду уравнения эволюции для квадрупольного оператора и оператора двойного диполя в СГЛП.

Наконец, было построено общее решение линейного уравнения для дипольного оператора - уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед в пространстве собственных функций борновского ядра.

Во второй главе вычислены импакт факторы для эксклюзивного дифракционного фоторождения продольно поляризованного векторного мезона в главном и следующем за главным приближениях, двух струй в ГП и СГП, трех струй в ГП.

Сначала приведен расчет импакт фактора для дифракционного фоторождения двух струй в ГП и СГП и трех струй с ГП в рамках ВЭОР. Далее был вычислен импакт фактор фоторождения продольно поляризованного векторного мезона в СГП в виде свертки импакт фактора фоторождения коллинеарной кварк антикварковой пары в СГП с амплитудой распределения (АР)

для продольно поляризованного векторного мезона.

В третьей главе представлен метод перехода между операторами в полном и мебиусовском представлениях, отвечающих подходам БФКЛ и ВЭОР соответственно. Показано, что для калибровочно инвариантных операторов существует процедура восстановления полной формы по мебиусовской и эта процедура проведена для оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду. Нахождение такой процедуры является актуальной задачей, так как она позволяет сравнивать величины, полученные в подходах БФКЛ и ВЭОР.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Уравнение эволюции для барионной вильсоновской петли в ГЛП и СГЛП.
2. Уравнение эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГЛП.
3. Решение уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед.
4. Импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения двух струй в СГП.
5. Импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения трех струй в ГП.
6. Импакт фактор эксклюзивного дифракционного фоторождения легкого продольно поляризованного векторного мезона в СГП.
7. Алгоритм получения полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме.
8. Полная и мебиусовская формы оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду.

Глава 1. Уравнения эволюции

1.1 Определения

Введем векторы на световом конусе n_1 и n_2

$$n_1 = (1, 0_\perp, 1), \quad n_2 = \frac{1}{2}(1, 0_\perp, -1), \quad n_1^+ = n_2^- = n_1 n_2 = 1, \quad (1.1)$$

для любого вектора p имеем

$$p^+ = p_- = p n_2 = \frac{1}{2}(p^0 + p^3), \quad p_+ = p^- = p n_1 = p^0 - p^3, \quad (1.2)$$

$$p = p^+ n_1 + p^- n_2 + p_\perp, \quad p^2 = 2p^+ p^- - \vec{p}^2 = 2p^+ p^- + p_\perp^2, \quad (1.3)$$

$$p k = p^\mu k_\mu = p^+ k^- + p^- k^+ - \vec{p} \vec{k} = p_+ k_- + p_- k_+ + (p k)_\perp. \quad (1.4)$$

$$\partial_\pm = \partial^\mp = \frac{\partial}{\partial x^\pm} = \frac{\partial}{\partial x_\mp}, \quad \partial_i = -\partial^i = \frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad g^{\mu\nu} = n_1^\mu n_2^\nu + n_1^\nu n_2^\mu + g_\perp^{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

В дальнейшем используется калибровка $\mathcal{A}n_2 = 0$. В этой калибровке свободный пропагатор имеет вид

$$G_0^{\mu\nu}(p) = \frac{-i d^{\mu\nu}(p)}{p^2 + i0}, \quad (1.6)$$

где

$$d^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu n_2^\nu + p^\nu n_2^\mu}{p n_2} = g_\perp^{\mu\nu} - \frac{p_\perp^\mu n_2^\nu + p_\perp^\nu n_2^\mu}{p^+} - 2 \frac{n_2^\mu n_2^\nu p^-}{p^+},$$

$$d^{\mu\nu}(p) = d_0^{\mu\nu}(p) - \frac{n_2^\mu n_2^\nu p^2}{(p^+)^2}, \quad d_0^{\mu\nu}(p) = g_\perp^{\mu\nu} - \frac{p_\perp^\mu n_2^\nu + p_\perp^\nu n_2^\mu}{p^+} + \frac{n_2^\mu n_2^\nu p_\perp^2}{(p^+)^2}. \quad (1.7)$$

В смешанном представлении

$$G_0^{\mu\nu}(x^+, p^+, \vec{p}) = \int \frac{dp^-}{2\pi} e^{-ip^- x^+} G_0^{\mu\nu}(p)$$

$$= \int \frac{dp^-}{2\pi} e^{-ip^- x^+} \left\{ \frac{-i d_0^{\mu\nu}(p)}{2p^+ p^- + p_\perp^2 + i0} + i \frac{n_2^\mu n_2^\nu}{(p^+)^2} \right\}$$

$$= \frac{-d_0^{\mu\nu}(p^+, p_\perp)}{2p^+} e^{i\frac{(p_\perp^2 + i0)x^+}{2p^+}} (\theta(x^+)\theta(p^+) - \theta(-x^+)\theta(-p^+)) + i\delta(x^+) \frac{n_2^\mu n_2^\nu}{(p^+)^2}. \quad (1.8)$$

Свободный фермионный пропагатор имеет вид

$$G_0(p) = \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0}, \quad (1.9)$$

$$G_0(x^+, p^+, \vec{p}) = \frac{e^{i\frac{x^+}{2p^+}(p_\perp^2 - m^2 + i0)}}{2p^+} \left[\gamma^- p^+ - \gamma^+ \frac{p_\perp^2 - m^2}{2p^+} + \hat{p}_\perp + m \right] \quad (1.10)$$

$$\times (\theta(x^+)\theta(p^+) - \theta(-x^+)\theta(-p^+)) + \gamma^+ \frac{i\delta(x^+)}{2p^+}. \quad (1.11)$$

Также будут необходимы $SU(3)$ -тождества

$$U^{ba} = 2tr(t^b U t^a U^\dagger), \quad (t^a)_i^j (t^a)_k^l = \frac{1}{2} \delta_i^l \delta_k^j - \frac{1}{2N_c} \delta_i^j \delta_k^l. \quad (1.12)$$

Здесь U^{ba} — это матрица из группы $SU(3)$ в присоединенном, а U — в фундаментальном представлении.

1.2 Факторизация по быстроте

Рассмотрим рассеяние на адронной мишени. Во-первых, предположим, что из-за насыщения характерные поперечные импульсы обмениваемых и рожденных глюонов относительно высоки ($Q_s \sim 2 - 3$ ГэВ для рассеяния pA на ЛНС), и поэтому применение теории возмущений оправдано.

Если пертурбативная КХД применима, в соответствии с общей логикой ВЭОР все амплитуды факторизуются по быстроте. Для этого вводится порог быстроты η , который отделяет “быстрые” глюоны от “медленных”. Удобно использовать формализм фонового поля: мы интегрируем по глюонам с продольными импульсами $p^+ > e^\eta p_{\text{налетающей частицы}}^+$ ($\eta < 0$). Соответствующие интегралы образуют импакт факторы. Глюоны с $p^+ < e^\eta p_{\text{налетающей частицы}}^+$ оставляем как фоновое

поле, чтобы проинтегрировать по ним позже. Благодаря релятивистскому сжатию, фоновое поле можно взять в виде ударной волны, сосредоточенной при $z^+ = 0$

$$b^\mu(z) = b^-(z^+, \vec{z})n_2^\mu = \delta(z^+)B(\vec{z})n_2^\mu. \quad (1.13)$$

Здесь использована светоконусная калибровка $(bn_2) = 0$. Чтобы вывести выражение для пропагатора кварка (или глюона) на фоне ударной волны, мы представляем пропагатор как континуальный интеграл по различным траекториям, каждая из которых взвешена с калибровочным множителем $P \exp(ig \int dx_\mu A^\mu)$, упорядоченным вдоль пути распространения. Поскольку ударная волна очень тонкая, у кварка (или глюона) нет времени на отклонение в поперечном направлении. Поэтому его траекторию внутри ударной волны можно аппроксимировать отрезком прямой. Кроме того, так как вне ударной волны нет внешнего поля, интеграл по этому отрезку прямой может быть формально расширен до $\pm\infty$ пределов, что дает калибровочный множитель — вильсоновскую линию

$$U_r = U(\vec{r}, \eta) = P e^{ig\mu^\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} b_\eta^-(r^+, \vec{r}) dr^+}, \quad (1.14)$$

где b_η^- — поле внешней ударной волны, построенное только из медленных глюонов,

$$b_\eta^- = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(pr)} b^-(p) \theta(e^\eta - \left| \frac{p^+}{p_{\text{налетающей}}^+} \right|). \quad (1.15)$$

Тогда распространение кварка (или глюона) на фоне ударной волны описывается свободным распространением до точки взаимодействия с ударной волной, вильсоновской линией U в точке взаимодействия и свободным распространением до конечной точки.

Таким образом, интегрирование по быстрой $Y > \eta$ дает импакт фактор налетающей частицы, пропорциональный произведению волновых функций этой частицы до и после взаимодействия с фоновым полем. Этот импакт фактор умножается на оператор, составленный из вильсоновских линий с быстрой до η . Как обсуждается в [12, 26], для бесцветных начальных и конечных состоя-

ний эти вильсоновские линии должны быть связаны подходящими калибровочными групповыми множителями на $r^+ = \pm\infty$ и образовывать калибровочный инвариант.

Фактически, факторизация происходит на уровне вывода пропагаторов быстрых частиц в фоновом поле медленных глюонов. Эти пропагаторы были выведены в [12]. В пространстве размерности $D \equiv 2 + d \equiv 4 + 2\epsilon$ для кварка, антикварка и глюона они имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{G}(y, x)|_{y^+>0>x^+} &= \int \frac{dp_1^+ d^{D-2} p_{1\perp}}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{dp_2^+ d^{D-2} p_{2\perp}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-iy^- p_2^+ - i(p_{2\perp} y_\perp)} e^{ix^- p_1^+ + i(p_{1\perp} x_\perp)} \\ &\times 2\pi \delta(p_{12}^+) \theta(p_2^+) \theta(-x^+) \theta(y^+) e^{iy^+ \frac{p_{2\perp}^2 - m^2 + i0}{2p_2^+}} e^{-ix^+ \frac{p_{1\perp}^2 - m^2 + i0}{2p_1^+}} \\ &\times \frac{\gamma^- p_2^+ + \hat{p}_{2\perp} + m}{2p_2^+} \gamma^+ U(p_{21\perp}) \frac{\gamma^- p_1^+ + \hat{p}_{1\perp} + m}{2p_1^+}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(x, y)|_{y^+>0>x^+} &= - \int \frac{dp_1^+ d^{D-2} p_{1\perp}}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{dp_2^+ d^{D-2} p_{2\perp}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-iy^- p_2^+ - i(p_{2\perp} y_\perp)} \\ &\times e^{ix^- p_1^+ + i(p_{1\perp} x_\perp)} 2\pi \delta(p_{12}^+) \theta(p_2^+) \theta(-x^+) \theta(y^+) e^{iy^+ \frac{p_{2\perp}^2 - m^2 + i0}{2p_2^+}} e^{-ix^+ \frac{p_{1\perp}^2 - m^2 + i0}{2p_1^+}} \\ &\times \frac{\gamma^- p_1^+ + \hat{p}_{1\perp} - m}{2p_1^+} \gamma^+ U^\dagger(p_{12\perp}) \frac{\gamma^- p_2^+ + \hat{p}_{2\perp} - m}{2p_2^+}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(x, y)|_{x^+>0>y^+} &= - \int \frac{dp_1^+ d^{D-2} p_{1\perp}}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{dp_2^+ d^{D-2} p_{2\perp}}{(2\pi)^{D-1}} e^{-ip_2^+ x^- + ip_1^+ y^-} \\ &\times \pi e^{-i(p_{2\perp} x_\perp) + i(p_{1\perp} y_\perp)} \frac{\delta(p_{12}^+) \theta(p_2^+)}{p_1^+} e^{i \frac{p_{2\perp}^2 + i0}{2p_2^+} x^+ - i \frac{p_{1\perp}^2 + i0}{2p_1^+} y^+} \\ &\times d_{0\mu\alpha}(p_2^+, p_{2\perp}) U(p_{21\perp}) g_\perp^{\alpha\delta} d_{0\delta\nu}(p_1^+, p_{1\perp}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь $p_{ij} = p_i - p_j$. Для рождения свободных частиц удобно также использовать внешние линии в фоновом поле ударной волны. Они были выведены в [70]. Для кварка, антикварка и глюона они имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, y)|_{0>y^+} &= \frac{\theta(p^+)}{\sqrt{2p^+}} e^{ip^+ y^-} \int \frac{dp_{2\perp}^{D-2}}{(2\pi)^{D-2}} e^{i(p_{2\perp} y_\perp) - i \frac{y^+}{2p^+} (p_{2\perp}^2 - m^2 + i0)} \\ &\times \bar{u}_p \gamma^+ U(p_\perp - p_{2\perp}) \frac{[\gamma^- p^+ + \hat{p}_{2\perp} + m]}{2p^+}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
v(p, y)|_{0>y^+} &= \frac{\theta(p^+)}{\sqrt{2p^+}} e^{ip^+y^-} \int \frac{dp_{2\perp}^{D-2}}{(2\pi)^{D-2}} e^{i(p_{2\perp}y_{\perp}) - i\frac{y^+}{2p^+}(p_{2\perp}^2 - m^2 + i0)} \\
&\times \frac{[\gamma^- p^+ + \hat{p}_{2\perp} - m]}{2p^+} U^\dagger(p_{2\perp} - p_{\perp}) \gamma^+ v_p, \tag{1.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_\nu^*(p, y)|_{0>y^+} &= \frac{\theta(p^+)}{\sqrt{2p^+}} e^{ip^+y^-} \int \frac{d^{D-2}p_{2\perp}}{(2\pi)^{D-2}} e^{i(p_{2\perp}y_{\perp}) - i\frac{y^+}{2p^+}(p_{2\perp}^2 + i0)} \\
&\times \epsilon_{p\perp\sigma}^* \left[g_{\perp\nu}^\sigma - \frac{p_{2\perp}^\sigma}{p^+} n_{2\nu} \right] U(p_{\perp} - p_{2\perp}). \tag{1.21}
\end{aligned}$$

Здесь внешние линии выходят из точки y с импульсом p , и

$$U(p_{\perp}) = \int d^{D-2}x_{\perp} e^{i(p_{\perp}x_{\perp})} U_{x_{\perp}}, \quad U^\dagger(p_{\perp}) = \int d^{D-2}x_{\perp} e^{-i(p_{\perp}x_{\perp})} U_{x_{\perp}}^\dagger. \tag{1.22}$$

1.3 Уравнение эволюции для барионной вильсоновской петли

Мы хотели бы написать уравнение эволюции для оператора трехкварковой (или барионной) вильсоновской петли

$$B_{123}^\eta = \varepsilon^{i'j'h'} \varepsilon_{ijh} U(\vec{z}_1, \eta)_{i'}^i U(\vec{z}_2, \eta)_{j'}^j U(\vec{z}_3, \eta)_{h'}^h, \tag{1.23}$$

описывающей рассеяние барионов в поле ударной волны. В дальнейшем для таких сверток мы будем использовать следующее обозначение:

$$\varepsilon^{i'j'h'} \varepsilon_{ijh} U_{1i'}^i U_{2j'}^j U_{3h'}^h = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3. \tag{1.24}$$

Внешнее поле в виде ударной волны сосредоточено в области $z^+ = 0$. Поэтому три линии в (1.23) можно соединить в одной точке x при $z^+ = +\infty$ и в одной точке y при $z^+ = -\infty$. Тогда очевидно, что оператор B_{123}^η калибровочно инвариантен, так как при калибровочном вращении вильсоновские линии меняются следующим образом:

$$U(\vec{z}_1, \eta)_{i'}^i \rightarrow V(x)_k^i U(\vec{z}_1, \eta)_{k'}^k V(y)_{i'}^{k'}, \quad V \in SU(3). \tag{1.25}$$

Чтобы получить уравнение эволюции, мы должны выполнить замену $\eta \rightarrow \eta + \Delta\eta$

$$b_{\eta_1}^- = b_{\eta_2}^- + b_{\Delta\eta}^-, \quad b_{\Delta\eta}^-(z^+, \vec{z}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipz} b^-(p) \theta(e^{\eta_1} - \frac{p^+}{P^+}) \theta(\frac{p^+}{P^+} - e^{\eta_2}). \quad (1.26)$$

Здесь P^+ обозначает продольный импульс налетающего бариона. То есть мы должны включить глюоны с $\eta_1 > \ln \frac{p^+}{P^+} > \eta_2$ в вильсоновские линии, а именно

$$\langle B_{123}^{\eta_1} \rangle = B_{123}^{\eta_2} + \frac{\langle sw | T(B_{123}^{\Delta\eta} e^{i \int \mathcal{L}(z) dz}) | sw \rangle}{\langle sw | T(e^{i \int \mathcal{L}(z) dz}) | sw \rangle}. \quad (1.27)$$

Другими словами, чтобы получить уравнение эволюции, нужно вычислить оператор B_{123}^η в поле ударной волны, что часто обозначается скобками $\langle \rangle$. Тогда уравнение эволюции схематично можно записать так

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle = \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle, \quad (1.28)$$

где K_{LO} - это борновское ядро, а \otimes обозначает свертку по поперечным координатам. В этой секции для упрощения обозначений скобки $\langle \rangle$ будут опущены. По определению вильсоновской линии,

$$U(\vec{z}, \eta) = \dots (1 + igb_\eta^-(z^+ + \Delta z^+, \vec{z}) \Delta z^+) \\ \times (1 + igb_\eta^-(z^+, \vec{z}) \Delta z^+) (1 + igb_\eta^-(z^+ - \Delta z^+, \vec{z}) \Delta z^+) \dots, \quad (1.29)$$

мы получаем

$$B_{123}^{\eta_1} = B_{123}^{\eta_2} + \Delta B_r + \Delta B_v. \quad (1.30)$$

Можно найти реальный вклад ΔB_r с помощью (1.18) and (1.29):

$$\Delta B_r = \frac{\Delta\eta \alpha_s}{\pi^2} \int d\vec{z}_5 U^{ab}(\vec{z}_5, \eta_2) \left[\frac{1}{\vec{z}_{51}^2} (t^a U_{\vec{z}_1}^{\eta_2} t^b) \cdot U_{\vec{z}_2}^{\eta_2} \cdot U_{\vec{z}_3}^{\eta_2} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \right. \\ \left. + \frac{\vec{z}_{51} \vec{z}_{52}}{\vec{z}_{51}^2 \vec{z}_{52}^2} ((t^a U_{\vec{z}_1}^{\eta_2}) \cdot (U_{\vec{z}_2}^{\eta_2} t^b) + (U_{\vec{z}_1}^{\eta_2} t^b) \cdot (t^a U_{\vec{z}_2}^{\eta_2})) \cdot U_{\vec{z}_3}^{\eta_2} + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right], \quad (1.31)$$

($i \leftrightarrow j$) обозначает перестановку. Виртуальный вклад легче найти из требования, что без ударной волны не существует эволюции по η . В дальнейшем

мы будем явно писать $N_c = 3$, так как форма полностью антисимметричного тензора зависит от N_c . С учетом

$$\varepsilon^{ijh}\varepsilon_{ijh} = 6, \quad t^a t^a = \frac{4}{3}, \quad \varepsilon^{i'j'h'}\varepsilon_{ijh}(t^a)_{i'}^i (t^a)_{j'}^j = -\frac{2}{3}\varepsilon^{i'j'h'}\varepsilon_{ijh}\delta_{i'}^i\delta_{j'}^j, \quad (1.32)$$

$$\varepsilon^{i'j'h'}\varepsilon_{ijh}(t^a U_{\vec{z}_1}^{\eta_2})_{i'}^i (t^a U_{\vec{z}_2}^{\eta_2})_{j'}^j = -\frac{2}{3}\varepsilon^{i'j'h'}\varepsilon_{ijh}(U_{\vec{z}_1}^{\eta_2})_{i'}^i (U_{\vec{z}_2}^{\eta_2})_{j'}^j, \quad (1.33)$$

мы находим

$$\Delta B_v = -\frac{\Delta\eta\alpha_s}{\pi^2}\frac{2}{3}\int d\vec{z}_5 \left[\frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{51}^2\vec{z}_{52}^2} + \frac{\vec{z}_{13}^2}{\vec{z}_{51}^2\vec{z}_{53}^2} + \frac{\vec{z}_{23}^2}{\vec{z}_{52}^2\vec{z}_{53}^2} \right] U_{\vec{z}_1}^{\eta_2} \cdot U_{\vec{z}_2}^{\eta_2} \cdot U_{\vec{z}_3}^{\eta_2}. \quad (1.34)$$

Поскольку

$$U^{ab}(\vec{z}_5, \eta_2) = 2\text{tr}(t^a U_{\vec{z}_5}^{\eta_2} t^b (U_{\vec{z}_5}^{\eta_2})^\dagger), \quad (1.35)$$

мы имеем

$$U^{ab}(\vec{z}_5, \eta_2) (t^a U_{\vec{z}_1}^{\eta_2} t^b)_{i'}^i = \frac{1}{2}\text{tr}(U_{\vec{z}_1}^{\eta_2} (U_{\vec{z}_5}^{\eta_2})^\dagger) (U_{\vec{z}_5}^{\eta_2})_{i'}^i - \frac{1}{6}(U_{\vec{z}_1}^{\eta_2})_{i'}^i, \quad (1.36)$$

$$U^{ab}(\vec{z}_5, \eta_2) (t^a U_{\vec{z}_1}^{\eta_2})_{i'}^i (U_{\vec{z}_2}^{\eta_2} t^b)_{j'}^j = \frac{1}{2}(U_{\vec{z}_2}^{\eta_2} (U_{\vec{z}_5}^{\eta_2})^\dagger U_{\vec{z}_1}^{\eta_2})_{i'}^i (U_{\vec{z}_5}^{\eta_2})_{j'}^j - \frac{1}{6}(U_{\vec{z}_1}^{\eta_2})_{i'}^i (U_{\vec{z}_2}^{\eta_2})_{j'}^j. \quad (1.37)$$

Следовательно, уравнение эволюции записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^\eta}{\partial\eta} &= \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int d\vec{z}_5 \left[\left\{ \frac{C_1}{\vec{z}_{51}^2} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\vec{z}_{51}\vec{z}_{52}}{\vec{z}_{51}^2\vec{z}_{52}^2} C_{12} + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right\} \right], \end{aligned} \quad (1.38)$$

где

$$C_1 = \text{tr}(U_{\vec{z}_1}^\eta U_{\vec{z}_5}^{\eta\dagger}) B_{523}^\eta - 3B_{123}^\eta, \quad (1.39)$$

$$C_{12} = 2B_{123}^\eta - (U_{\vec{z}_2}^\eta U_{\vec{z}_5}^{\eta\dagger} U_{\vec{z}_1}^\eta + U_{\vec{z}_1}^\eta U_{\vec{z}_5}^{\eta\dagger} U_{\vec{z}_2}^\eta) \cdot U_{\vec{z}_5}^\eta \cdot U_{\vec{z}_3}^\eta. \quad (1.40)$$

Для краткости мы будем в дальнейшем упрощать обозначения $U(\vec{z}_1, \eta) = U_{\vec{z}_1}^\eta \equiv U_1$. Вильсоновские линии являются элементами $SU(3)$. Следовательно,

$$\varepsilon^{i'j'h'} U_{i'}^i U_{j'}^j U_{h'}^h = \varepsilon^{ijh}, \quad (1.41)$$

$$\varepsilon_{ijh}\varepsilon^{i'j'h'} U_{i'}^i U_{j'}^j = 2(U^\dagger)_{i'}^i, \quad \varepsilon_{ijh}\varepsilon^{i'j'h'} (U^\dagger)_{i'}^i (U^\dagger)_{j'}^j = 2U_h^h, \quad (1.42)$$

$$U_i \cdot U_j \cdot U_k = (U_i U_l^\dagger) \cdot (U_j U_l^\dagger) \cdot (U_k U_l^\dagger). \quad (1.43)$$

$$B_{ij}^\eta = U_i \cdot U_j \cdot U_i = 2\text{tr}(U_j U_i^\dagger). \quad (1.44)$$

На самом деле, последнее тождество утверждает, что кварк-дикварковые и кварк-антикварковые системы описываются одним и тем же оператором. В результате,

$$C_1 = \frac{1}{2} B_{155}^\eta B_{523}^\eta - 3B_{123}^\eta; \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= 2B_{123}^\eta - \left(U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot U_5 \cdot U_3 \\ &= 3B_{123}^\eta - \frac{1}{2} (B_{155}^\eta B_{325}^\eta + B_{255}^\eta B_{315}^\eta - B_{355}^\eta B_{215}^\eta). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Это тождество прямо следует из (1.43-1.44), как показано в приложении А. Наконец, получается следующее уравнение эволюции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^\eta}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \left[\frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{51}^2 \vec{z}_{52}^2} (-B_{123}^\eta + \frac{1}{6} (B_{155}^\eta B_{325}^\eta + B_{255}^\eta B_{315}^\eta - B_{355}^\eta B_{215}^\eta)) \right. \\ &\quad \left. + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Уравнение (1.47) имеет несколько важных свойств. Во-первых, у него нет особенностей при $\vec{z}_5 = \vec{z}_{1,2,3}$. Далее, это уравнение переходит в уравнение БК, если совпадают две из трех кварковых координат. Это можно проверить напрямую (1.44). Это означает, что системы $q\bar{q}$ и q -дикварк подчиняются одному и тому же уравнению.

1.3.1 C -четный обмен

Чтобы разделить C -нечетные и C -четные вклады, мы должны записать уравнение эволюции для $B_{\overline{123}}^\eta$, т.е. оператора 3-антикварковой (антибарионной) вильсоновской петли

$$B_{\overline{123}}^\eta = U_1^\dagger \cdot U_2^\dagger \cdot U_3^\dagger, \quad (1.48)$$

описывающее рассеяние антибарионов на ударной волне. Такое уравнение можно получить из уравнения для B_{123}^η , заменив все вильсоновские линии на сопряженные $U_i \leftrightarrow U_i^\dagger$. C -четная функция Грина имеет следующий вид

$$B_{123}^+ = B_{123}^\eta + B_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}^\eta - 12, \quad (1.49)$$

а оператор

$$B_{123}^- = B_{123}^\eta - B_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}^\eta \quad (1.50)$$

меняет знак при C -преобразовании, поэтому он описывает C -нечетную функцию Грина. Переписывая уравнения эволюции (1.47) через (1.49) и (1.50), мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^+}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[B_{155}^+ + B_{255}^+ - B_{355}^+ \right. \\ &+ B_{135}^+ + B_{235}^+ - B_{123}^+ - B_{125}^+ + \frac{1}{12} (B_{155}^+ B_{325}^+ + B_{255}^+ B_{315}^+ - B_{355}^+ B_{215}^+) \\ &\left. + \frac{1}{12} (B_{155}^- B_{325}^- + B_{255}^- B_{315}^- - B_{355}^- B_{215}^-) \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Обмен помероном начинается с 2-глюонного обмена. Можно показать, что

$$B_{123}^+ = \frac{1}{2} (B_{133}^+ + B_{211}^+ + B_{322}^+) + \tilde{B}_{123}^+. \quad (1.52)$$

где \tilde{B}_{123}^+ начинает работать с 4-глюонного обмена. Действительно, в 2- и 3-глюонных приближениях справедливо равенство

$$\begin{aligned} 0 &= (U_1 - U_2) \cdot (U_2 - U_3) \cdot (U_3 - U_2) + (U_1^\dagger - U_2^\dagger) \cdot (U_2^\dagger - U_3^\dagger) \cdot (U_3^\dagger - U_2^\dagger) = \\ &= 2B_{123}^+ - B_{122}^+ - B_{133}^+ - B_{223}^+, \end{aligned} \quad (1.53)$$

что очевидно в 2-глюонном приближении, а в 3-глюонном приближении следует из

$$\begin{aligned} &(U_1 - U_2) \cdot (U_2 - U_3) \cdot (U_3 - U_2) \\ &= U_1^\dagger (U_1 - U_2) U_2^\dagger \cdot U_2^\dagger (U_2 - U_3) U_3^\dagger \cdot U_3^\dagger (U_3 - U_2) U_2^\dagger \\ &= (U_2^\dagger - U_1^\dagger) \cdot (U_3^\dagger - U_2^\dagger) \cdot (U_2^\dagger - U_3^\dagger). \end{aligned} \quad (1.54)$$

В результате, можно записать линейное уравнение в 2- и 3-глюонных приближениях для B_{123}^+

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^+}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (B_{133}^+ + B_{211}^+ + B_{322}^+) \\ &= \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \left[\frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} (B_{155}^+ + B_{255}^+ - B_{122}^+) + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3) \right], \end{aligned} \quad (1.55)$$

что представляет собой сумму трех независимых уравнений БФКЛ.

В дальнейших приближениях следует учитывать \tilde{B}_{ijk}^+ . Это приводит нас к следующему уравнению эволюции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^+}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (B_{133}^+ + B_{211}^+ + B_{322}^+) + \frac{\partial \tilde{B}_{123}^+}{\partial \eta} \\ &= \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[(B_{155}^+ + B_{255}^+ - B_{122}^+) + (\tilde{B}_{135}^+ + \tilde{B}_{235}^+ - \tilde{B}_{123}^+ - \tilde{B}_{125}^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} (B_{155}^+ B_{322}^+ + 2B_{155}^+ B_{225}^+ + B_{255}^+ B_{311}^+ - B_{355}^+ B_{211}^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} (B_{155}^+ \tilde{B}_{325}^+ + B_{255}^+ \tilde{B}_{315}^+ - B_{355}^+ \tilde{B}_{215}^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} (B_{155}^- B_{325}^- + B_{255}^- B_{315}^- - B_{355}^- B_{215}^-) \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Дипольное уравнение БК имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \text{tr}(U_1 U_2^\dagger)}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[\text{tr}(U_1 U_5^\dagger) \text{tr}(U_5 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger) \right]. \quad (1.57)$$

Для C -четных обменов его можно переписать в наших обозначениях,

$$\frac{\partial B_{211}^+}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int \frac{d\vec{z}_5 \vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[B_{155}^+ + B_{255}^+ - B_{122}^+ + \frac{B_{155}^+ B_{522}^+ + B_{155}^- B_{522}^-}{4N_c} \right]. \quad (1.58)$$

Принимая $N_c = 3$ и вычитая 3 уравнения БК из (1.56), получаем уравнение эволюции для \tilde{B}_{ijk}^+

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{123}^+}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[(\tilde{B}_{135}^+ + \tilde{B}_{235}^+ - \tilde{B}_{123}^+ - \tilde{B}_{125}^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} (B_{155}^+ B_{322}^+ + B_{255}^+ B_{311}^+ - B_{355}^+ B_{211}^+) + \frac{1}{12} (B_{155}^+ \tilde{B}_{325}^+ + B_{255}^+ \tilde{B}_{315}^+ - B_{355}^+ \tilde{B}_{215}^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} (B_{155}^- B_{325}^- + B_{255}^- B_{315}^- - B_{355}^- B_{215}^- - B_{155}^- B_{522}^-) \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.59)$$

1.3.2 C -нечетный обмен

Уравнение эволюции (1.47) для оддеронного обмена записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^-}{\partial \eta} = & \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[B_{523}^- + B_{153}^- - B_{123}^- \right. \\ & - B_{125}^- - B_{553}^- + B_{525}^- + B_{155}^- + \frac{1}{12} (B_{155}^+ B_{325}^- + B_{255}^+ B_{315}^- - B_{355}^+ B_{215}^-) \\ & \left. + \frac{1}{12} (B_{155}^- B_{325}^+ + B_{255}^- B_{315}^+ - B_{355}^- B_{215}^+) \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Здесь, как и в случае померонов, можно выразить C -четные функции Грина барионов через 2- и 4-реджеонные помероны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^-}{\partial \eta} = & \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{\vec{z}_{12}^2}{\vec{z}_{15}^2 \vec{z}_{52}^2} \left[B_{523}^- + B_{153}^- - B_{123}^- - B_{125}^- - B_{553}^- + B_{525}^- + B_{155}^- \right. \\ & + \frac{1}{12} (B_{155}^+ B_{325}^- + B_{255}^+ B_{315}^- - B_{355}^+ B_{215}^-) - \frac{1}{24} B_{355}^- (B_{211}^+ + B_{115}^+ + B_{225}^+) \\ & + \frac{1}{24} (B_{155}^- (B_{322}^+ + B_{225}^+ + B_{335}^+) + B_{255}^- (B_{311}^+ + B_{355}^+ + B_{115}^+)) \\ & \left. + \frac{1}{12} (B_{155}^- \tilde{B}_{325}^+ + B_{255}^- \tilde{B}_{315}^+ - B_{355}^- \tilde{B}_{215}^+) \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Линейная часть этого уравнения совпадает с результатом [29], полученным в подходе JMWLК. В этой статье также было показано, что линейная часть этого уравнения эквивалентна уравнению БКП в импульсном представлении.

1.4 Связный вклад в уравнение для барионной вильсоновской петли

1.4.1 Вклад второй итерации борновского ядра

В СГП уравнение (1.28) изменяется на

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle = \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle + \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle. \quad (1.62)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle - \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle = \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle. \quad (1.63)$$

Связная часть ядра в СГП получается из диаграмм, где эволюция всех трех вильсоновских линий нетривиальна. Первая группа таких диаграмм изображена на Рисунке 1. Эти диаграммы и диаграммы, в которые они переходят после отражения относительно ударной волны и после всех возможных перестав-

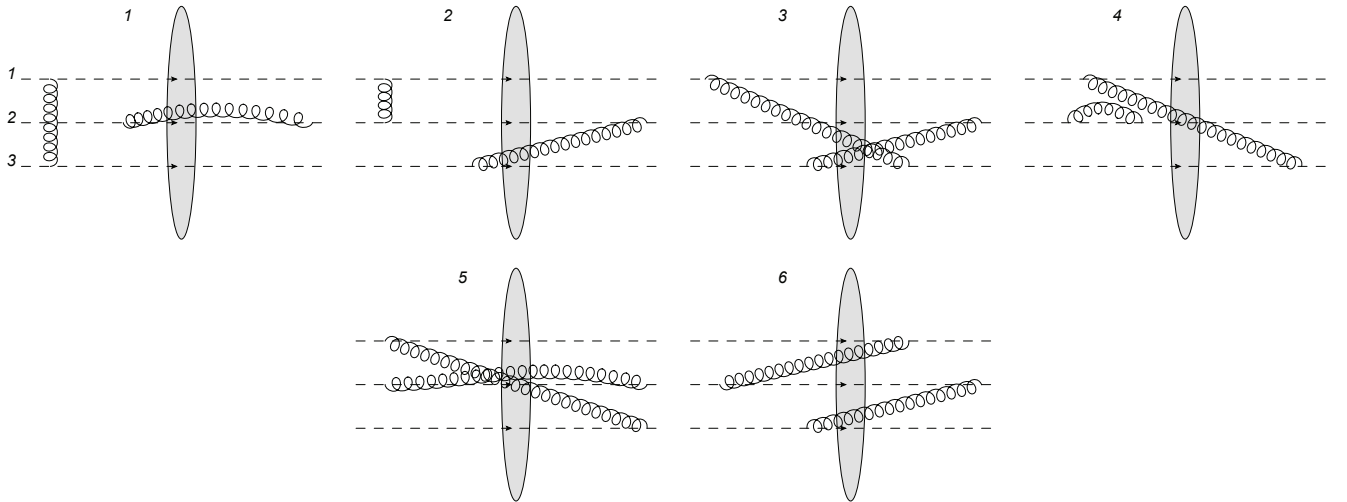


Рис. 1: Диаграммы, пропорциональные квадрату борновского ядра. Пунктирные линии обозначают вильсоновские линии с $z^- = 0$ и $z_{1,2,3}^-$ вдоль оси z^+ от $z^+ = -\infty$ слева до $z^+ = +\infty$ справа. Серый эллипс обозначает ударную волну $z^+ = 0$.

новок U_1, U_2, U_3 , являются второй итерацией ядра в ГП. Действительно, первая диаграмма записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle B_{123}^\eta \rangle|_1 &= g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2 t^b) \cdot (U_3 t^a) \\ &\times \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ G_0^{--}(z_3, z_1) \int_{-\infty}^0 dz_2'^+ \int_0^\infty dz_2^+ G^{--}(z_2, z_2')^{b'b} \\ &= -\frac{\alpha_s^2}{\pi^4} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2 t^b) \cdot (U_3 t^a) \int_{\sigma_1}^\sigma \frac{dp^+}{p^+} \int_{\sigma_1}^\sigma \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d\vec{z}_5}{\vec{z}_{52}^2} U_5^{b'b} \int d\vec{z}_0 \frac{(\vec{z}_{01} \vec{z}_{03})}{\vec{z}_{01}^2 \vec{z}_{03}^2}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Здесь $\sigma = e^\eta > \frac{p^+}{P^+} > \sigma_1$, где $\sigma_1 \ll \sigma$ – нижняя граница, задаваемая мишенью.

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle|_1 = -2 \ln \frac{\sigma}{\sigma_1} \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2 t^b) \cdot (U_3 t^a) \int \frac{d\vec{z}_5}{\vec{z}_{52}^2} U_5^{b'b} \int d\vec{z}_0 \frac{(\vec{z}_{01} \vec{z}_{03})}{\vec{z}_{01}^2 \vec{z}_{03}^2}. \quad (1.65)$$

Можно получить $\langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle$, применив уравнение в ГП к вильсоновским линиям в правой части уравнения эволюции в ГП (1.38). Среди прочего, оно содержит следующие два члена:

$$\frac{\alpha_s}{\pi^2} \int d\vec{z}_5 \left[\frac{1}{\vec{z}_{52}^2} U_5^{ba} U_1 \cdot (t^b U_2 t^a) \cdot U_3 - \frac{(\vec{z}_{51} \vec{z}_{53})}{\vec{z}_{51}^2 \vec{z}_{53}^2} (U_1 t^a) \cdot U_2 \cdot (U_3 t^a) + \dots \right]. \quad (1.66)$$

Если вычислить эти члены на фоне ударной волны в ГП, у нас будет среди прочего вклад, в котором проэволюционированы вильсоновские линии U_1 и U_3 от первого члена и U_2 от второго члена:

$$\begin{aligned} \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_1 &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} \int_{\sigma_1}^\sigma \frac{dp^+}{p^+} \int d\vec{z}_0 \int d\vec{z}_5 \left[-\frac{1}{\vec{z}_{52}^2} \frac{(\vec{z}_{01} \vec{z}_{03})}{\vec{z}_{01}^2 \vec{z}_{03}^2} U_5^{ba} (U_1 t^c) \cdot (t^b U_2 t^a) \right. \\ &\quad \left. \cdot (U_3 t^c) - \frac{(\vec{z}_{51} \vec{z}_{53})}{\vec{z}_{51}^2 \vec{z}_{53}^2} \frac{1}{\vec{z}_{02}^2} (U_1 t^a) \cdot (U_0^{dc} t^d U_2 t^c) \cdot (U_3 t^a) \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle|_1. \end{aligned} \quad (1.67)$$

В результате, эта диаграмма не дает вклад в ядро в СГП. То же самое верно для всех диаграмм на Рисунке 1.

1.4.2 Диаграммы с двумя глюонами, пересекающими ударную волну

Далее мы рассмотрим диаграммы с двумя глюонами, пересекающими ударную волну, изображенные на Рисунке 2. Они не сводятся ко второй итера-

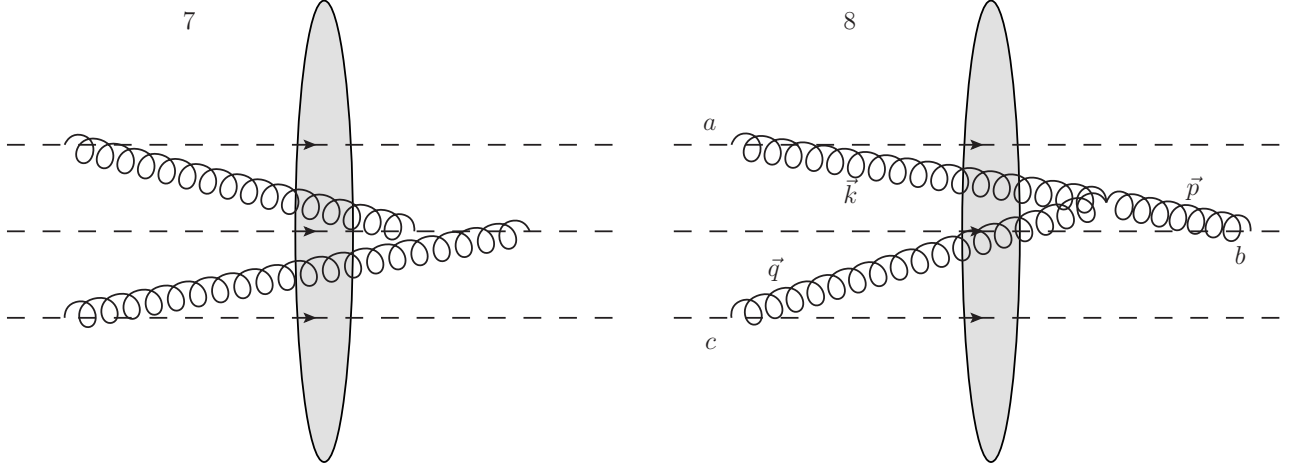


Рис. 2: Диаграммы с двумя глюонами, пересекающими ударную волну.

ции борновского ядра. Диаграмма 7 записывается так:

$$\begin{aligned} \langle B_{123}^\eta \rangle|_7 &= 4g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^{b'} t^{a'} U_2) \cdot (U_3 t^b) \int \frac{(\vec{z}_{20} \vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}^2 \vec{z}_{01}^2} U_0^{a'a} \frac{d\vec{z}_0}{(2\pi)^3} \int \frac{(\vec{z}_{25} \vec{z}_{35})}{\vec{z}_{35}^2} U_5^{b'b} \frac{d\vec{z}_5}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{dp^+}{p^+} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{dk^+}{k^+ \vec{z}_{25}^2 + \vec{z}_{02}^2 p^+}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Соответствующий член в $\langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle$ возникает из следующего члена в уравнении эволюции в ГП: (1.38)

$$\frac{\alpha_s}{\pi^2} \int d\vec{z}_5 \frac{(\vec{z}_{53} \vec{z}_{52})}{\vec{z}_{53}^2 \vec{z}_{52}^2} U_5^{ba} (U_3 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot U_1. \quad (1.69)$$

Если мы проэволюционируем U_1 и U_2 в этом выражении, мы получим один из вкладов, который действует как вычитательный член в диаграмме 7:

$$\begin{aligned} \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_7 &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{dp^+}{p^+} \int d\vec{z}_0 U_0^{cd} \frac{(\vec{z}_{01} \vec{z}_{02})}{\vec{z}_{01}^2 \vec{z}_{02}^2} \\ &\quad \times \int d\vec{z}_5 U_5^{ba} \frac{(\vec{z}_{53} \vec{z}_{52})}{\vec{z}_{53}^2 \vec{z}_{52}^2} (U_1 t^d) \cdot (t^b t^c U_2) \cdot (U_3 t^a). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_7 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle|_7 - \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_7 \\ &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} (U_1 t^a) \cdot (t^{b'} t^{a'} U_2) \cdot (U_3 t^b) \int d\vec{z}_0 \frac{(\vec{z}_{20} \vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}^2 \vec{z}_{01}^2} U_0^{a'a} \int d\vec{z}_5 \frac{(\vec{z}_{25} \vec{z}_{35})}{\vec{z}_{52}^2 \vec{z}_{35}^2} U_5^{b'b} \ln \frac{\vec{z}_{52}^2}{\vec{z}_{02}^2}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Вклад четырех диаграмм: 7, 7(1 ↔ 3) и их зеркальных отражений относительно ударной волны имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{7+7(1 \leftrightarrow 3)+7m+7(1 \leftrightarrow 3)m} &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} \int d\vec{z}_0 \frac{(\vec{z}_{20}\vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}^2 \vec{z}_{01}^2} U_0^{a'a} \int d\vec{z}_5 \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} U_5^{c'c} \\ &\times \ln \frac{\vec{z}_{52}^2}{\vec{z}_{02}^2} i \left\{ f^{a'bc'}(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) - f^{abc}(t^a U_1) \cdot (U_2 t^b) \cdot (t^c U_3) \right\}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Перейдем к диаграмме 8. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle B_{123}^\eta \rangle |_8 &= -g^4 f^{a'b'c'}(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ \int_0^\infty dz_2^+ \int \theta(x^+) d^4x \\ &\times \left\{ \frac{\partial G^{a'a}(x, z_1)_j^-}{\partial x^\mu} \left[G_0^{bb'}(z_2, x)^{-\mu} G^{c'c}(x, z_3)^{j-} - G_0^{bb'}(z_2, x)^{-j} G^{c'c}(x, z_3)^{\mu-} \right] \right. \\ &+ \frac{\partial G_0^{bb'}(z_2, x)_j^-}{\partial x^\mu} \left[G^{a'a}(x, z_1)^{j-} G^{c'c}(x, z_3)^{\mu-} - G^{a'a}(x, z_1)^{\mu-} G^{c'c}(x, z_3)^{j-} \right] \\ &\left. + \frac{\partial G^{c'c}(x, z_3)_j^-}{\partial x^\mu} \left[G^{a'a}(x, z_1)^{\mu-} G_0^{bb'}(z_2, x)^{-j} - G^{a'a}(x, z_1)^{j-} G_0^{bb'}(z_2, x)^{-\mu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\begin{aligned} \langle B_{123}^\eta \rangle |_8 &= -2g^4 i f^{a'b'c'}(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int U_0^{a'a} \frac{d\vec{z}_0}{\vec{z}_{10}^2} \int U_5^{c'c} \frac{d\vec{z}_5}{\vec{z}_{35}^2} \\ &\times \int_{\sigma_1}^\sigma \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \int_{\sigma_1}^{p^+-\sigma_1} \frac{dk^+}{(2\pi)^3} \frac{2}{\vec{z}_{05}^2 ((p^+ - k^+) \vec{z}_{52}^2 + k^+ \vec{z}_{02}^2)} \\ &\times \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35}) [\vec{z}_{25}^2 - \vec{z}_{02}^2]}{2p^+} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{k^+} - \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{p^+ - k^+} \right]. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle |_8 &= -2g^4 i f^{a'b'c'}(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int U_0^{a'a} \frac{d\vec{z}_0}{\vec{z}_{10}^2} \int U_5^{c'c} \frac{d\vec{z}_5}{\vec{z}_{35}^2} \\ &\times \int_{\sigma_1}^{\sigma-\sigma_1} \frac{dk^+}{(2\pi)^6} \frac{2\sigma}{\vec{z}_{05}^2 ((\sigma - k^+) \vec{z}_{52}^2 + k^+ \vec{z}_{02}^2)} \\ &\times \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35}) [\vec{z}_{25}^2 - \vec{z}_{02}^2]}{2\sigma} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{k^+} - \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\sigma - k^+} \right]. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Соответствующий вычитательный член возникает из следующих членов в ядре в ГП: (1.38)

$$\frac{\alpha_s}{\pi^2} \int d\vec{z}_5 U_5^{ba} \left\{ \frac{(\vec{z}_{51}\vec{z}_{52})}{\vec{z}_{51}^2 \vec{z}_{52}^2} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot U_3 + \frac{(\vec{z}_{53}\vec{z}_{52})}{\vec{z}_{53}^2 \vec{z}_{52}^2} U_1 \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^a) \right\}. \quad (1.76)$$

Перепиcывая U_5^{ba} как след вильсоновских линий в фундаментальном представлении (1.12) и эволюционируя U_5, U_5^\dagger и U_3 ли U_1 , мы получаем, в частности,

$$\begin{aligned} \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_8 &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} i f^{bc'a'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int_{\sigma_1}^\sigma \frac{dp^+}{p^+} \int d\vec{z}_5 U_5^{c'c} \int d\vec{z}_0 U_0^{a'a} \\ &\times \left\{ \frac{(\vec{z}_{50}\vec{z}_{53})}{\vec{z}_{05}^2 \vec{z}_{53}^2} \frac{(\vec{z}_{01}\vec{z}_{02})}{\vec{z}_{01}^2 \vec{z}_{02}^2} - \frac{(\vec{z}_{53}\vec{z}_{52})}{\vec{z}_{53}^2 \vec{z}_{52}^2} \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{01})}{\vec{z}_{05}^2 \vec{z}_{01}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_8 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \langle B_{123}^\eta \rangle|_8 - \langle K_{LO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_8 \\ &= -\frac{\alpha_s^2}{\pi^4} i f^{a'bc'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int U_0^{a'a} \frac{d\vec{z}_0}{\vec{z}_{10}^2} \int U_5^{c'c} \frac{d\vec{z}_5}{\vec{z}_{35}^2} \int_0^\sigma \frac{dk^+}{\vec{z}_{05}^2} \\ &\times \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35}) [\vec{z}_{25}^2 - \vec{z}_{02}^2]}{2((\sigma - k^+) \vec{z}_{52}^2 + k^+ \vec{z}_{02}^2)} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{k^+} \left\{ \frac{\sigma}{(\sigma - k^+) \vec{z}_{52}^2 + k^+ \vec{z}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{z}_{52}^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{(\sigma - k^+)} \left\{ \frac{\sigma}{(\sigma - k^+) \vec{z}_{52}^2 + k^+ \vec{z}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{z}_{02}^2} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Таким образом, мы получаем вклад в СГП диаграммы 8:

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_8 &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} i f^{a'bc'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int U_0^{a'a} d\vec{z}_0 \int U_5^{c'c} d\vec{z}_5 \\ &\times \left[\frac{1}{2\vec{z}_{05}^2} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{50}^2 \vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{05}^2 \vec{z}_{35}^2 \vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{02}^2}{\vec{z}_{25}^2}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Добавляя вклад диаграммы, получающейся из 8 отражением относительно ударной волны, получаем

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{8+8m} &= \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} \int U_0^{a'a} d\vec{z}_0 \int U_5^{c'c} d\vec{z}_5 \\ &\times \left[\frac{1}{2\vec{z}_{05}^2} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{50}^2 \vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{05}^2 \vec{z}_{35}^2 \vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{02}^2}{\vec{z}_{25}^2} \\ &\times i \left\{ f^{a'bc'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) - f^{abc} (t^a U_1) \cdot (U_2 t^b) \cdot (t^c U_3) \right\}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Объединив этот результат с вкладом диаграммы 7 и всех диаграмм, полученных из нее (1.72), мы имеем полный вклад всех диаграмм с двумя глюонами, пересекающими ударную волну, в связанную часть ядра в СГП:

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO}^{conn} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{2g} &= \left\{ f^{a'bc'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) - f^{abc} (t^a U_1) \cdot (U_2 t^b) \cdot (t^c U_3) \right\} \\ &\quad \times \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} i \int d\vec{z}_0 U_0^{a'a} \int d\vec{z}_5 U_5^{c'c} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\vec{z}_{05}^2} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{50}^2} \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{05}^2 \vec{z}_{35}^2} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} - \frac{(\vec{z}_{20}\vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}^2 \vec{z}_{01}^2} \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{02}^2}{\vec{z}_{25}^2} \\ &\quad + (2 \leftrightarrow 1) + (2 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.81)$$

С помощью (1.12) это можно переписать как

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO}^{conn} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{2g} &= \frac{\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{z}_0 \int d\vec{z}_5 \left\{ (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 \cdot (U_0 U_5^\dagger U_3) \right. \\ &\quad \left. + (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \cdot (U_1 U_0^\dagger U_2) - (1 \leftrightarrow 3, 0 \leftrightarrow 5) \right\} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\vec{z}_{05}^2} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{50})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{50}^2} \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} + \frac{(\vec{z}_{05}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{05}^2 \vec{z}_{35}^2} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} - \frac{(\vec{z}_{20}\vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}^2 \vec{z}_{01}^2} \frac{(\vec{z}_{25}\vec{z}_{35})}{\vec{z}_{25}^2 \vec{z}_{35}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{02}^2}{\vec{z}_{25}^2} \\ &\quad + (2 \leftrightarrow 1) + (2 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.82)$$

1.4.3 Диаграммы с одним глюоном, пересекающим ударную волну

Перейдем к диаграммам на Рисунке 3. В дальнейшем мы не будем записывать члены вычитания в ГП в явном виде. Вместо этого мы положим $\sigma_1 = 0$

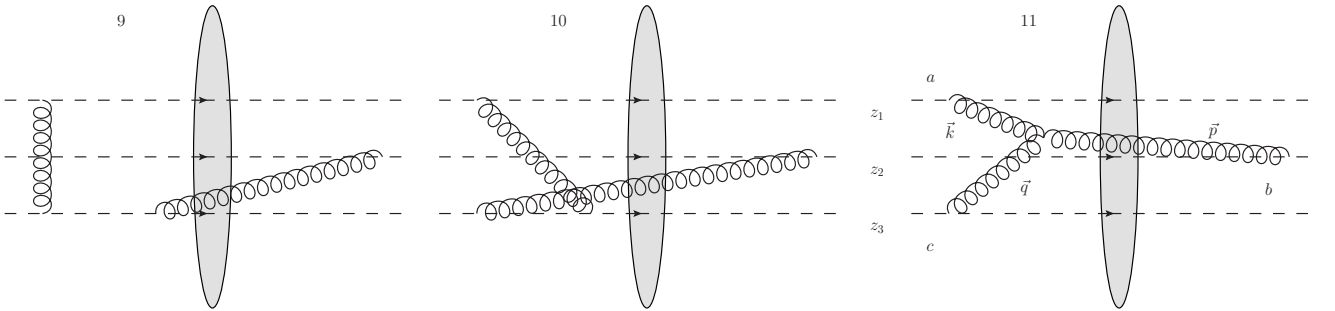


Рис. 3: Диаграммы с одним глюоном, пересекающим ударную волну.

и будем при необходимости использовать записи $\left[\frac{1}{p^+}\right]_+$ и $\left[\frac{1}{\sigma-p^+}\right]_+$.

$$\int_0^\sigma dp^+ f(p^+) \left[\frac{1}{p^+}\right]_+ = \int_0^\sigma dp^+ \frac{f(p^+) - f(0)}{p^+}, \quad (1.83)$$

$$\int_0^\sigma dp^+ f(p^+) \left[\frac{1}{\sigma-p^+}\right]_+ = \int_0^\sigma dp^+ \frac{f(p^+) - f(\sigma)}{\sigma-p^+}. \quad (1.84)$$

Диаграмма 9 записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle B_{123}^\eta \rangle|_9 &= g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^b t^{a'}) \\ &\times \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_0^\infty dz_2^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ \int_{z_3^+}^0 dz_3'^+ G^{--}(z_2, z_3')^{b'b} G^{--}(z_3, z_1)^{a'a}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Используя импульсное представление пропагатора (1.18) и интегрируя сначала по z_1^+ , z_3^+ и затем по k^- и по $z_3'^+$, получаем

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_9 &= 4ig^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^b t^a) \\ &\times \int \frac{(z_{20})_\perp^\alpha}{(2\pi)^7 \vec{z}_{20}^2} U_0^{b'b} d\vec{z}_0 \int d\vec{p} e^{i\vec{p}\vec{z}_{03} + i\vec{k}\vec{z}_{31}} \int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \frac{p_{\perp\alpha}}{\vec{p}^2} \ln \frac{\vec{p}^2}{\vec{k}^2}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Теперь рассмотрим диаграмму 10. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle B_{123}^\eta \rangle|_{10} &= g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^a t^b) \\ &\times \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_0^\infty dz_2^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ \int_{z_3^+}^0 dz_3'^+ G^{--}(z_2, z_3')^{b'b} G^{--}(z_3, z_1)^{a'a}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Выполняя те же шаги, что и для диаграммы 9, получаем

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{10} &= 4ig^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^a t^b) \\ &\times \int \frac{(z_{20})_\perp^\alpha}{(2\pi)^7 \vec{z}_{20}^2} U_0^{b'b} d\vec{z}_0 \int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \int d\vec{p} e^{i\vec{k}\vec{z}_{31} + i\vec{p}\vec{z}_{03}} \frac{p_{\perp\alpha}}{\vec{p}^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{\vec{p}^2}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Тогда вклад обеих диаграмм и диаграмм с заменой вильсоновских линий $3 \leftrightarrow 1$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{9+10+(9+10)(3 \leftrightarrow 1)} &= 4f^{abc} g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int \frac{(z_{20})_\perp^\alpha}{(2\pi)^7 \vec{z}_{20}^2} U_0^{b'b} d\vec{z}_0 \\ &\times \int d\vec{p} \int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \frac{p_{\perp\alpha}}{\vec{p}^2} \ln \frac{\vec{p}^2}{\vec{k}^2} \left(e^{i\vec{p}\vec{z}_{03} + i\vec{k}\vec{z}_{31}} - e^{i\vec{p}\vec{z}_{01} - i\vec{k}\vec{z}_{31}} \right). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Перейдем к диаграмме 11.

$$\begin{aligned}
\langle B_{123}^\eta \rangle|_{11} &= -g^4 f^{a'b'c'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ \int_0^\infty dz_2^+ \int_{\theta(-x^+)} d^4 x \\
&\times \left\{ \frac{\partial G_0^{a'a}(x, z_1)_{j^-}}{\partial x^\mu} \left[G^{bb'}(z_2, x)^{-\mu} G_0^{c'c}(x, z_3)^{j^-} - G^{bb'}(z_2, x)^{-j} G_0^{c'c}(x, z_3)^{\mu-} \right] \right. \\
&+ \frac{\partial G^{bb'}(z_2, x)_{j^-}}{\partial x^\mu} \left[G_0^{a'a}(x, z_1)^{j^-} G_0^{c'c}(x, z_3)^{\mu-} - G_0^{a'a}(x, z_1)^{\mu-} G_0^{c'c}(x, z_3)^{j^-} \right] \\
&\left. + \frac{\partial G_0^{c'c}(x, z_3)_{j^-}}{\partial x^\mu} \left[G_0^{a'a}(x, z_1)^{\mu-} G^{bb'}(z_2, x)^{-j} - G_0^{a'a}(x, z_1)^{j^-} G^{bb'}(z_2, x)^{-\mu} \right] \right\}. \tag{1.90}
\end{aligned}$$

Здесь мы суммируем по $j = 1, 2$ и $\mu = -, 1, 2$. Удобно разбить это выражение на две части.

$$\langle B_{123}^\eta \rangle|_{11} = \langle B_{123}^\eta \rangle|_{11_1} + \langle B_{123}^\eta \rangle|_{11_2}. \tag{1.91}$$

$$\begin{aligned}
\langle B_{123}^\eta \rangle|_{11_1} &= -g^4 f^{a'b'c'} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ \int_0^\infty dz_2^+ \int_{\theta(-x^+)} d^4 x \\
&\times \left\{ G_0^{c'c}(x, z_3)^{--} \left[G_0^{a'a}(x, z_1)^{j^-} \frac{\partial G^{bb'}(z_2, x)_{j^-}}{\partial x^-} - G^{bb'}(z_2, x)^{-j} \frac{\partial G_0^{a'a}(x, z_1)_{j^-}}{\partial x^-} \right] \right. \\
&\left. + G_0^{a'a}(x, z_1)^{--} \left[G^{bb'}(z_2, x)^{-j} \frac{\partial G_0^{c'c}(x, z_3)_{j^-}}{\partial x^-} - G_0^{c'c}(x, z_3)^{j^-} \frac{\partial G^{bb'}(z_2, x)_{j^-}}{\partial x^-} \right] \right\}. \tag{1.92}
\end{aligned}$$

Интегрируя по p^+ , имеем

$$\begin{aligned}
\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{11_1} &= -2g^4 f^{ab'c} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int \frac{d\vec{z}_0}{(2\pi)^7} U_0^{bb'} \frac{(z_{20})_\perp^\alpha}{\vec{z}_{20}^2} \\
&\times \int d\vec{k} \int d\vec{q} e^{-i\vec{k}\vec{z}_{10} - i\vec{q}\vec{z}_{30}} \left[\frac{q_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2} \frac{1}{\vec{k}^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q} + \vec{k})^2} \right. \\
&\left. - \frac{k_{\alpha\perp}}{\vec{k}^2} \frac{1}{\vec{q}^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2} \ln \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q} + \vec{k})^2} + \frac{2}{\vec{q}^2} \frac{k_{\alpha\perp}}{\vec{k}^2} \ln \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q} + \vec{k})^2} - \frac{2}{\vec{k}^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q} + \vec{k})^2} \frac{q_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2} \right]. \tag{1.93}
\end{aligned}$$

Добавление этого вклада к вкладу диаграмм 9 и 10 (1.89), дает:

$$\begin{aligned}
\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{11_1+9+10+(9+10)(3\leftrightarrow 1)} &= -2f^{abc}g^4(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \\
&\times \int \frac{(z_{20})_\perp^\alpha}{(2\pi)^7 \vec{z}_{20}^2} U_0^{b'b} d\vec{z}_0 \int d\vec{k} \int d\vec{q} \\
&\times \left[2 \frac{1}{\vec{q}^2} \frac{k_{\perp\alpha}}{\vec{k}^2} \left\{ e^{-i\vec{k}\vec{z}_{10}-i\vec{q}\vec{z}_{30}} \ln \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} + e^{-i\vec{k}\vec{z}_{10}-i\vec{q}\vec{z}_{31}} \ln \frac{\vec{k}^2}{\vec{q}^2} \right\} + e^{-i\vec{k}\vec{z}_{10}-i\vec{q}\vec{z}_{30}} \right. \\
&\times \left\{ -\frac{k_{\alpha\perp}}{\vec{k}^2} \frac{1}{\vec{q}^2 - (\vec{q}+\vec{k})^2} \ln \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} + \frac{q_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2} \frac{1}{\vec{k}^2 - (\vec{q}+\vec{k})^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} \right\} \\
&\left. + 2 \frac{q_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2} \frac{1}{\vec{k}^2} \left\{ -e^{-i\vec{k}\vec{z}_{10}-i\vec{q}\vec{z}_{30}} \ln \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} - e^{-i\vec{q}\vec{z}_{30}+i\vec{k}\vec{z}_{31}} \ln \frac{\vec{q}^2}{\vec{k}^2} \right\} \right]. \quad (1.94)
\end{aligned}$$

Второй вклад в диаграмму 11 записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\langle B_{123}^\eta \rangle |_{11_2} &= -g^4 f^{a'b'c'}(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int_{-\infty}^0 dz_1^+ \int_{-\infty}^0 dz_3^+ \int_0^\infty dz_2^+ \int_{\theta(-x^+)} d^4x \\
&\times \left\{ G^{bb'}(z_2, x)^{--} \left[\frac{\partial G_0^{a'a}(x, z_1)_j^-}{\partial x^-} G_0^{c'c}(x, z_3)^{j-} - G_0^{a'a}(x, z_1)^{j-} \frac{\partial G_0^{c'c}(x, z_3)_j^-}{\partial x^-} \right] \right. \\
&+ \frac{\partial G_0^{a'a}(x, z_1)_j^-}{\partial x^l} \left[G^{bb'}(z_2, x)^{-l} G_0^{c'c}(x, z_3)^{j-} - G^{bb'}(z_2, x)^{-j} G_0^{c'c}(x, z_3)^{l-} \right] \\
&+ \frac{\partial G^{bb'}(z_2, x)_j^-}{\partial x^l} \left[G_0^{a'a}(x, z_1)^{j-} G_0^{c'c}(x, z_3)^{l-} - G_0^{a'a}(x, z_1)^{l-} G_0^{c'c}(x, z_3)^{j-} \right] \\
&\left. + \frac{\partial G_0^{c'c}(x, z_3)_j^-}{\partial x^l} \left[G_0^{a'a}(x, z_1)^{l-} G^{bb'}(z_2, x)^{-j} - G_0^{a'a}(x, z_1)^{j-} G^{bb'}(z_2, x)^{-l} \right] \right\}. \quad (1.95)
\end{aligned}$$

Подставляя пропагаторы и интегрируя по z_2^+ и по $\vec{x}, \vec{p}, z_{1x}^+, x^+, x^-$, используя закон сохранения импульса, получаем,

$$\begin{aligned}
\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{11_2} &= 2g^4 f^{a'b'c'}(U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int d\vec{z}_0 U_0^{bb'} \frac{(z_{20})_\perp^\alpha}{(2\pi)^7 \vec{z}_{20}^2} \int d\vec{k} d\vec{q} \\
&\times e^{i(\vec{q}\vec{z}_{03}+\vec{k}\vec{z}_{01})} \left(\frac{-k_{\alpha\perp}}{(\vec{q}^2 - (\vec{q}+\vec{k})^2)\vec{k}^2} \ln \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} + \frac{q_{\alpha\perp}}{(\vec{k}^2 - (\vec{q}+\vec{k})^2)\vec{q}^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} \right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{q_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2\vec{k}^2} \ln \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} + \frac{k_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2\vec{k}^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{(\vec{q}+\vec{k})^2} - \frac{2(\vec{q}\vec{k})(k+q)_{\alpha\perp}}{\vec{q}^2\vec{k}^2(\vec{q}+\vec{k})^2} \ln \frac{\vec{k}^2}{\vec{q}^2}. \quad (1.96)$$

Добавив к этому выражению первый вклад диаграммы 11 и диаграмм 9 и 10 с соответствующей симметризацией ($1 \leftrightarrow 3$) (1.94), выполняем преобразование Фурье этого выражения с помощью интегралов из приложений А и В в [92]. В результате,

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{11+9+10+(9+10)(3 \leftrightarrow 1)} &= i f^{abc} g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int \frac{U_0^{b'b} d\vec{z}_0}{(2\pi)^6 \vec{z}_{20}^2} \\ &\times \left[2 \int d\vec{x} \left\{ \frac{(\vec{z}_{1x}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{x1}^2} \frac{1}{\vec{z}_{x0}^2} \ln \frac{\vec{z}_{x3}^2}{\vec{z}_{03}^2} - 2 \frac{(\vec{z}_{0x}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{0x}^2} \frac{(\vec{z}_{x3}\vec{z}_{x1})}{\vec{z}_{x3}^2 \vec{z}_{x1}^2} \ln \vec{z}_{x3}^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2\pi \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{01}^2} \ln \frac{\vec{z}_{03}^2}{\vec{z}_{13}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^4}{\vec{z}_{03}^2 \vec{z}_{13}^2} - (1 \leftrightarrow 3) \right]. \quad (1.97) \end{aligned}$$

Этот интеграл можно вычислить, заменив переменные на $\rho = |\vec{z}_{x3}|$, $t = e^{i\phi_{\vec{z}_{x3}}}$ и интегрируя по t вычетами. После этого получаются дилогарифмические интегралы, которые можно объединить с

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{11+9+10+(9+10)(3 \leftrightarrow 1)} &= i f^{abc} g^4 (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) \int \frac{U_0^{b'b} d\vec{z}_0}{(2\pi)^5} \\ &\times \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{30}^2 \vec{z}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^2}{\vec{z}_{31}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^2}{\vec{z}_{31}^2}. \quad (1.98) \end{aligned}$$

Сумма этих диаграмм и диаграмм, являющихся их зеркальным отражением относительно ударной волны, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO}^{conn} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{1g} &= \left\{ f^{abc} (U_1 t^a) \cdot (t^b U_2) \cdot (U_3 t^c) - f^{ab'c} (t^a U_1) \cdot (U_2 t^b) \cdot (t^c U_3) \right\} \\ &\times i g^4 \int \frac{U_0^{b'b} d\vec{z}_0}{(2\pi)^5} \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{30}^2 \vec{z}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^2}{\vec{z}_{31}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^2}{\vec{z}_{31}^2}. \quad (1.99) \end{aligned}$$

Выполняя свертку, получаем

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO}^{conn} \otimes B_{123}^\eta \rangle |_{1g} &= \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{z}_0 \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^2 \vec{z}_{20}^2} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{30}^2 \vec{z}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^2}{\vec{z}_{31}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^2}{\vec{z}_{31}^2} \\ &\times (B_{100} B_{320} - B_{300} B_{210}) + (2 \leftrightarrow 1) + (2 \leftrightarrow 3). \quad (1.100) \end{aligned}$$

Из (1.99) можно найти вклад несвязных диаграмм, которые отличаются от диаграмм на Рисунке 3 присоединением глюона в правой части диаграмм, и диаграмм, в которые они переходят после зеркального отражения относительно ударной волны. Получаем для суммы (1.100) и всех таких диаграмм

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{K}_{NLO} \otimes B_{123}^\eta \rangle|_{1g} &= \frac{g^4}{4} \int \frac{d\vec{z}_0}{(2\pi)^5} \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^2\vec{z}_{20}^2} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{30}^2\vec{z}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^2}{\vec{z}_{31}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^2}{\vec{z}_{31}^2} \\
&\quad \times (B_{100}B_{320} - B_{300}B_{210}) \\
&+ \frac{g^4}{4} \int \frac{d\vec{z}_0}{(2\pi)^5} \left[\frac{1}{\vec{z}_{10}^2} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{10})}{\vec{z}_{30}^2\vec{z}_{10}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^2}{\vec{z}_{31}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^2}{\vec{z}_{31}^2} \\
&\quad \times \left(B_{123} - \frac{1}{2} [3B_{100}B_{320} + B_{300}B_{120} - B_{200}B_{130}] \right) \\
&+ \frac{g^4}{4} \int \frac{d\vec{z}_0}{(2\pi)^5} \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{30})}{\vec{z}_{10}^2\vec{z}_{30}^2} - \frac{1}{\vec{z}_{30}^2} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^2}{\vec{z}_{31}^2} \ln \frac{\vec{z}_{10}^2}{\vec{z}_{31}^2} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} [3B_{300}B_{120} + B_{100}B_{320} - B_{200}B_{130}] - B_{123} \right) \\
&\quad + (2 \leftrightarrow 1) + (2 \leftrightarrow 3). \tag{1.101}
\end{aligned}$$

Если мы положим здесь $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$, мы получим соответствующий вклад в ядро цветового диполя (см. выражение (99) в [24]).

1.5 Эволюция барионной вильсоновской петли в СГЛП

1.5.1 Эволюция вильсоновских линий

Ясно, что в СГЛП эволюционное уравнение для оператора из трех вильсоновских линий может быть восстановлено из эволюции двух линий, одной линии и связного вклада, вычисленного в предыдущей части ([27]). Для диаграмм самодействия и попарного взаимодействия можно использовать результаты [26].

Здесь мы объединяем эти результаты.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (U_1)_i^j}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_5 d\vec{r}_0 \left\{ U_5^{dd'} (U_0^{ee'} - U_5^{ee'}) \left(G_9 [i f^{ade} (t^a U_1 \{t^{d'} t^{e'}\})_i^j] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i f^{ad'e'} (\{t^d t^e\} U_1 t^a)_i^j \right] + 2G_3 f^{ade} f^{bd'e'} (t^a U_1 t^b)_i^j \right) \\
&\quad + \frac{4n_f}{\vec{r}_{05}^4} \left\{ \frac{(\vec{r}_{15} \vec{r}_{01})}{\vec{r}_{15}^2 - \vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) + 1 \right\} (t^a U_1 t^b)_i^j \text{tr} (t^a U_5 t^b (U_0^\dagger - U_5^\dagger)) \left. \right\} \\
&\quad + \frac{\alpha_s^2 N_c}{4\pi^3} \int \frac{d\vec{r}_5}{\vec{r}_{15}^4} (U_5^{ab} - U_1^{ab}) (t^a U_1 t^b)_i^j \\
&\quad \times \left\{ \frac{11}{3} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 \mu^2}{4e^{2\psi(1)}} \right) + \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{n_f}{N_c} \left[\frac{2}{3} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 \mu^2}{4e^{2\psi(1)}} \right) + \frac{10}{9} \right] \right\}, \quad (1.102)
\end{aligned}$$

Здесь и далее определения функций G_i и H_i даны в приложении Б: определение G_3 дано в (Б.3), а определение G_9 дано в (Б.8); n_f – количество ароматов кварков, μ^2 – масштаб перенормировки в \overline{MS} схеме.

$$\frac{\partial (U_1)_i^j (U_2)_k^l}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_5 d\vec{r}_0 (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3) + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_5 (\mathcal{B}_1 + N_c \mathcal{B}_2). \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= [(t^a U_1)_i^j (U_2 t^b)_k^l + (t^a U_2)_k^l (U_1 t^b)_i^j] \left[(f^{ade} f^{bd'e'} U_5^{dd'} (U_0^{ee'} - U_5^{ee'}) \right. \\
&\quad \times 4(H_3 + H_4 + (1 \leftrightarrow 2))) + \text{tr} (t^a U_5 t^b (U_0^\dagger - U_5^\dagger)) \\
&\quad \left. \times 4n_f \left(\frac{1}{\vec{r}_{05}^4} \left\{ \frac{(\vec{r}_{15} \vec{r}_{01})}{\vec{r}_{15}^2 - \vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) + 1 \right\} + \frac{L_{12}^q}{2} + (1 \leftrightarrow 2) \right) \right], \quad (1.104)
\end{aligned}$$

где определение H_3 дано в (Б.11), определение H_4 дано в (Б.12) и

$$L_{12}^q = \frac{1}{\vec{r}_{05}^4} \left\{ \frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 + \vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2 - \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2}{2(\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 - \vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2)} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) - 1 \right\}. \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= 8(U_5 - U_1)^{dd'} (U_0 - U_2)^{ee'} \left\{ i[f^{ad'e'} (t^d U_1 t^a)_i^j (t^e U_2)_k^l - f^{ade} (t^a U_1 t^d)_i^j (U_2 t^e)_k^l] \right. \\
&\quad \times (H_3 - H_2) - (H_2(1 \leftrightarrow 2) + H_3(1 \leftrightarrow 2)) \\
&\quad \left. \times i[f^{ad'e'} (t^d U_1)_i^j (t^e U_2 t^a)_k^l - f^{ade} (U_1 t^d)_i^j (t^a U_2 t^e)_k^l] \right\}, \quad (1.106)
\end{aligned}$$

где определение H_2 дано в (Б.10), и $H_i(1 \leftrightarrow 2) \equiv H_i|_{\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3 &= 8U_5^{dd'} \left\{ i[f^{ad'e'} (U_1 t^a)_i^j (t^d t^e U_2)_k^l - f^{ade} (t^a U_1)_i^j (U_2 t^e t^d)_k^l] (H_1 + H_3(1 \leftrightarrow 2)) \right. \\
&\quad \times (U_0 - U_2)^{ee'} + (U_0 - U_1)^{ee'} (H_1(1 \leftrightarrow 2) + H_3) \\
&\quad \left. \times i[f^{ad'e'} (t^d t^e U_1)_i^j (U_2 t^a)_k^l - f^{ade} (U_1 t^e t^d)_i^j (t^a U_2)_k^l] \right\}, \quad (1.107)
\end{aligned}$$

где определение H_1 дано в (Б.9).

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= 2 \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \\ &\times \left\{ (U_5 - U_1)^{ab}{}_i [f^{bde} (t^a U_1 t^d)_i^j (U_2 t^e)_k^l + f^{ade} (t^e U_1 t^b)_i^j (t^d U_2)_k^l] \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{15}^2} \right) \right. \\ &\left. + (U_5 - U_2)^{ab}{}_i [f^{bde} (U_1 t^e)_i^j (t^a U_2 t^d)_k^l + f^{ade} (t^d U_1)_i^j (t^e U_2 t^b)_k^l] \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{25}^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= (2U_5 - U_1 - U_2)^{ab} [(t^a U_1)_i^j (U_2 t^b)_k^l + (U_1 t^b)_i^j (t^a U_2)_k^l] \\ &\times \left\{ \frac{(\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2)}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \left[\left(\frac{11}{3} - \frac{2 n_f}{3 N_c} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 \mu^2}{4 e^{2\psi(1)}} \right) + \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10 n_f}{9 N_c} \right] \right. \\ &\left. + \left(\frac{11}{3} - \frac{2 n_f}{3 N_c} \right) \left(\frac{1}{2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) + \frac{1}{2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.109)$$

где n_f – число ароматов кварков, а μ^2 – масштаб перенормировки в \overline{MS} схеме.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (U_1)_i^j (U_2)_k^l (U_3)_m^n}{\partial \eta} \\ &= i \frac{\alpha_s^2}{\pi^4} \int d\vec{r}_5 d\vec{r}_0 \left\{ f^{cde} [(t^a U_1)_i^j (t^b U_2)_k^l (U_3 t^c)_m^n (U_5 - U_1)^{ad} (U_0 - U_2)^{be} \right. \\ &- (U_1 t^a)_i^j (U_2 t^b)_k^l (t^c U_3)_m^n (U_5 - U_1)^{da} (U_0 - U_2)^{eb}] (H_5(1 \leftrightarrow 3) + H_6(1 \leftrightarrow 3)) \\ &+ f^{ade} [(U_1 t^a)_i^j (t^b U_2)_k^l (t^c U_3)_m^n (U_5 - U_3)^{cd} (U_0 - U_2)^{be} \\ &- (t^a U_1)_i^j (U_2 t^b)_k^l (U_3 t^c)_m^n (U_5 - U_3)^{dc} (U_0 - U_2)^{eb}] (H_5 + H_6) \\ &+ f^{bde} [(t^a U_1)_i^j (U_2 t^b)_k^l (t^c U_3)_m^n (U_5 - U_1)^{ad} (U_0 - U_3)^{ce} \\ &- (U_1 t^a)_i^j (t^b U_2)_k^l (U_3 t^c)_m^n (U_5 - U_1)^{da} (U_0 - U_3)^{ec}] \\ &\left. \times (H_5(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) + H_6(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)), \right\} \end{aligned} \quad (1.110)$$

где определение H_5 дано в (Б.13), определение H_6 дано в (Б.14) а $H_i(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) \equiv H_i|_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_1}$.

Очевидно, что выражения (1.102)–(1.110) не имеют ультрафиолетовых сингулярностей (УФ), поскольку они содержат разности типа $U_5 - U_i$ и $U_0 - U_i$, которые делают их сходящимися. Чтобы построить уравнение эволюции барионного оператора, нам надо свернуть индексы в (1.102)–(1.110) с индексами

невзаимодействующих вильсоновских линий и упростить результат. Окончательное уравнение эволюции будет состоять из 3 частей: часть с 2 интегрированиями по \vec{r}_0 и \vec{r}_5 , часть с одним интегрированием по \vec{r}_0 и чисто виртуальная часть. Структура вильсоновской линии в последней части не зависит ни от \vec{r}_0 , ни от \vec{r}_5 . Поэтому кажется, что мы можем взять по ней оба интеграла. Однако мы не можем этого сделать, поскольку эта часть уничтожает УФ-сингулярности в первых двух частях. На самом деле, чисто виртуальная часть однозначно определяется первыми двумя частями. Действительно, она может быть пропорциональна только одной цветовой структуре B_{123} и должна устранять другие части, если мы отключим ударную волну, т. е. когда $U_i = 1$. Поэтому мы будем вычислять только первые две части уравнения эволюции, возникающие из диаграмм с одним и двумя пересечениями глюонами ударной волны, а затем мы восстанавливаем виртуальную часть из вышеуказанных условий. При построении мы работаем с частями ядер (подынтегральными выражениями), и не интегрируем по \vec{r}_0 и \vec{r}_5 . Поэтому нам не надо, чтобы эти части были УФ-конечными. Построив их все, мы восстанавливаем виртуальную часть, которая автоматически делает все ядро УФ-сходящимся.

Начнем с самодействий и парных взаимодействий. При $N_c = 3$ можно использовать $SU(3)$ -тождества (1.12) чтобы переписать (1.102)–(1.110) исключительно через вильсоновские линии в фундаментальном представлении. Рассмотрим теперь глюонную часть без вычитания. Для вклада состояний с 2 глюонами, пересекающими ударную волну, она записывается следующим образом:

$$\langle K_{NLO} \otimes (U_1)_{i_1}^{i_3} (U_2)_{j_1}^{j_3} \rangle_{2g} = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_{12}, \quad (1.111)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{12} = & G_1 \{ (U_1 U_0^\dagger U_5)_{i_1}^{i_3} (U_0 U_5^\dagger U_2)_{j_1}^{j_3} + (U_5 U_0^\dagger U_1)_{i_1}^{i_3} (U_2 U_5^\dagger U_0)_{j_1}^{j_3} \} \\ & + G_2 (U_1)_{i_1}^{i_3} \{ (U_0 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_5)_{j_1}^{j_3} + (U_5 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_0)_{j_1}^{j_3} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +G_3(U_2)_{j_1}^{j_3} \{ (U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5)_{i_1}^{i_3} + (U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0)_{i_1}^{i_3} \} \\
& +G_4 \{ (U_5)_{j_1}^{i_3} (U_1 U_0^\dagger U_2)_{i_1}^{j_3} + (U_5)_{i_1}^{j_3} (U_2 U_0^\dagger U_1)_{j_1}^{i_3} \} tr(U_0 U_5^\dagger) \\
& +G_5(U_2)_{j_1}^{j_3} (U_5)_{i_1}^{i_3} tr(U_0 U_5^\dagger) tr(U_0^\dagger U_1) \\
& +G_6 \left((U_0)_{i_1}^{i_3} \{ (U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2)_{j_1}^{j_3} + (U_2 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5)_{j_1}^{j_3} \} \right. \\
& \left. - \{ (U_5)_{j_1}^{i_3} (U_0 U_5^\dagger U_2)_{i_1}^{j_3} + (U_5)_{i_1}^{j_3} (U_2 U_5^\dagger U_0)_{j_1}^{i_3} \} tr(U_0^\dagger U_1) \right) \\
& +G_7(U_1)_{i_1}^{i_3} (U_5)_{j_1}^{j_3} tr(U_0 U_5^\dagger) tr(U_0^\dagger U_2) \\
& +G_8 \left((U_5)_{j_1}^{j_3} \{ (U_0 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_1)_{i_1}^{i_3} + (U_1 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_0)_{i_1}^{i_3} \} \right. \\
& \left. - \{ (U_0)_{i_1}^{j_3} (U_5 U_0^\dagger U_1)_{j_1}^{i_3} + (U_0)_{j_1}^{i_3} (U_1 U_0^\dagger U_5)_{i_1}^{j_3} \} tr(U_5^\dagger U_2) \right). \quad (1.112)
\end{aligned}$$

Заметим, что, как обсуждалось выше и в [26], некоторые члены с одним пересечением можно представить в форме с двумя пересечениями с дополнительным интегрированием по \vec{r}_5 (1.103). При этом некоторые множители U_5 и U_0 в (1.112) заменяются на $U_5 - U_i$ и $U_0 - U_i$ ($i = 1, 2, 3$). Такие вычитания делают этот вклад явно сходящимся при $\vec{r}_{0,5} = \vec{r}_i$. Мы не записываем здесь эти вычитания, так как проще сделать вычитание после цветовой свертки. После свертки с $\varepsilon^{i_1 j_1 h} \varepsilon_{i_3 j_3 h'} (U_3)_h^{h'}$, (1.112) дает вклад 2-глюонных состояний в эволюцию барионного оператора $U_1 \cdot U_2 \cdot U_3$, описывающий общее взаимодействие вильсоновских линий 1 и 2 и не затрагивающий вильсоновскую линию 3.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{G}_{12} \varepsilon^{i_1 j_1 h} \varepsilon_{i_3 j_3 h'} (U_3)_h^{h'} = -G_4 tr(U_0 U_5^\dagger) \left(U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1 \right) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& +G_1 \left((U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) + (U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_1) \right) \cdot U_3 \\
& + \left[G_2 \left(U_0 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_0 \right) \cdot U_1 \cdot U_3 + (1 \leftrightarrow 2) \right] \\
& + \left[G_5 U_2 \cdot U_3 \cdot U_5 tr(U_0^\dagger U_1) tr(U_0 U_5^\dagger) + (1 \leftrightarrow 2) \right] \\
& + \left[G_6 \left(tr(U_0^\dagger U_1) \left(U_0 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_0 \right) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(U_2 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot U_0 \cdot U_3 \right) + (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5) \right]. \quad (1.113)
\end{aligned}$$

Можно также написать

$$\langle K_{NLO} \otimes (U_1^\dagger)_{j_1}^{j_3} \rangle_{2g} = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_{1^\dagger}, \quad (1.114)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1^\dagger} = & G_3 \left(U_5^\dagger U_0 U_1^\dagger U_5 U_0^\dagger + U_0^\dagger U_5 U_1^\dagger U_0 U_5^\dagger \right. \\ & \left. - tr(U_1^\dagger U_5) tr(U_5^\dagger U_0) U_0^\dagger - tr(U_0^\dagger U_5) tr(U_1^\dagger U_0) U_5^\dagger \right)_{j_1}^{j_3} \\ & + G_9 \left(tr(U_1^\dagger U_5) tr(U_5^\dagger U_0) U_0^\dagger - tr(U_0^\dagger U_5) tr(U_1^\dagger U_0) U_5^\dagger \right)_{j_1}^{j_3}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

а затем выполнить свертку:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\langle 1^\dagger \rangle 3} = & \mathbf{G}_{1^\dagger} (U_3)_{j_3}^{j_1} = G_3 \left(tr(U_0^\dagger U_3 U_5^\dagger U_0 U_1^\dagger U_5) + tr(U_0^\dagger U_5 U_1^\dagger U_0 U_5^\dagger U_3) \right. \\ & \left. - tr(U_0^\dagger U_3) tr(U_1^\dagger U_5) tr(U_5^\dagger U_0) - tr(U_0^\dagger U_5) tr(U_1^\dagger U_0) tr(U_5^\dagger U_3) \right) \\ & + G_9 \left(tr(U_0^\dagger U_3) tr(U_1^\dagger U_5) tr(U_5^\dagger U_0) - tr(U_0^\dagger U_5) tr(U_1^\dagger U_0) tr(U_5^\dagger U_3) \right). \end{aligned} \quad (1.116)$$

Для элементов группы $SU(3)$ существует тождество

$$\varepsilon^{ijh} \varepsilon_{i'j'h'} (U_1)_{i'}^{i'} (U_1)_{j'}^{j'} = 2(U_1^\dagger)_{h'}^h, \quad U_1 \cdot U_1 \cdot U_3 = 2tr(U_1^\dagger U_3), \quad (1.117)$$

Беря $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$ в (1.113), можно проверить, что это относится к (1.116), используя тождество выше вместе с (1.43) и (1.46). Выполнив сопряжение \mathbf{G}_{1^\dagger} , получаем

$$\langle K_{NLO} \otimes (U_1)_{j'}^{j'} \rangle_{2g} = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_1, \quad (1.118)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 = & G_3 \left(U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5 \right. \\ & \left. - tr(U_1 U_5^\dagger) tr(U_5 U_0^\dagger) U_0 - tr(U_0 U_5^\dagger) tr(U_1 U_0^\dagger) U_5 \right)_j^{j'} \\ & + G_9 \left(tr(U_1 U_5^\dagger) tr(U_5 U_0^\dagger) U_0 - tr(U_0 U_5^\dagger) tr(U_1 U_0^\dagger) U_5 \right)_j^{j'}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Вклад эволюции одной линии U_1 в эволюцию барионного оператора для диаграмм с двумя глюонами, пересекающими ударную волну, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\langle 1 \rangle 23} &= \mathbf{G}_1 \varepsilon^{ijh} \varepsilon_{i'j'h'} (U_2)_i^{i'} (U_3)_h^{h'} = G_3 \left(U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5 \right. \\ &\quad \left. - \text{tr}(U_1 U_5^\dagger) \text{tr}(U_5 U_0^\dagger) U_0 - \text{tr}(U_0^\dagger U_1) \text{tr}(U_5^\dagger U_0) U_5 \right) \cdot U_2 \cdot U_3 \\ &\quad + G_9 \left(\text{tr}(U_1 U_5^\dagger) \text{tr}(U_5 U_0^\dagger) U_0 - \text{tr}(U_0^\dagger U_1) \text{tr}(U_5^\dagger U_0) U_5 \right) \cdot U_2 \cdot U_3. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Связный вклад эволюции линий 1 и 2 имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\langle 12 \rangle 3} &= \frac{1}{2} [H_1 - (1 \leftrightarrow 2)] \\ &\quad \times [(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 - (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 - (5 \leftrightarrow 0)] \\ &\quad + H_2 [\text{tr}(U_0^\dagger U_1) (U_0 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 \\ &\quad - (U_2 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 - (5 \leftrightarrow 0)] \\ &\quad + H_3 [\text{tr}(U_0^\dagger U_1) (U_0 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 \\ &\quad + (U_2 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (5 \leftrightarrow 0)] \\ &\quad + H_4 [\text{tr}(U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 \\ &\quad + (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + (5 \leftrightarrow 0)] \\ &\quad + H_1 [\text{tr}(U_5 U_0^\dagger) (U_1 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 \cdot U_3 - (5 \leftrightarrow 0)] + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (1.121)$$

Здесь выражения для H_i даны в приложении Б (Б.9–Б.12). Полностью связный тройной вклад можно найти в (1.110) или [27] и преобразовать в следующую форму:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\langle 123 \rangle} &= H_5 [(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 - (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 \\ &\quad + (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 - (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 + (5 \leftrightarrow 0)] \\ &\quad + H_6 [(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 + (U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 \\ &\quad + (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 - (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 - (5 \leftrightarrow 0)] \\ &\quad + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3), \end{aligned} \quad (1.122)$$

где выражения для H_i даны в приложении Б 3.5 (Б.13–Б.14).

1.5.2 Построение ядра: глюонная часть

Взяв вклады самодействия вильсоновских линий (1.120) вместе с “парными” (1.121) и “тройными” (1.122) связными вкладками из предыдущего раздела, можно записать полный вклад в эволюцию БВП с двумя глюонами, пересекающимися ударную волну, в следующей форме:

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle|_{2g} = \langle K_{NLO} \otimes U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \rangle|_{2g} = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}, \quad (1.123)$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\langle 1 \rangle 23} + \mathbf{G}_{1 \langle 2 \rangle 3} + \mathbf{G}_{12 \langle 3 \rangle} + \mathbf{G}_{\langle 12 \rangle 3} + \mathbf{G}_{1 \langle 23 \rangle} + \mathbf{G}_{\langle 13 \rangle 2} + \mathbf{G}_{\langle 123 \rangle}. \quad (1.124)$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают связный вклад, то есть, $\mathbf{G}_{\langle 1 \rangle 23}$ дает вклад эволюции линии 1 (1.120), причем линии 2 и 3 являются наблюдателями, другими словами, не участвуют во взаимодействии. $\mathbf{G}_{\langle 12 \rangle 3}$ соответствует связному вкладу в эволюцию линий 1 и 2 (1.121), причем линия 3 не затрагивается, а $\mathbf{G}_{\langle 123 \rangle}$ означает полностью связный вклад (1.122). Все остальное можно получить из них с помощью преобразования $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$, т.е. через все 5 возможных перестановок $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, что предполагает так же перестановки $U_1 \equiv U(\vec{r}_1), U_2, U_3$.

Существует несколько полезных $SU(3)$ -тождеств, которые помогают сократить число цветовых структур. Они перечислены в приложении А. Сначала мы используем (А.5), чтобы избавиться от структуры

$$(U_0 U_5^\dagger U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_1 \cdot U_2 + (0 \leftrightarrow 5) \quad (1.125)$$

и двух других структур, в которые $(U_0 U_5^\dagger U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_1 \cdot U_2$ входит после преобразований $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$. И опять $i \leftrightarrow j$ обозначает перестановку. Это означает,

что мы должны сделать замены $\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$ и $U_i \leftrightarrow U_j$. Во-вторых, мы используем (A.6), чтобы исключить 6 таких вкладов антисимметричных относительно замены $0 \leftrightarrow 5$:

$$(U_2 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 - (5 \leftrightarrow 0). \quad (1.126)$$

Затем мы используем (A.7), чтобы выразить 6 структур подобных

$$(U_2 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_3 \quad (1.127)$$

и симметричные им по замене $0 \leftrightarrow 5$ через другие структуры. После этого мы можем сократить 3 структуры вида

$$U_2 \cdot U_3 \cdot U_5 \operatorname{tr} (U_0^\dagger U_1) \operatorname{tr} (U_0 U_5^\dagger) - U_2 \cdot U_3 \cdot U_0 \operatorname{tr} (U_5^\dagger U_1) \operatorname{tr} (U_5 U_0^\dagger), \quad (1.128)$$

используя (A.8), и посредством (A.9) убрать 3 неконформных члена пропорциональных

$$\operatorname{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 - (5 \leftrightarrow 0) \quad (1.129)$$

и 2 структуры, в которые они входят после преобразований $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$. Наконец, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = & \{ (L_{12} + \tilde{L}_{12}) (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \\ & + L_{12} \operatorname{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (M_{13} - M_{12} - M_{23} + M_2^{13}) \\ & \times [(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0)] \cdot U_5 \\ & + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \} + (0 \leftrightarrow 5). \end{aligned} \quad (1.130)$$

Здесь

$$L_{ij} \equiv L(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \quad \tilde{L}_{ij} \equiv \tilde{L}(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \quad M_{ij} \equiv M(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \quad M_i^{jk} \equiv M(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k), \quad (1.131)$$

$$\begin{aligned} L_{12} = & H_3 + H_4 - \frac{1}{2} G_3 + (1 \leftrightarrow 2) \\ = & \frac{1}{2\vec{r}_{05}^4} + \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{05}^2} \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2 - \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2} \right. \\ & \left. \times \left(-\frac{\vec{r}_{12}^4}{8} \left(\frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2} + \frac{1}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{05}^2} - \frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 + \vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{4\vec{r}_{05}^4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.132)$$

И здесь $i \leftrightarrow j$ обозначает перестановку. Это значит, что мы должны выполнить замены $\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$ и $U_i \leftrightarrow U_j$.

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{12} &= H_1 + H_2 - \frac{1}{2}G_9 - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{\vec{r}_{12}^2}{8} \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{02}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{2} \left\{ H_1 + H_2 - \frac{1}{2}G_9 + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\ &= \frac{\vec{r}_{12}^2}{16} \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.134)$$

$$\begin{aligned} M_2^{13} &= H_2(1 \leftrightarrow 2) + H_2(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) + H_3(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) \\ &\quad - H_3(1 \leftrightarrow 2) + H_5(1 \leftrightarrow 2) + H_6(1 \leftrightarrow 2) - G_9(1 \leftrightarrow 2) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{25}^2} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} - \frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} - \frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Здесь $H_i(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1) \equiv H_i|_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_1}$.

Единственный УФ-расходящийся член в (1.130) – член, пропорциональный L_{12} . У него та же структура координат, что и у соответствующего члена в дипольном ядре. Поэтому мы можем выполнить то же вычитание, что и в случае диполя. С помощью (1.46), мы получаем

$$\begin{aligned} &(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + tr(U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (2 \leftrightarrow 1)|_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_5} \\ &= 3[tr(U_1 U_5^\dagger) U_2 \cdot U_3 + tr(U_2 U_5^\dagger) U_1 \cdot U_3 - tr(U_3 U_5^\dagger) U_1 \cdot U_2] \cdot U_5 \\ &- U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 = \frac{3}{2}[B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] - B_{123}, \end{aligned} \quad (1.136)$$

Поэтому мы можем разделить результат на УФ-конечные и УФ-расходящиеся части:

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle|_{2g} = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_{finite} - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \mathbf{G}_{UV}, \quad (1.137)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{finite} = & \{ \tilde{L}_{12} (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \\
& + L_{12} \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + \text{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \\
& - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \left. \right] + (M_{13} - M_{12} - M_{23} + M_2^{13}) \\
& \times \left[(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \right] \cdot U_5 \\
& + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \} + (0 \leftrightarrow 5). \tag{1.138}
\end{aligned}$$

И \mathbf{G}_{UV} включен в член, описывающий вклад в ядро с одним глюоном, пересекающим ударную волну [26], который пропорционален первому коэффициенту при β -функции. Мы возьмем этот вклад из (1.102) и (1.109). Для чисто глюонного поля $\beta_0 = \frac{11}{3}$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{K}_{NLO} \otimes B_{123} \rangle_{1g}^\beta = & \left[\frac{-\alpha_s^2}{(2\pi)^3} \frac{11}{2} \int d\vec{r}_0 \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) \right] \right. \\
& \times \left(U_0 \cdot U_3 \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) + U_0 \cdot U_3 \cdot (U_1 U_0^\dagger U_2) + \frac{2}{3} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \right) \\
& + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \left. \right] + \left[\frac{\alpha_s^2}{(2\pi)^3} 11 \int \frac{d\vec{r}_0}{\vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) \right. \\
& \left. + \left(U_0 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr}(U_1 U_0^\dagger) - \frac{1}{3} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \right], \tag{1.139}
\end{aligned}$$

где

$$\frac{11}{3} \ln \frac{1}{\tilde{\mu}_g^2} = \frac{11}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{4e^{2\psi(1)}} \right) + \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3}, \tag{1.140}$$

где используется схема \overline{MS} . После алгебраических преобразований получаем

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{K}_{NLO} \otimes B_{123} \rangle_{1g}^\beta \\
= & - \frac{\alpha_s^2}{(2\pi)^3} \frac{11}{6} \int d\vec{r}_0 \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) \right] \\
& \times \left(\frac{3}{2} (B_{100} B_{230} + B_{200} B_{130} - B_{300} B_{210}) - B_{123} \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \tag{1.141}
\end{aligned}$$

Существуют также диаграммы с одним глюоном, пересекающим ударную волну, которые не пропорциональны β функции. Их можно найти из (1.102)–(1.110). Однако они уже были вычислены в предыдущем разделе (1.101) ([27]).

Таким образом, вещественная часть всего ядра записывается следующим образом:

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle|_{\text{real}} = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_{finite} - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \mathbf{G}_{\text{real}}, \quad (1.142)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{real}} = & -\frac{1}{2} \left[\frac{(\vec{r}_{10}\vec{r}_{20})}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} - \frac{(\vec{r}_{30}\vec{r}_{20})}{\vec{r}_{30}^2 \vec{r}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{31}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{31}^2} (B_{100}B_{320} - B_{300}B_{210}) \\ & - \left[\frac{1}{\vec{r}_{10}^2} - \frac{(\vec{r}_{30}\vec{r}_{10})}{\vec{r}_{30}^2 \vec{r}_{10}^2} \right] \ln \frac{\vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{31}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{31}^2} \left(B_{123} - \frac{1}{2} [3B_{100}B_{320} + B_{300}B_{120} - B_{200}B_{130}] \right) \\ & + \frac{11}{12} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{3}{2} (B_{100}B_{230} + B_{200}B_{130} - B_{300}B_{210}) - B_{123} \right) \\ & + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3), \end{aligned} \quad (1.143)$$

и определение \mathbf{G}_{finite} дано в (1.138). Если здесь мы положим $\vec{r}_2 = \vec{r}_3$, мы получим дипольный результат (см. (100) в [24]). Наконец, из условий, что без ударной волны ядро должно обращаться в нуль (если все $B = 6$) и что виртуальный вклад пропорционален B_{123} , мы получаем полное ядро

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_{finite} - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \mathbf{G}', \quad (1.144)$$

где определение \mathbf{G}_{finite} дано в (1.138) и

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' = & \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{32}^2}{\vec{r}_{30}^2 \vec{r}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{21}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{21}^2} (B_{100}B_{320} - B_{200}B_{310}) \\ & - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \ln \frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} \left(9B_{123} - \frac{1}{2} [2(B_{100}B_{320} + B_{200}B_{130}) - B_{300}B_{120}] \right) \\ & + \frac{11}{6} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}_g^2} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{3}{2} (B_{100}B_{230} + B_{200}B_{130} - B_{300}B_{210}) - 9B_{123} \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.145)$$

Это выражение отличается от (1.143) коэффициентами при B_{123} , которые превращаются в «девятки», чтобы выполнялось условие, что без ударной волны ядро равно 0.

1.5.3 Построение ядра: кварковая часть

Кварковый вклад в эволюцию барионной вильсоновской петли в СГП можно получить из (1.102)–(1.103). Вклад с 2 кварками, пересекающими ударную волну, без вычитания записывается следующим образом:

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle|_{2g}^q = -\frac{\alpha_s^2 n_f}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}^q. \quad (1.146)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^q = & \left[\left((U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - 3U_2 \cdot U_3 \cdot U_5 \text{tr}(U_0^\dagger U_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \right) \right. \\ & \times \frac{2}{3} \frac{1}{\vec{r}_{05}^4} \left\{ \frac{(\vec{r}_{15} \vec{r}_{01})}{\vec{r}_{15}^2 - \vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) + 1 \right\} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \left. \right] \\ & + \left[\left(\frac{1}{3} (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \right. \right. \\ & \left. \left. + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (1 \leftrightarrow 2) \right) \right. \\ & \times \left(\frac{1}{\vec{r}_{05}^4} \left\{ \frac{(\vec{r}_{15} \vec{r}_{01})}{\vec{r}_{15}^2 - \vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) + 1 \right\} + \frac{L_{12}^q}{2} + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\ & \left. + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right], \quad (1.147) \end{aligned}$$

где определение L_{12}^q дано в (1.105). Используя тождество (A.15), можно увидеть, что этот вклад действительно конформно инвариантен:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^q = & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \right. \right. \\ & \left. \left. + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (1 \leftrightarrow 2) \right) + (0 \leftrightarrow 5) \right\} L_{12}^q + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \quad (1.148) \end{aligned}$$

В дипольном пределе $\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_2$ имеем удвоенную соответствующую часть ядра БК [22]. Поэтому можно сделать то же вычитание, что и в случае БК

$$\mathbf{G}^q = \mathbf{G}_{finite}^q + \mathbf{G}_{UV}^q, \quad (1.149)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{finite}^q = & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9} B_{123} \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \right. \right. \\ & + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + \frac{1}{6} B_{123} - \frac{1}{4} (B_{013} B_{002} + B_{001} B_{023} - B_{012} B_{003}) \\ & \left. \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right) + (0 \leftrightarrow 5) \right\} L_{12}^q + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.150)$$

Аналогично глюонному случаю можно взять вклад \mathbf{G}_{UV}^q с одним глюоном, пересекающим ударную волну из членов, пропорциональных β -функции в (1.102) и (1.109). Можно восстановить этот вклад из глюонной части с помощью замен

$$\frac{11}{3} \rightarrow \beta = \left(\frac{11}{3} - \frac{2n_f}{3} \right), \quad (1.151)$$

$$\frac{11}{3} \ln \frac{1}{\tilde{\mu}_g^2} = \frac{11}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{4e^{2\psi(1)}} \right) + \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} \rightarrow \beta \ln \frac{1}{\tilde{\mu}^2}, \quad (1.152)$$

где

$$\beta \ln \frac{1}{\tilde{\mu}^2} = \left(\frac{11}{3} - \frac{2n_f}{3} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{4e^{2\psi(1)}} \right) + \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10n_f}{9}. \quad (1.153)$$

В результате, полное ядро в КХД записывается следующим образом:

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123} \rangle = -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\mathbf{G}_{finite} + n_f \mathbf{G}_{finite}^q \right) - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \mathbf{G}^{qt}, \quad (1.154)$$

где n_f – количество кварковых ароматов,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{qt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{32}^2}{\vec{r}_{30}^2 \vec{r}_{20}^2} \right] \ln \frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{21}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{21}^2} (B_{100} B_{320} - B_{200} B_{310}) \\ & - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \ln \frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} \left(9B_{123} - \frac{1}{2} [2(B_{100} B_{320} + B_{200} B_{130}) - B_{300} B_{120}] \right) \\ & + \frac{\beta}{2} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{3}{2} (B_{100} B_{230} + B_{200} B_{130} - B_{300} B_{210}) - 9B_{123} \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \end{aligned} \quad (1.155)$$

Определение \mathbf{G}_{finite} дано в (1.138) и определение \mathbf{G}_{finite}^q дано в (1.150).

1.5.4 Уравнение эволюции для составного оператора

В этом разделе мы рассматриваем только глюонную часть ядра, так как кварковая часть квазиконформна. Для построения составных конформных операторов будем использовать рецепт из [25] (см. также [93])

$$O^{conf} = O + \frac{1}{2} \frac{\partial O}{\partial \eta} \bigg|_{\frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \rightarrow \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{mn}^2 a}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \right)}, \quad (1.156)$$

где a – произвольная постоянная. Для конформного оператора барионной вильсоновской петли мы имеем следующий анзац:

$$B_{123}^{conf} = B_{123} + \frac{\alpha_s 3}{8\pi^2} \int d\vec{r}_5 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \ln \left(\frac{a \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \right) \right. \\ \left. \times \left(-B_{123} + \frac{1}{6} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215}) \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right]. \quad (1.157)$$

Если мы положим $\vec{r}_2 = \vec{r}_3$, получим составной дипольный оператор из [25]. Используя SU(3)-тождество (1.46), можно переписать (1.157) как

$$B_{123}^{conf} = B_{123} + \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_5 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \ln \left(\frac{a \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \right) \right. \\ \left. \times ((U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_5 \cdot U_3 - 2B_{123}) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right]. \quad (1.158)$$

Для оператора $(-B_{123} + \frac{1}{6} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215}))$ мы получаем

$$\begin{aligned} & (-3B_{123} + \frac{1}{2} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215}))^{conf} \\ &= (-3B_{123} + \frac{1}{2} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215})) \\ &+ \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left(A_{35} \frac{\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{35}^2 a}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2} \right) + A_{13} \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2 a}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{01}^2} \right) \right. \\ &+ A_{23} \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{23}^2 a}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) + A_{25} \frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{25}^2 a}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2} \right) \\ &\left. + A_{15} \frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 a}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2} \right) + A_{12} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 a}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) \right), \quad (1.159) \end{aligned}$$

где функции A вычислены в приложении В (В.3–В.7) в соответствии с анзацем (1.156). В результате, уравнение эволюции для B_{123}^{conf} превращается в

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{123}^{conf}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s^3}{4\pi^2} \int d\vec{r}_5 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} (-B_{123} + \frac{1}{6}(B_{155}B_{325} + B_{255}B_{315} - B_{355}B_{215}))^{conf} \right. \\
&+ (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \left. \right] - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}_{finite} - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \mathbf{G}' \\
&- \frac{\alpha_s^2}{32\pi^4} \int d\vec{r}_5 d\vec{r}_0 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \left(A_{35} \frac{\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{35}^2 \vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right. \right. \\
&+ A_{23} \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + A_{13} \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \\
&+ A_{15} \frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^4 \vec{r}_{52}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + A_{12} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) \\
&\left. \left. + A_{25} \frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{25}^4 \vec{r}_{51}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right]. \quad (1.160)
\end{aligned}$$

Теперь мы можем симметризовать последние 3 строки этого выражения относительно преобразования $0 \leftrightarrow 5$, т.е.,

$$\begin{aligned}
A_{ij}F(\vec{r}...) &\rightarrow [A_{ij}F(\vec{r}...)]^{sym} = \frac{[A_{ij} + A_{ij}(0 \leftrightarrow 5)][F + F(0 \leftrightarrow 5)]}{4} \\
&+ \frac{[A_{ij} - A_{ij}(0 \leftrightarrow 5)][F - F(0 \leftrightarrow 5)]}{4}. \quad (1.161)
\end{aligned}$$

Здесь $i \leftrightarrow j$ обозначает перестановку. Это означает, что мы должны выполнить замены $\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$ и $U_i \leftrightarrow U_j$. Затем можно использовать (А.9), чтобы показать, что у всех неконформных членов $SU(3)$ -коэффициенты не зависят от \vec{r}_5 или от \vec{r}_0 .

Чтобы избавиться от неконформных членов, сначала добавим симметризованные последние 3 линии (1.160) к неконформной части \mathbf{G}_{finite} (1.138), результат определим как $\tilde{\mathbf{G}}$ (1.162) и будем работать с ним, чтобы избежать переписывания конформно-инвариантных частей (1.160). С учетом (1.46), (А.9) и (А.13) мы можем записать результат как

$$\begin{aligned}
&- \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \tilde{\mathbf{G}} \\
&= - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left\{ \left(\frac{\vec{r}_{12}^4}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} B_{003} B_{012} - 2 B_{001} B_{023} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{13}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{03}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{35}^2} \right) \right) \\
& \times (B_{003}B_{012} - B_{001}B_{023}) + \frac{\vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} \\
& \times \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^4\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{15}^2} \right) (2B_{003}B_{012} - 2B_{002}B_{013} - 3B_{001}B_{023} + 4B_{123}) \right. \\
& + \ln \left(\frac{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{25}^2} \right) (-tr(U_0^\dagger U_5) (U_1 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 \cdot U_3 \\
& + 2(U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 - (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3)) \\
& + \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^4\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{35}^4}{\vec{r}_{03}^4\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{15}^2} \right) \left(tr(U_5^\dagger U_1) ((U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \cdot U_3 + (U_5 U_0^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_3) \right. \\
& + (U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (U_2 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 \left. \right) \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{16\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{15}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{03}^2}{8\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^4}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{35}^2} \right) \right) \\
& \times ((U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 + (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \\
& - (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 - (U_1 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_2) \cdot U_0 \\
& + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) + (0 \leftrightarrow 5) \left. \right\}. \tag{1.162}
\end{aligned}$$

В этом выражении у всех неконформных членов $SU(3)$ -коэффициенты не зависят от \vec{r}_5 или от \vec{r}_0 . В принципе, можно проинтегрировать их по \vec{r}_5 или \vec{r}_0 и добавить к (1.145). Однако легче преобразовать (1.145) с помощью интеграла (116) в [25] в симметричную форму:

$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \ln \frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} = 2\pi\zeta(3) (\delta(\vec{r}_{10}) + \delta(\vec{r}_{20})) \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2} \int \frac{d\vec{r}_5}{2\pi} \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} + \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{25}^2\vec{r}_{15}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \right). \tag{1.163}
\end{aligned}$$

Тогда мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}' &= \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{30}^2\vec{r}_{12}^2} - \frac{\vec{r}_{32}^2\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{30}^2\vec{r}_{12}^2} \right] \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2} \int \frac{d\vec{r}_5}{2\pi} \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} + \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{25}^2\vec{r}_{15}^2} \right) \\
& \times \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \right) (B_{100}B_{320} - B_{200}B_{310})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \int \frac{d\vec{r}_5}{2\pi} \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} + \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{15}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) \\
& \times \left(9B_{123} - \frac{1}{2} [2(B_{100}B_{320} + B_{200}B_{130}) - B_{300}B_{120}] \right) \\
& + \frac{11}{6} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \\
& \times \left(\frac{3}{2} (B_{100}B_{230} + B_{200}B_{130} - B_{300}B_{210}) - 9B_{123} \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3). \quad (1.164)
\end{aligned}$$

Затем мы симметризуем предыдущее выражение относительно обмена $0 \leftrightarrow 5$ и объединяем его с (1.138), (1.160) и (1.162) для получения ядра в СГП для составного оператора B_{123}^{conf}

$$\begin{aligned}
\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{conf} \rangle &= -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \mathbf{G}' - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \tilde{\mathbf{G}} \\
& - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ \tilde{L}_{12} (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \right. \\
& + L_{12} \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + tr (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \right] \right. \\
& \left. + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \Big). \quad (1.165)
\end{aligned}$$

Используя (А.9), чтобы избавиться от членов подобных

$$(U_0 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (U_2 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5, \quad (1.166)$$

ядро можно преобразовать в

$$\begin{aligned}
\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{conf} \rangle &= -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ \tilde{L}_{12}^C (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \right. \\
& + L_{12}^C \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + tr (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \right] \right. \\
& + M_{12}^C \left[(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \right] \\
& \left. + Z_{12} B_{003} B_{012} + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\frac{11}{6} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right. \\
& \times \left. \left(\frac{3}{2} (B_{100} B_{230} + B_{200} B_{130} - B_{300} B_{210}) - 9B_{123} \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right). \tag{1.167}
\end{aligned}$$

Здесь

$$L_{12}^C = L_{12} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right), \tag{1.168}$$

$$\tilde{L}_{12}^C = \tilde{L}_{12} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right), \tag{1.169}$$

$$\begin{aligned}
M_{12}^C &= \frac{\vec{r}_{12}^2}{16\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{35}^4}{\vec{r}_{03}^4 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{12}^2}{16\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{03}^4 \vec{r}_{05}^4 \vec{r}_{12}^4 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^6 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{35}^4} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{23}^2}{16\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^4 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^6 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^4 \vec{r}_{15}^4 \vec{r}_{23}^4} \right) + \frac{\vec{r}_{23}^2}{16\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{15}^4}{\vec{r}_{01}^4 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{13}^2}{16\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^4} \right) + \frac{\vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^4}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{35}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{13}^2}{16\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^4} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{23}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{35}^2} \right), \tag{1.170}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{12} &= \frac{\vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \left[\left(\frac{\vec{r}_{03}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} - \frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \right] - (1 \leftrightarrow 3), \tag{1.171}
\end{aligned}$$

а L_{12} и \tilde{L}_{12} – элементы неконформного ядра, определенные в (1.132) и (1.133). Просто проверить, что L_{12}^C , \tilde{L}_{12}^C , M_{12}^C и Z_{12} имеют интегрируемые сингулярности при $\vec{r}_5 = \vec{r}_0$, и что L_{12}^C , \tilde{L}_{12}^C и Z_{12} имеют интегрируемые сингулярности при $\vec{r}_5 = \vec{r}_{1,2,3}$. Чтобы доказать, что все члены с M^C не имеют особенностей при $\vec{r}_5 = \vec{r}_{1,2,3}$, нужно использовать $SU(3)$ -тождество (A.14).

Теперь можно видеть, что ядро в СГП уравнения эволюции для составного оператора B_{123}^{conf} (1.157) является квазиконформным, если выразить ядро в ГП через составной оператор (1.159).

Член с Z можно проинтегрировать по \vec{r}_5 . Интеграл

$$\int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} Z_{12} = \frac{\vec{r}_{32}^2}{8\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{32}^2\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{20}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{20}^2} \right). \quad (1.172)$$

был вычислен в приложении Г.

Наконец, ядро записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{conf} \rangle = & -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ \tilde{L}_{12}^C (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \right. \\ & + L_{12}^C \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + \text{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \right] \right. \\ & + M_{12}^C \left[(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \right] \\ & \left. + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \Big) \\ & - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\frac{11}{6} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{\mu}^2} \right) \right] \right. \\ & \left. \times \left(\frac{3}{2} (B_{100} B_{230} + B_{200} B_{130} - B_{300} B_{210}) - 9B_{123} \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right) \\ & - \frac{\alpha_s^2}{32\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(B_{003} B_{012} \left[\frac{\vec{r}_{32}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{32}^2 \vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) \right] \right. \\ & \left. + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right). \quad (1.173) \end{aligned}$$

В кварк-дикварковом пределе $\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_2$ оно совпадает с удвоенной глюонной частью ядра БК (см. (67) в [25]).

1.5.5 Линеаризация

В 3-глюонном приближении

$$B_{003} B_{012} \stackrel{3g}{=} 6B_{003} + 6B_{012} - 36. \quad (1.174)$$

Мы используем следующее тождество для линеаризации цветовых структур в (1.173)

$$\begin{aligned}
& (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5) \\
&= (U_0 U_5^\dagger - E)(U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0) U_0^\dagger U_5 \cdot U_3 \\
&+ U_5 U_0^\dagger (U_1 - U_0) \cdot (U_2 - U_5)(U_5^\dagger U_0 - E) \cdot U_3 \\
&+ U_0 \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 + (U_0 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \cdot U_3 \\
&+ (U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0)(U_0^\dagger U_5 - E) \cdot U_3 \\
&+ (U_5 U_0^\dagger - E)(U_1 - U_0) \cdot (U_2 - U_5) \cdot U_3 \\
&+ 2(U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0) \cdot U_3 - 2U_0 \cdot U_5 \cdot U_3.
\end{aligned} \tag{1.175}$$

Здесь E – единичная матрица. В 3-глюонном приближении предыдущее выражение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5) \\
&\stackrel{3g}{=} (U_0 - U_5)(U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0) \cdot E + (U_1 - U_0) \cdot (U_2 - U_5)(U_0 - U_5) \cdot E \\
&+ U_0 \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 + (U_0 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \cdot U_3 \\
&+ (U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0)(U_5 - U_0) \cdot E + (U_5 - U_0)(U_1 - U_0) \cdot (U_2 - U_5) \cdot E \\
&+ 2(U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0) \cdot U_3 - 2U_0 \cdot U_5 \cdot U_3.
\end{aligned} \tag{1.176}$$

Используя тождество (1.46), и то, что в 3-глюонном приближении

$$\begin{aligned}
& ((U_0 - U_5)(U_2 - U_5) + (U_2 - U_5)(U_0 - U_5)) \cdot (U_1 - U_0) \cdot E \\
&\stackrel{3g}{=} -(U_2 - U_5) \cdot (U_0 - U_5) \cdot (U_1 - U_0),
\end{aligned} \tag{1.177}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
& (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5) \stackrel{3g}{=} -B_{135} - B_{023} \\
&+ \frac{1}{2}(B_{100}B_{350} + B_{500}B_{130} - B_{300}B_{150}) - 2U_0 \cdot U_5 \cdot U_3 \\
&+ \frac{1}{2}(B_{055}B_{235} + B_{255}B_{035} - B_{355}B_{025}) + 2(U_2 - U_5) \cdot (U_1 - U_0) \cdot U_3 \\
&= B_{123} - 3B_{135} + \frac{1}{2}(B_{100}B_{350} + B_{500}B_{130} - B_{300}B_{150}) + (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{3g}{=} B_{123} + 3(B_{100} + B_{350} + B_{500} + B_{130} - B_{300} - B_{150} - B_{135} - 6) \\ &+ (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5). \end{aligned} \quad (1.178)$$

В результате мы имеем коэффициент при \tilde{L}_{12}^C в (1.173):

$$\begin{aligned} &((U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5)) - (0 \leftrightarrow 5) \\ &\stackrel{3g}{=} (3B_{001} + 6B_{130} - (1 \leftrightarrow 2)) - (0 \leftrightarrow 5). \end{aligned} \quad (1.179)$$

Используя интегралы (114) и (125) из [25]

$$\int d\vec{r}_5 \tilde{L}_{12} = \frac{\pi^2}{2} \zeta(3) (\delta(\vec{r}_{10}) - \delta(\vec{r}_{20})) \quad (1.180)$$

и

$$\begin{aligned} &\int d\vec{r}_5 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right] \\ &= \pi^2 \zeta(3) (\delta(\vec{r}_{10}) - \delta(\vec{r}_{20})), \end{aligned} \quad (1.181)$$

получаем

$$\int d\vec{r}_5 \tilde{L}_{12}^C = \frac{3}{2} \pi^2 \zeta(3) (\delta(\vec{r}_{10}) - \delta(\vec{r}_{20})) \quad (1.182)$$

и

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ \tilde{L}_{12}^C (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \right. \\ &+ \left. \left. (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \right) \\ &\stackrel{3g}{=} -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 (3B_{001} + 6B_{130} - (1 \leftrightarrow 2)) 3\pi^2 \zeta(3) (\delta(\vec{r}_{10}) - \delta(\vec{r}_{20})) \\ &+ (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \quad (1.183) \\ &= -\frac{9\alpha_s^2}{8\pi^2} \zeta(3) (36 + B_{131} + B_{133} + B_{121} + B_{212} + B_{232} + B_{233} - 12B_{231}). \end{aligned}$$

Вторая конструкция записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &(U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 = (U_1 - U_0) U_0^\dagger (U_2 - U_0) \cdot U_3 \cdot (U_5 - U_0) \\ &+ (U_2 - U_0) U_0^\dagger (U_1 - U_0) \cdot U_3 \cdot (U_5 - U_0) \\ &+ 2(U_2 + U_1 - U_0) \cdot U_3 \cdot (U_5 - U_0) + (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_0. \end{aligned} \quad (1.184)$$

И опять, применяя тождество (1.46) и равенство (1.177), получаем в 3-глюонном приближении

$$\begin{aligned}
& (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 \stackrel{3g}{=} -(U_1 - U_0) \cdot (U_2 - U_0) \cdot (U_5 - U_0) \\
& + 2(U_2 + U_1 - U_0) \cdot U_3 \cdot (U_5 - U_0) - B_{123} \\
& + \frac{1}{2} (B_{100} B_{230} + B_{200} B_{130} - B_{300} B_{120}). \tag{1.185}
\end{aligned}$$

Наконец, коэффициент при L_{12}^C в (1.173) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + \text{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \\
& \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} + (1 \leftrightarrow 2) \right] + (0 \leftrightarrow 5) \\
& \stackrel{3g}{=} 9(B_{055} + B_{005} - 12). \tag{1.186}
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ L_{12}^C \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \right] \right. \\
& \left. + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \Big) \\
& \stackrel{3g}{=} - \frac{9\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (L_{12}^C + L_{13}^C + L_{23}^C) (B_{055} + B_{005} - 12). \tag{1.187}
\end{aligned}$$

Третья конструкция записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 \cdot (U_0 U_5^\dagger U_3) + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \\
& = U_1 \cdot U_5 \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_3) + (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 \cdot U_0 \\
& + (U_2 - U_0) \cdot U_5 \cdot ((U_0 - U_5) U_5^\dagger (U_3 - U_5) + (U_3 - U_5) U_5^\dagger (U_0 - U_5)) \\
& + ((U_1 - U_0) U_0^\dagger (U_2 - U_0)) \cdot U_5 \cdot ((U_3 - U_5) U_5^\dagger U_0) \\
& + ((U_2 - U_0) U_0^\dagger (U_1 - U_0)) \cdot U_5 \cdot (U_0 U_5^\dagger (U_3 - U_5)) \\
& + 2(U_2 - U_0) \cdot U_5 \cdot (U_3 - U_5) - 2U_1 \cdot U_5 \cdot U_0. \tag{1.188}
\end{aligned}$$

Используя (1.46) и (1.177), получаем

$$\begin{aligned}
& (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 \cdot (U_0 U_5^\dagger U_3) + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \\
& \stackrel{3g}{=} -B_{013} + \frac{1}{2}(B_{355} B_{015} + B_{055} B_{135} - B_{155} B_{035}) - B_{125} \\
& - (U_2 - U_0) \cdot (U_1 - 3U_5) \cdot (U_3 - U_5) - 2U_1 \cdot U_5 \cdot U_0 \\
& + \frac{1}{2}(B_{100} B_{250} + B_{200} B_{150} - B_{005} B_{012}) \\
& \stackrel{3g}{=} 3(B_{010} - B_{551} + B_{020} - B_{552} - B_{050} + 2B_{550} - B_{120} + B_{150} \\
& + B_{351} + B_{250} - 2B_{350} + B_{352} + B_{553}) - B_{231} - 36. \tag{1.189}
\end{aligned}$$

В результате,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ M_{12}^C [(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 \right. \right. \\
& + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5] \\
& + \left. \left. (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \right) \\
& \stackrel{3g}{=} -\frac{3\alpha_s^2}{32\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\frac{3}{2} F_0 (B_{050} - B_{055}) + \left\{ \frac{3}{2} F_{150} B_{150} + F_{100} B_{100} + F_{230} B_{230} \right. \right. \\
& + \left. \left. (0 \leftrightarrow 5) \right\} + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right), \tag{1.190}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \left(\frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{35}^4}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{03}^4} \right) - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{15}^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{2\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right) - (0 \leftrightarrow 5). \tag{1.191}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{150} &= \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{35}^4}{\vec{r}_{03}^4 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^4} \right) \\
& - \frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) \\
& + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{35}^4}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{25}^2} \right). \tag{1.192}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{100} = & \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^8\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{23}^2\vec{r}_{25}^4\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{02}^6\vec{r}_{03}^4\vec{r}_{15}^8} \right) \\
& - \frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^4} \right) \\
& - \frac{\vec{r}_{35}^2\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^8\vec{r}_{02}^4\vec{r}_{25}^2\vec{r}_{35}^6}{\vec{r}_{03}^6\vec{r}_{05}^6\vec{r}_{12}^6\vec{r}_{15}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2} \right) \\
& + \frac{\vec{r}_{23}^2\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{25}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^4\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{35}^4}{\vec{r}_{03}^4\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{15}^2} \right) \\
& + \frac{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{15}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{25}^2\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{23}^2} \right).
\end{aligned} \tag{1.193}$$

$$\begin{aligned}
F_{230} = & \frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^4} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2} \right) \\
& + \frac{\vec{r}_{35}^2\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^4\vec{r}_{02}^8\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{35}^6}{\vec{r}_{03}^6\vec{r}_{05}^6\vec{r}_{12}^6\vec{r}_{25}^2} \right) \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^4\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{35}^8}{\vec{r}_{03}^8\vec{r}_{15}^4\vec{r}_{25}^6} \right) \\
& - \frac{\vec{r}_{23}^2\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{25}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^4\vec{r}_{05}^4\vec{r}_{23}^4\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^6\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^4\vec{r}_{35}^2} \right) \\
& - \frac{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{15}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{25}^2\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{05}^2\vec{r}_{15}^2\vec{r}_{23}^2} \right).
\end{aligned} \tag{1.194}$$

Можно проинтегрировать F_{100} и F_{230} по \vec{r}_5 . Эти интегралы приведены в приложении Г (Г.3) и (Г.6).

Цветовая структура в кварковой части ядра может быть линеаризована с использованием (1.185):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3}(U_1U_0^\dagger U_5 + U_5U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9}B_{123}tr(U_0^\dagger U_5) + (U_1U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6}B_{123} - \frac{1}{4}(B_{013}B_{002} + B_{001}B_{023} - B_{012}B_{003}) + (1 \leftrightarrow 2) \right) + (0 \leftrightarrow 5) \right\} \\
& \stackrel{3g}{=} \frac{1}{6} (12 - B_{005} - B_{055} + 2(2B_{015} - B_{001} - B_{155}) \\
& + 2(2B_{025} - B_{002} - B_{255}) - 4(2B_{035} - B_{355} - B_{003})).
\end{aligned} \tag{1.195}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \mathbf{G}^q \stackrel{3g}{=} - \frac{\alpha_s^2 n_f}{48\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (12 - B_{005} - B_{055}) (L_{12}^q + L_{13}^q + L_{23}^q) \\
& + 2(2B_{015} - B_{001} - B_{155}) (L_{12}^q + L_{13}^q - 2L_{32}^q) \\
& + 2(2B_{025} - B_{002} - B_{255}) (L_{12}^q + L_{23}^q - 2L_{31}^q) \\
& + 2(2B_{035} - B_{355} - B_{003}) (L_{32}^q + L_{13}^q - 2L_{12}^q) \}. \tag{1.196}
\end{aligned}$$

Наконец, мы получаем линеаризованное ядро в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{conf} \rangle \stackrel{3g}{=} \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2} \zeta(3) (3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21}) (B_{123} - 6) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(L_{12}^C + L_{13}^C + L_{23}^C - \frac{n_f}{54} (L_{12}^q + L_{13}^q + L_{23}^q) \right) (B_{055} + B_{005} - 12) \\
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{24\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (2B_{015} - B_{001} - B_{155}) (L_{12}^q + L_{13}^q - 2L_{32}^q) \\
& + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \} - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \\
& \times (F_0(B_{050} - B_{055}) + \{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} B_{150} + (\text{all 5 perm. } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3)) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\tilde{F}_{100} B_{100} + \tilde{F}_{230} B_{230} + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{16\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right. \\
& \left. \times (B_{100} + B_{230} + B_{200} + B_{130} - B_{300} - B_{210} - B_{123} - 6) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right). \tag{1.197}
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$, если $\vec{r}_i = \vec{r}_j$, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае. Определения $\tilde{\mu}^2$ и β даны в (1.153), определения F_0 and F_{150} даны в (1.191) и (1.192), определение L_{12}^q дано в (1.105), определение L_{12}^C дано в (1.168),

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{100} &= \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{2\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) + \tilde{S}_{123} I \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}, \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2}, \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) + (2 \leftrightarrow 3), \tag{1.198}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{230} &= \left(\frac{2\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) + \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) \\
&\times \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) - \tilde{S}_{123} I \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}, \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2}, \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) + (2 \leftrightarrow 3). \tag{1.199}
\end{aligned}$$

Функции \tilde{S}_{123} и I определены в приложении Г: (Г.5) и (Г.4).

Теперь, если мы рассмотрим дипольный предел $\vec{r}_3 = \vec{r}_2$ и учтем, что в этом пределе

$$\tilde{F}_{100}|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = \tilde{F}_{200}|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = \tilde{F}_{300}|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = 0, \quad (1.200)$$

$$\tilde{F}_{230}|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = \tilde{F}_{130}|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = \tilde{F}_{210}|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = 0 \quad (1.201)$$

$$(F_0 + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3))|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = -16\tilde{L}_{12}^C, \quad (1.202)$$

$$((F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)) + (2 \leftrightarrow 3))|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = 0, \quad (1.203)$$

$$((F_{350} + (0 \leftrightarrow 5)) + (2 \leftrightarrow 1))|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = 0, \quad (1.204)$$

$$((F_{250} + (0 \leftrightarrow 5)) + (1 \leftrightarrow 3))|_{\vec{r}_3=\vec{r}_2} = 0, \quad (1.205)$$

мы получим линейризованное ядро БК в 3-глюонном приближении, C -четная часть которого – это ядро БФКЛ [50]:

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes B_{122}^{conf} \rangle &\stackrel{3g}{=} -\frac{9\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(L_{12}^C - \frac{n_f}{54} L_{12}^q \right) (B_{055} + B_{005} - 12) \\ &- \frac{\alpha_s^2 n_f}{12\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (2B_{015} - B_{001} - B_{155}) - (2B_{025} - B_{002} - B_{255}) \} L_{12}^q \\ &+ \frac{27\alpha_s^2}{2\pi^2} \zeta(3) (B_{122} - 6) - \frac{9\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \tilde{L}_{12}^C (B_{055} - B_{050}) \\ &- \frac{9\alpha_s^2 \beta}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \\ &\times (B_{100} + B_{220} - B_{122} - 6). \end{aligned} \quad (1.206)$$

Сравним это ядро для $B_{122} = 2tr(U_1 U_2^\dagger)$ с линейризованным ядром БК в 2-глюонном приближении в [25]. Можно видеть, что их C -четные части совпадают, поскольку они фиксируются ядром БФКЛ [50]. Но 2-глюонного приближения недостаточно, чтобы вычислить правильную C -нечетную часть ядра. Только 3-глюонное приближение (1.206) позволяет записать его. Легко видеть, что даже для цветового диполя C -нечетную часть ядра в 3-глюонном приближении нельзя выразить только через диполи. Необходимо ввести барионные

операторы, как видно из второй строки этого выражения. Это можно проверить прямым вычислением используя (1.185). Действительно,

$$\begin{aligned}
& 12 \left\{ tr(U_2^\dagger t^a U_1 t^b) tr(U_5^\dagger t^a U_0 t^b) - (0 \rightarrow 5) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \\
&= \left\{ \frac{1}{3} tr(U_0 U_5^\dagger) tr(U_2^\dagger U_1) + 3 tr(U_5^\dagger U_1) tr(U_2^\dagger U_0) \right. \\
&\quad \left. - tr(U_0 U_5^\dagger U_1 U_2^\dagger) - tr(U_0 U_2^\dagger U_1 U_5^\dagger) - (0 \rightarrow 5) \right\} + (0 \leftrightarrow 5) \\
&= \left\{ \frac{1}{12} B_{055} B_{122} + \frac{3}{4} B_{155} B_{022} - \frac{1}{2} (U_1 U_2^\dagger U_0 + U_0 U_2^\dagger U_1) \cdot U_5 \cdot U_5 - (0 \rightarrow 5) \right\} \\
&\quad + (0 \leftrightarrow 5) \tag{1.207} \\
&\stackrel{3g}{=} \frac{1}{2} \{ 12 - B_{055} - B_{005} + 2(2B_{015} - B_{001} - B_{155}) - 2(2B_{025} - B_{002} - B_{255}) \}.
\end{aligned}$$

Для разделения C -четных и C -нечетных вкладов мы используем C -четные (померонные) и C -нечетные (оддеронные) функции Грина (1.49–1.50). Ядро в СГП для C -четной функции Грина в 3-глюонном приближении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{+conf} \rangle &\stackrel{3g}{=} \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2} \zeta(3) (3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21}) B_{123}^+ \\
&- \frac{9\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 B_{055}^+ (L_{12}^C + L_{13}^C + L_{23}^C - \frac{n_f}{54} (L_{12}^q + L_{13}^q + L_{23}^q)) \\
&- \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (\{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} B_{150}^+ + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3)) \\
&- \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3} \int d\vec{r}_0 (\tilde{F}_{100} B_{100}^+ + \tilde{F}_{230} B_{230}^+ + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2)) \\
&- \frac{9\alpha_s^2}{16\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \times (B_{100}^+ + B_{230}^+ + B_{200}^+ + B_{130}^+ - B_{300}^+ - B_{210}^+ - B_{123}^+) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right). \tag{1.208}
\end{aligned}$$

В 3-глюонном приближении можно использовать тождество (1.52):

$$B_{123}^+ \stackrel{3g}{=} \frac{1}{2} (B_{133}^+ + B_{211}^+ + B_{322}^+), \tag{1.209}$$

которое уничтожает все члены третьей строки в (1.197) в C -четном случае.

Легко видеть, что то же самое верно для B_{123}^{+conf} (1.156):

$$B_{123}^{+conf} \stackrel{3g}{=} \frac{1}{2} (B_{133}^{+conf} + B_{211}^{+conf} + B_{322}^{+conf}), \tag{1.210}$$

и мы получаем

$$\langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{+conf} \rangle \stackrel{3g}{=} \frac{1}{2} \langle K_{NLO} \otimes (B_{133}^{+conf} + B_{211}^{+conf} + B_{322}^{+conf}) \rangle. \quad (1.211)$$

Это равенство накладывает следующие ограничения:

$$0 = \{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3), \quad (1.212)$$

$$0 = \int d\vec{r}_0 \tilde{F}_{230}, \quad (1.213)$$

$$0 = \int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} (\{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} + (2 \leftrightarrow 3)) + \tilde{F}_{100} + \frac{1}{2} \tilde{F}_{230}|_{1 \leftrightarrow 3} + \frac{1}{2} \tilde{F}_{230}|_{1 \leftrightarrow 2}. \quad (1.214)$$

Ограничение (1.212) прямо следует из определения F_{150} (1.192), в то время как ограничение (1.213) выполняется благодаря конформной инвариантности

$$\int d\vec{r}_0 \tilde{F}_{230} = \int d\vec{r}_0 \tilde{F}_{230}|_{2=3} = 0. \quad (1.215)$$

Используя (1.198) и (1.199), можно переписать ограничение (1.214) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} (\{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} + (2 \leftrightarrow 3)) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \\ &+ \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.216)$$

Вычисление этого интеграла и доказательство этого тождества приведены в приложении Г.

Ядро в СГП для C -нечетной функции Грина в 3-глюонном приближении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle K_{NLO} \otimes B_{123}^{-conf} \rangle \stackrel{3g}{=} \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2} \zeta(3) (3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21}) B_{123}^- \\ & - \frac{\alpha_s^2 n_f}{24\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (2B_{015}^- - B_{001}^- - B_{155}^-) (L_{12}^q + L_{13}^q - 2L_{32}^q) \\ & + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \} - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (2F_0 B_{050}^- + \{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} B_{150}^-) \\ & + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\tilde{F}_{100} B_{100}^- + \tilde{F}_{230} B_{230}^- + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{16\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) \\
& \times \left(B_{100}^- + B_{230}^- + B_{200}^- + B_{130}^- - B_{300}^- - B_{210}^- - B_{123}^- \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \Big).
\end{aligned} \tag{1.217}$$

1.5.6 Результаты

В этом разделе перечислены основные результаты. Уравнение эволюции в СГП для барионной вильсоновской петли выглядит так

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{123}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s(\mu^2)}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[(B_{100} B_{320} + B_{200} B_{310} - B_{300} B_{210} - 6B_{123}) \right. \\
& \times \left\{ \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\alpha_s \beta}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{\alpha_s}{\pi} \ln \frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{21}^2} \ln \frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{21}^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{32}^2}{\vec{r}_{30}^2 \vec{r}_{20}^2} \right] (B_{100} B_{320} - B_{200} B_{310}) \right. \\
& \left. - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \left(9B_{123} - \frac{1}{2} [2(B_{100} B_{320} + B_{200} B_{130}) - B_{300} B_{120}] \right) \right\} \\
& + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \Big] \\
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{16\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left[\left\{ \left(\frac{1}{3} (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9} B_{123} \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \right. \right. \right. \\
& + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + \frac{1}{6} B_{123} - \frac{1}{4} (B_{013} B_{002} + B_{001} B_{023} - B_{012} B_{003}) \\
& \left. \left. \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right) + (0 \leftrightarrow 5) \right\} L_{12}^q + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right] \\
& - \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left[\{ \tilde{L}_{12} (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \\
& + L_{12} \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + \text{tr}(U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \right] + (M_{13} - M_{12} - M_{23} + M_2^{13}) \right. \\
& \times \left[(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \right] \cdot U_5 \\
& \left. + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right] + (0 \leftrightarrow 5) \Big].
\end{aligned} \tag{1.218}$$

Здесь функции L_{12} , \tilde{L}_{12} , M_{12} , M_2^{13} определены в (1.132-1.135), L_{12}^q определяется в (1.105), масштаб перенормировки в схеме \overline{MS} μ^2 связан с масштабом $\tilde{\mu}^2$ через (1.153),

$$\beta = \left(\frac{11}{3} - \frac{2n_f}{3} \right). \quad (1.219)$$

Как уже упоминалось выше, все выражения записаны в схеме перенормировки \overline{MS} .

Уравнение эволюции для составного оператора барионной вильсоновской петли B_{123}^{conf} (1.157)

$$B_{123}^{conf} = B_{123} + \frac{\alpha_s 3}{8\pi^2} \int d\vec{r}_5 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{51}^2 \vec{r}_{52}^2} \right) \right. \quad (1.220)$$

$$\left. \times \left(-B_{123} + \frac{1}{6} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215}) \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right]$$

следует из (1.173):

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{123}^{conf}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s (\mu^2)}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[\left((B_{100} B_{320} + B_{200} B_{310} - B_{300} B_{210}) - 6B_{123} \right)^{conf} \right. \\ &\times \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) \\ &\left. + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right] \\ &- \frac{\alpha_s^2}{32\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(B_{003} B_{012} \left[\frac{\vec{r}_{32}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{32}^2 \vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) \right] \right. \\ &\left. + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right) \\ &- \frac{\alpha_s^2 n_f}{16\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left[\left\{ \left(\frac{1}{3} (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 - \frac{1}{9} B_{123} \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + \frac{1}{6} B_{123} - \frac{1}{4} (B_{013} B_{002} + B_{001} B_{023} - B_{012} B_{003}) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right) + (0 \leftrightarrow 5) \right\} L_{12}^q + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right] \\ &- \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\left\{ \tilde{L}_{12}^C (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \right. \right. \\ &\left. \left. + L_{12}^C \left[(U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + \text{tr}(U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{3}{4} [B_{155} B_{235} + B_{255} B_{135} - B_{355} B_{125}] + \frac{1}{2} B_{123} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M_{12}^C [(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5] \\
& + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \} + (0 \leftrightarrow 5) \Big). \tag{1.221}
\end{aligned}$$

Здесь составной оператор $([B_{100}B_{320} + B_{200}B_{310} - B_{300}B_{210}] - 6B_{123})^{conf}$ определяется в (1.159) в соответствии с анзацем (1.156), а функции $L_{12}^C, \tilde{L}_{12}^C, M_{12}^C$ определяются в (1.168-1.170).

Уравнение для составного барионного оператора B_{123}^{conf} (1.157), линеаризованное в 3-глюонном приближении, является результатом (1.197) и (B.12),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial B_{123}^{conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s (\mu^2)}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \\
& \times \left[(B_{100}^{conf} + B_{320}^{conf} + B_{200}^{conf} + B_{310}^{conf} - B_{300}^{conf} - B_{210}^{conf} - B_{123}^{conf} - 6) \right. \\
& \times \left. \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) \right] \\
& + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \Big] \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\tilde{F}_{100} B_{100} + \tilde{F}_{230} B_{230} + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
& + \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2} \zeta(3) (3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21}) (B_{123} - 6) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(L_{12}^C + L_{13}^C + L_{23}^C - \frac{n_f}{54} (L_{12}^q + L_{13}^q + L_{23}^q) \right) (B_{055} + B_{005} - 12) \\
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{24\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (2B_{015} - B_{001} - B_{155}) (L_{12}^q + L_{13}^q - 2L_{32}^q) \\
& + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \} - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \\
& \times (\{ F_0 B_{050} + F_{150} B_{150} + (0 \leftrightarrow 5) \} + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \Big). \tag{1.222}
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$, если $\vec{r}_i = \vec{r}_j$, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае; функции F_0 и F_{150} определены в (1.191) и (1.192); \tilde{F}_{100} и \tilde{F}_{230} определены в (1.198–1.199).

Линеаризованное уравнение для C -четной функции Грина составного барионного оператора является следствием (1.208) и (B.12):

$$\frac{\partial B_{123}^{+conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s (\mu^2)}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[(B_{100}^{+conf} + B_{320}^{+conf} + B_{200}^{+conf} + B_{310}^{+conf}
\right.$$

$$\begin{aligned}
& - B_{300}^{+conf} - B_{210}^{+conf} - B_{123}^{+conf} \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right. \\
& - \left. \frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \Big] \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(L_{12}^C + L_{13}^C + L_{23}^C - \frac{n_f}{54} (L_{12}^q + L_{13}^q + L_{23}^q) \right) (B_{055} + B_{005} - 12) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\tilde{F}_{100} B_{100}^+ + \tilde{F}_{230} B_{230}^+ + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
& + \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2} \zeta(3) (3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21}) B_{123}^+ \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(\{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} B_{150}^+ + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right).
\end{aligned} \tag{1.223}$$

Линеаризованное уравнение для C -нечетной функции Грина составного оператора является следствием (1.217) и (B.12):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial B_{123}^{-conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s (\mu^2)}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[\left(B_{100}^{-conf} + B_{320}^{-conf} + B_{200}^{-conf} + B_{310}^{-conf} \right. \right. \\
& - \left. \left. B_{300}^{-conf} - B_{210}^{-conf} - B_{123}^{-conf} \right) \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(\frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right] \right. \\
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{24\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left\{ (2B_{015}^- - B_{001}^- - B_{155}^-) (L_{12}^q + L_{13}^q - 2L_{32}^q) \right. \\
& + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \Big\} \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^3} \int d\vec{r}_0 \left(\tilde{F}_{100} B_{100}^- + \tilde{F}_{230} B_{230}^- + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
& + \frac{27\alpha_s^2}{4\pi^2} \zeta(3) (3 - \delta_{23} - \delta_{13} - \delta_{21}) B_{123}^- - \frac{9\alpha_s^2}{64\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \\
& \times \left(2F_0 B_{050}^- + \{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} B_{150}^- + (\text{все 5 перестановок } 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3) \right).
\end{aligned} \tag{1.224}$$

Из этих выражений видно, что члены с L_{ij} , L_{ij}^C , которые содержат ядра БФКЛ, дают вклад только в эволюцию C -четной части функции Грина, а члены с F_0 , \tilde{L}_{ij} , \tilde{L}_{ij}^C дают вклад только в эволюцию C -нечетной части.

Уравнение БК для цветового диполя $B_{122} = 2tr(U_1 U_2^\dagger)$ в 3-глюонном при-

ближении записывается следующим образом (см. (1.206)):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial B_{122}^{conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s(\mu^2)}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 (B_{100}^{conf} + B_{220}^{conf} - B_{122}^{conf} - 6) \\
& \times \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) \\
& + \frac{27\alpha_s^2}{2\pi^2} \zeta(3) (B_{122} - 6) - \frac{9\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \tilde{L}_{12}^C (B_{055} - B_{050}) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(L_{12}^C - \frac{n_f}{54} L_{12}^q \right) (B_{055} + B_{005} - 12) \\
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{12\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (2B_{015} - B_{001} - B_{155}) - (2B_{025} - B_{002} - B_{255}) \} L_{12}^q. \quad (1.225)
\end{aligned}$$

Как видно из последней строки, эволюция цветового диполя в 3-глюонном приближении зависит от барионных операторов с недипольной структурой. Уравнение БК для C -четной части оператора цветового диполя $B_{122}^+ = 2tr(U_1 U_2^\dagger) + 2tr(U_1^\dagger U_2) - 6$ в 3-глюонном приближении такое же, как и в 2-глюонном (БФКЛ),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial B_{122}^{+conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s(\mu^2)}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 (B_{100}^{+conf} + B_{220}^{+conf} - B_{122}^{+conf}) \\
& \times \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{2\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \left(L_{12}^C - \frac{n_f}{54} L_{12}^q \right) B_{055} + \frac{27\alpha_s^2}{2\pi^2} \zeta(3) B_{122}^+. \quad (1.226)
\end{aligned}$$

В то же время, уравнение БК для C -нечетной части оператора цветового диполя $B_{122}^- = 2tr(U_1 U_2^\dagger) - 2tr(U_1^\dagger U_2)$ в 3-глюонном приближении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial B_{122}^{-conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s(\mu^2)}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 (B_{100}^{-conf} + B_{220}^{-conf} - B_{122}^{-conf}) \\
& \times \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\alpha_s}{4\pi} \beta \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) \\
& - \frac{9\alpha_s^2}{2\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \tilde{L}_{12}^C B_{055}^- + \frac{27\alpha_s^2}{2\pi^2} \zeta(3) B_{122}^- \\
& - \frac{\alpha_s^2 n_f}{12\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ (2B_{015}^- - B_{001}^- - B_{155}^-) - (2B_{025}^- - B_{002}^- - B_{255}^-) \} L_{12}^q. \quad (1.227)
\end{aligned}$$

Кварковая часть этого уравнения содержит недипольные барионные операторы.

Вопрос о том, как выбрать операторный базис уравнения эволюции, нетривиален. Мы попытались найти базис с минимальным числом операторов. Часть ядра с одним интегрированием не представляет проблемы, так как все операторы в ней можно свести к произведениям B . Далее, вклад кварков в часть ядра с 2 интегрированиями можно свести к одному оператору с точностью до трех перестановок (1.218), (1.221). Очевидно, что это минимальный выбор. Соответствующий глюонный вклад зависит от трех операторов с точностью до перестановок (1.218), (1.221): $((U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 + \text{tr}(U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 + (1 \leftrightarrow 2)) - (0 \rightarrow 5) + (0 \leftrightarrow 5)$, $((U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 - (1 \leftrightarrow 2)) - (0 \leftrightarrow 5)$ и $[(U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) + (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0)] \cdot U_5$. Существуют 3 оператора первого типа, 3 оператора второго типа и 12 операторов третьего типа.

Операторы первого и второго типов независимы из-за разной симметрии относительно перестановок $(0 \leftrightarrow 5)$ и $(i \leftrightarrow j)$, где $i, j = 1, 2, 3$. В дипольном пределе часть ядра, содержащая операторы третьего типа, сводится к конструкции антисимметричной относительно структуры $(0 \leftrightarrow 5)$. Если эту часть ядра можно было бы выразить через операторы первых двух типов, она сводилась бы к тому же оператору в дипольном пределе, что и часть ядра, содержащая операторы второго типа. Однако они зависят от разных операторов, которые не могут быть выражены через друг друга. Остается вопрос, сколько из 12 операторов третьего типа являются независимыми. На самом деле они не все независимы. Они подчиняются тождеству (A.14), которое обеспечивает УФ-конечность уравнения эволюции (1.173). Следовательно, мы могли бы переписать эволюционное уравнение, используя только 11 из 12 операторов третьего типа. Но такое изменение делает уравнение намного более громоздким и скрывает его симметрию относительно перестановок. Поэтому мы оставили все 12 операторов в конечных формулах. Используя тождества из приложения A, мы не смогли выразить 11 операторов третьего типа друг через друга.

Уменьшение числа операторов, используемых в эволюционном уравнении, упрощает это уравнение и помогает его решить. Лучшим примером яв-

ляется барионное уравнение в ГП (1.47), которое сильно упростилось после применения тождества (1.46), зависит только от произведений B и имеет замкнутую форму. В СГП сокращение цветовых структур помогло найти квазиконформную форму и упростило уравнение, что поможет определить численное решение.

Стоит отметить, что наши результаты имеют правильный дипольный предел в случае, когда координаты двух линий совпадают.

Оператор барионной вильсоновской петли может иметь много феноменологических приложений. Во-первых, это естественная $SU(3)$ -модель для барионной функции Грина в реджевском пределе. Кроме того, это неприводимый оператор, описывающий C -нечетный (оддеронный) обмен. Более сложные C -нечетные операторы в линейном пределе разлагаются по барионным операторам, также как C -четные операторы разлагаются по дипольным операторам. Например, как показано в [36] оддеронная часть квадрупольного оператора $tr(U_1 U_2^\dagger U_3 U_4^\dagger)$ в 3-глюонном приближении в $SU(3)$ может быть разложена в сумму

$$2tr(U_1 U_2^\dagger U_3 U_4^\dagger) - 2tr(U_4 U_3^\dagger U_2 U_1^\dagger) \\ \stackrel{3g}{=} B_{144}^- + B_{322}^- - B_{433}^- - B_{211}^- + B_{124}^- + B_{234}^- - B_{123}^- - B_{134}^-. \quad (1.228)$$

Кроме того, даже уравнение эволюции в СГП для C -нечетной дипольной функции Грина в 3-глюонном приближении (1.227) нельзя записать в КХД без участия барионного оператора.

Уравнение эволюции для C -нечетной части барионного оператора представляет собой обобщение уравнения БКП для оддеронного обмена до режима с насыщением.

Результат для эволюции барионного оператора был также представлен в работе [37]. Оба ядра воспроизводят уравнение БК в СГП в дипольном пределе и выдерживают другие проверки. Тем не менее, результат [37] в написанной там форме отличается от нашего ядра, поскольку операторный базис в

уравнении эволюции значительно больше, потому что не все $SU(3)$ -связи были учтены. Например, в правой части уравнения (4.25) в [37] помимо нашего базиса есть операторы $tr(U_1 U_5^\dagger) tr(U_5 U_0^\dagger) U_2 \cdot U_3 \cdot U_0$, $tr(U_1 U_0^\dagger) (U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5$ и $U_0 \cdot U_3 \cdot (U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5)$, которые можно убрать, используя наши соотношения (A.6) - (A.13).

1.6 Уравнения эволюции для 4-точечных операторов

1.6.1 Исходные выражения

Для краткости в этом разделе используется следующее обозначение следов

$$tr(U_i U_j^\dagger \dots U_k U_l^\dagger) \equiv \mathbf{U}_{ij^\dagger \dots kl^\dagger}. \quad (1.229)$$

Координаты $\vec{r}_{1,2,3,4}$ принадлежат кваркам, \vec{r}_0, \vec{r}_5 — глюонам. Также в промежуточных вычислениях появляются $\vec{r}_{6,7}$. В этих обозначениях уравнение БК имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger}}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} (\mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 1}). \quad (1.230)$$

Уравнение эволюции для квадрупольного оператора в ГП, полученное в [38], выглядит так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger}}{\partial \eta} = & \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left\{ \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{12^\dagger 30^\dagger} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 4)) \right. \\ & + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{10^\dagger 34^\dagger} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 2)) \\ & - \frac{\vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{30^\dagger} \mathbf{U}_{04^\dagger 12^\dagger} - (0 \rightarrow 4 \equiv 0 \rightarrow 2)) \\ & - \frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} (\mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{12^\dagger 30^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{34^\dagger 10^\dagger} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 3)) \\ & \left. + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4) \right\}. \quad (1.231) \end{aligned}$$

Здесь $(0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 4)$ обозначает замену $U_0 \rightarrow U_1$ или $U_0 \rightarrow U_4$, что дает такой же результат. Далее $(1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4)$ обозначает замену $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_3, \vec{r}_2 \leftrightarrow \vec{r}_4$ и $U_1 \leftrightarrow U_3, U_2 \leftrightarrow U_4$. Также нам будут необходимы уравнения эволюции для двойного диполя, секступоля и произведения диполя и квадруполя. Эти уравнения непосредственно получаются из иерархии Балицкого в ГП [12].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger} \mathbf{U}_{34^\dagger}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} \right) \\ &\quad \times (\mathbf{U}_{2^\dagger 14^\dagger 3} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 10^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 30^\dagger 1}) \\ &\quad + \mathbf{U}_{4^\dagger 3} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger}}{\partial \eta} + \mathbf{U}_{2^\dagger 1} \frac{\partial \mathbf{U}_{4^\dagger 3}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.232)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger} \mathbf{U}_{76^\dagger}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \{ (\mathbf{U}_{0^\dagger 76^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 1} + \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 34^\dagger 06^\dagger 7} - (0 \rightarrow 7 \equiv 0 \rightarrow 6)) \\ &\quad \times \left(\frac{\vec{r}_{16}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{06}^2} - \frac{\vec{r}_{17}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{07}^2} \right) + \left(\frac{\vec{r}_{27}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{07}^2} - \frac{\vec{r}_{26}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{06}^2} \right) \\ &\quad \times (\mathbf{U}_{0^\dagger 76^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 1} + \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 12^\dagger 06^\dagger 7} - (0 \rightarrow 7 \equiv 0 \rightarrow 6)) \\ &\quad + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4) \} + \mathbf{U}_{76^\dagger} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger}}{\partial \eta} + \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger} \frac{\partial \mathbf{U}_{76^\dagger}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.233)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger 56^\dagger}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \\ &\quad \times \left\{ \frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 06^\dagger 1} + \mathbf{U}_{0^\dagger 56^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - (0 \rightarrow 5 \equiv 0 \rightarrow 2)) \right. \\ &\quad - \frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 56^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} + \mathbf{U}_{6^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 34^\dagger 5} - (0 \rightarrow 5 \equiv 0 \rightarrow 1)) \\ &\quad - \frac{\vec{r}_{26}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{06}^2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 06^\dagger 1} + \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 56^\dagger 0} - (0 \rightarrow 2 \equiv 0 \rightarrow 6)) \\ &\quad \left. + \frac{\vec{r}_{16}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{06}^2} (\mathbf{U}_{6^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 34^\dagger 5} + \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 56^\dagger 0} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 6)) \right. \\ &\quad + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} (\mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 56^\dagger 1} + \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 56^\dagger 0} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 2)) \\ &\quad + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2) \\ &\quad \left. + (1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2) \right\}. \end{aligned} \quad (1.234)$$

Здесь $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ обозначает перестановку, т. е. необходимо заменить $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_3$, $\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_5$, $\vec{r}_5 \rightarrow \vec{r}_1$ и $U_1 \rightarrow U_3$, $U_3 \rightarrow U_5$, $U_5 \rightarrow U_1$.

Для вычисления поправок, как и в случае барионного оператора, можно использовать выражения для эволюции 1, 2 и 3 вильсоновских линий с точностью СГП, приведенные в предыдущем разделе. Общая логика построения ядра такая же как и для оператора барионной вильсоновской петли. Нам будут необходимы следующие функции: $\tilde{L}_{ij} \equiv \tilde{L}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$, определенная в (1.133), $M_{ij} \equiv M(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$, определенная в (1.134) и $M_i^{jk} \equiv M(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)$, введенная в (1.135). Она обладает таким свойством

$$M_k^{ij}|_{5 \leftrightarrow 0} = -M_k^{ji}. \quad (1.235)$$

Функция \tilde{L}_{ij} конформно инвариантна и антисимметрична относительно замен $5 \leftrightarrow 0$ и $i \leftrightarrow j$, тогда как M_{ij} антисимметрична только относительно замены $5 \leftrightarrow 0$. Члены $\sim \beta$ комбинируются в $M_{ij}^\beta \equiv M^\beta(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$

$$M_{12}^\beta = \frac{N_c \beta}{2} \left\{ \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{12}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right) \right\}. \quad (1.236)$$

Ядро БК в СГП в обозначениях этого раздела имеет вид

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{12^\dagger} \rangle &= \frac{\alpha_s^2}{4\pi^3} \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \left\{ M_{12}^\beta - N_c \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{20}^2} \right) \right\} \\ &\times (\mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 1}) + \frac{\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ \tilde{L}_{12}(\mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} - (0 \leftrightarrow 5)) \\ &+ L_{12}((\mathbf{U}_{0^\dagger 5 2^\dagger 0 5^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 0} - (0 \rightarrow 5)) + (0 \leftrightarrow 5)) \\ &- 2n_f L_{12}^q(\text{tr}(t^a U_1 t^b U_2^\dagger) \text{tr}(t^a U_5 t^b (U_0^\dagger - U_5^\dagger)) + (5 \leftrightarrow 0)) \}. \end{aligned} \quad (1.237)$$

Полное ядро в СГП для квадрупольного оператора выглядит так

$$\langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger} \rangle = \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (\mathbf{G}_s + \mathbf{G}_a) + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 (\mathbf{G}_\beta + \mathbf{G}), \quad (1.238)$$

Здесь \mathbf{G}_s – это произведение симметричных цветовых и координатных структур, а \mathbf{G}_a – произведение антисимметричных структур относительно перестановки $0 \leftrightarrow 5$, т.е. $\vec{r}_0 \leftrightarrow \vec{r}_5$ и $U_0 \leftrightarrow U_5$. После цветовой свертки и интегрирования

по \vec{r}_0 или \vec{r}_5 вкладов, не зависящих от одной из переменных получается одно-глюонная часть. Она состоит из членов $\sim \beta$ -функции \mathbf{G}_β ($\beta = \frac{11}{3} - \frac{2n_f}{3N_c}$) и всех остальных членов, обозначенных \mathbf{G} .

Для оператора двойного диполя $tr(U_1U_2^\dagger)tr(U_3U_4^\dagger) \equiv \mathbf{U}_{12^\dagger}\mathbf{U}_{34^\dagger}$ полное ядро в СГП имеет вид

$$\begin{aligned} \langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{12^\dagger}\mathbf{U}_{34^\dagger} \rangle &= \mathbf{U}_{12^\dagger}\langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{34^\dagger} \rangle + \mathbf{U}_{34^\dagger}\langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{12^\dagger} \rangle \\ &+ \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (\tilde{\mathbf{G}}_s + \tilde{\mathbf{G}}_a) + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 (\tilde{\mathbf{G}}_\beta + \tilde{\mathbf{G}}). \end{aligned} \quad (1.239)$$

Здесь ядро БК в СГП в текущих обозначениях приведено в (1.237), $\tilde{\mathbf{G}}_s(\tilde{\mathbf{G}}_a)$ – произведения симметричных (антисимметричных) относительно замены $0 \leftrightarrow 5$ структур, $\tilde{\mathbf{G}}_\beta$ пропорциональна β -функции и $\tilde{\mathbf{G}}$ – это оставшаяся часть ядра, описывающая эволюцию с одним глюоном пересекающим ударную волну.

1.6.2 Ядро для квадрупольного оператора в СГП

Начнем с симметричных структур

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{G}_{s1} + n_f \mathbf{G}_q + \mathbf{G}_{s2}. \quad (1.240)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{s1} &= (\{\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 5} - \mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} - (5 \rightarrow 0)\} + (5 \leftrightarrow 0)) \\ &\times (L_{12} + L_{32} - L_{13}) \\ &+ (\{\mathbf{U}_{0^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 5} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - (5 \rightarrow 0)\} + (5 \leftrightarrow 0)) \\ &\times (L_{12} + L_{14} - L_{42}) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \end{aligned} \quad (1.241)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_q &= (\{\frac{\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 12^\dagger 5} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 0}}{N_c} - \frac{\mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1}}{N_c^2} - \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} - (5 \rightarrow 0)\} \\ &+ (5 \leftrightarrow 0)) \frac{1}{2} (L_{12}^q + L_{32}^q - L_{13}^q) + \frac{1}{2} (L_{12}^q + L_{14}^q - L_{42}^q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{\mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 34^\dagger 5} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 0}}{N_c} - \frac{\mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1}}{N_c^2} - \mathbf{U}_{5^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - (5 \rightarrow 0) \right\} \\
& + (5 \leftrightarrow 0) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \tag{1.242}
\end{aligned}$$

где L и L^q определены в (1.132) и (1.105). Это конформно инвариантные вклады.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{s2} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 52^\dagger 05^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 05^\dagger 3} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (M_1^{34} - M_1^{24} + M_2^{43} - M_2^{13} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 02^\dagger 54^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 15^\dagger 0} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (M_3^{14} - M_3^{24} + M_2^{41} - M_2^{31} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 5} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} + (5 \leftrightarrow 0)) (M_2^{14} + M_4^{12} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 5} - \mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} + (5 \leftrightarrow 0)) (M_1^{23} + M_3^{21} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \tag{1.243}
\end{aligned}$$

где M_i^{jk} определено в (1.135). Используя (1.235), можно показать, что \mathbf{G}_{s2} исчезает без ударной волны, т. е. когда все $U \rightarrow 1$. Произведения антисимметричных относительно замены $5 \leftrightarrow 0$ вкладов имеет вид

$$\mathbf{G}_a = \mathbf{G}_{a1} + \mathbf{G}_{a2} + \mathbf{G}_{a3}. \tag{1.244}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{a1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 05^\dagger 3} + \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 52^\dagger 05^\dagger 1} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (M_2^{31} - M_2^{34} - M_1^{42} + M_1^{43} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 15^\dagger 0} + \mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 02^\dagger 54^\dagger 1} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (M_2^{13} - M_2^{14} - M_3^{42} + M_3^{41} - (5 \leftrightarrow 0)) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \tag{1.245}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{a2} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 5} - (5 \leftrightarrow 0)) (\tilde{L}_{13} + 2M_{21} - 2M_{23} - M_1^{23} + M_3^{21} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 5} - (5 \leftrightarrow 0)) (\tilde{L}_{42} - 2M_{12} + 2M_{14} + M_2^{14} - M_4^{12} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \tag{1.246}
\end{aligned}$$

Функции \tilde{L} и M_{ij} определены в (1.133) и (1.134).

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{a3} = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (\tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{14} - 2M_{24} + M_2^{14} + M_4^{12} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (\tilde{L}_{21} + \tilde{L}_{23} - 2M_{13} + M_1^{23} + M_3^{21} - (5 \leftrightarrow 0)) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \quad (1.247)
\end{aligned}$$

Из определений (1.133) и (1.134) видно, что \mathbf{G}_a можно выразить полностью через M_i^{jk} (1.135).

Вклад $\sim \beta$ функции \mathbf{G}_β (1.238) имеет структуру борновского ядра (1.231)

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_\beta = & \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} M_{14}^\beta (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{12^\dagger 30^\dagger} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 4)) \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} M_{12}^\beta (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{10^\dagger 34^\dagger} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 2)) \\
& - \frac{\vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} M_{24}^\beta (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{30^\dagger} \mathbf{U}_{04^\dagger 12^\dagger} - (0 \rightarrow 4 \equiv 0 \rightarrow 2)) \\
& - \frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} M_{13}^\beta (\mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{12^\dagger 30^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{34^\dagger 10^\dagger} - (0 \rightarrow 1 \equiv 0 \rightarrow 3)) \\
& + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \quad (1.248)
\end{aligned}$$

Здесь M^β определено в (1.236). Одноглюонный вклад, не содержащий β -функцию,

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_0. \quad (1.249)$$

В \mathbf{G} можно выделить цветовые структуры без \vec{r}_0 и проинтегрировать коэффициент при них, если этот интеграл сходится. Этот вклад \mathbf{G}_0 . В принципе, выбор \mathbf{G}_0 неоднозначен. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_0 = & \frac{N_c}{4} (\mathbf{U}_{4^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 3} - \mathbf{U}_{4^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 1}) \left\{ \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} \right) \right. \\
& \times \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) + \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} - \frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{30}^2 \vec{r}_{40}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{10}^2} \right) \\
& \times \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) + \left(\ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) + \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2} \right) \right) \\
& \left. \times \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} \right) \right\} + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \quad (1.250)
\end{aligned}$$

Этот вклад исчезает в дипольном пределе.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} = & \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \left\{ \frac{N_c}{2} (2N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{4^\dagger 10^\dagger 3}) \right. \\
& + (\mathbf{U}_{2^\dagger 10^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{4^\dagger 3} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - (0 \rightarrow 1)) \left. \right\} \\
& + \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \left\{ \frac{N_c}{2} (2N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 30^\dagger 1}) \right. \\
& + (\mathbf{U}_{2^\dagger 30^\dagger 14^\dagger 0} - \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 3} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - (0 \rightarrow 1)) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) \right) \\
& \times \{ (\mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 1} + \mathbf{U}_{4^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 0}) \mathbf{U}_{0^\dagger 3} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 10^\dagger 3} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 30^\dagger 1} - (0 \rightarrow 3) \} \\
& + \{ \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{4^\dagger 1} \mathbf{U}_{0^\dagger 3} - \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{34^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 10^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{0^\dagger 32^\dagger 04^\dagger 1} \} \\
& \times \frac{1}{2\vec{r}_{20}^2} \left(\frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2} \right) \\
& + \frac{1}{2\vec{r}_{10}^2} \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{40}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{20}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) \\
& \times \{ \mathbf{U}_{2^\dagger 3} \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{34^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 10^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{0^\dagger 14^\dagger 02^\dagger 3} \} \\
& + \{ \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 1} \mathbf{U}_{0^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{4^\dagger 10^\dagger 3} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 30^\dagger 1} \} \\
& \times \frac{1}{2\vec{r}_{30}^2} \left(\frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \\
& + \frac{1}{2\vec{r}_{40}^2} \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{20}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \\
& \times \{ \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 1} \mathbf{U}_{0^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 30^\dagger 1} \} \\
& + \{ \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{4^\dagger 1} \mathbf{U}_{0^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{12^\dagger 30^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 10^\dagger 3} \} \\
& \times \frac{1}{2\vec{r}_{30}^2} \left(\frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{40}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \\
& + \frac{1}{2\vec{r}_{20}^2} \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{40}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{40}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) \\
& \times \{ \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{4^\dagger 1} \mathbf{U}_{0^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 10^\dagger 3} \} + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4).
\end{aligned} \tag{1.251}$$

Все интегралы с функциями \mathbf{G}_s , \mathbf{G}_a , \mathbf{G}_β и \mathbf{G} сходятся. Это очевидно из явных выражений для \mathbf{G}_β и \mathbf{G} . Для \mathbf{G}_s и \mathbf{G}_a необходимо учесть, что $L_{ij}^{(q)}$ имеет неинтегрируемые расходимости при $\vec{r}_0 = \vec{r}_5$, а M_k^{ij} при $\vec{r}_0 = \vec{r}_5 = \vec{r}_k$. Во всех

выражениях этой части эти расходимости сокращаются.

1.6.3 Ядро для дважды дипольного оператора в СГП

Симметричная часть имеет вид

$$\tilde{\mathbf{G}}_s = \tilde{\mathbf{G}}_{s1} + n_f \tilde{\mathbf{G}}_q + \tilde{\mathbf{G}}_{s2}, \quad (1.252)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{s1} = & (\{\mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 35^\dagger 0} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 34^\dagger 0} - (5 \rightarrow 0)\} + (5 \leftrightarrow 0)) \\ & \times (L_{14} - L_{13} + L_{23} - L_{24}) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \end{aligned} \quad (1.253)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_q = & \frac{1}{2} (\{\frac{\mathbf{U}_{4^\dagger 3}}{N_c} (\mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 5} + \mathbf{U}_{0^\dagger 52^\dagger 1} - \frac{\mathbf{U}_{2^\dagger 1} \mathbf{U}_{0^\dagger 5}}{N_c}) - \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 54^\dagger 3} - (5 \rightarrow 0)\} \\ & + (5 \leftrightarrow 0)) (L_{14}^q - L_{13}^q + L_{23}^q - L_{24}^q) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \end{aligned} \quad (1.254)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{s2} = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 54^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 05^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 34^\dagger 0} + (5 \leftrightarrow 0)) \\ & \times (M_4^{12} + M_3^{21} - M_1^{34} - M_2^{43} + (5 \leftrightarrow 0)) \end{aligned} \quad (1.255)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 12^\dagger 5} + \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 52^\dagger 15^\dagger 3} - \mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 04^\dagger 5} - \mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 54^\dagger 05^\dagger 1} \\ & + (5 \leftrightarrow 0)) (M_4^{13} + M_3^{14} - M_4^{23} - M_3^{24} + (5 \leftrightarrow 0)) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned}$$

Здесь L , L^q , и M_i^{jk} определены в (1.132), (1.105), и (1.135). Антисимметричные вклады таковы

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_a = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 54^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 05^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 52^\dagger 1} \mathbf{U}_{4^\dagger 05^\dagger 3} + \mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 54^\dagger 3} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 34^\dagger 0} \\ & - (5 \leftrightarrow 0)) (M_4^{11} - M_3^{11} + M_3^{12} - M_4^{12} + M_3^{21} - M_4^{21} - M_3^{22} + M_4^{22}) \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{5^\dagger 3} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 04^\dagger 5} + \mathbf{U}_{5^\dagger 3} \mathbf{U}_{0^\dagger 54^\dagger 02^\dagger 1} - \mathbf{U}_{4^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 05^\dagger 3} - \mathbf{U}_{4^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 02^\dagger 1} \\ & - (5 \leftrightarrow 0)) (M_4^{23} + M_3^{24} - M_4^{13} - M_3^{14} - M_4^{31} + M_4^{32} - M_3^{41} + M_3^{42}) \\ & + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.256)$$

Вклад β функции выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_\beta = & \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} M_{13}^\beta - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{30}^2} M_{23}^\beta - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} M_{14}^\beta + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} M_{24}^\beta \right) \\ & \times (\mathbf{U}_{2^\dagger 14^\dagger 3} + \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{2^\dagger 10^\dagger 34^\dagger 0} - \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 30^\dagger 1}), \end{aligned} \quad (1.257)$$

где M^β определено в (1.236). Оставшийся вклад

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}_1 + \tilde{\mathbf{G}}_0. \quad (1.258)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_0 = & \frac{1}{4} (2\mathbf{U}_{2^\dagger 1} \mathbf{U}_{4^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 14^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 1}) \left[\left(\frac{2\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \right. \\ & \times \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2} \right) \\ & + \left(\frac{2\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2} \right) \\ & + \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{4\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} + \frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2} \right) \\ & + \left. \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \right] \\ & + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.259)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_1 = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 14^\dagger 3} + \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 04^\dagger 3} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0}) \\ & \times \left[\ln \left(\frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2} \right) \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \right. \\ & + \left(\frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2} \right) \\ & + \ln \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2} \right) \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \\ & + \left. \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} (2\mathbf{U}_{2^\dagger 1} \mathbf{U}_{4^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 04^\dagger 3} - N_c \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 02^\dagger 1}) \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \\ & \times \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.260)$$

Как и для квадрупольной явной проверки можно убедиться, что функции $\tilde{\mathbf{G}}_s$, $\tilde{\mathbf{G}}_a$, $\tilde{\mathbf{G}}_\beta$, $\tilde{\mathbf{G}}$ не имеют неинтегрируемых расходимостей.

1.6.4 Составные операторы

Для построения составных операторов, подчиняющихся квазиконформным уравнениям, используется анзац [25]

$$O^{conf} = O + \frac{1}{2} \frac{\partial O}{\partial \eta} \left| \frac{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \rightarrow \frac{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \right) \right., \quad (1.261)$$

где a произвольная константа. Составной дипольный оператор имеет вид [25]

$$\mathbf{U}_{12^\dagger}^{conf} = \mathbf{U}_{2^\dagger 1} + \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) (\mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 1}). \quad (1.262)$$

Он подчиняется квазиконформному уравнению [25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_{12^\dagger}^{conf}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} M_{12}^\beta \right) (\mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{2^\dagger 1})^{conf} \\ &+ \frac{\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 \{ L_{12}^C ((\mathbf{U}_{0^\dagger 5 2^\dagger 0 5^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 0} - (0 \rightarrow 5)) + (0 \leftrightarrow 5)) \\ &+ \tilde{L}_{12}^C (\mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} - (0 \leftrightarrow 5)) \\ &- 2n_f L_{12}^q (tr(t^a U_1 t^b U_2^\dagger) tr(t^a U_5 t^b (U_0^\dagger - U_5^\dagger)) + (5 \leftrightarrow 0)) \}, \end{aligned} \quad (1.263)$$

где M_{12}^β определено в (1.236); $L_{ij}^C \equiv L^C(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ и $\tilde{L}_{ij}^C \equiv \tilde{L}^C(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ — в (1.168–1.169).

Составной квадрупольный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger}^{conf} &= \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger} + \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \\ &\times \left\{ \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} \right) (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{12^\dagger 30^\dagger} - (0 \rightarrow 1)) \right. \\ &+ \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{2^\dagger 0} \mathbf{U}_{10^\dagger 34^\dagger} - (0 \rightarrow 1)) \\ &\left. - \frac{\vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} \right) (\mathbf{U}_{10^\dagger} \mathbf{U}_{02^\dagger 34^\dagger} + \mathbf{U}_{30^\dagger} \mathbf{U}_{04^\dagger 12^\dagger} - (0 \rightarrow 4)) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{30}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{30}^2} \right) (\mathbf{U}_{4\uparrow 0} \mathbf{U}_{12\uparrow 30\uparrow} + \mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{34\uparrow 10\uparrow} - (0 \rightarrow 1)) \\
& + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4) \}. \tag{1.264}
\end{aligned}$$

Составной дважды дипольный оператор имеет вид

$$\begin{aligned}
(\mathbf{U}_{12\uparrow} \mathbf{U}_{34\uparrow})^{conf} &= \mathbf{U}_{12\uparrow} \mathbf{U}_{34\uparrow} \\
& + \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 (\mathbf{U}_{2\uparrow 14\uparrow 3} + \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 1} - \mathbf{U}_{2\uparrow 10\uparrow 34\uparrow 0} - \mathbf{U}_{2\uparrow 04\uparrow 30\uparrow 1}) \\
& \times \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{30}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{30}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{30}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{30}^2} \right) \right. \\
& - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{40}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{40}^2} \right) + \left. \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{40}^2} \ln \left(\frac{a\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{40}^2} \right) \right) \\
& + \mathbf{U}_{4\uparrow 3} (\mathbf{U}_{2\uparrow 1}^{conf} - \mathbf{U}_{2\uparrow 1}) + \mathbf{U}_{2\uparrow 1} (\mathbf{U}_{4\uparrow 3}^{conf} - \mathbf{U}_{4\uparrow 3}). \tag{1.265}
\end{aligned}$$

Уравнения эволюции для этих операторов в базисе составных операторов имеют следующую форму

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{U}_{12\uparrow 34\uparrow}^{conf}}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left\{ \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{40}^2} (\mathbf{U}_{10\uparrow} \mathbf{U}_{02\uparrow 34\uparrow} + \mathbf{U}_{4\uparrow 0} \mathbf{U}_{12\uparrow 30\uparrow} - (0 \rightarrow 1))^{conf} \right. \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2} (\mathbf{U}_{10\uparrow} \mathbf{U}_{02\uparrow 34\uparrow} + \mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{10\uparrow 34\uparrow} - (0 \rightarrow 1))^{conf} \\
& - \frac{\vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{40}^2} (\mathbf{U}_{10\uparrow} \mathbf{U}_{02\uparrow 34\uparrow} + \mathbf{U}_{30\uparrow} \mathbf{U}_{04\uparrow 12\uparrow} - (0 \rightarrow 4))^{conf} \\
& - \frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{30}^2} (\mathbf{U}_{4\uparrow 0} \mathbf{U}_{12\uparrow 30\uparrow} + \mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{34\uparrow 10\uparrow} - (0 \rightarrow 1))^{conf} \\
& + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4) \} \\
& + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (\mathbf{G}_s^{conf} + \mathbf{G}_a^{conf}) + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 (\mathbf{G}_\beta + \mathbf{G}^{conf}), \tag{1.266}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\mathbf{U}_{12\uparrow} \mathbf{U}_{34\uparrow})^{conf}}{\partial \eta} &= \left\{ \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[\frac{4\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{20}^2} (\mathbf{U}_{4\uparrow 3} \mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{0\uparrow 1} - N_c \mathbf{U}_{4\uparrow 3} \mathbf{U}_{2\uparrow 1})^{conf} \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2\vec{r}_{40}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2\vec{r}_{40}^2} \right) \right. \\
& \left. \left. \times (\mathbf{U}_{2\uparrow 14\uparrow 3} + \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 1} - \mathbf{U}_{2\uparrow 10\uparrow 34\uparrow 0} - \mathbf{U}_{2\uparrow 04\uparrow 30\uparrow 1})^{conf} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{U}_{34\dagger} \langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{12\dagger}^{conf} \rangle + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4) \Big\} \\
& + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (\tilde{\mathbf{G}}_s^{conf} + \tilde{\mathbf{G}}_a^{conf}) + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 (\tilde{\mathbf{G}}_\beta + \tilde{\mathbf{G}}^{conf}). \quad (1.267)
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе эволюция отдельных дипольных операторов не входит в функции $\tilde{\mathbf{G}}$

$$\langle K_{NLO} \otimes \mathbf{U}_{12\dagger}^{conf} \rangle = \frac{\partial \mathbf{U}_{12\dagger}^{conf}}{\partial \eta} - \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} (\mathbf{U}_{2\dagger 0} \mathbf{U}_{0\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{2\dagger 1})^{conf}. \quad (1.268)$$

Поэтому можно переписать (1.267) так

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\mathbf{U}_{12\dagger} \mathbf{U}_{34\dagger})^{conf}}{\partial \eta} = \left\{ \mathbf{U}_{34\dagger} \frac{\partial \mathbf{U}_{12\dagger}^{conf}}{\partial \eta} + \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[\frac{4\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{20}^2} \right. \right. \\
& \times \{ (\mathbf{U}_{4\dagger 3} \mathbf{U}_{2\dagger 0} \mathbf{U}_{0\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{4\dagger 3} \mathbf{U}_{2\dagger 1})^{conf} - \mathbf{U}_{4\dagger 3} (\mathbf{U}_{2\dagger 0} \mathbf{U}_{0\dagger 1} - N_c \mathbf{U}_{2\dagger 1})^{conf} \} \\
& + \left. \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{30}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{10}^2 \vec{r}_{40}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{40}^2} \right) \right. \\
& \times (\mathbf{U}_{2\dagger 14\dagger 3} + \mathbf{U}_{2\dagger 34\dagger 1} - \mathbf{U}_{2\dagger 10\dagger 34\dagger 0} - \mathbf{U}_{2\dagger 04\dagger 30\dagger 1})^{conf} \Big] + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4) \Big\} \\
& + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^4} \int d\vec{r}_0 d\vec{r}_5 (\tilde{\mathbf{G}}_s^{conf} + \tilde{\mathbf{G}}_a^{conf}) + \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{r}_0 (\tilde{\mathbf{G}}_\beta + \tilde{\mathbf{G}}^{conf}). \quad (1.269)
\end{aligned}$$

Ясно, что \mathbf{G}_β и $\tilde{\mathbf{G}}_\beta$ такие же как и в (1.238) и (1.239). Остальные функции \mathbf{G}^{conf} приведены ниже.

Процедура их нахождения такая же как и для оператора барионной вильсоновской петли. Единственный необходимый дополнительный интеграл

$$\int d\vec{r}_0 \left(\frac{\vec{r}_{01} \vec{r}_{02}}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{01} \vec{r}_{03}}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02} \vec{r}_{13}}{\vec{r}_{03} \vec{r}_{12}} \right) = \frac{\pi}{3} \ln^3 \left(\frac{\vec{r}_{13}}{\vec{r}_{12}} \right). \quad (1.270)$$

1.6.5 Квазиконформное ядро для квадруполья

Симметричный вклад \mathbf{G}_s^{conf} имеет вид

$$\mathbf{G}_s^{conf} = \mathbf{G}_{s1}^{conf} + n_f \mathbf{G}_q + \mathbf{G}_{s2}^{conf}, \quad (1.271)$$

где \mathbf{G}_q осталось прежним (1.242) .

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{s1}^{conf} &= (\{\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 5} - \mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} - (5 \rightarrow 0)\} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
&\times (L_{12}^C + L_{32}^C - L_{13}^C) \\
&+ (\{\mathbf{U}_{0^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 5} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} - (5 \rightarrow 0)\} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
&\times (L_{12}^C + L_{14}^C - L_{42}^C) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \tag{1.272}
\end{aligned}$$

где L^C определено в (1.168).

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{s2}^{conf} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 52^\dagger 05^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 05^\dagger 3} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
&\times (M_1^{C34} - M_1^{C43} + M_1^{C42} - M_1^{C24} + M_2^{C43} - M_2^{C34} + M_2^{C31} - M_2^{C13}) \\
&+ \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 02^\dagger 54^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 15^\dagger 0} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
&\times (M_3^{C14} - M_3^{C41} + M_3^{C42} - M_3^{C24} + M_2^{C41} - M_2^{C14} + M_2^{C13} - M_2^{C31}) \\
&+ \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 34^\dagger 5} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{5^\dagger 1} \mathbf{U}_{2^\dagger 34^\dagger 0} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
&\times (M_2^{C14} - M_2^{C41} + M_4^{C12} - M_4^{C21}) \\
&+ \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 15^\dagger 02^\dagger 5} - \mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{2^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 34^\dagger 1} + (5 \leftrightarrow 0)) \\
&\times (M_1^{C23} - M_1^{C32} + M_3^{C21} - M_3^{C12}) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \tag{1.273}
\end{aligned}$$

Здесь $M_i^{Cjk} \equiv M^C(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
M_2^{C13} &= M_2^{13} + \frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{23}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{13}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^4} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{23}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \right) \\
&- \frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \\
&= \frac{\vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{23}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{15}^2 \vec{r}_{35}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \\
&- \frac{\vec{r}_{13}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^4 \vec{r}_{25}^4}{\vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{35}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{25}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{25}^2} \right) \\
&+ \frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^4}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{35}^2} \right). \tag{1.274}
\end{aligned}$$

Функция M_i^{Cjk} конформно инвариантна. Можно показать, что \mathbf{G}_{s2}^{conf} равно 0 при выключении ударной волны. Наконец, видно, что \mathbf{G}_s^{conf} можно формально получить из \mathbf{G}_s заменой $M \rightarrow M^C, L \rightarrow L^C$.

Антисимметричный вклад имеет вид

$$\mathbf{G}_a^{conf} = \mathbf{G}_{a1}^{conf} + \mathbf{G}_{a2}^{conf} + \mathbf{G}_{a3}^{conf}. \quad (1.275)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{a1}^{conf} = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0\uparrow 1} \mathbf{U}_{2\uparrow 5} \mathbf{U}_{4\uparrow 05\uparrow 3} + \mathbf{U}_{0\uparrow 34\uparrow 52\uparrow 05\uparrow 1} - (5 \leftrightarrow 0)) (M_2^{C31} + M_2^{C13} \\ & - M_2^{C34} - M_2^{C43} - M_1^{C42} - M_1^{C24} + M_1^{C43} + M_1^{C34} - R_{2134}) \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0\uparrow 3} \mathbf{U}_{2\uparrow 5} \mathbf{U}_{4\uparrow 15\uparrow 0} + \mathbf{U}_{0\uparrow 35\uparrow 02\uparrow 54\uparrow 1} - (5 \leftrightarrow 0)) (M_2^{C13} + M_2^{C31} \\ & - M_2^{C14} - M_2^{C41} - M_3^{C42} - M_3^{C24} + M_3^{C41} + M_3^{C14} + R_{3241}) \\ & + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.276)$$

Здесь $R_{ijkl} \equiv R(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k, \vec{r}_l)$ конформно инвариантна. Она равна

$$\begin{aligned} R_{2134} = & \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{25}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{15}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \\ & + \frac{\vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{45}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{13}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.277)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{a2}^{conf} = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0\uparrow 34\uparrow 15\uparrow 02\uparrow 5} - (5 \leftrightarrow 0)) (R_{231} - R_{123} + 2\tilde{L}_{13}^C - M_1^{C23} \\ & - M_1^{C32} + M_3^{C21} + M_3^{C12} + M_2^{C11} + M_1^{C22} - M_3^{C22} - M_2^{C33}) \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0\uparrow 15\uparrow 02\uparrow 34\uparrow 5} - (5 \leftrightarrow 0)) (R_{124} - R_{142} + 2\tilde{L}_{42}^C - M_1^{C22} \\ & - M_2^{C11} + M_1^{C44} + M_4^{C11} + M_2^{C14} + M_2^{C41} - M_4^{C21} - M_4^{C12}) \\ & + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.278)$$

Здесь \tilde{L}^C определена в (1.169) и $R_{ijk} \equiv R(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k)$ - новая конформно инвариантная функция

$$R_{123} = \frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{35}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{05}^2 \vec{r}_{23}^2} \right). \quad (1.279)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{a3}^{conf} = & (2\tilde{L}_{12}^C + 2\tilde{L}_{14}^C - M_2^{C44} - M_4^{C22} + M_2^{C14} + M_2^{C41} + M_4^{C21} + M_4^{C12} + R_{241}) \\
& \times \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0\uparrow 5} \mathbf{U}_{5\uparrow 1} \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 0} - (5 \leftrightarrow 0)) + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{5\uparrow 0} \mathbf{U}_{2\uparrow 5} \mathbf{U}_{0\uparrow 34\uparrow 1} - (5 \leftrightarrow 0)) \\
& \times (2\tilde{L}_{21}^C + 2\tilde{L}_{23}^C - M_1^{C33} - M_3^{C11} + M_1^{C32} + M_1^{C23} + M_3^{C21} + M_3^{C12} + R_{132}) \\
& + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \tag{1.280}
\end{aligned}$$

Часть ядра, проинтегрированная по \vec{r}_5 , такова

$$\mathbf{G}^{conf} = \mathbf{G}_1^{conf} + \mathbf{G}_2^{conf}. \tag{1.281}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1^{conf} = & (\mathbf{U}_{0\uparrow 3} \mathbf{U}_{2\uparrow 1} \mathbf{U}_{4\uparrow 0} - \mathbf{U}_{0\uparrow 12\uparrow 04\uparrow 3} - \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 1} (N_c^2 - 1)) \\
& \times \frac{1}{4} \left[\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \right) \right. \\
& + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \right) - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \\
& \left. - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{03}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) \right) \right] \\
& + (\mathbf{U}_{0\uparrow 1} \mathbf{U}_{2\uparrow 3} \mathbf{U}_{4\uparrow 0} - \mathbf{U}_{0\uparrow 14\uparrow 02\uparrow 3} - \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 1} (N_c^2 - 1)) \\
& \times \frac{1}{4} \left[\frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \right) - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \right. \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{01}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right) - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{01}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \\
& \left. + \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{01}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2} \right) \right) \right] + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \tag{1.282}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_2^{conf} = & \frac{N_c}{4} (\mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{0\uparrow 34\uparrow 1} - N_c \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 1}) \\
& \times \left[\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right] \\
& + \frac{N_c}{4} (\mathbf{U}_{0\uparrow 3} \mathbf{U}_{2\uparrow 04\uparrow 1} - N_c \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \right] + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \quad (1.283) \end{aligned}$$

Прямой проверкой было установлено, что \mathbf{G}_s^{conf} , \mathbf{G}_a^{conf} и \mathbf{G}^{conf} не имеют неинтегрируемых расходимостей.

1.6.6 Квазиконформное ядро для двойного диполя

Симметричная часть $\tilde{\mathbf{G}}_s^{conf}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{G}}_s^{conf} = \tilde{\mathbf{G}}_{s1}^{conf} + n_f \tilde{\mathbf{G}}_q + \tilde{\mathbf{G}}_{s2}^{conf}, \quad (1.284)$$

где $\tilde{\mathbf{G}}_q$ (1.242) остается прежним.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{s1}^{conf} &= (\{\mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 5} \mathbf{U}_{4^\dagger 35^\dagger 0} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 34^\dagger 0} - (5 \rightarrow 0)\} + (5 \leftrightarrow 0)) \\ &\times (L_{14}^C - L_{13}^C + L_{23}^C - L_{24}^C) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4), \quad (1.285) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{s2}^{conf} &= (M_4^{C13} - M_4^{C31} + M_3^{C14} - M_3^{C41} - M_4^{C23} + M_4^{C32} - M_3^{C24} + M_3^{C42}) \\ &\times \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 12^\dagger 5} + \mathbf{U}_{4^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 52^\dagger 15^\dagger 3} - \mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 04^\dagger 5} - \mathbf{U}_{0^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 54^\dagger 05^\dagger 1} \\ &+ (5 \leftrightarrow 0)) \\ &+ (M_4^{C12} - M_4^{C21} + M_3^{C21} - M_3^{C12} - M_1^{C34} + M_1^{C43} - M_2^{C43} + M_2^{C34}) \\ &\times \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 54^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 05^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 34^\dagger 0} + (5 \leftrightarrow 0)) + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \quad (1.286) \end{aligned}$$

Антисимметричная часть такова

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_a &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{5^\dagger 3} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 04^\dagger 5} + \mathbf{U}_{5^\dagger 3} \mathbf{U}_{0^\dagger 54^\dagger 02^\dagger 1} - \mathbf{U}_{4^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 05^\dagger 3} - \mathbf{U}_{4^\dagger 5} \mathbf{U}_{0^\dagger 35^\dagger 02^\dagger 1} \\ &- (5 \leftrightarrow 0)) \\ &\times (M_4^{23} + M_3^{24} - M_4^{13} - M_3^{14} - M_4^{31} + M_4^{32} - M_3^{41} + M_3^{42} - R_{341} + R_{342}) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{0^\dagger 54^\dagger 3} \mathbf{U}_{2^\dagger 05^\dagger 1} - \mathbf{U}_{0^\dagger 52^\dagger 1} \mathbf{U}_{4^\dagger 05^\dagger 3} + \mathbf{U}_{5^\dagger 0} \mathbf{U}_{0^\dagger 12^\dagger 54^\dagger 3} - \mathbf{U}_{0^\dagger 5} \mathbf{U}_{2^\dagger 15^\dagger 34^\dagger 0} \\ &- (5 \leftrightarrow 0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (M_4^{C11} - M_3^{C11} + M_3^{C12} - M_4^{C12} + M_3^{C21} - M_4^{C21} - M_3^{C22} + M_4^{C22}) \\ & + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.287)$$

Вклад с одним интегрированием имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}^{conf} &= \frac{1}{4} (\mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{0\uparrow 14\uparrow 3} + \mathbf{U}_{2\uparrow 0} \mathbf{U}_{0\uparrow 34\uparrow 1} - \mathbf{U}_{0\uparrow 1} \mathbf{U}_{2\uparrow 04\uparrow 3} - \mathbf{U}_{0\uparrow 1} \mathbf{U}_{2\uparrow 34\uparrow 0}) \\ & \times \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \right. \right. \\ & + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) \left. \left. + \left(\frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(\frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4} (N_c \mathbf{U}_{0\uparrow 12\uparrow 04\uparrow 3} + N_c \mathbf{U}_{0\uparrow 34\uparrow 02\uparrow 1} - 2 \mathbf{U}_{2\uparrow 1} \mathbf{U}_{34\uparrow}) \left[\frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) \right. \\ & + \left. \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{14}^2} \right) \right) \right] \\ & + (1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4). \end{aligned} \quad (1.288)$$

Как и для квадруполья $\tilde{\mathbf{G}}_s^{conf}$, $\tilde{\mathbf{G}}_a^{conf}$ и $\tilde{\mathbf{G}}^{conf}$ не имеют неинтегрируемых особенностей.

1.6.7 Проверка

Существуют несколько способов проверки полученных уравнений. С одной стороны, можно их получить в рамках подхода JMWLK [37], [94]. С другой стороны, здесь были проделаны следующие проверки. Было проверено, что в дипольных пределах $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 1$ квадрупольные ядра (1.238) и (1.266) переходят в дипольные (1.237) и (1.263). Ядра эволюции дважды дипольного оператора (1.239) и (1.267) также имеют правильные дипольные пределы $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$. В этих пределах они переходят в дипольные ядра (1.237) и (1.263) помноженные на N_c , что было явно проверено в выражениях (1.238),

(1.266), (1.239) и (1.267). Наши ядра совпадают с ядром БФКЛ в СГП в этих пределах [50].

Вторая проверка основана на $SU(3)$ тождестве

$$B_{123} \equiv \mathbf{U}_{12^\dagger} \mathbf{U}_{34^\dagger} - \mathbf{U}_{12^\dagger 34^\dagger}. \quad (1.289)$$

Соответственно уравнения эволюции для барионного оператора, квадрупольного и дважды дипольного оператора связаны. Выполнение этого тождества для ядер полученных уравнений было явно продемонстрировано в [36] путем перехода к общему базису цветовых структур с помощью цветовых тождеств приведенных в приложении А.

Полученные уравнения можно использовать для построения уравнения эволюции для глюонной плотности Вайцзеккера - Вильямса и анализа сложных дифракционных состояний в эксклюзивных процессах.

1.7 Решение линейного уравнения для рассеяния вперед в СГЛП

Наши обозначения будут такими же, как в [95]. Таким образом, поперечные импульсы (и сопряженные координаты) реджеонов в начальном и конечном t -канальных состояниях равны $\vec{q}'_i(\vec{r}'_i)$ и $\vec{q}_i(\vec{r}_i)$, $i = 1, 2$. Нормировка состояния такова:

$$\langle \vec{q}' | \vec{q}' \rangle = \delta(\vec{q}' - \vec{q}'), \quad \langle \vec{r}' | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r}' - \vec{r}'), \quad \langle \vec{r}' | \vec{q}' \rangle = \frac{e^{i\vec{q}'\vec{r}'}}{2\pi}. \quad (1.290)$$

Скачки амплитуд рассеяния в s -канале для процессов $A + B \rightarrow A' + B'$ имеют следующую форму:

$$-4i(2\pi)^2 \delta(\vec{p}'_A + \vec{p}'_B - \vec{p}_A - \vec{p}_B) \text{disc}_s \mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \langle A' \bar{A} | \hat{G} \frac{1}{\hat{q}_1 \hat{q}_2} | \bar{B}' B \rangle. \quad (1.291)$$

В этом выражении \hat{G} – функция Грина БФКЛ, подчиняющаяся уравнению БФКЛ. Это уравнение можно записать в операторной форме как

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial Y} = \hat{K} \hat{G}, \quad \hat{G}|_{Y=Y_0} = \hat{1}, \quad (1.292)$$

где Y – быстрота, а Y_0 задается соответствующим масштабом энергии, который определяется импакт факторами. Для рассеяния на нулевой угол определим матричный элемент в координатном представлении как

$$\langle \vec{r} | \hat{K} | \vec{r}' \rangle = \int \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{K} | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle \delta(\vec{r}_1 \vec{r}_2 - \vec{r}') d^2 r'_1 d^2 r'_2, \quad (1.293)$$

с $\vec{r} = \vec{r}_{12}$. Отсюда

$$\langle \vec{q}_1 | \hat{K} | \vec{q}'_1 \rangle = \int \frac{d\vec{x} d\vec{z}}{(2\pi)^2} e^{-i[\vec{q}_1 \vec{r} - \vec{q}'_1 \vec{r}']} \langle \vec{r} | \hat{K} | \vec{r}' \rangle. \quad (1.294)$$

Тогда скачок (1.291) превращается в

$$-4i(2\pi)^2 \text{disc}_s \mathcal{A}_{AB}^{AB} = \langle A\bar{A} | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}B \rangle. \quad (1.295)$$

Мы будем работать в пространстве собственных функций борновского ядра $|n\nu\rangle$

$$\langle \vec{r} | n\nu \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{in\phi} (\vec{r}^2)^{-\frac{1}{2}+i\nu}, \quad (1.296)$$

$$\langle \vec{r} | n\nu \rangle \langle n\nu | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \langle n\nu | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | m\sigma \rangle = \delta_{nm} \delta(\nu - \sigma). \quad (1.297)$$

$$\langle \vec{r} | n\nu \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{in\phi} (\vec{r}^2)^{-\frac{1}{2}+i\nu} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{in\phi} (\vec{r}^2)^\gamma, \quad \gamma = -\frac{1}{2} + i\nu. \quad (1.298)$$

В дальнейшем выполняется суммирование и интегрирование по повторяющимся индексам. В этом пространстве скачок пропорционален матричному элементу

$$-4i(2\pi)^2 \text{disc}_s \mathcal{A}_{AB}^{AB} = \langle A\bar{A} | n\nu \rangle \langle n\nu | \hat{G} | m\sigma \rangle \langle m\sigma | \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}B \rangle, \quad (1.299)$$

и уравнение БФКЛ имеет следующий вид

$$\frac{\partial \langle n\nu | \hat{G} | m\sigma \rangle}{\partial Y} = \langle n\nu | \hat{K} | h\rho \rangle \langle h\rho | \hat{G} | m\sigma \rangle, \quad \langle n\nu | \hat{G} | m\sigma \rangle|_{Y=Y_0} = \delta_{nm} \delta(\nu - \sigma). \quad (1.300)$$

Импакт-фактор выглядит следующим образом

$$\Phi_A(n, \nu) = \langle A' \bar{A} | n\nu \rangle, \quad \Phi_B(m, \sigma) = \langle m\sigma | \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}' B \rangle, \quad (1.301)$$

в то время как ядро записывается так (см. (52)-(55) в [95]):

$$\langle n\nu | \hat{K}_M | h\rho \rangle = \left[\bar{\alpha} \chi(n, \rho) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4} \delta(n, \rho) \right] \delta_{nh} \delta(\rho - \nu) - i \frac{\bar{\alpha}^2 \beta}{4} \chi(n, \rho) \delta_{nh} \delta'(\rho - \nu), \quad (1.302)$$

$$\beta = \frac{11}{3}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_s(\mu^2) N_c}{\pi}, \quad \chi(n, \nu) = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1+n}{2} + i\nu\right) - \psi\left(\frac{1+n}{2} - i\nu\right), \quad (1.303)$$

и $\delta(n, \nu)$ содержит все члены из (53) в [95] без производной. Для удобства здесь используется мёбиусовское ядро, определенное в координатном представлении.

Но такую же процедуру можно применить к исходному ядру, полученному в пространстве импульсов в [41]. Сразу мы можем выполнить свертку функции Грина и второго импакт фактора. В результате, мы получаем для этого уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B} B \rangle}{\partial Y} - i \frac{\bar{\alpha}^2 \beta}{4} \frac{\partial \left(\chi(n, \nu) \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B} B \rangle \right)}{\partial \nu} \\ & = \left[\bar{\alpha} \chi(n, \nu) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4} \delta(n, \nu) \right] \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B} B \rangle \end{aligned} \quad (1.304)$$

с начальным условием

$$\langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B} B \rangle |_{Y=Y_0} = \Phi_B(n, \nu). \quad (1.305)$$

Для простоты запишем $\chi(n, \nu) \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}' B \rangle = \mathbf{G}$. В этих обозначениях данное уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Y} - i \frac{\bar{\alpha}^2 \beta}{4} \chi(n, \nu) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \nu} = \left[\bar{\alpha} \chi(n, \nu) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4} \delta(n, \nu) \right] \mathbf{G}, \quad (1.306)$$

$$\mathbf{G}_0(n, \nu) = \mathbf{G} |_{Y=Y_0} = \chi(n, \nu) \Phi_B(n, \nu). \quad (1.307)$$

Его два первых интеграла:

$$c_1 = Y - Y_0 - \frac{4i}{\bar{\alpha}^2 \beta} \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{dl}{\chi(n, l)}, \quad c_2 = \mathbf{G} e^{-i \left[\frac{4}{\bar{\alpha} \beta} (\nu - \nu_0) + \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\delta(n, l)}{\chi(n, l) \beta} dl \right]}. \quad (1.308)$$

Общее решение этого уравнения зависит от произвольной функции f

$$\mathbf{G} = e^{i\left[\frac{4}{\bar{\alpha}\beta}(\nu-\nu_0)+\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)\beta}dl\right]} f\left(\frac{\bar{\alpha}^2\beta}{4}i(Y-Y_0)+\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{dl}{\chi(n,l)}\right). \quad (1.309)$$

Используя начальное условие (1.305), мы можем найти f из уравнения

$$\mathbf{G}_0(n,\nu) = e^{i\left[\frac{4}{\bar{\alpha}\beta}(\nu-\nu_0)+\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)\beta}dl\right]} f\left(\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{dl}{\chi(n,l)}\right). \quad (1.310)$$

Чтобы его решить, мы вводим

$$F(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu}\frac{dl}{\chi(n,l)}. \quad (1.311)$$

Следовательно,

$$f(t) = \mathbf{G}_0(n, F^{-1}(t)) \exp\left[\frac{-4i}{\bar{\alpha}\beta}(F^{-1}(t) - \nu_0) - \frac{i}{\beta} \int_{\nu_0}^{F^{-1}(t)} \frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)} dl\right]. \quad (1.312)$$

Тогда формальное общее решение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}_0\left(n, F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right)\right) \\ &\times e^{-\frac{4i}{\bar{\alpha}\beta}\left(F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right) - \nu\right)} e^{-\frac{i}{\beta} \int_{\nu}^{F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right)} \frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)} dl}. \end{aligned} \quad (1.313)$$

$$\begin{aligned} \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}' B \rangle &= \Phi_B\left(n, F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right)\right) \\ &\times \frac{\chi\left(n, F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right)\right)}{\chi(n,\nu)} \\ &\times e^{-\frac{4i}{\bar{\alpha}\beta}\left(F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right) - \nu\right)} e^{-\frac{i}{\beta} \int_{\nu}^{F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right)} \frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)} dl}. \end{aligned} \quad (1.314)$$

Здесь мы можем сохранить члены только до порядка $\bar{\alpha}^{m+1}Y^m$, так как мы работаем в СГП. С этой точностью в разложении $F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta}{4i}(Y-Y_0)\right)$ при $F(\nu)$ мы можем взять только три первых члена

$$\begin{aligned} &F^{-1}\left(F(\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4}\right) \\ &\simeq \nu + \chi(n,\nu) \frac{\bar{\alpha}^2\beta i(Y-Y_0)}{4} + \frac{\chi(n,\nu)\chi'(n,\nu)}{2} \left(\frac{\bar{\alpha}^2\beta i}{4}Y\right)^2, \end{aligned} \quad (1.315)$$

так как

$$\frac{dF^{-1}(x)}{dx}\Big|_{x=F(t)} = \chi(n, t), \quad \frac{d^2F^{-1}(x)}{d^2x}\Big|_{x=F(t)} = \chi(n, t) \chi'(n, t). \quad (1.316)$$

Поэтому с точностью СГП

$$\begin{aligned} \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}B \rangle &= (\Phi_B(n, \nu) + \frac{\bar{\alpha}^2 \beta i}{4} [\Phi_B(n, \nu) \chi(n, \nu)]' Y) \\ &\times e^{\bar{\alpha} \chi(n, \nu)(Y - Y_0) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4} \delta(n, \nu) Y + \frac{\bar{\alpha}^3 \beta i}{8} \chi(n, \nu) \chi'(n, \nu) Y^2}. \end{aligned} \quad (1.317)$$

В этом выводе было несколько тонких моментов, например, учет влияния сингулярностей $F(\nu)$. Их можно исследовать, но легче подставить решение в (1.304) и проверить, удовлетворяет ли оно уравнению до членов пропорциональных $\bar{\alpha}^{n+2} Y^n$ включительно. Тогда у этого вклада в скачок (1.295) и, следовательно, в полные сечения будет следующая форма, которая и является основным результатом этого раздела

$$\begin{aligned} \langle A\bar{A} | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}B \rangle &= \langle A\bar{A} | n\nu \rangle \langle n\nu | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}B \rangle \\ &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \Phi_A^*(n, \nu) \left(\Phi_B(n, \nu) + \frac{\bar{\alpha}^2 \beta i}{4} [\Phi_B(n, \nu) \chi(n, \nu)]' Y \right) \\ &\times e^{\bar{\alpha} \chi(n, \nu)(Y - Y_0) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4} \delta(n, \nu) Y + \frac{\bar{\alpha}^3 \beta i}{8} \chi(n, \nu) \chi'(n, \nu) Y^2}. \end{aligned} \quad (1.318)$$

Интересно также рассмотреть следующий член ряда (1.315), хотя он не соответствует точности СГП. Он записывается следующим образом

$$\frac{\chi(n, \nu)^2 \chi''(n, \nu) + \chi(n, \nu) \chi'(n, \nu)^2}{3!} \left(\frac{\bar{\alpha}^2 \beta i}{4} Y \right)^3, \quad (1.319)$$

так как

$$\frac{d^3 F^{-1}(x)}{d^3 x}\Big|_{x=F(t)} = [\chi(n, t)]^2 \chi''(n, t) + \chi(n, t) [\chi'(n, t)]^2. \quad (1.320)$$

Поэтому решение будет иметь следующий вид

$$\langle A\bar{A} | \hat{G} \hat{q}_1^{-4} | \bar{B}B \rangle = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \Phi_A^*(n, \nu) (\Phi_B(n, \nu) + \frac{\bar{\alpha}^2 \beta i}{4} [\Phi_B(n, \nu) \chi(n, \nu)]' Y)$$

$$\times e^{\bar{\alpha}\chi(n,\nu)(Y-Y_0)+\frac{\bar{\alpha}^2}{4}\delta(n,\nu)Y+\frac{\bar{\alpha}^3\beta i}{8}\chi(n,\nu)\chi'(n,\nu)Y^2-\frac{\bar{\alpha}^5\beta^2Y^3}{3!4^2}(\chi(n,\nu)^2\chi''(n,\nu)+\chi(n,\nu)\chi'(n,\nu)^2)}. \quad (1.321)$$

Если интегрировать по ν , рассматривая члены $\sim \bar{\alpha}^2Y, \bar{\alpha}^3Y^2, \bar{\alpha}^5Y^3$ как малые, и учитывать только вклад седловой точки $\chi(0,0)$, получим

$$\begin{aligned} \langle A\bar{A}|\hat{G}\hat{q}_1^{-4}|\bar{B}B\rangle &\simeq \Phi_A^*(0,0) \left(\Phi_B(0,0) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i}{4}\Phi_B'(0,0)\chi(0,0)Y \right) \\ &\times \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\alpha}|\chi''(0,0)|Y}} e^{\bar{\alpha}\chi(0,0)(Y-Y_0)+\frac{\bar{\alpha}^2}{4}\delta(0,0)Y-\frac{\bar{\alpha}^5\beta^2Y^3}{3!4^2}\chi(0,0)^2\chi''(0,0)}. \end{aligned} \quad (1.322)$$

Здесь у члена $\sim \bar{\alpha}^5\beta^2Y^3$ тот же коэффициент, что и в [44], а член $\sim \bar{\alpha}^3\beta i\chi'$ равен нулю в седловой точке χ . Именно поэтому его нет в [44].

Итак, представлено решение уравнения БФКЛ в СГП для нулевого угла рассеяния в пространстве борновских собственных функций. В этом пространстве данное уравнение можно записать в виде уравнения в частных производных. Его общее решение дано в (1.309). Решение, подчиняющееся граничному условию при $Y = Y_0$, можно получить через обратные функции. Однако в СГП эти функции должны быть разложены в ряд Тейлора, что дает решение уравнения (1.317) для нулевого угла рассеяния и скачок в s -канале (1.318) с точностью СГП. В показателе степени этого решения есть член $\sim \bar{\alpha}^3\beta i\chi'(n,\nu)Y^2$, который исчезает в седловой точке собственного значения ГП. Но при выходе за пределы приближения седловой точки в ГП, это следует принимать во внимание.

Глава 2. Дифракционное фоторождение

2.1 Необходимые определения

Для начала рассмотрим дифракционное фоторождение партонов - кварков и глюонов. Обозначим импульс исходного фотона p_γ , конечных кварка и антикварка p_q и $p_{\bar{q}}$. Реальные поправки описывают излучение дополнительного глюона. Его импульс обозначен p_g . Мы сконцентрируемся на дифракционном рассеянии на протоне P , который не распадается после взаимодействия. Его начальный и конечный импульсы p_0 и p'_0 . Мы рассматриваем полужесткую кинематику с жестким масштабом

$$s = (p_\gamma + p_0)^2 \gg |p_\gamma^2|, M_P^2, |p_{00'}^2|. \quad (2.1)$$

Здесь как и в предыдущих разделах $p_{ij} = p_i - p_j$. Мы обозначим M_P массу протона. Полужесткий масштаб задает или виртуальность фотона $|p_\gamma^2|$, или передача импульса $|p_{00'}^2|$, или инвариантная масса рожденной системы. В нашей кинематике можно выбрать систему, в которой

$$s \simeq 2p_\gamma^+ p_0^-, \quad p_\gamma^+, p_0^- \sim \sqrt{s}, \quad (2.2)$$

$$p_\gamma^+ \sim p_q^+ \sim p_{\bar{q}}^+ \gg p_0^+, p_{0'}^+, \quad p_0^- \gg p_\gamma^-, p_{\bar{q}}^-, p_q^-. \quad (2.3)$$

Определим доли продольного импульса фотона, уносимые $q\bar{q}$ парой

$$\frac{p_q^+}{p_\gamma^+} \equiv x_q, \quad \frac{p_{\bar{q}}^+}{p_\gamma^+} \equiv x_{\bar{q}}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим фотон без поперечного импульса с виртуальностью Q :

$$\vec{p}_\gamma = 0, \quad p_\gamma^\mu = p_\gamma^+ n_1^\mu + \frac{p_\gamma^2}{2p_\gamma^+} n_2^\mu, \quad -p_\gamma^2 \equiv Q^2 > 0. \quad (2.5)$$

Обозначим его поперечную поляризацию ε_T . Вектор продольной поляризации имеет вид

$$\varepsilon_L^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-p_\gamma^2}} \left(p_\gamma^+ n_1^\alpha - \frac{p_\gamma^2}{2p_\gamma^+} n_2^\alpha \right), \quad \varepsilon_L^+ = \frac{p_\gamma^+}{Q}, \quad \varepsilon_L^- = \frac{Q}{2p_\gamma^+}. \quad (2.6)$$

Мы работаем в светоконусной калибровке $\mathcal{A}n_2 = 0$. Пропагаторы и внешние линии в поле ударной волны в этой калибровке приведены в разделах 1.1–1.2.

Для построения сечения после вычисления импакт факторов необходимо проинтегрировать по внешнему фоновому полю b , созданному протоном. Это означает, что нужно рассмотреть это поле b как оператор и вычислить матричный элемент вильсоновского оператора между протонными состояниями

$$U_i \cdots \rightarrow \langle P'_{p'_0} | T(U_i \cdots) | P_{p_0} \rangle. \quad (2.7)$$

для упрощения обозначений при вычислении импакт фактора мы будем опускать обкладки матричного элемента, выписывая только вильсоновские линии, и восстановим обкладки только при обсуждении сечения.

Мы используем размерностную регуляризацию и вводим масштаб регуляризации μ . При этом

$$g_0 = g \mu^{-\epsilon}, \quad \alpha_{s0} = \alpha_s \mu^{-2\epsilon}. \quad (2.8)$$

В нашем вычислении не нужна поправка, пропорциональная β функции, так как эффекты перенормировки возникают в следующем за следующим за главным приближением в импакт факторе. Также мы вводим обрезание α для светоконусных полюсов $p_g^+ \rightarrow 0$. Находя вильсоновские операторы $U(r, \rho)$ на масштабе $\rho = e^n$ с начальными условиями при $\rho = \alpha$ с помощью уравнения БК, мы сокращаем сингулярности по быстроте, как будет показано ниже.

Для этого нам необходимо уравнение БК в поперечном пространстве раз-

мерности d . Оно выглядит так [96]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(U_1 U_2^\dagger)}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_s \mu^{2-d}}{2\pi^d} \Gamma^2\left(\frac{d}{2}\right) \int d^d r_{3\perp} \left[\text{tr}(U_1 U_3^\dagger) \text{tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger) \right] \\ &\times \left[\frac{2(r_{13\perp} r_{23\perp})}{(-r_{13\perp}^2 + i0)^{\frac{d}{2}} (-r_{23\perp}^2 + i0)^{\frac{d}{2}}} + \frac{1}{(-r_{13\perp}^2 + i0)^{d-1}} + \frac{1}{(-r_{23\perp}^2 + i0)^{d-1}} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

в координатном представлении и так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(U(p_{1\perp}) U^\dagger(-p_{2\perp}))}{\partial \eta} &= \delta(k_{1\perp} + k_{2\perp} + k_{3\perp} - p_{1\perp} - p_{2\perp}) 2\alpha_s \mu^{2-d} \\ &\times \int \frac{d^d k_{1\perp} d^d k_{2\perp} d^d k_{3\perp}}{(2\pi)^{2d}} \left[-\frac{2(k_{1\perp} - p_{1\perp})(k_{2\perp} - p_{2\perp})}{(k_1 - p_1)_\perp^2 (k_2 - p_2)_\perp^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})^2}{\Gamma(d-1)} \left(\frac{\delta(k_{2\perp} - p_{2\perp})}{(-(k_1 - p_1)_\perp^2)^{1-\frac{d}{2}}} + \frac{\delta(k_{1\perp} - p_{1\perp})}{(-(k_2 - p_2)_\perp^2)^{1-\frac{d}{2}}} \right) \right] \\ &\times \left[\text{tr}(U_1 U_3^\dagger) \text{tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger) \right] (k_{1\perp}, k_{2\perp}, k_{3\perp}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

в импульсном. Здесь введено преобразование Фурье оператора

$$\begin{aligned} &\left[\text{tr}(U_1 U_3^\dagger) \text{tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger) \right] (k_{1\perp}, k_{2\perp}, k_{3\perp}) \\ &= \int d^d r_{1\perp} d^d r_{2\perp} d^d r_{3\perp} e^{i[(r_{1\perp} k_{1\perp}) + (r_{2\perp} k_{2\perp}) + (r_{3\perp} k_{3\perp})]} \\ &\times \left[\text{tr}(U_1 U_3^\dagger) \text{tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$

Матричный элемент электромагнитного тока в поле ударной волны имеет вид

$$\tilde{M}^\alpha = -ie_q \int d^D y_0 \frac{e^{-i(p_\gamma \cdot y_0)}}{\sqrt{2p_\gamma^+}} \frac{\delta_l^n}{\sqrt{N_c}} \langle 0 | T(b_{p\bar{q}}^l (a_{p_q})_n \bar{\psi}(y_0) \gamma^\alpha \psi(y_0) e^{i \int \mathcal{L}_i(z) dz}) | 0 \rangle_{sw}. \quad (2.12)$$

Здесь a и b операторы уничтожения кварка и антикварка, e_q электрический заряд кварка, $\frac{\delta_l^n}{\sqrt{N_c}}$ проектор на цветовой синглет. Диаграмма для перехода фотона в кварк и антикварк в поле ударной волны изображена на Рисунке 4. Для

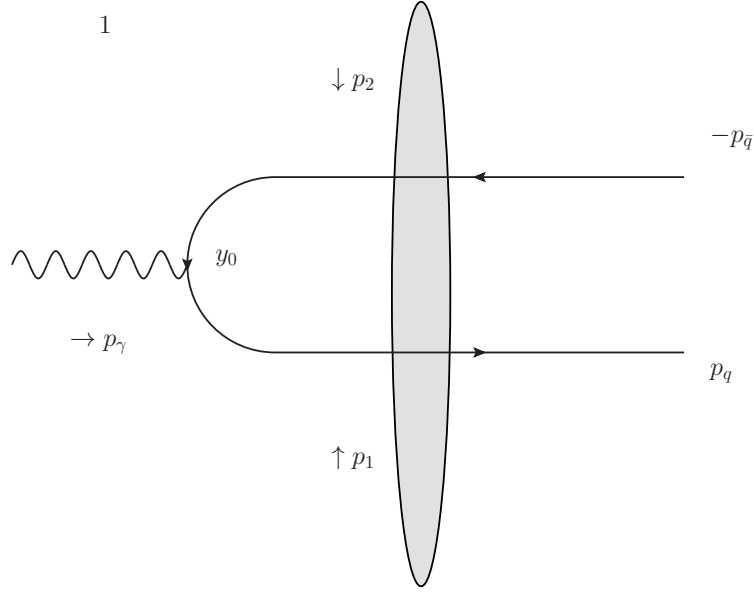


Рис. 4: Импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$. Импульсы p_1 и p_2 передаются кварку и антикварку от ударной волны.

упрощения обозначений мы работаем с матричным элементом \tilde{T}^α

$$\tilde{M}^\alpha \equiv \frac{-ie_q}{\sqrt{2p_\gamma^+}} \frac{-i\delta(p_q^+ + p_{\bar{q}}^+ - p_\gamma^+)}{\sqrt{N_c} (2\pi)^{D-3}} \frac{\tilde{T}^\alpha}{\sqrt{2p_{\bar{q}}^+} \sqrt{2p_q^+}}. \quad (2.13)$$

2.2.1 Импакт фактор в ГП

В ГП импакт фактор получается с помощью (1.19) и (1.20). Результат имеет вид

$$\tilde{T}_0^\alpha = \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \text{tr}[U(p_{1\perp})U^\dagger(-p_{2\perp})] \Phi_0^\alpha. \quad (2.14)$$

Вычитая член без взаимодействия,

$$T_0^\alpha = \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \Phi_0^\alpha [\text{tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp}). \quad (2.15)$$

Здесь

$$[\text{tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp}) = \int d^d r_{1\perp} d^d r_{2\perp} e^{i(p_{1\perp} r_{1\perp}) + i(p_{2\perp} r_{2\perp})} [\text{tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c] \quad (2.16)$$

— это дипольный оператор в импульсном представлении. Функция

$$\Phi_0^\alpha \equiv \Phi_0^\alpha(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \quad (2.17)$$

является импакт фактором в ГП и мы часто будем опускать ее аргументы для краткости. Ее компоненты имеют вид (2.18-2.19), где $x \equiv x_q$ и $\bar{x} = 1 - x = x_{\bar{q}}$:

$$\Phi_0^+ = -\frac{p_\gamma^+}{p_\gamma^-} \Phi_0^- = \frac{2x\bar{x}p_\gamma^+}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} (\bar{u}_{p_q} \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}), \quad (2.18)$$

$$\Phi_0^i = \frac{\bar{u}_{p_q} ((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma^i]) \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}. \quad (2.19)$$

Первое равенство в (2.18) выполняется в следствие калибровочной инвариантности по фотону, что позволяет нам не вычислять $-$ компоненту импакт фактора.

2.2.2 Импакт фактор в СГП

В СГП матричный элемент, обобщающий (2.15), можно разбить на два члена при различных структурах вильсоновских линий

$$\begin{aligned} T_1^\alpha &= \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \\ &\times \left\{ \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \Phi_1^\alpha \frac{N_c^2 - 1}{N_c} [\text{tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp}) \right. \\ &+ \int \frac{d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \delta(p_{q1} + p_{\bar{q}2} - p_{\gamma\perp} - p_{3\perp}) \Phi_2^\alpha \\ &\times [\text{tr}(U_1 U_3^\dagger) \text{tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger)](p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \left. \right\}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Вильсоновские операторы определены в (2.11) и (2.16), зависимость константы связи от масштаба регуляризации (2.8) включена в определение Φ_1^α и Φ_2^α .

Всего есть 8 однопетлевых диаграмм, дающих вклад в T_1 . Пять из них представлены на Рисунке 5. Остальные получаются из диаграмм 3, 5 и 6 заменой $p_q \leftrightarrow p_{\bar{q}}$, $\bar{u}_q \leftrightarrow v_{\bar{q}}$, $p_1 \leftrightarrow p_2$ и обратным порядком γ матриц, что мы

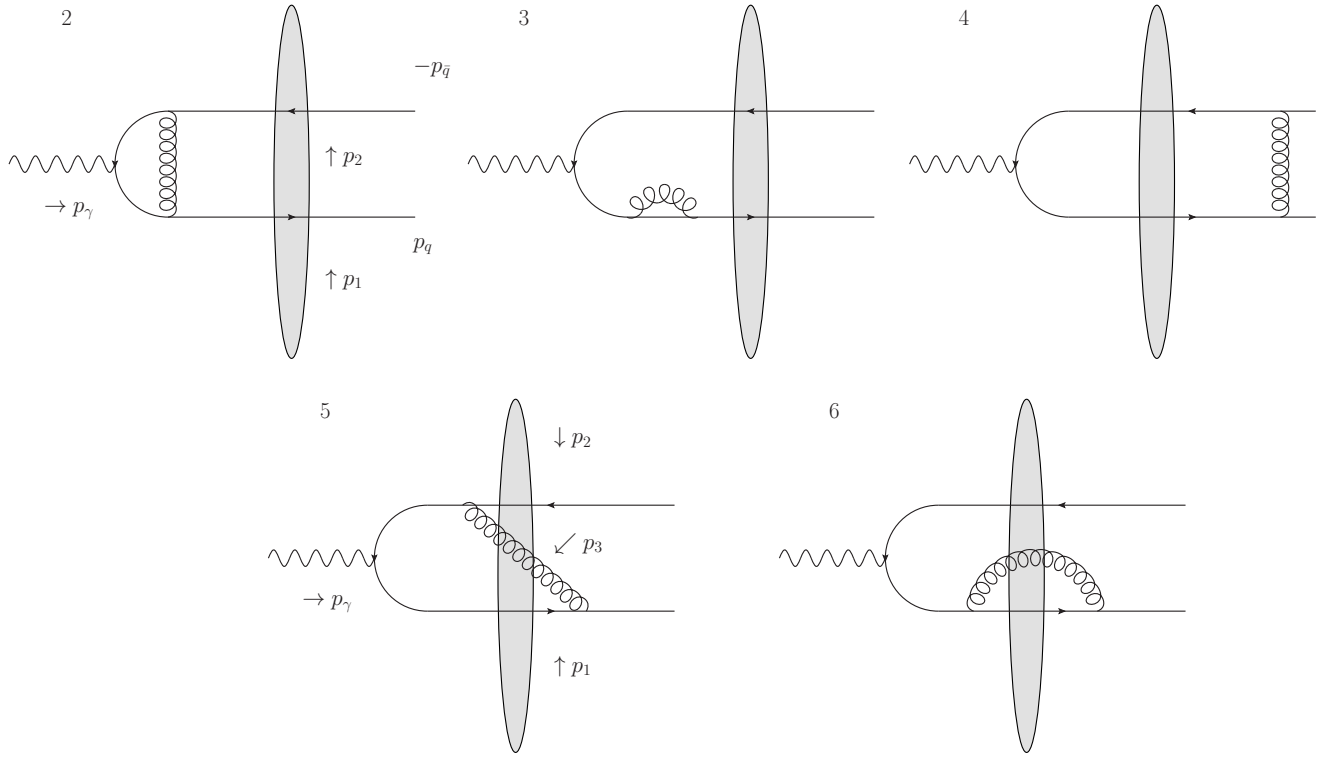


Рис. 5: Однопетлевые диаграммы для перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$. Импульсы p_1 , p_2 и p_3 перетекают от ударной волны к кварку, антикварку и глюону.

обозначаем ($q \leftrightarrow \bar{q}$). Диаграммы 2, 3 и 4 дают вклад только в Φ_1 , а диаграммы 5 и 6 в обе части импакт фактора Φ_1 и Φ_2 . Действительно, после проектирования на цветовой синглет и вычитания невзаимодействующей части видно, что диаграммы 2, 3 и 4 пропорциональны $\text{tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c$, а диаграммы 5 и 6 зависят от оператора, преобразование Фурье которого имеет вид

$$\begin{aligned} \text{tr}(t^a U_1 t^b U_2^\dagger) U_3^{ab} - \frac{N_c^2 - 1}{2} &= \frac{1}{2} [\text{tr}(U_1 U_3^\dagger) \text{tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^\dagger)] \\ &+ \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} [\text{tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для вычисления импакт фактора в СГП необходимо использовать внешние линии и пропагаторы в поле ударной волны, приведенные в разделах 1.1–1.2. При этом расходимости по поперечным импульсам регуляризуются с помощью размерностной регуляризации в пространстве $d = D - 2$, а расходимости по $^+$ компоненте импульса — обрезанием α . Процедура вычисления такова: сначала мы интегрируем по $^-$ и поперечным компонентам координат вершин в диаграмме,

что дает законы сохранения $^+$ и поперечных компонент импульса. Затем интегрируем по $^+$ и поперечным компонентам импульсов с помощью δ функций. Далее интегрируем по $^-$ компоненте петлевого импульса с помощью вычетов. Последний интеграл по доле $^+$ компоненты петлевого импульса глюона $z = \frac{p_q^+}{p_\gamma^+}$ раскладывается на 2 части

$$\begin{aligned} \int_\alpha^{z_0} dz \phi(z) &\simeq \int_\alpha^{z_0} dz \phi_0(z) + \int_0^{z_0} dz [\phi(z) - \phi_0(z)] \\ &\equiv \int_\alpha^{z_0} dz \phi_0(z) + \int_0^{z_0} dz [\phi(z)]_+, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где в явном виде выделяется ϕ_0 — конечная часть ϕ , так что $\phi(z) = \phi_0(z) + O(\ln z)$ при $z \rightarrow 0$. В части диаграмм конечная часть оставлена в виде одномерного сходящегося интеграла. Расходящаяся по z часть всех диаграмм (первый член во второй строке (2.22)) интегрируется полностью.

Импакт фактор Φ_2 , отвечающий двойному диполю Для удобства здесь приведены расходящиеся части диаграмм на Рисунке 5. Конечные части находятся в приложении Д.

Вклад диаграммы 5 в Φ_2 , с учетом симметризации по $(q \leftrightarrow \bar{q})$ такой:

$$\begin{aligned} \Phi_2^+|_5 &= 2p_\gamma^+ (\bar{u}_{p_q} \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}) \frac{x\bar{x}(\vec{p}_3^2 - \vec{p}_{\bar{q}2}^2 - p_{q1}^2 - 2x\bar{x}Q^2)}{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \\ &\times \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \ln\left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2}\right) + (\bar{u}_{p_q} C_{2||}^5 v_{p_{\bar{q}}}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

для продольно поляризованного фотона и такой

$$\begin{aligned} \Phi_2^i|_5 &= \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \left\{ \bar{u}_{p_q} (p_{q1\perp}^i (1 - 2x) + \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i]) \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}} \right. \\ &\times \left[\frac{1}{p_{q1}^2} \ln\left(\frac{p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right) - \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2}{(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right. \\ &\times \left. \left. \ln\left(\frac{(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2}\right) \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right\} + \bar{u}_{p_q} C_{2\perp}^{5i} v_{p_{\bar{q}}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

для поперечно поляризованного фотона. Вклад диаграммы 6

$$\begin{aligned} \Phi_2^+|_6 = & - \left(\frac{x\bar{x}p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+v_{p_{\bar{q}}})}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \left[4 \ln\left(\frac{\bar{x}}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right)\right) - \frac{3}{\epsilon} \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) \\ & + \bar{u}_{p_q} C_{2||}^6 v_{p_{\bar{q}}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

для продольно поляризованного фотона и

$$\begin{aligned} \Phi_2^i|_6 = & - \left(\frac{\bar{u}_{p_q}(p_{q1\perp}^i(1-2x) + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+v_{p_{\bar{q}}}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \right. \\ & \times \left. \left[2 \ln\left(\frac{\bar{x}}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right)\right) - \frac{3}{2\epsilon} \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) + \bar{u}_{p_q} C_{2\perp}^{6i} v_{p_{\bar{q}}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

для поперечно поляризованного фотона.

В этих выражениях функции C не содержат расходимостей. Сингулярные части содержат расходимость по быстроте в виде $\ln \alpha$. Эти члены должны быть поглощены в перенормированные Вильсоновские линии с помощью уравнения БК. Действительно, в ГП (2.15) вильсоновские линии определены при быстроте $\ln \alpha$. Поэтому необходимо использовать уравнение БК, чтобы найти их на масштабе e^η при начальных условиях на масштабе α , так что

$$U(x, e^\eta) = U(x, \alpha) + \int_\alpha^{e^\eta} d\rho \left(\frac{\partial U(x, \rho)}{\partial \rho} \right). \quad (2.27)$$

Так как правая часть уравнения БК $\sim \alpha_s$ можно заменить $U(x, \alpha)$ на $U(x, e^\eta)$ в свертке вильсоновского оператора и СГП поправки к импакт фактору.

Подставляя (2.27) в (2.15) и используя уравнение БК (2.10), мы получаем дважды дипольный оператор из дипольного оператора:

$$\begin{aligned} \langle T_0^\alpha \rangle^\eta = & \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \Phi_0^\alpha(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \\ & \times \ln\left(\frac{e^\eta}{\alpha}\right) \delta(k_{1\perp} + k_{2\perp} + k_{3\perp} - p_{1\perp} - p_{2\perp}) 2\alpha_s \mu^{2-d} \int \frac{d^d k_{1\perp} d^d k_{2\perp} d^d k_{3\perp}}{(2\pi)^{2d}} \\ & \times \left[- \frac{2(k_{1\perp} - p_{1\perp})(k_{2\perp} - p_{2\perp})}{(k_1 - p_1)_\perp^2 (k_2 - p_2)_\perp^2} \right. \\ & \left. + \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})^2}{\Gamma(d-1)} \left(\frac{\delta(k_{2\perp} - p_{2\perp})}{(-(k_1 - p_1)_\perp^2)^{1-\frac{d}{2}}} + \frac{\delta(k_{1\perp} - p_{1\perp})}{(-(k_2 - p_2)_\perp^2)^{1-\frac{d}{2}}} \right) \right] \\ & \times [tr(U_1 U_3^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)](k_{1\perp}, k_{2\perp}, k_{3\perp}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

После интегрирования по $p_{2\perp}$ и замены переменных имеем

$$\begin{aligned}
\langle T_0^\alpha \rangle^\eta &= \int \frac{d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{3\perp} - p_{\gamma\perp}) \\
&\times \ln\left(\frac{e^\eta}{\alpha}\right) 2\alpha_s \mu^{2-d} \int \frac{d^d p_\perp}{(2\pi)^d} \Phi_0^\alpha(p_{1\perp} + p_\perp, p_{2\perp} + p_{3\perp} - p_\perp) \\
&\times \left[\frac{2(p_\perp(p_\perp - p_{3\perp}))}{p_\perp^2(p - p_3)_\perp^2} + \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})^2}{\Gamma(d-1)} \left(\frac{\delta(p_\perp - p_{3\perp})}{(-p_\perp^2)^{1-\frac{d}{2}}} + \frac{\delta(p_\perp)}{(-(p - p_3)_\perp^2)^{1-\frac{d}{2}}} \right) \right] \\
&\times [tr(U_1 U_3^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)](p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Интегрируя по p_\perp , получаем следующие вычитательные вклады

$$\begin{aligned}
\Phi_{BK}^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) &= -4x\bar{x}p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+v_{p_{\bar{q}}}) \ln\left(\frac{e^\eta}{\alpha}\right) \\
&\times \left[\left(\ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{\epsilon} \right) \left(\frac{-1}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} + \frac{-1}{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{\vec{p}_3^2 - \vec{p}_{q1}^2 - \vec{p}_{\bar{q}2}^2 - 2x\bar{x}Q^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}\vec{p}_3^2Q^2} \\
&\quad \left. \times \ln\left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}\vec{p}_3^2Q^2}\right) \right] \tag{2.30}
\end{aligned}$$

для продольно поляризованного фотона и

$$\begin{aligned}
\Phi_{BK}^i &= -2 \ln\left(\frac{e^\eta}{\alpha}\right) \left\{ \bar{u}_{p_q} \left((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i] \right) \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}} \right. \\
&\times \left[\frac{-1}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left(\ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{\epsilon} \right) + \frac{1}{\vec{p}_{q1}^2} \ln\left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right) \right. \\
&\quad - \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}\vec{p}_3^2Q^2} \\
&\quad \left. \left. \times \ln\left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}\vec{p}_3^2Q^2}\right) \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right\} \tag{2.31}
\end{aligned}$$

для поперечно поляризованного фотона.

В сумме с вкладами диаграмм 5 и 6, приведенными выше, вычитательные вклады сокращают расходимости по быстрой $\ln \alpha$, и мы получаем часть импакт

фактора, относящуюся к дважды дипольному оператору, в виде $\Phi'_2 = \Phi_2 + \Phi_{BK}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_2'^+ &= 2p_\gamma^+ (\bar{u}_{p_q} \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}) \left\{ \frac{x\bar{x}(\vec{p}_3^2 - \vec{p}_{\bar{q}2}^2 - p_{q1}^2 - 2x\bar{x}Q^2)}{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right. \\
&\times \ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right) \ln\left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2}\right) \\
&- \left. \left(\frac{x\bar{x}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \left[2 \ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right) \right) - \frac{3}{2\epsilon} \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) \right\} \\
&+ \bar{u}_{p_q} (C_{2\parallel}^5 + C_{2\parallel}^6) v_{p_{\bar{q}}} \tag{2.32}
\end{aligned}$$

для продольно поляризованного фотона и

$$\begin{aligned}
\Phi_2'^i &= \left\{ \bar{u}_{p_q} (p_{q1\perp}^i (1 - 2x) + \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i]) \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}} \left(\frac{-1}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \right. \right. \\
&\times \left[2 \ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right) \right) - \frac{3}{2\epsilon} \right] + \ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right) \\
&\times \left[\frac{1}{p_{q1}^2} \ln\left(\frac{p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right) - \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2 - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2)} \right. \\
&\times \left. \left. \ln\left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2}\right) \right] \right) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \left. \right\} + \bar{u}_{p_q} (C_{2\perp}^{5i} + C_{2\perp}^{6i}) v_{p_{\bar{q}}} \tag{2.33}
\end{aligned}$$

для поперечно поляризованного фотона.

Тем не менее эти выражения содержат члены $\sim \frac{1}{\epsilon}$, хотя по построению не должны иметь ни инфракрасных (ИК), ни УФ расходимостей, ни сингулярностей по быстроте. Это фиктивные УФ полюса, которые возникают уже в импульсном представлении уравнения БК (2.10). Они появляются при преобразовании Фурье вильсоновского оператора (2.11) в импульсное представление, так как при этом не учитывается, что он равен 0 при $r_3 = r_2$ и $r_3 = r_1$. Это свойство проявляется в свертках (2.11), уничтожая все фиктивные расходимости. Действительно, расходящиеся члены зависят только от \vec{p}_1 и независимы от \vec{p}_3 и \vec{p}_2 (с точностью до перестановки $(1 \leftrightarrow 2)$). Записывая эти члены в виде

$F(p_{1\perp})$ и сворачивая их в соответствие с (2.20), имеем

$$\begin{aligned}
& \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p_{3\perp} \delta(p_{q1} + p_{\bar{q}2} - p_{\gamma\perp} - p_{3\perp}) F(p_{1\perp}) \\
& \quad \times [tr(U_1 U_3^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)](p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \\
& = \int d^d p_{1\perp} d^d p_{3\perp} d^d r_{1\perp} d^d r_{2\perp} d^d r_{3\perp} \\
& \quad \times F(p_{1\perp}) e^{i(r_{1\perp} p_{1\perp}) + i r_{2\perp} (p_{q1\perp} + p_{\bar{q}\gamma\perp}) + i(p_{3\perp} r_{32\perp})} [tr(U_1 U_3^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)] \\
& \sim \int d^d p_{1\perp} d^d r_{1\perp} d^d r_{2\perp} F(p_{1\perp}) e^{i(r_{1\perp} p_{1\perp}) + i r_{2\perp} (p_{q1\perp} + p_{\bar{q}\gamma\perp})} \\
& \quad \times \int d^d r_{3\perp} \delta(r_{32\perp}) [tr(U_1 U_3^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)] = 0. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Таким образом фиктивно расходящийся член

$$F(p_{1\perp}) = \frac{x\bar{x}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \left[2 \ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right) \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2\epsilon} \right] \tag{2.35}$$

не дает вклада в наблюдаемые и может быть отброшен.

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_2'^+ & = 2p_\gamma^+ (\bar{u}_{p_q} \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}) \left\{ \frac{x\bar{x}(\vec{p}_3^2 - \vec{p}_{\bar{q}2}^2 - p_{q1}^2 - 2x\bar{x}Q^2)}{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right. \\
& \quad \times \ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right) \ln\left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2}\right) \\
& \quad \left. + \left(\frac{-2x\bar{x}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right) \ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) \right\} + \bar{u}_{p_q} (C_{2\parallel}^5 + C_{2\parallel}^6) v_{p_{\bar{q}}}, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2'^i & = \left\{ \bar{u}_{p_q} (p_{q1\perp}^i (1 - 2x) + \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i]) \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}} \left(\frac{-2}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \ln\left(\frac{\bar{x}}{e^\eta}\right) \ln\left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2}\right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}}\right) \left[\frac{\ln\left(\frac{p_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2}\right)}{p_{q1}^2} - \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right] \right) \right. \\
& \quad \left. \times \ln\left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2}\right) \right\} + (q \leftrightarrow \bar{q}) \left\{ + \bar{u}_{p_q} (C_{2\perp}^{5i} + C_{2\perp}^{6i}) v_{p_{\bar{q}}} \right. \\
& \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Импакт фактор Φ_1 , отвечающий диполю Вклад диаграмм 2, 3 и диаграммы, получающейся из 3 заменой ($q \leftrightarrow \bar{q}$), имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1^+|_{23} &= -\frac{p_\gamma^+}{p_\gamma^-} \Phi_1^-|_{23} = \frac{x\bar{x}p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+v_{p_{\bar{q}}})}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \\ &\times \left[\left(2 \ln \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right) - 3 \right) \left(\ln \left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2}{x\bar{x}\mu^2 Q^2} \right) + \frac{1}{\epsilon} \right) + \ln^2 \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) - \frac{\pi^2}{3} + 6 \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

для продольного фотона и

$$\begin{aligned} \Phi_1^i|_{23} &= \frac{\bar{u}_{p_q}((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+v_{p_{\bar{q}}}}{2(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)} \left\{ \left(2 \ln \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right) - 3 \right) \right. \\ &\times \left(\ln \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{\mu^2} \right) + \frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) + \frac{1}{\epsilon} \right) \\ &\left. + \ln^2 \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) - \frac{\pi^2}{3} + 6 \right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

для поперечного фотона. Эти диаграммы в сумме калибровочно инвариантны по фотону. Они непосредственно связаны с волновой функцией фотона.

Вклад диаграммы 4

$$\begin{aligned} \Phi_1^+|_4 &= \frac{x\bar{x}p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+v_{p_{\bar{q}}})}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left\{ \ln^2 \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \right. \\ &\left. + 2 \ln \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right) \left(\ln \left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2}{Q^2(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2} \right) + i\pi \right) \right\} + \bar{u}_{p_q} C_{\parallel}^4 v_{p_{\bar{q}}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

для продольного фотона и

$$\begin{aligned} \Phi_1^i|_4 &= \frac{\bar{u}_{p_q}((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+v_{p_{\bar{q}}}}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \right. \\ &\left. + \ln \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right) \left(\frac{Q^2 x\bar{x}}{\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) + \ln \left(\frac{x\bar{x}(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2} \right) + i\pi \right) \right\} \\ &+ \bar{u}_{p_q} C_{\perp}^{4i} v_{p_{\bar{q}}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

для поперечного фотона.

Вклад диаграммы 5

$$\begin{aligned} \Phi_1^+|_5 &= \frac{x\bar{x}p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+v_{p_{\bar{q}}})}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left(2 \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \ln\left(\frac{x\bar{x}Q^4}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \ln^2\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) + \ln^2\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) \right) + \bar{u}_{p_q}C_{1\parallel}^5 v_{p_{\bar{q}}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

для продольного фотона и

$$\begin{aligned} \Phi_1^i|_5 &= -\frac{\bar{u}_{p_q}((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+v_{p_{\bar{q}}}}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left(\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) \right. \\ &\quad \left. + \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \left[\frac{2x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2} \ln\left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}\right) + \ln(x\bar{x}) \right] \right) + \bar{u}_{p_q}C_{1\perp}^{5i} v_{p_{\bar{q}}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

для поперечного фотона.

Вклад диаграммы 6

$$\begin{aligned} \Phi_1^+|_6 &= -\frac{x\bar{x}p_\gamma^+(\bar{u}_{p_q}\gamma^+v_{p_{\bar{q}}})}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \left(\ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \left[\frac{4}{\epsilon} - 2 \ln\left(\frac{x\bar{x}\mu^4}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \ln^2\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) + \ln^2\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) - \frac{6}{\epsilon} \right) + \bar{u}_{p_q}C_{1\parallel}^6 v_{p_{\bar{q}}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

для продольного фотона и

$$\begin{aligned} \Phi_1^i|_6 &= -\frac{\bar{u}_{p_q}((1-2x)p_{q1\perp}^i + \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+v_{p_{\bar{q}}}}{x\bar{x}Q^2 + \vec{p}_{q1}^2} \left(\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) \left[\ln\left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2}{x\bar{x}\mu^4}\right) + \frac{2}{\epsilon} \right] - \frac{3}{\epsilon} \right) + \bar{u}_{p_q}C_{1\perp}^{6i} v_{p_{\bar{q}}}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

для поперечного фотона.

Функции C не содержат расходимостей. Они приведены ниже. Сумма всех вкладов имеет вид

$$\Phi_1^\alpha = \frac{S_V}{2}\Phi_0^\alpha + \Phi_{1R}^\alpha, \quad (2.46)$$

где сингулярный член

$$\begin{aligned} \frac{S_V}{2} &= \left[\ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) - \frac{3}{2} \right] \left[\ln\left(\frac{x\bar{x}\mu^2}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2}\right) - \frac{1}{\epsilon} \right] \\ &\quad + i\pi \ln\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2}\right) - \frac{\pi^2}{6} + 3, \end{aligned} \quad (2.47)$$

и регулярный член

$$\Phi_{1R}^+ = \frac{3}{2}\Phi_0^+ \ln \left(\frac{x^2 \bar{x}^2 \mu^4 Q^2}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2 (\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2} \right) + \bar{u}_{p_q} (C_{\parallel}^4 + C_{1\parallel}^5 + C_{1\parallel}^6) v_{p_{\bar{q}}}, \quad (2.48)$$

и

$$\begin{aligned} \Phi_{1R}^i &= \frac{3}{2}\Phi_0^i \left[\ln \left(\frac{x\bar{x}\mu^4}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2 (\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)} \right) - \frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right] \\ &+ \bar{u}_{p_q} (C_{\perp}^{4i} + C_{1\perp}^{5i} + C_{1\perp}^{6i}) v_{p_{\bar{q}}}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Заметим, что вклад $i\pi \ln \left(\frac{x\bar{x}}{\alpha^2} \right)$ никогда не работает, так как в сечении $\frac{S_V}{2}$ всегда входит в комбинации $\frac{1}{2}(S_V + S_V^*)$.

Легко проверить, что для диаграмм 5 и 6 для любой поляризации фотона,

$$C_1 = C_2|_{\vec{p}_3=\vec{0}}. \quad (2.50)$$

Поэтому в дальнейшем мы приведем выражения только для C_2 в разделе 2.5.

2.3 Импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$

Матричный элемент электромагнитного тока в поле ударной волны имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{M}'^\alpha &= -ie_q \int d^D y_0 \frac{e^{-i(p_\gamma \cdot y_0)}}{\sqrt{2p_\gamma^+}} \sqrt{\frac{2}{N_c^2 - 1}} (t^r)_l^n \\ &\times \langle 0 | T(b_{p_{\bar{q}}}^l (a_{p_q})_n c_{p_g}^r \bar{\psi}(y_0) \gamma^\alpha \psi(y_0) e^{i \int \mathcal{L}_i(z) dz}) | 0 \rangle_{sw}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где c — это оператор уничтожения глюона, оператор $\sqrt{\frac{2}{N_c^2 - 1}} (t^r)_l^n$ выделяет цветовой синглет. Обозначим импульс излученного глюона

$$p_g^\mu = zp_\gamma^+ n_1^\mu + \frac{-p_{g\perp}^2}{2zp_\gamma^+} n_2^\mu + p_{g\perp}^\mu. \quad (2.52)$$

Мы будем работать с матричным элементом \tilde{T}'^α

$$\tilde{M}'^\alpha = \frac{-ie_q}{\sqrt{2p_\gamma^+}} \sqrt{\frac{2}{N_c^2 - 1}} \frac{-i\delta(p_q^+ + p_{\bar{q}}^+ + p_g^+ - p_\gamma^+)}{(2\pi)^{D-3} \sqrt{2p_{\bar{q}}^+} \sqrt{2p_q^+} \sqrt{2p_g^+}} \tilde{T}'^\alpha, \quad (2.53)$$

который после вычитания невзаимодействующей части можно параметризовать так

$$\begin{aligned}
T'^{\alpha} = & g\mu^{-\epsilon} \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \left\{ \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g\gamma\perp}) \Phi_3^{\alpha} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right. \\
& \times [\text{tr}(U_1 U_2^{\dagger}) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp}) + \int \frac{d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g\gamma\perp} - p_{3\perp}) \Phi_4^{\alpha} \\
& \left. \times [\text{tr}(U_1 U_3^{\dagger}) \text{tr}(U_3 U_2^{\dagger}) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^{\dagger})](p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \right\}. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Вклад в T' дают 4 диаграммы, две из которых изображены на Рисунке 6, остальные получаются заменой $p_q \leftrightarrow p_{\bar{q}}$, $\bar{u}_q \leftrightarrow v_{\bar{q}}$, $p_1 \leftrightarrow p_2$ и обращением порядка γ матриц, что мы обозначаем ($q \leftrightarrow \bar{q}$).

Выражения для импакт факторов в D -мерном пространстве для продольного фотона имеют вид

$$\Phi_4^+ = \frac{p_{\gamma}^+ \bar{u}_{p_q} [2x_q g_{\perp}^{\mu\nu} + z(\gamma_{\perp}^{\nu} \gamma_{\perp}^{\mu})] \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}} \varepsilon_{g\perp\mu}^* (z p_{q1\nu\perp} - x_q p_{g3\nu\perp})}{x_q z (x_q + z) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(1-\bar{x})} \right) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}} + \frac{\vec{p}_{g3}^2}{z} \right)} - (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.55)$$

$$\Phi_3^+ = \Phi_4^+|_{p_3=0} + \left(- \frac{z p_{\gamma}^+ \bar{u}_{p_q} \hat{\varepsilon}_g^* (\hat{p}_q + \hat{p}_g) \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}}}{x_q (\vec{p}_g - \frac{z}{x_q} \vec{p}_q)^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q+z)} \right)} - (q \leftrightarrow \bar{q}) \right). \quad (2.56)$$

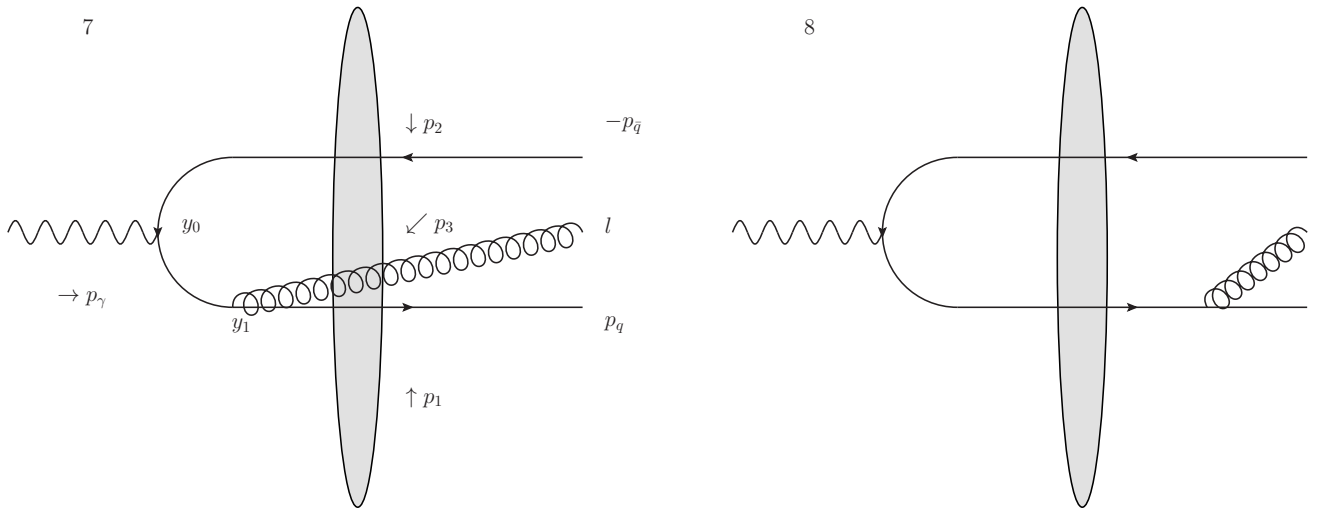


Рис. 6: Диаграммы для импакт фактора перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$. Импульсы p_1 , p_2 и p_3 передаются от ударной волны кварку, антикварку и глюону.

Для поперечного фотона

$$\Phi_{4\perp}^i = \frac{\epsilon_{g\perp\mu}^* \bar{u}_{p_q} \gamma^+}{2x_q \bar{x}_q (x_q + z) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(1-x_{\bar{q}})} \right) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}} + \frac{\vec{p}_{g3}^2}{z} \right)} \quad (2.57)$$

$$\times \left[x_q x_{\bar{q}} Q^2 (\gamma_{\perp}^{\mu} \gamma_{\perp}^i) + (\hat{p}_{q1\perp} \gamma_{\perp}^{\mu} \gamma_{\perp}^i \hat{p}_{\bar{q}2\perp}) + 4 \frac{x_q}{z} p_{\bar{q}2\perp}^i (x_{\bar{q}} p_{g3\perp}^{\mu} - z p_{\bar{q}2\perp}^{\mu}) \right. \\ \left. - 2 \frac{x_q}{z} p_{g3\perp}^{\mu} (\gamma_{\perp}^i \hat{p}_{\bar{q}2\perp}) + 2x_q p_{\bar{q}2\perp}^i (\hat{p}_{\bar{q}2\perp} \gamma_{\perp}^{\mu}) - 2x_{\bar{q}} p_{\bar{q}2\perp}^i (\hat{p}_{q1\perp} \gamma_{\perp}^{\mu}) \right] v_{p_{\bar{q}}} - (q \leftrightarrow \bar{q}),$$

$$\Phi_3^i = \Phi_4^i|_{p_3=0} + \left(- \frac{z \bar{u}_{p_q} \hat{\epsilon}_g^* (\hat{p}_q + \hat{p}_g) \gamma^+ (\gamma_{\perp}^i \hat{p}_{\bar{q}2\perp} - 2x_{\bar{q}} p_{\bar{q}2\perp}^i) v_{p_{\bar{q}}}}{2x_q x_{\bar{q}} (1-x_{\bar{q}}) (\vec{p}_g - \frac{z}{x_q} \vec{p}_q)^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(1-x_{\bar{q}})} \right)} - (q \leftrightarrow \bar{q}) \right). \quad (2.58)$$

В координатном представлении и в спиральном базисе эти импакт факторы были вычислены в [70].

2.4 Импакт-фактор перехода $\gamma^* \rightarrow V_L$

В ГП амплитуда рождения мезона представима в виде матричного элемента оператора \mathcal{A}_{LO}^{η} в обкладках конечного и начального адронных состояний. Этот оператор выражается через свертку дипольного оператора, жесткой части Φ_0 , которая в этом разделе называется импакт фактором, и амплитуды распределения. Амплитуда распределения φ твиста 2 для продольно поляризованного векторного мезона V_L определяется с помощью нелокального оператора на световом конусе, перенормированного на масштабе μ_F

$$\langle V_L(p_V) | \bar{\Psi}(y) \gamma^{\mu} \Psi(0) | 0 \rangle_{y^2 \rightarrow 0} = f_V p_V^{\mu} \int_0^1 dx e^{ix(p_V \cdot y)} \varphi(x, \mu_F), \quad (2.59)$$

где мы опустили вильсоновскую линию, соединяющую точки y и 0 на световом конусе, так как в нашей светоконусной калибровке она тождественно равна 1.

Оператор \mathcal{A}_{LO}^{η} имеет вид

$$\mathcal{A}_{LO}^{\eta} \equiv - \frac{e_V f_V \varepsilon_{\beta}}{N_c} \int_0^1 dx \varphi(x, \mu_F) \int \frac{d^d \vec{p}_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{p}_2}{(2\pi)^d}$$

$$\begin{aligned}
& \times (2\pi)^{d+1} \delta(p_V^+ - p_\gamma^+) \delta(\vec{p}_V - \vec{p}_\gamma - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
& \times \Phi_0^\beta(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2) \left[\text{Tr}(U_1^\eta U_2^{\eta\dagger}) - N_c \right] (\vec{p}_1, \vec{p}_2). \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Здесь ε_β — это вектор поляризации фотона, f_V — константа связи мезона, связанная с распадом на лептоны, e_V — электрический заряд кварка, зависящий от флейворного состава мезона. Для ρ_0 он равен $e_V = \frac{e_u - e_d}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}$. Φ_0 получается вычислением диаграммы 1 на Рисунке 7, используя эффективные внешние линии в поле ударной волны, приведенные в 1.1–1.2.

На практике для получения полной физической амплитуды необходимо решение уравнения БК (JIMWLK) в обкладках конечного и начального адронных состояний. Так для рассеяния на протоне амплитуда в ГЛП $A_{LO}^\eta \equiv \langle P' | \mathcal{A}_{LO}^\eta | P \rangle$ выразится через матричный элемент дипольного оператора

$$\langle P' | [\text{Tr}(U_1^\eta U_2^{\eta\dagger}) - N_c] (\vec{p}_1, \vec{p}_2) | P \rangle. \tag{2.61}$$

В СГП вклад также дает оператор двойного диполя и можно определить оператор \mathcal{A}_{NLO}^η

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{NLO}^\eta & \equiv -\frac{e_V f_V \varepsilon_\beta}{N_c} \int_0^1 dx \varphi(x, \mu_F) \frac{\alpha_s \Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \\
& \times \int \frac{d^d \vec{p}_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{p}_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{p}_3}{(2\pi)^d} (2\pi)^{d+1} \delta(p_V^+ - p_\gamma^+) \delta(\vec{p}_V - \vec{p}_\gamma - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \\
& \times \left\{ \Phi_2^\beta(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \left[\text{Tr}(U_1^{\eta\dagger} U_3^{\eta\dagger}) \text{Tr}(U_3^{\eta\dagger} U_2^{\eta\dagger}) - N_c \text{Tr}(U_1^\eta U_2^{\eta\dagger}) \right] (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \right. \\
& \left. + \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \Phi_1^\beta(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2) \left[\text{Tr}(U_1^\eta U_2^{\eta\dagger}) - N_c \right] (\vec{p}_1, \vec{p}_2) (2\pi)^d \delta(\vec{p}_3) \right\}. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Явные выражения для Φ_1 и Φ_2 вычислены ниже (2.73-2.74). Как и в ГП при рассеянии на протоне необходимо также вычислить матричный элемент

$$\langle P' | [\text{Tr}(U_1^{\eta\dagger} U_3^{\eta\dagger}) \text{Tr}(U_3^{\eta\dagger} U_2^{\eta\dagger}) - N_c \text{Tr}(U_1^\eta U_2^{\eta\dagger})] (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) | P \rangle. \tag{2.63}$$

Для построения сечений необходимо свернуть Φ_1 и Φ_2 с матричными элементами (2.61, 2.63), полученными как решения JIMWLK в СГП с начальными

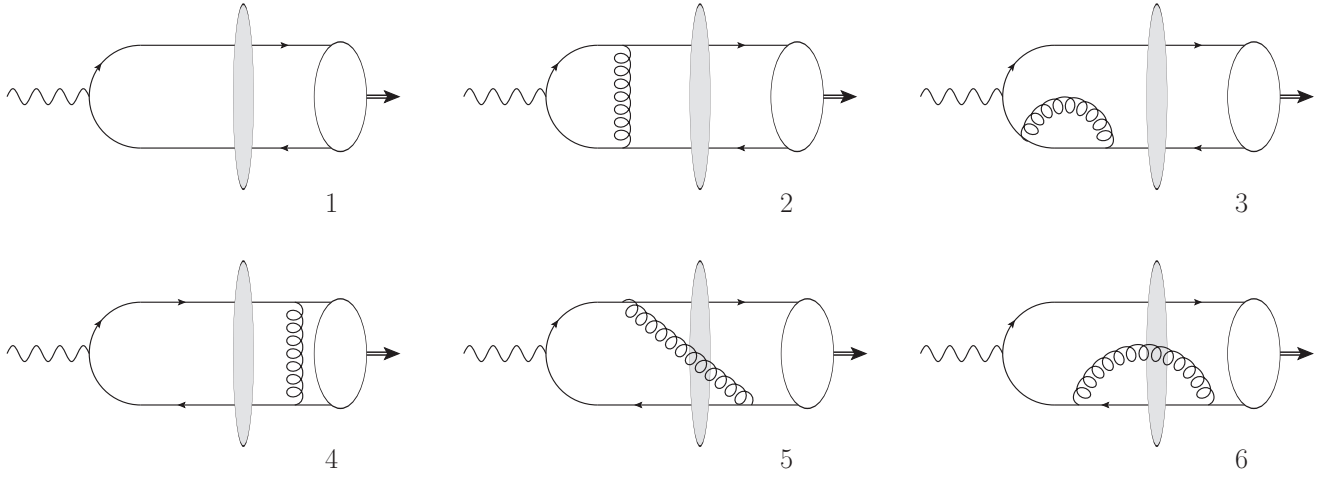


Рис. 7: Вклады в импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow V_L$. Серый эллипс обозначает ударную волну, белый — амплитуду распределения рожденного векторного мезона.

условиями при быстроте η_0 с $p_{\text{target}}^+ = e^{\eta_0} p_\gamma^+$. При этом

$$\eta - \eta_0 = \ln \frac{s}{s_0}, \quad (2.64)$$

где $s_0 \sim p_{\text{target}}^+ p_{\text{target}}^- \ll s$ — это типичный масштаб мишени.

В (2.62) в Φ_2 дают вклад диаграммы 5 и 6 (и диаграммы в которые они переходят при замене $q \leftrightarrow \bar{q}$) с $\vec{p}_3 \neq \vec{0}$, см. Рисунок 7. Φ_1 — это сумма вклада этих диаграмм при $\vec{p}_3 = \vec{0}$ и вклада диаграмм 2, 3 (и диаграмм в которые они переходят при замене $q \leftrightarrow \bar{q}$) и 4. С учетом калибровочной инвариантности по фотону имеем для $i = 0, 1, 2$

$$\varepsilon_L \cdot \Phi_i = \frac{Q}{p_\gamma^+} \Phi_i^+ \quad \text{и} \quad \varepsilon_T \cdot \Phi_i = \varepsilon_\perp \cdot \Phi_{i\perp}. \quad (2.65)$$

Коллинеарная расходимость Вычисление всех диаграмм на Рисунке 7 кроме диаграммы 4 полностью повторяет вычисление импакт фактора рождения $q\bar{q}$ пары, представленное выше. Вклад диаграммы 4 для коллинеарных конечных кварка и антикварка содержит дополнительную коллинеарную расходимость. Ее необходимо сократить с помощью уравнения эволюции Ефремова-

Радюшкина-Бродского-Лепаж (ЕРБЛ) для амплитуды распределения φ твиста 2. В схеме \overline{MS} оно имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(x, \mu_F)}{\partial \ln \mu_F^2} = \frac{\alpha_s C_F \Gamma(1 - \epsilon)}{2\pi (4\pi)^\epsilon} \left(\frac{\mu_F^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \int_0^1 dz \varphi(z, \mu_F) \mathcal{K}(x, z), \quad (2.66)$$

где $C_F \equiv (N_c^2 - 1)/(2N_c)$ — это оператор Казимира в фундаментальном представлении $SU(N_c)$ и $\mathcal{K}(x, z)$ — это ядро ЕРБЛ [85, 86, 87]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, z) &= \frac{1-x}{1-z} \left(1 + \left[\frac{1}{x-z} \right]_+ \right) \theta(x-z) \\ &+ \frac{x}{z} \left(1 + \left[\frac{1}{z-x} \right]_+ \right) \theta(z-x) + \frac{3}{2} \delta(z-x). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь для функции $F(z)$, которая ведет себя как $F_0 + F_1 \ln(z - z_0)$ при $z \rightarrow z_0$, $+$ прескрипция определена так

$$\int_0^1 dz \left[\frac{1}{z - z_0} \right]_+ F(z) \equiv \int_0^1 dz \frac{F(z) - F_0 - F_1 \ln(z - z_0)}{z - z_0}. \quad (2.68)$$

Интегрируя амплитуду распределения в ГП от 0 до μ_F , мы получаем контрчлен для дипольного вклада в СГП, который имеет вид

$$\tilde{\Phi}_1^\beta(x, \mu_F) = - \int_0^1 dz \mathcal{K}(z, x) \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu_F^2}{\mu^2} \right) \right] \Phi_0^\beta(z). \quad (2.69)$$

Результаты Импакт фактор в ГП имеет вид

$$\Phi_0^+(x) = \frac{2x\bar{x} (p_V^+)^2}{(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2}, \quad \Phi_{0\perp}^\beta(x) = \frac{(x - \bar{x})p_V^+(\bar{x}p_{1\perp}^\beta - xp_{2\perp}^\beta)}{(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2}, \quad (2.70)$$

где $\bar{x} \equiv 1 - x$.

Сумма дипольного вклада всех диаграмм и контрчлена (2.69), описывающего эволюцию амплитуды распределения с помощью уравнения ЕРБЛ, конечна. Она имеет вид

$$\Phi_1^+(x) = \int_0^x dz \left(\frac{x-z}{x} \right) \Phi_0^+(x-z)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 + \left(1 + \left[\frac{1}{z} \right]_+ \right) \ln \left(\frac{\left(((\bar{x} + z)\vec{p}_1 - (x - z)\vec{p}_2)^2 + (x - z)(\bar{x} + z)Q^2 \right)^2}{\mu_F^2(x - z)(\bar{x} + z)Q^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2}\Phi_0^+(x) \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) + 3 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{((\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2)^2}{x\bar{x}\mu_F^2Q^2} \right) \right] \\
& + \frac{(p_\gamma^+)^2}{2x\bar{x}} \int_0^x dz \left[(\phi_5)_{LL} |_{\vec{p}_3=\vec{0}} + (\phi_6)_{LL} |_{\vec{p}_3=\vec{0}} \right]_+ + (x \leftrightarrow \bar{x}, \vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2) \quad (2.71)
\end{aligned}$$

для продольного фотона и

$$\begin{aligned}
\Phi_{1\perp}^\beta(x) &= \frac{1}{4} \left[\ln^2 \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) - \frac{\pi^2}{3} + 6 - 3 \ln \left(\frac{((\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2)}{\mu_F^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + 3 \frac{x\bar{x}Q^2}{(\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2} \ln \left(\frac{((\bar{x}\vec{p}_1 - x\vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2} \right) \right] \Phi_{0\perp}^\beta(x) \\
& \quad + \int_0^x dz \left(\frac{x - z}{x} \right) \Phi_{0\perp}^\beta(x - z) \left[1 + \left(1 + \left[\frac{1}{z} \right]_+ \right) \right. \\
& \quad \left. \times \ln \left(\frac{((\bar{x} + z)\vec{p}_1 - (x - z)\vec{p}_2)^2 + (x - z)(\bar{x} + z)Q^2}{\mu_F^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(1 + \left[\frac{1}{z} \right]_+ \right) \frac{(x - z)(\bar{x} + z)Q^2}{((\bar{x} + z)\vec{p}_1 - (x - z)\vec{p}_2)^2} \right. \\
& \quad \left. \times \ln \left(\frac{((\bar{x} + z)\vec{p}_1 - (x - z)\vec{p}_2)^2 + (x - z)(\bar{x} + z)Q^2}{(x - z)(\bar{x} + z)Q^2} \right) \right] \\
& \quad + \frac{p_\gamma^+}{2x\bar{x}} \int_0^x dz \left[(\phi_5)_{TL}^\beta |_{\vec{p}_3=\vec{0}} + (\phi_6)_{TL}^\beta |_{\vec{p}_3=\vec{0}} \right]_+ + (x \leftrightarrow \bar{x}, \vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2) \quad (2.72)
\end{aligned}$$

для поперечного фотона. Величины $(\phi_{5,6})_{LL}$ и $(\phi_{5,6})_{TL}^\beta$ приведены в приложении Д, где необходимо переобозначить импульсы $(\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}) \rightarrow (x\vec{p}_V, \bar{x}\vec{p}_V)$ и $\mu \rightarrow \mu_F$. $[\phi]_+$ обозначает конечный член, получающийся после применения $+$ прескрипции, определенной в (2.68), к полюсу $\frac{1}{z}$ в ϕ . Зависимость от масштаба регуляризации μ полностью сокращается. Масштаба перенормировки также нет, так как поправки, связанные с бегом константы связи, возникают в импакт факторе только в следующем приближении.

В результате

$$\begin{aligned}
\Phi_2^+ = & -\frac{x\bar{x} (p_\gamma^+)^2 \left((x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + (\bar{x}\vec{p}_V - \vec{p}_2)^2 - \vec{p}_3^2 + 2x\bar{x}Q^2 \right)}{\left((x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) \left((\bar{x}\vec{p}_V - \vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) - x\bar{x}\vec{p}_3^2 Q^2} \\
& \times \ln \left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}} \right) \ln \left(\frac{\left((x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) \left((\bar{x}\vec{p}_V - \vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2 \right)}{x\bar{x}\vec{p}_3^2 Q^2} \right) \\
& - \frac{4x\bar{x} (p_\gamma^+)^2}{(x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2} \ln \left(\frac{\bar{x}}{e^\eta} \right) \ln \left(\frac{\vec{p}_3^2}{Q^2} \right) \\
& + \frac{(p_\gamma^+)^2}{2x\bar{x}} \int_0^x dz [(\phi_5)_{LL} + (\phi_6)_{LL}]_+ + (x \leftrightarrow \bar{x}, \vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

для продольного фотона и

$$\begin{aligned}
\Phi_{2\perp}^\beta(x) = & p_\gamma^+ (xp_{V\perp}^\beta - p_{1\perp}^\beta) (\bar{x} - x) \left(\frac{-2 \ln \left(\frac{\vec{p}_3^2}{Q^2} \right) \ln \left(\frac{\bar{x}}{e^\eta} \right)}{(x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2} \right. \\
& + \ln \left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}} \right) \left[\frac{1}{(x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2} \ln \left(\frac{(x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2} \right) \right. \\
& \left. \left. \left. \left((\bar{x}\vec{p}_V - \vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) \ln \left(\frac{\left((x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) \left((\bar{x}\vec{p}_V - \vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) \right)}{x\bar{x}\vec{p}_3^2 Q^2} \right) \right] \right) \\
& \left. \frac{1}{\left((x\vec{p}_V - \vec{p}_1)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) \left((\bar{x}\vec{p}_V - \vec{p}_2)^2 + x\bar{x}Q^2 \right) - x\bar{x}\vec{p}_3^2 Q^2} \right) \\
& + \frac{p_\gamma^+}{2x\bar{x}} \int_0^x dz \left[(\phi_5)_{TL}^\beta + (\phi_6)_{TL}^\beta \right]_+ + (x \leftrightarrow \bar{x}, \vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

для поперечного фотона.

Обсуждение Явной проверкой можно показать, что (2.73, 2.74) конечны в пределе $Q^2 = 0$ не смотря на наличие членов $\ln Q^2$, которые сокращают друг друга.

Уравнения эволюции для операторов вильсоновских линий суммируют вклады $\alpha_s^n \ln^n 1/x$ и $\alpha_s^n \ln^{n-1} 1/x$, при этом не учтены степенные поправки $\sim \Lambda^2/Q^2$, где Λ — это непертурбативный масштаб, характерный для векторного мезона.

Полученные здесь результаты справедливы для произвольной кинематики. В пределе нулевой передачи импульса при линеаризации дважды дипольного оператора для продольно поляризованного фотона их можно сравнить с результатом [89], полученным в рамках подхода БФКЛ. Это сравнение нетривиально из-за различного распределения радиационных поправок между ядром импакт факторами в подходах БФКЛ и ВЭОР.

Итак, здесь представлен импакт фактор перехода $\gamma_{L,T}^{(*)} \rightarrow V_L$ в СГП в рамках ВЭОР. Это вычисление не только позволит детально изучать процессы насыщения при малых x , но и понять различия в описании фоторождения между ВЭОР и подходом, основанном на партонных распределениях, зависящих от поперечного импульса (ТМД) в общей кинематической области.

Полученный результат, свернутый с решениями JIMWLK и ЕРБЛ в СГЛП, впервые позволит провести полный анализ дифракционного фоторождения легкого продольно поляризованного векторного мезона в СГЛП.

2.5 Построение сечения $\gamma^* P \rightarrow q\bar{q}P'$

Определим матричный элемент A_3 так, что сечение $\gamma^* P \rightarrow q\bar{q}P'$ имеет вид

$$d\sigma = \frac{1}{8s} (2\pi)^D \delta^{(D)}(p_\gamma + p_0 - p_q - p_{\bar{q}} - p'_0) |A_3|^2 d\rho_3. \quad (2.75)$$

Нам необходима параметризация матричных элементов вильсоновских линий в поле протона

$$\langle P'(p'_0) | T(\text{tr}(U_{\frac{z_\perp}{2}} U_{-\frac{z_\perp}{2}}^\dagger) - N_c) | P(p_0) \rangle \equiv 2\pi \delta(p_{00'}^-) F_{p_{0\perp} p'_{0\perp}}(z_\perp) \equiv 2\pi \delta(p_{00'}^-) F(z_\perp), \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} & \langle P'(p'_0) | T(\text{tr}(U_{\frac{z_\perp}{2}} U_x^\dagger) \text{tr}(U_x U_{-\frac{z_\perp}{2}}^\dagger) - N_c \text{tr}(U_{\frac{z_\perp}{2}} U_{-\frac{z_\perp}{2}}^\dagger)) | P(p_0) \rangle \\ & \equiv 2\pi \delta(p_{00'}^-) \tilde{F}_{p_{0\perp} p'_{0\perp}}(z_\perp, x_\perp) \equiv 2\pi \delta(p_{00'}^-) \tilde{F}(z_\perp, x_\perp). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Здесь мы опустили $p_{0\perp}$ и $p'_{0\perp}$, чтобы не перегружать обозначения. Также мы используем следующую нормировку протонных состояний

$$\langle P'(p'_0)|P(p_0)\rangle = (2\pi)^{D-1}\delta(p_{00'}^-)\delta_{\perp}^{D-2}(p_{00'\perp})\delta_{s_P s_{P'}}. \quad (2.78)$$

Соответствующие преобразования Фурье имеют вид

$$\int d^d z_{\perp} e^{i(z_{\perp}\cdot p_{\perp})} F(z_{\perp}) \equiv \mathbf{F}(p_{\perp}), \quad (2.79)$$

$$\int d^d z_{\perp} d^d x_{\perp} e^{i(p_{\perp}\cdot x_{\perp})+i(z_{\perp}\cdot q_{\perp})} \tilde{F}(z_{\perp}, x_{\perp}) \equiv \tilde{\mathbf{F}}(q_{\perp}, p_{\perp}). \quad (2.80)$$

Эти адронные матричные элементы естественным образом возникают, если рассмотреть дипольный и дважды дипольный операторы в протонных обкладках и выделить дельта функции, отвечающие сохранению энергии-импульса. Дипольный матричный элемент имеет вид

$$\begin{aligned} \langle P'(p'_0)|T(\text{tr}(U_1 U_2^{\dagger}) - N_c)[p_{1\perp}, p_{2\perp}]|P(p_0)\rangle &= (2\pi)^d \delta(p_{1\perp} + p_{2\perp} + p_{0'0\perp}) \\ &\times \int d^d z_{\perp} e^{i\frac{(z_{\perp}\cdot p_{12\perp})}{2}} \langle P'(p'_0)|T(\text{tr}(U_{\frac{z_{\perp}}{2}} U_{-\frac{z_{\perp}}{2}}^{\dagger}) - N_c)|P(p_0)\rangle. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Дважды дипольный матричный элемент имеет вид

$$\begin{aligned} \langle P'(p'_0)|T(\text{tr}(U_1 U_3^{\dagger})\text{tr}(U_3 U_2^{\dagger}) - N_c \text{tr}(U_1 U_2^{\dagger})) [p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}]|P(p_0)\rangle \\ = (2\pi)^d \delta(p_{1\perp} + p_{2\perp} + p_{3\perp} + p_{0'0\perp}) \int d^d z_{\perp} d^d x_{\perp} e^{i\frac{(z_{\perp}\cdot p_{12\perp})}{2} + i(p_{3\perp}\cdot x_{\perp})} \\ \times \langle P'(p'_0)|T(\text{tr}(U_{\frac{z_{\perp}}{2}} U_x^{\dagger})\text{tr}(U_x U_{-\frac{z_{\perp}}{2}}^{\dagger}) - N_c \text{tr}(U_{\frac{z_{\perp}}{2}} U_{-\frac{z_{\perp}}{2}}^{\dagger}))|P(p_0)\rangle. \end{aligned} \quad (2.82)$$

В нашей кинематике законы сохранения и фазовый объем выражаются так

$$\begin{aligned} \delta^{(D)}(p_{\gamma} + p_0 - p_q - p_{\bar{q}} - p'_0) &= \delta(p_{00'}^-)\delta(p_q^+ + p_{\bar{q}}^+ - p_{\gamma}^+) \\ &\times \delta^{(d)}(p_{q\perp} + p_{\bar{q}\perp} - p_{\gamma\perp} + p_{0'0\perp}), \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$d\rho_3 = \frac{dp_q^+ d^d p_{q\perp}}{2p_q^+ (2\pi)^{d+1}} \frac{dp_{\bar{q}}^+ d^d p_{\bar{q}\perp}}{2p_{\bar{q}}^+ (2\pi)^{d+1}} \frac{dp_0'^- d^d p_{0\perp}'}{2p_0'^- (2\pi)^{d+1}}. \quad (2.84)$$

Матричный элемент A_3 содержит вклады диполя в ГП и СГП и двойного диполя в СГП:

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{-2p_0^- e_q \varepsilon_\alpha}{\sqrt{N_c} (2\pi)^{D-2}} \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \\
&\times \left[\delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \left\{ \Phi_0^\alpha + \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon) N_c^2 - 1}{(4\pi)^{1+\epsilon} N_c} \Phi_1^\alpha \right\} \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \right. \\
&\left. + \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \int \frac{d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp} - p_{3\perp}) \Phi_2^\alpha \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \right]. \quad (2.85)
\end{aligned}$$

Так как фотон в начальном состоянии может находиться в различных спиновых состояниях, мы строим матрицу плотности

$$d\sigma_{JI} = \begin{pmatrix} d\sigma_{LL} & d\sigma_{LT} \\ d\sigma_{TL} & d\sigma_{TT} \end{pmatrix}, \quad d\sigma_{TL} = d\sigma_{LT}^*. \quad (2.86)$$

Каждый элемент этой матрицы имеет борновский вклад $d\sigma_0$, вклад СГП $d\sigma_1$ с двумя дипольными операторами и вклад СГП $d\sigma_2$ с дипольным и дважды дипольным операторами.

$$d\sigma_{JI} = d\sigma_{0JI} + d\sigma_{1JI} + d\sigma_{2JI}. \quad (2.87)$$

Борновское сечение имеет вид

$$\begin{aligned}
d\sigma_{0JI} &= \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2 (p_0^-)^2}{(2\pi)^{4d} N_c 4x\bar{x}s^2} dx d\bar{x} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) (\varepsilon_{I\beta} \varepsilon_{J\gamma}^*) \\
&\times \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p_{1'\perp} d^d p_{2'\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \\
&\times \Phi_0^\beta(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_0^{\gamma*}(p_{1'\perp}, p_{2'\perp}) \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right). \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Вклад СГП с 2 диполями

$$\begin{aligned}
d\sigma_{1JI} &= \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right) \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2 (p_0^-)^2}{(2\pi)^{4d} N_c 4x\bar{x}s^2} dx d\bar{x} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \\
&\times \delta(1-x-\bar{x}) (\varepsilon_{I\beta} \varepsilon_{J\gamma}^*) \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p_{1'\perp} d^d p_{2'\perp} \\
&\times \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \\
&\times \left[\Phi_1^\beta(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_0^{\gamma*}(p_{1'\perp}, p_{2'\perp}) + \Phi_0^\beta(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_1^{\gamma*}(p_{1'\perp}, p_{2'\perp}) \right]. \quad (2.89)
\end{aligned}$$

Чтобы выделить в этом вкладе конечную часть, необходимо заменить Φ_1 в (2.89) на Φ_{1R} из (2.46) и положить $\epsilon = 0$. Оставшаяся расходящаяся часть имеет вид

$$(d\sigma_{1JI})_{div} = \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \right) (S_V + S_V^*) d\sigma_{0JI}. \quad (2.90)$$

Заменяя Φ_2 регуляризованным вкладом Φ'_2 из (2.36, 2.37), который содержит вычитательное слагаемое, получаем конечный вклад в СГП с дипольным и дважды дипольным операторами

$$\begin{aligned} d\sigma_{2JI} = & \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \frac{\alpha_{em} Q_q^2}{(2\pi)^{4(d-1)} N_c} \frac{(p_0^-)^2}{2x\bar{x}s^2} dx d\bar{x} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) (\varepsilon_{I\beta} \varepsilon_{J\gamma}^*) \\ & \times \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p_{1'\perp} d^d p_{2'\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp}) \delta(p_{3'\perp}) \\ & \times \frac{d^d p_{3\perp} d^d p_{3'\perp}}{(2\pi)^d} \left[\Phi_2'^{\beta} (p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_0^{\gamma*} (p_{1'\perp}, p_{2'\perp}) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \right. \\ & \left. + \Phi_2'^{\gamma*} (p_{1'\perp}, p_{2'\perp}, p_{3'\perp}) \Phi_0^{\beta} (p_{1\perp}, p_{2\perp}) \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \tilde{\mathbf{F}}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}, p_{3'\perp} \right) \delta(p_{3\perp}) \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

В этом выражении можно положить $\epsilon = 0$.

2.5.1 Борновское сечение $d\sigma_0$

Используя (2.18) и (2.19) и суммируя по спиральностям кварка и антикварка, получаем

$$\sum_{\text{helicities}} \Phi_0^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_0^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}) = \frac{32(p_\gamma^+)^4 x^3 \bar{x}^3}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)}, \quad (2.92)$$

$$\sum_{\text{helicities}} \Phi_0^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_0^i(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* = \frac{16(p_\gamma^+)^3 x^2 \bar{x}^2 p_{q1'\perp}^i (1-2x)}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)}, \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{helicities}} \Phi_0^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_0^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* \\ & = \frac{8(p_\gamma^+)^2 x \bar{x} [(1-2x)^2 g_\perp^{ri} g_\perp^{lk} - g_\perp^{rk} g_\perp^{li} + g_\perp^{rl} g_\perp^{ik}] p_{q1\perp r} p_{q1'\perp l}}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

В результате

$$d\sigma_{0LL} = \frac{2\alpha_{\text{em}}Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) x^2 \bar{x}^2 Q^2 \times \left| \int \frac{d^2 p_{1\perp}}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \mathbf{F}(p_{1q\perp} + \frac{p_{q\bar{q}\perp}}{2}) \right|^2, \quad (2.95)$$

$$d\sigma_{0TL} = \frac{\alpha_{\text{em}}Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) x\bar{x}(1-2x)Q \times \left[\int \frac{d^2 p_{1\perp}}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \mathbf{F}(p_{1q\perp} + \frac{p_{q\bar{q}\perp}}{2}) \right] \left[\int \frac{d^2 p'_{1\perp}(\varepsilon_{\perp} \cdot p_{q1'\perp})}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \mathbf{F}(p_{1'q\perp} + \frac{p_{q\bar{q}\perp}}{2}) \right]^*, \quad (2.96)$$

$$d\sigma_{0TT} = \frac{\alpha_{\text{em}}Q_q^2}{2(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) [(1-2x)^2 g_{\perp}^{ki} g_{\perp}^{lj} - g_{\perp}^{kj} g_{\perp}^{li} + g_{\perp}^{kl} g_{\perp}^{ij}] \times \left[\int \frac{d^2 p_{1\perp}(\varepsilon_{\perp i} p_{q1\perp k})}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \mathbf{F}(p_{1q\perp} + \frac{p_{q\bar{q}\perp}}{2}) \right] \left[\int \frac{d^2 p'_{1\perp}(\varepsilon_{\perp j} p_{q1'\perp l})}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \mathbf{F}(p_{1'q\perp} + \frac{p_{q\bar{q}\perp}}{2}) \right]^*. \quad (2.97)$$

2.5.2 Диполь - дипольный вклад в СГП $d\sigma_1$

LL переход Собирая (2.89), (2.46) и (2.18) и суммируя по поляризациям $\varepsilon^+ \Phi_0^- + \varepsilon^- \Phi_0^+$ с помощью условия калибровочной инвариантности $\Phi_0^- = \frac{Q^2}{2(p_{\gamma}^+)^2} \Phi_0^+$, имеем

$$d\sigma_{1LL} = \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \right) (S_V + S_V^*) d\sigma_{0LL} + \frac{\alpha_s Q^2}{8\pi} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right) \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) \times \int d^2 p_{1\perp} d^2 p_{2\perp} d^2 p'_{1\perp} d^2 p'_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}) \frac{\delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp})}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \times \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \left[\frac{6x^2 \bar{x}^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \ln \left(\frac{x^2 \bar{x}^2 \mu^4 Q^2}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2 (\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2} \right) + \frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_{\gamma}^+} \text{tr}((C_{\parallel}^4 + C_{\parallel}^5 + C_{\parallel}^6) \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) \right] + h.c. \quad (2.98)$$

Мы параметризуем конечные части C следующим образом

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_\gamma^+} \text{tr}(C_{\parallel}^4 \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_4)_{LL}]_+ + (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.99)$$

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_\gamma^+} \text{tr}(C_{\parallel}^n \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_n)_{LL}]_+ |_{\vec{p}_3=0} + (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.100)$$

где $n = 5$ и 6 . Выражения для $(\phi_n)_{LL}$ даны в приложении Д. Для $n = 6$ интеграл берется аналитически

$$\begin{aligned} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_\gamma^+} \text{tr}(C_{\parallel}^6 \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) &= \frac{-2x^2 \bar{x}^3 \vec{p}_1^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2)^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}Q^2 + \vec{p}_{q1}^2}{\bar{x}\vec{p}_1^2} \right) \\ &+ \frac{2x^2 \bar{x}^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left[4 \text{Li}_2 \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) + 3 \ln \left(\frac{\vec{p}_1^2}{\mu^2} \right) - 8 \right] \\ &+ \frac{2x^2 \bar{x}^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2} \left[3 \ln \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{\bar{x}\vec{p}_1^2} \right) + 1 \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

LT переход

$$\begin{aligned} d\sigma_{1TL} &= \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \right) (S_V + S_V^*) d\sigma_{0TL} \\ &+ \frac{\alpha_s Q}{8\pi} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right) \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) \varepsilon_{Ti}^* \\ &\times \int d^2 p_{1\perp} d^2 p_{2\perp} d^2 p'_{1\perp} d^2 p'_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \\ &\times \left[\frac{(p_0^-)^2}{s^2} \frac{\text{tr}((C_{\perp}^{4i} + C_{1\perp}^{5i} + C_{1\perp}^{6i}) \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q)^\dagger}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} + \frac{3x\bar{x}(1-2x)p_{q1'\perp}^i}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)} \right. \\ &\times \left(\ln \left(\frac{x^3 \bar{x}^3 \mu^8 Q^2 (x\bar{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\bar{p}_q)^{-4}}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)^2 (\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)} \right) - \frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1'}^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right) \\ &\left. + \frac{(p_0^-)^2}{s^2} \frac{\text{tr}((C_{\parallel}^4 + C_{1\parallel}^5 + C_{1\parallel}^6) \hat{p}_{\bar{q}} (\gamma^i \hat{p}_{q1'\perp} - 2x p_{q1'\perp}^i) \gamma^+ \hat{p}_q)}{2p_\gamma^+ x\bar{x} (\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Здесь

$$\frac{(p_0^-)^2 \text{tr}(C_{\parallel}^4 \hat{p}_{\bar{q}} ((1-2x)p_{q1'\perp}^i - \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma_\perp^i]) \gamma^+ \hat{p}_q)}{s^2 p_\gamma^+} = \int_0^x dz [(\phi_4)_{LT}^i]_+ + (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(p_0^-)^2 \text{tr}(C_{1||}^n \hat{p}_{\bar{q}}((1-2x)p_{q1'\perp}^i - \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+ \hat{p}_q)}{s^2 p_\gamma^+} \\ &= \int_0^x dz [(\phi_n)_{LT}^i]_{+|_{\vec{p}_3=\vec{0}}} + (q \leftrightarrow \bar{q}), \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2} \text{tr}(C_{\perp}^{4i} \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_4)_{TL}^i]_{+} + (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.105)$$

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2} \text{tr}(C_{1\perp}^{ni} \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_n)_{TL}^i]_{+|_{\vec{p}_3=\vec{0}}} + (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.106)$$

где $n = 5, 6$. Выражения для (ϕ_n) даны в приложении Д. Также как и для LL перехода вклад диаграммы 6 можно проинтегрировать до конца

$$\begin{aligned} & \frac{(p_0^-)^2 \text{tr}(C_{1||}^6 \hat{p}_{\bar{q}}((1-2x)p_{q1'\perp}^i - \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+ \hat{p}_q)}{s^2 p_\gamma^+} \\ &= (1-2x)p_{q1'\perp}^i \frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_\gamma^+} \text{tr}(C_{1||}^6 \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q), \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(p_0^-)^2}{s^2} \text{tr}(C_{1\perp}^{6i} \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \frac{-x\bar{x}(1-2x)p_{q1\perp}^i}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2} \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \\ &+ \frac{x\bar{x}(1-2x)p_{q1\perp}^i}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left[4\text{Li}_2 \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} + 1 \right) + 3 \ln \left(\frac{\vec{p}_1^2}{\mu^2} \right) - 8 \right] \\ &+ \frac{-x\bar{x}p_{1\perp}^i}{3\vec{p}_1^2} \left[\pi^2 - 6\text{Li}_2 \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} + 1 \right) \right] + x\bar{x} (xp_{q1\perp}^i - \bar{x}p_{q\perp}^i) \\ &\times \left(\frac{-\bar{x}\vec{p}_1^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2)^2} \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2)} \left[2 \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) - 1 \right] \right) + (q \leftrightarrow \bar{q}). \end{aligned} \quad (2.108)$$

TT переход

$$\begin{aligned} d\sigma_{1TT} &= \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \right) (S_V + S_V^*) d\sigma_{0TT} \\ &+ \frac{\alpha_s}{8\pi} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right) \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) (\varepsilon_{Ti} \varepsilon_{Tk}^*) \int d^2 p_{1\perp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times d^2 p_{2\perp} d^2 p'_{1\perp} d^2 p'_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \\
& \times \left\{ \frac{3}{2} \frac{p_{q1\perp r} p_{q1'\perp l}}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)} [(1-2x)^2 g_{\perp}^{ri} g_{\perp}^{lk} - g_{\perp}^{rk} g_{\perp}^{li} + g_{\perp}^{rl} g_{\perp}^{ik}] \right. \\
& \times \left[\ln \left(\frac{x\bar{x}\mu^4}{(x\vec{p}_{\bar{q}} - \bar{x}\vec{p}_q)^2 (\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)} \right) - \frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right] \\
& + \frac{(p_0^-)^2}{2s^2 x\bar{x}} \frac{\text{tr}[(C_{\perp}^{4i} + C_{1\perp}^{5i} + C_{1\perp}^{6i}) \hat{p}_{\bar{q}}(p_{q1'\perp}^j (1-2x) - \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma^j] \gamma^+ \hat{p}_q)]}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \\
& \left. + h.c. |_{\substack{p_1 \leftrightarrow p'_1 \\ i \leftrightarrow k}} \right\}. \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{(p_0^-)^2}{2s^2} \text{tr}(C_{\perp}^{4i} \hat{p}_{\bar{q}}(p_{q1'\perp}^j (1-2x) - \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma^j]) \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz \left[(\phi_4^{ij})_{TT} \right]_+ + (q \leftrightarrow \bar{q}), \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(p_0^-)^2}{2s^2} \text{tr}(C_{1\perp}^{mi} \hat{p}_{\bar{q}}(p_{q1'\perp}^j (1-2x) - \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma^j]) \gamma^+ \hat{p}_q) &= \int_0^x dz \left[(\phi_n^{ij})_{TT} \right]_+ |_{\vec{p}_3=\vec{0}} \\
& + (q \leftrightarrow \bar{q}), \tag{2.111}
\end{aligned}$$

где $n = 5, 6$. Выражения ϕ_n приведены в приложении Д. Вклад диаграммы 6 интегрируется аналитически

$$\begin{aligned}
& \frac{(p_0^-)^2}{s^2} \text{tr}(C_{1\perp}^{6i} \hat{p}_{\bar{q}}(p_{q1'\perp}^k (1-2x) - \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma_{\perp}^k]) \gamma^+ \hat{p}_q) \\
& = x\bar{x} [g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_{q1'}) + p_{1\perp}^k p_{q1'\perp}^i + (2x-1) p_{1\perp}^i p_{q1'\perp}^k] \\
& \times \left[\frac{-\bar{x}^2 \vec{p}_1^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2)^2} \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right. \\
& + \frac{\bar{x}}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2} \left[2 \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) - 1 \right] \\
& \left. + \frac{2}{\vec{p}_1^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right) \right] \\
& - x\bar{x} [p_{q1\perp}^i p_{q1'\perp}^k (1-2x)^2 - g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{q1} \cdot \vec{p}_{q1'}) - p_{q1\perp}^k p_{q1'\perp}^i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{-1}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2} \left(1 - 3 \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right) \right. \\
& - \frac{1}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \left(3 \ln \left(\frac{\vec{p}_1^2}{\mu^2} \right) + 4\text{Li}_2 \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) - 8 \right) \\
& \left. + \frac{-\bar{x}\vec{p}_1^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2 - \bar{x}\vec{p}_1^2)^2} \ln \left(\frac{\bar{x}\vec{p}_1^2}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \right) \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}). \tag{2.112}
\end{aligned}$$

2.5.3 Вклад диполь - двойной диполь в СГП $d\sigma_2$

LL переход

$$\begin{aligned}
d\sigma_{2LL} &= \frac{\alpha_s Q^2}{8\pi} \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1 - x - \bar{x}) \\
& \times \int d^2 p_{1\perp} d^2 p_{2\perp} d^2 p'_{1\perp} d^2 p'_{2\perp} \int \frac{d^2 p_{3\perp}}{(2\pi)^2} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{3\perp}) \\
& \times \frac{\delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{3\perp})}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \int \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \\
& \times \left(4x\bar{x} \left\{ \frac{x\bar{x}(\vec{p}_3^2 - \vec{p}_{\bar{q}2}^2 - \vec{p}_{q1}^2 - 2x\bar{x}Q^2)}{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right. \right. \\
& \times \ln \left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}} \right) \ln \left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right) \\
& \left. \left. - \left(\frac{2x\bar{x}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x}{e^\eta} \right) \ln \left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2} \right) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) \right\} \right. \\
& \left. + \frac{Q^2(p_0^-)^2}{p_\gamma^+ s^2} \text{tr}((C_{2\parallel}^5 + C_{2\parallel}^6)\hat{p}_{\bar{q}}\gamma^+\hat{p}_q) \right) + h.c. \tag{2.113}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_\gamma^+} \text{tr}(C_{2\parallel}^n \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_n)_{LL}]_+ + (q \leftrightarrow \bar{q}), \tag{2.114}$$

где $n = 5, 6$. Выражения ϕ_n приведены в приложении Д.

LT переход

$$\begin{aligned}
d\sigma_{2TL} &= \frac{\alpha_s Q}{8\pi} \frac{\alpha_{em} Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) \int d^2 p_{1\perp} d^2 p_{2\perp} \quad (2.115) \\
&\times d^2 p'_{1\perp} d^2 p'_{2\perp} \frac{d^2 p_{3\perp} d^2 p'_{3\perp}}{(2\pi)^2} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp}) \\
&\times \varepsilon_{Ti}^* \left[\frac{\delta(p'_{3\perp})}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \right. \\
&\times \left(2(1-2x)p_{q1'\perp}^i \left\{ \frac{x\bar{x}(\vec{p}_3^2 - \vec{p}_{\bar{q}2}^2 - \vec{p}_{q1}^2 - 2x\bar{x}Q^2)}{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \ln \left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}} \right) \right. \right. \\
&\times \ln \left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3^2} \right) \\
&\left. \left. - \left(\frac{2x\bar{x}}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x}{e^\eta} \right) \ln \left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2} \right) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) \right\} \right. \\
&+ \frac{(p_0^-)^2}{2s^2 x\bar{x} p_\gamma^+} \text{tr}[(C_{2\parallel}^5 + C_{2\parallel}^6) \hat{p}_{\bar{q}}(p_{q1'\perp}^i(1-2x) - \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma^i])\gamma^+ \hat{p}_q] \\
&+ \frac{\delta(p_{3\perp})}{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2} \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \tilde{\mathbf{F}}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}, p_{3'\perp} \right) \\
&\times \left(\left\{ 2x\bar{x}(1-2x)p_{q1'\perp}^i \left(\frac{-2}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1'}^2} \ln \left(\frac{x}{e^\eta} \right) \ln \left(\frac{\vec{p}_3'^2}{\mu^2} \right) \right. \right. \right. \\
&+ \ln \left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}} \right) \left[- \frac{(\vec{p}_{\bar{q}2'}^2 + x\bar{x}Q^2) \ln \left(\frac{(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2'}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2\vec{p}_3'^2} \right)}{(\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2'}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2\vec{p}_3'^2} \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \frac{1}{\vec{p}_{q1'}^2} \ln \left(\frac{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2} \right) \right] \right\} + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) + \frac{(p_0^-)^2}{s^2} \text{tr}((C_{2\perp}^{5i} + C_{2\perp}^{6i}) \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q)^* \left. \right].
\end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2} \text{tr}(C_{2\perp}^{mi} \hat{p}_{\bar{q}} \gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_n^i)_{LT}]_+ dz + (q \leftrightarrow \bar{q}), \quad (2.116)$$

$$\frac{(p_0^-)^2}{s^2 p_\gamma^+} \text{tr}(C_{2\parallel}^m \hat{p}_{\bar{q}}(p_{q1'\perp}^i(1-2x) - \frac{1}{2}[\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma_\perp^i])\gamma^+ \hat{p}_q) = \int_0^x dz [(\phi_n^i)_{TL}]_+ + (q \leftrightarrow \bar{q}). \quad (2.117)$$

Выражения $(\phi_{5,6})_{LT}$ и $(\phi_{5,6})_{TL}$ приведены в приложении Д.

ТТ переход

$$\begin{aligned}
d\sigma_{2TT} &= \frac{\alpha_s}{8\pi} \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{(2\pi)^8 N_c} dx d\bar{x} d^2 p_{q\perp} d^2 p_{\bar{q}\perp} \delta(1-x-\bar{x}) \int d^2 p_{1\perp} d^2 p_{2\perp} d^2 p'_{1\perp} d^2 p'_{2\perp} \\
&\int \frac{d^2 p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \frac{(\varepsilon_{Ti} \varepsilon_{Tj}^*)}{\vec{p}_{q1'}^2 + x\bar{x}Q^2} \\
&\times \left[\tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{3\perp}) \right. \\
&\times \left(\left\{ p_{q1'\perp} p_{q1\perp} [(1-2x)^2 g_{\perp}^{ki} g_{\perp}^{lj} - g_{\perp}^{kj} g_{\perp}^{li} + g_{\perp}^{kl} g_{\perp}^{ij}] \right. \right. \\
&\times \left. \left. \left(\frac{-2}{Q^2 + x\bar{x}\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{x}{e\eta} \right) \ln \left(\frac{\vec{p}_3^2}{\mu^2} \right) \right. \right. \right. \\
&+ \ln \left(\frac{x\bar{x}}{e^{2\eta}} \right) \left[\frac{1}{\vec{p}_{q1}^2} \ln \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2}{x\bar{x}Q^2} \right) - \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2}{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2) - x\bar{x}Q^2 \vec{p}_3^2} \right. \\
&\times \left. \left. \ln \left(\frac{(\vec{p}_{q1}^2 + x\bar{x}Q^2)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)}{x\bar{x}Q^2 \vec{p}_3^2} \right) \right] \right) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \left. \right\} + \frac{(p_0^-)^2}{2s^2 x\bar{x}} \\
&\times \left. \text{tr} \left((C_{2\perp}^{5i} + C_{2\perp}^{6i}) \hat{p}_{\bar{q}} [p_{q1'\perp}^j (1-2x) - \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma^j]] \gamma^+ \hat{p}_q \right) + h.c. \Big|_{\substack{p_1, p_3 \leftrightarrow p'_1, p'_3 \\ i \leftrightarrow j}} \right]. \tag{2.118}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\frac{(p_0^-)^2}{2s^2} \text{tr} \left(C_{2\perp}^{mi} \hat{p}_{\bar{q}} (p_{q1'\perp}^j (1-2x) - \frac{1}{2} [\hat{p}_{q1'\perp}, \gamma^j]) \gamma^+ \hat{p}_q \right) \\
&= \int_0^x dz [(\phi_n^{ij})_{TT}]_+ dz + (q \leftrightarrow \bar{q}). \tag{2.119}
\end{aligned}$$

Выражения $(\phi_5^{ij})_{TT}$ и $(\phi_6^{ij})_{TT}$ приведены в приложении Д.

2.6 Сечение $\gamma^* P \rightarrow q\bar{q}gP'$

Определим A_4 так, чтобы сечение $\gamma^* P \rightarrow q\bar{q}gP'$ имело вид

$$d\sigma_{(q\bar{q}g)} = \frac{1}{8s} (2\pi)^D \delta^{(D)}(p_\gamma + p_0 - p_q - p_{\bar{q}} - p_g - p'_0) |A_4|^2 d\rho_4, \tag{2.120}$$

где

$$\begin{aligned} \delta^{(D)}(p_\gamma + p_0 - p_q - p_{\bar{q}} - p_g - p'_0) &= \delta(p_{00'})\delta(p_q^+ + p_{\bar{q}}^+ + p_g^+ - p_\gamma^+) \\ &\times \delta^{(d)}(p_{q\perp} + p_{\bar{q}\perp} + p_{g\perp} - p_{\gamma\perp} + p_{0'0\perp}) \end{aligned} \quad (2.121)$$

и фазовый объем

$$d\rho_4 = \frac{dp_q^+ d^d p_{q\perp}}{2p_q^+ (2\pi)^{d+1}} \frac{dp_{\bar{q}}^+ d^d p_{\bar{q}\perp}}{2p_{\bar{q}}^+ (2\pi)^{d+1}} \frac{dp_g^+ d^d p_{g\perp}}{2p_g^+ (2\pi)^{d+1}} \frac{dp_0'^- d^d p_{0'\perp}}{2p_0'^- (2\pi)^{d+1}}.$$

Используя импакт фактор перехода $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$,

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{-e_q 2p_0^- \varepsilon_\alpha}{(2\pi)^{D-2}} \sqrt{\frac{2}{N_c^2 - 1}} g\mu^{-\epsilon} \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \{ \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g\gamma\perp}) \\ &\times \Phi_3^\alpha \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right) + \int \frac{d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g\gamma\perp} - p_{3\perp}) \Phi_4^\alpha \tilde{\mathbf{F}}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp}\right) \}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Это сечение имеет вклад $d\sigma_3$ с двумя дипольными операторами, вклад $d\sigma_4$ с дипольным и дважды дипольным операторами и вклад $d\sigma_5$ с двумя дважды дипольными операторами

$$d\sigma_{(q\bar{q}g)} = d\sigma_3 + d\sigma_4 + d\sigma_5. \quad (2.123)$$

Вклад с двумя диполями имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_{3JI} &= \frac{\alpha_s}{\mu^{2\epsilon}} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right) \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{2(2\pi)^{4d} N_c} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 x_q x_{\bar{q}}} (\varepsilon_{I\alpha} \varepsilon_{J\beta}^*) \\ &\times dx_q dx_{\bar{q}} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \frac{dz d^d p_{g\perp}}{z(2\pi)^d} \delta(1 - x_q - x_{\bar{q}} - z) \\ &\times \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p'_{1\perp} d^d p'_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp}) \\ &\times \Phi_3^\alpha(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^{\beta*}(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}) \mathbf{F}\left(\frac{p_{12\perp}}{2}\right) \mathbf{F}^*\left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Вклад с диполем и двойным диполем имеет вид

$$d\sigma_{4JI} = \frac{\alpha_s}{\mu^{2\epsilon}} \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{2(2\pi)^{4d} N_c} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 x_q x_{\bar{q}}} (\varepsilon_{I\alpha} \varepsilon_{J\beta}^*) dx_q dx_{\bar{q}} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \frac{dz d^d p_{g\perp}}{z(2\pi)^d}$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta(1 - x_q - x_{\bar{q}} - z) \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p'_{1\perp} d^d p'_{2\perp} \frac{d^d p_{3\perp} d^d p'_{3\perp}}{(2\pi)^d} \\
& \times \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp}) \\
& \times \left[\Phi_3^\alpha(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_4^{\beta*}(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, p'_{3\perp}) \mathbf{F} \left(\frac{p_{12\perp}}{2} \right) \tilde{\mathbf{F}}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}, p'_{3\perp} \right) \delta(p_{3\perp}) \right. \\
& \left. + \Phi_4^\alpha(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_3^{\beta*} \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \mathbf{F}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2} \right) \delta(p'_{3\perp}) \right]. \quad (2.125)
\end{aligned}$$

Вклад с двумя дважды дипольными операторами имеет вид

$$\begin{aligned}
d\sigma_{5JI} &= \frac{\alpha_s}{\mu^{2\epsilon}} \frac{\alpha_{\text{em}} Q_q^2}{2(2\pi)^{4d}} \frac{(p_0^-)^2}{s^2 x_q x_{\bar{q}}} \frac{(\varepsilon_{I\alpha} \varepsilon'_{J\beta})}{N_c^2 - 1} dx_q dx_{\bar{q}} d^d p_{q\perp} d^d p_{\bar{q}\perp} \frac{dz d^d p_{g\perp}}{z(2\pi)^d} \\
& \times \delta(1 - x_q - x_{\bar{q}} - z) \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} d^d p'_{1\perp} d^d p'_{2\perp} \frac{d^d p_{3\perp} d^d p'_{3\perp}}{(2\pi)^{2d}} \\
& \times \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} + p_{g3\perp}) \delta(p_{11'\perp} + p_{22'\perp} + p_{33'\perp}) \\
& \times \Phi_4^\alpha(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_4^{\beta*}(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, p'_{3\perp}) \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{p_{12\perp}}{2}, p_{3\perp} \right) \tilde{\mathbf{F}}^* \left(\frac{p_{1'2'\perp}}{2}, p'_{3\perp} \right). \quad (2.126)
\end{aligned}$$

Выражения для $\Phi_a \Phi_b^*$ приведены в приложении Е в D -мерном пространстве. В 4-мерном пространстве их можно использовать для вычисления сечения рождения трех струй.

2.7 Сечение $\gamma^* P \rightarrow 2jets P'$

Выражения для импакт факторов переходов $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ и $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ можно использовать для построения ИК-конечного сечения рождения двух струй. Для этого необходимо сократить мягкие и коллинеарные расходимости в сечении рождения $q\bar{q}$ в СГП (виртуальной части) с сингулярными вкладами в сечение рождения $q\bar{q}g$ от области фазового пространства, где рожденный глюон мягкий или коллинеарен кварку или антикварку.

Мы продемонстрируем это сокращение на примере эксклюзивного дифракционного фоторождения $\gamma^* P \rightarrow 2jets P'$, которое экспериментально изучалось в [97]. Здесь “эксклюзивный” означает, что в детекторе наблюдается

только две струи и протон. Так как мы хотим получить сечение дифференциальное по импульсам струй, мы интегрируем по импульсу уходящего протона. Здесь мы используем конусный (cone) алгоритм в пределе малого параметра R , как он определен в [98].

Определим струю радиуса R^2 , $R^2 \ll 1$. Две частицы формируют струю с импульсом равным сумме их импульсов, если для них обеих выполняется условие

$$\Delta\phi^2 + \Delta Y^2 < R^2, \quad (2.127)$$

где $\Delta\phi$ — это разность азимутальных углов частицы и струи, ΔY — это разность быстрот частицы и струи. Рассмотрим струю из кварка и глюона. Ее импульс

$$p_j = x_j p_\gamma^+ n_1^\mu + \frac{\vec{p}_j^2}{2p_\gamma^+ x_j} n_2^\mu + p_{j\perp}^\mu, \quad x_j = x_q + z, \quad \vec{p}_j = \vec{p}_q + \vec{p}_g. \quad (2.128)$$

В пределе малых R , $p_q^- + p_g^- \sim \frac{\vec{p}_j^2}{2p_\gamma^+ x_j}$ с точностью до $O(R)$, и струя безмассова в этом приближении. Разности азимутальных углов и быстрот имеют вид

$$\Delta\phi = \arccos \frac{\vec{p}_j \cdot \vec{p}_g}{|\vec{p}_j| |\vec{p}_g|}, \quad \Delta Y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_j^2 \vec{p}_g^2}{z^2 \vec{p}_j^2}. \quad (2.129)$$

Введя переменную

$$\vec{\Delta}_q = \frac{x_q}{x_j} \vec{p}_g - \frac{z}{x_j} \vec{p}_q \quad (2.130)$$

которая равна 0 для коллинеарных кварка и глюона, получаем условие того, что глюон в конусе

$$\vec{\Delta}_q^2 < R^2 \frac{\vec{p}_j^2 z^2}{x_j^2}. \quad (2.131)$$

Соответствующее условие для кварка

$$\vec{\Delta}_q^2 < R^2 \frac{\vec{p}_j^2 x_q^2}{x_j^2}. \quad (2.132)$$

Для получения эксклюзивного сечения рождения двух струй в пределе малых R нам нужно сечение рождения $q\bar{q}$ (ГП и СГП) и вклад в сечение рождения $q\bar{q}g$, в котором глюон мягок или коллинеарен кварку или антикварку, так что они образуют одну струю.

Обозначим переменные, относящиеся к струе x_j , $x_{\bar{j}}$, $p_{j\perp}$ и $p_{\bar{j}\perp}$. Из виртуальной части вклад в сечение рождения струй получается просто заменой переменных в (2.88–2.91) :

$$(x, p_{q\perp}) \rightarrow (x_j, p_{j\perp}), \quad (\bar{x}, p_{\bar{q}\perp}) \rightarrow (x_{\bar{j}}, p_{\bar{j}\perp}), \quad (2.133)$$

и симметризацией $j \leftrightarrow \bar{j}$.

Для каждой компоненты сечения рождения партонов $d\sigma_n$ из (2.123) и (2.87) обозначим соответствующий вклад в сечение рождения струй $d\sigma'_n$.

Вклад коллинеарных глюонов можно найти с помощью приближения квази-реальных электронов [99]. Действительно, реальный вклад в сечение в конфигурации, когда одна струя состоит из кварка и глюона, а вторая из антикварка имеет вид

$$d\sigma'_{3JI}(x_q, \vec{p}_q)|_{\text{col}} = d\sigma'_{0JI}(x_j, \vec{p}_j) \alpha_s \frac{\Gamma(1-\epsilon) N_c^2 - 1}{(4\pi)^{1+\epsilon}} \frac{1}{2N_c} n_j, \quad (2.134)$$

где n_j пропорционально “числу струй в кварке”

$$n_j = 4 \int_{\alpha}^{x_j} \frac{x_j dz}{z(x_j - z)} \frac{\mu^{-2\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\vec{\Delta}_q^2 < \frac{R^2 \vec{p}_j^2}{x_j^2} \min(z^2, (x_j - z)^2)} d^d \vec{\Delta}_q \times \frac{1}{4} \frac{(x_j - z) (dz^2 + 4x_j(x_j - z))}{x_j^3 \vec{\Delta}_q^2}. \quad (2.135)$$

Этот результат можно воспроизвести в коллинеарном пределе квадрата импакт факторов рождения $q\bar{q}g$, как показано в приложении Е.

Здесь мы ввели струю j с помощью замены переменных (2.128)

$$(\vec{p}_q, \vec{p}_g) \rightarrow (\vec{p}_j \equiv \vec{p}_q + \vec{p}_g, \vec{\Delta}_q), \quad (x, z) \rightarrow (x_j \equiv x + z, z), \quad (2.136)$$

вторую струю \bar{j} с помощью

$$\vec{p}_{\bar{q}} \rightarrow \vec{p}_{\bar{j}}, \quad x_{\bar{q}} \rightarrow x_{\bar{j}} = 1 - x_j, \quad (2.137)$$

и проинтегрировали внутри конуса (2.131–2.132). Вклад конфигурации, в которой в одной из струй антикварк и глюон восстанавливается из симметрии

относительно замены $j \leftrightarrow \bar{j}$. Полный коллинеарный вклад имеет вид

$$n_j + n_{\bar{j}} = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{x_{\bar{j}} x_j}{\alpha^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \ln \left(\frac{R^4 \vec{p}_j^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2}{\mu^4} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\ln \left(\frac{x_{\bar{j}} x_j}{\alpha^2} \right) - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{x_{\bar{j}} x_j}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_j}{x_{\bar{j}}} \right) \ln \left(\frac{\vec{p}_j^2}{\vec{p}_{\bar{j}}^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{x_j}{x_{\bar{j}}} \right) - \frac{\pi^2}{3} + \frac{7}{2} + \ln(8) \right]. \quad (2.138)$$

В мягкоглюонном приближении сечение рождения $q\bar{q}g$ выглядит так

$$d\sigma'_{3JI}|_{soft} = d\sigma'_{0JI} \alpha_s \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}} S, \quad (2.139)$$

$$S \equiv \frac{(4\pi)^{1+\epsilon}}{\Gamma(1 - \epsilon)} \int \left| \frac{p_q^\mu}{(p_q \cdot p_g)} - \frac{p_{\bar{q}}^\mu}{(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \right|^2 \frac{dz}{z} \frac{d^d p_g}{(2\pi)^d}, \quad (2.140)$$

что продемонстрировано непосредственно из свертки импакт факторов в приложении Е. Мягкофотонный множитель нужно проинтегрировать по

$$\omega_g = \frac{1}{2} \left(z p_\gamma^+ + \frac{\vec{p}_g^2}{z p_\gamma^+} \right) < E \ll p_\gamma^+, \quad (2.141)$$

где ω_g — это энергия излученного глюона, E — энергетическое разрешение детектора. В мягком пределе все компоненты 4-импульса глюона стремятся к 0.

Этого можно достичь изменением масштаба поперечного импульса глюона

$$\vec{p}_g = z \vec{u} \quad (2.142)$$

и переходом к пределу $z \rightarrow 0$. В этом пределе область интегрирования такова

$$z \left(1 + \frac{\vec{u}^2}{(p_\gamma^+)^2} \right) < \frac{2E}{p_\gamma^+} \ll 1, \quad (2.143)$$

и мы имеем

$$S = \int_\alpha^{\frac{2E}{p_\gamma^+}} z^{d-3} dz \int_{\vec{u}^2 < (p_\gamma^+)^2 \left(\frac{2E}{z p_\gamma^+} - 1 \right)} \frac{\mu^{-2\epsilon} d^d u_\perp}{\Gamma(1 - \epsilon) \pi^{\frac{d}{2}}} \frac{4 \left(\frac{\vec{p}_j}{x_j} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2}{\left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_j}{x_j} \right)^2 \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2}, \quad (2.144)$$

как продемонстрировано в приложении Е. Здесь также введено обрезание по продольному импульсу α для регуляризации мягких расходимостей.

Однако в сумме $n_j + n_{\bar{j}} + S$ область, в которой глюон одновременно мягкий и коллинеарный кварку или антикварку, учтена дважды. Чтобы избежать двойного счета, мы ограничиваем интегрирование в S так, чтобы глюоны находились вне конусов (2.131). Новая область интегрирования имеет вид

$$\Omega = \left\{ \vec{u}^2 < (p_\gamma^+)^2 \left(\frac{2E}{zp_\gamma^+} - 1 \right) \right\} \cap \Omega_{nc}, \quad (2.145)$$

$$\Omega_{nc} \equiv \left\{ \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_j}{x_j} \right)^2 > \frac{R^2 \vec{p}_j^2}{x_j^2} \right\} \cap \left\{ \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2 > \frac{R^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2}{x_{\bar{j}}^2} \right\}. \quad (2.146)$$

Обозначим S' вклад S с новой областью интегрирования

$$\begin{aligned} S' &\equiv 4 \int_\alpha^{\frac{2E}{p_\gamma^+}} \frac{dz}{z} \int_\Omega \frac{d\vec{u}}{\pi} \frac{4 \left(\frac{\vec{p}_j}{x_j} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2}{\left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2 \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_j}{x_j} \right)^2} \\ &= 4 \int_\alpha^{\frac{2E}{p_\gamma^+}} \frac{dz}{z} \int_{\Omega_{nc}} \frac{d\vec{u}}{\pi} \frac{\left(\frac{\vec{p}_j}{x_j} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2}{\left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2 \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_j}{x_j} \right)^2} + 4 I(R, E) \\ &= 4 \ln \left(\frac{2E}{\alpha p_\gamma^+} \right) \ln \left(\frac{(\vec{p}_j x_{\bar{j}} - x_j \vec{p}_{\bar{j}})^4}{(R^2 \vec{p}_j^2 x_j^2)(R^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2)} \right) + 4 I(R, E), \end{aligned} \quad (2.147)$$

где мы ввели

$$I(R, E) \equiv - \int_0^{\frac{2E}{p_\gamma^+}} \frac{dz}{z} \int_{\{\vec{u}^2 > (p_\gamma^+)^2 \left(\frac{2E}{zp_\gamma^+} - 1 \right)\} \cap \Omega_{nc}} \frac{d\vec{u}}{\pi} \frac{\left(\frac{\vec{p}_j}{x_j} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2}{\left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{j}}}{x_{\bar{j}}} \right)^2 \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_j}{x_j} \right)^2}. \quad (2.148)$$

Интеграл $I(R, E)$ сходится и не зависит ни от α , ни от ϵ . В [69] показано, что он подавлен как $1/s$. Поэтому мы пренебрегаем этим вкладом.

Наконец,

$$S' = 4 \ln \left(\frac{2E}{\alpha p_\gamma^+} \right) \ln \left(\frac{(\vec{p}_j x_{\bar{j}} - x_j \vec{p}_{\bar{j}})^4}{(R^2 \vec{p}_j^2 x_j^2)(R^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2 x_{\bar{j}}^2)} \right). \quad (2.149)$$

Комбинируя (2.138) и (2.149), имеем

$$S' + n_j + n_{\bar{j}} = 2 \left[\ln \left(\frac{(x_{\bar{j}} \vec{p}_j - x_j \vec{p}_{\bar{j}})^4}{x_{\bar{j}}^2 x_j^2 R^4 \vec{p}_j^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2} \right) \ln \left(\frac{4E^2}{x_{\bar{j}} x_j (p_\gamma^+)^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \ln \left(\frac{x_{\bar{j}} x_j}{\alpha^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{x_{\bar{j}} x_j \mu^2}{(x_{\bar{j}} \vec{p}_j - x_j \vec{p}_{\bar{j}})^2} \right) \right) - \ln^2 \left(\frac{x_{\bar{j}} x_j}{\alpha^2} \right) \\
& + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{16 \mu^4}{R^4 \vec{p}_j^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2} \right) - \ln \left(\frac{x_j}{x_{\bar{j}}} \right) \ln \left(\frac{x_j \vec{p}_{\bar{j}}^2}{x_{\bar{j}} \vec{p}_j^2} \right) - \frac{3}{\epsilon} - \frac{2\pi^2}{3} + 7 \Big]. \quad (2.150)
\end{aligned}$$

Добавляя расходящуюся часть виртуального вклада (2.47), мы сокращаем $\ln \alpha$ и $\frac{1}{\epsilon}$ и получаем

$$\begin{aligned}
S_R &= S' + n_j + n_{\bar{j}} + S_V + S_V^* \\
&= 4 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x_{\bar{j}} \vec{p}_j - x_j \vec{p}_{\bar{j}})^4}{x_j^2 x_{\bar{j}}^2 R^4 \vec{p}_j^2 \vec{p}_{\bar{j}}^2} \right) \left(\ln \left(\frac{4E^2}{x_{\bar{j}} x_j (p_\gamma^+)^2} \right) + \frac{3}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln(8) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_j}{x_{\bar{j}}} \right) \ln \left(\frac{x_j \vec{p}_{\bar{j}}^2}{x_{\bar{j}} \vec{p}_j^2} \right) + \frac{13 - \pi^2}{2} \right], \quad (2.151)
\end{aligned}$$

что демонстрирует конечность найденного сечения.

Итак, чтобы получить конечное сечение эксклюзивного дифракционного фоторождения двух струй в конусном алгоритме в пределе малого раствора конуса R , необходимо в сечении рождения $q\bar{q}$ пары переобозначить импульсы в соответствии с (2.133), и заменить $S_V + S_V^* \rightarrow S_R$ в (2.98) для LL перехода, в (2.102) для LT перехода и в (2.109) для TT перехода. Вычисленное сечение получено без коллинеарного или мягкого приближений, использованных в предыдущих работах, в произвольной кинематике, т.е. для произвольной виртуальности фотона, произвольной передачи в t канале и произвольной массы рожденной системы.

Глава 3. Преобразование калибровочно инвариантных операторов

3.1 Необходимые выражения

В этом разделе мы придерживаемся обозначений работы [100]. Мы будем использовать состояния $|\vec{q}\rangle$ с определенным двумерным (здесь нет необходимости вводить размерностную регуляризацию) поперечным импульсом реджеона \vec{q} и состояния $|\vec{r}\rangle$ с определенной двумерной координатой реджеона \vec{r} , нормированные так

$$\langle \vec{q} | \vec{q}' \rangle = \delta(\vec{q} - \vec{q}') , \quad \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad \langle \vec{r} | \vec{q} \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{2\pi} . \quad (3.1)$$

Ядро БФКЛ [49] обозначено оператором \hat{K} . Он представим в виде суммы виртуальной (связанной с реджевской траекторией глюона) и реальной (связанной с рождением реальных частиц при столкновении реджеонов) частей

$$\hat{K} = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{K}_r , \quad (3.2)$$

где 1 и 2 – это индексы, обозначающие реджеоны,

$$\langle \vec{q}_i | \hat{\omega}_i | \vec{q}'_i \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}'_i) \omega(-\vec{q}_i^2) , \quad (3.3)$$

где $\omega(t)$ – это траектория глюона (хотя часто называют траекторией $1 + \omega(t)$) и

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{K}_r | \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 \rangle = \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \frac{1}{\sqrt{q_1^2 q_2^2}} K_r(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) \frac{1}{\sqrt{q_1'^2 q_2'^2}} , \quad (3.4)$$

где $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ и $K_r(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q})$ определено в [49]. Появление корней связано с нормировкой состояний (3.1). От них можно избавиться, перейдя к состояниям

$|\vec{q}\rangle$, нормированным в соответствие с $\langle \vec{q} | \vec{q}' \rangle = \vec{q}^2 \delta(\vec{q} - \vec{q}')$. В ГП

$$K_r^{(B)}(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q}) = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \left(\frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}'_1{}^2 + \vec{q}'_1{}^2 \vec{q}_2^2}{\vec{k}^2} - \vec{q}^2 \right), \quad (3.5)$$

где $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}'_1 = \vec{q}'_2 - \vec{q}_2$ и (B) обозначает ГП.

В терминах ядра \hat{K} , s -канальный скачок амплитуды рассеяния для процесса $A + B \rightarrow A' + B'$ имеет вид

$$-4i(2\pi)^2 \delta(\vec{q}_A - \vec{q}_B) \text{disc}_s \mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \langle A' \bar{A} | \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{Y\hat{K}} \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} | \bar{B}' B \rangle, \quad (3.6)$$

где $Y = \ln(s/s_0)$, s_0 — это характерный масштаб поперечных импульсов, $q_A = p_{A'} - p_A$, $q_B = p_B - p_{B'}$ и состояния $\langle A' \bar{A} |$ и $| \bar{B}' B \rangle$ нормированы так

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \bar{B}' B \rangle = 4p_B^- \delta(\vec{q}_B - \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \Phi_{B'B}(\vec{q}_1, \vec{q}_2), \quad (3.7)$$

$$\langle A' \bar{A} | \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle = 4p_A^+ \delta(\vec{q}_A - \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \Phi_{A'A}(\vec{q}_1, \vec{q}_2), \quad (3.8)$$

где $p^\pm = (p_0 \pm p_z)/\sqrt{2}$ и импакт факторы Φ выражаются через реджеонные вершины в соответствие с [49].

Ядро \hat{K} симметрично, как видно из (3.2)–(3.5), то есть $\hat{K} = \hat{K}^T$ или

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{K} | \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 \rangle = \langle \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 | \hat{K} | \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle. \quad (3.9)$$

Однако ядро конформно инвариантное в мебиусовском представлении в ГП [40, 101, 102] отличается от \hat{K} . Оно имеет вид

$$\hat{\mathcal{K}} = \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{K} \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Переход к этому ядру возможен благодаря инвариантности скачка (3.6) по отношению к преобразованию

$$\begin{aligned} \hat{K} &\rightarrow \hat{\mathcal{O}}^{-1} \hat{K} \hat{\mathcal{O}}, & \langle A' \bar{A} | \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} &\rightarrow \langle A' \bar{A} | \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{O}}, \\ \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} | \bar{B}' B \rangle &\rightarrow \hat{\mathcal{O}}^{-1} \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} | \bar{B}' B \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

с любым несингулярным оператором $\hat{\mathcal{O}}$. Для $\hat{\mathcal{O}} = \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{1/2}$ имеем (3.10) и правая часть (3.6) принимает вид

$$\langle A' \bar{A} | \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{Y \hat{K}} \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} | \bar{B}' B \rangle = \langle A' \bar{A} | e^{Y \hat{K}} \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{-1} | \bar{B}' B \rangle. \quad (3.12)$$

После приведения ядра к виду \mathcal{K} (3.10), который является конформно инвариантным в мебиусовском представлении в ГП, возможны дополнительные преобразования ядра с $\hat{\mathcal{O}} = 1 - \alpha_s \hat{U}$. С точностью СГП они дают

$$\begin{aligned} \hat{K} &\rightarrow \hat{K} - \alpha_s [\hat{K}^{(B)}, \hat{U}], \quad \langle A' \bar{A} | \rightarrow \langle A' \bar{A} | - (\langle A' \bar{A} |)^{(B)} \alpha_s \hat{U}, \\ \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{-1} | \bar{B}' B \rangle &\rightarrow \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{-1} | \bar{B}' B \rangle + \alpha_s \hat{U} \left(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2\right)^{-1} (| \bar{B}' B \rangle)^{(B)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В [50] было показано, что преобразование (3.13) устраняет различие между ядрами БФКЛ и БК в линейном приближении [25] и позволяет построить квазиконформное ядро в мебиусовском представлении в виде

$$\hat{K}^{QC} = \hat{K} - \alpha_s [\hat{K}^{(B)}, \hat{U}]. \quad (3.14)$$

Оператор \hat{U} был найден в виде суммы $\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2$. Первая часть была построена в импульсном представлении

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \alpha_s \hat{U}_1 | \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \left[-\delta(\vec{q} - \vec{q}') \left(\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} - \frac{\vec{q}_1}{\vec{q}_1^2} \right) \left(\frac{\vec{k}}{\vec{k}^2} + \frac{\vec{q}_2}{\vec{q}_2^2} \right) \ln \vec{k}^2 \right. \\ &+ \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) \delta(\vec{q}_2 - \vec{q}'_2) \left(\int d^2 l \left(\frac{1}{\vec{l}^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_1)}{2\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_1)^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_2)}{2\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_2)^2} \right) \ln \vec{l}^2 \right. \\ &\left. \left. - \frac{\pi \beta_0}{4N_c} \ln(\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$, $\vec{q}' = \vec{q}'_1 + \vec{q}'_2$, β_0 — это первый коэффициент β -функции и $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}'_1$. Заметим, что интеграл по \vec{l} расходится при $\vec{l} = 0$, и, вообще говоря, член $1/\vec{l}^2$ требует регуляризации. Но нам необходимо действие U_1 на некоторое состояние, т. е. интеграл по \vec{k} от произведения этого матричного элемента и функции от \vec{k} , а не сам матричный элемент. В этом интеграле расходимости

при $\vec{l} = 0$ и $\vec{k} = 0$ сокращаются и получается конечный результат (разумеется, члены $1/\vec{l}^2$ и $1/\vec{k}^2$ должны быть одинаково регуляризованы). Вторая часть оператора

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \alpha_s \hat{U}_{2M} | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \frac{r_{12}^2}{r_{01}^2 r_{02}^2} \ln \left(\frac{r_{12}^2}{r_{01}^2 r_{02}^2} \right) \\ &\times \left[\delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{02'}) + \delta(\vec{r}_{01'}) \delta(\vec{r}_{22'}) - \delta(\vec{r}_{11'}) \delta(r_{22'}) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

была найдена в мебиусовском представлении, что обозначено M (здесь также обозначено $\vec{r}_{ij'} = \vec{r}_i - \vec{r}_{j'}$).

Квазиконформное ядро $\hat{\mathcal{K}}^{QC}$, определенное в (3.14)–(3.16), было построено в мебиусовском представлении. Сейчас его явный вид в этом представлении известен для теорий с фермионами и скалярами в любом представлении цветовой группы [103].

Так как переход к мебиусовскому представлению подразумевает сужение области состояний на которое действует оператор, связь оператора в этом представлении с его полной формой не очевидна. В частности нетривиальна задача восстановления оператора \hat{U}_2 (и $\hat{\mathcal{K}}^{QC}$) в полном представлении в импульсном пространстве по мебиусовской форме (3.16). В этой главе демонстрируется возможность такого восстановления.

3.2 Связь между полным и мебиусовским представлением

Возможность построить полную форму ядра по мебиусовской основана на калибровочной инвариантности ядра. Заметим, что это свойство ядра вместе с калибровочной инвариантностью импакт факторов для бесцветных частиц было использовано для перехода к мебиусовскому представлению в [40]. Только благодаря этому свойству скачок (3.6) можно переписать, используя мебиусовское представление $\hat{\mathcal{K}}$. Для начала мы опишем переход к мебиусовскому

представлению. Калибровочная инвариантность импакт факторов означает

$$\langle A' \bar{A} | \vec{q}, 0 \rangle = \langle A' \bar{A} | 0, \vec{q} \rangle = \langle \vec{q}, 0 | \bar{B}' B \rangle = \langle 0, \vec{q} | \bar{B}' B \rangle = 0, \quad (3.17)$$

а калибровочная инвариантность ядра \hat{K} выражается в виде

$$\begin{aligned} K_r(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q})|_{\vec{q}_1=0} &= K_r(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q})|_{\vec{q}'_1=0} \\ &= K_r(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q})|_{\vec{q}_1=\vec{q}} = K_r(\vec{q}_1, \vec{q}'_1; \vec{q})|_{\vec{q}'_1=\vec{q}} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Как видно из (3.2), (3.4) и (3.6), эти свойства гарантируют отсутствие кулоновских расходимостей в скачках.

Из (3.10), (3.4) и этих свойств также следует

$$\langle A' \bar{A} | e^{Y\hat{K}} | \vec{q}, 0 \rangle = \langle A' \bar{A} | e^{Y\hat{K}} | 0, \vec{q} \rangle = 0. \quad (3.19)$$

Это означает, что $\langle A' \bar{A} | e^{Y\hat{K}} | \Psi \rangle = 0$, если $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \Psi \rangle$ не зависит от \vec{r}_1 или от \vec{r}_2 .

При этом в (3.12) можно сделать замену

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle &\rightarrow \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \left((\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle \right)_M = \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle \\ &- \frac{1}{2} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_1 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle - \frac{1}{2} \langle \vec{r}_2, \vec{r}_2 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle, \end{aligned} \quad (3.20)$$

не изменив значение скачка (3.6). Эта замена переводит состояние $(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle$ в мебиусовское представление. Заметим, что это преобразование однозначно, если учесть требование симметрии при перестановке реджеонов. В импульсном представлении оно имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle_M &= \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle \\ &- \frac{1}{2} (\delta(\vec{q}_1 - \vec{q}_B) \delta(\vec{q}_2) + \delta(\vec{q}_2 - \vec{q}_B) \delta(\vec{q}_1)) \int d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 \langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 | (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} | \bar{B}' B \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Далее можно перейти от \mathcal{K} к \mathcal{K}_M , не меняя скачка. Это достигается отбрасыванием в \mathcal{K} членов, которые равны 0 в мебиусовском пространстве, и членов, которые при действии на состояние в мебиусовском пространстве выводят его

из этого пространства. Для ядра в координатном представлении $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle &= \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle_t \\ &- a \langle \vec{r}_1, \vec{r}_1 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle_t - (1-a) \langle \vec{r}_2, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle_t, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где индекс t означает отбрасывание членов $\sim \delta(\vec{r}_{1'2'})$. Неопределенность в выборе a не имеет значения в силу симметрии импакт факторов $\langle A' \bar{A} |$ относительно перестановки реджеонов. Эту неопределенность можно устранить, потребовав соответствующей симметрии ядра. Поэтому мы не будем в дальнейшем к ней возвращаться.

Итак, в пространстве поперечных координат мебиусовское представление ядра \mathcal{K} однозначно строится по полному представлению с учетом симметрии относительно перестановки реджеонов (которые являются бозонами). Ясно, что это утверждение справедливо для операторов, определенных как в импульсном, так и в координатном пространствах.

Вообще говоря, операторы в мебиусовском представлении не определены в импульсном пространстве. Причина в том, что в координатном пространстве они могут быть сингулярны при $\vec{r}'_{1'2'} = 0$, так что их непосредственное преобразование в импульсное пространство невозможно. Используя трансляционную инвариантность, формально можно написать

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 \rangle &= \int \frac{d\vec{r}_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2}{2\pi} \frac{d\vec{r}'_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}'_2}{2\pi} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_1 - i\vec{q}_2 \vec{r}_2 + i\vec{q}'_1 \vec{r}'_1 + i\vec{q}'_2 \vec{r}'_2} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle \\ &= \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}'_1 = \vec{q}'_2 - \vec{q}_2$ и

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}) = \int \frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi} \frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi} d\vec{r}_{1'2'} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_{11'} - i\vec{q}_2 \vec{r}_{22'} - i\vec{k} \vec{r}_{1'2'}} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle. \quad (3.24)$$

Но из-за упомянутой выше сингулярности интеграл по $\vec{r}_{1'2'}$ в (3.24) может расходиться. Чтобы избежать расходимости, разобьем $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle$ на две части

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle = \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_{M1} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle + \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_{M2} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle, \quad (3.25)$$

где $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_{M2} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle$ имеет неинтегрируемую сингулярность при $\vec{r}'_{1'2'} = 0$, а интеграл (3.24) с $\hat{\mathcal{K}}_{M1}$ вместо $\hat{\mathcal{K}}_M$ конечен. Тогда определим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- &= \int \frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi} \frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi} d\vec{r}'_{1'2'} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_{11'} - i\vec{q}_2 \vec{r}_{22'} - i\vec{k} \vec{r}'_{1'2'}} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_{M1} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle \\ &+ \int \frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi} \frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi} d\vec{r}'_{1'2'} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_{11'} - i\vec{q}_2 \vec{r}_{22'}} (e^{-i\vec{k} \vec{r}'_{1'2'}} - 1) \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_{M2} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Таким образом мы вычитаем члены, расходящиеся при $\vec{r}'_{1'2'} = 0$. Чтобы интеграл (3.26) был хорошо определен, потребуем, чтобы $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_{M2} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle$ стремилось к 0 быстрее чем $1/\vec{r}'_{1'2'}{}^2$. Ядро БФКЛ обладает этим свойством, что отражает его ИК-стабильность, то есть отсутствие расходимостей при малых \vec{k} . Если обозначить

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{q}'_1, \vec{q}'_2 \rangle = \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}), \quad (3.27)$$

то из (3.22) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- &= \mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- \\ &- (a\delta(\vec{q}_2) + (1-a)\delta(\vec{q}_1)) \int d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{l}_1 - \vec{l}_2) \mathcal{K}(\vec{l}_1, \vec{l}_2; \vec{l}_1 - \vec{q}'_1)_-, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $\mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_-$ означает $\mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$ без членов независимых от третьего аргумента $\mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$.

Как мы уже говорили, мебиусовское представление ядра БФКЛ однозначно строится по полному с учетом симметрии относительно перестановок реджеонов. Обратное утверждение тоже верно. Мебиусовское представление ядра БФКЛ полностью определяет полное ядро симметричное относительно перестановки реджеонов. Для справедливости этого утверждения необходимы три свойства ядра БФКЛ в полном представлении. Первое — это калибровочная инвариантность ((3.10), (3.18), (3.27))

$$\mathcal{K}_r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{q}_1) = \mathcal{K}_r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; -\vec{q}_2) = 0. \quad (3.29)$$

Второе — ИК стабильность, обеспечивающая сходимость интеграла (3.26). Третье — отсутствие членов, пропорциональных $\delta(\vec{q}_1)$ или $\delta(\vec{q}_2)$ в ядре. Это свойство фиксирует остаточную свободу, связанную с такими членами.

Три этих свойства (с учетом симметризации относительно замены реджеонов) обеспечивают единственность восстановленного ядра. Действительно, пусть существуют два различных ядра в полном представлении $\mathcal{K}^{(1)}$ и $\mathcal{K}^{(2)}$ с одинаковым мебиусовским представлением. Тогда мебиусовское представление их разности равно 0. Из (3.28) следует, что в этом случае

$$\mathcal{K}^{(1)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- - \mathcal{K}^{(2)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- = 0, \quad (3.30)$$

т.е. они могут отличаться только членами, не зависящими от \vec{k} . С другой стороны, калибровочная инвариантность требует обращения в 0 разности (3.30) при $\vec{k} = \vec{q}_1$ и $\vec{k} = -\vec{q}_2$. Поэтому она равна 0 тождественно.

Итак, однозначность восстановления $\hat{\mathcal{K}}$ по $\hat{\mathcal{K}}_M$ доказана. Это доказательство показывает, как технически восстановить полное ядро.

3.3 Восстановление U_2 по мебиусовской форме

Мы продемонстрируем восстановление полной формы оператора по его мебиусовской форме на примере оператора U_2 (3.16). Во-первых, необходимо отметить, что \hat{U} в преобразовании (3.13) не может быть произвольным, если мы хотим сохранить возможность использовать мебиусовское представление после этого преобразования. Действительно, в этом случае преобразование (3.13) должно сохранять калибровочную инвариантность импакт факторов $\langle A' \bar{A} |$ и ядра $\hat{\mathcal{K}}$. Поэтому \hat{U} должен быть калибровочно инвариантен также как и $\hat{\mathcal{K}}$. Более того, без потери общности можно считать, что он не содержит членов с $\delta(\vec{q}_1)$ или $\delta(\vec{q}_2)$ в импульсном пространстве, так как такие члены не дают вклада в скачок (3.6). Другими словами, \hat{U} имеет те же свойства, что и $\hat{\mathcal{K}}$. Для первой части оператора \hat{U}_1 эти свойства легко проследить из (3.15). Следовательно, \hat{U}_2 также имеет эти свойства и может быть однозначно восстановлен из (3.16).

Чтобы это сделать, переведем (3.16) в импульсное представление. Как

обсуждалось ранее, оператор общего вида в мебиусовском представлении в координатном пространстве может быть сингулярен при $\vec{r}'_{1'2'} = 0$. Поэтому непосредственное преобразование в импульсное представление невозможно и полный оператор в импульсном пространстве строится с помощью (3.28) через $\hat{\mathcal{O}}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_-$, определенный в (3.26). Но как видно из (3.16), наш матричный элемент $\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{U}_{2M} | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle$ не имеет расходимостей при $\vec{r}'_{1'2'} = 0$, хотя такие сингулярности есть в его отдельных частях. Поэтому можно или рассматривать эти части по-отдельности и вычитать сингулярности (следуя (3.26)) в каждой из них, или рассматривать их вместе и не вычитать сингулярности. Здесь выбран второй путь вычисления $\langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \hat{U}_{2M} | \vec{q}'_1 \vec{q}'_2 \rangle$ как целого.

При этом возникают технические сложности, связанные с разделением реальной и виртуальной частей. Как видно из (3.16), в $\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{U}_{2M} | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle$ есть члены с УФ расходимостями при $\vec{r}'_{01} = 0$ и $\vec{r}'_{02} = 0$, которые сокращаются в сумме. Мы рассматриваем их вместе. Другая сложность в том, что как и $\mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$, $U_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$ (определенный с помощью (3.27) с заменой $\mathcal{K} \rightarrow U_2$) имеет расходимость при $\vec{k} = 0$ в виртуальной ($\sim \delta(\vec{k})$) и реальной частях. Они сокращаются в сумме, но чтобы это продемонстрировать, необходимо переписать член с $\delta(\vec{k})$ в интегральной форме.

Определяя $U_{2M}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$ в соответствии с (3.23), (3.24) с заменой $\hat{\mathcal{K}}_M \rightarrow \hat{U}_{2M}$, используя (3.16) и интегрируя дельта функции, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_s U_{2M}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}) &= \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int \frac{d\vec{r}_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2}{2\pi} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \right) \\ &\times \left[e^{-i\vec{k} \vec{r}_1 - i\vec{q}_2 \vec{r}_2} + e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_1 + i\vec{k} \vec{r}_2} - e^{-i\vec{k} \vec{r}_{12}} \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Разделим \hat{U}_2 на две части, $\hat{U}_2 = \hat{U}_2^r + \hat{U}_2^v$, сделав в (3.31) следующую замену

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \right) &= \frac{1}{\vec{r}_1^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_2^2} \right) + \frac{1}{\vec{r}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2} \right) - 2 \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \right) \\ &+ \frac{1}{\vec{r}_1^2} \ln \left(\frac{1}{\vec{r}_1^2} \right) + \frac{1}{\vec{r}_2^2} \ln \left(\frac{1}{\vec{r}_2^2} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

так что первые 3 члена входят в \hat{U}_2^r , а остальные — в \hat{U}_2^v . Тогда $U_{2M}^r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$ вычисляется с помощью интегралов

$$\int \frac{d\vec{r}_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2}{2\pi} \frac{1}{\vec{r}_1^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_2^2} \right) e^{-i\vec{a}\vec{r}_1 - i\vec{b}\vec{r}_2} = \frac{1}{\vec{b}^2} \ln \left(\frac{(\vec{a} + \vec{b})^2}{\vec{a}^2} \right), \quad (3.33)$$

$$\int \frac{d\vec{r}_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2}{2\pi} \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_1^2} \right) e^{-i\vec{a}\vec{r}_1 - i\vec{b}\vec{r}_2} = -\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2 \vec{b}^2} \ln \left(\frac{(\vec{a} + \vec{b})^2}{\vec{b}^2} \right), \quad (3.34)$$

$$\int \frac{d\vec{r}}{2\pi} e^{-i\vec{a}\vec{r}} \frac{\vec{r}}{\vec{r}^2} = \frac{-i\vec{a}}{\vec{a}^2}, \quad \int \frac{d\vec{r}}{2\pi} e^{-i\vec{a}\vec{r}} \frac{\vec{r}}{\vec{r}^2} \ln(\vec{r}^2) = \frac{-i\vec{a}}{\vec{a}^2} \left(2\psi(1) - \ln \left(\frac{\vec{a}^2}{4} \right) \right). \quad (3.35)$$

Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_s U_{2M}^r(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{k}) &= \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \left[\frac{2}{\vec{k}^2} \ln(\vec{k}^2) + \frac{1}{\vec{q}_1^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\vec{q}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_2'^2}{\vec{k}^2} \right) + \frac{1}{\vec{k}^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2 \vec{q}_2'^2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \right) - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_1^2} \ln(\vec{q}_1'^2) + 2 \frac{\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_2^2} \ln(\vec{q}_2'^2) \\ &\left. - 2(\psi(1) + \ln 2) \left(\frac{2}{\vec{k}^2} - \frac{2\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{q}_1^2 \vec{k}^2} + \frac{2\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{q}_2^2 \vec{k}^2} \right) \right], \quad (3.36) \end{aligned}$$

где $\vec{q}_1' = \vec{q}_1 - \vec{k}$, $\vec{q}_2' = \vec{q}_2 + \vec{k}$.

Два последних члена в (3.32) после интегрирования (3.31) дают вклады, пропорциональные $\delta(\vec{q}_1)$, $\delta(\vec{q}_2)$ и $\delta(k)$ с расходящимися коэффициентами. Члены пропорциональные $\delta(\vec{q}_1)$ и $\delta(\vec{q}_2)$ можно отбросить. Коэффициент при $\delta(k)$ представим в виде интеграла [100]:

$$\begin{aligned} &\int d\vec{r} \frac{1}{\vec{r}^2} \ln \left(\frac{1}{\vec{r}^2} \right) (e^{i\vec{q}_1 \vec{r}} + e^{i\vec{q}_2 \vec{r}} - 2) \\ &= \int d\vec{l} \frac{d\vec{r}_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2}{2\pi} \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2} e^{-i\vec{l}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)} \left[e^{i\vec{q}_1 \vec{r}_1} \ln(\vec{r}_2^2) + e^{i\vec{q}_2 \vec{r}_2} \ln(\vec{r}_1^2) - \ln(\vec{r}_1^2 \vec{r}_2^2) \right] \\ &= \int d\vec{l} \left[2\psi(1) + \ln 4 - \ln(\vec{l}^2) \right] \left(\frac{2}{\vec{l}^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_1)}{\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_1)^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_2)}{\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_2)^2} \right). \quad (3.37) \end{aligned}$$

Наконец, в реальную часть (3.36) необходимо добавить члены, не зависящие от \vec{k} , так, чтобы она была равна 0 при $\vec{q}_1' = 0$ и $\vec{q}_2' = 0$. Результат имеет вид

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \alpha_s \hat{U}_2 | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle = \delta(\vec{q}_{11'} + \vec{q}_{22'}) \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \left[\frac{2}{\vec{k}^2} \ln(\vec{k}^2) + \frac{1}{\vec{q}_1^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2 \vec{q}_2'^2}{\vec{k}^2 \vec{q}_2^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\vec{q}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_2'^2 \vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2 \vec{q}^2} \right) + \frac{1}{\vec{k}^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2 \vec{q}_2'^2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \right) - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_1^2} \ln (\vec{q}_1'^2) + 2 \frac{\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_2^2} \ln (\vec{q}_2'^2) \\
& - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \ln (\vec{q}^2) \Big] - \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \delta(\vec{q}_{22'}) \delta(\vec{q}_{11'}) \int d\vec{l} \ln \vec{l}^2 \left(\frac{2}{\vec{l}^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_1)}{\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_1)^2} \right. \\
& \left. - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_2)}{\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_2)^2} \right) - (\psi(1) + \ln 2) \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}}^B | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle, \quad (3.38)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}}^{(B)} | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle & = \delta(\vec{q}_{11'} + \vec{q}_{22'}) \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \left[\frac{2}{\vec{k}^2} - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_1^2} + 2 \frac{\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_2^2} \right. \\
& \left. - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} - \delta(\vec{k}) \int d\vec{l} \left(\frac{2}{\vec{l}^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_1)}{\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_1)^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_2)}{\vec{l}^2(\vec{l} - \vec{q}_2)^2} \right) \right]. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Ясно, что последний член в (3.38) не дает вклад в коммутатор $[\hat{\mathcal{K}}^{(B)}, \hat{U}_2]$. Поэтому он может быть отброшен.

Для полного оператора $\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2$, используя (3.15) и (3.38), имеем

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \alpha_s \hat{U} | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle & = \delta(\vec{q}_{11'} + \vec{q}_{22'}) \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\vec{q}_1^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2 \vec{q}_2'^2}{\vec{k}^2 \vec{q}^2} \right) + \frac{1}{\vec{q}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_2'^2 \vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2 \vec{q}^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\vec{k}^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2 \vec{q}_2'^2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \right) - \frac{2\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_1^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_1'^2}{\vec{k}^2} \right) + \frac{2\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{k}^2 \vec{q}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{q}_2'^2}{\vec{k}^2} \right) - \frac{2\vec{q}_1 \vec{q}_2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \ln \left(\frac{\vec{q}^2}{\vec{k}^2} \right) \Big] \\
& - \frac{\alpha_s \beta_0}{8\pi} \ln (\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2) \delta(\vec{q}_{11'}) \delta(\vec{q}_{22'}) - (\psi(1) + \ln 2) \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}}^{(B)} | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Заметим, что за исключением членов с $\hat{\mathcal{K}}^{(B)}$ (которые можно отбросить), оператор не имеет виртуальной части.

3.4 Мебиусовская форма \hat{U}

Мы восстановили оператор \hat{U}_2 по его мебиусовской форме и получили полный оператор \hat{U} в импульсном представлении. Однако мебиусовское представление часто является удобным. Поэтому в этом разделе мы построим мебиусовское представление \hat{U} . Так как \hat{U}_2 был построен в этом представлении (3.16),

необходимо найти мебиусовское представление \hat{U}_1 . Как описано выше, \hat{U}_1 имеет те же свойства (калибровочная инвариантность и отсутствие членов с $\delta(\vec{q}_1)$ или $\delta(\vec{q}_2)$) как и $\hat{\mathcal{K}}$. В соответствии с прескрипцией (3.22), сначала необходимо найти

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \alpha_s \hat{U}_1 | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int \frac{d\vec{q}_1}{2\pi} \frac{d\vec{q}_2}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}_1 \vec{r}'_{1'} + i\vec{q}_2 \vec{r}'_{2'} + i\vec{k} \vec{r}'_{1'}} \left[-\frac{2}{\vec{k}^2} \ln \vec{k}^2 \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\vec{k} \vec{q}_1}{\vec{k}^2 \vec{q}_1^2} - \frac{\vec{k} \vec{q}_2}{\vec{k}^2 \vec{q}_2^2} + \frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \right) \ln \vec{k}^2 + \delta(\vec{k}) \left(-\frac{\pi \beta_0}{2N_c} \ln(\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2) \right. \\ &\left. \left. + \int d^2 l \left(\frac{2}{\vec{l}^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_1)}{\vec{l}^2 (\vec{l} - \vec{q}_1)^2} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_2)}{\vec{l}^2 (\vec{l} - \vec{q}_2)^2} \right) \ln \vec{l}^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Так как подынтегральное выражение (в квадратных скобках) не имеет членов без \vec{k} , после интегрирования не будет членов с $\delta(\vec{r}'_{1'})$, которые необходимо отбрасывать. В принципе, следующие шаги определены в (3.22). Но как и в предыдущем разделе на пути встречаются технические трудности, связанные с разделением реальной и виртуальной частей, так как они расходятся по-отдельности. В (3.41) первый член в квадратных скобках и первый член в интеграле по \vec{l} имеют ИК сингулярность и должны рассматриваться вместе. Только эти члены дают вклад $\sim \delta(\vec{r}'_{1'}) \delta(\vec{r}'_{2'})$ в пространстве прицельных параметров (в этом пространстве их можно назвать “виртуальными”). Но второй из этих членов имеет не только ИК, но и УФ расходимость, так что коэффициент при $\delta(\vec{r}'_{1'}) \delta(\vec{r}'_{2'})$ содержит УФ сингулярность. Поэтому его необходимо записать в интегральном виде как в предыдущем разделе

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\vec{q}_1}{2\pi} \frac{d\vec{q}_2}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}_1 \vec{r}'_{1'} + i\vec{q}_2 \vec{r}'_{2'} + i\vec{k} \vec{r}'_{1'}} \left(-\frac{2}{\vec{k}^2} \ln \vec{k}^2 + \delta(\vec{k}) \int d^2 l \frac{2}{\vec{l}^2} \ln \vec{l}^2 \right) \\ &= -\delta(\vec{r}'_{1'}) \delta(\vec{r}'_{2'}) \int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \ln \vec{k}^2 \left(2e^{i\vec{k} \vec{r}'_{1'}} - 2 \right) = \delta(\vec{r}'_{1'}) \delta(\vec{r}'_{2'}) \int d\vec{r}_0 \frac{d\vec{k}_1}{2\pi} \frac{d\vec{k}_2}{2\pi} \\ &\times \frac{\vec{k}_1 \vec{k}_2}{\vec{k}_1^2 \vec{k}_2^2} \left(e^{i\vec{k}_1 \vec{r}_{01} + i\vec{k}_2 \vec{r}_{02}} \ln(\vec{k}_1^2 \vec{k}_2^2) - e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{r}_{01}} \ln(\vec{k}_1^2) - e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{r}_{02}} \ln(\vec{k}_2^2) \right) \\ &= \delta(\vec{r}'_{1'}) \delta(\vec{r}'_{2'}) \int d\vec{r}_0 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} (2\psi(1) + \ln 4) \right] \end{aligned}$$

$$+ \left. \frac{\vec{r}_{01}\vec{r}_{02}}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} \ln(\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2) - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \ln(\vec{r}_{01}^2) - \frac{1}{\vec{r}_{02}^2} \ln(\vec{r}_{02}^2) \right], \quad (3.42)$$

где использованы интегралы (3.35). Ясно, что представление (3.42) не единственно. Используя равенство

$$\int d\vec{r}_0 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} \ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2}{(\vec{r}_{12}^2)^2}\right) - \left(\frac{1}{\vec{r}_{01}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{02}^2}\right) \ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2}\right) \right] = 0, \quad (3.43)$$

приходим к представлению

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\vec{q}_1}{2\pi} \frac{d\vec{q}_2}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}_1\vec{r}_{11'} + i\vec{q}_2\vec{r}_{22'} + i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}} \left(-\frac{2}{\vec{k}^2} \ln \vec{k}^2 + \delta(\vec{k}) \int d^2l \frac{2}{\vec{l}^2} \ln \vec{l}^2 \right) \\ & = \delta(\vec{r}_{11'})\delta(\vec{r}_{22'}) \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} \left[(2\psi(1) + \ln 4) + \ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

УФ расходимость в этом вкладе должна сокращать аналогичные расходимости в остальных вкладах. Их вычисление прямолинейно. Используя интегралы (3.35), имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\vec{q}_1}{2\pi} \frac{d\vec{q}_2}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}_1\vec{r}_{11'} + i\vec{q}_2\vec{r}_{22'} + i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}} \left[\frac{2\vec{q}_1\vec{k}}{\vec{q}_1^2\vec{k}^2} \ln \vec{k}^2 + \delta(\vec{k}) \int d^2l \frac{(\vec{q}_1 - \vec{l})\vec{l}}{(\vec{q}_1 - \vec{l})^2\vec{l}^2} \ln \vec{l}^2 \right] \\ & = \delta(\vec{r}_{22'}) \left[-\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{11'}^2\vec{r}_{21'}^2} \left(2\psi(1) + \ln 4 - \ln(\vec{r}_{21'}^2) \right) + \frac{1}{\vec{r}_{11'}^2} \ln\left(\frac{\vec{r}_{11'}^2}{\vec{r}_{21'}^2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\vec{r}_{21'}^2} \left(2\psi(1) + \ln 4 - \ln(\vec{r}_{21'}^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Как следует из (3.22), члены с последней строчке не работают в мебиусовском представлении и могут быть отброшены. Члены в (3.41), соответствующие членам в квадратных скобках в левой части (3.45) после замены $\vec{q}_1 \leftrightarrow \vec{q}_2$, $\vec{k} \leftrightarrow -\vec{k}$ дают вклад равный правой части (3.45) после замены $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$, $\vec{r}'_1 \leftrightarrow \vec{r}'_2$. Чтобы найти остальные члены (3.41), кроме (3.35) необходимо Фурье преобразование $\ln \vec{q}^2$. Так как оно сингулярно, необходима регуляризация (или доопределение). При фиксированном $\vec{r}^2 \neq 0$ имеем

$$\int \frac{d\vec{k}}{2\pi} e^{i\vec{k}\vec{r}} \ln(\vec{k}^2) = -\frac{2}{\vec{r}^2}. \quad (3.46)$$

Этот результат можно получить, представив $\ln \vec{k}^2 = -(d/d\alpha)(\vec{k}^2)^{-\alpha}|_{\alpha=0}$ и используя

$$\int \frac{d\vec{k}}{2\pi} (\vec{k}^2)^{-\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} = \frac{2}{r^2} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \alpha \left(\frac{r^2}{4}\right)^\alpha. \quad (3.47)$$

Но пределы $\alpha \rightarrow 0$ и $r^2 \rightarrow 0$ не коммутируют. Это означает, что результат (3.46) нельзя использовать при произвольно малых r^2 . Вместо этого необходимо заменить $1/r^2 \rightarrow 1/(r^2)_R$, где регуляризация должна позволить сделать преобразование Фурье,

$$\int \frac{d\vec{r}}{2\pi} \frac{-2}{(r^2)_R} e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \ln(\vec{k}^2). \quad (3.48)$$

Так как

$$\int \frac{d\vec{r}}{2\pi} \frac{-2e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r^2} \theta(r^2 - c^2)|_{c \rightarrow 0} = \ln(\vec{k}^2) + \ln c^2 - 2\psi(1) - \ln 4, \quad (3.49)$$

этого можно добиться, определив $1/(r^2)_R$ при $r^2 \rightarrow 0$ следующим образом

$$\int \frac{d\vec{r}}{2\pi} \frac{-2}{(r^2)_R} \theta(c^2 - r^2)|_{c \rightarrow 0} = -\ln c^2 + 2\psi(1) + \ln 4. \quad (3.50)$$

Фиксируя $a = \frac{1}{2}$ в (3.22) требованием симметрии при замене $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \alpha_s \hat{U}_{1M} | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left\{ \delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{02'}) \left[\frac{\vec{r}_{12}^2 \ln(\vec{r}_{01}^2)}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{1}{\vec{r}_{02}^2} \ln\left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2}\right) \right] \right. \\ &+ \delta(\vec{r}_{22'}) \delta(\vec{r}_{01'}) \left[\frac{\vec{r}_{12}^2 \ln(\vec{r}_{02}^2)}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2}\right) \right] + \delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{22'}) \frac{\vec{r}_{12}^2 \ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}\right)}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{\pi \vec{r}_{1'2'}} \left[\frac{2\vec{r}_{11'} \vec{r}_{22'}}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2} - \frac{\vec{r}_{11'} \vec{r}_{12'}}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{12'}^2} - \frac{\vec{r}_{21'} \vec{r}_{22'}}{\vec{r}_{21'}^2 \vec{r}_{22'}^2} \right] - (\psi(1) + \ln 2) \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_M^{(B)} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle \\ &+ \frac{\alpha_s \beta_0}{8\pi^2} \left[\delta(\vec{r}_{11'}) \left(\frac{1}{(\vec{r}_{22'})_R} - \frac{1}{\vec{r}_{12'}^2} \right) + \delta(\vec{r}_{22'}) \left(\frac{1}{(\vec{r}_{11'})_R} - \frac{1}{\vec{r}_{21'}^2} \right) \right], \quad (3.51) \end{aligned}$$

где $\hat{K}_M^{(B)}$ — это ядро БФКЛ в ГП в мебиусовской форме

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{K}_M^{(B)} | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d\vec{r}_0 \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}$$

$$\times \left[\delta(\vec{r}_{11'})\delta(\vec{r}_{02'}) + \delta(\vec{r}_{01'})\delta(\vec{r}_{22'}) - \delta(\vec{r}_{11'})\delta(r_{22'}) \right]. \quad (3.52)$$

Мебиусовская форма \hat{U} представима в виде суммы (3.51) и (3.16),

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \alpha_s \hat{U}_M | \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left\{ \delta(\vec{r}_{11'})\delta(\vec{r}_{02'}) \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) \right] + \delta(\vec{r}_{22'})\delta(\vec{r}_{01'}) \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2} \right) + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{02}^2} \right) \right] \Big\} \\ &+ \frac{1}{\pi \vec{r}_{1'2'}^2} \left[\frac{2\vec{r}_{11'}\vec{r}_{22'}}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2} - \frac{\vec{r}_{11'}\vec{r}_{12'}}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{12'}^2} - \frac{\vec{r}_{21'}\vec{r}_{22'}}{\vec{r}_{21'}^2 \vec{r}_{22'}^2} \right] - (\psi(1) + \ln 2) \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_M^B | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle \\ &+ \frac{\alpha_s \beta_0}{8\pi^2} \left[\delta(\vec{r}_{11'}) \left(\frac{1}{(\vec{r}_{22'})_R} - \frac{1}{\vec{r}_{12'}^2} \right) + \delta(\vec{r}_{22'}) \left(\frac{1}{(\vec{r}_{11'})_R} - \frac{1}{\vec{r}_{21'}^2} \right) \right]. \quad (3.53) \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что перевод (3.40) в мебиусовскую форму в координатном пространстве в соответствие с прескрипцией (3.22) в точности приводит к (3.53).

3.5 Обсуждение

Итак, мы обсудили связь между мебиусовским и полным представлениями калибровочно инвариантных операторов, уделив особое внимание ядру БФКЛ и оператору U , приводящему ядро БФКЛ к квазиконформному виду.

В этом представлении ядро БФКЛ в ГП инвариантно относительно конформных преобразований [40], а в СГП может быть преобразовано к простой квазиконформной форме. Важен вопрос восстановления полной формы ядра по его мебиусовской форме. В общем случае понятно, что операторы не могут быть восстановлены по своим квазиконформным формам, так как эти формы действуют в суженном пространстве функций. Более того, в общем случае мебиусовская форма может быть явно выписана только в координатном представлении. Преобразование в импульсное представление может быть невозможно

из-за сингулярностей при совпадающих прицельных параметрах. Однако для ядра БФКЛ мебиусовская и полная формы ядра эквивалентны. Причина этому — калибровочная инвариантность и ИК стабильность ядра.

Мы показали, что любой калибровочно инвариантный ИК стабильный двухточечный оператор допускает восстановление полной формы по своей мебиусовской форме. Мы показали также, что восстановленная форма единственна с точностью до членов пропорциональных $\delta(\vec{q}_1)$ или $\delta(\vec{q}_2)$ и симметрии относительно перестановки реджеонов. Для оператора U , приводящего ядро БФКЛ к квазиконформному виду, воспользовавшись построенной процедурой, мы получили мебиусовскую и полную формы. Изначально этот оператор был получен в виде суммы двух частей, одна из которых была построена в полной форме в импульсном представлении, а другая в мебиусовской форме в координатном представлении.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Уравнение эволюции по быстроте для барионной вильсоновской петли в ГП, СГП, его квазиконформная форма, линеаризованная форма.
2. Уравнения эволюции по быстроте для квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГП, их квазиконформная форма.
3. Решение уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед.
4. Импакт факторы эксклюзивного дифракционного фоторождения двух струй в СГП, продольно поляризованного легкого векторного мезона в СГП, трех струй в ГП в общей кинематике.
5. Процедура восстановления полной формы калибровочно инвариантного оператора по его мебиусовской форме.
6. Полная и мебиусовская формы оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду.

Я искренне благодарен своему научному консультанту В. С. Фадину за плодотворные обсуждения, своим соавторам Я. Балицкому, Р. Буссари, С. Валлону, Р. Е. Герасимову, Д. Ю. Иванову, А. Папа, В. С. Фадину, Р. Фиоре, Л. Шимановскому за сотрудничество, А. С. Аракчееву, Е. М. Балдину, А. Боброву, Л. В. Кардапольцеву, М. Г. Козлову, Р. Н. Ли, А. И. Мильштейну, А. В. Резниченко, И. Г. Соколовой, А. Л. Фельдману за обсуждение научных и организационных вопросов.

Основные результаты опубликованы в следующих работах:

1. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Towards a complete next-to-logarithmic description of forward exclusive diffractive dijet electroproduction at HERA: real corrections // *Phys. Rev. D.* – 2019. – Vol. 100. – P. 074020.
2. Boussarie R., Grabovsky A. V., Ivanov D. Y., Szymanowski L., Wallon S. Next-to-Leading Order Computation of Exclusive Diffractive Light Vector Meson Production in a Saturation Framework // *Phys. Rev. Lett.* – 2017. – Vol. 119. – P. 072002.
3. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. On the one loop $\gamma^{(*)} \rightarrow q\bar{q}$ impact factor and the exclusive diffractive cross sections for the production of two or three jets // *JHEP.* – 2016. – Vol. 11. – P. 149.
4. Grabovsky A. V. On the low-x NLO evolution of 4 point colorless operators // *JHEP.* – 2015. – Vol. 09. – P. 194.
5. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact factor for high-energy two and three jets diffractive production // *JHEP.* – 2014. – Vol. 09. – P. 026.
6. Balitsky I., Grabovsky A. V. NLO evolution of 3-quark Wilson loop operator // *JHEP.* – 2015. – Vol. 01. – P. 009.
7. Grabovsky A. V. Connected contribution to the kernel of the evolution equation for 3-quark Wilson loop operator // *JHEP.* – 2013. – Vol. 09. – P. 141.
8. Grabovsky A. V. On the solution to the NLO forward BFKL equation // *JHEP.* – 2013. – Vol. 09. – P. 098.
9. Gerasimov R. E., Grabovsky A. V. Evolution equation for 3-quark Wilson loop operator // *JHEP.* – 2013. – Vol. 04. – P. 102.

10. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V., Papa A. Connection between complete and Moebius forms of gauge invariant operators // Nucl. Phys. B. – 2012. – Vol. 856. – P. 111.

Частичные результаты и доклады на конференциях опубликованы в следующих работах:

11. Boussarie R., Grabovsky A. V., Ivanov D. Y., Szymanowski L., Wallon S. NLO exclusive diffractive processes with saturation // PoS. – 2018. – Vol. DIS2017. – P. 062.
12. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact Factor for Exclusive Diffractive Dijet Production with NLO Accuracy // AIP Conf. Proc. – 2017. – Vol. 1819. – P. 030009.
13. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. NLO impact factor for diffractive dijet production in the shockwave formalism // PoS. – 2016. – Vol. DIS2016. – P. 170.
14. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Photon dissociation into two and three jets: initial and final state corrections // Acta Phys. Polon. Supp. B. – 2015. – Vol. 8. – P. 897.
15. Grabovskiy A. Higher Fock States in CGC // PoS. – 2015. – Vol. DIS2015. – P. 074.
16. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact factor for high-energy two and three jets diffractive production // AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1654. – P. 030005.
17. Grabovsky A. V. Low- x Evolution Equation for Proton Green Function // Acta Phys. Polon. Supp. B. – 2014. – Vol. 7. – P. 493.

Приложение А.

$SU(3)$ -тождества

Здесь мы приводим список используемых $SU(3)$ -тождеств.

$$U_i \cdot U_j \cdot U_k = (U_i U_l^\dagger) \cdot (U_j U_l^\dagger) \cdot (U_k U_l^\dagger) = (U_l^\dagger U_i) \cdot (U_l^\dagger U_j) \cdot (U_l^\dagger U_k), \quad (\text{A.1})$$

$$\varepsilon^{ijh} \varepsilon_{i'j'h'} (U_1)_i^{i'} (U_1)_j^{j'} = 2(U_1^\dagger)_{h'}^h, \quad U_1 \cdot U_1 \cdot U_3 = 2\text{tr}(U_1^\dagger U_3). \quad (\text{A.2})$$

Эти тождества следуют из определения группы, а именно из унитарности и того, что определитель U равен 1.

$$\left(U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot U_5 \cdot U_3 = -B_{123} + \frac{1}{2} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215}). \quad (\text{A.3})$$

Это тождество можно проверить, используя (1.43) с $l = 5$ и затем разлагая произведение символов Леви-Чивита:

$$\varepsilon_{ijh} \varepsilon^{i'j'h'} = \begin{vmatrix} \delta_i^{i'} & \delta_i^{j'} & \delta_i^{h'} \\ \delta_j^{i'} & \delta_j^{j'} & \delta_j^{h'} \\ \delta_h^{i'} & \delta_h^{j'} & \delta_h^{h'} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Следующее записывается так,

$$\begin{aligned} 0 &= [(U_0 U_5^\dagger U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_1 \cdot U_2 - U_1 \cdot U_2 \cdot U_5 \text{tr}(U_0^\dagger U_3) \text{tr}(U_5^\dagger U_0) \\ &+ \text{tr}(U_0 U_5^\dagger) (U_2 U_0^\dagger U_3 + U_3 U_0^\dagger U_2) \cdot U_1 \cdot U_5 + (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_1 \\ &+ (U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_1 + (1 \leftrightarrow 2)] + (5 \leftrightarrow 0). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Это тождество связывает цветовые структуры в $\mathbf{G}_{12\langle 3 \rangle}$, $\mathbf{G}_{1\langle 23 \rangle}$ и $\mathbf{G}_{\langle 13 \rangle 2}$. Путем преобразования $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ можно получить еще 2 тождества и полностью исключить 3 цветовые структуры из $\mathbf{G}_{12\langle 3 \rangle}$, $\mathbf{G}_{\langle 1 \rangle 23}$ и $\mathbf{G}_{1\langle 2 \rangle 3}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}(U_0^\dagger U_2) (U_0 U_5^\dagger U_3 + U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_1 \cdot U_5 \\ &- (U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_1 - (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_2) \cdot U_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{tr} (U_5 U_0^\dagger) (U_2 U_5^\dagger U_3 + U_3 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_1 \\
& + (U_3 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \cdot U_1 + (U_5 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_3) \cdot U_0 \cdot U_1 \\
& - (U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_5 - (U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot U_5 \\
& + (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 + (U_2 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_0. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Это тождество связывает все цветовые структуры в $\mathbf{G}_{1\langle 23 \rangle}$ и две структуры в $\mathbf{G}_{\langle 123 \rangle}$. После преобразования $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ оно переходит в 5 разных тождеств, что позволяет избавиться от 6 структур.

$$\begin{aligned}
0 & = \operatorname{tr} (U_0^\dagger U_2) (U_0 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& + (U_0 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_1 + U_1 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& - \operatorname{tr} (U_0 U_5^\dagger) (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& - (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 - (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \\
& - (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 + (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \\
& + (U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_3) \cdot U_0 - (U_2 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_0 + (5 \leftrightarrow 0). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Это тождество связывает 2 цветовые структуры в $\mathbf{G}_{\langle 12 \rangle 3}$ и одну структуру в $\mathbf{G}_{\langle 123 \rangle}$. После преобразования $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ оно также переходит в 5 разных тождеств, что позволяет избавиться от 6 структур.

$$\begin{aligned}
0 & = [U_0 \cdot U_1 \cdot U_2 \operatorname{tr} (U_0^\dagger U_5) \operatorname{tr} (U_5^\dagger U_3) \\
& - \operatorname{tr} (U_5 U_0^\dagger) (U_1 U_5^\dagger U_3 + U_3 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 \cdot U_2 + (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_2 \\
& + (U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_3) \cdot U_2 + (1 \leftrightarrow 2)] - (5 \leftrightarrow 0). \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Это тождество связывает две цветовые структуры в $\mathbf{G}_{\langle 13 \rangle 2}$, 2 цветовые структуры в $\mathbf{G}_{1\langle 23 \rangle}$ и одну структуру в $\mathbf{G}_{12\langle 3 \rangle}$. После преобразования $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ оно переходит в 2 разные структуры, что позволяет избавиться от еще трех структур.

$$\begin{aligned}
0 & = 2 \operatorname{tr} (U_5 U_0^\dagger) (U_2 U_5^\dagger U_3 + U_3 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_1 \\
& + (U_0 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_3 + U_3 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (U_0 U_5^\dagger U_2 - U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_1 - U_1 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 \\
& + (U_0 U_5^\dagger U_3 - U_3 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_1 - U_1 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 - (5 \leftrightarrow 0). \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Эта тождество связывает 3 цветовые структуры в $\mathbf{G}_{\langle 132 \rangle}$ и одну цветовую структуру в $\mathbf{G}_{1\langle 23 \rangle}$. После преобразования $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ оно переходит в 2 разных тождества, что позволяет избавиться от еще трех структур.

Все эти тождества (A.5–A.9) можно проверить, используя (1.43) с $l = 1$ и затем раскладывая произведение символов Леви-Чивита с помощью (A.4).

$$\begin{aligned}
0 & = 2tr(U_0^\dagger U_3) (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_5 - (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \\
& - (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_3) \cdot U_0 - 2 (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& - (U_1 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_3) \cdot U_0 \cdot U_5 - (U_3 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_5 + (1 \leftrightarrow 2). \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

Это тождество можно доказать непосредственно, используя (1.46).

$$\begin{aligned}
0 & = 2tr(U_0^\dagger U_5) (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_3 - tr(U_0^\dagger U_1) (U_0 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& + (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 + (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \\
& + (U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 + (U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3 \\
& - (U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_3) \cdot U_0 \\
& - (U_1 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \cdot U_3 - (U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_3 + (1 \leftrightarrow 2). \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 & = tr(U_0^\dagger U_2) (U_0 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 - 2 (U_1 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& + U_0 \cdot U_3 \cdot U_5 tr(U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2) + U_0 \cdot U_3 \cdot U_5 tr(U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_1) \\
& - (U_1 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_3) \cdot U_0 \cdot U_5 - (U_3 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 \cdot U_5 \\
& - (U_1 U_5^\dagger U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \cdot U_3 - (U_5 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 \cdot U_3 \\
& - (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 - (U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 \\
& - (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 - (U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_2) \cdot U_3. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \text{tr} (U_5^\dagger U_1) (U_2 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_3 \\
&+ (U_0 U_5^\dagger U_1) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_2) \cdot U_5 + (U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_2 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 \\
&+ (U_2 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_0) \cdot U_3 \cdot U_5 - (U_5 U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_0 \cdot U_3 - (1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 5).
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Эти тождества (A.11–A.13) также можно проверить, используя (1.43) с $l = 3$ и затем раскладывая произведение символов Леви-Чивиты с помощью (A.4).

$$\begin{aligned}
0 &= (U_2 U_5^\dagger U_0 - U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_3 U_0^\dagger U_1 - U_1 U_0^\dagger U_3) \cdot U_5 \\
&+ (U_3 U_5^\dagger U_2 - U_2 U_5^\dagger U_3) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_1 - U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \\
&+ (U_1 U_0^\dagger U_2 - U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot (U_3 U_5^\dagger U_0 - U_0 U_5^\dagger U_3) \cdot U_5 + (0 \leftrightarrow 5).
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Это тождество можно доказать, используя (1.43) с $l = 5$ и (A.4).

$$\begin{aligned}
0 &= (U_1 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_2 \cdot U_3 \\
&+ 2(U_3 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_3) \cdot U_1 \cdot U_2 - U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr}(U_0^\dagger U_5) \\
&+ 3(U_3 U_0^\dagger U_1 + U_1 U_0^\dagger U_3) \cdot U_2 \cdot U_5 - 3U_1 \cdot U_2 \cdot U_5 \text{tr}(U_0^\dagger U_3) + (1 \leftrightarrow 2).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Это тождество необходимо для вычисления вклада кварка. Его можно доказать с помощью (1.43) с $l = 2$ и (A.4).

Приложение Б.

Компоненты ядер

Функции G и H имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_1 = & - \left(\frac{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{12}^2 + \vec{r}_{02}^2 (\vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{14}^2) + (\vec{r}_{01}^2 + \vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{12}^2) \vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{24}^2} \right. \\
& + \frac{\vec{r}_{04}^2 - 2\vec{r}_{02}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2 (\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{02}^2)} + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2} \\
& \times \left[\frac{2\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^4}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2} - \frac{(\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{04}^2) (\vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{01}^2) \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^4 (\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{02}^2)} \right] \\
& \times \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) - \frac{1}{2\vec{r}_{04}^4} + (0 \leftrightarrow 4, 1 \leftrightarrow 2). \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2 = & -\frac{1}{\vec{r}_{04}^4} + \ln \left(\frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{24}^2} \right) \tag{B.2} \\
& \times \left(\frac{1}{(\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{24}^2)} \left[\left(\frac{1}{\vec{r}_{04}^4} + \frac{1}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) \frac{(\vec{r}_{02}^2 + \vec{r}_{24}^2)}{2} - \frac{2}{\vec{r}_{04}^2} \right] - \frac{\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{24}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{24}^2} \right).
\end{aligned}$$

$$G_3 = G_2|_{1 \leftrightarrow 2}. \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
G_4 = & \left(\frac{(\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{24}^2) (\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{24}^2)}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2 \vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{02}^2 + \vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{24}^2 \vec{r}_{04}^2} \right. \\
& + \frac{1}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^4}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} \\
& \left. + \left(\frac{(\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{14}^2) (\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{24}^2)}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{02}^2 + \vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) \vec{r}_{12}^2 \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right) - G_1. \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$G_5 = \frac{2}{\vec{r}_{04}^4} + \left(\frac{1}{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{14}^2} \left[\frac{4}{\vec{r}_{04}^2} - \frac{\vec{r}_{01}^2 + \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^4} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2} \right] - \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \tag{B.5}$$

$$G_6 = \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{24}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{14}^2 (\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{02}^2) + \vec{r}_{01}^2 (\vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{12}^2 + \vec{r}_{24}^2)}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \tag{B.6}$$

$$G_7 = G_5|_{1 \leftrightarrow 2}, \quad G_8 = G_6|_{1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 4}. \tag{B.7}$$

$$G_9 = \frac{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{04}^2 + \vec{r}_{14}^2}{4\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \quad (\text{B.8})$$

Во всех этих выражениях $i \leftrightarrow j$ обозначает перестановку. Как и раньше, это означает, что мы должны выполнить замену $\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$.

$$H_1 = \frac{1}{8} \left[\frac{(\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{12}^2) (\vec{r}_{14}^2 (\vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{24}^2) + \vec{r}_{04}^2 (\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{12}^2))}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \quad (\text{B.9})$$

$$H_2 = \frac{1}{8} \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{24}^2} + 2\frac{\vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{04}^2 + \vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{02}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \quad (\text{B.10})$$

$$H_3 = \frac{1}{8} \left[\frac{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{02}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \quad (\text{B.11})$$

$$H_4 = \frac{-1}{4\vec{r}_{04}^4} - \frac{1}{8} \left[\frac{\vec{r}_{12}^2(\vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{01}^2)(\vec{r}_{02}^2 + \vec{r}_{24}^2)}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^4}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2 + \vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2} + \frac{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{02}^2 - \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2 - \vec{r}_{14}^2} \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2 + \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{14}^2} - \frac{4\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^4} + \frac{8}{\vec{r}_{04}^2} \right) + \frac{1}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{02}^2\vec{r}_{14}^2} \left(\frac{2\vec{r}_{12}^4}{\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{14}^2} + \frac{4\vec{r}_{02}^2\vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^4} - \frac{8\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{04}^2} \right) \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \quad (\text{B.12})$$

$$H_5 = \frac{1}{8} \left[\frac{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{14}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{34}^2\vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{34}^2\vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{34}^2\vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{34}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{34}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{14}^2\vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{03}^2 - \vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{34}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{03}^2 - \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2 - \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{34}^2\vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{04}^2\vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2\vec{r}_{03}^2\vec{r}_{04}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right), \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}
H_6 = \frac{1}{8} & \left[\frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2 - \vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2} \right. \\
& - \frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{34}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{24}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{34}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{34}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{03}^2 - \vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{34}^2} \\
& + \frac{\vec{r}_{23}^2 - \vec{r}_{03}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{24}^2} + 2 \frac{\vec{r}_{04}^2 - \vec{r}_{14}^2 - \vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{04}^2} + \frac{\vec{r}_{24}^2 - \vec{r}_{14}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{02}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{24}^2} \\
& + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{34}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{34}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{24}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{14}^2} \\
& \left. + \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{34}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{14}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{14}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{04}^2 \vec{r}_{34}^2 \vec{r}_{02}^2} \right] \ln \left(\frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{14}^2} \right). \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

Приложение В.

Построение 4-точечного конформного оператора

Здесь мы выводим уравнение эволюции для оператора

$$\begin{aligned} & \left((U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_5 \cdot U_3 - 2B_{123} \right) \\ & = (-3B_{123} + \frac{1}{2}(B_{155}B_{325} + B_{255}B_{315} - B_{355}B_{215})). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Используя иерархию Балицкого, (1.46) и (A.10–A.12), после свертки получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left((U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_5 \cdot U_3 - 2B_{123} \right) = \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \int d\vec{r}_0 \\ & \times \left(A_{35} \frac{\vec{r}_{35}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{05}^2} + A_{13} \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{01}^2} + A_{23} \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} + A_{15} \frac{\vec{r}_{15}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{05}^2} + A_{25} \frac{\vec{r}_{25}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{05}^2} + A_{12} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{35} = & -2 \left(U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot U_5 \cdot U_3 + \left(U_3 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_3 \right) \cdot U_5 \cdot U_2 \\ & + \left(U_3 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_3 \right) \cdot U_5 \cdot U_1 \\ & + \left(U_2 U_5^\dagger U_1 + U_1 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot \left(U_3 U_0^\dagger U_5 + U_5 U_0^\dagger U_3 \right) \cdot U_0 \\ & - \left(U_2 U_5^\dagger U_0 \right) \cdot \left(U_3 U_0^\dagger U_1 \right) \cdot U_5 - \left(U_0 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot \left(U_1 U_0^\dagger U_3 \right) \cdot U_5 \\ & - \left(U_0 U_5^\dagger U_1 \right) \cdot \left(U_2 U_0^\dagger U_3 \right) \cdot U_5 - \left(U_1 U_5^\dagger U_0 \right) \cdot \left(U_3 U_0^\dagger U_2 \right) \cdot U_5. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} A_{13} = & \left(U_0 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot \left(U_1 U_0^\dagger U_3 \right) \cdot U_5 + \left(U_2 U_5^\dagger U_0 \right) \cdot \left(U_3 U_0^\dagger U_1 \right) \cdot U_5 \\ & + \left(U_3 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2 \right) \cdot U_0 \cdot U_5 + \left(U_2 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_3 \right) \cdot U_0 \cdot U_5 \\ & - 2 \left(U_1 U_0^\dagger U_3 + U_3 U_0^\dagger U_1 \right) \cdot U_0 \cdot U_2 - \left(U_3 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_3 \right) \cdot U_1 \cdot U_5 \\ & - \left(U_1 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_1 \right) \cdot U_3 \cdot U_5 + 4U_1 \cdot U_2 \cdot U_3. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
A_{15} = & \left[\text{tr} (U_0^\dagger U_1) (U_2 U_5^\dagger U_0 + U_0 U_5^\dagger U_2) + \text{tr} (U_5^\dagger U_0) (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \right] \\
& \cdot U_3 \cdot U_5 + (U_2 U_5^\dagger U_0) \cdot (U_5 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 + (U_0 U_5^\dagger U_2) \cdot (U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_3 \\
& - 2U_5 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr} (U_5^\dagger U_1) - 2U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 - 4 (U_1 U_5^\dagger U_2 + U_2 U_5^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_5 \\
& + (U_5 U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2) \cdot U_0 \cdot U_3 + (U_2 U_5^\dagger U_1 U_0^\dagger U_5) \cdot U_0 \cdot U_3. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = & -2 (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \cdot U_3 \cdot U_0 - \text{tr} (U_5^\dagger U_0) (U_1 U_0^\dagger U_2 + U_2 U_0^\dagger U_1) \\
& \cdot U_3 \cdot U_5 + 4U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 + 2U_5 \cdot U_2 \cdot U_3 \text{tr} (U_5^\dagger U_1) + 2U_5 \cdot U_1 \cdot U_3 \text{tr} (U_5^\dagger U_2) \\
& - U_0 \cdot U_3 \cdot U_5 (\text{tr} (U_0^\dagger U_1 U_5^\dagger U_2) + \text{tr} (U_0^\dagger U_2 U_5^\dagger U_1)). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$A_{23} = A_{13}|_{\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2}, \quad A_{25} = A_{15}|_{\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2}. \tag{B.7}$$

Наш анзац для составных конформных операторов выглядит следующим образом [25]

$$O^{conf} = O + \frac{1}{2} \frac{\partial O}{\partial \eta} \left| \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \rightarrow \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{mn}^2 a}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \right) \right., \tag{B.8}$$

где a – произвольная постоянная. Таким образом,

$$\begin{aligned}
B_{123}^{conf} = & B_{123} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_{123}}{\partial \eta} \left| \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \rightarrow \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{mn}^2 a}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \right) \right. \\
= & B_{123} + \frac{\alpha_s 3}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left[\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln \left(\frac{a \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \right) \right. \\
& \left. \times \left(-B_{123} + \frac{1}{6} (B_{100} B_{320} + B_{200} B_{310} - B_{300} B_{210}) \right) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3) \right], \tag{B.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-3B_{123} + \frac{1}{2} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215}))^{conf} \\
= & (-3B_{123} + \frac{1}{2} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215})) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (-3B_{123} + \frac{1}{2} (B_{155} B_{325} + B_{255} B_{315} - B_{355} B_{215})) \left| \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \rightarrow \frac{\vec{r}_{mn}^2}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{mn}^2 a}{\vec{r}_{im}^2 \vec{r}_{in}^2} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-3B_{123} + \frac{1}{2}(B_{155}B_{325} + B_{255}B_{315} - B_{355}B_{215})) \\
&+ \frac{\alpha_s}{8\pi^2} \int d\vec{r}_0 \left(A_{35} \frac{\vec{r}_{35}^2}{r_{03}^2 r_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{35}^2 a}{r_{03}^2 r_{05}^2} \right) + A_{13} \frac{\vec{r}_{13}^2}{r_{03}^2 r_{01}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{13}^2 a}{r_{03}^2 r_{01}^2} \right) \right. \\
&A_{15} \frac{\vec{r}_{15}^2}{r_{01}^2 r_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{15}^2 a}{r_{01}^2 r_{05}^2} \right) + A_{23} \frac{\vec{r}_{23}^2}{r_{03}^2 r_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{23}^2 a}{r_{03}^2 r_{02}^2} \right) \\
&\left. + A_{25} \frac{\vec{r}_{25}^2}{r_{02}^2 r_{05}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{25}^2 a}{r_{02}^2 r_{05}^2} \right) + A_{12} \frac{\vec{r}_{12}^2}{r_{01}^2 r_{02}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 a}{r_{01}^2 r_{02}^2} \right) \right). \tag{B.10}
\end{aligned}$$

В 3-глюонном приближении

$$\begin{aligned}
&(-3B_{123} + \frac{1}{2}(B_{155}B_{325} + B_{255}B_{315} - B_{355}B_{215})) \\
&\stackrel{3g}{=} 3(-B_{123} + B_{155} + B_{325} + B_{255} + B_{315} - B_{355} - B_{215} - 6). \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&(-3B_{123} + \frac{1}{2}(B_{155}B_{325} + B_{255}B_{315} - B_{355}B_{215}))^{conf} \\
&\stackrel{3g}{=} 3(-B_{123} + B_{155} + B_{325} + B_{255} + B_{315} - B_{355} - B_{215} - 6) + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (-B_{123} \\
&+ B_{155} + B_{325} + B_{255} + B_{315} - B_{355} - B_{215} - 6) \left| \frac{\vec{r}_{mn}^2}{r_{im}^2 r_{in}^2} \rightarrow \frac{\vec{r}_{mn}^2}{r_{im}^2 r_{in}^2} \ln \left(\frac{\vec{r}_{mn}^2 a}{r_{im}^2 r_{in}^2} \right) \right. \\
&= 3(-B_{123}^{conf} + B_{155}^{conf} + B_{325}^{conf} + B_{255}^{conf} + B_{315}^{conf} - B_{355}^{conf} - B_{215}^{conf} - 6). \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Приложение Г.

Необходимые для линеаризации интегралы

В конформно инвариантных интегралах можно положить $\vec{r}_0 = 0$ и выполнить инверсию, затем вычислить интеграл, используя интегралы из приложения А в [95] и

$$\int \frac{d^{2+2\epsilon} r_{15}}{\pi^{1+\epsilon} \Gamma(1-\epsilon)} \frac{r_{35}^2}{r_{15}^2 r_{25}^2} = \frac{r_{13}^2 + r_{23}^2 - r_{12}^2}{r_{12}^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln(r_{12}^2) \right) + O(\epsilon), \quad (\text{Г.1})$$

затем снова выполнить инверсию и восстановить \vec{r}_0 . Коэффициенты при $\zeta(3)$ восстанавливаются из конформной инвариантности [36].

$$\int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} Z_{12} = \frac{\vec{r}_{32}^2}{8\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{32}^2 \vec{r}_{10}^2}{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{20}^2} \right) - \frac{\vec{r}_{12}^2}{8\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{30}^2}{\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{20}^2} \right). \quad (\text{Г.2})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} F_{100} + (2 \leftrightarrow 3) &= \left(\frac{3\vec{r}_{23}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \\ &+ \left(\frac{3\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\vec{r}_{13}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \\ &+ \left(\frac{3\vec{r}_{13}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{3\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \\ &+ \frac{3}{2} \tilde{S}_{123} I \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}, \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2}, \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \\ &+ 6\pi\zeta(3) (\delta(\vec{r}_{20}) + \delta(\vec{r}_{30})) + 24\pi\zeta(3)\delta(\vec{r}_{10}) - 36\pi\zeta(3)\delta_{23}\delta(\vec{r}_{20}) \\ &- 36\pi\zeta(3)(\delta_{13} + \delta_{12})\delta(\vec{r}_{10}) + 72\pi\zeta(3)\delta_{13}\delta_{12}\delta(\vec{r}_{10}). \end{aligned} \quad (\text{Г.3})$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$, если $\vec{r}_i = \vec{r}_j$, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае,

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= \int_0^1 \frac{dx}{a(1-x) + bx - cx(1-x)} \ln \left(\frac{a(1-x) + bx}{cx(1-x)} \right) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \delta(1-x_1-x_2-x_3)}{(ax_1 + bx_2 + cx_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{1}{cx(1-x)z + (b(1-x) + ax)(1-z)} \end{aligned} \quad (\text{Г.4})$$

– симметричная функция своих аргументов, определенная в [104],

$$\tilde{S}_{123} = \left(\frac{\vec{r}_{12}^4}{\vec{r}_{01}^4 \vec{r}_{02}^4} + \frac{\vec{r}_{13}^4}{\vec{r}_{01}^4 \vec{r}_{03}^4} + \frac{\vec{r}_{23}^4}{\vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{03}^4} - \frac{2\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^4 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{2\vec{r}_{23}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^4 \vec{r}_{03}^2} - \frac{2\vec{r}_{13}^2 \vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^4} \right). \quad (\Gamma.5)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} F_{230} + (2 \leftrightarrow 3) &= \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{2\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{3\vec{r}_{23}^2}{4\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \\ &+ \left(\frac{3\vec{r}_{13}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} - \frac{3\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \\ &+ \left(\frac{3\vec{r}_{12}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} - \frac{3\vec{r}_{13}^2}{4\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} + \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) \\ &- \frac{3}{2} \tilde{S}_{123} I \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2}, \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2}, \frac{\vec{r}_{23}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \\ &- 12\pi\zeta(3) (\delta(\vec{r}_{20}) + \delta(\vec{r}_{30}) + \delta(\vec{r}_{10})) + 36\pi\zeta(3) \delta_{23} \delta(\vec{r}_{20}) \\ &+ 36\pi\zeta(3) (\delta_{13} + \delta_{12}) \delta(\vec{r}_{10}) - 72\pi\zeta(3) \delta_{13} \delta_{12} \delta(\vec{r}_{10}). \quad (\Gamma.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\vec{r}_5}{\pi} (\{F_{150} + (0 \leftrightarrow 5)\} + (2 \leftrightarrow 3)) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{02}^2} + \frac{\vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{03}^2} \right) \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2} \right) \\ &+ \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{03}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right) + \frac{\vec{r}_{23}^2}{2\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{03}^2} \ln^2 \left(\frac{\vec{r}_{02}^2 \vec{r}_{13}^2}{\vec{r}_{01}^2 \vec{r}_{23}^2} \right). \quad (\Gamma.7) \end{aligned}$$

Приложение Д.

Конечная часть виртуальных поправок

Интегралы для импакт фактора рождения струй Необходимы следующие интегралы

$$I_1^k(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \Delta_1, \Delta_2) \equiv \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{l} (l_\perp^k)}{[(\vec{l} - \vec{q}_1)^2 + \Delta_1] [(\vec{l} - \vec{q}_2)^2 + \Delta_2] \vec{l}^2}, \quad (\text{Д.1})$$

$$I_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \Delta_1, \Delta_2) \equiv \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{l}}{[(\vec{l} - \vec{q}_1)^2 + \Delta_1] [(\vec{l} - \vec{q}_2)^2 + \Delta_2]}, \quad (\text{Д.2})$$

$$I_3^k(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \Delta_1, \Delta_2) \equiv \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{l} (l_\perp^k)}{[(\vec{l} - \vec{q}_1)^2 + \Delta_1] [(\vec{l} - \vec{q}_2)^2 + \Delta_2]}, \quad (\text{Д.3})$$

$$I^{jk}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \Delta_1, \Delta_2) \equiv \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{l} (l_\perp^j l_\perp^k)}{[(\vec{l} - \vec{q}_1)^2 + \Delta_1] [(\vec{l} - \vec{q}_2)^2 + \Delta_2] \vec{l}^2}. \quad (\text{Д.4})$$

Аргументы этих интегралов будут различными для каждой диаграммы, поэтому мы их явно выпишем при обсуждении диаграмм.

Явные выражения для первых трех интегралов (Д.1-Д.3) получаются непосредственным вычислением с помощью фейнмановских параметров. Мы используем следующие переменные:

$$\rho_1 \equiv \frac{(\vec{q}_{12}^2 + \Delta_{12}) - \sqrt{(\vec{q}_{12}^2 + \Delta_{12})^2 + 4\vec{q}_{12}^2 \Delta_2}}{2\vec{q}_{12}^2}, \quad (\text{Д.5})$$

$$\rho_2 \equiv \frac{(\vec{q}_{12}^2 + \Delta_{12}) + \sqrt{(\vec{q}_{12}^2 + \Delta_{12})^2 + 4\vec{q}_{12}^2 \Delta_2}}{2\vec{q}_{12}^2}, \quad (\text{Д.6})$$

где $\Delta_{ij} = \Delta_i - \Delta_j$.

Имеем

$$I_1^k = \frac{q_{1\perp}^k}{2 [\vec{q}_{12}^2 (\vec{q}_1^2 + \Delta_1) (\vec{q}_2^2 + \Delta_2) - (\vec{q}_1^2 - \vec{q}_2^2 + \Delta_{12}) (\vec{q}_1^2 \Delta_2 - \vec{q}_2^2 \Delta_1)]} \quad (\text{Д.7})$$

$$\times \left\{ \frac{(\vec{q}_2^2 + \Delta_2) \vec{q}_{12}^2 + \vec{q}_2^2 (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_2 (\Delta_{21} - 2\vec{q}_1^2)}{(\rho_1 - \rho_2) \vec{q}_{12}^2} \right. \\ \left. \times \ln \left[\left(\frac{-\rho_1}{1 - \rho_1} \right) \left(\frac{1 - \rho_2}{-\rho_2} \right) \right] + (\vec{q}_2^2 + \Delta_2) \ln \left[\frac{\Delta_2 (\vec{q}_1^2 + \Delta_1)^2}{\Delta_1 (\vec{q}_2^2 + \Delta_2)^2} \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\},$$

$$I_2 = \frac{1}{\vec{q}_{12}^2 (\rho_1 - \rho_2)} \ln \left[\left(\frac{-\rho_1}{1 - \rho_1} \right) \left(\frac{1 - \rho_2}{-\rho_2} \right) \right],$$

и

$$I_3^k = \frac{(\vec{q}_{12}^2 + \Delta_{12}) q_1^k + (\vec{q}_{21}^2 + \Delta_{21}) q_2^k}{2 (\rho_1 - \rho_2) (\vec{q}_{12}^2)^2} \ln \left[\left(\frac{-\rho_1}{1 - \rho_1} \right) \left(\frac{1 - \rho_2}{-\rho_2} \right) \right] \\ - \frac{q_{12}^k}{2\vec{q}_{12}^2} \ln \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right). \quad (\text{Д.8})$$

В некоторых случаях действительная часть Δ_1 или Δ_2 будет отрицательной и интегралы приобретут мнимую часть.

Последний интеграл (Д.4) можно разложить

$$I^{jk} = I_{11} (q_{1\perp}^j q_{1\perp}^k) + I_{12} (q_{1\perp}^j q_{2\perp}^k + q_{2\perp}^j q_{1\perp}^k) + I_{22} (q_{2\perp}^j q_{2\perp}^k), \quad (\text{Д.9})$$

с

$$I_{11} = -\frac{1}{2} \frac{[\vec{q}_2^2 q_{1\perp k} - (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) q_{2\perp k}]}{[\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 - (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2]^2} \left[\left(\frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{\vec{q}_1^2} \right) \ln \left(\frac{\vec{q}_1^2 + \Delta_1}{\Delta_1} \right) q_{1\perp}^k + (\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_{21}) I_3^k \right. \\ \left. + \{ \vec{q}_2^2 (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_{12}) + \Delta_1 \vec{q}_2^2 - \Delta_2 (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) \} I_1^k \right], \quad (\text{Д.10})$$

$$I_{12} = \frac{-1}{4 [\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 - (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2]} \ln \left(\frac{\vec{q}_1^2 + \Delta_1}{\Delta_1} \right) \\ + \frac{\vec{q}_2^2 (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)}{2 [\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 - (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2]^2} [(\vec{q}_1^2 + \Delta_1) (q_{1\perp k} I_1^k) + (q_{1\perp k} I_3^k)] \\ - \frac{(\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2) + (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2}{4 [\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 - (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2]^2} [(\vec{q}_2^2 + \Delta_2) (q_{1\perp k} I_1^k) + (q_{1\perp k} I_3^k)] + (1 \leftrightarrow 2), \quad (\text{Д.11})$$

$$I_{22} = I_{11}|_{(1 \leftrightarrow 2)}. \quad (\text{Д.12})$$

Последнее выражение наводит на мысль, что существует сингулярность при параллельных \vec{q}_1 и \vec{q}_2 . Однако, эта сингулярность не физическая. Она возникает только при разложении по данному набору тензоров $(q_1^j q_1^k, q_1^j q_2^k + q_2^j q_1^k, q_2^j q_2^k)$. Можно показать, что она исчезает при разложении по не минимальному набору тензоров $(q_1^j q_1^k, q_1^j q_2^k + q_2^j q_1^k, q_2^j q_2^k, g_\perp^{jk})$.

Диаграмма 4 Здесь интегралы имеют следующие аргументы

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= \vec{p}_1 - \left(\frac{x-z}{x}\right) \vec{p}_q, & \vec{q}_2 &= \left(\frac{x-z}{x}\right) (x\vec{p}_q - \bar{x}\vec{p}_q), \\ \Delta_1 &= (x-z)(\bar{x}+z)Q^2, & \Delta_2 &= -\frac{x(\bar{x}+z)}{\bar{x}(x-z)}\vec{q}_2^2 - i0.\end{aligned}\quad (\text{Д.13})$$

Запишем вклады в импакт факторы в этих переменных. Они имеют вид: вклад (продольный СГП) \times (продольный ГП):

$$(\phi_4)_{LL} = -\frac{4(x-z)(\bar{x}+z)}{z}[-\bar{x}(x-z)(z+1)I_2 + q_{2\perp k}(2x^2 - (2x-z)(z+1))I_1^k], \quad (\text{Д.14})$$

вклад (продольный СГП) \times (поперечный ГП):

$$\begin{aligned}(\phi_4)_{LT}^j &= (1-2x)p_{q1' \perp}^j (\phi_4)_{LL} \\ &- 4(x-z)(\bar{x}+z)(1-2x+z)[(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'})g_{\perp k}^j + q_{2\perp}^j p_{q1' \perp k}]I_1^k,\end{aligned}\quad (\text{Д.15})$$

вклад (поперечный СГП) \times (продольный ГП):

$$\begin{aligned}(\phi_4)_{TL}^i &= 2\{[(x-\bar{x}-z)q_{2\perp}^i q_{1\perp k} + (-8x\bar{x} - 6xz + 2z^2 + 3z + 1)q_{1\perp}^j q_{2\perp k}]I_1^k \\ &- 2[4x^2 - x(3z+5) + (z+1)^2]q_{2\perp k} I^{ik} + (x-\bar{x}-z)(\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1) I^i \\ &+ I_2[(x-\bar{x}-z)q_{2\perp}^i + \bar{x}(2(x-z)^2 - 5x + 3z + 1)q_{1\perp}^i] \\ &- \bar{x}[2(x-z)^2 - 5x + 3z + 1]I_3^i \\ &+ \frac{x\bar{x}(1-2x)}{z}[2q_{2\perp k} I^{ik} + I_3^i - q_{1\perp}^i(2q_{2\perp k} I_1^k + I_2)]\},\end{aligned}\quad (\text{Д.16})$$

вклад (поперечный СГП) \times (поперечный ГП):

$$\begin{aligned}(\phi_4)_{TT}^{ij} &= 2\bar{x}[q_{2\perp k} - (x-z)q_{1\perp k}](p_{q1' \perp}^i I^{jk} - g_{\perp}^{ij} p_{q1' \perp l} I^{kl}) \\ &+ [(z+1)((\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) p_{q1' \perp}^i - (\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'}) q_{2\perp}^i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x - \bar{x} - 2z)(x - \bar{x} - z)(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'})q_{1\perp}^i \Big] I_1^j \\
& + 2(x - z)[(2\bar{x} + z)(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'}) - \bar{x}(\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'})]I^{ij} \\
& + [(1 - z)((\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'})q_{2\perp}^j - (\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'})q_{1\perp}^j) - (1 - 2x)(\bar{x} - x + z)(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)p_{q1'\perp}^j]I_1^i \\
& - 2 \left[(x - z)(\bar{x}q_{1\perp}^j - (2\bar{x} + z)q_{2\perp}^j)p_{q1'\perp k} \right. \\
& + (1 - 2x)(4x^2 - (3z + 5)x + (z + 1)^2)q_{2\perp k}p_{q1'\perp}^j \Big] I^{ik} \\
& - \bar{x}(\bar{x} - x)(2(x - z)^2 - 5x + 3z + 1)p_{q1'\perp}^j I_3^i \\
& + \bar{x}(\bar{x} + z)(p_{q1'\perp}^i I_3^j - g_{\perp}^{ij}p_{q1'\perp k} I_3^k) \\
& + I_2 \left[g_{\perp}^{ij}((1 - z)(\vec{q}_2 \vec{p}_{q1'}) - \bar{x}(1 + x - z)(\vec{q}_1 \vec{p}_{q1'})) \right. \\
& + ((1 - z)q_{2\perp}^j - \bar{x}(1 + x - z)q_{1\perp}^j)p_{q1'\perp}^i \\
& \left. - (\bar{x} - x)((\bar{x} - x + z)q_{2\perp}^i - \bar{x}(2(x - z)^2 - 5x + 3z + 1)q_{1\perp}^i)p_{q1'\perp}^j \right] \\
& + I_1^k \left[g_{\perp}^{ij}((x - \bar{x} + z)(\vec{q}_1 \vec{p}_{q1'})q_{2\perp k} + (1 - z)(\vec{q}_2 \vec{p}_{q1'})q_{1\perp k} - (z + 1)(\vec{q}_1 \vec{q}_2)p_{q1'\perp k}) \right. \\
& + q_{1\perp}^j((x - \bar{x} + z)q_{2\perp k}p_{q1'\perp}^i - (z + 1)q_{2\perp}^i p_{q1'\perp k}) \\
& + q_{2\perp}^j((x - \bar{x} - 2z)(x - \bar{x} - z)q_{1\perp}^i p_{q1'\perp k} + (1 - z)q_{1\perp k} p_{q1'\perp}^i) \\
& \left. - (1 - 2x)((1 - 2x + z)q_{2\perp}^i q_{1\perp k} - (2z^2 + 3z - x(8\bar{x} + 6z) + 1)q_{1\perp}^i q_{2\perp k})p_{q1'\perp}^j \right] \\
& + \frac{x\bar{x}}{z} \left[(x - \bar{x})^2 p_{q1'\perp}^j (2q_{2\perp k} I^{ik} + I_3^i - q_{1\perp}^i (I_2 + 2q_{2\perp k} I_1^k)) \right. \\
& + p_{q1'\perp}^i (q_{1\perp}^j (I_2 + 2q_{2\perp k} I_1^k) - 2q_{2\perp k} I^{jk} - I_3^j) \\
& \left. + g_{\perp}^{ij}((\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'})(I_2 + 2q_{2\perp k} I_1^k) + p_{q1'\perp k} (2q_{2\perp l} I^{kl} + I_3^k)) \right]. \tag{D.17}
\end{aligned}$$

Диаграмма 5 Здесь интегралы имеют следующие аргументы

$$\vec{q}_1 = \vec{p}_{q1} - \frac{z}{x}\vec{p}_q, \quad \vec{q}_2 = \left(\frac{x - z}{x}\right)\vec{p}_3 - \frac{z}{x}\vec{p}_1, \tag{D.18}$$

$$\Delta_1 = \frac{z(x - z)}{x^2\bar{x}}(\vec{p}_{q2}^2 + x\bar{x}Q^2), \quad \Delta_2 = (x - z)(\bar{x} + z)Q^2, \tag{D.19}$$

С такими аргументами подкоренные выражения в (Д.6) являются полными квадратами

$$\rho_1 = -\frac{x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{q2}^2}, \quad \rho_2 = \frac{x(\bar{x} + z)}{\bar{x}(x - z)}. \tag{D.20}$$

В переменных (Д.18), вклады в импакт факторы имеют вид вклад (продольный СГП) \times (продольный ГП):

$$(\phi_5)_{LL} = \frac{4(x-z)(-2x(\bar{x}+z) + z^2 + z)}{xz} \times [\bar{x}(x-z)I_2 - (zq_{1\perp k} - x(\bar{x}+z)q_{2\perp k})I_1^k], \quad (\text{Д.21})$$

вклад (продольный СГП) \times (поперечный ГП):

$$(\phi_5)_{LT}^j = (\bar{x} - x)p_{q_{1'\perp}}^j (\phi_5)_{LL} + \frac{4(x-z)(x-\bar{x}-z)}{x} (zq_{1\perp}^k - x(\bar{x}+z)q_{2\perp}^k) p_{q_{1'\perp}} \left(g_{\perp k}^j I_1^l - g_{\perp k}^l I_1^j \right), \quad (\text{Д.22})$$

вклад (поперечный СГП) \times (продольный ГП):

$$(\phi_5)_{TL}^i = 2 \left[(x - \bar{x} - z) (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) - \bar{x}(x-z)^2 Q^2 + \left(\frac{z}{x} - x \right) \vec{q}_1^2 \right] I_1^i + \frac{2}{x} q_{1\perp}^i I_1^k \times [xq_{2\perp k}(-8x\bar{x} - 6xz + 2z^2 + 3z + 1) + 2q_{1\perp k}(2xz - 2x^2 + x - z^2)] + 2q_{2\perp}^i q_{1\perp k} (x - \bar{x} - z) I_1^k + 2\frac{\bar{x}}{x} (x(8x - 3) - 6xz + 2z^2 + z) I_1^i + \frac{2}{x} I_2 \times [xq_{2\perp}^i (x - \bar{x} - z) + q_{1\perp}^i (8x^3 - 6x^2(z+2) + x(z+3)(2z+1) - 2z^2)] - \frac{4}{x} [(x-z)(\bar{x}+z)q_{1\perp k} + x(4x^2 - x(3z+5) + (z+1)^2)q_{2\perp k}] I^{ik} - \frac{4}{z} x\bar{x}(x-\bar{x}) [q_{2\perp k} I^{ik} + I_3^i - q_{1\perp}^i (q_{2\perp k} I_1^k + I_2)] , \quad (\text{Д.23})$$

вклад (поперечный СГП) \times (поперечный ГП):

$$(\phi_5)_{TT}^{ij} = -2(x-z) \left[\frac{z}{x} (\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q_{1'}}) - (2\bar{x}+z)(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q_{1'}}) \right] I^{ij} + [-\bar{x}(x-z)^2 Q^2 p_{q_{1'\perp}}^i + (\bar{x} - x + 2z)(\bar{x} - x + z)(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q_{1'}}) q_{1\perp}^i - (\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q_{1'}})((z+1)q_{2\perp}^i - 2\frac{z}{x}(2x-z)q_{1\perp}^i) + ((z+1)(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) - \left(x + \frac{z}{x}\right) \vec{q}_1^2) p_{q_{1'\perp}}^i] I_1^j - 2\frac{\bar{x}}{x} (xq_{2\perp k} + (x-z)q_{1\perp k}) \left(g_{\perp}^{ij} p_{q_{1'\perp} l} I^{kl} - p_{q_{1'\perp}}^i I^{jk} \right) + \left[\bar{x}(x-\bar{x})(x-z)^2 Q^2 p_{q_{1'\perp}}^j - (z-1)(\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q_{1'}}) q_{2\perp}^j \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (z-1)(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'})q_{1\perp}^j + \frac{x-\bar{x}}{x} \left((x^2-z)\vec{q}_1^2 + x(\bar{x}-x+z)(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) \right) p_{q1'\perp}^k \Big] I_1^i \\
& + 2 \left[\frac{x-\bar{x}}{x} \left(x(4x^2 - (3z+5)x + (z+1)^2)q_{2\perp k} + (x-z)(\bar{x}+z)q_{1\perp k} \right) p_{q1'\perp}^j \right. \\
& - \left. \frac{x-z}{x} \left(x(2x-z-2)q_{2\perp}^j + zq_{1\perp}^j \right) p_{q1'\perp k} \right] I^{ik} \\
& + \frac{\bar{x}(\bar{x}-x)}{x} (2z^2 - 6xz + z + x(8x-3)) p_{q1'\perp}^j I_3^i \\
& + \left[(x-\bar{x})p_{q1'\perp}^j \left((\bar{x}-x+z)q_{2\perp}^i \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(6(z+2)x - 8x^2 - (z+3)(2z+1) + 2\frac{z^2}{x} \right) q_{1\perp}^i \right) \right. \\
& + \left. (1-z)(g_{\perp}^{ij}(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'}) + q_{2\perp}^k p_{q1'\perp}^i) + (2x+z-3)(g_{\perp}^{ik}(\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'}) + q_{1\perp}^k p_{q1'\perp}^i) \right] I_2 \\
& + \left(3\bar{x} + z - \frac{z}{x} \right) p_{q1'\perp}^i I_3^k - \frac{\bar{x}}{x} (3x-z) g_{\perp}^{ij} p_{q1'\perp k} I_3^k \\
& + \left[(x-\bar{x})p_{q1'\perp}^j \left\{ (\bar{x}-x+z)q_{2\perp}^i q_{1\perp k} - (2z^2 - 6xz + 3z - 8x\bar{x} + 1)q_{2\perp k} q_{1\perp}^i \right. \right. \\
& - \left. \left. 2(\bar{x}-x+2z - \frac{z^2}{x})q_{1\perp k} q_{1\perp}^i \right\} + \bar{x}(x-z)^2 Q^2 g_{\perp}^{ij} p_{q1'\perp k} \right. \\
& + (1-z)q_{1\perp k} (g_{\perp}^{ij}(\vec{q}_2 \cdot \vec{p}_{q1'}) + q_{2\perp}^j p_{q1'\perp}^i) \\
& + ((x-\bar{x}+z)q_{2\perp k} - 2q_{1\perp k}) (g_{\perp}^{ij}(\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'}) + q_{1\perp}^j p_{q1'\perp}^i) \\
& + g_{\perp}^{ij} \left(\left(x + \frac{z}{x} \right) \vec{q}_1^2 - (z+1)(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) \right) p_{q1'\perp k} \\
& + (x-\bar{x}-2z)(x-\bar{x}-z)q_{1\perp}^i q_{2\perp}^j \\
& - \left. (z+1)q_{2\perp}^i q_{1\perp}^j + 2(2x-z)\frac{z}{x}q_{1\perp}^i q_{1\perp}^j \right) p_{q1'\perp k} \Big] I_1^k + \frac{2x\bar{x}}{z} \\
& \times \left[(x-\bar{x})^2 p_{q1'\perp}^j (q_{2\perp k} I^{ik} + I_3^i) - p_{q1'\perp}^i (q_{2\perp k} I^{jk} + I_3^k) + g_{\perp}^{ij} p_{q1'\perp k} (q_{2\perp l} I^{kl} + I_3^k) \right. \\
& + \left. (I_2 + q_{2\perp k} I_1^k) \left(g_{\perp}^{ij}(\vec{q}_1 \cdot \vec{p}_{q1'}) + q_{1\perp}^j p_{q1'\perp}^i - (1-2x)^2 q_{1\perp}^i p_{q1'\perp}^j \right) \right]. \quad (\text{D.24})
\end{aligned}$$

Диаграмма 6 Здесь мы вводим переменную

$$\vec{q} = \left(\frac{x-z}{x} \right) \vec{p}_3 - \frac{z}{x} \vec{p}_1. \quad (\text{D.25})$$

Импакт факторы имеют вид

вклад (продольный СГП) \times (продольный ГП):

$$(\phi_6)_{LL} = -4x\bar{x}^2 J_0, \quad (\text{D.26})$$

вклад (продольный СГП) \times (поперечный ГП):

$$(\phi_6)_{LT}^j = (1 - 2x)p_{q1'\perp}^j(\phi_6)_{LL}, \quad (\text{Д.27})$$

вклад (поперечный СГП) \times (продольный ГП):

$$(\phi_6)_{TL}^i = 2\bar{x} \left[(1 - 2x)p_{\bar{q}2\perp}^i J_0 - J_{1\perp}^i \right], \quad (\text{Д.28})$$

вклад (поперечный СГП) \times (поперечный ГП):

$$\begin{aligned} (\phi_6)_{TT}^{ij} = & \bar{x} \left[(x - \bar{x})^2 p_{\bar{q}2\perp}^i p_{q1'\perp}^j - g_{\perp}^{ij} (\vec{p}_{\bar{q}2} \cdot \vec{p}_{q1'}) - p_{q1'\perp}^i p_{\bar{q}2\perp}^j \right] J_0 \\ & + \bar{x} \left[(x - \bar{x}) p_{q1'\perp}^j g_{\perp}^i{}_{\perp k} - p_{q1'\perp k} g_{\perp}^{ij} + p_{q1'\perp}^i g_{\perp}^j{}_{\perp k} \right] J_{1\perp}^k. \end{aligned} \quad (\text{Д.29})$$

Интегралы имеют вид

$$J_{1\perp}^k = \frac{(x - z)^2 q_{\perp}^k}{x^2 \bar{q}^2} \ln \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2}{\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2 + \frac{x^2\bar{x}}{z(x-z)}\bar{q}^2} \right), \quad (\text{Д.30})$$

$$J_0 = \frac{z}{x(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)} - \frac{2x(x - z) + z^2}{xz(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2)} \ln \left(\frac{x^2\bar{x}\mu^2}{z(x - z)(\vec{p}_{\bar{q}2}^2 + x\bar{x}Q^2) + x^2\bar{x}\bar{q}^2} \right). \quad (\text{Д.31})$$

Приложение Е.

Реальные поправки

Здесь представлены свертки импакт факторов реального рождения $q\bar{q}g$, необходимые для вычисления продольного (LL) и поперечного (ТТ) сечений. Интерференционные члены приведены в [69].

LL

$$\begin{aligned}
& \Phi_4^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_4^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, p'_{3\perp})^* \tag{E.1} \\
&= \frac{8p_\gamma^{+4}}{z^2 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}(1-x_{\bar{q}})} + Q^2 \right) \left(Q^2 + \frac{p_{q1'}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}} + \frac{p_{g3'}^2}{z} \right)} \\
&\times \left[\frac{x_{\bar{q}} (dz^2 + 4x_q(x_q + z)) (x_q \vec{p}_{g3} - z \vec{p}_{q1}) (x_q \vec{p}_{g3'} - z \vec{p}_{q1'})}{x_q (x_q + z)^2 \left(\frac{(\vec{p}_{g3} + \vec{p}_{q1})^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{(\vec{p}_{g3} + \vec{p}_{q1})^2}{x_{\bar{q}}} + \frac{p_{g3}^2}{z} + \frac{p_{q1}^2}{x_q} + Q^2 \right)} \right. \\
&\left. - \frac{(4x_q x_{\bar{q}} + 2z - dz^2) (x_{\bar{q}} \vec{p}_{g3} - z \vec{p}_{\bar{q}2}) (x_q \vec{p}_{g3'} - z \vec{p}_{q1'})}{(x_{\bar{q}} + z) (x_q + z) \left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2} + \vec{p}_{g3})^2}{x_{\bar{q}}(x_{\bar{q}} + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{(\vec{p}_{\bar{q}2} + \vec{p}_{g3})^2}{x_q} + \frac{p_{g3}^2}{z} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}} + Q^2 \right)} \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}).
\end{aligned}$$

Здесь $(q \leftrightarrow \bar{q})$ обозначает $p_q \leftrightarrow p_{\bar{q}}$, $p_1^{(\prime)} \leftrightarrow p_2^{(\prime)}$, $x_q \leftrightarrow x_{\bar{q}}$.

$$\Phi_3^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* = \Phi_4^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}, 0) \Phi_4^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, 0)^* + A^{++} + B^{++}. \tag{E.2}$$

Здесь первый член в правой части отвечает за излучение глюона до ударной волны, A описывает излучение глюона после ударной волны и B — это интерференционный член. A и B имеют вид

$$\begin{aligned}
A^{++} &= \frac{8x_{\bar{q}} p_\gamma^{+4} (dz^2 + 4x_q(x_q + z))}{x_q (\vec{p}_g - \frac{z\vec{p}_q}{x_q})^2 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right)} \\
&- \frac{8p_\gamma^{+4} (2z - dz^2 + 4x_q x_{\bar{q}}) (\vec{p}_g - \frac{z\vec{p}_q}{x_q}) (\vec{p}_g - \frac{z\vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}})}{(\vec{p}_g - \frac{z\vec{p}_q}{x_q})^2 (\vec{p}_g - \frac{z\vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}})^2 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q(x_{\bar{q}} + z)} + Q^2 \right)} + (q \leftrightarrow \bar{q}), \tag{E.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{++} = & \left[\frac{8p_\gamma^{+4}}{z(x_q + z) \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{q1'}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}} + \frac{\vec{p}_g^2}{z} + Q^2 \right)} \right. \\
& \times \left\{ \frac{(4x_q x_{\bar{q}} + z(2 - dz)) (\vec{p}_g - \frac{z}{x_{\bar{q}}} \vec{p}_{\bar{q}}) (x_q \vec{p}_g - z \vec{p}_{q1'})}{(\vec{p}_g - \frac{z \vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}})^2 \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q(x_{\bar{q}} + z)} + Q^2 \right)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{x_{\bar{q}} (dz^2 + 4x_q(x_q + z)) (p_g - \frac{z}{x_q} \vec{p}_q) (\vec{p}_g - \frac{z}{x_q} \vec{p}_{q1'})}{(\vec{p}_g - \frac{z \vec{p}_q}{x_q})^2 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right)} \right\} + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right] \\
& + (1 \leftrightarrow 1', 2 \leftrightarrow 2'). \tag{E.4}
\end{aligned}$$

В коллинеарном приближении (2.127) только первый член A^{++} в (E.3) дает неисчезающий вклад в пределе малого раствора конуса. В переменных, определенных в (2.130), (2.136), (2.137), первая строка в A^{++} принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{8x_{\bar{q}} p_\gamma^{+4} (dz^2 + 4x_q(x_q + z))}{x_q (\vec{p}_g - \frac{z \vec{p}_q}{x_q})^2 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right)} \\
& = \frac{8(x_j - z)(1 - x_j) p_\gamma^{+4} (dz^2 + 4x_j(x_j - z))}{x_j^2 \Delta_q^2 \left(\frac{\vec{p}_{j2}^2}{x_j(1-x_j)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{j2'}^2}{x_j(1-x_j)} + Q^2 \right)} \\
& = \Phi_0^+ \Phi_0^{+*} \frac{1}{4} \frac{(x_j - z) (dz^2 + 4x_j(x_j - z))}{x_j^3 \Delta_q^2}, \tag{E.5}
\end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральным выражением n_j , определенным в (2.135).

В мягком приближении, заменяя

$$\vec{p}_g = z \vec{u} \tag{E.6}$$

и переходя к пределу $z \rightarrow 0$, имеем

$$\Phi_3^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* |_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{z^2} \Phi_0^+ \Phi_0^{+*} \frac{\left(\frac{\vec{p}_q}{x_q} - \frac{\vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}} \right)^2}{\left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_q}{x_q} \right)^2 \left(\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}} \right)^2} + O(z^{-1}), \tag{E.7}$$

что дает множитель излучения мягких глюонов.

TT

$$\begin{aligned}
& \Phi_4^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_4^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, p'_{3\perp})^* \\
&= \left(\frac{p_\gamma^{+2}}{\left(Q^2 + \frac{p_{g3}^2}{z} + \frac{p_{q1}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{q2}^2}{x_{\bar{q}}}\right) \left(Q^2 + \frac{p_{g3'}^2}{z} + \frac{p_{q1'}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{q2'}^2}{x_{\bar{q}}}\right)} \right) \\
&\times \left[-\frac{g_\perp^{ik} x_q x_{\bar{q}} (zd + d - 2 + 2x_{\bar{q}})}{(z + x_q)^2 (z + x_{\bar{q}})} \right. \\
&\quad - \frac{2P_\perp^k p_{q1\perp}^i (1 - 2x_q)}{z(z + x_{\bar{q}})^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})}\right)} \left(\frac{(d-2)z - 2x_{\bar{q}}}{z + x_{\bar{q}}} + \frac{dz + 2x_{\bar{q}}}{z + x_q} \right) \\
&\quad - \frac{2 \left(g_\perp^{ik} (\vec{P}\vec{p}_{q1}) + P_\perp^i p_{q1\perp}^k \right)}{z(z + x_{\bar{q}})^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})}\right)} \left(\frac{(d-4)z - 2x_{\bar{q}}}{z + x_q} + \frac{(d-2)z - 2x_{\bar{q}}}{z + x_{\bar{q}}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{z^2 x_q (z + x_q)^2 x_{\bar{q}} (z + x_{\bar{q}})^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q2'}^2}{(z+x_q)x_{\bar{q}}}\right) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})}\right)} \\
&\quad \times \left\{ (\vec{H}\vec{P}) \left[p_{q1\perp}^i p_{q2'\perp}^k (1 - 2x_q) (1 - 2x_{\bar{q}}) (z(2 - dz) + 4x_q x_{\bar{q}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (g_\perp^{ik} (\vec{p}_{q1}\vec{p}_{q2'}) + p_{q1\perp}^k p_{q2'\perp}^i) (z(2 - (d-4)z) + 4x_q x_{\bar{q}}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[z(\vec{H}\vec{p}_{q2'}) (g_\perp^{ik} (\vec{P}\vec{p}_{q1}) + P_\perp^i p_{q1\perp}^k) + zH_\perp^k \left((\vec{P}\vec{p}_{q1}) p_{q2'\perp}^i - (\vec{p}_{q1}\vec{p}_{q2'}) P_\perp^i \right) \right] \right. \\
&\quad \times ((d-4)z - 2) + ((d-4)z + 2) \\
&\quad \times \left[zH^i \left((\vec{P}\vec{p}_{q2'}) p_{q1\perp}^k - (\vec{p}_{q1}\vec{p}_{q2'}) P_\perp^k \right) + z(\vec{H}\vec{p}_{q1}) (g_\perp^{ik} (\vec{P}\vec{p}_{q2'}) + P_\perp^k p_{q2'\perp}^i) \right] \\
&\quad \left. + 2z \left((\vec{H}\vec{p}_{q2'}) P_\perp^k - (\vec{P}\vec{p}_{q2'}) H_\perp^k \right) p_{q1\perp}^i (1 - 2x_q) (dz + 4x_{\bar{q}} - 2) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{z^2 x_q x_{\bar{q}} (z + x_{\bar{q}})^4 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})}\right) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q1'}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})}\right)} \left\{ z((d-4)z - 4x_{\bar{q}}) \right. \\
&\quad \times \left[g_\perp^{ik} \left((\vec{G}\vec{p}_{q1'}) (\vec{P}\vec{p}_{q1}) - (\vec{G}\vec{p}_{q1}) (\vec{P}\vec{p}_{q1'}) \right) \right. \\
&\quad \left. + (\vec{p}_{q1}\vec{p}_{q1'}) (G_\perp^i P_\perp^k - G_\perp^k P_\perp^i) + 2(\vec{G}\vec{p}_{q1'}) \right. \\
&\quad \left. \times (P_\perp^i p_{q1\perp}^k + P_\perp^k p_{q1\perp}^i (1 - 2x_q)) - 2(\vec{G}\vec{p}_{q1}) (P_\perp^k p_{q1'\perp}^i + P_\perp^i p_{q1'\perp}^k (1 - 2x_q)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[p_{q1\perp}^k p_{q1'\perp}^i - p_{q1\perp}^i p_{q1'\perp}^k (1 - 2x_q)^2 + g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{q1} \vec{p}_{q1'}) \right] \\
& \times (\vec{G} \vec{P}) (dz^2 + 4x_{\bar{q}}(z + x_{\bar{q}})) \Big\} \\
& + (1 \leftrightarrow 1', 2 \leftrightarrow 2', 3 \leftrightarrow 3', i \leftrightarrow k) + (q \leftrightarrow \bar{q}). \tag{E.8}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_3^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* = \Phi_4^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}, 0) \Phi_4^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, 0)^* + A^{ik} + B^{ik}, \tag{E.9}$$

$$\begin{aligned}
A^{ik} = & \frac{-2p_{\gamma}^{+2}}{\vec{\Delta}_q^2 \vec{\Delta}_{\bar{q}}^2 (x_q + z)^2 (x_{\bar{q}} + z)^2 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{q1'}^2}{x_q(x_{\bar{q}} + z)} + Q^2 \right)} \\
& \times \left\{ z((d-4)z - 2) \right. \\
& \times \left[(\vec{p}_{q1'} \vec{\Delta}_{\bar{q}}) \left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_q) g_{\perp}^{ik} + \Delta_{q\perp}^i p_{\bar{q}2\perp}^k \right) - (\vec{\Delta}_q \vec{\Delta}_{\bar{q}}) \left((\vec{p}_{q1'} \vec{p}_{\bar{q}2}) g_{\perp}^{ik} + p_{q1'\perp}^i p_{\bar{q}2\perp}^k \right) \right. \\
& \left. \left. + \Delta_{\bar{q}\perp}^k p_{q1'\perp}^i (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_q) - \Delta_{q\perp}^i \Delta_{\bar{q}\perp}^k (\vec{p}_{q1'} \vec{p}_{\bar{q}2}) \right] + (\vec{\Delta}_q \vec{\Delta}_{\bar{q}}) \right. \\
& \times \left[(2x_q - 1)(2x_{\bar{q}} - 1) p_{q1'\perp}^k p_{\bar{q}2\perp}^i (4x_q x_{\bar{q}} + z(2 - dz)) \right. \\
& \left. + 4x_q x_{\bar{q}} \left((\vec{p}_{q1'} \vec{p}_{\bar{q}2}) g_{\perp}^{ik} + p_{q1'\perp}^i p_{\bar{q}2\perp}^k \right) \right] \\
& + \left((\vec{p}_{q1'} \vec{\Delta}) \left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_{\bar{q}}) g_{\perp}^{ik} + \Delta_{\bar{q}\perp}^i p_{\bar{q}2\perp}^k \right) + \Delta_{q\perp}^k p_{q1'\perp}^i (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_{\bar{q}}) - \Delta_{q\perp}^k \Delta_{\bar{q}\perp}^i (\vec{p}_{q1'} \vec{p}_{\bar{q}2}) \right) \\
& \times z((d-4)z + 2) \\
& + z(2x_{\bar{q}} - 1)(dz + 4x_q - 2) p_{\bar{q}2\perp}^i \left(\Delta_{\bar{q}\perp}^k (\vec{p}_{q1'} \vec{\Delta}_q) - \Delta_{q\perp}^k (\vec{p}_{q1'} \vec{\Delta}_{\bar{q}}) \right) \\
& \left. + z(2x_q - 1) p_{q1'\perp}^k (4x_{\bar{q}} + dz - 2) \left(\Delta_{q\perp}^i (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_{\bar{q}}) - \Delta_{\bar{q}\perp}^i (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_q) \right) \right\} \\
& - \frac{\left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{p}_{\bar{q}2'}) g_{\perp}^{ik} - (1 - 2x_{\bar{q}})^2 p_{\bar{q}2\perp}^i p_{\bar{q}2'\perp}^k + p_{\bar{q}2'\perp}^i p_{\bar{q}2\perp}^k \right)}{x_{\bar{q}} \vec{\Delta}_q^2 (x_q + z)^4 \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right)} \\
& \times 2x_q p_{\gamma}^{+2} (dz^2 + 4x_q(x_q + z)) + (q \leftrightarrow \bar{q}), \tag{E.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{ik} = & \left(\frac{2p_{\gamma}^{+2}}{\vec{\Delta}_q^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_q^2}{z} + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}} \right) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2'}^2}{(z+x_q)x_{\bar{q}}} \right)} \right. \\
& \times \left[\frac{((d-2)z - 2x_q) x_q}{(z+x_q)^3} \left(g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) + p_{\bar{q}2'\perp}^i \Delta_{q\perp}^k + p_{\bar{q}2'\perp}^k \Delta_{q\perp}^i (1 - 2x_{\bar{q}}) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x_q ((d-4)z - 2x_q) \left(g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) + p_{\bar{q}2'\perp}^i \Delta_{q\perp}^k \right)}{(z+x_q)^2 (z+x_{\bar{q}})} \\
& + \frac{x_q p_{\bar{q}2'\perp}^k \Delta_{q\perp}^i (dz + 2x_q) (1 - 2x_{\bar{q}})}{(z+x_q)^2 (z+x_{\bar{q}})} \\
& - \frac{1}{z(z+x_q)^2 x_{\bar{q}} (z+x_{\bar{q}})^2 \left(Q^2 + \frac{p_{\bar{q}1}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})} \right)} \left\{ z((d-4)z + 2) \right. \\
& \times \left[p_{q1\perp}^i \left((\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) X_{\perp}^k - (\vec{X} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^k \right) (2x_q - 1) \right. \\
& - (\vec{X} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \left(g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{q1} \vec{\Delta}_q) + p_{q1\perp}^k \Delta_{q\perp}^i \right) - X_{\perp}^k \left((\vec{p}_{q1} \vec{\Delta}_q) p_{\bar{q}2'\perp}^i - (\vec{p}_{q1} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^i \right) \Big] \\
& + z(1 - 2x_{\bar{q}}) (dz + 4x_q - 2) p_{\bar{q}2'\perp}^k \left((\vec{p}_{q1} \vec{\Delta}_q) X_{\perp}^i - (\vec{X} \vec{p}_{q1}) \Delta_{q\perp}^i \right) \\
& + 4x_q z (1 - 2x_q) p_{q1\perp}^i \left((\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) X_{\perp}^k - (\vec{X} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^k \right) - z((d-4)z - 2) \\
& \times \left[\left(g_{\perp}^{ik} (\vec{X} \vec{p}_{q1}) + X_{\perp}^i p_{q1\perp}^k \right) (\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) + \left((\vec{X} \vec{p}_{q1}) p_{\bar{q}2'\perp}^i - (\vec{p}_{q1} \vec{p}_{\bar{q}2'}) X_{\perp}^i \right) \Delta_{q\perp}^k \right] \\
& + (\vec{X} \vec{\Delta}_q) p_{q1\perp}^i p_{\bar{q}2'\perp}^k (1 - 2x_q) (1 - 2x_{\bar{q}}) (z(dz - 2) - 4x_q x_{\bar{q}}) \\
& - (\vec{X} \vec{\Delta}_q) \left(g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{q1} \vec{p}_{\bar{q}2'}) + p_{q1\perp}^k p_{\bar{q}2'\perp}^i \right) (z(2 - (d-4)z) + 4x_q x_{\bar{q}}) \Big\} \\
& - \frac{1}{z(z+x_q)^4 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{(z+x_q)x_{\bar{q}}} \right) x_{\bar{q}}} \left\{ z(dz + 4x_{\bar{q}} - 4) \left[(1 - 2x_{\bar{q}}) \right. \right. \\
& \times \left(p_{\bar{q}2'\perp}^k \left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_q) V_{\perp}^i - (\vec{V} \vec{p}_{\bar{q}2}) \Delta_{q\perp}^i \right) + p_{\bar{q}2\perp}^i \left((\vec{V} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^k - (\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) V_{\perp}^k \right) \right) \\
& + V_{\perp}^k \left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_q) p_{\bar{q}2'\perp}^i - (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^i \right) + \left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{p}_{\bar{q}2'}) V_{\perp}^i - (\vec{V} \vec{p}_{\bar{q}2}) p_{\bar{q}2'\perp}^i \right) \Delta_{q\perp}^k \\
& + g_{\perp}^{ik} \left((\vec{V} \vec{p}_{\bar{q}2'}) (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{\Delta}_q) - (\vec{V} \vec{p}_{\bar{q}2}) (\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) \right) + p_{\bar{q}2\perp}^k \left((\vec{V} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^i - (\vec{p}_{\bar{q}2'} \vec{\Delta}_q) V_{\perp}^i \right) \Big] \\
& + (p_{\bar{q}2\perp}^i p_{\bar{q}2'\perp}^k (1 - 2x_{\bar{q}})^2 - g_{\perp}^{ik} (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{p}_{\bar{q}2'}) - p_{\bar{q}2\perp}^k p_{\bar{q}2'\perp}^i) (dz^2 - 4x_q (x_{\bar{q}} - 1)) \\
& \times (\vec{V} \vec{\Delta}_q) \Big\} + (1 \leftrightarrow 1', 2 \leftrightarrow 2', i \leftrightarrow k) + (q \leftrightarrow \bar{q}). \tag{E.11}
\end{aligned}$$

Здесь введена переменная

$$V_{\perp}^i = x_q p_{g\perp}^i - z p_{q1\perp}^i. \tag{E.12}$$

В коллинеарной области $\Delta_q \rightarrow 0$ работает только последняя строка A^{ik} . В переменных струй (2.136), (2.137) имеем

$$\Phi_3^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* = \Phi_0^i \Phi_0^{k*} \frac{1}{4} \frac{(x_j - z) (dz^2 + 4x_j (x_j - z))}{x_j^3 \Delta_q^2} + O(\Delta_q^{-1}). \quad (\text{E.13})$$

что совпадает с подынтегральным выражением n_j (2.135).

В мягкоглюонном приближении (E.6) :

$$\Phi_3^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}) \Phi_3^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* |_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{z^2} \Phi_0^i \Phi_0^{k*} \frac{(\frac{\vec{p}_q}{x_q} - \frac{\vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}})^2}{(\vec{u} - \frac{\vec{p}_q}{x_q})^2 (\vec{u} - \frac{\vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}})^2} + O(z^{-1}). \quad (\text{E.14})$$

Интерференционные члены вида диполь - двойной диполь

$$\Phi_4^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_3^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* = \Phi_4^+(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_4^+(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, 0)^* + C^{++}, \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} C^{++} = & \frac{8p_\gamma^{+4}}{z(x_q + z) \left(\frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right) \left(\frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}} + \frac{\vec{p}_{g3}^2}{z} + Q^2 \right)} \\ & \times \left\{ \frac{(4x_q x_{\bar{q}} + z(2 - dz)) (\vec{p}_g - \frac{z}{x_{\bar{q}}} \vec{p}_{\bar{q}}) (x_q \vec{p}_{g3} - z \vec{p}_{q1})}{(\vec{p}_g - \frac{z \vec{p}_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}}})^2 \left(\frac{\vec{p}_{q1'}^2}{x_q(x_q + z)} + Q^2 \right)} \right. \\ & \left. - \frac{x_{\bar{q}} (dz^2 + 4x_q(x_q + z)) (p_g - \frac{z}{x_q} \vec{p}_q) (p_{g3} - \frac{z}{x_q} \vec{p}_{q1})}{(\vec{p}_g - \frac{z \vec{p}_q}{x_q})^2 \left(\frac{\vec{p}_{q2'}^2}{x_{\bar{q}}(x_q + z)} + Q^2 \right)} \right\} \\ & + (p_q \leftrightarrow p_{\bar{q}}, p_1^{(\prime)} \leftrightarrow p_2^{(\prime)}, x_q \leftrightarrow x_{\bar{q}}). \quad (\text{E.16}) \end{aligned}$$

$$\Phi_4^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_3^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp})^* = \Phi_4^i(p_{1\perp}, p_{2\perp}, p_{3\perp}) \Phi_4^k(p'_{1\perp}, p'_{2\perp}, 0)^* + C^{ik}, \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned} C^{ik} = & \frac{2p_\gamma^{+2}}{\vec{\Delta}_q^2 \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{g3}^2}{z} + \frac{\vec{p}_{q1}^2}{x_q} + \frac{\vec{p}_{\bar{q}2}^2}{x_{\bar{q}}} \right) \left(Q^2 + \frac{\vec{p}_{q2'}^2}{(z+x_q)x_{\bar{q}}} \right)} \\ & \times \left[\frac{x_q p_{\bar{q}2'\perp}^k \Delta_{q\perp}^i (dz + 2x_q) (1 - 2x_{\bar{q}})}{(z+x_q)^2 (z+x_{\bar{q}})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{((d-2)z - 2x_q)x_q}{(z+x_q)^3} \left(g_{\perp}^{ik}(\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) + p_{\bar{q}2'\perp}^i \Delta_{q\perp}^k + p_{\bar{q}2'\perp}^k \Delta_{q\perp}^i (1 - 2x_{\bar{q}}) \right) \\
& + \frac{x_q((d-4)z - 2x_q) \left(g_{\perp}^{ik}(\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) + p_{\bar{q}2'\perp}^i \Delta_{q\perp}^k \right)}{(z+x_q)^2(z+x_{\bar{q}})} \\
& - \frac{1}{z(z+x_q)^2 x_{\bar{q}}(z+x_{\bar{q}})^2 \left(Q^2 + \frac{p_{q1}^2}{x_q(z+x_{\bar{q}})} \right)} \left\{ z((d-4)z + 2) \right. \\
& \times \left[p_{q1\perp}^i \left((\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) P_{\perp}^k - (\vec{P} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^k \right) (2x_q - 1) \right. \\
& - (\vec{P} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \left(g_{\perp}^{ik}(\vec{p}_{q1}, \vec{\Delta}_q) + p_{q1\perp}^k \Delta_{q\perp}^i \right) - P_{\perp}^k \left((\vec{p}_{q1}, \vec{\Delta}_q) p_{\bar{q}2'\perp}^i - (\vec{p}_{q1} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^i \right) \Big] \\
& + 4x_q z (1 - 2x_q) p_{q1\perp}^i \left((\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) P_{\perp}^k - (\vec{P} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^k \right) - z((d-4)z - 2) \\
& + z(1 - 2x_{\bar{q}}) (dz + 4x_q - 2) p_{\bar{q}2'\perp}^k \left((\vec{p}_{q1}, \vec{\Delta}_q) P_{\perp}^i - (\vec{P} \vec{p}_{q1}) \Delta_{q\perp}^i \right) \\
& \times \left[\left(g_{\perp}^{ik}(\vec{P} \vec{p}_{q1}) + P_{\perp}^i p_{q1\perp}^k \right) (\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) + \left((\vec{P} \vec{p}_{q1}) p_{\bar{q}2'\perp}^i - (\vec{p}_{q1} \vec{p}_{\bar{q}2'}) P_{\perp}^i \right) \Delta_{q\perp}^k \right] \\
& + (\vec{P} \vec{\Delta}_q) p_{q1\perp}^i p_{\bar{q}2'\perp}^k (1 - 2x_q) (1 - 2x_{\bar{q}}) (z(dz - 2) - 4x_q x_{\bar{q}}) \\
& - (\vec{P} \vec{\Delta}_q) \left(g_{\perp}^{ik}(\vec{p}_{q1}, \vec{p}_{\bar{q}2'}) + p_{q1\perp}^k p_{\bar{q}2'\perp}^i \right) (z(2 - (d-4)z) + 4x_q x_{\bar{q}}) \Big\} \\
& - \frac{1}{z(z+x_q)^4 \left(Q^2 + \frac{p_{\bar{q}2}^2}{(z+x_q)x_{\bar{q}}} \right) x_{\bar{q}}} \left\{ z(dz + 4x_{\bar{q}} - 4) \left[(1 - 2x_{\bar{q}}) \right. \right. \\
& \times \left(p_{\bar{q}2'\perp}^k \left((\vec{p}_{\bar{q}2}, \vec{\Delta}_q) W_{\perp}^i - (\vec{W} \vec{p}_{\bar{q}2}) \Delta_{q\perp}^i \right) + p_{\bar{q}2\perp}^i \left((\vec{W} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^k - (\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) W_{\perp}^k \right) \right) \\
& + W_{\perp}^k \left((\vec{p}_{\bar{q}2}, \vec{\Delta}_q) p_{\bar{q}2'\perp}^i - (\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^i \right) + \left((\vec{p}_{\bar{q}2} \vec{p}_{\bar{q}2'}) W_{\perp}^i - (\vec{W} \vec{p}_{\bar{q}2}) p_{\bar{q}2'\perp}^i \right) \Delta_{q\perp}^k \\
& + g_{\perp}^{ik} \left((\vec{W} \vec{p}_{\bar{q}2'}) (\vec{p}_{\bar{q}2}, \vec{\Delta}_q) - (\vec{W} \vec{p}_{\bar{q}2}) (\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) \right) \\
& + p_{\bar{q}2\perp}^k \left((\vec{W} \vec{p}_{\bar{q}2'}) \Delta_{q\perp}^i - (\vec{p}_{\bar{q}2'}, \vec{\Delta}_q) W_{\perp}^i \right) \Big] + (\vec{W} \vec{\Delta}_q) (dz^2 - 4x_q(x_{\bar{q}} - 1)) \\
& \times \left. \left(p_{\bar{q}2\perp}^i p_{\bar{q}2'\perp}^k (1 - 2x_{\bar{q}})^2 - g_{\perp}^{ik}(\vec{p}_{\bar{q}2}, \vec{p}_{\bar{q}2'}) - p_{\bar{q}2\perp}^k p_{\bar{q}2'\perp}^i \right) \right\} \\
& + (p_q \leftrightarrow p_{\bar{q}}, p_1^{(l)} \leftrightarrow p_2^{(l)}, x_q \leftrightarrow x_{\bar{q}}), \tag{E.18}
\end{aligned}$$

где

$$W_{\perp}^i = x_q p_{q3\perp}^i - z p_{q1\perp}^i, \quad P_{\perp}^i = x_{\bar{q}} p_{\bar{q}3\perp}^i - z p_{\bar{q}2\perp}^i. \tag{E.19}$$

Список литературы

1. Fadin V.S., Kuraev E.A., Lipatov L.N. On The Pomeranchuk Singularity In Asymptotically Free Theories // Phys. Lett. B. – 1975. – Vol. 60. – P. 50.
2. Kuraev E. A., Lipatov L. N., Fadin V. S. Multi - Reggeon Processes In The Yang-Mills Theory // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1976. – Vol. 71. – P. 840.
3. Kuraev E. A., Lipatov L. N., Fadin V. S. The Pomeranchuk Singularity In Nonabelian Gauge Theories // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1977. – Vol. 72. – P. 377.
4. Balitskii Ya. Ya., Lipatov L. N. The Pomeranchuk Singularity In Quantum Chromodynamics // Sov. J. Nucl. Phys. – 1978. – Vol. 28. – P. 822.
5. McLerran L., Venugopalan R. Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 49. – P. 2233.
6. McLerran L., Venugopalan R. Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 49. – P. 3352.
7. McLerran L., Venugopalan R. Green's functions in the color field of a large nucleus // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 50. – P. 2225.
8. Iancu E., Leonidov A., McLerran L. The renormalization group equation for the color glass condensate // Phys. Lett. B. – 2001. – Vol. 510. – P. 133.
9. Ferreiro E., Iancu E., Leonidov A., McLerran L. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. II // Nucl. Phys. A. – 2002. – Vol. 703. – P. 489.

10. Jalilian-Marian J., Kovner A., Leonidov A., Weigert H. The BFKL equation from the Wilson renormalization group // Nucl. Phys. B. – 1997. – Vol. 504. – P. 415.
11. Jalilian-Marian J., Kovner A., Leonidov A., Weigert H. The Wilson renormalization group for low x physics: Gluon evolution at finite parton density // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 59. – P. 014014.
12. Balitsky I. Operator expansion for high-energy scattering // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 463. – P. 99.
13. Kovchegov Yu.V. Small x $F(2)$ structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 034008.
14. Kovchegov Yu.V. Unitarization of the BFKL pomeron on a nucleus // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 61. – P. 074018.
15. Nikolaev N. N., Zakharov B. G. The Triple pomeron regime and the structure function of the pomeron in the diffractive deep inelastic scattering at very small x // Z. Phys. C. – 1994. – Vol. 64. – P. 631.
16. Nikolaev N. N., Zakharov B. G., Zoller V. R. The s channel approach to Lipatov's pomeron and hadronic cross-sections // JETP Lett. – 1994. – Vol. 59. – P. 6.
17. Mueller A. H. Soft gluons in the infinite momentum wave function and the BFKL pomeron // Nucl. Phys. B. – 1994. – Vol. 415. – P. 373.
18. Mueller A. H., Patel B. Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high-energy hard processes // Nucl. Phys. B. – 1994. – Vol. 425. – P. 471.
19. Balitsky I. High-energy QCD and Wilson lines // At the frontier of particle physics. – 2001. – Vol. 2. – P. 1237-1342.

20. Balitsky I. High-energy amplitudes in the next-to-leading order // Diakonov, D. (ed.): Subtleties in quantum field theory. – P. 104-149.
21. Kuraev E. A., Lipatov L. N., Fadin V. S. Multi-reggeon processes in the Yang-Mills theory // Sov. Phys. JETP. – 1976. – Vol. 44. – P. 443.
22. Balitsky I. Quark contribution to the small-x evolution of color dipole // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 75 – P. 014001.
23. Kovchegov Yu.V., Weigert H. Triumvirate of Running Couplings in Small-x Evolution // Nucl. Phys. A. – 2007. – Vol. 784. – P. 188.
24. Balitsky I., Chirilli G. A. Next-To-Leading Order Evolution Of Color Dipoles // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 77. – P. 014019.
25. Balitsky I., Chirilli G. A. NLO evolution of color dipoles in N=4 SYM // Nucl. Phys. B. – 2009. – Vol. 822. – P. 45.
26. Balitsky I., Chirilli G. A. Rapidity evolution of Wilson lines at the next-to-leading order // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 88. – P. 111501.
27. Grabovsky A. V. Connected contribution to the kernel of the evolution equation for 3-quark Wilson loop operator // JHEP. – 2013. – Vol. 09. – P. 141.
28. Kovner A., Lublinsky M., Mulian Y. Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov, Kovner evolution at next to leading order // Phys. Rev. D. – 2014. – Vol. 89. – P. 061704.
29. Hatta Y., Iancu E., Itakura E., McLerran L. Odderon in the color glass condensate // Nucl. Phys. A. – 2005. – Vol. 760. – P. 172.
30. Bartels J. High-Energy Behavior in a Nonabelian Gauge Theory. 2. First Corrections to $T(n \rightarrow m)$ Beyond the Leading LNS Approximation // Nucl. Phys. B. – 1980. – Vol. 175. – P. 365.

31. Kwiecinski J., Praszalowicz M. Three Gluon Integral Equation and Odd c Singlet Regge Singularities in QCD // *Phys. Lett. B.* – 1980. – Vol. 94. – P. 413.
32. Praszalowicz M., Rostworowski A. Problems with proton in the QCD dipole picture // *Acta Phys. Polon. B.* – 1998. – Vol. 29. – P. 745.
33. Bartels J., Motyka L. Baryon scattering at high energies: Wave function, impact factor, and gluon radiation // *Eur. Phys. J. C.* – 2008. – Vol. 55. – P. 65.
34. Bartels J., Fadin V. S., Lipatov L. N., Vacca G. P. NLO Corrections to the kernel of the BKP-equations // *Nucl. Phys. B.* – 2013. – Vol. 867. – P. 827.
35. Gerasimov R. E., Grabovsky A. V. Evolution equation for 3-quark Wilson loop operator // *JHEP.* – 2013. – Vol. 04. – P. 102.
36. Balitsky I. Grabovsky A. V. NLO evolution of 3-quark Wilson loop operator // *JHEP.* – 2015. – Vol. 01. – P. 009.
37. Kovner A., Lublinsky M., Mulian Y. NLO JIMWLK evolution unabridged // *JHEP.* – 2014. – Vol. 08. – P. 114.
38. Dominguez F., Mueller A. H., Munier S., Xiao B.-W. On the small-x evolution of the color quadrupole and the Weizsäcker-Williams gluon distribution // *Phys. Lett. B.* – 2011. – Vol. 705. – P. 106.
39. Grabovsky A. V. On the low-x NLO evolution of 4 point colorless operators // *JHEP.* – 2015. – Vol. 09. – P. 194.
40. Lipatov L. N. The Bare Pomeron In Quantum Chromodynamics // *Sov. Phys. JETP.* – 1986. – Vol. 63. – P. 904.
41. Fadin V. S., Lipatov L. N. BFKL pomeron in the next-to-leading approximation // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 429. – P. 127.

42. Gribov L. V., Levin E. M., Ryskin M. G. Semihard Processes in QCD // Phys. Rept. – 1983. – Vol. 100. – P. 1.
43. Levin E. The BFKL high-energy asymptotics in the next-to-leading approximation // Nucl. Phys. B. – 1999. – Vol. 545. – P. 481.
44. Kovchegov Y. V., Mueller A. H., Running coupling effects in BFKL evolution // Phys. Lett. B. – 1998. – Vol. 439. – P. 428.
45. Salam G. P. An Introduction to leading and next-to-leading BFKL // Acta Phys. Polon. B. – 1999. – Vol. 30. – P. 3679.
46. Kovchegov Y. V., Levin E. Quantum chromodynamics at high energy // Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. – 2012. – Vol. 33. – P. 1.
47. Chirilli G. A., Kovchegov Y. V. Solution of the NLO BFKL Equation and a Strategy for Solving the All-Order BFKL Equation // JHEP. – 2013. – Vol. 06. – P. 055.
48. Grabovsky A. V. On the solution to the NLO forward BFKL equation // JHEP. – 2013. – Vol. 09. – P. 098.
49. Fadin V. S., Fiore R. The Generalized nonforward BFKL equation and the 'bootstrap' condition for the gluon Reggeization in the NLLA // Phys. Lett. B. – 1998. – Vol. 440. – P. 359.
50. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V. Matching of the low-x evolution kernels // Nucl. Phys. B. – 2010. – Vol. 831. – P. 248.
51. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V., Papa A. Connection between complete and Moebius forms of gauge invariant operators // Nucl. Phys. B. – 2012. – Vol. 856. – P. 111.

52. Wolf G. Review of High Energy Diffraction in Real and Virtual Photon Proton scattering at HERA // Rept. Prog. Phys. – 2010. – Vol. 73. – P. 116202.
53. H1 COLLABORATION Diffractive deep-inelastic scattering with a leading proton at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2006. – Vol. 48. – P. 749.
54. H1 COLLABORATION Measurement and QCD analysis of the diffractive deep-inelastic scattering cross-section at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2006. – Vol. 48. – P. 715.
55. ZEUS COLLABORATION Dissociation of virtual photons in events with a leading proton at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2004. – Vol. 38. – P. 43.
56. ZEUS COLLABORATION Study of deep inelastic inclusive and diffractive scattering with the ZEUS forward plug calorimeter // Nucl. Phys. B. – 2005. – Vol. 713. – P. 3.
57. Aaron F., Alexa C., Andreev V., Backovic S., Baghdasaryan A. et al. Measurement of the cross section for diffractive deep-inelastic scattering with a leading proton at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71. – P. 1578.
58. H1 COLLABORATION Inclusive Measurement of Diffractive Deep-Inelastic Scattering at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2012. – Vol. 72. – P. 2074.
59. ZEUS COLLABORATION Deep inelastic scattering with leading protons or large rapidity gaps at HERA // Nucl. Phys. B. – 2009. – Vol. 816. – P. 1.
60. H1 COLLABORATION, ZEUS COLLABORATION Combined inclusive diffractive cross sections measured with forward proton spectrometers in deep inelastic ep scattering at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2012. – Vol. 72. – P. 2175.

61. Collins J. C. Proof of factorization for diffractive hard scattering // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 57. – P. 3051.
62. Bartels J., Ellis J. R., Kowalski H., Wüsthoff H. An analysis of diffraction in deep-inelastic scattering // Eur. Phys. J. C. – 1999. – Vol. 7. – P. 443.
63. Wüsthoff M. Photon diffractive dissociation in deep inelastic scattering // Препринт DESY-95-166.
64. Gotsman E., Levin E., Maor U. Diffractive lepton production of small masses in QCD // Nucl. Phys. B. – 1997. – Vol. 493. – P. 354.
65. Wüsthoff M. Large rapidity gap events in deep inelastic scattering // Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 56. – P. 4311.
66. Bartels J., Jung H., Wüsthoff M. Quark - anti-quark gluon jets in DIS diffractive dissociation // Eur. Phys. J. C. – 1999. – Vol. 11. – P. 111.
67. Bartels J., Jung H., Kyrieleis A. Massive c anti- c g : Calculation in diffractive DIS and diffractive D^* production at HERA // Eur. Phys. J. C. – 2002. – Vol. 24. – P. 555.
68. Marquet C. A Unified description of diffractive deep inelastic scattering with saturation // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 76. – P. 094017.
69. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. On the one loop $\gamma^{(*)} \rightarrow q\bar{q}$ impact factor and the exclusive diffractive cross sections for the production of two or three jets // JHEP. – 2016. – Vol. 11. – P. 149.
70. Boussarie R., Grabovsky A. V., Szymanowski L., Wallon S. Impact factor for high-energy two and three jets diffractive production // JHEP. – 2014. – Vol. 09. – P. 026.

71. Ivanov D. Y., Kirschner R., Schafer A., Szymanowski L. The Light vector meson photoproduction at large t // *Phys. Lett. B.* – 2000. – Vol. 478. – P. 101.
72. Munier S., Stasto A. M., Mueller A. H. Impact parameter dependent S matrix for dipole proton scattering from diffractive meson electroproduction // *Nucl. Phys. B.* – 2001. – Vol. 603. – P. 427.
73. Forshaw J. R., Poludniowski G. Vector meson photoproduction at high t and comparison to HERA data // *Eur. Phys. J. C.* – 2003. – Vol. 26. – P. 411.
74. Enberg R., Forshaw J. R., Motyka L., Poludniowski G. Vector meson photoproduction from the BFKL equation. 1. Theory // *JHEP.* – 2003. – Vol. 09. – P. 008.
75. Poludniowski G. G., Enberg R., Forshaw J. R., Motyka L. Vector meson photoproduction from the BFKL equation. 2. Phenomenology // *JHEP.* – 2003. – Vol. 12. – P. 002.
76. Chekanov S. [et al.] Exclusive ρ^0 production in deep inelastic scattering at HERA // *PMC Phys. A.* – 2007. – Vol. 1 – P. 6.
77. Aaron F. D. [et al.] Diffractive Electroproduction of ρ and ϕ Mesons at HERA // *JHEP.* – 2010. – Vol. 05. – P. 032.
78. Breitweg J. [et al.] Measurement of diffractive photoproduction of vector mesons at large momentum transfer at HERA // *Eur. Phys. J. C.* – 2000. – Vol. 14. – P. 213.
79. Chekanov S. [et al.] Measurement of proton dissociative diffractive photoproduction of vector mesons at large momentum transfer at HERA // *Eur. Phys. J. C.* – 2003. – Vol. 26. – P. 389.

80. Aktas A. [et al.] Diffractive photoproduction of rho mesons with large momentum transfer at HERA // *Phys. Lett. B.* – 2006. – Vol. 638. – P. 422.
81. Brodsky S. J., Frankfurt L., Gunion J. F., Mueller A. H., Strikman M. Diffractive leptonproduction of vector mesons in QCD // *Phys. Rev. D.* – 1994. – Vol. 50. – P. 3134.
82. Frankfurt L., Koepf W., Strikman M. Hard diffractive electroproduction of vector mesons in QCD // *Phys. Rev. D.* – 1996. – Vol. 54. – P. 3194.
83. Collins J. C., Frankfurt L., Strikman M. Factorization for hard exclusive electroproduction of mesons in QCD // *Phys. Rev. D.* – 1997. – Vol. 56. – P. 2982.
84. Radyushkin A. V. Nonforward parton distributions // *Phys. Rev. D.* – 1997. – Vol. 56. – P. 5524.
85. Farrar G. R. Jackson D. R. The Pion Form-Factor // *Phys. Rev. Lett.* – 1979. – Vol. 43. – P. 246.
86. Lepage G. P., Brodsky S. J. Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons // *Phys. Lett. B.* – 1979. – 87. – P. 359.
87. Efremov A. V., Radyushkin A. V. Factorization and Asymptotical Behavior of Pion Form-Factor in QCD // *Phys. Lett. B.* – 1980. – Vol. 94. – P. 245.
88. Mankiewicz L., Piller G. Comments on exclusive electroproduction of transversely polarized vector mesons // *Phys. Rev. D.* – 2000. – Vol. 61. – P. 074013.
89. Ivanov D. Y., Kotsky M. I., Papa A. The impact factor for the virtual photon to light vector meson transition // *Eur. Phys. J. C.* – 2004. – Vol. 38. – P. 195.

90. Ivanov D. Y., Papa A. NLO BFKL at work: the electroproduction of two light vector mesons // *Acta Phys. Polon. B.* – 2008. – Vol. 39. – P. 2391.
91. Boussarie R., Grabovsky A. V., Ivanov D. Y., Szymanowski L., Wallon S. Next-to-Leading Order Computation of Exclusive Diffractive Light Vector Meson Production in a Saturation Framework // *Phys. Rev. Lett.* – 2017. – Vol. 119. – P. 072002.
92. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V., Papa A. The dipole form of the gluon part of the BFKL kernel // *Nucl. Phys. B.* – 2007. – Vol. 784. – P. 49.
93. Kovner A., Lublinsky M., Mulian Y. Conformal symmetry of JIMWLK Evolution at NLO // *JHEP.* – 2014. – Vol. 04. – P. 030.
94. Caron-Huot S. Resummation of non-global logarithms and the BFKL equation // *JHEP.* – 2018. – Vol. 03. – P. 036.
95. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V. On the discrepancy of the low- x evolution kernels // *Nucl. Phys. B.* – 2009. – Vol. 820. – P. 334.
96. Caron-Huot S. When does the gluon reggeize? // *JHEP.* – 2015. – Vol. 05. – P. 093.
97. ZEUS COLLABORATION Production of exclusive dijets in diffractive deep inelastic scattering at HERA // *Eur. Phys. J. C.* – 2016. – Vol. 76. – P. 16.
98. Ivanov D. Y., Papa A. The next-to-leading order forward jet vertex in the small-cone approximation // *JHEP.* – 2012. – Vol. 05. – P. 086.
99. Ioffe B. L. Quantum chromodynamics: Perturbative and nonperturbative aspects / Ioffe B. L., Fadin V. S., Lipatov L. N. – Cambridge Univ. Pr. – 2010. – 596 p.

100. Fadin V. S., Fiore R., Papa A. On the coordinate representation of NLO BFKL // Nucl. Phys. B. – 2007. – Vol. 769. – P. 108.
101. Bartels J., Lipatov L. N., Vacca G. P. Interactions of Reggeized gluons in the Moebius representation // Nucl. Phys. B. – 2005. – Vol. 706. – P. 391.
102. Bartels J., Lipatov L. N., Salvadore M., Vacca G. P. Deformed spectral representation of the BFKL kernel and the bootstrap for gluon reggeization // Nucl. Phys. B. – 2005. – Vol. 726. – P. 53.
103. Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V., Papa A. Low-x evolution equations in Moebius representation // Phys. Part. Nucl. – 2010. – Vol. 41. – P. 935.
104. Fadin V. S., Papa A. A proof of fulfillment of the strong bootstrap condition // Nucl. Phys. B. – 2002. – Vol. 640. – P. 309.