

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г. И. БУДКЕРА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

*На правах рукописи*

Грамолин Александр Валерьевич

**ИЗУЧЕНИЕ ДВУХФОТОННОГО ОБМЕНА  
И АНАЛИЗ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВOK  
В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО УПРУГОМУ РАССЕЙНИЮ  
ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ НА ПРОТОНАХ**

01.04.16 – физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Рачек Игорь Анатольевич

Новосибирск – 2017

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Упругое электрон-протонное рассеяние</b> . . . . .	10
1.1. Кинематика . . . . .	10
1.2. Дифференциальное сечение . . . . .	12
1.3. Электромагнитные формфакторы протона . . . . .	15
1.4. Результаты измерений формфакторов протона . . . . .	19
<b>Глава 2. Радиационные поправки в экспериментах с регистрацией рассеянного электрона</b> . . . . .	23
2.1. Введение . . . . .	23
2.2. Стандартные радиационные поправки . . . . .	28
2.3. Поляризация вакуума . . . . .	30
2.4. Более аккуратное описание внутреннего тормозного излучения . . . . .	32
2.5. Внешнее тормозное излучение . . . . .	35
2.6. Ионизационные потери . . . . .	36
<b>Глава 3. Переобработка данных SLAC по упругому электрон-протонному рассеянию</b> . . . . .	39
<b>Глава 4. Радиационные поправки в экспериментах с регистрацией электрона/позитрона и протона</b> . . . . .	49
4.1. Кинематика процесса $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ . . . . .	49
4.2. Дифференциальное сечение процесса $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ в мягкофотонном приближении . . . . .	51
4.3. Дифференциальное сечение процесса $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ вне мягкофотонного и ультрарелятивистского приближений . . . . .	57

4.4.	Петлевые радиационные поправки и сокращение инфракрасных расходимостей . . . . .	62
4.5.	Радиационные поправки в экспериментах по изучению двухфотонного обмена . . . . .	66
4.6.	Генератор событий ESEPP . . . . .	69
4.6.1.	Общее описание . . . . .	69
4.6.2.	Входные параметры . . . . .	73
4.6.3.	Формат выходных файлов . . . . .	75
4.6.4.	Исходный код и компиляция . . . . .	76
<b>Глава 5. Измерение вклада двухфотонного обмена в сечения</b>		
	<b>упругого <math>e^\pm p</math>-рассеяния . . . . .</b>	<b>79</b>
5.1.	Введение . . . . .	79
5.2.	Постановка эксперимента . . . . .	84
5.2.1.	Электрон-позитронный накопитель ВЭПП-3 . . . . .	84
5.2.2.	Измерение положения и энергии пучка . . . . .	87
5.2.3.	Внутренняя газовая мишень . . . . .	89
5.2.4.	Система регистрации частиц . . . . .	92
5.3.	Анализ экспериментальных данных . . . . .	95
5.3.1.	Выделение событий упругого рассеяния . . . . .	95
5.3.2.	Учет радиационных поправок . . . . .	96
5.3.3.	Систематические погрешности измерения . . . . .	100
5.4.	Результаты эксперимента и обсуждение . . . . .	102
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>109</b>

## Введение

Протон входит в состав всех атомных ядер и поэтому служит важнейшим «строительным блоком» материи. При этом он сам не является элементарным, а состоит из кварков и глюонов. Первое указание на наличие у протона нетривиальной внутренней структуры было получено при измерении его магнитного момента  $\mu$ , выполненном в 1933 г. [1]. Найденное тогда значение оказалось в 2.5 раза больше ожидаемой для точечной частицы величины в один ядерный магнетон. Начиная с пионерских экспериментов, проведенных Хофштадтером с сотрудниками в 1950-х годах [2], для изучения электромагнитной структуры протона используется упругое электрон-протонное рассеяние. Дифференциальное сечение этого процесса параметризуется через электрический,  $G_E(Q^2)$ , и магнитный,  $G_M(Q^2)$ , формфакторы протона, являющиеся вещественными функциями от квадрата переданного ему при рассеянии четырех-импульса,  $Q^2$ . Величины  $G_E$  и  $G_M$  характеризуют распределения внутри протона электрического заряда и магнитного момента, соответственно. Они не вычисляются из первых принципов, но могут быть извлечены из данных для дифференциального сечения упругого  $e^-p$ -рассеяния. Этот способ измерения формфакторов протона известен как метод Розенблюта.

Альтернативный метод изучения формфакторов протона состоит в использовании поляризационных наблюдаемых реакции  $e^-p \rightarrow e^-p$ . Например, в случае рассеяния продольно-поляризованных электронов на неполяризованной протонной мишени величина  $G_E/G_M$  выражается через отношение  $P_t/P_\ell$  поперечной и продольной компонент поляризации протона отдачи. Этот метод был предложен ещё в 1968 г. [3, 4], но реализован на практике только несколько десятилетий спустя. Серия точных поляризационных измерений [5–9], проведенных в 2000-х годах в Национальной лаборатории Джефферсона (США), принесла неожиданные результаты. Оказалось, что отношение  $\mu G_E/G_M$  падает с ростом  $Q^2$ , тогда как ранее считалось, что оно слабо зависит от  $Q^2$  и

близко к единице. Обнаруженное противоречие поставило под сомнение всю методику электроядерных экспериментов.

Наиболее вероятной причиной проблемы считается непропорциональность применения приближения однофотонного обмена при анализе данных неполяризованных измерений. Как известно, метод Розенблюта основан на одноименной формуле для дифференциального сечения упругого  $e^-p$ -рассеяния, записанной в низшем порядке по  $\alpha$  (константе электромагнитного взаимодействия), т. е. в предположении обмена только одним виртуальным фотоном между электроном и протоном. Вклад двухфотонного обмена, являющегося одной из радиационных поправок низшего порядка по  $\alpha$  к изучаемому процессу, учитывается при этом только в простейшем мягкофотонном приближении. Существующие теоретические расчеты «жесткого» двухфотонного обмена являются модельно-зависимыми, и это одна из причин того, что его вкладом прежде пренебрегали.

Однако эффект жесткого двухфотонного обмена может быть изучен экспериментально, путем сравнения между собой дифференциальных сечений упругого  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния. Впервые такие попытки предпринимались ещё в 1960-е годы, однако тогда не была достигнута требуемая точность измерений. После обнаружения противоречия в данных для формфакторов протона, полученных двумя разными методами, интерес к этому вопросу возродился. В 2004 г. было предложено выполнить новое прецизионное измерение на электрон-позитронном накопителе ВЭПП-3 в Новосибирске [10], результаты которого представлены в данной диссертационной работе. Аналогичные эксперименты были также проведены коллаборациями CLAS и OLYMPUS.

Критически важной частью эксперимента на ВЭПП-3 был учет стандартных радиационных поправок. Это объясняется тем, что поправки, связанные с тормозным излучением, также зависят от знака заряда рассеиваемой частицы и по величине сопоставимы с изучаемым эффектом двухфотонного обмена. Поскольку в описываемом измерении рассеянный электрон/позитрон и протон отдачи регистрировались на совпадении, для учета радиационных поправок

потребовалось разработать специальный генератор событий и выполнить тщательное компьютерное моделирование детектора. Также в ходе исследования была проделана ревизия радиационных поправок, применяемых в экспериментах по измерению формфакторов протона методом Розенблюта.

**Целью работы** является экспериментальное изучение вклада жесткого двухфотонного обмена в дифференциальные сечения упругого рассеяния электронов и позитронов на протонах, а также разработка практических методов учета радиационных поправок к этим процессам.

**Задачи**, которые необходимо было решить для достижения поставленной цели, состоят в следующем:

1. Провести экспериментальное сравнение  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния и определить вклад жесткого двухфотонного обмена в дифференциальные сечения этих процессов.
2. Разработать процедуру учета радиационных поправок в экспериментах по упругому  $e^\pm p$ -рассеянию с регистрацией электрона/позитрона и протона на совпадении, а также подготовить соответствующий генератор событий.
3. Выполнить тщательную ревизию радиационных поправок и переобработку данных экспериментов E140 [11] и NE11 [12], проведенных в SLAC и посвященных измерению формфакторов протона методом Розенблюта.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Первое прямое наблюдение эффекта жесткого двухфотонного обмена в упругом электрон-протонном рассеянии.
2. Результаты проведенного на накопителе ВЭПП-3 прецизионного сравнения дифференциальных сечений упругого рассеяния электронов и позитронов на протонах в диапазоне по  $Q^2$  от 0.3 до 1.5 ГэВ<sup>2</sup>.

3. Процедура учета радиационных поправок первого порядка по  $\alpha$  в экспериментах с регистрацией электрона/позитрона и протона на совпадении.
4. Генератор событий упругого рассеяния заряженных лептонов на протонах, в котором учтены радиационные поправки первого порядка по  $\alpha$ .
5. Результаты переобработки данных экспериментов E140 и NE11, выполненных в SLAC и посвященных измерению электромагнитных формфакторов протона методом Розенблюта.

### **Научная новизна:**

1. Осуществлено первое прямое наблюдение эффекта жесткого двухфотонного обмена в упругом электрон-протонном рассеянии.
2. Выполнено самое точное на сегодня сравнение дифференциальных сечений упругого  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния в диапазоне по  $Q^2$  от 0.3 до 1.5 ГэВ<sup>2</sup>.
3. Впервые разработан генератор событий упругого рассеяния заряженных лептонов на протонах, в котором тормозное излучение первого порядка по  $\alpha$  учтено без использования мягкофотонного и ультрарелятивистского приближений.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты эксперимента на накопителе ВЭПП-3 и переобработки данных SLAC важны для понимания причины противоречия между значениями  $G_E/G_M$  протона, полученными двумя разными методами. Разработанная процедура учета радиационных поправок и генератор событий ESEPP могут быть использованы в целом ряде экспериментов по измерению электромагнитных формфакторов и зарядового радиуса протона.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается тем, что они опубликованы в авторитетных научных журналах (Physical Review Letters,

Physical Review C, Journal of Physics G и др.), где прошли тщательное рецензирование. Результаты эксперимента на накопителе ВЭПП-3 находятся в согласии с данными, полученными независимо коллаборациями CLAS и OLYMPUS (см. раздел 5.4).

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались автором на научных семинарах ИЯФ СО РАН (Новосибирск, 2012 и 2016 гг.), Национальной лаборатории Джефферсона (Ньюпорт-Ньюс, США, 2014 г.), Института физики высоких энергий (Пекин, Китай, 2015 г.), Университета науки и технологий Китая (Хэфэй, Китай, 2015 г.) и Петербургского института ядерной физики (Гатчина, 2016 г.), на научной сессии-конференции Секции ядерной физики Отделения физических наук РАН (ИТЭФ, Москва, 2009 г.), на семинаре МНТЦ «Новые перспективы физики высоких энергий» (ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2010 г.), на 19-ой Международной конференции по частицам и ядрам («PANIC11», MIT, Бостон, США, 2011 г.), на Международном совещании по  $e^+e^-$ -столкновениям от  $\phi$  до  $\psi$  («PHIPSI11», ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2011 г.), на симпозиуме «Экспериментальные и теоретические аспекты формфакторов протона» (ПИЯФ, Гатчина, 2012 г.), на совещаниях «Электромагнитные процессы рассеяния и аннигиляции» (ЕСТ\*, Тренто, Италия, 2013 г.) и «Радиационные поправки в экспериментах по аннигиляции и рассеянию» (IPN Orsay, Орсе, Франция, 2013 г.), а также на ежегодном собрании Американского физического общества («APS April Meeting 2017», Вашингтон, США, 2017 г.).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 9 печатных работах, включая 4 оригинальных научных статьи [13–16] и 5 статей в трудах конференций [17–21]. Все они относятся к изданиям, рекомендованным ВАК и входящим в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и/или Scopus.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав основного текста, заключения и списка литературы. Она содержит 21 ри-

сунок и 9 таблиц, а её общий объем составляет 120 страниц. Список литературы включает в себя 137 наименований.

В первой главе диссертации рассматриваются кинематика и дифференциальное сечение процесса упругого электрон-протонного рассеяния. Здесь же обсуждаются электрический и магнитный формфакторы протона — их интерпретация в системе отсчета Брейта, методы измерения и доступные в настоящее время экспериментальные данные. Вторая глава посвящена учету радиационных поправок в экспериментах по  $e^-p$ -рассеянию, в которых регистрируется только рассеянный электрон (инклюзивные измерения). В третьей главе описывается переобработка данных экспериментов E140 и NE11, проведенных в SLAC и посвященных измерению электрического и магнитного формфакторов протона методом Розенблюта при  $1 \leq Q^2 \leq 8.83 \text{ ГэВ}^2$ . В четвертой главе изложена процедура учета радиационных поправок в экспериментах с регистрацией электрона/позитрона и протона на совпадении (эксклюзивные измерения). Здесь же представлен новый генератор событий ESEPP, в котором учтены радиационные поправки первого порядка по  $\alpha$ . Пятая глава содержит описание проведенного в ИЯФ СО РАН на накопителе ВЭПП-3 эксперимента по прецизионному сравнению сечений упругого рассеяния электронов и позитронов на протонах в диапазоне по  $Q^2$  от 0.3 до 1.5  $\text{ГэВ}^2$ . Полученные данные позволили определить вклад жесткого двухфотонного обмена в сечения рассматриваемых процессов. В заключении перечислены основные результаты работы.

Отметим, что в диссертации принята естественная система единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ , а постоянная тонкой структуры равна  $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$ . При таком выборе единиц все энергии, импульсы и массы элементарных частиц выражаются в  $\text{ГэВ}$ , а сечения рассеяния в  $\text{ГэВ}^{-2}$  ( $1 \text{ ГэВ}^{-2} \approx 0.389 \text{ мбн}$ ). Используется такая метрика, что скалярное произведение четырех-импульсов записывается как  $p_i \cdot p_j = E_i E_j - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ . Наконец, мы рассматриваем только лабораторную систему отсчета, в которой протон до рассеяния покоится.

## Глава 1

## Упругое электрон-протонное рассеяние

## 1.1. Кинематика

В данном разделе мы рассмотрим кинематику процесса упругого электрон-протонного рассеяния и введем основные обозначения. Поскольку реакция  $e^-p \rightarrow e^-p$  двухчастичная, то векторы импульсов участвующих в ней частиц лежат в одной плоскости. Выберем направления координатных осей таким образом, чтобы это была плоскость  $xz$ , а ось  $z$  была бы направлена вдоль импульса налетающего электрона. Тогда в лабораторной системе отсчета (где протон мишени до рассеяния покоится) четырех-импульсы частиц, участвующих в реакции, запишутся следующим образом:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) = (E_1, 0, 0, |\mathbf{p}_1|), \quad (1.1)$$

$$p_2 = (M, \mathbf{0}) = (M, 0, 0, 0), \quad (1.2)$$

$$p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3) = (E_3, |\mathbf{p}_3| \sin \theta_3, 0, |\mathbf{p}_3| \cos \theta_3), \quad (1.3)$$

$$p_4 = (E_4, \mathbf{p}_4) = (E_4, -|\mathbf{p}_4| \sin \theta_4, 0, |\mathbf{p}_4| \cos \theta_4), \quad (1.4)$$

где  $p_1$  и  $p_3$  — четырех-импульсы электрона до и после рассеяния;  $p_2$  и  $p_4$  — четырех-импульсы протона до и после рассеяния;  $E_1$  и  $E_3$  — полные энергии налетающего и рассеянного электронов;  $E_4$  — полная энергия протона отдачи. Полярные углы  $\theta_3$  и  $\theta_4$  для рассеянного электрона и протона отдачи отсчитываются от оси  $z$ . Модули векторов импульсов  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_3$  и  $\mathbf{p}_4$  равны

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m^2}, \quad |\mathbf{p}_3| = \sqrt{E_3^2 - m^2}, \quad |\mathbf{p}_4| = \sqrt{E_4^2 - M^2}, \quad (1.5)$$

где  $m$  и  $M$  — массы электрона и протона. В дальнейшем, если это не оговаривается отдельно, мы пренебрегаем массой электрона по сравнению с его энергией и импульсом, т. е. считаем электрон ультрарелятивистским.

Закон сохранения полного четырех-импульса системы,

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \quad (1.6)$$

приводит к следующим трем соотношениям:

$$E_1 + M = E_3 + E_4, \quad (1.7)$$

$$E_3 \sin \theta_3 - \sqrt{E_4^2 - M^2} \sin \theta_4 = 0, \quad (1.8)$$

$$E_1 = E_3 \cos \theta_3 + \sqrt{E_4^2 - M^2} \cos \theta_4. \quad (1.9)$$

Задание любых двух независимых кинематических переменных полностью определяет кинематику двухчастичной реакции. Наиболее естественно выбрать в качестве таких переменных энергию пучка  $E_1$  и угол рассеяния  $\theta_3$ .

Тогда из системы уравнений (1.7)–(1.9) находим:

$$E_3 = \frac{ME_1}{M + E_1(1 - \cos \theta_3)}, \quad (1.10)$$

$$E_4 = M + E_1 - \frac{ME_1}{M + E_1(1 - \cos \theta_3)}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{tg} \theta_4 = \frac{M}{M + E_1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_3}{2}. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) выражает взаимосвязь между полярными углами  $\theta_3$  и  $\theta_4$ , часто используемую для выделения событий упругого рассеяния. Азимутальные углы электрона и протона,  $\phi_3$  и  $\phi_4$ , связаны между собой как  $|\phi_4 - \phi_3| = \pi$  (выбранная нами система координат соответствует значениям  $\phi_3 = 0$  и  $\phi_4 = \pi$ ).

Другой важной кинематической переменной является лоренц-инвариант

$$q^2 = (p_4 - p_2)^2 = 2M(E_3 - E_1) = (p_1 - p_3)^2 \approx -4E_1E_3 \sin^2 \frac{\theta_3}{2}, \quad (1.13)$$

который представляет собой квадрат переданного протону при рассеянии четырех-импульса  $q$ . Поскольку  $q^2 \leq 0$ , то удобно ввести положительную величину  $Q^2 \equiv -q^2$ , которую для краткости будем называть квадратом переданного импульса. Часто вместо  $Q^2$  используется безразмерная кинематическая переменная  $\tau$ , вводимая как

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2}. \quad (1.14)$$

## 1.2. Дифференциальное сечение

В приближении однофотонного обмена (см. Рисунок 1.1) амплитуда  $\mathcal{M}_{1\gamma}$  процесса  $e^-p \rightarrow e^-p$  записывается, в соответствии со стандартными правилами квантовой электродинамики [22–24], как

$$\mathcal{M}_{1\gamma} = j_\mu \frac{1}{q^2} J^\mu, \quad (1.15)$$

где

$$j_\mu = -e\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \quad \text{и} \quad J^\mu = Ze\bar{u}(p_4)\Gamma^\mu u(p_2) \quad (1.16)$$

— электронный и протонный токи перехода,  $-e \equiv -\sqrt{4\pi\alpha}$  — заряд электрона,  $Ze$  — заряд протона,  $\bar{u}$  и  $u$  — спиноры Дирака и  $\gamma^\mu$  — гамма-матрицы. Взаимодействие протона с виртуальным фотоном описывается вершинным оператором  $\Gamma^\mu$ , который параметризуется с помощью формфакторов  $F_1(q^2)$  и  $F_2(q^2)$  следующим образом:

$$\Gamma^\mu = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{F_2(q^2)}{2M}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu, \quad (1.17)$$

где  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$  и  $q_\nu = (p_4 - p_2)_\nu$ . Формфакторы  $F_1$  и  $F_2$ , называемые, соответственно, формфакторами Дирака и Паули, являются вещественными функциями квадрата переданного импульса. Они не вычисляются из первых принципов, но могут быть измерены в экспериментах по упругому рассеянию заряженных лептонов (электронов, позитронов, мюонов) на протонах.

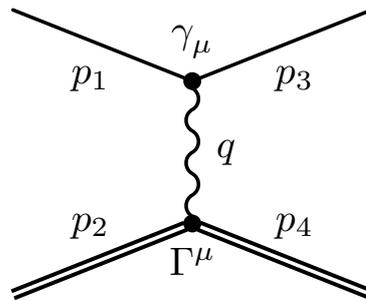


Рис. 1.1. Диаграмма Фейнмана, изображающая процесс упругого электрон-протонного рассеяния в низшем порядке по  $\alpha$  (т. е. в приближении однофотонного обмена).

Нас интересует только случай, когда пучок и мишень не поляризованы, а поляризации частиц в конечном состоянии не измеряются. Тогда квадрат амплитуды процесса, усредненный по начальным и просуммированный по конечным состояниям поляризаций, равен [25]

$$|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2 = \frac{Z^2 e^4}{q^4} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \Gamma^\mu u(p_2)|^2 = \frac{Z^2 e^4}{q^4} \mathcal{L}_{\mu\nu} \mathcal{P}^{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

где электронный  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  и протонный  $\mathcal{P}^{\mu\nu}$  тензоры записываются как

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_3 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu \right], \quad (1.19)$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_4 + M) \Gamma^\mu (\not{p}_2 + M) \Gamma^\nu \right], \quad (1.20)$$

а запись  $\not{p}$  обозначает  $p_\mu \gamma^\mu$ . Используя тождество Гордона

$$i\bar{u}(p_4) \sigma^{\mu\nu} u(p_2) q_\nu = 2M \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2) - (p_2 + p_4)^\mu, \quad (1.21)$$

перепишем выражение для вершинного оператора  $\Gamma^\mu$  как

$$\Gamma^\mu = (F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M} (p_2 + p_4)^\mu. \quad (1.22)$$

Далее, вычисляя  $\mathcal{L}_{\mu\nu} \mathcal{P}^{\mu\nu}$  и пренебрегая массой электрона, найдем

$$|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2 = \frac{Z^2 e^4 M^2}{E_1 E_3} \frac{\cos^2(\theta_3/2)}{\sin^4(\theta_3/2)} \left[ F_1^2 + \tau F_2^2 + 2\tau (F_1 + F_2)^2 \text{tg}^2 \frac{\theta_3}{2} \right]. \quad (1.23)$$

Для дифференциального сечения процесса рассеяния в случае, когда частица-мишень покоится, а массой налетающей частицы можно пренебречь, справедлива следующая общая формула:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{E_3}{ME_1} \right)^2 |\mathcal{M}|^2. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.23) в (1.24) и учитывая, что  $e^2 = 4\pi\alpha$ , запишем дифференциальное сечение процесса  $e^- p \rightarrow e^- p$  в лабораторной системе отсчета как

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E_1^2} \frac{\cos^2(\theta_3/2)}{\sin^4(\theta_3/2)} \frac{E_3}{E_1} \left[ F_1^2 + \tau F_2^2 + 2\tau (F_1 + F_2)^2 \text{tg}^2 \frac{\theta_3}{2} \right]. \quad (1.25)$$

Заметим, что выражение, стоящее в (1.25) перед квадратными скобками, есть не что иное, как дифференциальное сечение Мотта, описывающее рассеяние электронов на бесспиновых точечных ядрах с электрическим зарядом  $Z$ :

$$\frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega_3} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E_1^2} \frac{\cos^2(\theta_3/2)}{\sin^4(\theta_3/2)} \eta^{-1}, \quad (1.26)$$

где введен безразмерный параметр  $\eta$ , связанный с отдачей ядра и равный

$$\eta = \frac{E_1}{E_3} = 1 + \frac{E_1}{M}(1 - \cos\theta_3). \quad (1.27)$$

С учетом этого формула (1.25) запишется как

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} = \left[ F_1^2 + \tau F_2^2 + 2\tau(F_1 + F_2)^2 \text{tg}^2 \frac{\theta_3}{2} \right] \frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega_3}. \quad (1.28)$$

Часто вместо формфакторов Дирака и Паули удобнее использовать формфакторы Сакса [26],  $G_E$  и  $G_M$ , являющиеся линейными комбинациями  $F_1$  и  $F_2$ :

$$G_E = F_1 - \tau F_2, \quad G_M = F_1 + F_2. \quad (1.29)$$

Формфактор  $G_E$  называют электрическим, а  $G_M$  — магнитным. Их физическая интерпретация обсуждается в разделе 1.3. В терминах  $G_E$  и  $G_M$  дифференциальное сечение (1.28) запишется как

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} = \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \text{tg}^2 \frac{\theta_3}{2} \right] \frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega_3}. \quad (1.30)$$

Введем новую безразмерную кинематическую переменную

$$\varepsilon = \left[ 1 + 2(1 + \tau) \text{tg}^2 \frac{\theta_3}{2} \right]^{-1}, \quad (1.31)$$

принимающую значения от 0 до 1 (при  $\theta_3 = \pi$  и  $\theta_3 = 0$ , соответственно) и называемую обычно «поляризацией виртуального фотона». Тогда получаем следующее простое выражение для  $d\sigma_0/d\Omega_3$ :

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} = \frac{\varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2}{\varepsilon(1 + \tau)} \frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega_3}. \quad (1.32)$$

Формула (1.32) носит имя Розенблюта — американского физика, который первым вычислил дифференциальное сечение для процесса упругого электрон-протонного рассеяния [27].

Заметим, что в общем случае, когда массой лептона  $m$  нельзя пренебречь, формула (1.32) по-прежнему справедлива при условии, что используются следующие выражения для  $\varepsilon$  и  $d\sigma_{\text{Mott}}/d\Omega_3$  [13, 28]:

$$\tilde{\varepsilon} = \left[ 1 + 2(1 + \tau) \frac{Q^2 - 2m^2}{4E_1E_3 - Q^2} \right]^{-1}, \quad (1.33)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega_3} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E_1^2} \frac{1 - Q^2/(4E_1E_3)}{Q^4/(4E_1E_3)^2} \frac{1}{d} \frac{M(E_3^2 - m^2)}{ME_1E_3 + m^2(E_3 - E_1 - M)}, \quad (1.34)$$

где

$$Q^2 = 2M(E_1 - E_3), \quad d = \frac{E_3}{E_1} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_3|}. \quad (1.35)$$

Переменная  $\tilde{\varepsilon}$  может теперь принимать значения, большие единицы (мы поместили её тильдой, чтобы подчеркнуть это отличие от введенной ранее величины  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ). Например, легко заметить, что в пределе  $Q^2 \rightarrow 0$  формула (1.33) дает  $\tilde{\varepsilon} = E_1^2/(E_1^2 - m^2) > 1$ . Если же массой  $m$  пренебречь, то новая переменная  $\tilde{\varepsilon}$  совпадает с  $\varepsilon$ , введенной в (1.31).

### 1.3. Электромагнитные формфакторы протона

Введенные в разделе 1.2 лоренц-инвариантные формфакторы  $G_E(Q^2)$  и  $G_M(Q^2)$  используются для феноменологического описания электромагнитных свойств протона в рамках квантовой электродинамики и пока ещё не могут быть вычислены из первых принципов [29–33]. Хотя отсюда уже очевидна важность их экспериментального изучения, полезно обсудить физическую интерпретацию этих величин [22, 25]. Для этого рассмотрим упругое  $e^-p$ -рассеяние и перейдем в так называемую систему отсчета Брейта, в которой  $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_2$  (т. е. протон меняет свой импульс на противоположный, как если бы он упруго отскакивал от «кирпичной стены»). При этом протон не получает энергии,

а  $Q^2$  записывается как

$$Q^2 \equiv -q^2 = -(0, \mathbf{q})^2 = |\mathbf{q}|^2. \quad (1.36)$$

Рассматривая в такой кинематике ток  $J^\mu$  (1.16), можно показать, что форм-фактор  $G_E$  ( $G_M$ ) является фурье-образом от плотности пространственного распределения электрического заряда (магнитного момента) протона в системе Брейта:

$$G_{E,M}(Q^2) = \int \rho_{E,M}(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (1.37)$$

Другими словами, трехмерное преобразование Фурье (1.37) позволяет перейти от координатного представления величин  $\rho_E(\mathbf{r})$  и  $\rho_M(\mathbf{r})$  к импульсному — электромагнитным формфакторам  $G_E(Q^2)$  и  $G_M(Q^2)$ . Этой элегантной связи не следует придавать слишком буквальный смысл, поскольку каждому значению  $Q^2$  соответствует своя система Брейта, которая, таким образом, является лишь математической абстракцией. Если функции  $\rho_E(\mathbf{r})$  и  $\rho_M(\mathbf{r})$  не заданы в какой-либо определенной системе отсчета, то они вряд ли имеют физический смысл. Однако в нерелятивистском пределе  $Q^2 \ll M^2$  система Брейта совпадает с системой покоя протона и не зависит от  $Q^2$ , тогда описанная интерпретация вполне легитимна. Это относится как к случаю очень малых  $Q^2$ , так и к экспериментам по рассеянию электронов на тяжелых ядрах, когда их отдачей можно пренебречь.

Естественно предположить, что распределения  $\rho_E(\mathbf{r})$  и  $\rho_M(\mathbf{r})$  являются сферически-симметричными, т. е. зависят только от величины  $r = |\mathbf{r}|$ . Выберем такую сферическую систему координат, в которой полярная ось направлена вдоль вектора  $\mathbf{q}$ , а угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  равен  $\theta$ . Тогда скалярное произведение  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$  и элемент объема  $d^3\mathbf{r}$  равны

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{q}| |\mathbf{r}| \cos \theta = Q r \cos \theta, \quad (1.38)$$

$$d^3\mathbf{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (1.39)$$

а выражение (1.37) принимает вид

$$\begin{aligned}
 G_{E,M}(Q^2) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{\infty} r^2 \rho_{E,M}(r) \exp(i Q r \cos \theta) dr = \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} r^2 \rho_{E,M}(r) \frac{\exp(i Q r \cos \theta) \Big|_{\cos \theta=-1}^{\cos \theta=1}}{i Q r} dr = \frac{4\pi}{Q} \int_0^{\infty} r \rho_{E,M}(r) \sin(Qr) dr.
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Заметим, что обратное к (1.40) преобразование Фурье записывается как

$$\rho_{E,M}(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} Q G_{E,M}(Q^2) \sin(Qr) dQ. \tag{1.41}$$

Разложим функцию  $\sin(Qr)$  в ряд Маклорена (т. е. ряд Тейлора в окрестности точки  $Q = 0$ ):

$$\sin(Qr) = Qr - \frac{(Qr)^3}{3!} + \frac{(Qr)^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (Qr)^{2n+1}. \tag{1.42}$$

Подстановка (1.42) в (1.40) дает

$$\begin{aligned}
 G_{E,M}(Q^2) &= \frac{4\pi}{Q} \int_0^{\infty} r \rho_{E,M}(r) \left[ Qr - \frac{(Qr)^3}{3!} + \frac{(Qr)^5}{5!} - \dots \right] dr = \\
 &= 4\pi \int_0^{\infty} r^2 \rho_{E,M}(r) dr - \frac{4\pi}{3!} Q^2 \int_0^{\infty} r^4 \rho_{E,M}(r) dr + \frac{4\pi}{5!} Q^4 \int_0^{\infty} r^6 \rho_{E,M}(r) dr - \dots = \\
 &= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} Q^{2n} \int_0^{\infty} r^{2n+2} \rho_{E,M}(r) dr.
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

При  $Q = 0$  все члены ряда (1.43), кроме первого, зануляются:

$$G_{E,M}(0) = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 \rho_{E,M}(r) dr. \tag{1.44}$$

Поскольку для протона  $G_{E,M}(0) \neq 0$ , мы можем поделить обе части форму-

лы (1.43) на (1.44). После этого, обозначив

$$\langle r_{E,M}^n \rangle = \frac{\int_0^\infty r^{n+2} \rho_{E,M}(r) dr}{\int_0^\infty r^2 \rho_{E,M}(r) dr}, \quad (1.45)$$

получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned} \frac{G_{E,M}(Q^2)}{G_{E,M}(0)} &= 1 - \frac{1}{6} \langle r_{E,M}^2 \rangle Q^2 + \frac{1}{120} \langle r_{E,M}^4 \rangle Q^4 - \frac{1}{5040} \langle r_{E,M}^6 \rangle Q^6 + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \langle r_{E,M}^{2n} \rangle Q^{2n}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Заметим, что разложение (1.46) содержит только четные степени  $\langle r_{E,M}^{2n} \rangle$  и  $Q^{2n}$ , причем при очень малых  $Q^2$  можно ограничиться только несколькими первыми членами.

Определяемые в соответствии с (1.45) величины  $\sqrt{\langle r_E^2 \rangle}$  и  $\sqrt{\langle r_M^2 \rangle}$  называют, соответственно, зарядовым и магнитным среднеквадратичными радиусами протона и используют для описания его размера. Ряд (1.46) позволяет ввести следующее альтернативное определение для величины  $\langle r_{E,M}^2 \rangle$ :

$$\langle r_{E,M}^2 \rangle = \frac{-6}{G_{E,M}(0)} \left. \frac{dG_{E,M}(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}. \quad (1.47)$$

Хотя формулы (1.45) и (1.47) согласуются друг с другом, именно последняя считается корректным определением величины  $\langle r_{E,M}^2 \rangle$ , поскольку для её интерпретации не требуется привлекать систему Брейта. Фактически она выражает  $\langle r_E^2 \rangle$  и  $\langle r_M^2 \rangle$  через углы наклона формфакторов  $G_E(Q^2)$  и  $G_M(Q^2)$  в точке  $Q^2 = 0$ .

Численные результаты измерений формфакторов протона приводятся в разделе 1.4, но грубо их можно описать как

$$G_E(Q^2) \approx G_D(Q^2), \quad G_M(Q^2) \approx \mu G_D(Q^2), \quad (1.48)$$

где функцию

$$G_D(Q^2) = \left( 1 + \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-2} \quad (1.49)$$

называют дипольным формфактором, а  $\Lambda^2 = 0.71 \text{ ГэВ}^2$ . Такой дипольной зависимости соответствуют экспоненциально убывающие с радиусом распределения электрического заряда и магнитного момента протона в системе Брейта:

$$\rho_E(r) = \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r}, \quad \rho_M(r) = \mu \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r}. \quad (1.50)$$

Среднеквадратичные радиусы протона в этом случае равны

$$\sqrt{\langle r_E^2 \rangle} = \sqrt{\langle r_M^2 \rangle} = \frac{\sqrt{12}}{\Lambda} \approx 0.81 \text{ Фм}. \quad (1.51)$$

## 1.4. Результаты измерений формфакторов протона

Экспериментальное изучение электромагнитных формфакторов протона началось в 1950-е годы с пионерских работ Хофштадтера [2]. Единственным известным тогда способом измерения  $G_E$  и  $G_M$  был метод Розенблюта, в основе которого лежит одноименная формула (1.32) для дифференциального сечения упругого  $e^-p$ -рассеяния. Входящая в неё комбинация формфакторов  $\varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2$  линейно зависит от  $\varepsilon$  и называется редуцированным сечением. Варьируя энергию пучка и углы рассеяния электрона, можно измерить редуцированное сечение при фиксированной передаче импульса  $Q^2$ , но разных значениях  $\varepsilon$ . Затем полученные данные можно аппроксимировать линейной функцией от  $\varepsilon$ , тангенс угла наклона которой и точка пересечения с осью ординат дадут, соответственно,  $G_E^2$  и  $\tau G_M^2$  при данном  $Q^2$ . Существенным недостатком описанного метода является то обстоятельство, что вклад электрического формфактора в редуцированное сечение падает с ростом  $Q^2$ , делая затруднительным извлечение  $G_E$  при больших передачах импульса. На Рисунке 1.2 приведены характерные результаты измерений формфакторов протона, полученные методом Розенблюта в течение нескольких десятилетий. Для удобства показанные там значения  $G_E$  и  $G_M$  нормированы на дипольный формфактор (1.49), а горизонтальная шкала сделана логарифмической. Видно, что при высоких  $Q^2$  магнитный формфактор протона известен намного лучше электрического.

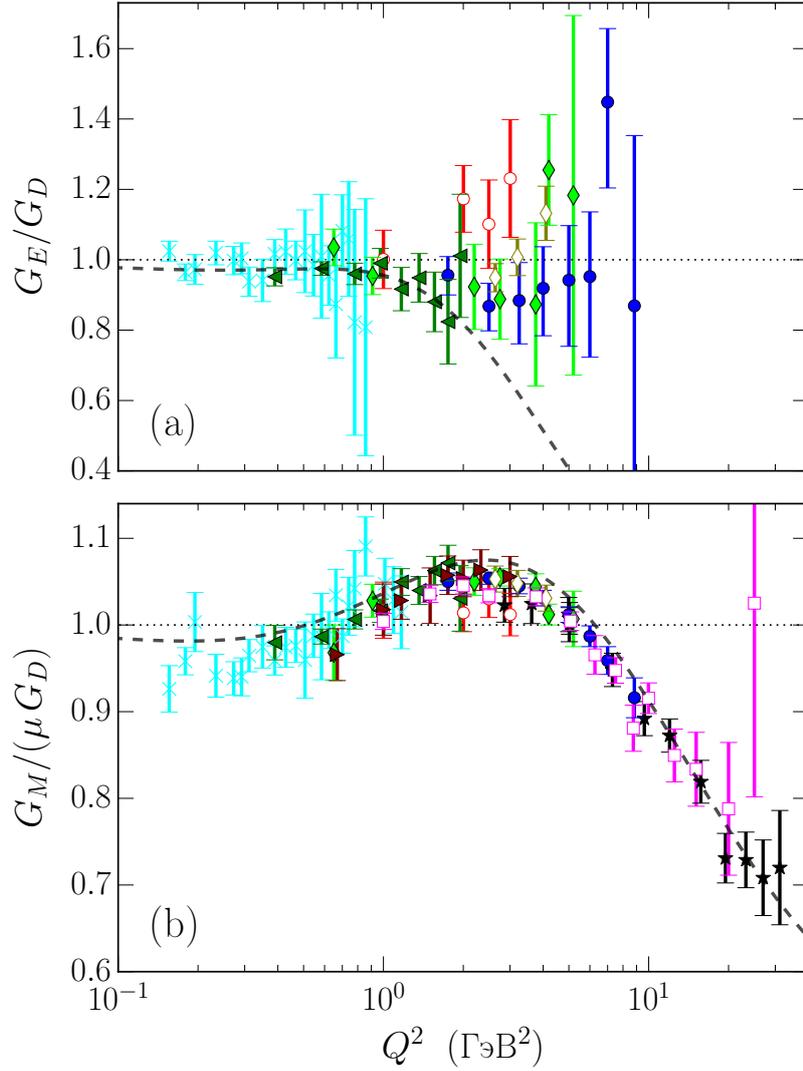


Рис. 1.2. Данные для электрического (a) и магнитного (b) формфакторов протона, полученные методом Розенблюта в следующих измерениях:  $\times$  [34],  $\blacktriangleleft$  [35],  $\blacktriangleright$  [36],  $\square$  [37],  $\star$  [38],  $\circ$  [11],  $\bullet$  [12],  $\blacklozenge$  [39] и  $\blacklozenge$  [40]. Серой пунктирной линией показана параметризация Келли (1.53)–(1.54). Горизонтальная шкала является логарифмической.

Альтернативный подход состоит в измерении поляризационных наблюдаемых реакции  $e^-p \rightarrow e^-p$ , а не её дифференциального сечения. В частности, при упругом рассеянии продольно-поляризованного электрона на неполяризованном протоне величина  $G_E/G_M$  выражается в приближении однофотонного обмена как

$$\frac{G_E}{G_M} = -\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\tau}{2\varepsilon}} \frac{P_t}{P_\ell}, \quad (1.52)$$

где  $P_t/P_\ell$  — это отношение поперечной и продольной компонент поляризации протона отдачи. Соответствующий метод измерения  $G_E/G_M$  получил назва-

ние метода передачи поляризации. Он был предложен Ахиезером и Рекало ещё в 1968 г. [3, 4], но реализован на практике лишь десятилетия спустя, после появления интенсивных пучков поляризованных электронов и эффективных протонных поляриметров. Другой вариант описанного метода состоит в наблюдении асимметрии при рассеянии поляризованных электронов на поляризованной протонной мишени [33, 41]. В отличие от метода Розенблюта, чувствительность поляризационных измерений к электрическому формфактору не падает с ростом  $Q^2$ . С другой стороны, знания одного лишь отношения формфакторов недостаточно для отдельного определения  $G_E$  и  $G_M$ . Отсюда ясно, что для достижения наилучших результатов следует использовать данные обоих методов.

Серия точных поляризационных измерений величины  $G_E/G_M$  была проведена в Национальной лаборатории Джефферсона (США) и принесла неожиданные результаты [5–9]. Оказалось, что отношение электрического и магнитного формфакторов протона падает с ростом  $Q^2$ , что противоречит классическим данным, полученным методом Розенблюта (см. Рисунок 1.3). Эта парадоксальная ситуация привлекла большое внимание научного сообщества, поскольку ставит под сомнение всю методику электроядерных экспериментов. Для проверки обоих методов были выполнены дополнительные измерения и переработаны старые данные. Например, проверялось, что при фиксированных значениях  $Q^2$  редуцированное сечение является линейной функцией от  $\varepsilon$  [42], а величина (1.52) — константой [43]. Также было проведено новое прецизионное измерение формфакторов методом Розенблюта, в котором вместо рассеянного электрона регистрировался протон отдачи [40]. Однако всего этого оказалось недостаточно для разрешения противоречия.

Несмотря на эту проблему, предпринимаются попытки совместного анализа данных обоих методов. В частности, отметим работу Келли [44], в которой была предложена следующая простая параметризация для электрического и

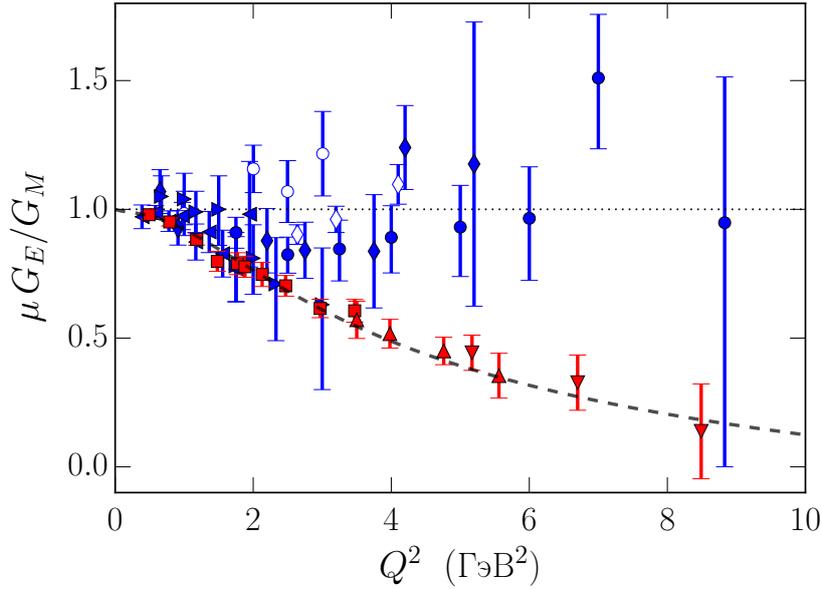


Рис. 1.3. Отношение  $\mu G_E/G_M$  в зависимости от  $Q^2$ , измеренное с помощью двух разных методов. Результаты, полученные методом Розенблюта (синие маркеры):  $\blacktriangleleft$  [35],  $\blacktriangleright$  [36],  $\circ$  [11],  $\bullet$  [12],  $\blacklozenge$  [39] и  $\diamond$  [40]. Поляризационные данные (красные маркеры):  $\blacksquare$  [5, 6],  $\blacktriangle$  [7, 8] и  $\blacktriangledown$  [9]. Серой пунктирной линией показана параметризация Келли (1.53)–(1.54).

магнитного формфакторов протона:

$$G_E(\tau) = \frac{1 - 0.24\tau}{1 + 10.98\tau + 12.82\tau^2 + 21.97\tau^3}, \quad (1.53)$$

$$G_M(\tau) = \mu \frac{1 + 0.12\tau}{1 + 10.97\tau + 18.86\tau^2 + 6.55\tau^3}. \quad (1.54)$$

Достоинством этой модели является то, что она имеет разумные статический,  $G_E(0) = G_M(0)/\mu = 1$ , и асимптотический,  $G_{E,M} \propto \tau^{-2}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , пределы. Отметим, что такое асимптотическое поведение нуклонных формфакторов предсказывается в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики [45].

Кривые, соответствующие параметризации Келли (1.53)–(1.54), показаны на Рисунках 1.2 и 1.3 серыми пунктирными линиями. Видно, что они хорошо описывают поляризационные данные и результаты розенблютовских измерений магнитного формфактора, но предсказывают падение величины  $G_E/G_D$  с ростом  $Q^2$ . К аналогичному выводу о поведении  $G_E$  приходят и многие другие авторы.

## Глава 2

# Радиационные поправки в экспериментах с регистрацией рассеянного электрона

## 2.1. Введение

Измеряемое в эксперименте дифференциальное сечение упругого электрон-протонного рассеяния неизбежно содержит дополнительные вклады процессов порядка  $\alpha^3$  и выше, поэтому оно отличается от величины  $d\sigma_0/d\Omega_3 \sim \alpha^2$ , предсказываемой формулой Розенблюта (1.32). Эти вклады, называемые радиационными поправками, необходимо учитывать при обработке экспериментальных данных. Если ограничиться только двумя низшими порядками по  $\alpha$ , то можно записать следующее условное выражение для наблюдаемого сечения  $\sigma$  процесса  $e^-p \rightarrow e^-p$ :

$$\begin{aligned} \sigma \propto & |\mathcal{M}_{1\gamma}|^2 + 2 \operatorname{Re} [\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger (\mathcal{M}_{\text{vac}} + \mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell + \mathcal{M}_{\text{vert}}^p)] + \\ & + 2 \operatorname{Re} [\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger (\mathcal{M}_{\text{box}} + \mathcal{M}_{\text{xbox}})] + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{li}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{lf}}|^2 + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pi}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pf}}|^2 + \\ & + 2 \operatorname{Re} [(\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{li}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{lf}})^\dagger (\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pi}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pf}})] + \mathcal{O}(\alpha^4), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{M}_{1\gamma}$  — это амплитуда однофотонного обмена;  $\mathcal{M}_{\text{vac}}$  — амплитуда процесса поляризации вакуума;  $\mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell$  и  $\mathcal{M}_{\text{vert}}^p$  — амплитуды процессов, дающих электронную и протонную вершинные поправки;  $\mathcal{M}_{\text{box}}$  и  $\mathcal{M}_{\text{xbox}}$  — амплитуды процессов двухфотонного обмена;  $\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{li}}$ ,  $\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{lf}}$ ,  $\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pi}}$  и  $\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pf}}$  — амплитуды процессов тормозного излучения первого порядка в случаях, когда фотон излучается, соответственно, электроном в начальном состоянии, электроном в конечном состоянии, протоном в начальном состоянии и протоном в конечном состоянии. Фейнмановские диаграммы всех перечисленных процессов изображены на Рисунке 2.1. Отметим, что интерференционные члены, связанные с двухфотонным обменом (см. первое слагаемое во второй строке обсуждаемо-

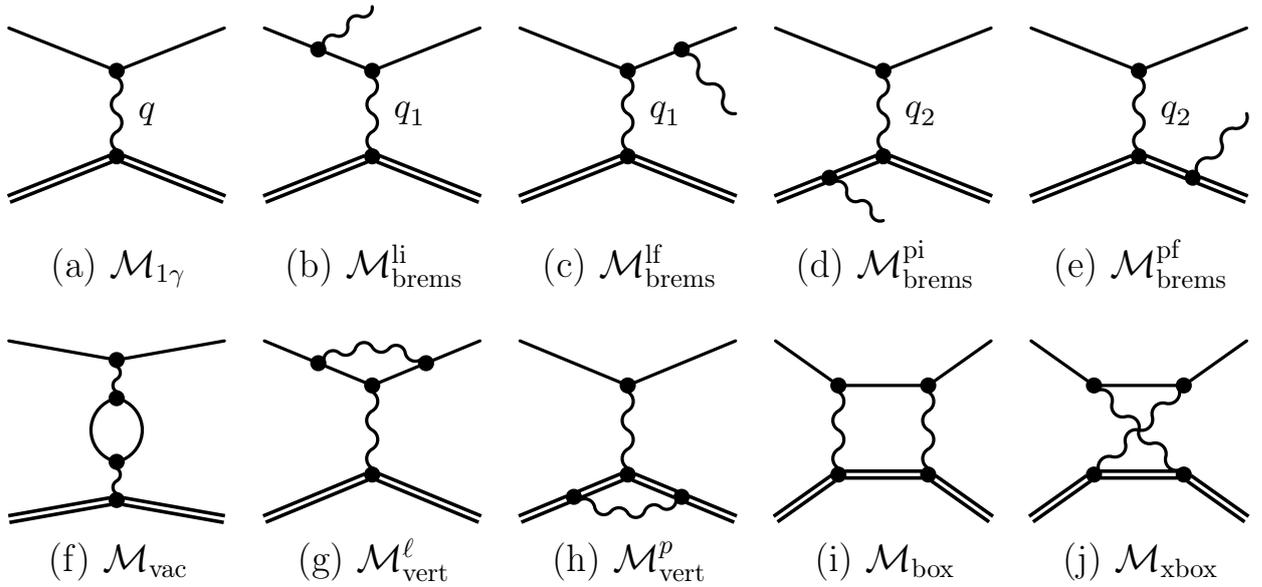


Рис. 2.1. Фейнмановские диаграммы, описывающие упругое электрон-протонное рассеяние в двух низших порядках по  $\alpha$ . Диаграмма (a) соответствует приближению однофотонного обмена. Диаграммы (b–e) изображают процесс тормозного излучения первого порядка в случаях, когда фотон излучается налетающим электроном (b), рассеянным электроном (c), протоном до рассеяния (d) и протоном после рассеяния (e). Диаграммы (f–j) соответствуют радиационным поправкам, связанным с излучением и поглощением дополнительных виртуальных фотонов: поправка на поляризацию вакуума (f), электронная (g) и протонная (h) вершинные поправки и, наконец, поправки на двухфотонный обмен (i, j).

го выражения) и тормозным излучением (см. третью строку), являются зарядово-нечетными, т. е. меняют знак в зависимости от знака заряда рассеиваемой частицы. Это обстоятельство лежит в основе описываемого в Главе 5 эксперимента по рассеянию электронов и позитронов на протонах. Остальные члены в (2.1) являются зарядово-четными.

Полезно понимать, что все обсуждаемые амплитуды, за исключением  $\mathcal{M}_{1\gamma}$  и  $\mathcal{M}_{\text{vac}}$ , являются инфракрасно-расходящимися, т. е. неограниченно растут в пределе бесконечно мягких («инфракрасных») фотонов. Все эти расходимости взаимно сокращаются, поэтому сечение (2.1) принимает конечные значения. Выражаясь точнее, происходят следующие сокращения инфракрасных расходимостей: между членами  $2 \operatorname{Re} (\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell)$  и  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{li}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{lf}}|^2$ , между  $2 \operatorname{Re} (\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{\text{vert}}^p)$  и  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pi}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pf}}|^2$  и, наконец, между упомянутыми выше зарядово-нечетными интерференционными членами, связанными с двухфотонным обменом и тормозным излучением (см. раздел 4.4).

Процессы, соответствующие диаграммам (b)–(j) на Рисунке 2.1, принято относить к внутренним радиационным поправкам. Они связаны с обменом дополнительными виртуальными фотонами и излучением реальных фотонов, происходящими в изучаемом акте упругого рассеяния. Выделяют также внешние радиационные поправки, возникающие из-за тормозного излучения и ионизации вещества при прохождении налетающих и рассеянных электронов через материалы мишени.

Величина радиационных поправок зависит как от кинематических параметров изучаемого процесса, так и от конкретных экспериментальных условий (аксептанса детектора, его координатного и энергетического разрешений) и используемой процедуры отбора событий. В связи с этим для учета радиационных поправок в экспериментах с регистрацией продуктов реакции на совпадении (т. е. в эксклюзивных измерениях) обычно требуется проводить реалистичное компьютерное моделирование детектора с использованием соответствующего генератора событий. Этот случай рассмотрен в Главе 4.

Ситуация существенно упрощается в случае одноплечевого (инклюзивного) эксперимента, когда регистрируются только электроны, рассеянные на фиксированный угол  $\theta_3$ . Такие измерения обычно проводят с использованием магнитных спектрометров, имеющих высокие угловое и импульсное разрешения. Тогда процедура отбора упругих событий сводится к ограничению снизу энергии  $E_3$  зарегистрированных электронов и может быть описана с использованием единственного параметра  $\Delta E$  следующим образом:

$$E_3^{\text{el}} - E_3 \leq \Delta E, \quad (2.2)$$

где  $E_3^{\text{el}} = E_1/\eta$  — это энергия упругого пика. Фактическая энергия электрона  $E_3$  меньше, чем  $E_3^{\text{el}}$  из-за неупругих процессов (как внутренних, так и внешних), сопровождающих упругое рассеяние. В этой и следующей главах мы рассматриваем только случай одноплечевого эксперимента.

С учетом радиационных поправок, измеряемое дифференциальное сече-

ние и сечение Розенблюта (1.32) связаны между собой как

$$\frac{d\sigma_{\text{meas}}}{d\Omega_3} = C_{\text{rad}} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}, \quad (2.3)$$

где поправочный множитель  $C_{\text{rad}}$  в низшем порядке по  $\alpha$  равен

$$C_{\text{rad}} = 1 + \delta(\Delta E). \quad (2.4)$$

Первое вычисление величины  $\delta$  было проведено ещё в 1949 г. Швингером [46], который получил следующую поправку для случая рассеяния электрона на кулоновском потенциале:

$$\delta_{\text{Schw}}(\Delta E) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{E_1}{\Delta E} - \frac{13}{12} \right) \left( \ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) + \frac{17}{36} \right], \quad (2.5)$$

где  $m$  — масса электрона.

В дальнейшем радиационные поправки для случая электрон-протонного рассеяния вычислялись во многих работах, например [13, 16, 47–57]. Наиболее часто при анализе экспериментальных данных используются формулы Мо и Тсая [49], опубликованные в 1969 г. Сравнительно недавно Максимон и Тъён предложили новый подход [50], в котором они улучшили расчет Мо и Тсая. Мы будем называть вычисления [49] и [50] стандартными радиационными поправками. Отметим, что в них включены только внутренние процессы, а учет внешних радиационных поправок требуется проводить отдельно.

Нетрудно заметить, что  $\delta_{\text{Schw}}(\Delta E) \rightarrow -\infty$  в пределе  $\Delta E \rightarrow 0$ . В то же время из физических соображений очевидно, что наблюдаемое сечение (2.3) должно уменьшаться до нуля по мере того, как мы накладываем более жесткие ограничения при отборе упругих событий, т. е. с уменьшением  $\Delta E$ . Это противоречие возникает из-за того, что поправочный множитель (2.4) учитывает только процессы порядка  $\alpha^3$ , когда тормозное излучение сводится к испусканию единичного фотона. Как показали Йенни, Фраучи и Суура [58], излучение произвольного числа мягких фотонов может быть учтено путем экспоненцирования величины  $\delta(\Delta E)$ :

$$C_{\text{rad}} = \exp[\delta(\Delta E)], \quad (2.6)$$

при этом получается правильная асимптотика  $C_{\text{rad}} \rightarrow 0$  при  $\Delta E \rightarrow 0$ . Разница между поправочными множителями (2.4) и (2.6) возрастает с уменьшением  $\Delta E$  и оказывается существенной при достижении высокого разрешения по энергии рассеянного электрона.

Мы будем придерживаться следующего определения для  $C_{\text{rad}}$ , аналогичного тому, что использовалось в работах [11, 12]:

$$C_{\text{rad}} = \exp(\delta_{\text{MTj}} + \delta_{\text{vac}} + \delta_{\text{int.br.}} + \delta_{\text{ext.br.}})C_L, \quad (2.7)$$

где  $\delta_{\text{MTj}}$  представляет стандартные радиационные поправки по Максимуму и Тьёну [50];  $\delta_{\text{vac}}$  — это часть поправки на поляризацию вакуума, неучтенная в стандартных радиационных поправках;  $\delta_{\text{int.br.}}$  — это дополнительная поправка, помогающая улучшить описание жесткого внутреннего тормозного излучения;  $\delta_{\text{ext.br.}}$  — это член, учитывающий внешнее тормозное излучение; и  $C_L$  — это поправочный множитель, обусловленный ионизационными потерями электронов при их прохождении через материалы мишени. Часто утверждается, что поправка на поляризацию вакуума не должна экспоненцироваться, поскольку она не является инфракрасно расходящейся [49, 51]. Однако это не приводит к существенному изменению численного значения  $C_{\text{rad}}$ , т. к. поправка  $\delta_{\text{vac}}$  обычно мала по сравнению с другими экспоненцируемыми членами.

Члены  $\delta_{\text{MTj}}$ ,  $\delta_{\text{vac}}$  и  $\delta_{\text{int.br.}}$  относятся к внутренним радиационным поправкам, тогда как  $\delta_{\text{ext.br.}}$  и  $C_L$  — к внешним. В последующих разделах мы рассмотрим каждый из этих членов отдельно.

## 2.2. Стандартные радиационные поправки

Максимон и Тьён [50] приводят следующую формулу для учета внутренних радиационных поправок:

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{МТj}} = & \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{13}{6} \ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{28}{9} - \left( \ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{4E_1 E_3^{\text{el}}}{(2\eta\Delta E)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \ln^2 \eta + \Phi \left( \cos^2 \frac{\theta_3}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} \right] + \\
& + \frac{2\alpha Z}{\pi} \left[ -\ln \eta \ln \frac{Q^2 x}{(2\eta\Delta E)^2} + \Phi \left( 1 - \frac{\eta}{x} \right) - \Phi \left( 1 - \frac{1}{\eta x} \right) \right] + \\
& + \frac{\alpha Z^2}{\pi} \left\{ \frac{E_4}{|\mathbf{p}_4|} \left[ -\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x \ln \frac{Q^2 + 4M^2}{M^2} + \ln x - \Phi \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\Phi \left( -\frac{1}{x} \right) + \frac{\pi^2}{6} \right] - \left( \frac{E_4}{|\mathbf{p}_4|} \ln x - 1 \right) \ln \frac{M^2}{(2\eta\Delta E)^2} + 1 \right\}, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

где  $E_4 = M + E_1 - E_3^{\text{el}}$  и  $|\mathbf{p}_4| = \sqrt{E_4^2 - M^2}$  — энергия и модуль импульса протона отдачи и  $x = (E_4 + |\mathbf{p}_4|)/M$ . Греческой буквой  $\Phi$  обозначена функция Спенса (дилогарифм), определяемая как

$$\Phi(y) = - \int_0^y \frac{\ln |1-u|}{u} du. \quad (2.9)$$

Заметим, что в математике принято другое определение дилогарифма (являющегося частным случаем полилогарифма):

$$\text{Li}_2(y) = - \int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u} du. \quad (2.10)$$

В интересующем нас случае вещественного аргумента функция  $\Phi(y)$  связана с  $\text{Li}_2(y)$  следующим образом:

$$\Phi(y) = \begin{cases} \text{Li}_2(y), & y \leq 1; \\ \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2(y) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{y}\right), & y > 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Можно выделить три основных различия между радиационными поправками Максимо́на–Тье́на [50] и Мо–Тсяя [49] (более детально это обсуждается

в работе [59]). Во-первых, в расчете Максимова и Тьёна для уточнения протонной вершинной поправки вводится дополнительный член  $\delta_{\text{el}}^{(1)}$  (см. выражение (3.37) в [50]). Мы опустили этот член в формуле (2.8), поскольку он мал и, кроме того, является модельно-зависимым, т. к. выражается через формфакторы протона.

Во-вторых, в работах Мо–Тсяя и Максимова–Тьёна мягкофотонная часть вклада диаграмм двухфотонного обмена параметризуется двумя различными способами. Хотя трудно отдать явное предпочтение одному из этих подходов, выражение (2.8), полученное Максимоном и Тьёном, является более простым и компактным. Для того, чтобы перейти к описанию мягкого двухфотонного обмена по Мо и Тсяю, нужно вычесть из (2.8) следующую поправку [13, 16]:

$$\delta'_{2\gamma} = -\frac{\alpha Z}{\pi} \left[ \ln \eta \ln \frac{Q^4}{4M^2 E_1 E_3^{\text{el}}} + 2\Phi \left( 1 - \frac{M}{2E_1} \right) - 2\Phi \left( 1 - \frac{M}{2E_3^{\text{el}}} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Зависимость  $\delta'_{2\gamma}$  от кинематической переменной  $\varepsilon$  показана на Рисунке 2.2 для трех фиксированных значений  $Q^2$ . Видно, что эта поправка может достигать величины 1–2%, являясь при этом нелинейной по  $\varepsilon$ , что оказывает заметное влияние на результаты измерения электрического формфактора протона ме-

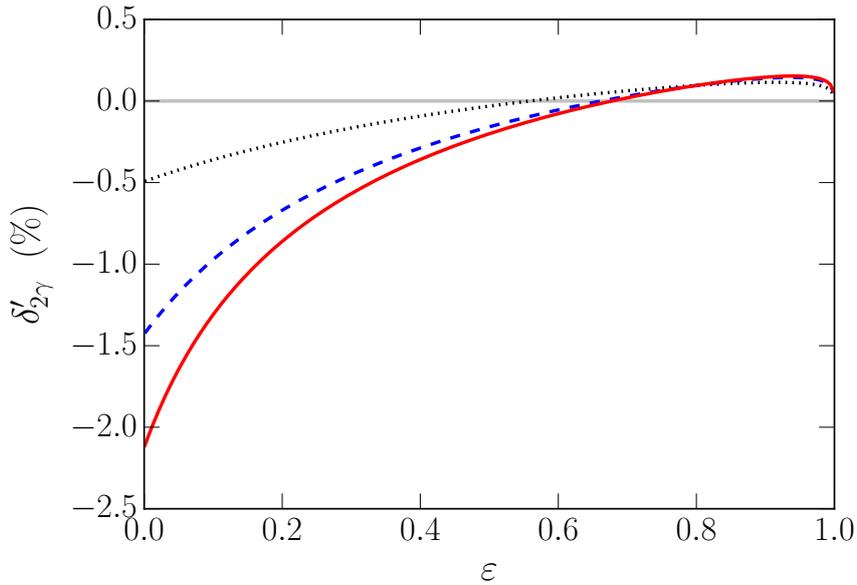


Рис. 2.2. Зависимость  $\delta'_{2\gamma}$  (2.12) от  $\varepsilon$  при трех фиксированных значениях передачи импульса:  $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  (черная точечная линия),  $5 \text{ ГэВ}^2$  (синяя штриховая линия) и  $10 \text{ ГэВ}^2$  (красная сплошная линия). Все кривые соответствуют случаю  $Z = 1$  (электрон-протонное рассеяние).

тодом Розенблюта.

Наконец, обе группы авторов используют одни и те же приближения при расчете мягкого тормозного излучения, но получают разные результаты. Причина этого была установлена Герасимовым и Фадиным в работе [59] и заключается в том, что в расчете Мо и Тсая [49] выполнена некорректная подстановка. В формуле (2.8), взятой из работы [50], мягкое тормозное излучение учтено правильно, и это ещё один довод в пользу её использования.

### 2.3. Поляризация вакуума

Вклад виртуальных  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$  и  $\tau^+\tau^-$  пар в поправку, связанную с поляризацией вакуума, дается следующей общей формулой [24]:

$$\delta_{\text{vac}}^{e,\mu,\tau} = \frac{2\alpha}{3\pi} \left\{ -\frac{5}{3} + \frac{4m_\ell^2}{Q^2} + \left(1 - \frac{2m_\ell^2}{Q^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m_\ell^2}{Q^2}} \times \right. \\ \left. \times \ln \left[ \frac{Q^2}{4m_\ell^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m_\ell^2}{Q^2}}\right)^2 \right] \right\}, \quad (2.13)$$

где  $m_\ell$  — это масса соответствующего лептона (электрона, мюона или тау-лептона). Во всех практических случаях можно считать, что  $Q^2 \gg m_e^2$ , тогда для вклада электрон-позитронных пар выражение (2.13) сводится к

$$\delta_{\text{vac}}^e = \frac{2\alpha}{3\pi} \left( -\frac{5}{3} + \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \right). \quad (2.14)$$

Член (2.14) учитывается в стандартных радиационных поправках и, в частности, он уже включен в формулу (2.8). Вклад же виртуальных  $\mu^+\mu^-$  и  $\tau^+\tau^-$  пар требуется учитывать отдельно (см. Рисунок 2.3).

Помимо лептонного, рассмотрим также адронный вклад в поляризацию вакуума, включающий в себя эффекты сильного взаимодействия. Этот вклад пока ещё не может быть вычислен в рамках квантовой хромодинамики, но надёжно извлекается из экспериментальных данных по аннигиляции  $e^+e^-$  в

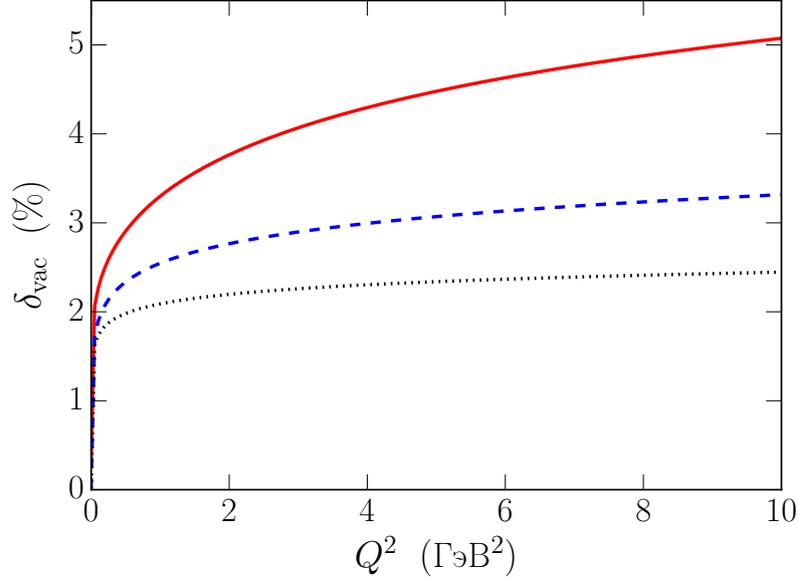


Рис. 2.3. Различные вклады в поляризацию вакуума в зависимости от  $Q^2$ : вклад  $\delta_{\text{vac}}^e$  от  $e^+e^-$  пар (черная точечная кривая); полный лептонный вклад  $\delta_{\text{vac}}^e + \delta_{\text{vac}}^\mu + \delta_{\text{vac}}^\tau$  (синяя пунктирная кривая); и полная поправка  $\delta_{\text{vac}}^e + \delta_{\text{vac}}^\mu + \delta_{\text{vac}}^\tau + \delta_{\text{vac}}^q$ , включающая в себя как лептонный, так и адронный вклады (красная сплошная кривая).

адроны. Существует несколько аккуратных параметризаций для адронного вклада, полученных в результате анализа большого массива данных (см., например, [60, 61]). Удобнее всего использовать следующую простую параметризацию, справедливую при  $1 < Q^2 < 64 \text{ ГэВ}^2$  [11]:

$$\delta_{\text{vac}}^q = 0.002 \left[ 1.513 + 2.822 \ln(1 + 1.218 Q^2) \right], \quad (2.15)$$

где квадрат переданного импульса должен быть выражен в  $\text{ГэВ}^2$ .

На Рисунке 2.3 сравниваются электрон-позитронный ( $\delta_{\text{vac}}^e$ ), лептонный ( $\delta_{\text{vac}}^e + \delta_{\text{vac}}^\mu + \delta_{\text{vac}}^\tau$ ) и полный ( $\delta_{\text{vac}}^e + \delta_{\text{vac}}^\mu + \delta_{\text{vac}}^\tau + \delta_{\text{vac}}^q$ ) вклады в поляризацию вакуума. Отметим, что дополнительная поправка на поляризацию вакуума, не учтенная в формуле (2.8), записывается как

$$\delta_{\text{vac}} = \delta_{\text{vac}}^\mu + \delta_{\text{vac}}^\tau + \delta_{\text{vac}}^q. \quad (2.16)$$

## 2.4. Более аккуратное описание внутреннего тормозного излучения

Рассмотрим более детально, как внутреннее тормозное излучение учитывается в стандартных радиационных поправках и как можно улучшить точность его описания. Дифференцируя по  $\Delta E$  выражение (2.8) для  $\delta_{\text{MTj}}$ , получаем:

$$\frac{\partial \delta_{\text{MTj}}}{\partial(\Delta E)} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{\Delta E} \left[ \ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 + 2Z \ln \eta + Z^2 \left( \frac{E_4}{|\mathbf{p}_4|} \ln x - 1 \right) \right]. \quad (2.17)$$

Затем, принимая во внимание формулу (2.2), мы можем записать для внутреннего тормозного излучения следующее дифференциальное сечение:

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{int.br.}}}{d\Omega_3 dE_3} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{E_3^{\text{el}} - E_3} \left[ \ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 + 2Z \ln \eta + Z^2 \left( \frac{E_4}{|\mathbf{p}_4|} \ln x - 1 \right) \right] \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}. \quad (2.18)$$

Члены, пропорциональные  $Z^0$ ,  $Z^2$  и  $Z^1$ , соответствуют излучению электроном, протоном и интерференции между ними. Дифференциальное сечение (2.18) описывает так называемый «радиационный хвост», наглядно проявляющийся в спектре энергий рассеянного электрона (см. Рисунок 2.4) и возникающий из-за потерь энергии на внутреннее тормозное излучение. Заметим, что аналогичное выражение (с точностью до обозначений) получается также из формулы (II.6) Мо и Тсая [49].

Как стандартная радиационная поправка (2.8), так и следующее из неё дифференциальное сечение (2.18) справедливы только в мягкофотонном приближении. При этом подразумевается, что излучение тормозного фотона не влияет на упругое сечение  $d\sigma_0/d\Omega_3$ . Однако если налетающий электрон излучает настолько жесткий фотон, что теряет заметную часть своей энергии, то вероятность последующего рассеяния на протоне возрастает [13, 49]. Это может привести к существенному возрастанию сечения с увеличением энергии тормозного фотона или, другими словами, к росту радиационного хвоста в области малых энергий рассеянного электрона, как показано на Рисунке 2.4.

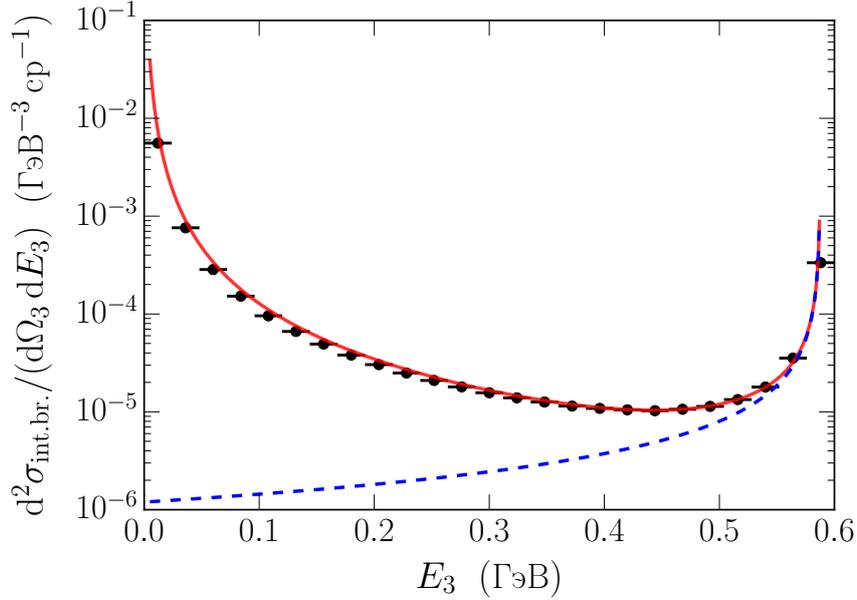


Рис. 2.4. Три различные модели для радиационного хвоста при  $E_1 = 1$  ГэВ,  $\theta_3 = 70^\circ$  и в предположении, что формфакторы подчиняются дипольной формуле. Энергия упругого пика составляет  $E_3^{\text{el}} = 0.588$  ГэВ. Голубой пунктирной линией показано дифференциальное сечение (2.18), полученное в мягкофотонном приближении. Более точное описание радиационного хвоста дается красной сплошной кривой, соответствующей сумме дифференциального сечения (2.19) с членами из (2.18), пропорциональными  $Z$  и  $Z^2$ . Точки получены в результате моделирования с использованием генератора событий ESEPP [13] и заложенной в нём аккуратной модели тормозного излучения первого порядка.

Чтобы учесть этот кинематический эффект, мы воспользуемся формулой (С.11), предложенной Мо и Тсаем в [49], которая описывает тормозное излучение электроном в пиковом приближении:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{int.br.}}}{d\Omega_3 dE_3} = \frac{M + (E_1 - \omega_1)(1 - \cos\theta_3)}{M - E_3(1 - \cos\theta_3)} t_{1,3} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1 - \omega_1) + \frac{t_3}{\omega_3} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1), \quad (2.19)$$

где

$$t_{1,3} = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1 + x_{1,3}^2}{2} \ln \frac{2E_1 E_3 (1 - \cos\theta_3)}{m^2} - x_{1,3} \right], \quad (2.20)$$

$$x_1 = \frac{E_1 - \omega_1}{E_1}, \quad x_3 = \frac{E_3}{E_3 + \omega_3}, \quad (2.21)$$

$$\omega_1 = R\omega_3, \quad \omega_3 = E_3^{\text{el}} - E_3, \quad (2.22)$$

$$R = \frac{M + E_1(1 - \cos\theta_3)}{M - E_3(1 - \cos\theta_3)}. \quad (2.23)$$

При использовании пикового приближения предполагается, что тормозные фотоны излучаются только в направлении движения электрона (налетающего

или рассеянного) [49]. В приведенных выше формулах  $\omega_1$  и  $\omega_3$  — это энергии тормозного фотона, излученного вдоль налетающего и рассеянного электронов, а  $R$  — это отношение  $\omega_1$  к  $\omega_3$ . Первое и второе слагаемые в формуле (2.19) также описывают излучение налетающим и рассеянным электронами, соответственно. Заметим, что в мягкофотонном пределе, когда  $\omega_{1,3} \ll E_{1,3}$ , дифференциальное сечение (2.19) сводится к

$$\frac{d^2\sigma_{\text{int.br.}}}{d\Omega_3 dE_3} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{E_3^{\text{el}} - E_3} \left( \ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1), \quad (2.24)$$

что полностью совпадает с той частью выражения (2.18), которая соответствует излучению электроном.

Возникающая дополнительная поправка к (2.8) записывается как

$$\delta_{\text{int.br.}} = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{\delta E}{\Delta E} + \left[ \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1) \right]^{-1} \int_{E_3^{\text{el}} - \Delta E}^{E_3^{\text{el}} - \delta E} \frac{d^2\sigma_{\text{int.br.}}}{d\Omega_3 dE_3} dE_3, \quad (2.25)$$

где подынтегральное выражение дается формулой (2.19), а интегрирование проводится численно. Можно убедиться, что если подставить в (2.25) в качестве подынтегрального выражения дифференциальное сечение (2.24), описывающее тормозное излучение электроном в мягкофотонном приближении, то поправка  $\delta_{\text{int.br.}}$  ожидаемо обращается в ноль. Параметр  $\delta E > 0$ , разделяющий в формуле (2.25) части, интегрируемые аналитически и численно, должен удовлетворять условию  $\delta E \ll \Delta E$ .

На Рисунке (2.4) сравниваются две аналитические и одна численная модели для радиационного хвоста в случае кинематики с  $E_1 = 1$  ГэВ и  $\theta_3 = 70^\circ$ . Можно увидеть, что дифференциальное сечение (2.18) монотонно убывает с уменьшением энергии  $E_3$ . Более аккуратное аналитическое описание радиационного хвоста может быть получено комбинированием выражения (2.19) для излучения электроном в пиковом приближении с членами из (2.18), пропорциональными  $Z$  и  $Z^2$  (дающими вклады электрон-протонной интерференции и излучения протоном). Эта модель соответствует поправке (2.25) и хорошо

согласуется с данными численного моделирования, полученными с использованием генератора событий ESEPP (см. раздел 4.6).

## 2.5. Внешнее тормозное излучение

Внешнее тормозное излучение возникает при прохождении налетающего или рассеянного электронов через материалы мишени и, в отличие от рассмотренного в разделе 2.4 внутреннего тормозного излучения, непосредственно не связано с изучаемым актом упругого рассеяния. Для описания этого процесса мы будем использовать следующее дифференциальное сечение, аналогичное тому, которое дается формулой (С.13) в работе [62]:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{ext.br.}}}{d\Omega dE_3} = \frac{1}{\Gamma(1 + b_i t_i)} \frac{1}{\Gamma(1 + b_f t_f)} \left(\frac{\omega_1}{E_1}\right)^{b_i t_i} \left(\frac{\omega_3}{E_3^{\text{el}}}\right)^{b_f t_f} \times \\ \times \left[ \frac{M + (E_1 - \omega_1)(1 - \cos \theta_3)}{M - E_3(1 - \cos \theta_3)} \frac{b_i t_i}{\omega_1} \phi\left(\frac{\omega_1}{E_1}\right) \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1 - \omega_1) + \frac{b_f t_f}{\omega_3} \phi\left(\frac{\omega_3}{E_3^{\text{el}}}\right) \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1) \right], \quad (2.26)$$

где функция

$$\phi\left(\frac{\omega}{E}\right) = 1 - \frac{\omega}{E} + \frac{3}{4}\left(\frac{\omega}{E}\right)^2 \quad (2.27)$$

описывает форму спектра тормозного излучения и удовлетворяет нормировке  $\phi(0) = 1$ . Греческая буква  $\Gamma$  обозначает в (2.26) гамма-функцию. Безразмерная величина  $t_{i,f}$  — это толщина вещества, выраженная в единицах его радиационной длины  $X_0$ , а нижние индексы  $i$  и  $f$  относятся к материалам, через которые проходят налетающий и рассеянный электроны, соответственно. Безразмерный параметр  $b_{i,f}$  дается формулой [63]

$$b = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} \alpha r_e^2 N_A \frac{Z(Z+1)}{A} X_0, \quad (2.28)$$

где  $r_e$  — это классический радиус электрона,  $N_A$  — постоянная Авогадро,  $Z$  — атомный номер материала и  $A$  — его атомная масса. Множитель  $\alpha r_e^2 N_A$  равен примерно  $3.49 \cdot 10^{-4}$  см<sup>2</sup>/моль. Для водорода  $Z = 1$ ,  $A = 1.00794$  г/моль и  $X_0 = 63.04$  г/см<sup>2</sup> [64], тогда из формулы (2.28) получаем  $b \approx 1.353$ .

Заметим, что дифференциальное сечение (2.26) схоже с тем, которое дается формулой (A14) в работе [11]. Эта формула может быть получена из (2.26), если подставить  $\omega_1 = R \Delta E$ ,  $\omega_3 = \Delta E$  и воспользоваться приближением

$$\frac{M + (E_1 - \omega_1)(1 - \cos \theta_3)}{M - E_3(1 - \cos \theta_3)} \approx R \approx \eta^2. \quad (2.29)$$

Вблизи упругого пика дифференциальное сечение (2.26) может быть проинтегрировано аналитически:

$$\int_{E_3^{\text{el}} - \delta E}^{E_3^{\text{el}}} \frac{d^2 \sigma_{\text{ext.br.}}}{d\Omega_3 dE_3} dE_3 = \frac{1}{\Gamma(1 + b_i t_i)} \frac{1}{\Gamma(1 + b_f t_f)} \left( \frac{\eta^2 \delta E}{E_1} \right)^{b_i t_i} \left( \frac{\delta E}{E_3^{\text{el}}} \right)^{b_f t_f} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1). \quad (2.30)$$

Это позволяет нам записать следующее окончательное выражение для радиационной поправки, связанной с внешним тормозным излучением:

$$\begin{aligned} \exp(\delta_{\text{ext.br.}}) &= \frac{1}{\Gamma(1 + b_i t_i)} \frac{1}{\Gamma(1 + b_f t_f)} \left( \frac{\eta^2 \delta E}{E_1} \right)^{b_i t_i} \left( \frac{\delta E}{E_3^{\text{el}}} \right)^{b_f t_f} + \\ &+ \left[ \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}(E_1) \right]^{-1} \int_{E_3^{\text{el}} - \Delta E}^{E_3^{\text{el}} - \delta E} \frac{d^2 \sigma_{\text{ext.br.}}}{d\Omega_3 dE_3} dE_3. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Заметим, что к поправке (2.31) уже применена процедура экспоненцирования.

## 2.6. Ионизационные потери

Ещё один процесс, приводящий к потере энергии электронами при их прохождении через материалы мишени, — это ионизация и возбуждение атомов. Для ультрарелятивистских электронов наиболее вероятная потеря энергии на ионизацию дается формулой [64]

$$\Delta E_0 = \xi \left( \ln \frac{\alpha^2 X_0 t}{r_e \rho} + 0.2 \right), \quad (2.32)$$

где

$$\xi = 2\pi m r_e^2 N_A \frac{Z}{A} X_0 t, \quad (2.33)$$

$X_0 t$  — это толщина материала в  $\text{г/см}^2$ , а  $\rho$  — его плотность в  $\text{г/см}^3$ . Множитель  $2\pi m r_e^2 N_A$  в (2.33) численно равен  $1.535 \cdot 10^{-4}$   $\text{ГэВ} \cdot \text{см}^2/\text{моль}$ . Для ультрарелятивистских электронов, проходящих через жидководородную мишень толщиной  $t = 1\%$  (при  $X_0 = 63.04$   $\text{г/см}^2$  и  $\rho = 0.071$   $\text{г/см}^3$  это соответствует 8.9 см), формула (2.32) дает наиболее вероятную потерю энергии  $\Delta E_0 = 2.1$  МэВ.

Фактическая потеря энергии на ионизацию является случайной величиной, описываемой распределением Ландау [65]

$$L(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-u \ln u - \lambda u) \sin(\pi u) du, \quad (2.34)$$

где

$$\lambda = \frac{\Delta E_\lambda - \Delta E_0}{\xi} \quad (2.35)$$

есть безразмерный параметр, характеризующий отклонение фактической потери энергии  $\Delta E_\lambda$  от наиболее вероятного значения (2.32). Распределение  $L(\lambda)$ , имеющее характерный асимметричный вид, показано на Рисунке 2.5. Отметим, что при  $\lambda \gg 1$  функция (2.34) ведет себя как  $L(\lambda) \propto \lambda^{-2}$ .

Обычно поправка, связанная с флуктуациями ионизационных потерь, ма-

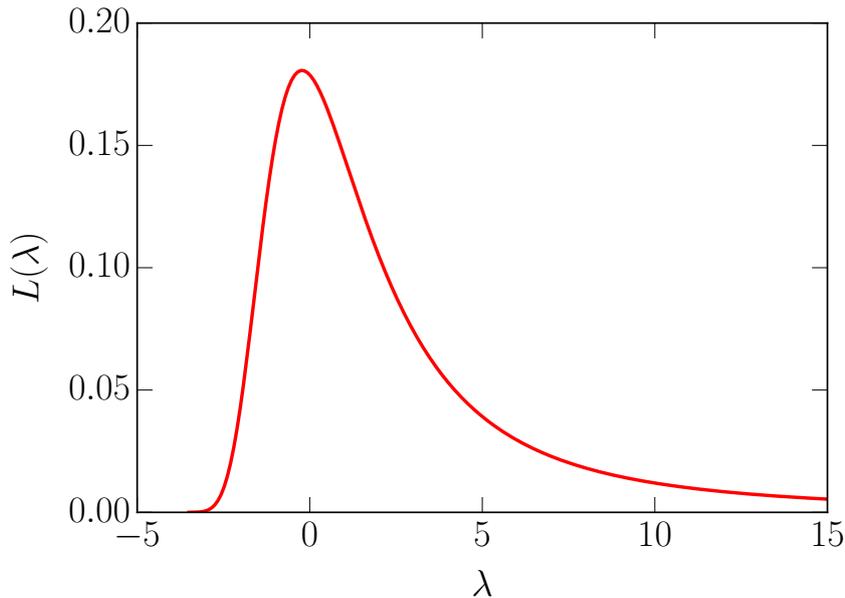


Рис. 2.5. Функция распределения Ландау (2.34) для флуктуаций ионизационных потерь. Безразмерный параметр  $\lambda$  вводится в соответствии с формулой (2.35).

ла и поэтому может быть приближенно записана как [11]

$$C_L = 1 - \frac{1}{\xi_i} \int_{\eta^2 \Delta E}^{\infty} L\left(\frac{\omega}{\xi_i}\right) d\omega - \frac{1}{\xi_f} \int_{\Delta E}^{\infty} L\left(\frac{\omega}{\xi_f}\right) d\omega, \quad (2.36)$$

где индексы  $i$  и  $f$  имеют тот же смысл, что и в разделе 2.5. Отметим, что соответствующая формула (A19) из работы [11] содержит очевидные опечатки, которые были исправлены в (2.36). Величина  $C_L < 1$  выражает вероятность того, что условие (2.2) выполняется даже при наличии ионизационных потерь. Для более эффективного вычисления определенных интегралов в (2.36) удобно использовать следующее тождество [65]:

$$\int_y^{\infty} L(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \exp(-u \ln u - yu) \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du. \quad (2.37)$$

## Глава 3

## Переобработка данных SLAC по упругому электрон-протонному рассеянию

Известно, что метод Розенблюта очень чувствителен к радиационным поправкам, из-за которых разница между наблюдаемым дифференциальным сечением и тем, что входит в формулу Розенблюта (1.32), может достигать 30–40%. С другой стороны, соответствующие поправки малы для поляризационных измерений отношения  $G_E/G_M$  [53, 66]. Отсюда следует естественное предположение, что описанное в разделе 1.4 противоречие в данных по формфакторам протона объясняется недостаточно аккуратным учетом радиационных поправок в методе Розенблюта. Ситуация осложняется тем обстоятельством, что относительный вклад электрического формфактора в дифференциальное сечение (1.32) падает с ростом  $Q^2$ , затрудняя измерение  $G_E$  при больших передачах импульса.

Наиболее уязвимой частью радиационных поправок в методе Розенблюта считают двухфотонный обмен, которому соответствуют диаграммы (i) и (j) на Рисунке 2.1. Как уже упоминалось в Главе 2, обычно учитываются только инфракрасно-расходящиеся вклады амплитуд  $\mathcal{M}_{\text{box}}$  и  $\mathcal{M}_{\text{xbox}}$ , а жестким двухфотонным обменом пренебрегают. Альтернативная точка зрения состоит в том, что проблема связана с некорректным учетом тормозного излучения, а не двухфотонного обмена. Например, в работах [54, 67] утверждается, что результаты измерения формфакторов протона методом Розенблюта можно согласовать с поляризационными данными, если для учета излучения реальных фотонов использовать метод структурных функций [68, 69]. Поскольку мнения разделились, важно тщательно проверить правильность учета радиационных поправок, которые применялись в экспериментах, использующих метод Розенблюта.

К сожалению, для большей части измерений нет достаточной информации, позволяющей провести независимое вычисление радиационных поправок. Редким исключением являются эксперименты E140 [11, 70] и NE11 [12, 71], выполненные в Стэнфордском центре линейного ускорителя (SLAC) и покрывающие вместе диапазон по  $Q^2$  от 1 до 8.83 ГэВ<sup>2</sup>. Обе группы использовали одну и ту же процедуру учета радиационных поправок, основанную на подходе Мо и Тсая [49], но включающую в себя дополнительные уточнения, описанные в работе [11]. Позже эта же самая процедура применялась в эксперименте [39], выполненном в Национальной лаборатории Джефферсона. Однако как в оригинальной работе Мо и Тсая [49], так и в уточненных формулах [11] выявлены опечатки и неточности, влияние которых на результаты измерений никогда не изучалось. Чтобы заполнить этот пробел, в данной главе мы заново вычисляем радиационные поправки для экспериментов [11, 12] и проводим новое извлечение электрического и магнитного формфакторов протона.

Уолкер с сотрудниками [11] измеряли дифференциальные сечения упругого  $e^-p$ -рассеяния, варьируя энергию пучка и угол рассеяния. Измерения были проведены в 22 точках при передачах импульса, равных  $Q^2 = 1, 2.003, 2.497$  и  $3.007$  ГэВ<sup>2</sup>. Как выяснилось позже [72], данные эксперимента [11], полученные для малых углов рассеяния, не являются надежными, поскольку авторы не учли одну из существенных экспериментальных поправок. По этой причине мы исключаем из анализа 6 измерений, проведенных при  $\theta_3 < 15^\circ$ . Совокупность оставшихся  $N_1 = 16$  точек мы обозначим как Набор 1 («Set 1» в Таблице 3.1).

Андивахис и коллеги [12] выполнили измерения при значениях  $Q^2$ , равных 1.75, 2.5, 3.25, 4, 5, 6, 7 и 8.83 ГэВ<sup>2</sup>. При этом одновременно использовались два различных магнитных спектрометра. Один из них, имеющий больший размер, регистрировал электроны с импульсами до 8 ГэВ. Поворачивая его вокруг мишени, авторы [12] могли выбирать угол рассеяния. Измеренные с помощью этого спектрометра  $N_2 = 24$  дифференциальных сечения мы отнесем к Набору 2. Меньший спектрометр регистрировал электроны с импульсами до 1.6 ГэВ

Таблица 3.1. Радиационные поправки и дифференциальные сечения, полученные в результате переобработки данных измерений [11, 12].

Set	$Q^2$ (ГэВ <sup>2</sup> )	$\varepsilon$	$\delta_{\text{MTj}}$	$\delta_{\text{vac}}$	$\delta_{\text{int.br.}}$	$\delta_{\text{ext.br.}}$	$C_L$	$C_{\text{rad}}^{\text{new}}$	$C_{\text{rad}}^{\text{old}}/C_{\text{rad}}^{\text{new}}$	$d\sigma_0/d\Omega_3$ (нБн/ср)	$\Delta_{\text{stat}}$ (%)	$\Delta_{\text{syst}}$ (%)	$\Delta_{\text{norm}}$ (%)
1	1.000	0.692	-0.1657	0.0121	0.0050	-0.1098	0.9934	0.7672	1.0045	$5.291 \cdot 10^{+0}$	0.80	0.50	1.90
1	1.000	0.869	-0.1690	0.0122	0.0042	-0.1268	0.9951	0.7525	1.0032	$1.786 \cdot 10^{+1}$	0.91	0.50	1.90
1	1.000	0.930	-0.1702	0.0122	0.0039	-0.1410	0.9960	0.7414	1.0023	$3.960 \cdot 10^{+1}$	0.86	0.50	1.90
1	2.003	0.635	-0.1802	0.0157	0.0077	-0.1064	0.9950	0.7648	1.0057	$4.461 \cdot 10^{-1}$	0.92	0.50	1.90
1	2.003	0.735	-0.1782	0.0157	0.0073	-0.1125	0.9958	0.7618	1.0038	$7.827 \cdot 10^{-1}$	0.75	0.50	1.90
1	2.003	0.808	-0.1791	0.0158	0.0067	-0.1204	0.9962	0.7552	1.0035	$1.292 \cdot 10^{+0}$	0.61	0.50	1.90
1	2.003	0.878	-0.1781	0.0158	0.0064	-0.1286	0.9969	0.7500	1.0025	$2.427 \cdot 10^{+0}$	0.96	0.50	1.90
1	2.003	0.938	-0.1966	0.0158	0.0046	-0.1472	0.9970	0.7216	1.0014	$5.754 \cdot 10^{+0}$	2.38	0.50	1.90
1	2.497	0.619	-0.1833	0.0170	0.0089	-0.1043	0.9956	0.7663	1.0054	$1.904 \cdot 10^{-1}$	0.91	0.50	1.90
1	2.497	0.723	-0.1760	0.0170	0.0090	-0.1075	0.9965	0.7703	1.0043	$3.383 \cdot 10^{-1}$	0.85	0.50	1.90
1	2.497	0.800	-0.1813	0.0170	0.0078	-0.1146	0.9968	0.7601	1.0033	$5.648 \cdot 10^{-1}$	0.63	0.50	1.90
1	2.497	0.846	-0.1818	0.0171	0.0074	-0.1247	0.9970	0.7520	1.0026	$8.315 \cdot 10^{-1}$	0.93	0.50	1.90
1	3.007	0.623	-0.1852	0.0181	0.0100	-0.1043	0.9961	0.7670	1.0056	$9.719 \cdot 10^{-2}$	0.97	0.50	1.90
1	3.007	0.761	-0.1829	0.0182	0.0090	-0.1133	0.9970	0.7618	1.0041	$2.203 \cdot 10^{-1}$	0.85	0.50	1.90
1	3.007	0.910	-0.2149	0.0182	0.0049	-0.1569	0.9968	0.7034	1.0019	$9.102 \cdot 10^{-1}$	2.55	0.50	1.90
1	3.007	0.932	-0.2250	0.0183	0.0042	-0.1693	0.9967	0.6872	1.0015	$1.317 \cdot 10^{+0}$	1.05	0.50	1.90
2	1.750	0.250	-0.1870	0.0149	0.0087	-0.0653	0.9928	0.7899	1.0090	$1.453 \cdot 10^{-1}$	0.78	1.06	1.77
2	1.750	0.704	-0.1786	0.0149	0.0066	-0.0771	0.9965	0.7884	1.0036	$1.033 \cdot 10^{+0}$	0.46	1.06	1.77
2	1.750	0.950	-0.1814	0.0149	0.0049	-0.0941	0.9983	0.7732	1.0014	$1.157 \cdot 10^{+1}$	0.58	1.06	1.77
2	2.500	0.227	-0.1877	0.0170	0.0128	-0.0601	0.9941	0.7994	1.0113	$3.427 \cdot 10^{-2}$	1.07	1.06	1.77
2	2.500	0.479	-0.1864	0.0170	0.0097	-0.0674	0.9960	0.7937	1.0066	$9.922 \cdot 10^{-2}$	0.93	1.06	1.77
2	2.500	0.630	-0.1866	0.0170	0.0084	-0.0741	0.9967	0.7877	1.0047	$1.999 \cdot 10^{-1}$	0.91	1.06	1.77
2	2.500	0.750	-0.1808	0.0170	0.0081	-0.0780	0.9975	0.7896	1.0032	$3.964 \cdot 10^{-1}$	0.47	1.06	1.77
2	2.500	0.820	-0.1805	0.0170	0.0076	-0.0828	0.9978	0.7859	1.0028	$6.634 \cdot 10^{-1}$	0.61	1.06	1.77
2	2.500	0.913	-0.1875	0.0170	0.0062	-0.0933	0.9983	0.7715	1.0016	$1.782 \cdot 10^{+0}$	0.64	1.06	1.77
2	3.250	0.426	-0.1925	0.0186	0.0119	-0.0654	0.9962	0.7936	1.0077	$2.870 \cdot 10^{-2}$	1.23	1.06	1.77
2	3.250	0.609	-0.1870	0.0186	0.0105	-0.0710	0.9973	0.7932	1.0049	$6.817 \cdot 10^{-2}$	0.88	1.06	1.77
2	3.250	0.719	-0.1854	0.0186	0.0095	-0.0767	0.9977	0.7896	1.0042	$1.261 \cdot 10^{-1}$	0.86	1.06	1.77
2	3.250	0.865	-0.1926	0.0186	0.0074	-0.0900	0.9982	0.7723	1.0021	$3.906 \cdot 10^{-1}$	0.48	1.06	1.77
2	4.000	0.437	-0.1923	0.0199	0.0140	-0.0636	0.9968	0.7984	1.0084	$1.308 \cdot 10^{-2}$	1.43	1.06	1.77
2	4.000	0.593	-0.1901	0.0199	0.0120	-0.0703	0.9975	0.7938	1.0058	$2.786 \cdot 10^{-2}$	1.25	1.06	1.77
2	4.000	0.694	-0.1888	0.0199	0.0109	-0.0754	0.9979	0.7902	1.0045	$4.951 \cdot 10^{-2}$	1.25	1.06	1.77
2	4.000	0.805	-0.1981	0.0199	0.0085	-0.0866	0.9981	0.7725	1.0030	$1.026 \cdot 10^{-1}$	0.89	1.06	1.77
2	4.000	0.946	-0.2431	0.0199	0.0038	-0.1111	0.9983	0.7174	1.0009	$6.186 \cdot 10^{-1}$	0.76	1.06	1.77
2	5.000	0.389	-0.1950	0.0214	0.0174	-0.0601	0.9970	0.8031	1.0094	$4.245 \cdot 10^{-3}$	2.06	1.06	1.77
2	5.000	0.538	-0.1942	0.0214	0.0140	-0.0676	0.9977	0.7956	1.0069	$8.521 \cdot 10^{-3}$	1.46	1.06	1.77
2	5.000	0.704	-0.2029	0.0214	0.0105	-0.0807	0.9980	0.7759	1.0043	$2.137 \cdot 10^{-2}$	1.05	1.06	1.77
2	5.000	0.919	-0.2472	0.0214	0.0044	-0.1124	0.9982	0.7149	1.0010	$1.578 \cdot 10^{-1}$	1.04	1.06	1.77
2	6.000	0.886	-0.2516	0.0226	0.0049	-0.1120	0.9981	0.7132	1.0010	$4.754 \cdot 10^{-2}$	1.24	1.06	1.77
2	7.000	0.847	-0.2568	0.0237	0.0053	-0.1113	0.9980	0.7110	1.0023	$1.711 \cdot 10^{-2}$	2.26	1.06	1.77
3	1.750	0.250	-0.1880	0.0149	0.0086	-0.0457	0.9958	0.8071	1.0083	$1.527 \cdot 10^{-1}$	0.21	1.12	1.77
3	2.500	0.227	-0.1885	0.0170	0.0127	-0.0407	0.9966	0.8163	1.0101	$3.581 \cdot 10^{-2}$	0.28	1.12	1.77
3	3.250	0.206	-0.1957	0.0186	0.0156	-0.0387	0.9968	0.8159	1.0115	$1.108 \cdot 10^{-2}$	0.67	1.12	1.77
3	4.000	0.190	-0.2018	0.0199	0.0184	-0.0368	0.9969	0.8159	1.0123	$4.142 \cdot 10^{-3}$	0.81	1.12	1.77
3	5.000	0.171	-0.1990	0.0214	0.0250	-0.0314	0.9973	0.8297	1.0141	$1.358 \cdot 10^{-3}$	0.93	1.12	1.77
3	6.000	0.156	-0.2029	0.0226	0.0297	-0.0286	0.9974	0.8338	1.0150	$5.241 \cdot 10^{-4}$	1.27	1.12	1.77
3	7.000	0.143	-0.2048	0.0237	0.0349	-0.0255	0.9977	0.8403	1.0165	$2.285 \cdot 10^{-4}$	2.26	1.12	1.77
3	8.830	0.125	-0.2208	0.0254	0.0351	-0.0259	0.9974	0.8280	1.0217	$6.153 \cdot 10^{-5}$	3.89	1.12	1.77

при фиксированном угле рассеяния  $\theta_3 = 90^\circ$ . Соответствующие  $N_3 = 8$  точек мы обозначим как Набор 3.

Радиационные поправки, описанные в Главе 2, выражаются через параметр  $\Delta E$ , введенный в формуле (2.2). Однако в измерениях [11, 12] для отбора упругих событий использовалось ограничение не на энергию рассеянного электрона, а на квадрат недостающей массы,  $W^2 \leq W_{\text{cut}}^2$ . Покажем, как связаны между собой величины  $\Delta E$  и  $W_{\text{cut}}^2$ .

Квадрат недостающей массы равен, по определению,

$$W^2 = (p_1 + p_2 - p_3)^2 = M^2 + 2\eta M(E_3^{\text{el}} - E_3). \quad (3.1)$$

В частности,  $W^2 = M^2$  в случае чисто упругого рассеяния, т. е. когда  $E_3 = E_3^{\text{el}}$ . Легко заметить, что условие (2.2) удовлетворяется, если

$$W_{\text{cut}}^2 = M^2 + 2\eta M \Delta E. \quad (3.2)$$

В интересующих нас экспериментах значения  $W_{\text{cut}}^2$  были в диапазоне от 0.96 до 1.16 ГэВ<sup>2</sup>. Верхний предел приблизительно соответствует порогу рождения пионов,  $W^2 = (M + m_\pi)^2$ , где  $m_\pi$  — это масса  $\pi^0$ -мезона. Зная величину  $W_{\text{cut}}^2$ , можно вычислить соответствующее значение  $\Delta E$ , используя формулу (3.2).

В Таблице 3.1 приведены численные результаты перевычисления радиационных поправок к дифференциальным сечениям, измеренным в экспериментах [11, 12]. Приведенные там значения  $Q^2$  и  $\varepsilon$  являются номинальными и немного отличаются от фактических кинематических параметров измерений. В обсуждаемых работах [11, 12] авторы сначала применяли радиационные поправки к измеренному дифференциальному сечению, после чего корректировали результат, чтобы привести его к номинальной кинематике. По этой причине при вычислении новых радиационных поправок мы задавали кинематику, используя известные фактические значения энергии пучка  $E_1$  и угла рассеяния  $\theta_3$ . Все входные данные для расчетов, а также исходный код написанной нами на языке Python программы доступны на веб-странице [73].

В девятой колонке Таблицы 3.1 перечислены новые коэффициенты  $C_{\text{rad}}^{\text{new}}$ , вычисленные в соответствии с формулой (2.7). В следующей графе показаны отношения  $C_{\text{rad}}^{\text{old}}/C_{\text{rad}}^{\text{new}}$ , принимающие значения от 1.0009 до 1.0217. Именно они являются теми поправочными множителями, которые мы применили к дифференциальным сечениям, представленным в работах [11, 12]. Значения  $C_{\text{rad}}^{\text{old}}/C_{\text{rad}}^{\text{new}}$  растут с уменьшением  $\varepsilon$  и особенно велики для Набора 3, где  $\theta_3 = 90^\circ$ . Новые значения  $d\sigma_0/d\Omega_3$ , полученные после повторного применения радиационных поправок, также приведены в Таблице 3.1. Наконец, в её последних трех столбцах перечислены статистические, систематические и нормировочные погрешности для дифференциальных сечений.

Нормировочные погрешности равны 1.9% для точек из Набора 1 и 1.77% для остальных данных. Они связаны с абсолютной нормировкой дифференциальных сечений и являются полностью коррелированными для измерений, относящихся к одному и тому же набору данных. Все приведенные нами погрешности взяты непосредственно из анализируемых статей. Единственное отличие состоит в том, что авторы [12] ввели дополнительную систематическую погрешность в 0.7% для дифференциальных сечений из Набора 3, поскольку они нормировались относительно кинематически перекрывающихся с ними точек из Набора 2. Найденный в работе [12] нормировочный множитель составляет  $0.958 \pm 0.007$ . В нашем анализе мы используем другой подход и нормируем все три набора данных одновременно.

В оригинальных работах нормировочная погрешность, связанная с радиационными поправками, была оценена как 1%. Кроме того, в статье [12] была дополнительно введена систематическая погрешность в 0.5% для учета неточностей в определении радиационных поправок. Поскольку сделанные нами уточнения достигают в некоторых случаях 2.2%, они выходят за пределы тех погрешностей для радиационных поправок, которые были приведены в работах [11, 12].

Опишем теперь нашу процедуру выделения формфакторов протона, ко-

торая отличается от использованной в оригинальных работах. Прежде всего, мы приписываем каждому набору данных нормировочный множитель, на который домножаются все дифференциальные сечения из этого набора. Затем мы используем метод наименьших квадратов чтобы найти параметризацию, описывающую измеренные дифференциальные сечения наилучшим образом. Минимизируемая функция записывается как

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{N_i} \frac{[n_i \sigma_{ij} - \varepsilon_{ij} G_E^2(\tau_{ij}) - \tau_{ij} G_M^2(\tau_{ij})]^2}{(\Delta \sigma_{ij})^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{(n_i - 1)^2}{(\Delta n_i)^2}, \quad (3.3)$$

где  $n_i$  — это три неизвестных нормировочных множителя,  $\Delta n_i$  — соответствующие нормировочные погрешности,  $\sigma_{ij}$  — редуцированные дифференциальные сечения, для которых ищется наилучшая подгонка, и  $\Delta \sigma_{ij}$  — сложенные квадратично статистическая и систематическая погрешности для  $\sigma_{ij}$ . Здесь индекс  $i = 1, 2, 3$  нумерует три набора данных, а  $j$  нумерует различные кинематики внутри каждого набора.

В отличие от стандартного метода Розенблюта, данный подход не требует наличия как минимум двух дифференциальных сечений, измеренных при одном и том же значении  $Q^2$ . Однако достигается это ценой того, что необходимо заранее выбрать определенную функциональную зависимость форм-факторов от  $Q^2$ . Сделаем это, исходя из соображений удобства минимизации функции (3.3). Соответствующая процедура становится особенно простой и элегантной, если мы выберем следующую параметризацию для  $G_E^2$  и  $G_M^2$ :

$$G_E^2(\tau) = (1 - a_1 \tau - a_2 \tau^2 - a_3 \tau^3) G_D^2(\tau), \quad (3.4)$$

$$G_M^2(\tau) = (1 - b_1 \tau - b_2 \tau^2 - b_3 \tau^3) \mu^2 G_D^2(\tau), \quad (3.5)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — это шесть неизвестных параметров, а  $G_D$  — дипольный форм-фактор (1.49). Хотя зависимости (3.4)–(3.5) не удовлетворяют асимптотике  $G_{E,M} \propto \tau^{-2}$ , которая предсказывается в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики [45], они обладают тем важным для нас достоинством, что являются линейными по  $a_i$  и  $b_i$ . Отсюда следует, что если мы вычислим и затем

приравняем нулю частные производные  $\partial\chi^2/\partial n_i$ ,  $\partial\chi^2/\partial a_i$  и  $\partial\chi^2/\partial b_i$ , то получим девять линейных уравнений для девяти свободных параметров.

Эти линейные уравнения могут быть записаны в матричной форме как  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , где  $A$  — это вещественная симметричная матрица размера  $9 \times 9$ , а  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^9$ . Вектор  $\mathbf{x}$ , содержащий параметры наилучшей подгонки, вычисляется как  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Заметим, что матрица  $A^{-1}$ , обратная к  $A$ , является также ковариационной матрицей, дающей важную информацию о погрешностях найденных параметров и корреляциях между ними.

Вся описанная процедура анализа повторялась итерационно для того, чтобы учесть зависимость поправок (2.25) и (2.31), возникающих из-за внутреннего и внешнего тормозного излучения, от использованной при вычислении  $d\sigma_0/d\Omega_3$  параметризации формфакторов. Мы начали с дипольных формфакторов ( $a_i = b_i = 0$ ) и затем последовательно получали всё более точные значения  $a_i$  и  $b_i$ . Процедура сошлась после всего лишь нескольких итераций.

Полученные в результате подгонки параметры и их погрешности приведены в Таблице 3.2. Найденное при этом минимальное значение (3.3) равно  $\chi^2 = 26.1$  для  $N_1 + N_2 + N_3 - 9 = 39$  степеней свободы. Элементы соответствующей ковариационной матрицы  $A^{-1}$  даны в Таблице 3.3. В соответствии с правилом распространения ошибок, доверительный интервал для произвольной функции  $f$ , зависящей от подгоночных параметров  $x_i$ , вычисляется как

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{m=1}^9 \sum_{n=1}^9 \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial f}{\partial x_n} (A^{-1})_{mn}}, \quad (3.6)$$

где  $(A^{-1})_{mn}$  — это элементы ковариационной матрицы. Во избежание путаницы отметим, что компоненты вектора  $\mathbf{x}$  обозначаются, в зависимости от контекста,

Таблица 3.2. Оптимальные подгоночные параметры и их погрешности.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$n_i$	$1.012 \pm 0.011$	$1.014 \pm 0.011$	$0.975 \pm 0.011$
$a_i$	$0.197 \pm 0.211$	$0.703 \pm 0.426$	$-0.454 \pm 0.209$
$b_i$	$-0.444 \pm 0.043$	$0.397 \pm 0.045$	$-0.081 \pm 0.013$

Таблица 3.3. Ковариационная матрица  $A^{-1}$ , полученная в результате проведенного нами анализа. Поскольку матрица симметричная, приведены только элементы, лежащие на главной диагонали и ниже.

	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$n_1$	$+1.24 \cdot 10^{-4}$								
$n_2$	$+1.10 \cdot 10^{-4}$	$+1.17 \cdot 10^{-4}$							
$n_3$	$+8.53 \cdot 10^{-5}$	$+8.76 \cdot 10^{-5}$	$+1.28 \cdot 10^{-4}$						
$a_1$	$-1.61 \cdot 10^{-3}$	$-1.34 \cdot 10^{-3}$	$-1.07 \cdot 10^{-3}$	$+4.44 \cdot 10^{-2}$					
$a_2$	$+2.24 \cdot 10^{-3}$	$+2.05 \cdot 10^{-3}$	$+2.65 \cdot 10^{-3}$	$-7.08 \cdot 10^{-2}$	$+1.82 \cdot 10^{-1}$				
$a_3$	$-8.65 \cdot 10^{-4}$	$-8.67 \cdot 10^{-4}$	$-1.05 \cdot 10^{-3}$	$+2.66 \cdot 10^{-2}$	$-8.29 \cdot 10^{-2}$	$+4.37 \cdot 10^{-2}$			
$b_1$	$-2.57 \cdot 10^{-4}$	$-2.69 \cdot 10^{-4}$	$-3.13 \cdot 10^{-4}$	$+1.01 \cdot 10^{-3}$	$-8.10 \cdot 10^{-3}$	$+4.90 \cdot 10^{-3}$	$+1.83 \cdot 10^{-3}$		
$b_2$	$+1.84 \cdot 10^{-4}$	$+1.89 \cdot 10^{-4}$	$+1.96 \cdot 10^{-4}$	$+1.06 \cdot 10^{-3}$	$+3.48 \cdot 10^{-3}$	$-3.43 \cdot 10^{-3}$	$-1.77 \cdot 10^{-3}$	$+2.03 \cdot 10^{-3}$	
$b_3$	$-3.58 \cdot 10^{-5}$	$-3.54 \cdot 10^{-5}$	$-3.45 \cdot 10^{-5}$	$-6.55 \cdot 10^{-4}$	$+1.29 \cdot 10^{-4}$	$+4.27 \cdot 10^{-4}$	$+4.37 \cdot 10^{-4}$	$-5.64 \cdot 10^{-4}$	$+1.71 \cdot 10^{-4}$

как  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$  или  $(n_1, n_2, n_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ .

На Рисунке 3.1 наши результаты для формфакторов протона сравниваются с оригинальными и с параметризацией Келли (1.53)–(1.54), в которой учтены некоторые из поляризационных измерений. Данные, представленные в работах [11] и [12], показаны синими полыми и закрашенными кружками, соответственно. Вертикальными «усами» изображены сложенные квадратично статистическая и систематическая погрешности. Черные крестики и звездочки иллюстрируют, как индивидуальные точки из [11] и [12] меняются в результате проведенной нами переобработки. Они были получены с помощью стандартной процедуры розенблютовского разделения формфакторов с использованием новых значений дифференциальных сечений, которые нормировались путем домножения на коэффициенты  $n_i$ , перечисленные в Таблице 3.2. Заметим, что для  $Q^2 = 8.83 \text{ ГэВ}^2$  измерено только одно значение  $d\sigma_0/d\Omega_3$ , поэтому метод Розенблюта потребовал бы привлечения дополнительных данных, как это и было сделано в работе [12].

Красные сплошные кривые на Рисунке 3.1 представляют формфакторы (3.4)–(3.5) с параметрами, перечисленными в Таблице 3.2 и найденными путем минимизации функции (3.3) с использованием уточненных дифференциальных сечений из Таблицы 3.1. Красные полосы — это соответствующие 68%-е доверительные интервалы, вычисленные по правилу распространения оши-

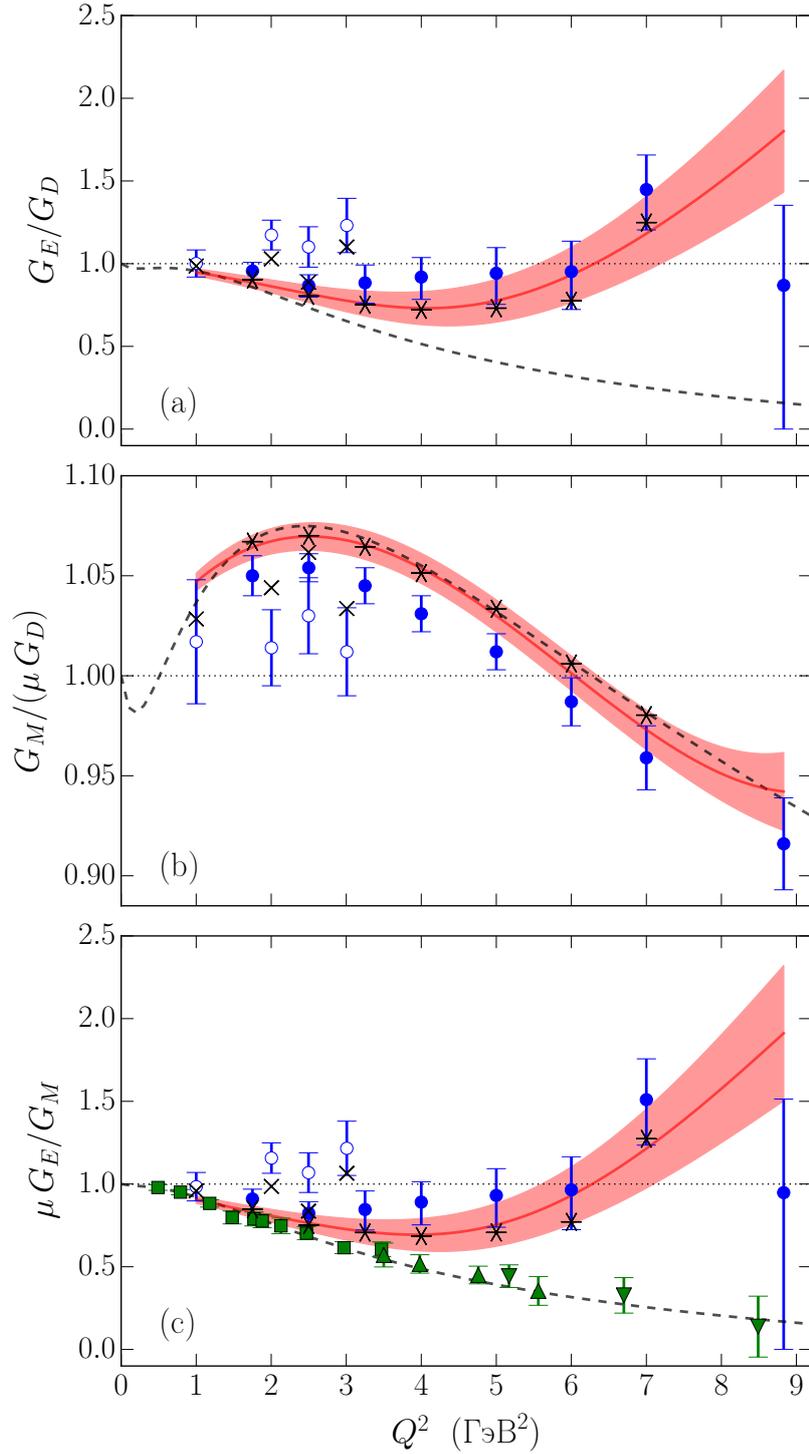


Рис. 3.1. Результаты переобработки в сравнении с оригинальными данными для (a)  $G_E/G_D$  (b)  $G_M/(\mu G_D)$  и (c)  $\mu G_E/G_M$  в зависимости от  $Q^2$ . Красными сплошными линиями показаны результаты подгонки с использованием параметризации (3.4)–(3.5), а соответствующие полосы — это 68%-е доверительные интервалы. Синими полыми и закрашенными кружками изображены оригинальные данные экспериментов [11] и [12], соответственно. Черные крестики и звездочки иллюстрируют, как переобработка влияет на отдельные точки, представленные в [11] и [12]. Серые пунктирные кривые соответствуют параметризации Келли [44]. Результаты поляризационных измерений [6] (зеленые квадратики), [8] (зеленые треугольники) и [9] (зеленые перевернутые треугольники) также показаны на рисунке (c).

бок (3.6) и учитывающие корреляции между подгоночными параметрами. Описывая формфакторы с помощью выбранной нами параметризации (3.4)–(3.5), мы вводим модельную зависимость, которая является дополнительным источником систематической погрешности. Ожидается, что этот эффект несущественен, поскольку полиномиальная зависимость (3.4)–(3.5) является достаточно «гибкой» и, кроме того, полученные нами кривые хорошо согласуются с модельно-независимыми результатами розенблютовского разделения. Тем не менее, следует относиться с осторожностью к нашим результатам при  $Q^2 > 7 \text{ ГэВ}^2$ , где использовалось только одно дифференциальное сечение.

Как видно из Рисунка 3.1, при  $Q^2 \leq 7 \text{ ГэВ}^2$  наш анализ дает для  $G_E$  и  $G_E/G_M$  несколько меньшие значения, чем те, которые были представлены в работах [11, 12]. В то же время, новые значения  $G_M$  лежат систематически выше предыдущих и, таким образом, ближе к параметризации Келли. Отметим, что оригинальные данные работы [11] не очень хорошо согласуются с результатами более точного измерения [12] и представляются нам менее надежными.

Итак, в данной главе мы провели тщательную ревизию радиационных поправок, использованных в измерениях [11, 12], и новое независимое извлечение формфакторов протона для  $Q^2$  от 1 до  $8.83 \text{ ГэВ}^2$ . Полученные нами результаты согласуются с данными поляризационных измерений несколько лучше оригинальных, хотя существенное расхождение сохраняется при  $Q^2 \gtrsim 3 \text{ ГэВ}^2$ . Таким образом, обсуждаемое противоречие не удастся объяснить лишь неточностями при учете стандартных радиационных поправок в методе Розенблюта. Однако эти поправки не включают в себя жесткий двухфотонный обмен, вклад которого в сечение упругого электрон-протонного рассеяния может быть существенен при больших  $Q^2$ . Этот вопрос рассматривается в Главе 5.

## Глава 4

## Радиационные поправки в экспериментах с регистрацией электрона/позитрона и протона

### 4.1. Кинематика процесса $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$

В данном разделе мы рассмотрим кинематику процесса упругого рассеяния заряженного лептона на протоне, сопровождаемого испусканием единичного фотона (тормозное излучение первого порядка). Закон сохранения четырех-импульса для этой реакции дает

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + p_5, \quad (4.1)$$

где  $p_5$  — это четырех-импульс тормозного фотона, а остальные обозначения были введены ранее. Выберем систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль импульса налетающего лептона, а плоскость  $xz$  была бы его плоскостью рассеяния (при этом азимутальный угол рассеянного лептона равен  $\phi_3 \equiv 0$ ). Тогда четырех-импульсы  $p_1, p_2, p_3, p_4$  и  $p_5$  запишутся в лабораторной системе отсчета как

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) = (E_1, 0, 0, |\mathbf{p}_1|), \quad (4.2)$$

$$p_2 = (M, \mathbf{0}) = (M, 0, 0, 0), \quad (4.3)$$

$$p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3) = (E_3, |\mathbf{p}_3| \sin \theta_3, 0, |\mathbf{p}_3| \cos \theta_3), \quad (4.4)$$

$$p_4 = (E_4, \mathbf{p}_4) = (E_4, |\mathbf{p}_4| \sin \theta_4 \cos \phi_4, |\mathbf{p}_4| \sin \theta_4 \sin \phi_4, |\mathbf{p}_4| \cos \theta_4), \quad (4.5)$$

$$p_5 = (E_5, \mathbf{p}_5) = (E_5, E_5 \sin \theta_5 \cos \phi_5, E_5 \sin \theta_5 \sin \phi_5, E_5 \cos \theta_5), \quad (4.6)$$

где  $E_5 \equiv |\mathbf{p}_5|$  — это энергия тормозного фотона, а  $\theta_5$  и  $\phi_5$  — его полярный и азимутальный углы.

Полная энергия  $E_1$  налетающего лептона предполагается известной. В этом случае все кинематические параметры частиц в конечном состоянии мо-

гут быть выражены через переменные  $\theta_3$ ,  $E_5$ ,  $\theta_5$  и  $\phi_5$ . В частности, используя тождество  $(p_1 + p_2 - p_3 - p_5)^2 = p_4^2 = M^2$ , можно получить следующее уравнение для  $E_3$ :

$$A\sqrt{E_3^2 - m^2} = BE_3 + C, \quad (4.7)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны

$$A = |\mathbf{p}_1| \cos \theta_3 - E_5 \cos \psi, \quad (4.8)$$

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_5}{|\mathbf{p}_3||\mathbf{p}_5|} = \cos \theta_3 \cos \theta_5 + \sin \theta_3 \sin \theta_5 \cos \phi_5, \quad (4.9)$$

$$B = E_1 + M - E_5, \quad (4.10)$$

$$C = E_5 (E_1 + M - |\mathbf{p}_1| \cos \theta_5) - ME_1 - m^2. \quad (4.11)$$

Заметим, что  $\psi$  есть угол между векторами  $\mathbf{p}_3$  и  $\mathbf{p}_5$ . Для того, чтобы найти решение уравнения (4.7), нужно возвести обе его части в квадрат. В результате получается квадратное уравнение, имеющее следующие два корня:

$$E_3 = \frac{BC \pm A\sqrt{m^2(A^2 - B^2) + C^2}}{A^2 - B^2}. \quad (4.12)$$

В большинстве случаев только знак « $-$ » в выражении (4.12) дает физическое решение. Однако для некоторых комбинаций кинематических параметров оба корня (4.12) могут быть физическими. Следует убедиться, что вычисленное значение  $E_3$  удовлетворяет исходному уравнению (4.7), а не возникло в результате возведения его в квадрат. Укажем ещё два критерия, которым должно удовлетворять любое физическое решение:

$$E_5 < \frac{M(E_1 - m)}{M + E_1 - |\mathbf{p}_1| \cos \theta_5}, \quad m < E_3 < E_1 - E_5. \quad (4.13)$$

Если массой  $m$  можно пренебречь (когда  $m \ll E_1, E_3$ ), то значение энергии рассеянного лептона единственно и дается следующей простой формулой:

$$E_3 = \frac{C}{A - B} = \frac{M(E_1 - E_5) - E_1 E_5 (1 - \cos \theta_5)}{M + E_1 (1 - \cos \theta_3) - E_5 (1 - \cos \psi)}. \quad (4.14)$$

Другим важным частным случаем является чисто упругое рассеяние, когда тормозной фотон не излучается. В этом случае значение  $E_3$  также единственно:

$$E_3 = \frac{(E_1 + M) (ME_1 + m^2) + \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta_3} |\mathbf{p}_1|^2 \cos \theta_3}{(E_1 + M)^2 - |\mathbf{p}_1|^2 \cos^2 \theta_3}. \quad (4.15)$$

Как только значение  $E_3$  найдено, нам известны все компоненты четырех-импульсов  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_5$ . Тогда, используя соотношение  $p_4 = p_1 + p_2 - p_3 - p_5$ , легко вычислить и компоненты четырех-импульса  $p_4$ . Таким образом, мы выразили все кинематические параметры процесса  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$  через энергию налетающего лептона  $E_1$ , угол его рассеяния  $\theta_3$ , а также энергию  $E_5$ , полярный  $\theta_5$  и азимутальный  $\phi_5$  углы тормозного фотона.

## 4.2. Дифференциальное сечение процесса $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ в мягкофотонном приближении

В мягкофотонном приближении, которое справедливо при  $E_5 \ll E_1, E_3$ , дифференциальное сечение процесса  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$  выражается через сечение  $d\sigma_0/d\Omega_3$  с помощью следующей простой формулы [13, 47, 52]:

$$\frac{d^3\sigma_{\text{brems}}}{d\Omega_3 d\Omega_5 dE_5} = -\frac{\alpha E_5}{4\pi^2} \left[ -\frac{p_1}{p_1 \cdot p_5} + \frac{Z p_2}{p_2 \cdot p_5} + \frac{p_3}{p_3 \cdot p_5} - \frac{Z p_4}{p_4 \cdot p_5} \right]^2 \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}, \quad (4.16)$$

где знак  $Z = +1$  соответствует рассеянию отрицательно заряженных лептонов ( $e^-$  или  $\mu^-$ ) на протонах. Для описания  $e^+p$ - и  $\mu^+p$ -рассеяния следует выбрать  $Z = -1$ . При проведении вычислений формула (4.16) может использоваться несколькими различными способами.

В простейшем случае мы можем считать, что излучение очень мягкого фотона никак не сказывается на кинематике процесса рассеяния. Это приводит к двум упрощениям. Во-первых, мы рассматриваем множитель  $d\sigma_0/d\Omega_3$  в (4.16) как чисто упругое дифференциальное сечение, зависящее только от энергии налетающего лептона  $E_1$  и угла рассеяния  $\theta_3$ . Во-вторых, мы используем фактическое значение четырех-импульса фотона  $p_5$ , но считаем четырех-импульсы

$p_3$  и  $p_4$  упругими, как если бы излучения не было вообще. Это приближение, которое мы будем называть «базовым мягкофотонным», является естественным и, как будет показано ниже, значительно упрощает аналитическое интегрирование дифференциального сечения (4.16).

Полезно, однако, рассмотреть и другие возможные способы использования формулы (4.16) для проведения численных расчетов. Например, при вычислении выражения, стоящего в квадратных скобках, мы можем использовать не упругие, а фактические значения четырех-импульсов  $p_3$  и  $p_4$ . Мы будем называть этот подход «модифицированным мягкофотонным приближением». В дополнение к этому, можно видоизменить сечение  $d\sigma_0/d\Omega_3$  если вычислять его по обычной формуле (1.32), но считать, что квадрат переданного импульса равен  $Q^2 = 2M(E_1 - E_3 - E_5)$ . Это значение  $Q^2$  соответствует случаю, когда тормозной фотон излучается налетающим или рассеянным лептоном (но не протоном). Такое приближение является разумным, поскольку протонное тормозное излучение обычно подавлено по сравнению с лептонным. Описанный подход мы будем называть «улучшенным мягкофотонным приближением». Хотя характеристика «улучшенное» является здесь условной, мы используем её потому, что это приближение позволяет нам лучше воспроизвести форму радиационного хвоста в случае жесткого тормозного излучения (см. Рисунок 4.1). Как уже обсуждалось в разделе 2.4, излучение лептоном до рассеяния может приводить к росту эффективного сечения процесса с ростом энергии тормозного фотона. Улучшенное мягкофотонное приближение позволяет качественно воспроизвести этот эффект, тогда как остальные рассмотренные модели предсказывают монотонное убывание радиационного хвоста с ростом энергии излученного фотона. Более аккуратное описание тормозного излучения первого порядка, не прибегающее к мягкофотонному приближению, будет дано в разделе 4.3.

Проведем количественное сравнение модифицированного и улучшенного мягкофотонных приближений с упомянутым только что аккуратным вычисле-

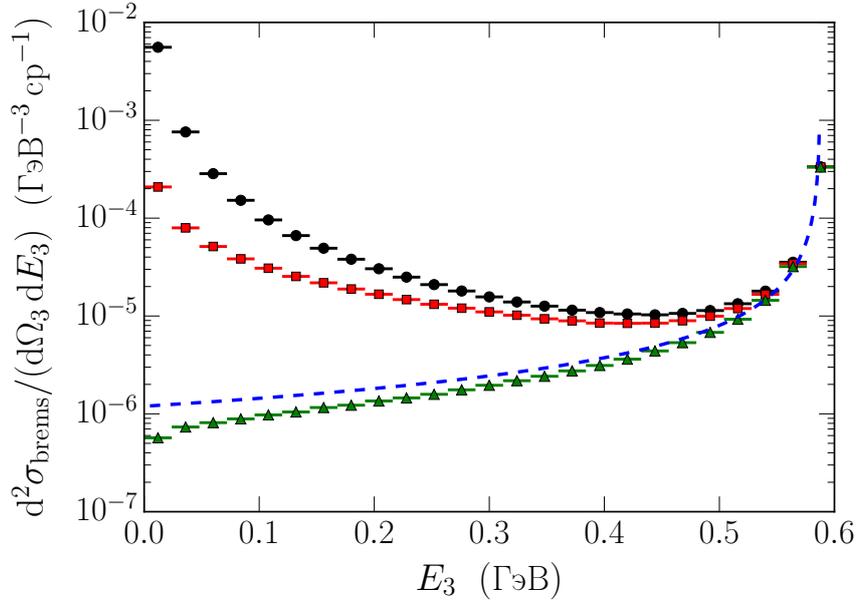


Рис. 4.1. Сравнение различных предсказаний для радиационного хвоста. Кинематика соответствует рассеянию электронов с начальной энергией  $E_1 = 1$  ГэВ на угол  $\theta_3 = 70^\circ$ . Точками представлены три различные модели для тормозного излучения: аккуратный расчет (черные кружки), улучшенное (красные квадраты) и модифицированное (зеленые треугольники) мягкофотонные приближения. Синяя пунктирная кривая получена с помощью формулы (2.18) и соответствует базовому мягкофотонному приближению.

нием. На Рисунке 4.1 показаны предсказания этих трех моделей для дифференциального сечения  $d^2\sigma_{\text{brems}}/(d\Omega_3 dE_3)$  в зависимости от энергии рассеянного электрона при фиксированном угле рассеяния (ср. также с Рисунком 2.4). Показанные на рисунке точки представляют сравниваемые модели и получены с помощью генератора событий **ESEPP** в предположении, что формфакторы протона подчиняются дипольной зависимости (см. описание **ESEPP** в разделе 4.6). Для построения кривой использовалась формула (2.18), которая соответствует базовому мягкофотонному приближению. Из Рисунка 4.1 видно, что улучшенное мягкофотонное приближение, действительно, ближе к аккуратному результату, в то время как модифицированное мягкофотонное приближение не сильно отличается от аналитической кривой. Отметим, что в окрестности упругого пика все модели хорошо согласуются друг с другом.

Требуется также знать дифференциальное сечение процесса  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$  в случае, когда энергия излученного тормозного фотона ограничена пороговой

величиной  $E_5^{\text{cut}}$ . Выражаясь точнее, мы хотим знать дифференциальное сечение  $d\sigma_{\text{brems}}/d\Omega_3$ , полученное после интегрирования выражения (4.16) по всем направлениям излученного фотона и по его энергии в диапазоне  $E_5 < E_5^{\text{cut}}$ . В базовом мягкофотонном приближении это сечение дается формулой

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{\text{brems}}}{d\Omega_3} \right|_{E_5 < E_5^{\text{cut}}} &= \frac{-\alpha}{4\pi^2} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} \int_{E_5 < E_5^{\text{cut}}} \frac{d^3p_5}{E_5} \left[ -\frac{p_1}{p_1 \cdot p_5} + \frac{Zp_2}{p_2 \cdot p_5} + \frac{p_3}{p_3 \cdot p_5} - \frac{Zp_4}{p_4 \cdot p_5} \right]^2 = \\ &= -2\alpha \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} \sum_{i,j} \Theta(p_i)\Theta(p_j)B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{E_5 < E_5^{\text{cut}}} \frac{d^3p_5}{E_5} \frac{p_i \cdot p_j}{(p_i \cdot p_5)(p_j \cdot p_5)}, \quad (4.18)$$

а  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Запись  $\Theta(p_i)$  введена для обозначения заряда частицы и расшифровывается следующим образом:  $\Theta(p_1) = -1$ ,  $\Theta(p_2) = Z$ ,  $\Theta(p_3) = +1$  и  $\Theta(p_4) = -Z$ .

Покажем, как вычислить интеграл (4.18) в рамках базового мягкофотонного приближения [13, 52, 74]. Это приближение предполагает, что только  $p_5$  варьируется при интегрировании, а остальные четырех-импульсы остаются постоянными. Также будем считать, что фотон обладает ненулевой массой  $\lambda$ , а его энергия, соответственно, равна  $E_5 = \sqrt{|\mathbf{p}_5|^2 + \lambda^2}$ . Введение фиктивной массы фотона, необходимое для того, чтобы сделать интеграл (4.18) сходящимся, является стандартным способом регуляризации инфракрасных расходимостей. Учитывая также, что  $d^3p_5 = |\mathbf{p}_5|^2 d|\mathbf{p}_5| d\Omega_5$ , получаем

$$B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) = \frac{p_i \cdot p_j}{8\pi^2} \int_0^{\sqrt{(E_5^{\text{cut}})^2 - \lambda^2}} \frac{|\mathbf{p}_5|^2 d|\mathbf{p}_5|}{\sqrt{|\mathbf{p}_5|^2 + \lambda^2}} \int \frac{d\Omega_5}{(p_i \cdot p_5)(p_j \cdot p_5)}. \quad (4.19)$$

Далее, воспользовавшись параметризацией Фейнмана, можно выполнить преобразование

$$\frac{1}{(p_i \cdot p_5)(p_j \cdot p_5)} = \int_0^1 \frac{dx}{[(p_i \cdot p_5)x + (p_j \cdot p_5)(1-x)]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(p_x \cdot p_5)^2}, \quad (4.20)$$

где введен четырех-импульс  $p_x$ , равный

$$p_x = (p_x^0, \mathbf{p}_x) = xp_i + (1-x)p_j. \quad (4.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_5}{(p_i \cdot p_5)(p_j \cdot p_5)} &= \int d\Omega_5 \int_0^1 \frac{dx}{(p_x \cdot p_5)^2} = \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 \frac{dx}{(E_5 p_x^0 - |\mathbf{p}_5| |\mathbf{p}_x| \cos \theta)^2} = \\ &= -2\pi \int_0^1 dx \int_1^{-1} \frac{d(\cos \theta)}{(E_5 p_x^0 - |\mathbf{p}_5| |\mathbf{p}_x| \cos \theta)^2} = 4\pi \int_0^1 \frac{dx}{(E_5 p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_5|^2 |\mathbf{p}_x|^2}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где  $\theta$  — это угол между векторами  $\mathbf{p}_5$  и  $\mathbf{p}_x$ . Подставляя это выражение в (4.19) и используя соотношение  $E_5 = \sqrt{|\mathbf{p}_5|^2 + \lambda^2}$ , получаем:

$$B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) = \frac{p_i \cdot p_j}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{(E_5^{\text{cut}})^2 - \lambda^2}} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}_5|^2 + \lambda^2}} \frac{|\mathbf{p}_5|^2 d|\mathbf{p}_5|}{|\mathbf{p}_5|^2 [(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2] + (\lambda p_x^0)^2}. \quad (4.23)$$

Далее, тригонометрическая подстановка  $|\mathbf{p}_5| = \lambda \operatorname{tg} \psi$  дает

$$B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) = \frac{p_i \cdot p_j}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{(E_5^{\text{cut}}/\lambda)^2 - 1}} \frac{\sin \psi \operatorname{tg} \psi d\psi}{(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2 \sin^2 \psi}. \quad (4.24)$$

Обозначим внутренний интеграл в (4.24) символом  $I$  и рассмотрим его отдельно. Произведя ещё одну тригонометрическую подстановку,  $\sin \psi = t$ , получим:

$$I = \int_0^{\sqrt{1 - (\lambda/E_5^{\text{cut}})^2}} \frac{t^2 dt}{(1-t^2)[(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2 t^2]}. \quad (4.25)$$

Затем, применяя алгебраическое разложение

$$\begin{aligned} &\frac{t^2}{(1-t^2)[(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2 t^2]} = \\ &= \frac{1}{2[(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2]} \left( \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x| t - p_x^0} - \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x| t + p_x^0} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

найдем, что

$$I = \frac{1}{2[(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2]} \left( \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x|} \ln \left| |\mathbf{p}_x| t - p_x^0 \right| - \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x|} \ln \left| |\mathbf{p}_x| t + p_x^0 \right| - \ln |t - 1| + \ln |t + 1| \right) \Big|_0^{\sqrt{1 - (\lambda/E_5^{\text{cut}})^2}}. \quad (4.27)$$

Теперь, используя приближение  $\lambda \ll E_5^{\text{cut}}$  и учитывая, что  $(p_x^0)^2 - |\mathbf{p}_x|^2 = p_x^2$ , получаем

$$I = \frac{1}{2p_x^2} \left( \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x|} \ln \frac{p_x^0 - |\mathbf{p}_x|}{p_x^0 + |\mathbf{p}_x|} + \ln \frac{4(E_5^{\text{cut}})^2}{\lambda^2} \right), \quad (4.28)$$

что позволяет, наконец, записать следующее выражение для  $B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}})$ :

$$B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) = \frac{p_i \cdot p_j}{4\pi} \int_0^1 \frac{dx}{p_x^2} \left( \ln \frac{4(E_5^{\text{cut}})^2}{p_x^2} + \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x|} \ln \frac{p_x^0 - |\mathbf{p}_x|}{p_x^0 + |\mathbf{p}_x|} + \ln \frac{p_x^2}{\lambda^2} \right). \quad (4.29)$$

Заметим, что аналогичный результат дается формулой (22) в работе [52], но содержит очевидные опечатки.

Интеграл (4.29) расходится в пределе нулевой массы фотона ( $\lambda \rightarrow 0$ ). Для того, чтобы изолировать расходящийся член, введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \tilde{B}(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) &= B(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}}) - \frac{1}{4\pi} K(p_i, p_j) = \\ &= \frac{p_i \cdot p_j}{4\pi} \int_0^1 \frac{dx}{p_x^2} \left( \ln \frac{4(E_5^{\text{cut}})^2}{p_x^2} + \frac{p_x^0}{|\mathbf{p}_x|} \ln \frac{p_x^0 - |\mathbf{p}_x|}{p_x^0 + |\mathbf{p}_x|} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$K(p_i, p_j) = (p_i \cdot p_j) \int_0^1 \frac{dx}{p_x^2} \ln \frac{p_x^2}{\lambda^2} \quad (4.31)$$

и, в частности,

$$K(p_i, p_i) = \ln \frac{m_i^2}{\lambda^2}. \quad (4.32)$$

Значение  $\tilde{B}(p_i, p_j, E_5^{\text{cut}})$  является конечным и может быть вычислено по формуле (4.30) если заданы четырех-импульсы  $p_i, p_j$  и пороговая энергия  $E_5^{\text{cut}}$ . Необходимое для этого интегрирование по  $x$  легко провести численно. Заметим, что в случае  $p_i = p_j$  интеграл (4.30) является тривиальным и вычисляется

аналитически:

$$\tilde{B}(p_i, p_i, E_5^{\text{cut}}) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{2E_5^{\text{cut}}}{m_i} + \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \ln \frac{m_i}{E_i + \sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \right). \quad (4.33)$$

Однако если  $p_i = p_j = p_2$ , то формулу (4.33) нельзя использовать напрямую, поскольку при этом возникает неопределенность вида  $0/0$ . В этом случае корректное выражение получается после раскрытия неопределенности по правилу Лопиталя:

$$\tilde{B}(p_2, p_2, E_5^{\text{cut}}) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{2E_5^{\text{cut}}}{M} - 1 \right). \quad (4.34)$$

Поскольку дифференциальное сечение (4.17) потребуется нам в дальнейшем, запишем его для удобства в явном виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{\text{brems}}}{d\Omega_3} \right|_{E_5 < E_5^{\text{cut}}} &= -2\alpha \left[ \tilde{B}(p_1, p_1, E_5^{\text{cut}}) - 2Z\tilde{B}(p_1, p_2, E_5^{\text{cut}}) - \right. \\ &- 2\tilde{B}(p_1, p_3, E_5^{\text{cut}}) + 2Z\tilde{B}(p_1, p_4, E_5^{\text{cut}}) + Z^2\tilde{B}(p_2, p_2, E_5^{\text{cut}}) + \\ &+ 2Z\tilde{B}(p_2, p_3, E_5^{\text{cut}}) - 2Z^2\tilde{B}(p_2, p_4, E_5^{\text{cut}}) + \tilde{B}(p_3, p_3, E_5^{\text{cut}}) - \\ &- 2Z\tilde{B}(p_3, p_4, E_5^{\text{cut}}) + Z^2\tilde{B}(p_4, p_4, E_5^{\text{cut}}) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{Z^2}{2\pi} \ln \frac{M^2}{\lambda^2} - \\ &- \frac{Z}{2\pi} K(p_1, p_2) - \frac{1}{2\pi} K(p_1, p_3) + \frac{Z}{2\pi} K(p_1, p_4) + \frac{Z}{2\pi} K(p_2, p_3) - \\ &\left. - \frac{Z^2}{2\pi} K(p_2, p_4) - \frac{Z}{2\pi} K(p_3, p_4) \right] \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}. \quad (4.35) \end{aligned}$$

Как будет показано в разделе 4.4, все расходящиеся члены в (4.35) сокращаются с соответствующими членами, возникающими из-за петлевых радиационных поправок.

### 4.3. Дифференциальное сечение процесса $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ вне мягкофотонного и ультрарелятивистского приближений

В данном разделе мы вычислим дифференциальное сечение процесса тормозного излучения первого порядка, не прибегая к использованию ни мяг-

кофотонного ( $E_5 \ll E_1, E_3$ ), ни ультрарелятивистского ( $E_1, E_3, \sqrt{Q^2} \gg m$ ) приближений [13]. Прежде всего, покажем как в лабораторной системе отсчета искомое дифференциальное сечение выражается через квадрат амплитуды процесса,  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2$ . Справедлива следующая общая формула [24]:

$$d\sigma_{\text{brems}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{1}{4I} |\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2 \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \frac{d^3p_5}{(2\pi)^3 2E_5}, \quad (4.36)$$

где

$$P_i = p_1 + p_2, \quad P_f = p_3 + p_4 + p_5, \quad (4.37)$$

$$\delta^{(4)}(P_i - P_f) = \delta(E_1 + M - E_3 - E_4 - E_5) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5), \quad (4.38)$$

$$I = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2} = M |\mathbf{p}_1|. \quad (4.39)$$

Интегрируя (4.36) по  $p_4$  и используя соотношение  $d^3p_i = |\mathbf{p}_i| E_i d\Omega_i dE_i$ , получим:

$$d\sigma_{\text{brems}} = \frac{1}{(4\pi)^5} \delta(E_1 + M - E_3 - E_4 - E_5) \frac{|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2 |\mathbf{p}_3| |\mathbf{p}_5|}{M |\mathbf{p}_1| E_4} d\Omega_3 d\Omega_5 dE_3 dE_5. \quad (4.40)$$

Чтобы провести интегрирование по  $E_3$ , воспользуемся хорошо известным представлением для  $\delta$ -функции от аргумента, являющегося функцией независимой переменной  $x$ :

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^k \frac{\delta(x - x_i)}{|df(x_i)/dx|}, \quad (4.41)$$

где  $f(x_i) = 0$  и  $i = 1, 2, \dots, k$ . В нашем случае,

$$f(E_3) = E_1 + M - E_3 - E_5 - \sqrt{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_5)^2 - 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_5) \cdot \mathbf{p}_3 + E_3^2 - m^2 + M^2}, \quad (4.42)$$

а уравнение  $f(E_3) = 0$  имеет не более двух корней, заданных формулой (4.12).

Дифференцирование функции (4.42) по  $E_3$  дает

$$\frac{df(E_3)}{dE_3} = -1 - \frac{E_3}{E_4} \left[ 1 - \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_5) \cdot \mathbf{p}_3}{|\mathbf{p}_3|^2} \right] = \frac{AE_3 - B|\mathbf{p}_3|}{E_4 |\mathbf{p}_3|}, \quad (4.43)$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  определены в (4.8)–(4.10).

Наконец, подставляя (4.41) и (4.43) в (4.40) и интегрируя полученное выражение по  $E_3$ , находим

$$\frac{d^3\sigma_{\text{brems}}}{d\Omega_3 d\Omega_5 dE_5} = \frac{1}{(4\pi)^5} \frac{1}{M|\mathbf{p}_1|} \sum_{E_3} \frac{E_5 |\mathbf{p}_3|^2 |\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2}{|AE_3 - B|\mathbf{p}_3|}, \quad (4.44)$$

где  $E_3$  и  $|\mathbf{p}_3|$  могут быть выражены через  $E_1$ ,  $\theta_3$ ,  $E_5$ ,  $\theta_5$  и  $\phi_5$  с помощью формулы (4.12). Если оба корня (4.12) являются физическими, то следует провести в (4.44) суммирование по двум значениям  $E_3$ . Заметим, что в ультрарелятивистском случае, когда  $E_1, E_3 \gg m$ , значение  $E_3$  единственно и дается формулой (4.14), при этом дифференциальное сечение (4.44) принимает вид

$$\frac{d^3\sigma_{\text{brems}}}{d\Omega_3 d\Omega_5 dE_5} = \frac{1}{(4\pi)^5} \frac{1}{M|\mathbf{p}_1|} \frac{E_5 [M(E_1 - E_5) - E_1 E_5 (1 - \cos \theta_5)]}{[M + E_1(1 - \cos \theta_3) - E_5(1 - \cos \psi)]^2} |\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2. \quad (4.45)$$

Итак, мы получили формулу (4.44), выражающую искомое дифференциальное сечение через квадрат амплитуды процесса. Запишем теперь  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2$  в виде суммы трех слагаемых:

$$|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{brems}}^\ell|^2 + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^p|^2 + 2 \operatorname{Re} (\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\ell\dagger} \mathcal{M}_{\text{brems}}^p), \quad (4.46)$$

где  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}^\ell|^2 = |\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{li}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{lf}}|^2$  — это лептонный член для излучения фотона налетающим или рассеянным лептоном;  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}^p|^2 = |\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pi}} + \mathcal{M}_{\text{brems}}^{\text{pf}}|^2$  — протонный член, отвечающий излучению фотона протоном до или после рассеяния; и  $2 \operatorname{Re} (\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\ell\dagger} \mathcal{M}_{\text{brems}}^p)$  — член, описывающий интерференцию между лептонным и протонным излучениями. Поскольку в нашем случае пучок и мишень не поляризованы, при вычислении  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2$  проводится усреднение по поляризациям начальных частиц и суммирование по поляризациям конечных.

Для вычисления лептонного, протонного и интерференционного членов в рамках квантовой электродинамики рассмотрим фейнмановские диаграммы (b)–(e), изображенные на Рисунке 2.1. Будем предполагать, что промежуточные адронные состояния на диаграммах (d) и (e) представлены только виртуальными протонами и что вершины фотон-протонного взаимодействия описы-

ваются оператором (1.17) как для виртуальных, так и для реальных (тормозных) фотонов. Известно, что в общем случае вершина взаимодействия фотона с протоном, находящимся вне массовой поверхности, характеризуется шестью инвариантными функциями [75]. Если, однако, до и после взаимодействия протон находится на массовой поверхности (так, что квадраты соответствующих четырех-импульсов равны  $M^2$ ), то эта вершина описывается оператором  $\Gamma^\mu$ , введенным в формуле (1.17). В этом случае мы можем вычислить искомые члены без привлечения мягкофотонного и ультрарелятивистского приближений. Мы будем называть соответствующий расчет «аккуратным» в том смысле, что он не использует указанные приближения.

Ниже мы приводим формулы для лептонных и протонных тензоров, произведя свертку которых, можно получить выражения для лептонного, протонного и интерференционного членов (4.46), записанные через скалярные произведения  $p_i \cdot p_j$  четырех-векторов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  и  $p_5$ . Мы использовали систему компьютерной алгебры `Mathematica` и пакет `FeynCalc` [76] для выполнения свертки тензоров (детали этого вычисления могут быть найдены в [77]). Для удобства мы ввели следующие обозначения:

$$q_1^2 = (p_4 - p_2)^2 = 2M(E_3 - E_1 + E_5), \quad (4.47)$$

$$q_2^2 = (p_1 - p_3)^2 = 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos \theta_3 - 2E_1 E_3 + 2m^2, \quad (4.48)$$

$$P = p_2 + p_4, \quad P_+ = P + p_5, \quad P_- = P - p_5, \quad (4.49)$$

где  $q_1^2$  и  $q_2^2$  — это квадраты переданных протону четырех-импульсов в случаях, когда фотон был излучен лептоном и протоном, соответственно. Заметим, что  $q_1^2 = q_2^2 = -Q^2$  в пределе  $E_5 \rightarrow 0$ .

Лептонный член вычисляется как

$$|\mathcal{M}_{\text{brems}}^\ell|^2 = \frac{Z^2 e^6}{q_1^4} (\mathcal{L}_{1\mu\nu} + \mathcal{L}_{2\mu\nu}) \mathcal{P}^{\mu\nu}, \quad (4.50)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\mu\nu} = & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_3 + m) \gamma^\alpha \frac{\not{p}_3 + \not{p}_5 + m}{2(p_3 \cdot p_5)} \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\alpha \frac{\not{p}_1 - \not{p}_5 + m}{2(p_1 \cdot p_5)} \gamma_\nu \right] - \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_3 + m) \gamma^\alpha \frac{\not{p}_3 + \not{p}_5 + m}{2(p_3 \cdot p_5)} \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu \frac{\not{p}_3 + \not{p}_5 + m}{2(p_3 \cdot p_5)} \gamma_\alpha \right], \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_2 + M) \left\{ (F_1(q_1^2) + F_2(q_1^2)) \gamma^\nu - \frac{F_2(q_1^2)}{2M} P^\nu \right\} \right. \\ & \left. (\not{p}_4 + M) \left\{ (F_1(q_1^2) + F_2(q_1^2)) \gamma^\mu - \frac{F_2(q_1^2)}{2M} P^\mu \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.52)$$

а лептонный тензор  $\mathcal{L}_{2\mu\nu}$  может быть получен из выражения (4.51) для  $\mathcal{L}_{1\mu\nu}$  после выполнения замены  $p_1 \leftrightarrow -p_3$ . Протонный член дается формулой

$$|\mathcal{M}_{\text{brems}}^p|^2 = \frac{Z^4 e^6}{q_2^4} \mathcal{L}_{\mu\nu} (\mathcal{P}_1^{\mu\nu} + \mathcal{P}_2^{\mu\nu}), \quad (4.53)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m) \gamma_\mu \right], \quad (4.54) \\ \mathcal{P}_1^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_4 + M) \left\{ (F_1(0) + F_2(0)) \gamma^\alpha - \right. \right. \\ & - \frac{F_2(0)}{2M} [(2p_4 + p_5)^\alpha - \gamma^\alpha (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M)] \left. \right\} \frac{\not{p}_4 + \not{p}_5 + M}{2(p_4 \cdot p_5)} \\ & \left\{ (F_1(q_2^2) + F_2(q_2^2)) \gamma^\mu - \frac{F_2(q_2^2)}{2M} [P_+^\mu - (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M) \gamma^\mu] \right\} (\not{p}_2 + M) \\ & \left\{ (F_1(0) + F_2(0)) \gamma^\alpha - \frac{F_2(0)}{2M} [(2p_2 - p_5)^\alpha - \gamma^\alpha (\not{p}_2 - \not{p}_5 - M)] \right\} \frac{\not{p}_2 - \not{p}_5 + M}{2(p_2 \cdot p_5)} \\ & \left. \left\{ (F_1(q_2^2) + F_2(q_2^2)) \gamma^\nu - \frac{F_2(q_2^2)}{2M} [P_-^\nu - (\not{p}_2 - \not{p}_5 - M) \gamma^\nu] \right\} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\not{p}_4 + M) \left\{ (F_1(0) + F_2(0)) \gamma^\alpha - \right. \right. \\ & - \frac{F_2(0)}{2M} [(2p_4 + p_5)^\alpha - \gamma^\alpha (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M)] \left. \right\} \frac{\not{p}_4 + \not{p}_5 + M}{2(p_4 \cdot p_5)} \\ & \left\{ (F_1(q_2^2) + F_2(q_2^2)) \gamma^\mu - \frac{F_2(q_2^2)}{2M} [P_+^\mu - (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M) \gamma^\mu] \right\} (\not{p}_2 + M) \\ & \left\{ (F_1(q_2^2) + F_2(q_2^2)) \gamma^\nu - \frac{F_2(q_2^2)}{2M} [P_+^\nu - \gamma^\nu (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M)] \right\} \frac{\not{p}_4 + \not{p}_5 + M}{2(p_4 \cdot p_5)} \\ & \left. \left\{ (F_1(0) + F_2(0)) \gamma^\alpha - \frac{F_2(0)}{2M} [(2p_4 + p_5)^\alpha - (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M) \gamma^\alpha] \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

а протонный тензор  $\mathcal{P}_2^{\mu\nu}$  может быть получен из выражения (4.55) для  $\mathcal{P}_1^{\mu\nu}$  после выполнения замены  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ .

Наконец, интерференционный член вычисляется по формуле

$$2 \operatorname{Re} (\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\ell\dagger} \mathcal{M}_{\text{brems}}^p) = \frac{Z^3 e^6}{q_1^2 q_2^2} \left( \frac{1}{p_3 \cdot p_5} \mathcal{L}_{1\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{p_1 \cdot p_5} \mathcal{L}_{2\mu\nu}^\alpha \right) (\mathcal{P}_{1\alpha}^{\mu\nu} - \mathcal{P}_{2\alpha}^{\mu\nu}), \quad (4.56)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ (\not{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_3 + \not{p}_5 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu \right], \quad (4.57) \\ \mathcal{P}_{1\alpha}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ (\not{p}_4 + M) \left\{ (F_1(q_1^2) + F_2(q_1^2)) \gamma^\mu - \frac{F_2(q_1^2)}{2M} P^\mu \right\} (\not{p}_2 + M) \right. \\ &\quad \left. \left\{ (F_1(q_2^2) + F_2(q_2^2)) \gamma^\nu - \frac{F_2(q_2^2)}{2M} [P_+^\nu - \gamma^\nu (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M)] \right\} \frac{\not{p}_4 + \not{p}_5 + M}{2(p_4 \cdot p_5)} \right. \\ &\quad \left. \left\{ (F_1(0) + F_2(0)) \gamma_\alpha - \frac{F_2(0)}{2M} [(2p_4 + p_5)_\alpha - (\not{p}_4 + \not{p}_5 - M) \gamma_\alpha] \right\} \right], \quad (4.58) \end{aligned}$$

а лептонный тензор  $\mathcal{L}_{2\mu\nu}^\alpha$  получается из выражения (4.57) для  $\mathcal{L}_{1\mu\nu}^\alpha$  после выполнения замены  $p_1 \leftrightarrow -p_3$ . Аналогично, протонный тензор  $\mathcal{P}_{2\alpha}^{\mu\nu}$  дается формулой (4.58) для  $\mathcal{P}_{1\alpha}^{\mu\nu}$ , в которой нужно сделать замену  $p_2 \leftrightarrow -p_4$ .

#### 4.4. Петлевые радиационные поправки и сокращение инфракрасных расходимостей

Для учета петлевых радиационных поправок воспользуемся результатами Мо и Тсая [47, 49], которые получены с использованием перенормировки на массовой поверхности. В приближении  $Q^2 \gg m^2$  все интересующие нас амплитуды выражаются через  $\mathcal{M}_{1\gamma}$  следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\text{vac}}^e = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ -\frac{5}{3} + \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \right] \mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.59)$$

$$\mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[ K(p_1, p_3) - K(p_1, p_1) - \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} + 2 \right] \mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.60)$$

$$\mathcal{M}_{\text{vert}}^p = -\frac{Z^2 \alpha}{2\pi} [K(p_2, p_4) - K(p_2, p_2)] \mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.61)$$

$$\mathcal{M}_{\text{box}}^{\text{MTs}} = -\frac{Z\alpha}{2\pi} [K(p_1, -p_2) + K(p_3, -p_4)] \mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{M}_{\text{xbox}}^{\text{MTs}} = \frac{Z\alpha}{2\pi} [K(p_2, p_3) + K(p_1, p_4)] \mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.63)$$

где амплитуда  $\mathcal{M}_{\text{vac}}^e$  описывает вклад виртуальных электрон-позитронных пар в поляризацию вакуума, а инфракрасно-расходящиеся члены  $K(p_i, p_j)$  имеют вид (4.31). Член  $K(p_1, p_1)$  в (4.60) появился из-за перенормировки амплитуды  $\mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell$  и представляет собой инфракрасно-расходящуюся собственную электромагнитную энергию лептона. Аналогично, член  $K(p_2, p_2)$  в (4.61) соответствует собственной энергии протона.

Члены  $K(p_1, -p_2)$  и  $K(p_3, -p_4)$  в (4.62) являются комплексными, но вклад в дифференциальное сечение дают только их вещественные части. Мо и Тсай прибегли к следующему упрощению этих членов:

$$\text{Re } K(p_1, -p_2) \approx K(p_1, p_2), \quad \text{Re } K(p_3, -p_4) \approx K(p_3, p_4), \quad (4.64)$$

откуда следует, что

$$\mathcal{M}_{\text{box}}^{\text{MTs}} \approx -\frac{Z\alpha}{2\pi} [K(p_1, p_2) + K(p_3, p_4)] \mathcal{M}_{1\gamma}. \quad (4.65)$$

Квадрат амплитуды процесса чисто упругого рассеяния записывается как

$$|\mathcal{M}_{\text{elast}}|^2 = |\mathcal{M}_{1\gamma}|^2 + \sum_i 2 \text{Re} (\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_i) + \mathcal{O}(\alpha^4), \quad (4.66)$$

где суммирование нужно проводить по амплитудам  $\mathcal{M}_{\text{vac}}^e$ ,  $\mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell$ ,  $\mathcal{M}_{\text{vert}}^p$ ,  $\mathcal{M}_{\text{box}}^{\text{MTs}}$  и  $\mathcal{M}_{\text{xbox}}^{\text{MTs}}$ . В результате получается следующее выражение для дифференциального сечения  $d\sigma_{\text{elast}}/d\Omega_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{elast}}}{d\Omega_3} = & \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left[ -\frac{5}{3} + \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \right] + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} - 2 \right] + \right. \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \left[ -K(p_1, p_3) + \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - Z^2 K(p_2, p_4) + Z^2 \ln \frac{M^2}{\lambda^2} - \right. \\ & \left. \left. - ZK(p_1, p_2) - ZK(p_3, p_4) + ZK(p_2, p_3) + ZK(p_1, p_4) \right] \right\} \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Как дифференциальное сечение (4.67) чисто упругого рассеяния, так и сечение (4.35) рассеяния, сопровождаемого излучением единичного фотона с

энергией  $E_5 < E_5^{\text{cut}}$ , содержат инфракрасно-расходящиеся члены. Однако сумма этих выражений конечна, и только такая сумма имеет физический смысл:

$$\left. \frac{d\sigma_{\text{elast}}}{d\Omega_3} + \frac{d\sigma_{\text{brems}}}{d\Omega_3} \right|_{E_5 < E_5^{\text{cut}}} = (1 + \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{brems}}) \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3}, \quad (4.68)$$

где

$$\delta_{\text{virt}} = \delta_{\text{vac}}^e + \delta_{\text{vert}}, \quad (4.69)$$

$$\delta_{\text{brems}} = \delta_{\text{brems}}^{\ell\ell} + \delta_{\text{brems}}^{pp} + \delta_{\text{brems}}^{\ell p}, \quad (4.70)$$

$$\delta_{\text{vac}}^e = \frac{2\alpha}{3\pi} \left( -\frac{5}{3} + \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \right), \quad (4.71)$$

$$\delta_{\text{vert}} = \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} - 2 \right), \quad (4.72)$$

$$\delta_{\text{brems}}^{\ell\ell} = -2\alpha \left[ \tilde{B}(p_1, p_1, E_5^{\text{cut}}) - 2\tilde{B}(p_1, p_3, E_5^{\text{cut}}) + \tilde{B}(p_3, p_3, E_5^{\text{cut}}) \right], \quad (4.73)$$

$$\delta_{\text{brems}}^{pp} = -2Z^2\alpha \left[ \tilde{B}(p_2, p_2, E_5^{\text{cut}}) - 2\tilde{B}(p_2, p_4, E_5^{\text{cut}}) + \tilde{B}(p_4, p_4, E_5^{\text{cut}}) \right], \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{brems}}^{\ell p} = 4Z\alpha \left[ \tilde{B}(p_1, p_2, E_5^{\text{cut}}) - \tilde{B}(p_1, p_4, E_5^{\text{cut}}) - \tilde{B}(p_2, p_3, E_5^{\text{cut}}) + \right. \\ \left. + \tilde{B}(p_3, p_4, E_5^{\text{cut}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Хотя сумма  $\delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{brems}}$  определяется однозначно, это не относится к каждому из слагаемых в отдельности, поскольку они зависят от деталей используемой процедуры сокращения инфракрасных расходимостей. Единственное исключение составляет поправка  $\delta_{\text{vac}}^e$ , которая изначально не является инфракрасно-расходящейся. Для простоты мы исключили из приведенных выше формул для  $\delta_{\text{virt}}$  и  $\delta_{\text{brems}}$  все расходящиеся члены, поскольку они в итоге сокращаются в выражении (4.68).

После того, как мы рассмотрели сокращение инфракрасных расходимостей, обсудим способы уточнения приведенных выше формул для петлевых радиационных поправок. Как упоминалось в Главе 2, неучтенные вклады виртуальных  $\mu^+\mu^-$  и  $\tau^+\tau^-$  пар описываются аналитическим выражением (2.13). Для учета адронного вклада в поляризацию вакуума мы прежде использовали простую формулу (2.15), но теперь рассмотрим более аккуратную параметризацию.

Полная амплитуда  $\mathcal{M}_{\text{vac}}$ , включающая в себя как лептонную, так и адронную части, выражается через так называемый поляризационный оператор фотона,  $\mathcal{P}(Q^2)$ , как

$$\mathcal{M}_{\text{vac}} = \mathcal{P}(Q^2)\mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.76)$$

откуда следует, что

$$\delta_{\text{vac}} = 2 \text{Re} \mathcal{P}(Q^2). \quad (4.77)$$

Адронная часть оператора  $\mathcal{P}(Q^2)$  не поддается теоретическим вычислениям, но может быть надежно определена из экспериментально измеряемого сечения процесса аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны. В данной работе мы используем численную параметризацию для  $\mathcal{P}(Q^2)$ , полученную Игнатовым в результате проведенного им глобального анализа мировых данных [60, 61].

Заметим, что при учете поправки на поляризацию вакуума описанным выше способом не предполагается выполнение условия  $Q^2 \gg m^2$ . Однако это приближение всё же было использовано для вывода лептонных вершинных поправок, поэтому выражения (4.60) и (4.72) требуют уточнения при  $Q^2 \lesssim m^2$ . В этом случае амплитуда  $\mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell$  уже не выражается через  $\mathcal{M}_{1\gamma}$ , как это имело место в формуле (4.60). Этот вопрос обсуждается, например, в [78].

Наконец, можно уточнить выражения для амплитуд  $\mathcal{M}_{\text{box}}$  и  $\mathcal{M}_{\text{xbox}}$ , описывающих мягкую часть вклада двухфотонного обмена. Как уже упоминалось в Главе 2, Максимон и Тьён [50] применили менее грубое приближение, чем использованное Мо и Тсаем [49]. В результате ими были получены следующие выражения:

$$\mathcal{M}_{\text{box}}^{\text{MTj}} = -\frac{Z\alpha}{\pi} \frac{E_1}{|\mathbf{p}_1|} \ln \left( \frac{E_1 + |\mathbf{p}_1|}{m} \right) \ln \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \mathcal{M}_{1\gamma}, \quad (4.78)$$

$$\mathcal{M}_{\text{xbox}}^{\text{MTj}} = \frac{Z\alpha}{\pi} \frac{E_3}{|\mathbf{p}_3|} \ln \left( \frac{E_3 + |\mathbf{p}_3|}{m} \right) \ln \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \mathcal{M}_{1\gamma}. \quad (4.79)$$

Как амплитуды (4.78) и (4.79) Максимова и Тьёна, так и соответствующие амплитуды (4.65) и (4.63) Мо и Тсяя являются инфракрасно-расходящимися, однако разница  $(\mathcal{M}_{\text{box}}^{\text{MTj}} + \mathcal{M}_{\text{xbox}}^{\text{MTj}} - \mathcal{M}_{\text{box}}^{\text{MTs}} - \mathcal{M}_{\text{xbox}}^{\text{MTs}})$  конечна и в приближении

$E_1, E_3 \gg m$  приводит к дополнительной поправке к  $\delta_{\text{virt}}$ , которая дается формулой (2.12). Возникающая поправка  $\delta'_{2\gamma}$  может быть весьма существенной (см. Рисунок 2.2).

## 4.5. Радиационные поправки в экспериментах по изучению двухфотонного обмена

Следуя работе [13], обсудим практические аспекты применения радиационных поправок в экспериментах по измерению вклада жесткого двухфотонного обмена в сечения упругого  $e^\pm p$ -рассеяния. Данное рассмотрение справедливо как для измерения на накопителе ВЭПП-3, описанного в Главе 5, так и для экспериментов коллабораций CLAS [79–81] и OLYMPUS [82, 83]. Все три исследовательские группы проводили прецизионное сравнение дифференциальных сечений упругого электрон-протонного и позитрон-протонного рассеяния,  $\sigma(e^-p)$  и  $\sigma(e^+p)$ . Чтобы количественно охарактеризовать разницу между этими сечениями, удобно рассмотреть их безразмерную комбинацию — отношение  $R$  или асимметрию  $A$ :

$$R = \frac{\sigma(e^+p)}{\sigma(e^-p)}, \quad A = \frac{\sigma(e^+p) - \sigma(e^-p)}{\sigma(e^+p) + \sigma(e^-p)}, \quad (4.80)$$

которые связаны между собой как

$$R = \frac{1 + A}{1 - A}, \quad A = \frac{R - 1}{R + 1}. \quad (4.81)$$

В соответствии со сложившейся традицией, чаще используется отношение  $R$ , хотя асимметрия  $A$  является более естественной величиной, поскольку содержит только зарядово-нечетные члены в числителе и только зарядово-четные в знаменателе. Мы рассмотрим как  $R$ , так и  $A$ .

В обсуждаемых экспериментах измеряется число событий упругого  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния,  $N_{\text{meas}}^-$  и  $N_{\text{meas}}^+$ , при этом оба процесса изучаются в идентичных экспериментальных условиях. В этом случае такие параметры, как акцептанс детектора, эффективность регистрации, толщина мишени и интеграл тока

пучка, поддерживаются практически одинаковыми для электрон-протонного и позитрон-протонного рассеяния и, таким образом, не входят в измеряемые отношение или асимметрию. По этой причине, если требуется достичь высокой относительной точности, намного выгоднее измерять величины (4.80), а не сечения  $\sigma(e^-p)$  и  $\sigma(e^+p)$  по отдельности.

Конечная цель экспериментов по двухфотонному обмену состоит в определении вклада его жесткой части,

$$\delta_{2\gamma} = \frac{2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{hard}})}{|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2}, \quad (4.82)$$

в дифференциальное сечение упругого электрон-протонного рассеяния в некоторой кинематической области. Напомним, что разделение амплитуды  $\mathcal{M}_{2\gamma}$  на мягкую и жесткую части условно и может быть выполнено различными способами, поэтому важно понимать, о каком из них идет речь в каждом конкретном случае. Например, согласно Максимуму и Тъёну, вклад  $\delta'_{2\gamma}$  (2.12) является мягким и поэтому включен в выражение (2.8) для стандартных радиационных поправок, тогда как в подходе Мо и Тсая он считается жестким и, таким образом, содержится в (4.82).

Величина  $\delta_{2\gamma}$  является зарядово-нечетной и зависит от кинематических параметров процесса. Она может быть представлена как функция двух независимых кинематических переменных, например,  $Q^2$  и  $\varepsilon$ . Прецизионное измерение  $\delta_{2\gamma}$  в нескольких кинематических точках дает возможность проверить существующие теоретические расчеты эффекта жесткого двухфотонного обмена и сделать вывод о том, объясняет ли он наблюдаемое противоречие между двумя разными методами измерения отношения  $G_E/G_M$ .

Важно понимать, как выразить искомую величину (4.82) через измеряемые числа  $N_{\text{meas}}^-$  и  $N_{\text{meas}}^+$ . Другими словами, мы хотим знать, как правильно учесть процессы низшего порядка по  $\alpha$ , дающие стандартные радиационные поправки в обсуждаемых экспериментах по двухфотонному обмену. Процедура учета этих поправок состоит в генерировании событий  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния

и моделировании методом Монте-Карло отклика детектора на эти события с использованием, например, набора библиотек `Geant4` [84]. Компьютерное моделирование должно точно воспроизводить экспериментальные условия и используемую процедуру отбора упругих событий. Его конечным результатом являются числа  $N_{\text{sim}}^-$  и  $N_{\text{sim}}^+$ , которые соответствуют прошедшим отбор событиям  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния.

Если, в соответствии с (2.1), ограничиться рассмотрением только радиационных поправок низшего порядка и принять во внимание четность каждой из амплитуд относительно  $Z$ , то можно записать следующие выражения для асимметрий  $A_{\text{sim}}$  и  $A_{\text{meas}}$  (полученной в моделировании и измеренной экспериментально, соответственно):

$$\begin{aligned} A_{\text{sim}} &= \frac{N_{\text{sim}}^+ - N_{\text{sim}}^-}{N_{\text{sim}}^+ + N_{\text{sim}}^-} = \\ &= -Z \frac{2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{soft}}) + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\ell\dagger} \mathcal{M}_{\text{brems}}^p)}{|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{\text{virt}}) + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^\ell|^2 + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^p|^2}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} A_{\text{meas}} &= \frac{N_{\text{meas}}^+ - N_{\text{meas}}^-}{N_{\text{meas}}^+ + N_{\text{meas}}^-} = \\ &= -Z \frac{2 \operatorname{Re}[\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger (\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{soft}} + \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{hard}})] + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{\text{brems}}^{\ell\dagger} \mathcal{M}_{\text{brems}}^p)}{|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{\text{virt}}) + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^\ell|^2 + |\mathcal{M}_{\text{brems}}^p|^2}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

где  $\mathcal{M}_{\text{virt}} = \mathcal{M}_{\text{vac}} + \mathcal{M}_{\text{vert}}^\ell + \mathcal{M}_{\text{vert}}^p$ . Взяв разность  $A_{\text{sim}} - A_{\text{meas}}$ , мы избавимся от интерференционных членов в числителе, связанных с тормозным излучением и мягким двухфотонным обменом, а знаменатель при этом не изменится. После этого легко заметить, что искомая величина (4.82) может быть записана как

$$\delta_{2\gamma} = Z \left( \frac{N_{\text{sim}}^+ - N_{\text{sim}}^-}{N_{\text{sim}}^+ + N_{\text{sim}}^-} - \frac{N_{\text{meas}}^+ - N_{\text{meas}}^-}{N_{\text{meas}}^+ + N_{\text{meas}}^-} \right) \frac{N_{\text{sim}}^+ + N_{\text{sim}}^-}{2N_{\text{sim}}^0}, \quad (4.85)$$

где  $N_{\text{sim}}^0$  — число событий, соответствующих величине  $|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2$ , т. е. в отсутствие любых радиационных поправок. Это число может быть получено путем моделирования отклика детектора методом Монте-Карло с использованием упругих событий, сгенерированных в соответствии с формулой Розенблюта (1.32). Подразумевается, что число событий каждого из трех типов («+», «-» и «0»)

соответствует одному и тому же значению интеграла светимости. Отметим, что во многих практических ситуациях множитель  $(N_{\text{sim}}^+ + N_{\text{sim}}^-)/(2N_{\text{sim}}^0)$  близок к единице и тогда им можно пренебречь.

Результаты экспериментов по двухфотонному обмену могут быть представлены не только с помощью величины (4.85), но также и через модифицированное отношение  $R_{2\gamma}$  или асимметрию  $A_{2\gamma}$ . Выражения для них следуют из формул (2.1), (4.80) и (4.82), если предположить, что только амплитуды  $\mathcal{M}_{1\gamma}$  и  $\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{hard}}$  дают вклад в сечения  $\sigma(e^-p)$  и  $\sigma(e^+p)$ :

$$R_{2\gamma} = \frac{1 - Z\delta_{2\gamma}}{1 + Z\delta_{2\gamma}}, \quad A_{2\gamma} = -Z\delta_{2\gamma}. \quad (4.86)$$

## 4.6. Генератор событий ESEPP

### 4.6.1. Общее описание

На основе описанных в разделах 4.1–4.4 формул нами был разработан новый генератор событий упругого рассеяния заряженных лептонов ( $e^\pm$  или  $\mu^\pm$ ) на протонах, учитывающий радиационные поправки порядка  $\alpha^3$  [13]. Он получил название ESEPP (от англ. «Elastic Scattering of Electrons and Positrons on Protons»). Поскольку ESEPP выдает полный набор кинематических параметров частиц в конечном состоянии, он является универсальным генератором событий. Это делает возможным его использование в ряде новых экспериментов по измерению электромагнитных формфакторов и зарядового радиуса протона (таких, как PRad [85] и MUSE [86]). Важным достоинством генератора является то, что в нём не используется ни мягкофотонное, ни ультрарелятивистское приближения при учете тормозного излучения первого порядка. При вычислении кинематических параметров частиц в конечном состоянии и дифференциального сечения  $d\sigma_0/d\Omega_3$  мы также не прибегаем к использованию ультрарелятивистского приближения  $m \ll E_1, E_3$ , что особенно важно в случае  $\mu^\pm p$ -рассеяния [78, 86].

Следует иметь в виду, что не во всех прецизионных измерениях можно ограничиваться учетом тормозного излучения только первого порядка по  $\alpha$ , поскольку точность данного приближения падает с уменьшением  $\Delta E$ . Возможным решением этой проблемы является включение в генератор ESEPP процесса тормозного излучения второго порядка,  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma \gamma$  (см. [51] также).

ESEPP генерирует события двух типов — «упругие» ( $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p$ ) и «неупругие» ( $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ ). Следует понимать, что тормозное излучение первого порядка учтено в обоих случаях, а разделение между этими двумя типами событий проводится по энергии излученного фотона. Если эта энергия не превосходит порогового значения  $E_5^{\text{cut}}$  (которое можно выбрать произвольно малым, например, 1 МэВ), то акт рассеяния можно рассматривать как эффективно упругий, поскольку в эксперименте его невозможно отличить от чисто упругого процесса. В этом случае при моделировании отклика детектора нет необходимости рассматривать столь мягкие тормозные фотоны, поэтому мы можем аналитически проинтегрировать дифференциальное сечение процесса  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$  по всем направлениям излученного фотона и по его энергии в диапазоне  $E_5 < E_5^{\text{cut}}$ . Более того, для проведения такого интегрирования мы можем уверенно использовать базовое мягкофотонное приближение, поскольку оно является аккуратным в случае очень мягких фотонов. Аналитическая процедура интегрирования описана нами в разделе 4.2. Для генерирования упругих событий используется формула (4.68), куда включены все петлевые радиационные поправки и где уже сокращены инфракрасные расходимости.

Неупругие события могут быть сгенерированы в соответствии с одной из трех описанных в разделе 4.2 моделей (базовое, модифицированное и улучшенное мягкофотонные приближения), либо же с использованием аккуратного расчета, представленного в разделе 4.3. В последнем случае используется дифференциальное сечение (4.44), которое выражается через квадрат амплитуды процесса  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ ,  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2$ , заданный формулами (4.46) и (4.50)–(4.58). Для выполнения свертки лептонных тензоров с протонными в формулах (4.50),

(4.53) и (4.56) мы использовали систему компьютерной алгебры `Mathematica` и пакет `FeynCalc` [76]. Детали этих вычислений могут быть найдены на веб-странице [77]. Полученные в результате формулы записаны через скалярные произведения  $p_i \cdot p_j$  четырех-импульсов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  и  $p_5$ . Мы использовали команду `cform`, чтобы преобразовать эти громоздкие выражения, найденные с помощью `Mathematica`, в код на языке программирования `C++`. Отметим, что ни при выводе формулы (4.44) для дифференциального сечения, ни при вычислении  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2$  мы не пренебрегали массой лептона.

Мы выбрали в качестве базовых следующие кинематические переменные: угол рассеяния лептона, энергия тормозного фотона, а также его полярный и азимутальный углы. Энергия налетающего лептона (т. е. энергия пучка) тоже считается заданной. Тогда остальные кинематические параметры частиц в конечном состоянии могут быть вычислены (с точностью до произвольного вращения относительно оси пучка) по формулам, приведенным в разделе 4.1. Напомним, что кинематика процесса  $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$  также была рассмотрена без пренебрежения массой лептона.

При вычислении дифференциального сечения  $d\sigma_0/d\Omega_3$  и квадрата амплитуды  $|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2$  необходимо использовать определенную параметризацию для формфакторов  $G_E(Q^2)$  и  $G_M(Q^2)$ . В генератор `ESEPP` заложены несколько моделей формфакторов: дипольная зависимость (1.48), а также параметризации Келли [44] и Пакетта [87], обе имеющие вид (1.53)–(1.54). Кроме того, есть возможность использовать формфакторы (1.53)–(1.54) с произвольно заданными численными коэффициентами. Заметим, что при использовании генератора следует помнить о возможной зависимости результатов моделирования от выбранной параметризации для  $G_E$  и  $G_M$ .

С математической точки зрения `ESEPP` генерирует определенное количество случайных  $n$ -мерных векторов (где  $n$  есть число базовых кинематических переменных, достаточных для полного описания кинематики события) в соответствии с заданным распределением вероятностей — дифференциальным

сечением. Его работа основана на использовании генератора псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке от 0 до 1. В случае упругих событий есть только одна базовая кинематическая переменная — угол рассеяния лептона, поэтому распределение вероятностей, которое описывается формулой (4.68), является одномерным. При этом для разыгрывания случайных событий можно использовать простой метод браковки (другое название — «выборка с отклонением» или «rejection sampling»). Однако в случае неупругих событий имеется  $n = 4$  базовых кинематических переменных ( $\theta_3$ ,  $E_5$ ,  $\theta_5$  и  $\phi_5$ ), которые образуют четырехмерное фазовое пространство. Распределение вероятностей также является четырехмерным и описывается формулами (4.16) или (4.44). Очевидно, что это распределение имеет резко выраженные пики, связанные с каждой из базовых кинематических переменных (например, из-за того, что дифференциальное сечение возрастает при малых углах рассеяния, малых энергиях тормозных фотонов и при их излучении вдоль налетающего или рассеянного лептонов). В этом случае обычный метод браковки становится чрезвычайно неэффективным для генерирования событий.

По этой причине мы использовали **mFOAM** [88, 89] — универсальный адаптивный генератор событий и численный интегратор, встроенный в среду ROOT [90] в качестве класса **TFoam**. Принцип работы **mFOAM** состоит в том, что он делит многомерный фазовый объем на множество неравных прямоугольных ячеек, плотность расположения которых наиболее высока там, где имеются пики в распределении вероятностей. Это позволяет значительно увеличить эффективность метода браковки для отдельно взятой ячейки. Генератор **mFOAM** позволяет также численно интегрировать заданное распределение вероятностей (не являющееся в общем случае нормированным) по всему фазовому объему. Мы используем эту возможность для вычисления интегральных сечений рассматриваемых процессов. Это необходимо для того, чтобы определить, сколько событий каждого из четырех типов ( $\ell^- p \rightarrow \ell^- p$ ,  $\ell^- p \rightarrow \ell^- p \gamma$ ,  $\ell^+ p \rightarrow \ell^+ p$  и  $\ell^+ p \rightarrow \ell^+ p \gamma$ ) предстоит сгенерировать. Очевидное

требование состоит в том, что интегральная светимость (представляющая собой отношение числа событий к интегральному сечению) должна быть одной и той же для каждого из этих процессов, а полное число всех событий является параметром, задаваемым пользователем. Опишем теперь все входные параметры ESEPP.

#### 4.6.2. Входные параметры

Генератор событий ESEPP является консольным приложением, имеющим интерактивный интерфейс командной строки. Все входные параметры вводятся пользователем в режиме диалога при каждом запуске ESEPP. Запрашиваемая информация включает в себя пункты, перечисленные ниже.

1. Тип генерируемых событий: только  $e^-p$ ; только  $e^+p$ ; как  $e^-p$ , так и  $e^+p$ ; только  $\mu^-p$ ; только  $\mu^+p$ ; наконец, как  $\mu^-p$ , так и  $\mu^+p$ . Если требуется, можно дополнительно сгенерировать события чисто упругого рассеяния в соответствии с формулой Розенблюта (1.32). Такие события могут быть полезны при учете радиационных поправок в экспериментах по измерению двухфотонного обмена (см. раздел 4.5).
2. Модель, используемая для учета внутренней структуры протона. Пользователь может выбрать одну из следующих опций: точечный протон, имеющий магнитный момент  $\mu$  (так, что  $G_E \equiv 1$  и  $G_M \equiv \mu$ ); протон с формфакторами, описываемыми дипольной зависимостью (1.48); протон, имеющий формфакторы в соответствии с параметризациями Келли или Пакетта; и протон, формфакторы которого заданы параметризацией (1.53)–(1.54) с произвольными значениями численных коэффициентов (пользователь может указать их в файле `const.h`).
3. Модель, используемая для учета тормозного излучения первого порядка. Пользователь может выбрать базовое, модифицированное или улучшенное мягкофотонные приближения, описанные в разделе 4.2, или же

аккуратный расчет, представленный в разделе 4.3. При использовании базового мягкофотонного приближения все генерируемые события имеют чисто упругую кинематику, поэтому эта опция не подходит для проведения реалистичного моделирования отклика детектора. В каждой из четырех упомянутых моделей пользователь может учитывать только излучение лептоном, только излучение протоном или же полный эффект, включающий в себя оба типа тормозного излучения и интерференцию между ними.

4. Модель, используемая для учета поляризации вакуума. Пользователь может выбирать между следующими тремя опциями: учет только вклада электрон-позитронных пар,  $\delta_{\text{vac}}^e$  (4.71); учет полного лептонного вклада  $\delta_{\text{vac}}^e + \delta_{\text{vac}}^\mu + \delta_{\text{vac}}^\tau$  (2.13); или учет полной поправки  $\delta_{\text{vac}}$  на поляризацию вакуума в соответствии с параметризацией (4.77).
5. Модель, используемая для учета двухфотонного обмена (т. е. амплитуд  $\mathcal{M}_{\text{box}}$  и  $\mathcal{M}_{\text{xbox}}$  в мягкофотонном приближении). Пользователь может выбрать либо выражения (4.65) и (4.63)  $\mathcal{M}_0$  и  $\mathcal{T}_{\text{сая}}$ , либо выражения (4.78) и (4.79), полученные Максимомом и Тьёном. Во втором случае учитывается дополнительная поправка  $\delta'_{2\gamma}$  (2.12) к величине  $\delta_{\text{virt}}$  (4.69).
6. Некоторые кинематические параметры: полная энергия налетающих лептонов,  $E_1$ ; пороговая и максимальная энергии тормозных фотонов,  $E_5^{\text{cut}}$  и  $E_5^{\text{max}}$  (для неупругих событий выполняется условие  $E_5^{\text{cut}} < E_5 < E_5^{\text{max}}$ ); минимальный и максимальный полярные углы рассеянного лептона,  $\theta_3^{\text{min}}$  и  $\theta_3^{\text{max}}$  (для всех событий выполняется условие  $\theta_3^{\text{min}} < \theta_3 < \theta_3^{\text{max}}$ ); и его минимальный и максимальный азимутальные углы,  $\phi_3^{\text{min}}$  и  $\phi_3^{\text{max}}$  (так, что  $\phi_3^{\text{min}} < \phi_3 < \phi_3^{\text{max}}$  для всех событий). Пользователь может выбрать одно из двух часто используемых соглашений для азимутальных углов — либо  $0 \leq \phi < 2\pi$ , либо  $-\pi < \phi \leq +\pi$  (в радианах).

7. Требуемое число событий. В случае, когда события  $\ell^-p$ - и  $\ell^+p$ -рассеяния генерируются вместе, это полное число событий обоих типов. ESEPP определяет число событий каждого типа, исходя из требования, чтобы интегральные светимости этих процессов были равны. Это же правило применяется, если дополнительно генерируются события чисто упругого рассеяния в соответствии с формулой Розенблюта (1.32).
8. Названия и тип (`*.dat` или `*.root`) выходных файлов. Их формат детально описан в следующем разделе.

### 4.6.3. Формат выходных файлов

Генерируемые события записываются в файлы формата `*.root` или `*.dat` (по выбору пользователя). Все выходные файлы сохраняются в ту же директорию, откуда был запущен ESEPP. События для каждого из типов рассеиваемых лептонов записываются в отдельный файл — `<pref>_e-.<ext>` для  $e^-$ , `<pref>_e+.<ext>` для  $e^+$ , `<pref>_mu-.<ext>` для  $\mu^-$  и `<pref>_mu+.<ext>` для  $\mu^+$ . При этом расширение `<ext>` (которое может быть либо `root`, либо `dat`) и префикс `<pref>` выбираются пользователем. Если дополнительно генерируются события чисто упругого рассеяния в соответствии с формулой Розенблюта (1.32), то они записываются в файл `<pref>_e0.<ext>` (в случае  $e^\pm p$ -рассеяния) или `<pref>_mu0.<ext>` (в случае  $\mu^\pm p$ -рассеяния). Помимо выходных файлов с событиями, в той же самой директории создается текстовый файл `<pref>_e.info` (или `<pref>_mu.info` в случае  $\mu^\pm p$ -рассеяния). Он содержит список входных параметров, выбранных пользователем, а также дополнительную информацию о сгенерированных событиях (число событий различных типов, интегральные сечения и т. д.).

Выходные файлы `*.root` являются стандартными файлами формата ROOT [90], содержащими «дерево» («tree» — объект класса `TTree`) с названием `ntp`. Оно имеет девять «ветвей» («branches»), которые соответствуют следую-

щим девяти кинематическим переменным для частиц в конечном состоянии:  $E_3$ ,  $\theta_3$ ,  $\phi_3$ ,  $E_4$ ,  $\theta_4$ ,  $\phi_4$ ,  $E_5$ ,  $\theta_5$  и  $\phi_5$ . Названия ветвей и их краткие описания приведены в Таблице 4.1. Выходные файлы `*.dat` являются обычными текстовыми файлами. Каждая строка этих файлов соответствует одному событию и содержит те же самые девять кинематических переменных, записанных в том же порядке, в котором они перечислены в Таблице 4.1.

Как уже упоминалось в разделе 4.6.1, генерируются события двух типов — упругие ( $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p$ ) и неупругие ( $\ell^\pm p \rightarrow \ell^\pm p \gamma$ ). Для сохранения единого формата данных каждое событие всегда содержит кинематические параметры трех частиц ( $\ell^\pm$ ,  $p$  и  $\gamma$ ). В случае упругого рассеяния параметры  $E_5$ ,  $\theta_5$  и  $\phi_5$  положены равными нулю. События обоих типов равномерно перемешаны друг с другом в выходных файлах.

Примеры событий упругого электрон-протонного рассеяния, сгенерированных с помощью ESEPP, показаны на Рисунке 4.2. Выбранные кинематические параметры примерно соответствуют условиям описанного в Главе 5 эксперимента на накопителе ВЭПП-3 (угловой диапазон LA сеанса I).

#### 4.6.4. Исходный код и компиляция

Генератор событий ESEPP написан на языке программирования C++ с использованием некоторых классов ROOT [90]. В частности, класс `TLorentzVector`

Таблица 4.1. Список ветвей, содержащихся в дереве `ntp`.

№	Ветвь	Переменная	Описание
1	<code>E_l</code>	$E_3$ (МэВ)	Полная энергия рассеянного лептона
2	<code>theta_l</code>	$\theta_3$ (радиан)	Полярный угол рассеянного лептона
3	<code>phi_l</code>	$\phi_3$ (радиан)	Азимутальный угол рассеянного лептона
4	<code>E_p</code>	$E_4$ (МэВ)	Полная энергия протона отдачи
5	<code>theta_p</code>	$\theta_4$ (радиан)	Полярный угол протона отдачи
6	<code>phi_p</code>	$\phi_4$ (радиан)	Азимутальный угол протона отдачи
7	<code>E_g</code>	$E_5$ (МэВ)	Энергия тормозного фотона
8	<code>theta_g</code>	$\theta_5$ (радиан)	Полярный угол тормозного фотона
9	<code>phi_g</code>	$\phi_5$ (радиан)	Азимутальный угол тормозного фотона

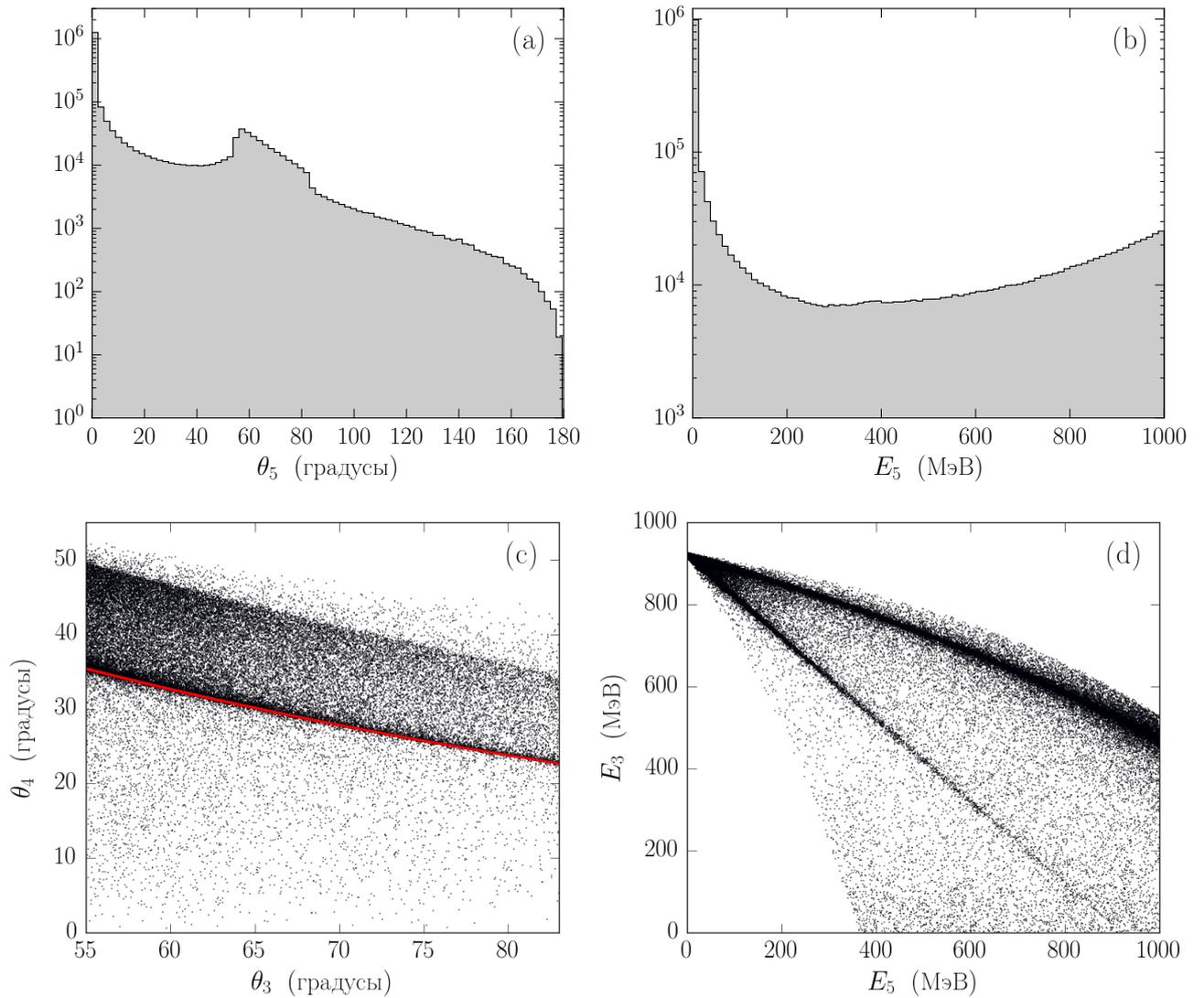


Рис. 4.2. Примеры событий электрон-протонного рассеяния, сгенерированных с помощью ESEPP. Использовались следующие входные параметры, примерно соответствующие условиям эксперимента на накопителе ВЭПП-3 (сеанс I, диапазон больших углов):  $E_1 = 1600$  МэВ,  $55^\circ \leq \theta_3 \leq 83^\circ$ ,  $1 \text{ МэВ} \leq E_5 \leq 1000 \text{ МэВ}$ , дипольная параметризация для формфакторов протона и аккуратный расчет для тормозного излучения. На гистограмме (а) показано распределение событий по полярному углу тормозного фотона. Хорошо заметны два пика, соответствующие излучению вдоль налетающего ( $\theta_5 \approx 0^\circ$ ) и рассеянного ( $55^\circ \lesssim \theta_5 \lesssim 83^\circ$ ) электронов. Гистограмма (b) иллюстрирует энергетический спектр тормозных фотонов. Примечательно, что, начиная с  $E_5 \approx 300$  МэВ, наблюдается подъем в спектре с ростом энергии фотонов. На двумерной диаграмме (c), где каждому событию соответствует точка, показана корреляция между полярными углами электрона и протона,  $\theta_3$  и  $\theta_4$ . Красным цветом отмечены упругие события. Наконец, диаграмма (d) иллюстрирует связь между энергиями тормозного фотона и рассеянного электрона,  $E_5$  и  $E_3$ . Отобраны только те события, для которых  $\theta_3 < 56^\circ$ . Хорошо заметны две полосы, на которые приходится большая часть точек. Нетрудно понять, что верхняя полоса соответствует излучению вдоль пучка, а нижняя — вдоль рассеянного электрона.

позволил упростить работу с четырех-импульсами частиц, класс `TRandom3` использовался для генерирования псевдослучайных чисел, а класс `TFoam` был полезен для разыгрывания событий и интегрирования сечения по многомерному фазовому объему. Исходный код `ESEPP` свободно доступен под лицензией GNU GPL и может быть найден на веб-странице [77].

Для компиляции генератора достаточно запустить команду `make`, которая создаст исполняемый файл. На компьютере предварительно должна быть установлена среда `ROOT` (включая библиотеку `MathMore`, наличие которой легко проверить, выполнив команду `root-config --has-mathmore`). `ESEPP` разрабатывался и тестировался в операционной системе GNU/Linux, но ожидается, что он также может работать на платформах MS Windows и OS X.

## Глава 5

# Измерение вклада двухфотонного обмена в сечения упругого $e^\pm p$ -рассеяния

## 5.1. Введение

Как следует из предыдущих глав, жесткий двухфотонный обмен считается наиболее вероятной причиной того, что два разных экспериментальных метода дают противоречивые результаты для отношения  $G_E/G_M$  электрического формфактора протона к магнитному. Напомним, что соответствующий вклад в сечение упругого электрон-протонного рассеяния записывается в низшем порядке по  $\alpha$  как

$$\delta_{2\gamma} = \frac{2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_{1\gamma}^\dagger \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{hard}})}{|\mathcal{M}_{1\gamma}|^2}, \quad (5.1)$$

где  $\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{hard}}$  — это жесткая часть амплитуды двухфотонного обмена, не включенная в стандартные радиационные поправки. За последнее десятилетие были развиты следующие теоретические подходы к описанию жесткого двухфотонного обмена: адронные [91–96] и партонные [97, 98] модели; применение дисперсионных соотношений [99–101]; предсказания в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики [102, 103]; расчеты с использованием мягко-коллинеарной эффективной теории поля (SCET) [103]; и многочисленные феноменологические параметризации [104–111]. Подробный обзор работ по двухфотонному обмену в упругом электрон-протонном рассеянии можно найти в статьях [112, 113]. Отметим, что все перечисленные выше подходы являются в той или иной степени модельно-зависимыми и поэтому нуждаются в экспериментальной проверке. Наиболее прямым способом измерения величины (5.1) является сравнение между собой сечений упругого  $e^+p$ - и  $e^-p$ -рассеяния.

Попытки наблюдения эффекта жесткого двухфотонного обмена в экспе-

риментах по упругому  $e^\pm p$ -рассеянию предпринимались в 1960-е годы [114–121], но в то время измерения проводились либо при очень малых  $Q^2$ , либо с плохой точностью. Все полученные тогда данные собраны в Таблице 5.1 и показаны на Рисунке 5.1 (за исключением двух точек при  $Q^2 \leq 1 \text{ ГэВ}^2$ , для которых в работе [118] не приведены численные значения). Измеряемое отношение  $R_{2\gamma}$

Таблица 5.1. Численные результаты экспериментов [114–117, 119–121] по сравнению сечений упругого  $e^+p$ - и  $e^-p$ -рассеяния, проведенных в 1960-е годы.

№	Измерение	$E_1$ (ГэВ)	$Q^2$ (ГэВ <sup>2</sup> )	$R_{2\gamma}$
1	Йонт и Пайн [114]	0.205	0.01	$0.996 \pm 0.012$
2	(SLAC, 1962;	0.307	0.02	$0.976 \pm 0.018$
3	данные взяты из [115])	0.307	0.02	$1.006 \pm 0.018$
4		0.307	0.05	$1.004 \pm 0.032$
5		0.307	0.19	$1.042 \pm 0.060$
6	Броуман и др. [115]	0.518	0.14	$0.998 \pm 0.023$
7	(SLAC, 1965)	0.600	0.48	$1.091 \pm 0.067$
8		0.700	0.27	$1.010 \pm 0.031$
9		0.800	0.62	$0.991 \pm 0.084$
10		0.850	0.60	$1.038 \pm 0.065$
11		0.850	0.76	$1.069 \pm 0.040$
12		0.850	0.76	$1.207 \pm 0.088$
13	Андерсон и др. [116] (Cornell, 1966)	1.200	0.35–0.93	$0.996 \pm 0.020$
14	Бартель и др. [117]	2.340	0.454	$1.012 \pm 0.032$
15	(DESY, 1967)	2.340	1.37	$0.954 \pm 0.057$
16	Андерсон и др. [119]	0.800	0.15–0.31	$0.991 \pm 0.024$
17	(Cornell, 1968)	0.800	0.31–0.62	$0.992 \pm 0.022$
18		1.200	0.27–0.54	$1.014 \pm 0.025$
19		1.200	0.54–0.70	$0.968 \pm 0.029$
20		1.200	0.70–1.00	$1.002 \pm 0.045$
21	Буке и др. [120]	0.380	0.31	$1.036 \pm 0.016$
22	(Orsay, 1968)	0.980	1.24	$1.079 \pm 0.046$
23	Мар и др. [121]	4.000	0.689	$0.986 \pm 0.016$
24	(SLAC, 1968)	4.000	1.54	$1.003 \pm 0.022$
25		4.000	2.44	$1.040 \pm 0.043$
26		4.000	3.27	$1.111 \pm 0.123$
27		10.00	0.204	$1.010 \pm 0.020$
28		10.00	0.731	$0.965 \pm 0.045$
29		10.00	3.79	$1.024 \pm 0.034$
30		10.00	5.00	$1.038 \pm 0.059$

дается формулой (4.86), но входящую в неё зарядово-четную величину  $Z\delta_{2\gamma}$  мы для краткости будем теперь обозначать просто как  $\delta_{2\gamma}$ :

$$R_{2\gamma} = \frac{1 - \delta_{2\gamma}}{1 + \delta_{2\gamma}} \approx 1 - 2\delta_{2\gamma}. \quad (5.2)$$

Важно отметить, что на Рисунке 5.1 отношение  $R_{2\gamma}$  представлено как функция только от  $Q^2$ , при этом игнорируется его зависимость от  $E_1$  (или, эквивалентно, от  $\varepsilon$ ). Это сделано потому, что двумерный график не позволяет показать  $R_{2\gamma}$  как функцию двух кинематических переменных. Разумеется, такой упрощенный способ представления экспериментальных данных не является полностью корректным. Более аккуратный подход состоит в том, чтобы, используя некоторую разумную модель, явным образом учесть функциональную зависимость  $R_{2\gamma}$  от  $\varepsilon$ . Покажем, как это сделать.

Следуя работе [111], предположим, что величина  $\delta_{2\gamma}$  может быть параметризована как

$$\delta_{2\gamma}(Q^2, \varepsilon) = \delta_F - (1 - \varepsilon) \tilde{\delta}_{2\gamma}(Q^2), \quad (5.3)$$

где

$$\delta_F = \alpha\pi \frac{\sin(\theta_3/2)}{1 + \sin(\theta_3/2)} = \alpha\pi \frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{\sqrt{1 - \varepsilon} + \sqrt{1 + \varepsilon + 2\varepsilon\tau}} \quad (5.4)$$

— это так называемая поправка Фешбаха [47, 122], которая имеет правильную асимптотику при  $Q^2 \rightarrow 0$ . Второй член в выражении (5.3) выбран так, чтобы он линейно зависел от  $\varepsilon$  и обращался в ноль при  $\varepsilon = 1$ . Далее, принимая во внимание формулу (5.2), можно записать измеряемую величину  $R_{2\gamma}$  как

$$R_{2\gamma}(Q^2, \varepsilon) \approx 1 - 2\delta_F + 2(1 - \varepsilon) \tilde{\delta}_{2\gamma}(Q^2). \quad (5.5)$$

Отсюда получаем следующее выражение для  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$ :

$$\tilde{\delta}_{2\gamma} = \frac{R_{2\gamma} - 1 + 2\delta_F}{2(1 - \varepsilon)}. \quad (5.6)$$

Если исходная параметризация (5.3) справедлива, то введенная нами величина (5.6) зависит только от  $Q^2$ . В то же время погрешность для  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$ , выражающаяся

через погрешность для  $R_{2\gamma}$  как

$$\Delta\tilde{\delta}_{2\gamma} = \frac{\Delta R_{2\gamma}}{2(1 - \varepsilon)}, \quad (5.7)$$

зависит от значения  $\varepsilon$ , при котором измерено  $R_{2\gamma}$ . В частности,  $\Delta\tilde{\delta}_{2\gamma} < \Delta R_{2\gamma}$  при  $\varepsilon < 0.5$  и  $\Delta\tilde{\delta}_{2\gamma} \geq \Delta R_{2\gamma}$  при  $\varepsilon \geq 0.5$ .

Значения  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$ , вычисленные по экспериментальным данным 1960-х годов, показаны на Рисунке 5.2. Видно, что достигнутая тогда точность измерений не позволяет сделать вывод об отличии величины  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$  от нуля, т. е. о наличии эффекта жесткого двухфотонного обмена.

Предложение провести на накопителе ВЭПП-3 новое прецизионное измерение  $R_{2\gamma}$  было опубликовано в 2004 г. и привлекло заметный интерес научного сообщества [10]. В мае–июле 2007 г., после нескольких лет подготовки, состоялся пробный сеанс эксперимента. Основной набор данных осуществлялся в два этапа, при двух разных энергиях пучка и конфигурациях детектора. В сеансе I, который проводился в сентябре–декабре 2009 г., мы работали с пучками энергией 1.6 ГэВ. Сеанс II, при энергии 1 ГэВ, длился с сентября 2011 г. по март 2012 г. Предварительные результаты эксперимента неоднократно докладывались на международных конференциях и отражены в работах [18–21]. Итоговая статья была опубликована в начале 2015 г. в журнале «Physical Review Letters» [15].

Одновременно с обсуждаемым экспериментом аналогичные измерения проводились коллаборациями CLAS в Национальной лаборатории Джефферсона (Ньюпорт-Ньюс, США) и OLYMPUS в ускорительном центре DESY (Гамбург, Германия). Коллаборация CLAS [79–81] использовала жидководородную мишень и смешанный  $e^\pm$ -пучок с энергией частиц в диапазоне от примерно 0.85 до 3.5 ГэВ, получаемый с помощью конверсии фотонного пучка. В эксперименте OLYMPUS [82, 83] применялась газовая водородная мишень, установленная внутри накопительного кольца DORIS. Измерения проводились попеременно с электронными и позитронными пучками, имеющими энергию 2 ГэВ. В обо-

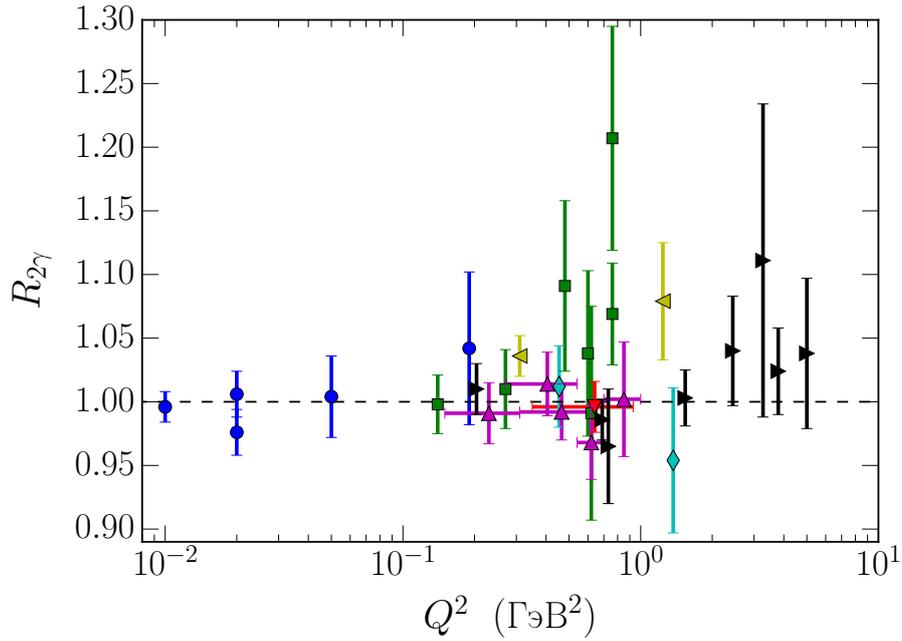


Рис. 5.1. Данные для  $R_{2\gamma}$  в зависимости от  $Q^2$ , полученные в следующих экспериментах: ● Йонт и Пайн (1962) [114], ■ Броуман и др. (1965) [115], ▼ Андерсон и др. (1966) [116], ◆ Бартель и др. (1967) [117], ▲ Андерсон и др. (1968) [119], ◀ Буке и др. (1968) [120] и ▶ Мар и др. (1968) [121]. Горизонтальная шкала является логарифмической.

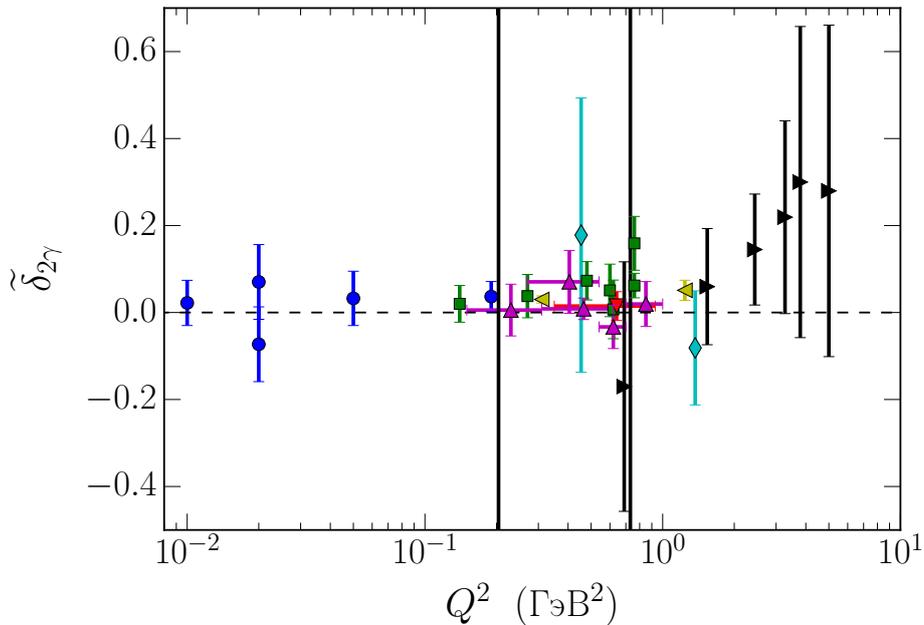


Рис. 5.2. Данные для величины  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$  (5.6) в зависимости от  $Q^2$ . Используются те же маркеры, что и на Рисунке 5.1. Погрешности для  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$  вычислены по формуле (5.7). Горизонтальная шкала является логарифмической.

их экспериментах были задействованы магнитные детекторы, что неизбежно влечет за собой различие в аксептансах для электронов и позитронов. Окончательные результаты измерений ВЭПП-3 [15] и CLAS [80] были опубликованы одновременно, в одном и том же выпуске журнала «Physical Review Letters», а два года спустя появились данные коллаборации OLYMPUS [83]. Мы сравниваем между собой результаты всех трех экспериментов в разделе 5.4.

## 5.2. Постановка эксперимента

### 5.2.1. Электрон-позитронный накопитель ВЭПП-3

Эксперимент проводился на электрон-позитронном накопителе ВЭПП-3, который входит в состав работающего в ИЯФ СО РАН ускорительного комплекса ВЭПП-4 [123]. Хотя первоочередной задачей ВЭПП-3 является накопление и инжекция электронов и позитронов в основное кольцо коллайдера ВЭПП-4М, он также активно используется в качестве источника синхротронного излучения и для проведения ядерно-физических экспериментов с внутренними газовыми мишенями. Накопитель ВЭПП-3 был построен в 1967–71 гг. и модернизирован в 1986–87 гг. Помимо основного кольца, в его состав входят следующие элементы (см. схему на Рисунке 5.3): высоковольтный ускоритель электронов ЭЛИТ-3А, импульсный гирокон, линейный ускоритель на энергию до 50 МэВ, конверсионная система для получения позитронов, синхротрон Б-4 на энергию до 350 МэВ, а также каналы транспортировки пучка [123]. Начиная с 2016 г., для обеспечения ВЭПП-3 электронами и позитронами используется новый инжекционный комплекс ВЭПП-5 [124], однако эта модернизация была проведена уже после завершения рассматриваемого нами эксперимента.

Основное кольцо накопителя состоит из двух прямолинейных промежутков длиной 12 м каждый (обозначены на Рисунке 5.3 номерами 2 и 4) и двух полуколец со средним радиусом 8 м. Внутренняя мишень и детектор установлены на прямолинейном промежутке №2, между резонаторами RF72 и RF8.

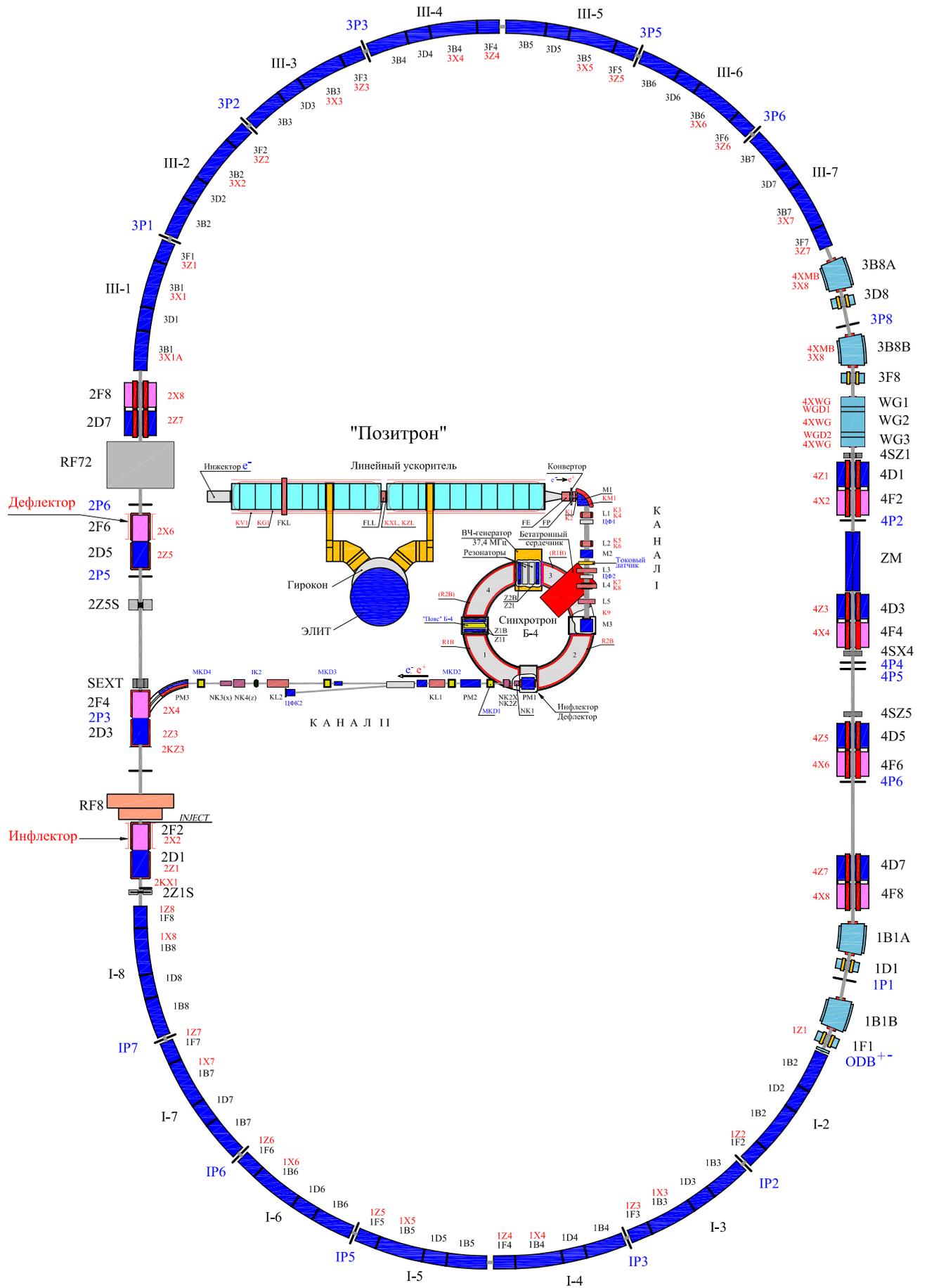


Рис. 5.3. Схема расположения элементов накопителя ВЭПП-3 [123].

Длина орбиты накопителя составляет 74.4 м, а энергия пучка может меняться в диапазоне от 350 МэВ (энергия инжекции) до 2 ГэВ. Как электроны, так и позитроны движутся в кольце в одном направлении (против часовой стрелки), для чего при смене полярности пучка производится соответствующая переполусовка элементов магнитной системы.

Накопленный и ускоренный до энергии 2 ГэВ позитронный ток может достигать  $\approx 50$  мА. Скорость накопления позитронов при частоте инжекции 1 Гц составляет около 50 мкА/с. Накопление электронов происходит гораздо быстрее, со скоростью 2–5 мА/с. В описываемом эксперименте ВЭПП-3 работал в одногустковом режиме. При энергии пучка 2 ГэВ поперечные размеры сгустка в районе мишени составляют  $\sigma_x = 2.0$  мм и  $\sigma_y = 0.5$  мм (по горизонтали и вертикали, соответственно), а его длина — 15 см [125].

Типичный режим работы накопителя во время эксперимента показан на Рисунке 5.4. При наборе данных пучки электронов и позитронов регулярно чередовались, что помогло уменьшить систематические погрешности измере-

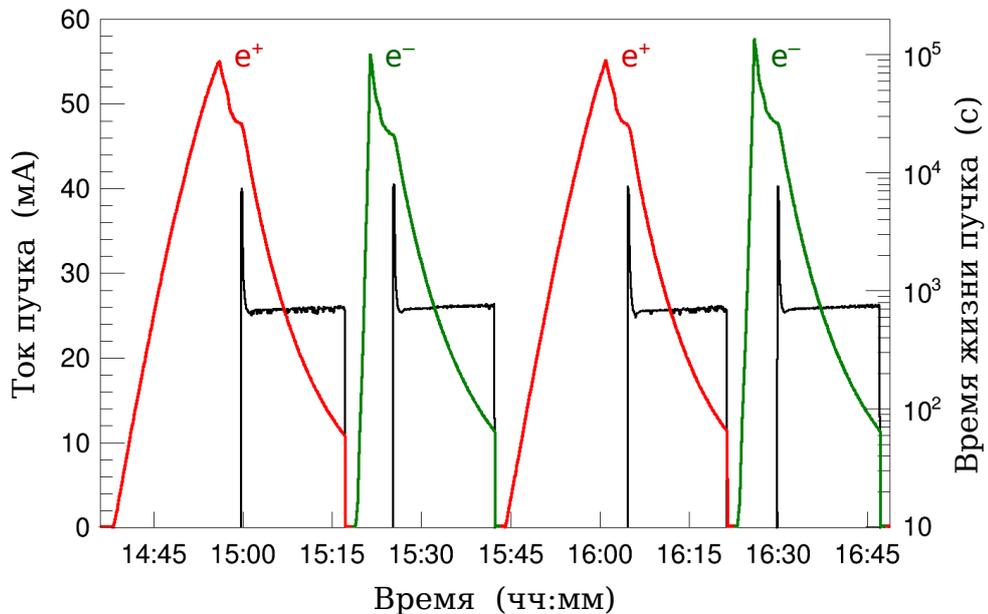


Рис. 5.4. Режим работы накопителя ВЭПП-3 во время набора данных во II сеансе эксперимента. Красным цветом показан ток позитронов, зеленым — ток электронов, а черным — время жизни пучка (по состоянию на 9 января 2012 г.).

ния (см. раздел 5.3.3). Полный экспериментальный цикл, состоящий из одного электронного и одного позитронного «спусков», занимал около 1 часа. Всего в ходе эксперимента было проведено почти 7000 спусков, каждый из которых включал в себя следующие основные этапы: накопление пучка, его ускорение до нужной энергии, включение мишени, набор данных в течение  $\approx 15$  минут, сброс пучка и переполусовка магнитной системы. Из Рисунка 5.4, на котором показано четыре спуска, хорошо видно, что накопление позитронов происходило намного медленнее, чем накопление электронов. Для каждого спуска мы старались поддерживать одинаковые начальные и конечные токи, энергии и положения пучков.

### 5.2.2. Измерение положения и энергии пучка

Положение пучка контролировалось во время набора данных с помощью имеющейся на ВЭПП-3 системы электростатических пикап-электродов [123]. Ближайшими к мишени являются пикап-станции 2р3 и 2р5 (см. Рисунок 5.3). К сожалению, экспериментальный промежуток содержал квадрупольные линзы, которые могли исказить траекторию пучка между электродами 2р3 и 2р5. По этой причине положение пучка в районе мишени определялось с помощью трековой системы детектора. Метод заключается в том, что, имея множество треков рассеянных лептонов и восстанавливая точку их пересечения, можно найти горизонтальную и вертикальную координаты центра пучка. Кроме того, несколько раз в ходе эксперимента проводились измерения положения пучка с помощью подвижных механических пробников, установленных с обеих сторон от мишени. Всё это позволило определять относительные положения пучков с точностью 0.07 и 0.15 мм в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно.

Прецизионное измерение энергии пучка осуществлялось в режиме реального времени с помощью метода обратного комптоновского рассеяния [14, 126]. В этом методе регистрируется энергетический спектр фотонов, образующихся

при рассеянии лазерного инфракрасного излучения на ультрарелятивистских электронах/позитронах пучка (см. схему на Рисунке 5.5). Максимально возможная энергия комптоновских квантов достигается тогда, когда происходит их рассеяние на  $180^\circ$  при лобовом столкновении лазерного луча и пучка:

$$\omega_{\max} = \omega_0 \frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_e^2}}{E_1 - \sqrt{E_1^2 - m_e^2} + 2\omega_0}, \quad (5.8)$$

где  $\omega_0$  — это начальная энергия лазерных фотонов,  $E_1$  — полная энергия частиц пучка и  $m_e$  — масса электрона. Энергии  $\omega_{\max}$  соответствует резкий край в комптоновском спектре. Зная  $\omega_0$  и  $\omega_{\max}$ , легко определить энергию пучка по формуле

$$E_1 = \frac{\omega_{\max}}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m_e^2}{\omega_0 \omega_{\max}}} \right), \quad (5.9)$$

которая была получена из (5.8) в предположении, что  $\omega_0 \ll \omega_{\max}$ .

Рисунок 5.5 иллюстрирует принцип работы системы измерения энергии пучка на ВЭПП-3. В качестве источника инфракрасного излучения использовался CO<sub>2</sub>-лазер GEM Select 50 фирмы «Coherent», имеющий выходную мощность до 50 Вт. Лазерные фотоны с энергией  $\omega_0 = 0.1170652$  эВ (длина волны

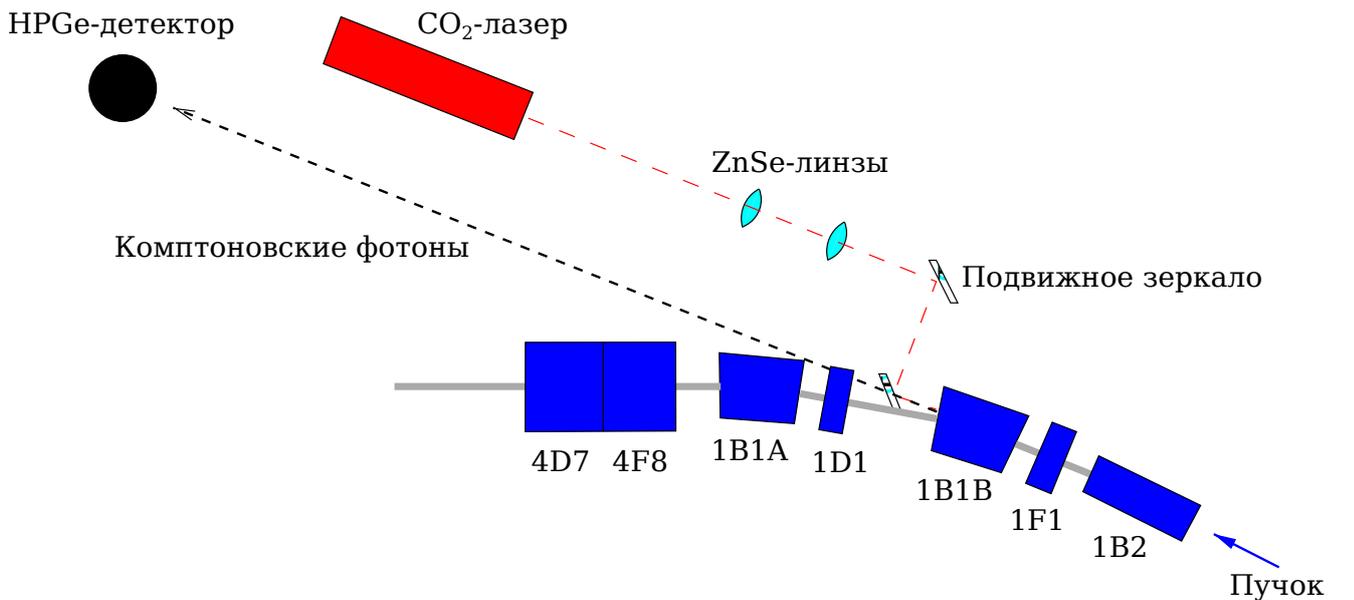


Рис. 5.5. Схема расположения элементов системы измерения энергии пучка на ВЭПП-3 [14].

$\lambda_0 \approx 10.591$  мкм) фокусировались и вводились в вакуумную камеру накопителя с помощью линз и входного окна, изготовленных из селенида цинка. Для точного позиционирования лазерного луча использовалось подвижное зеркало, управляемое дистанционно с помощью шаговых двигателей. Рассеянные назад комптоновские фотоны, энергия которых достигала нескольких МэВ, регистрировались с помощью детектора GC2518 из особо чистого германия (HPGe), изготовленного фирмой «Canberra». Германиевый детектор обеспечивает высокое энергетическое разрешение ( $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-3}$ ) при удовлетворительной эффективности регистрации гамма-квантов. Для калибровки его энергетической шкалы использовались монохроматические линии гамма-излучения радиоактивных изотопов  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{60}\text{Co}$  и  $^{208}\text{Tl}$ . Более детальное описание процедуры измерения энергии пучка в рассматриваемом эксперименте дано в статье [14].

Метод обратного комптоновского рассеяния позволил нам в режиме реального времени определять энергию пучка в каждом спуске с абсолютной точностью 70 кэВ для сеанса I и 40 кэВ для сеанса II ( $\Delta E_1/E_1 = 4.4 \cdot 10^{-5}$  и  $4.0 \cdot 10^{-5}$ , соответственно). Результаты измерения показаны на Рисунке 5.6 в зависимости от номера спуска для обоих сеансов эксперимента. Видно, что систематическая разница между энергиями электронов и позитронов не превышала величины в 400 кэВ. Кроме того, точное знание энергии пучка позволило нам внести соответствующие небольшие поправки на этапе анализа данных.

### 5.2.3. Внутренняя газовая мишень

Описываемый эксперимент основан на использовании метода сверхтонкой внутренней мишени [17, 127–129], предложенного и развитого в ИЯФ СО РАН. Этот метод обеспечивает следующие важные преимущества перед экспериментами с выведенными пучками:

- возможность использования уникальных мишеней (прежде всего, поляризованных газовых) и уникальных пучков (например, позитронных);

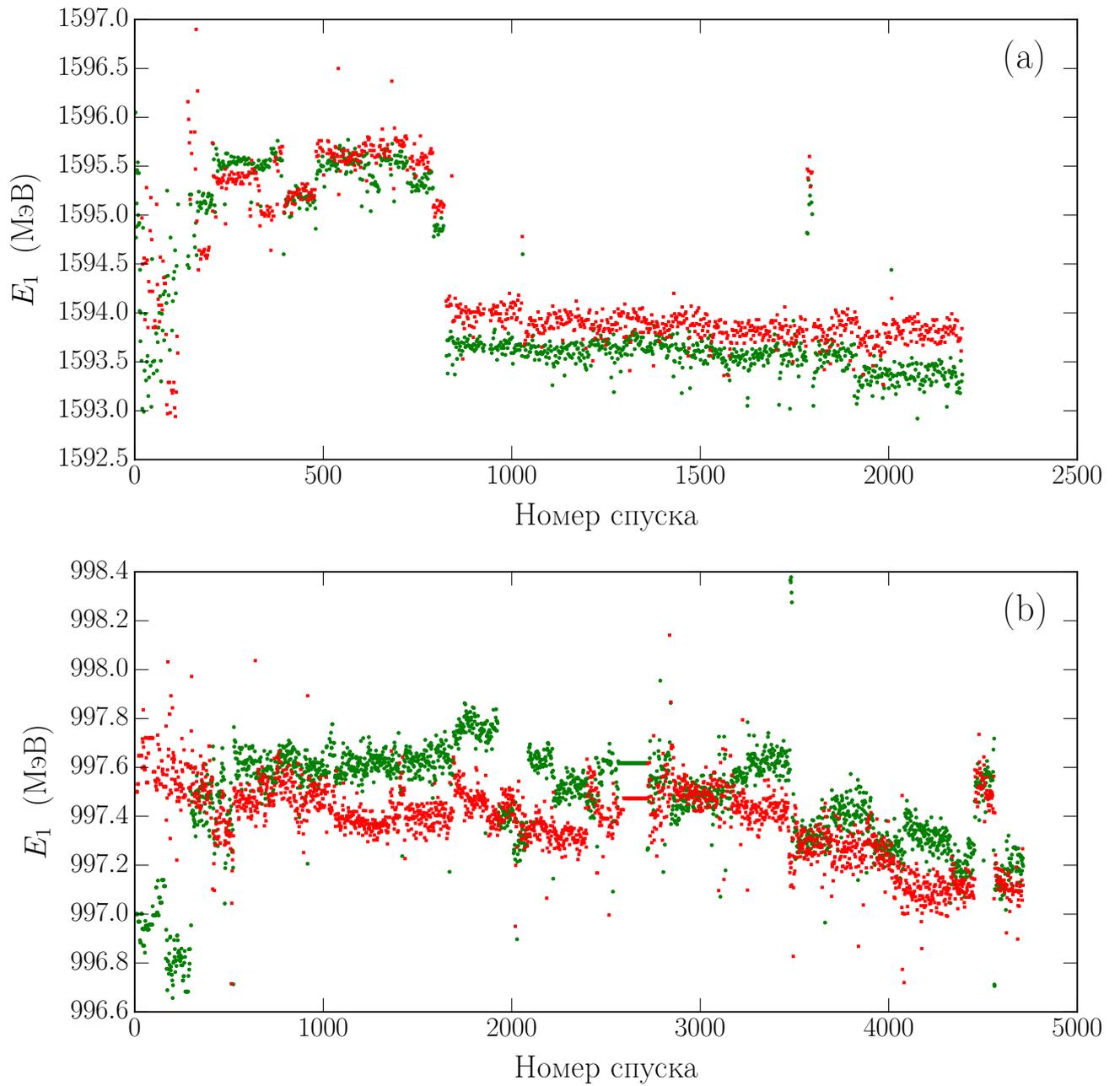


Рис. 5.6. Результаты измерения энергии пучка для каждого из спусков в первом (а) и втором (б) сеансах эксперимента. Зеленые кружки соответствуют электронным спускам, а красные квадраты — позитронным.

- возможность достижения высокой светимости благодаря более эффективному использованию накопленных частиц;
- благоприятные фоновые и кинематические условия эксперимента, позволяющие регистрировать на совпадении «мягкие» вторичные частицы без искажения мишенью их параметров;
- практически непрерывный режим работы.

Простейшей внутренней газовой мишенью является направленная струя газа, которую многократно пересекает циркулирующий в накопителе пучок заряженных частиц. Для увеличения толщины такой мишени было предложено напускать газ внутрь специальной накопительной ячейки — полый длинной трубки, расположенной соосно пучку. Впервые эта идея была реализована на накопителе ВЭПП-3, где поляризованная дейтериевая мишень использовалась для измерения компоненты  $T_{20}$  тензорной анализирующей способности реакции упругого электрон-дейтронного рассеяния [130, 131].

В эксперименте по двухфотонному обмену на ВЭПП-3 была использована накопительная ячейка, аналогичная описанной в работе [132]. Она представляет собой трубку длиной 400 мм, изготовленную из алюминиевой фольги толщиной 30 мкм и имеющую поперечное сечение эллиптической формы с размерами  $13 \times 24$  мм. В центр накопительной ячейки подавался сверхчистый водород. Газ, вытекающий в вакуумную камеру из обоих концов ячейки, откачивался с помощью четырех криогенных насосов. Давление водорода было максимально в центре ячейки ( $\approx 1.5 \cdot 10^{-3}$  торр) и линейно падало по мере приближения к её краям. Общая толщина мишени составляла примерно  $10^{15}$  атом/см<sup>2</sup>, что при среднем токе пучка в 20 мА соответствует светимости  $1.2 \cdot 10^{32}$  см<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup>.

Поток газа, поступающего в накопительную ячейку, а также её температура контролировались и поддерживались на постоянном уровне в ходе эксперимента. От этих величин зависит толщина мишени, которая должна была

быть одинаковой при наборе данных с электронными и позитронными пучками. Заметим, что точность, с которой мы контролировали толщину мишени и ток пучка, была недостаточной для того, чтобы по ним можно было аккуратно нормировать светимость.

#### 5.2.4. Система регистрации частиц

Рассеянный лептон (электрон или позитрон) и протон отдачи регистрировались на совпадении с помощью широкоапертурного немагнитного детектора (см. Рисунок 5.7). Детектор состоял из двух секторов — верхнего и нижнего, которые были практически идентичны и располагались симметрично относительно медианной плоскости накопительного кольца. Азимутальный аксептанс каждого из них составлял  $\Delta\phi = 60^\circ$ . Наличие двух симметричных секторов позволило не только вдвое увеличить угловой аксептанс детектора, но и подавить систематические погрешности измерения, связанные с возможным сдвигом пучка по вертикали.

Как можно понять из Рисунка 5.7, детектор имел две разные конфигурации в сеансах I и II. В первом сеансе были задействованы следующие три угловых диапазона:  $7^\circ$ – $16^\circ$  (малые углы, SA),  $15^\circ$ – $28^\circ$  (средние углы, MA) и  $55^\circ$ – $83^\circ$  (большие углы, LA). Соответственно, имелось три пары «плеч» детектора. Плечи малых углов (SA) регистрировали только рассеянные электроны или позитроны, а плечи MA и LA — как лептоны, так и протоны отдачи. Например, если заряженный лептон рассеивался в диапазон SA, MA или LA, то протон отдачи детектировался на совпадении расположенным по другую сторону от медианной плоскости плечом LA, LA или MA, соответственно.

Плечи LA и MA в первом сеансе включали в себя следующие компоненты: две многопроволочные пропорциональные камеры (MWPC) и четыре дрейфовые камеры для восстановления треков заряженных частиц; четыре сегментированных электромагнитных калориметра, составленных из кристаллов CsI и NaI и служивших для измерения энергии рассеянных лептонов; и шесть



сцинтилляционных счетчиков на основе полистирола, использовавшихся для запуска триггера и идентификации протонов. Радиационная толщина каждого LA-калориметра была примерно  $10.6X_0$ , а каждого MA-калориметра —  $8.3X_0$ . В плечах малых углов использовались два многослойных калориметра типа «сэндвич», имеющих радиационную толщину  $8.6X_0$  каждый (см. врезку на Рисунке 5.7a).

Во втором сеансе были задействованы только два угловых диапазона:  $15^\circ$ – $30^\circ$  (средние углы, MA) и  $65^\circ$ – $105^\circ$  (большие углы, LA). По сравнению с первым сеансом, диапазон LA был расширен и сдвинут в сторону бóльших углов. Радиационная толщина LA-калориметров при этом осталась прежней ( $10.6X_0$ ). В плечи MA были дополнительно установлены сцинтилляторы на основе полистирола толщиной 12 см. Только верхнее MA-плечо содержало электромагнитный калориметр, который планировалось использовать для проверки модели тормозного излучения, заложенной в генераторе событий ESEPP. Предполагалось, что удастся зарегистрировать достаточное количество событий, содержащих жесткий тормозной фотон, однако на практике выделение таких событий оказалось затруднено.

Использование в обоих сеансах немагнитного детектора позволило обеспечить равенство его аксептансов для электронов и позитронов. Рассеянные магнитные поля, создаваемые элементами накопительного кольца, также были малы в районе мишени и детектора ( $< 3$  Гс). В отсутствие магнитных полей на пропорциональные и дрейфовые камеры детектора попадает интенсивный поток электронов низких энергий, образующихся в результате рассеяния частиц пучка на атомных электронах мишени (мёллеровское и Бабá-рассеяние). Для подавления этого фона перед трековыми детекторами были установлены слои поглощающего материала — пластины бериллия толщиной 6 мм для больших углов и листы оргстекла толщиной 30 мм для средних углов.

События рассеяния лептона в угловой диапазон SA в первом сеансе и в диапазон MA во втором сеансе использовались только для нормирования свети-

мости. Два соответствующих кинематических интервала мы будем обозначать с помощью аббревиатуры LNP (от англ. «Luminosity Normalization Point»). Для них выполняются условия  $Q^2 \approx 0.1 \text{ ГэВ}^2$  и  $\varepsilon > 0.9$ . Считается, что эффект жесткого двухфотонного обмена при такой кинематике мал [113, 133], поэтому величина  $R_{2\gamma}^{\text{LNP}}$  должна быть очень близка к единице. Это условие используется нами для того, чтобы обеспечить равенство светимостей, набранных с электронными и позитронными пучками (см. также раздел 5.4).

### 5.3. Анализ экспериментальных данных

#### 5.3.1. Выделение событий упругого рассеяния

Выделение событий упругого рассеяния в рассматриваемом эксперименте не представляло большой сложности. Для этого использовались следующие кинематические корреляции, присущие двухчастичной реакции (см. раздел 1.1):

- корреляция между полярными углами рассеянного лептона и протона отдачи,  $\theta_3$  и  $\theta_4$ :

$$\text{tg } \theta_4 = \frac{M}{M + E_1} \text{ctg } \frac{\theta_3}{2}; \quad (5.10)$$

- корреляция между азимутальными углами рассеянного лептона и протона отдачи,  $\phi_3$  и  $\phi_4$ :

$$|\phi_4 - \phi_3| = \pi; \quad (5.11)$$

- корреляция между углом рассеяния лептона,  $\theta_3$ , и его энергией,  $E_3$ :

$$E_3 = \frac{ME_1}{M + E_1(1 - \cos \theta_3)}; \quad (5.12)$$

- корреляция между углом рассеяния лептона,  $\theta_3$ , и энергией протона отдачи,  $E_4$ :

$$E_4 = M + E_1 - \frac{ME_1}{M + E_1(1 - \cos \theta_3)}. \quad (5.13)$$

Для разных типов событий (т. е. в зависимости от того, в какой из угловых диапазонов рассеивался лептон) использовались различные комбинации соответствующих кинематических ограничений. Идентификация «медленных» протонов отдачи осуществлялась по их времени пролета, а при более высокой энергии — с помощью  $dE/dx$ -метода. Для отделения лептонов от заряженных  $\pi$ -мезонов накладывалось ограничение на энерговыделение в электромагнитном калориметре.

Описанная процедура позволила существенно подавить вклад фоновых событий, основными источниками которых являются следующие реакции электро- и фоторождения пионов:

$$ep \rightarrow en\pi^+, \quad (5.14)$$

$$ep \rightarrow ep\pi^0, \quad (5.15)$$

$$\gamma^*p \rightarrow n\pi^+, \quad (5.16)$$

$$\gamma^*p \rightarrow p\pi^+\pi^-. \quad (5.17)$$

Влияние этих процессов моделировалось в среде **Geant4** [84] с использованием генератора событий, разработанного на основе параметризаций MAID2007 и 2-PION-MAID [134]. Моделирование показало, что в обоих сеансах доля фоновых событий, прошедших отбор, не превышает 4% при рассеянии лептона на большие углы, а для остальных угловых диапазонов пренебрежимо мала.

### 5.3.2. Учет радиационных поправок

Напомним, что интерференция между тормозным излучением лептоном и протоном имеет разные знаки в случае  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния, влияя таким образом на измеряемое отношение сечений. Этот эффект сравним по величине с изучаемым вкладом жесткого двухфотонного обмена, поэтому учет стандартных радиационных поправок является важной частью процедуры анализа экспериментальных данных.

Для учета радиационных поправок мы использовали реалистичную модель детектора в среде `Geant4` и генератор событий `ESEPP`, описанный в разделе 4.6. При генерировании событий были выбраны следующие опции: дипольная параметризация для формфакторов протона; аккуратный расчет вне мягкофотонного приближения для тормозного излучения первого порядка; поправка на поляризацию вакуума, включающая в себя адронный вклад; и учет мягкого двухфотонного обмена в соответствии с подходом Мо и Тсая [49].

Поскольку мы ограничились рассмотрением тормозного излучения только первого порядка по  $\alpha$ , следует обсудить точность этого приближения. Как уже упоминалось в разделе 2.1, излучение мягких тормозных фотонов может быть учтено во всех порядках по  $\alpha$  путем экспоненцирования величины  $\delta(\Delta E)$ , т. е. с помощью следующей замены:

$$1 + \delta(\Delta E) \rightarrow e^{\delta(\Delta E)}. \quad (5.18)$$

Хотя эта процедура не может быть напрямую использована в генераторе событий, она позволит нам получить грубую оценку вклада тормозного излучения более высоких порядков по  $\alpha$  [13]. Для этого выберем следующие кинематические параметры, примерно соответствующие условиям эксперимента на ВЭПП-3:  $E_1 = 1$  ГэВ,  $Q^2 = 1$  ГэВ<sup>2</sup> и  $\Delta E = 0.1$  ГэВ. Далее, используя выражение (II.6) из работы Мо и Тсая [49] и формулу (2.8) Максимова и Тьёна [50], вычислим радиационные поправки  $\delta^-$  и  $\delta^+$  для случая  $e^-p$ - и  $e^+p$ -рассеяния, соответственно. Полученные численные значения приведены в Таблице 5.2.

Из этой таблицы следует, что для случая  $e^-p$ -рассеяния пренебрежение экспоненцированием при извлечении дифференциального сечения приводит

Таблица 5.2. Численные значения радиационных поправок для случая, когда  $E_1 = 1$  ГэВ,  $Q^2 = 1$  ГэВ<sup>2</sup> и  $\Delta E = 0.1$  ГэВ.

Расчет	$1 + \delta^-$	$e^{\delta^-}$	$1 + \delta^+$	$e^{\delta^+}$	$\frac{1+\delta^-}{1+\delta^+}$	$e^{\delta^- - \delta^+}$
Мо и Тсай [49]	0.9794	0.9796	0.9993	0.9993	0.9801	0.9803
Максимон и Тьён [50]	0.9725	0.9729	1.0001	1.0001	0.9724	0.9728

к относительной ошибке в 0.02% (расчет Мо и Тсая) и 0.04% (расчет Максимова и Тьёна). Для  $e^+p$ -рассеяния соответствующие ошибки ещё меньше. Важно отметить, что различие в извлекаемых сечениях при использовании двух разных расчетов составляет 0.7%, что значительно превосходит эффект от экспоненцирования. Наконец, если нас интересует только отношение сечений  $\sigma(e^+p)$  и  $\sigma(e^-p)$ , то замена поправочного множителя  $(1 + \delta^-)/(1 + \delta^+)$  на  $\exp(\delta^- - \delta^+)$  приводит к изменению значения  $R_{2\gamma}$  на 0.02% и 0.04% согласно формулам Мо–Тсая и Максимова–Тьёна, соответственно. Для обсуждаемого эксперимента такие поправки являются пренебрежимо малыми.

Другой вклад порядка  $\alpha^3$ , которым мы тоже пренебрегли, возникает от диаграмм (d) и (e) на Рисунке 2.1 с возбужденным протоном в промежуточном состоянии. Как было показано Герасимовым и Фадиным в работе [135], учет тормозного излучения с возбуждением резонанса  $\Delta(1232)$  в условиях эксперимента на ВЭПП-3 дает поправку  $\delta_\Delta < 0.01\%$  к сечению  $d\sigma_0/d\Omega_3$ , что полностью оправдывает обсуждаемое приближение.

Уже многократно упоминалось, что поправки, возникающие из-за тормозного излучения, сильно зависят от конкретных кинематических ограничений, использованных для выделения событий упругого рассеяния. Примененные нами угловые ограничения можно описать с помощью параметров  $\Delta\phi$  и  $\Delta\theta$  как

$$||\phi_3 - \phi_4| - \pi| < \Delta\phi, \quad (5.19)$$

$$|\theta_4 - \theta_4^*| < \Delta\theta, \quad (5.20)$$

где  $\phi_3$  и  $\phi_4$  — это измеренные азимутальные углы лептона и протона,  $\theta_4$  — измеренный полярный угол протона, а  $\theta_4^*$  — ожидаемое значение  $\theta_4$ , вычисленное из  $\theta_3$  и  $E_1$  с помощью формулы (5.10). Рисунок 5.8 иллюстрирует высокую чувствительность радиационных поправок к параметру  $\Delta\phi = \Delta\theta$ . Из него видно, что показанное красными квадратами «сырое» отношение сечений сильно меняется при варьировании  $\Delta\phi$  и  $\Delta\theta$ , однако эта зависимость исчезает после учета радиационных поправок (черные кружки). Это свидетельствует в пользу

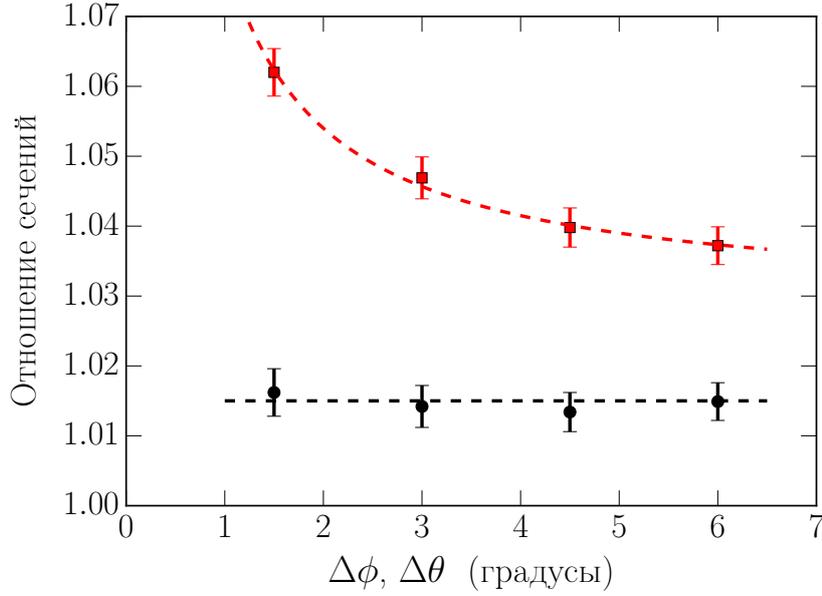


Рис. 5.8. Отношение сечений до (красные квадраты) и после (черные кружки) применения радиационных поправок в зависимости от ограничения на углы  $\phi$  и  $\theta$ . Показаны события рассеяния лептона в угловой диапазон LA во втором сеансе эксперимента.

корректности используемой нами процедуры. Из Рисунка 5.8 также следует, что бóльшая часть наблюдаемого отличия «сырого» отношения  $R$  от единицы обусловлена интерференцией между тормозным излучением лептоном и протоном. Поэтому для корректного выделения эффекта двухфотонного обмена чрезвычайно важно правильно учесть стандартные радиационные поправки.

Другим использованным кинематическим ограничением является ограничение на энергию рассеянного лептона. Оно может быть параметризовано как

$$E_\theta - E_{\text{cal}} < \Delta E, \quad (5.21)$$

где  $E_\theta$  вычисляется из угла  $\theta_3$  по формуле (5.12), а  $E_{\text{cal}}$  определяется по энергосодержанию в калориметре. В рассматриваемом эксперименте условие (5.21) является консервативным, а радиационные поправки определяются, главным образом, угловыми ограничениями (5.19) и (5.20).

Найденные с помощью моделирования детектора в среде **Geant4** величины  $N_{\text{sim}}^-/N_{\text{sim}}^0$  и  $N_{\text{sim}}^+/N_{\text{sim}}^0$  приведены в разделе 5.4, в котором обсуждаются результаты эксперимента. Также там указаны численные значения параметров  $\Delta\phi$ ,  $\Delta\theta$  и  $\Delta E/E_\theta$ , характеризующих использованные нами кинематиче-

ские ограничения. Отметим, что отношения  $N_{\text{sim}}^-/N_{\text{sim}}^0$  и  $N_{\text{sim}}^+/N_{\text{sim}}^0$  могут быть интерпретированы как радиационные поправки  $(1 + \delta^-)$  и  $(1 + \delta^+)$ , соответственно. Для их учета значения  $R_{2\gamma}$  вычислялись по количеству зарегистрированных событий обоих типов ( $N_{\text{meas}}^-$  и  $N_{\text{meas}}^+$ ) с помощью формул, полученных в разделе 4.5.

### 5.3.3. Систематические погрешности измерения

Ещё на этапе подготовки эксперимента были предприняты меры для снижения систематических погрешностей измерения. В частности, использование немагнитного детектора обеспечивает идентичные аксептансы для электронов и позитронов. Его симметричная конфигурация помогает подавить негативные эффекты, возникающие из-за возможного вертикального смещения и наклона пучка относительно медианной плоскости накопителя. Далее, используемая нами процедура нормирования светимости позволяет исключить из рассмотрения толщину мишени и интеграл тока пучка. Наконец, частое чередование электронных и позитронных спусков способствует подавлению эффектов, связанных с медленным дрейфом во времени эффективности регистрации.

Различные вклады в систематическую погрешность измерения перечислены в Таблице 5.3 для четырех кинематических интервалов, которые были выбраны нами для представления результатов. Интервалы №1 и №2 соответствуют рассеянию лептонов в диапазоны LA и MA в первом сеансе, а интервалы №3 и №4 представляют диапазон LA сеанса II, разбитый на две части.

Первые три вклада, представленные в Таблице 5.3, возникают из-за некоторого различия в экспериментальных условиях при наборе данных с электронными и позитронными пучками. Вклад (1) очень мал благодаря тому, что энергия пучка прецизионно контролировалась в режиме реального времени с помощью системы обратного комптоновского рассеяния, описанной в разделе 5.2.2. Второй вклад существенно больше и обусловлен различием в положениях пучков. Третий эффект, влияние которого сильно подавлено благодаря

Таблица 5.3. Различные эффекты, дающие вклад в систематическую погрешность измерения величины  $R_{2\gamma}$  (в %).

	Сеанс I		Сеанс II	
	№1	№2	№3	№4
(1) Неравные энергии пучков	0.024	0.015	0.014	0.014
(2) Неравные положения пучков	0.162	0.172	0.047	0.017
(3) Неравные эффективности регистрации	0.055	0.055	0.031	0.031
(4) Кинематические ограничения	0.207	0.019	0.022	0.022
(5) Вычитание фона	0.140	0.050	0.070	0.050
(6) Радиационные поправки	0.090	0.050	0.130	0.040
Суммарная систематическая погрешность, $\Delta R_{2\gamma}^{\text{syst}}$	0.32	0.20	0.16	0.08

чередованию электронных и позитронных спусков, вызван, главным образом, дрейфом во времени эффективности трековой системы. Чтобы оценить эту эффективность, мы отбирали события с совпадением лептона и протона (игнорируя на этом этапе данные дрейфовых и пропорциональных камер), а затем смотрели, для какой доли таких событий можно было восстановить треки при использовании всей доступной информации.

Вклады (4), (5) и (6) вносятся при отборе событий и их последующем анализе. Первый из них был оценен по тому, как меняются результаты измерения при варьировании кинематических ограничений (после учета соответствующего эффекта статистических флуктуаций). Вклад (5) возникает из-за вычитания фона. Наконец, точность учета радиационных поправок ограничена, главным образом, их модельной зависимостью от используемой параметризации для формфакторов протона и тем, что мы рассматриваем тормозное излучение только первого порядка.

Все перечисленные выше факторы затрагивают также и процедуру нормирования светимости. Отметим, что ошибки, вызываемые эффектами (1), (2) и (3) в точках LNP, коррелируют с соответствующими ошибками для точек №1–4. По этой причине мы включили все погрешности для точек LNP в систематические погрешности, приведенные в Таблице 5.3. Аналогично, статистические погрешности, связанные с процедурой нормирования светимости,

учтены в статистических погрешностях для величины  $R_{2\gamma}$  в точках №1–4.

## 5.4. Результаты эксперимента и обсуждение

Основные численные характеристики и результаты эксперимента на накопителе ВЭПП-3 приведены в Таблице 5.4. В частности, там перечислены следующие кинематические параметры: энергия пучка  $E_1$ ; минимальное  $\varepsilon_{\min}$ , максимальное  $\varepsilon_{\max}$  и среднее  $\langle\varepsilon\rangle$  (соответствующее «центру тяжести») значения величины  $\varepsilon$  (1.31) для каждого из бинов; среднее значение  $\langle Q^2\rangle$  квадрата переданного импульса; и среднее значение  $\langle\theta_3\rangle$  угла рассеяния лептона. Приведенные далее параметры  $\Delta\phi$ ,  $\Delta\theta$  и  $\Delta E/E_\theta$  характеризуют использованные нами кинематические ограничения (см. раздел 5.3.2). Величины  $N_{\text{sim}}^-/N_{\text{sim}}^0$  и  $N_{\text{sim}}^+/N_{\text{sim}}^0$  выражают радиационные поправки, которые мы применили к «сырому» отношению сечений  $R$  (как описано в разделах 4.5 и 5.3.2). Наконец, в последних трех строках Таблицы 5.4 представлены искомое отношение  $R_{2\gamma}$  и соответствующие статистическая  $\Delta R_{2\gamma}^{\text{stat}}$  и систематическая  $\Delta R_{2\gamma}^{\text{sys}}$  погрешности. Отметим, что указанные значения  $R_{2\gamma}$  получены в предположении, что  $R_{2\gamma}^{\text{LNP}} = 1$  в точках LNP. Альтернативный способ нормирования светимости обсуждается ниже.

На Рисунке 5.9 наши результаты сравниваются с данными, полученными в 1960-х годах [115–117, 119], а также с несколькими теоретическими и феноменологическими предсказаниями [92, 100, 110, 111, 136, 137]. Показаны только те старые данные, которые примерно соответствуют нашей кинематике, определяемой фиксированной энергией пучка и значением  $\varepsilon$  или  $Q^2$ . Как видно из рисунка, наши результаты согласуются с данными прошлых измерений, но существенно превосходят их по точности. Далее, можно сделать вывод о том, что адронные вычисления [92, 100] хорошо соответствуют данным сеанса I, но дают завышенные значения  $R_{2\gamma}$  для сеанса II. В то же время феноменологическая модель [111] предсказывает несколько заниженные значения  $R_{2\gamma}$  во всех

четырёх точках. Заметим, что мы применили к этой модели поправку (2.12) для того, чтобы перейти от исходного описания мягкой части двухфотонного обмена по Максимуму и Тьёну к используемому нами соглашению Мо–Тсяя. Следует подчеркнуть, что модели [92, 100, 111] разрешают противоречие для формфакторов протона при больших  $Q^2$  и полностью сводят его к эффекту жесткого двухфотонного обмена. Три других предсказания [110, 136, 137] плохо согласуются с новыми данными.

Нормирование светимости может быть произведено иначе, в соответствии с проверяемой моделью. В этом случае каждое из полученных нами четырех значений  $R_{2\gamma}$  должно быть домножено на соответствующую величину  $R_{2\gamma}^{\text{LNP}}$ , предсказываемую моделью. Это иллюстрируется Таблицей 5.5, в которой указаны нормировочные коэффициенты — значения  $R_{2\gamma}^{\text{LNP}}$  — для каждой из теорий [92, 100, 110, 111, 136, 137]. Там же приведены значения  $\chi^2$  (деленные на число степеней свободы,  $n_{\text{d.f.}} = 4$ ), количественно характеризующие степень согласия между предсказаниями и нашими данными. Вторая и третья колонки таблицы соответствуют нормировке светимости на единицу ( $R_{2\gamma}^{\text{LNP}} = 1$ ), а

Таблица 5.4. Кинематические параметры и результаты эксперимента.

	Сеанс I			Сеанс II		
	№1	№2	LNP	№3	№4	LNP
$E_1$ (ГэВ)	1.594	1.594	1.594	0.998	0.998	0.998
$\varepsilon_{\text{min}}$	0.29	0.89	0.96	0.18	0.33	0.88
$\varepsilon_{\text{max}}$	0.58	0.97	0.99	0.33	0.51	0.97
$\langle \varepsilon \rangle$	0.452	0.932	0.980	0.272	0.404	0.931
$\langle Q^2 \rangle$ (ГэВ <sup>2</sup> )	1.51	0.298	0.097	0.976	0.830	0.128
$\langle \theta_3 \rangle$	66.2°	20.8°	11.4°	91.3°	75.4°	21.4°
$\Delta\phi, \Delta\theta$	3.0°	5.0°	...	3.0°	3.0°	...
$\Delta E/E_\theta$	0.25	0.45	...	0.29	0.29	...
$N_{\text{sim}}^-/N_{\text{sim}}^0$	0.9981	1.0563	...	1.0117	0.9898	...
$N_{\text{sim}}^+/N_{\text{sim}}^0$	1.0347	1.0600	...	1.0501	1.0206	...
$R$	1.0705	1.0037	...	1.0555	1.0447	...
$R_{2\gamma}$	1.0332	1.0002	1	1.0174	1.0133	1
$\Delta R_{2\gamma}^{\text{stat}}$	$\pm 0.0112$	$\pm 0.0012$	...	$\pm 0.0049$	$\pm 0.0037$	...
$\Delta R_{2\gamma}^{\text{syst}}$	$\pm 0.0032$	$\pm 0.0020$	...	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0008$	...

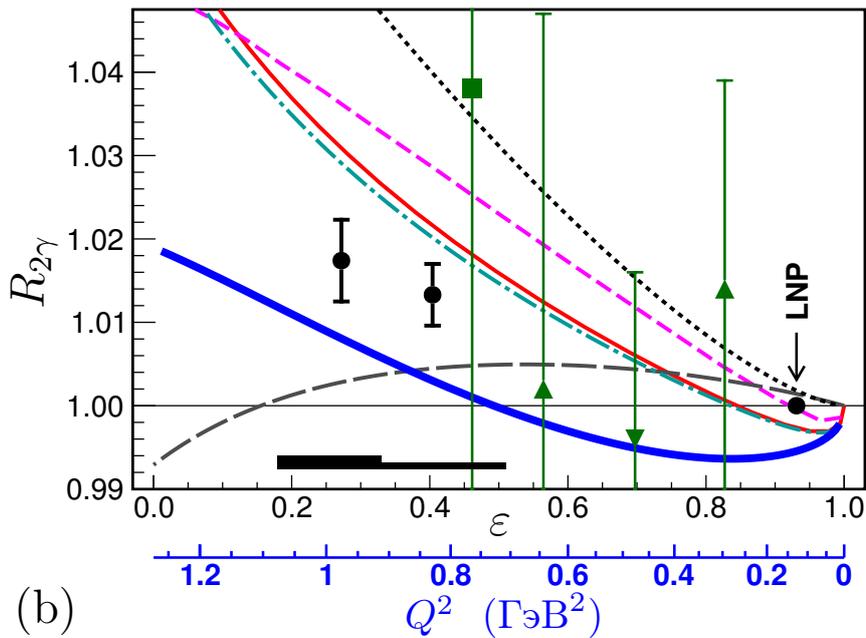
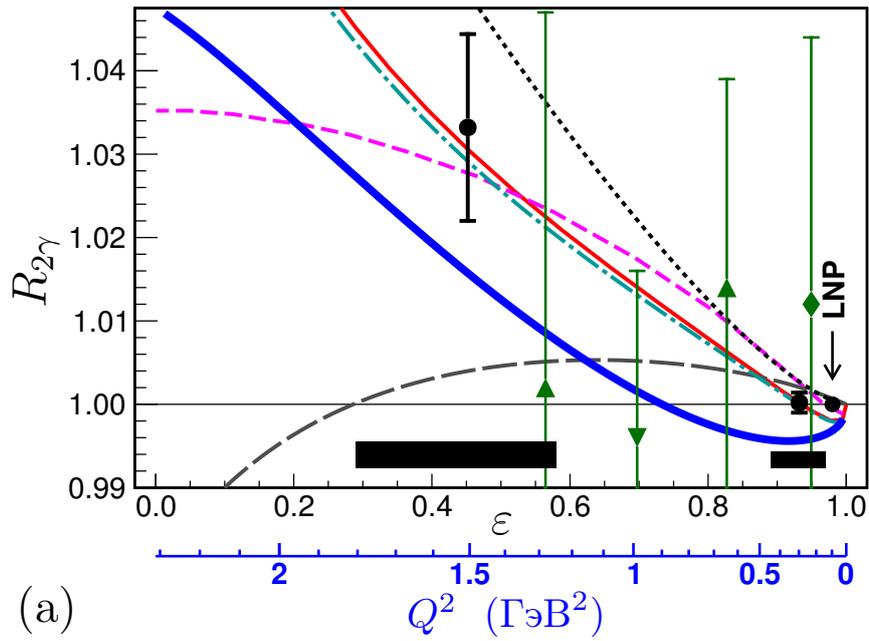


Рис. 5.9. Экспериментальные данные (маркеры) и некоторые предсказания (кривые) для отношения  $R_{2\gamma}$  в зависимости от  $\epsilon$  или  $Q^2$  [15]. Рисунки (a) и (b) относятся, соответственно, к сеансам I и II эксперимента на ВЭПП-3. Маркерами представлены результаты следующих измерений:  $\bullet$  обсуждаемый эксперимент [15],  $\blacksquare$  Броуман и др. (1965) [115],  $\blacktriangledown$  Андерсон и др. (1966) [116],  $\blacklozenge$  Бартель и др. (1967) [117] и  $\blacktriangle$  Андерсон и др. (1968) [119]. Для четырех точек ВЭПП-3 вертикальными «усами» показаны статистические погрешности, а черными полосами — систематические погрешности и размеры бинов. Кривые соответствуют следующим предсказаниям: Борисюк и Кобушкин [100] (бирюзовая штрихпунктирная линия), Бланден и др. [92] (красная тонкая линия), Бернауэр и др. [111] (синяя толстая линия), Томази-Густафссон и др. [136] (серые длинные штрихи), Аррингтон и Сик [137] (пурпурные короткие штрихи) и Каттан и др. [110] (черные точки).

Таблица 5.5. Сравнение результатов измерения с некоторыми предсказаниями.

	$R_{2\gamma}^{\text{LNP}}$	$\left(\frac{\chi^2}{n_{\text{d.f.}}}\right)$	$R_{2\gamma}^{\text{LNP}}$		$\left(\frac{\chi^2}{n_{\text{d.f.}}}\right)$
			Сеанс I	Сеанс II	
Борисюк и Кобушкин [100]	1	2.14	0.9979	0.9972	3.80
Бланден и др. [92]	1	2.94	0.9980	0.9974	4.75
Бернауэр и др. [111]	1	4.19	0.9969	0.9946	1.00
Томази-Густафссон и др. [136]	1	5.09	1.0007	1.0014	5.97
Аррингтон и Сик [137]	1	7.72	0.9995	0.9996	8.18
Каттан и др. [110]	1	25.0	1.0005	1.0018	22.0
Отсутствие эффекта ( $R_{2\gamma} \equiv 1$ )	1	7.97	1	1	7.97

следующие три — нормировке в соответствии с проверяемой моделью. Отметим, что феноменологическая модель [111] демонстрирует очень хорошее согласие с результатами эксперимента, нормированными в соответствии с предсказываемыми ею значениями  $R_{2\gamma}^{\text{LNP}}$ . Последняя строка Таблицы 5.5 представляет случай нулевого неучтенного вклада двухфотонного обмена (так, что  $R_{2\gamma} \equiv 1$ ). Наши данные позволяют отвергнуть этот вариант (поскольку значение  $\chi^2/n_{\text{d.f.}} = 31.9/4$  соответствует вероятности  $p = 2 \cdot 10^{-6}$ ). Таким образом, можно говорить о первом прямом наблюдении эффекта жесткого двухфотонного обмена в упругом  $e^\pm p$ -рассеянии.

Вывод о том, что предсказания [100], [92] и [111] представляются наиболее правдоподобными, не зависит от используемого способа нормирования светимости. Тем не менее, было бы очень полезно аккуратно нормировать наши данные. Это может быть сделано в будущем, когда станут доступны новые прецизионные измерения или надежные расчеты эффекта жесткого двухфотонного обмена при  $Q^2 \approx 0.1 \text{ ГэВ}^2$ .

На Рисунке 5.10 приведено сравнение результатов трех современных экспериментов по измерению вклада жесткого двухфотонного обмена в сечения упругого  $e^\pm p$ -рассеяния. Показана введенная в разделе 5.1 величина  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$  в зависимости от  $Q^2$ . Данные коллаборации CLAS взяты из работы [81] (бины 10–19 в Таблице III), а эксперимента OLYMPUS — из статьи [83] (колонка (b) в Таблице II). Вертикальные «усы» соответствуют комбинированным статисти-

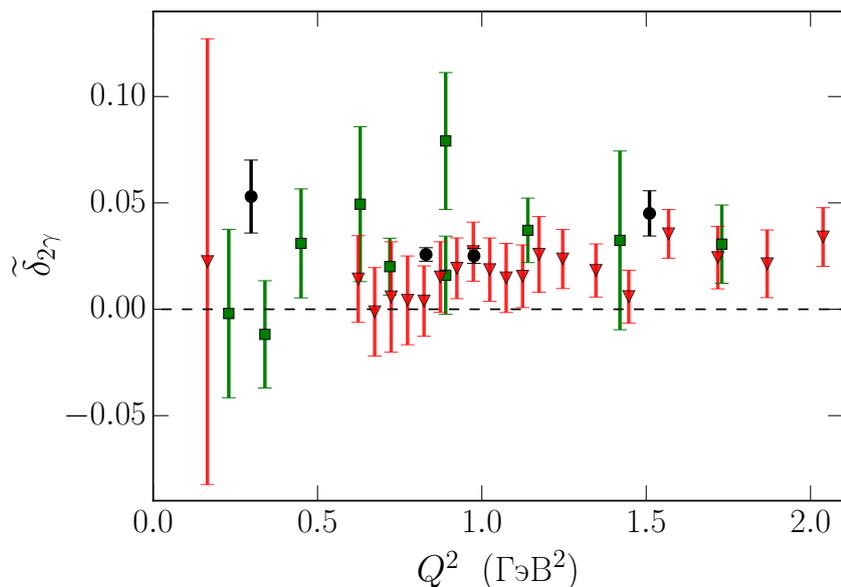


Рис. 5.10. Сравнение результатов трех современных экспериментов: ● ВЭПП-3 [15], ▼ CLAS [80, 81] и ■ OLYMPUS [83]. Показана величина  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$  (5.6) в зависимости от  $Q^2$ .

ческим и систематическим погрешностям (без учета коррелированных систематических погрешностей в случае OLYMPUS). Видно, что данные всех трех измерений хорошо согласуются друг с другом, при этом результаты сеанса II эксперимента на ВЭПП-3 имеют рекордную точность. В целом, можно сделать вывод о том, что величина  $\tilde{\delta}_{2\gamma}$  отлична от нуля и положительна.

Подводя итог, отметим, что на накопителе ВЭПП-3 проведено наиболее точное на сегодняшний день сравнение дифференциальных сечений упругого  $e^+p$ - и  $e^-p$ -рассеяния в диапазоне по  $Q^2$  от 0.3 до 1.5 ГэВ<sup>2</sup>. Полученные данные позволяют говорить о надежном прямом наблюдении эффекта жесткого двухфотонного обмена. Они находятся в удовлетворительном согласии с несколькими теоретическими моделями этого эффекта, объясняющими противоречие для формфакторов протона при высоких значениях  $Q^2$ . Таким образом, наши результаты свидетельствуют в пользу того, что противоречие обусловлено неучтенным вкладом жесткого двухфотонного обмена в сечение упругого электрон-протонного рассеяния. Тем не менее, следует подчеркнуть, что для полного разрешения проблемы потребуются новые экспериментальные данные, полученные при  $Q^2 > 3$  ГэВ<sup>2</sup>.

## Заключение

В ходе выполнения работы были получены следующие результаты:

1. Впервые осуществлено прямое наблюдение эффекта жесткого двухфотонного обмена в упругом электрон-протонном рассеянии [15]. Результаты измерения на накопителе ВЭПП-3 находятся в удовлетворительном согласии с несколькими теоретическими и феноменологическими моделями, которые объясняют противоречие в данных по формфакторам протона неучтенным вкладом жесткого двухфотонного обмена. Таким образом, полученные результаты свидетельствуют в пользу этого объяснения.
2. В эксперименте на накопителе ВЭПП-3 проведено прецизионное (с относительной точностью  $\lesssim 1\%$ ) сравнение дифференциальных сечений упругого рассеяния электронов и позитронов на протонах в диапазоне по  $Q^2$  от 0.3 до 1.5 ГэВ<sup>2</sup> [15]. Полученные результаты превосходят по точности все имеющиеся мировые данные, включая те, которые были представлены недавно коллаборациями CLAS [80, 81] и OLYMPUS [83].
3. Разработана процедура учета радиационных поправок первого порядка по  $\alpha$  в экспериментах с регистрацией электрона/позитрона и протона на совпадении [13]. При этом для учета внутреннего тормозного излучения не используется ни мягкофотонное, ни ультрарелятивистское приближения.
4. Разработан новый генератор событий упругого рассеяния заряженных лептонов ( $e^\pm$  или  $\mu^\pm$ ) на протонах, в котором учтены радиационные поправки первого порядка по  $\alpha$  [13, 77]. Генератор ESEPP использовался в эксперименте на накопителе ВЭПП-3, а также может оказаться полезным для целого ряда новых экспериментов по измерению электромагнитных формфакторов и зарядового радиуса протона.

5. Переобработаны данные экспериментов E140 [11] и NE11 [12], выполненных в SLAC и посвященных измерению формфакторов протона  $G_E(Q^2)$  и  $G_M(Q^2)$  методом Розенблюта. При этом проведена тщательная ревизия всех радиационных поправок (как внутренних, так и внешних) и заново извлечены  $G_E$  и  $G_M$  для  $Q^2$  в диапазоне от 1 до 8.83 ГэВ<sup>2</sup> [16, 73]. Наши результаты согласуются лучше оригинальных с данными поляризационных измерений отношения  $G_E/G_M$ , хотя при  $Q^2 \gtrsim 3$  ГэВ<sup>2</sup> сохраняется существенное расхождение.

\* \* \*

В заключение я хочу выразить глубокую признательность моим наставникам, Игорю Анатольевичу Рачеку и Дмитрию Митрофановичу Николенко, за их идеи, знания, опыт и энтузиазм, которыми они всегда щедро делятся. Необходимо отметить, что описанный в Главе 5 эксперимент был бы невозможен без участия коллег из Института ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН (Л. М. Барков, Р. Е. Герасимов, Р. А. Головин, В. Ф. Дмитриев, В. Н. Жилич, С. А. Зеваков, В. В. Каминский, Б. А. Лазаренко, С. И. Мишнев, Н. Ю. Мучной, В. В. Нейфельд, Д. М. Николенко, И. А. Рачек, А. М. Руднев, Р. Ш. Садыков, Д. К. Топорков, Ю. В. Шестаков и др.), Томского политехнического университета (В. В. Гаузштейн, А. В. Осипов и В. Н. Стибунов), Аргоннской национальной лаборатории в США (J. Arrington и R. J. Holt) и исследовательского центра Nikhef в Нидерландах (H. de Vries). Я очень благодарен сотрудникам Теоретического отдела ИЯФ СО РАН Р. Е. Герасимову, А. В. Грабовскому, В. Ф. Дмитриеву, А. И. Мильштейну, В. С. Фадину и А. Л. Фельдману за оказанную помощь и многочисленные ценные консультации. Я также признателен зарубежным коллегам, которые проявляли неподдельный интерес к работе и участвовали в полезных обсуждениях: А. Gasparian, R. L. Russell и E. Tomasi-Gustafsson. Наконец, особой благодарности заслуживают мои родители, без поддержки которых я не смог бы стать физиком.

## Список литературы

1. Estermann I., Frisch R., Stern O. Magnetic moment of the proton // Nature. 1933. Vol. 132. P. 169–170.
2. Hofstadter R. Electron scattering and nuclear structure // Rev. Mod. Phys. 1956. Vol. 28. P. 214–254.
3. Akhiezer A. I., Rekalov M. P. Polarization phenomena in electron scattering by protons in the high energy region // Sov. Phys. Dokl. 1968. Vol. 13. P. 572.
4. Ахиезер А. И., Рекало М. П. Поляризация явления при рассеянии лептонов адронами // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. С. 662–688. URL: [http://www1.jinr.ru/Archive/PePan/1973-v4/v-4-3/v4p3pdf\\_obzory/v4p3\\_2.pdf](http://www1.jinr.ru/Archive/PePan/1973-v4/v-4-3/v4p3pdf_obzory/v4p3_2.pdf).
5. Jones M. K., Aniol K. A., Baker F. T. et al.  $G_{E_p}/G_{M_p}$  ratio by polarization transfer in  $\vec{e}p \rightarrow e\vec{p}$  // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 1398–1402.
6. Punjabi V., Perdrisat C. F., Aniol K. A. et al. Proton elastic form factor ratios to  $Q^2 = 3.5 \text{ GeV}^2$  by polarization transfer // Phys. Rev. C. 2005. Vol. 71. P. 055202.
7. Gayou O., Aniol K. A., Averett T. et al. Measurement of  $G_{E_p}/G_{M_p}$  in  $\vec{e}p \rightarrow e\vec{p}$  to  $Q^2 = 5.6 \text{ GeV}^2$  // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. P. 092301.
8. Puckett A. J. R., Brash E. J., Gayou O. et al. Final analysis of proton form factor ratio data at  $Q^2 = 4.0, 4.8, \text{ and } 5.6 \text{ GeV}^2$  // Phys. Rev. C. 2012. Vol. 85. P. 045203.
9. Puckett A. J. R., Brash E. J., Jones M. K. et al. Recoil polarization measurements of the proton electromagnetic form factor ratio to  $Q^2 = 8.5 \text{ GeV}^2$  // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 104. P. 242301.
10. Arrington J., Dmitriev V. F., Holt R. J. et al. Two-photon exchange and elastic scattering of electrons/positrons on the proton (Proposal for an experiment at VEPP-3) // arXiv:nucl-ex/0408020. 2004. URL: <https://arxiv.org/abs/nucl-ex/0408020>.
11. Walker R. C., Filippone B. W., Jourdan J. et al. Measurements of the proton

- elastic form factors for  $1 \leq Q^2 \leq 3$  (GeV/c)<sup>2</sup> at SLAC // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 49. P. 5671–5689.
12. Andivahis L., Bosted P. E., Lung A. et al. Measurements of the electric and magnetic form factors of the proton from  $Q^2 = 1.75$  to  $8.83$  (GeV/c)<sup>2</sup> // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 50. P. 5491–5517.
  13. Gramolin A. V., Fadin V. S., Feldman A. L. et al. A new event generator for the elastic scattering of charged leptons on protons // J. Phys. G. 2014. Vol. 41. P. 115001.
  14. Kaminskiy V. V., Gramolin A. V., Mishnev S. I. et al. Beam energy measurements for an experiment on elastic  $e^\pm p$  scattering at the VEPP-3 storage ring // J. Instrum. 2014. Vol. 9. P. T06006.
  15. Rachek I. A., Arrington J., Dmitriev V. F., . . . , Gramolin A. V. et al. Measurement of the two-photon exchange contribution to the elastic  $e^\pm p$  scattering cross sections at the VEPP-3 storage ring // Phys. Rev. Lett. 2015. Vol. 114. P. 062005.
  16. Gramolin A. V., Nikolenko D. M. Reanalysis of Rosenbluth measurements of the proton form factors // Phys. Rev. C. 2016. Vol. 93. P. 055201.
  17. Николенко Д. М., Аренховель Х., Аррингтон Дж., . . . , Грамолин А. В. и др. Эксперименты с внутренними мишенями на накопителе электронов ВЭПП-3 // Ядерная физика. 2010. Т. 73. С. 1365–1381.
  18. Gramolin A. V., Arrington J., Barkov L. M. et al. Measurement of the two-photon exchange contribution in elastic  $ep$  scattering at VEPP-3 // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2012. Vol. 225–227. P. 216–220.
  19. Nikolenko D. M., Arrington J., Barkov L. M., . . . , Gramolin A. V. et al. Two-photon exchange contribution in elastic electron-proton scattering, experiment at the VEPP-3 storage ring // EPJ Web Conf. 2014. Vol. 66. P. 06002.
  20. Николенко Д. М., Аррингтон Дж., Барков Л. М., . . . , Грамолин А. В. и др. Формфакторы протона и двухфотонный обмен в упругом  $ep$ -рассеянии // Ядерная физика. 2015. Т. 78. С. 423–433.

21. Rachek I. A., Arrington J., Dmitriev V. F., ..., Gramolin A. V. et al. Two-photon exchange contribution to elastic electron-proton scattering: measurements at the VEPP-3 storage ring // *Phys. Scripta*. 2015. Vol. T166. P. 014017.
22. Хелзен Ф., Мартин А. Кварки и лептоны: Введение в физику частиц. Москва: «Мир», 1987.
23. Пескин М. Е., Шрёдер Д. В. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
24. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Москва: «ФИЗМАТЛИТ», 2006.
25. Thomas A. W., Weise W. The structure of the nucleon. Berlin: WILEY-VCH, 2001.
26. Sachs R. G. High-energy behavior of nucleon electromagnetic form factors // *Phys. Rev.* 1962. Vol. 126. P. 2256–2260.
27. Rosenbluth M. N. High energy elastic scattering of electrons on protons // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 79. P. 615–619.
28. Preedom B. M., Tegen R. Nucleon electromagnetic form factors from scattering of polarized muons or electrons // *Phys. Rev. C*. 1987. Vol. 36. P. 2466–2472.
29. Hyde-Wright C. E., de Jager K. Electromagnetic form factors of the nucleon and Compton scattering // *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2004. Vol. 54. P. 217–267.
30. Arrington J., Roberts C. D., Zanoliti J. M. Nucleon electromagnetic form factors // *J. Phys. G*. 2007. Vol. 34. P. S23–S51.
31. Perdrisat C. F., Punjabi V., Vanderhaeghen M. Nucleon electromagnetic form factors // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 2007. Vol. 59. P. 694–764.
32. Pacetti S., Ferroli R. B., Tomasi-Gustafsson E. Proton electromagnetic form factors: Basic notions, present achievements and future perspectives // *Phys. Rep.* 2015. Vol. 550–551. P. 1–103.

33. Punjabi V., Perdrisat C. F., Jones M. K. et al. The structure of the nucleon: Elastic electromagnetic form factors // *Eur. Phys. J. A.* 2015. Vol. 51. P. 79.
34. Janssens T., Hofstadter R., Hughes E. B., Yearian M. R. Proton form factors from elastic electron-proton scattering // *Phys. Rev.* 1966. Vol. 142. P. 922–931.
35. Berger C., Burkert V., Knop G. et al. Electromagnetic form factors of the proton at squared four-momentum transfers between 10 and 50 fm<sup>-2</sup> // *Phys. Lett. B.* 1971. Vol. 35. P. 87–89.
36. Bartel W., Büsser F.-W., Dix W.-R. et al. Measurement of proton and neutron electromagnetic form factors at squared four-momentum transfers up to 3 (GeV/c)<sup>2</sup> // *Nucl. Phys. B.* 1973. Vol. 58. P. 429–475.
37. Kirk P. N., Breidenbach M., Friedman J. I. et al. Elastic electron-proton scattering at large four-momentum transfer // *Phys. Rev. D.* 1973. Vol. 8. P. 63–91.
38. Sill A. F., Arnold R. G., Bosted P. E. et al. Measurements of elastic electron-proton scattering at large momentum transfer // *Phys. Rev. D.* 1993. Vol. 48. P. 29–55.
39. Christy M. E., Ahmidouch A., Armstrong C. S. et al. Measurements of electron-proton elastic cross sections for  $0.4 < Q^2 < 5.5$  (GeV/c)<sup>2</sup> // *Phys. Rev. C.* 2004. Vol. 70. P. 015206.
40. Qattan I. A., Arrington J., Segel R. E. et al. Precision Rosenbluth measurement of the proton elastic form factors // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 142301.
41. Jones M. K., Aghalaryan A., Ahmidouch A. et al. Proton  $G_E/G_M$  from beam-target asymmetry // *Phys. Rev. C.* 2006. Vol. 74. P. 035201.
42. Tvaskis V., Arrington J., Christy M. E. et al. Experimental constraints on nonlinearities induced by two-photon effects in elastic and inelastic Rosenbluth separations // *Phys. Rev. C.* 2006. Vol. 73. P. 025206.
43. Meziane M., Brash E. J., Gilman R. et al. Search for effects beyond the Born

- approximation in polarization transfer observables in  $\vec{e}p$  elastic scattering // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 132501.
44. Kelly J. J. Simple parametrization of nucleon form factors // Phys. Rev. C. 2004. Vol. 70. P. 068202.
  45. Brodsky S. J., Farrar G. R. Scaling laws for large-momentum-transfer processes // Phys. Rev. D. 1975. Vol. 11. P. 1309–1330.
  46. Schwinger J. Quantum electrodynamics. III. The electromagnetic properties of the electron—radiative corrections to scattering // Phys. Rev. 1949. Vol. 76. P. 790–817.
  47. Tsai Y.-S. Radiative corrections to electron-proton scattering // Phys. Rev. 1961. Vol. 122. P. 1898–1907.
  48. Meister N., Yennie D. R. Radiative corrections to high-energy scattering processes // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 1210–1229.
  49. Mo L. W., Tsai Y. S. Radiative corrections to elastic and inelastic  $ep$  and  $\mu p$  scattering // Rev. Mod. Phys. 1969. Vol. 41. P. 205–235.
  50. Maximon L. C., Tjon J. A. Radiative corrections to electron-proton scattering // Phys. Rev. C. 2000. Vol. 62. P. 054320.
  51. Vanderhaeghen M., Friedrich J. M., Lhuillier D. et al. QED radiative corrections to virtual Compton scattering // Phys. Rev. C. 2000. Vol. 62. P. 025501.
  52. Ent R., Filippone B. W., Makins N. C. R. et al. Radiative corrections for  $(e, e'p)$  reactions at GeV energies // Phys. Rev. C. 2001. Vol. 64. P. 054610.
  53. Afanasev A., Akushevich I., Merenkov N. Model independent radiative corrections in processes of polarized electron-nucleon elastic scattering // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 64. P. 113009.
  54. Bystritskiy Y. M., Kuraev E. A., Tomasi-Gustafsson E. Structure function method applied to polarized and unpolarized electron-proton scattering: A solution of the  $G_E(p)/G_M(p)$  discrepancy // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 75. P. 015207.

55. Kuraev E. A., Bystritskiy Y. M., Ahmadov A. I., Tomasi-Gustafsson E. Radiative corrections for electron-proton elastic scattering taking into account high orders and hard-photon emission // *Phys. Rev. C*. 2014. Vol. 89. P. 065207.
56. Akushevich I., Gao H., Ilyichev A., Meziane M. Radiative corrections beyond the ultra relativistic limit in unpolarized  $ep$  elastic and Møller scatterings for the PRad Experiment at Jefferson Laboratory // *Eur. Phys. J. A*. 2015. Vol. 51. P. 1.
57. Arbuzov A. B., Kopylova T. V. On higher order radiative corrections to elastic electron-proton scattering // *Eur. Phys. J. C*. 2015. Vol. 75. P. 603.
58. Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H. The infrared divergence phenomena and high-energy processes // *Ann. Phys. (N.Y.)*. 1961. Vol. 13. P. 379–452.
59. Герасимов Р. Е., Фадин В. С. Анализ приближений, используемых при вычислении радиационных поправок к сечению электрон-протонного рассеяния // *Ядерная физика*. 2015. Т. 78. С. 73–96.
60. URL: <http://cmd.inp.nsk.su/~ignatov/vpl/>.
61. Actis S., Arbuzov A., Balossini G. et al. Quest for precision in hadronic cross sections at low energy: Monte Carlo tools vs. experimental data // *Eur. Phys. J. C*. 2010. Vol. 66. P. 585–686.
62. Tsai Y.-S. Radiative corrections to electron scatterings // Technical Report SLAC-PUB-848. 1971. URL: <http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-pub-0848.pdf>.
63. Tsai Y.-S. Pair production and bremsstrahlung of charged leptons // *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 815–851.
64. Patrignani C., Agashe K., Aielli G. et al. Review of particle physics // *Chin. Phys. C*. 2016. Vol. 40. P. 100001.
65. Landau L. On the energy loss of fast particles by ionization // *J. Phys. (USSR)*. 1944. Vol. 8. P. 201–205.
66. Borisjuk D., Kobushkin A. Radiative corrections to polarization observables

- in electron-proton scattering // Phys. Rev. C. 2014. Vol. 90. P. 025209.
67. Tomasi-Gustafsson E. On radiative corrections for unpolarized electron-proton elastic scattering // Phys. Part. Nucl. Lett. 2007. Vol. 4. P. 281–288.
68. Кураев Э. А., Фадин В. С. О радиационных поправках к сечению однофотонной аннигиляции  $e^+e^-$ -пары большой энергии // Ядерная физика. 1985. Т. 41. С. 733–742.
69. Кураев Э. А., Меренков Н. П., Фадин В. С. Вычисление радиационных поправок к сечению рассеяния электронов на ядрах методом структурных функций // Ядерная физика. 1988. Т. 47. С. 1593–1601.
70. Walker R. C. D. A measurement of the proton elastic form factors for  $1 \leq Q^2 \leq 3$  (GeV/c)<sup>2</sup>: Ph. D. thesis / California Institute of Technology. 1989.
71. Clogher L. A precise measurement of the proton elastic form factors for  $1.75 \leq Q^2 \leq 8.83$  (GeV/c)<sup>2</sup>: Ph. D. thesis / The American University. 1993.
72. Arrington J. How well do we know the electromagnetic form factors of the proton? // Phys. Rev. C. 2003. Vol. 68. P. 034325.
73. URL: <https://github.com/gramolin/rosenbluth/>.
74. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Москва: «Мир», 1984.
75. Tiemeijer P. C., Tjon J. A. Electromagnetic form factors for an off-shell nucleon in a vector meson dominance model // Phys. Rev. C. 1990. Vol. 42. P. 599–609.
76. URL: <https://feynncalc.github.io>.
77. URL: <https://github.com/gramolin/esepp/>.
78. Borie E. Muon-proton scattering // arXiv:1207.6651 [physics.gen-ph]. 2012. URL: <https://arxiv.org/abs/1207.6651>.
79. Moteabbed M., Niroula M., Raue B. A. et al. Demonstration of a novel technique to measure two-photon exchange effects in elastic  $e^\pm p$  scattering // Phys. Rev. C. 2013. Vol. 88. P. 025210.
80. Adikaram D., Rimal D., Weinstein L. B. et al. Towards a resolution of the proton form factor problem: New electron and positron scattering data //

- Phys. Rev. Lett. 2015. Vol. 114. P. 062003.
81. Rimal D., Adikaram D., Raue B. A. et al. Measurement of two-photon exchange effect by comparing elastic  $e^\pm p$  cross sections // arXiv:1603.00315 [nucl-ex]. 2016. URL: <https://arxiv.org/abs/1603.00315>.
  82. Milner R., Hasell D. K., Kohl M. et al. The OLYMPUS experiment // Nucl. Instrum. Methods A. 2014. Vol. 741. P. 1–17.
  83. Henderson B. S., Ice L. D., Khanefit D. et al. Hard two-photon contribution to elastic lepton-proton scattering determined by the OLYMPUS experiment // Phys. Rev. Lett. 2017. Vol. 118. P. 092501.
  84. Agostinelli S., Allison J., Amako K. et al. Geant4—a simulation toolkit // Nucl. Instrum. Methods A. 2003. Vol. 506. P. 250–303.
  85. Gasparian A. The PRad experiment and the proton radius puzzle // EPJ Web Conf. 2014. Vol. 73. P. 07006.
  86. Gilman R., Downie E. J., Ron G. et al. Studying the proton “radius” puzzle with  $\mu p$  elastic scattering // arXiv:1303.2160 [nucl-ex]. 2013. URL: <https://arxiv.org/abs/1303.2160>.
  87. Puckett A. J. R. Final results of the GEp-III experiment and the status of the proton form factors // arXiv:1008.0855 [nucl-ex]. 2010. URL: <https://arxiv.org/abs/1008.0855>.
  88. Jadach S. Foam: A general-purpose cellular Monte Carlo event generator // Comput. Phys. Commun. 2003. Vol. 152. P. 55–100.
  89. Jadach S., Sawicki P. mFOAM-1.02: A compact version of the cellular event generator FOAM // Comput. Phys. Commun. 2007. Vol. 177. P. 441–458.
  90. URL: <https://root.cern.ch>.
  91. Blunden P. G., Melnitchouk W., Tjon J. A. Two-photon exchange and elastic electron-proton scattering // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. P. 142304.
  92. Blunden P. G., Melnitchouk W., Tjon J. A. Two-photon exchange in elastic electron-nucleon scattering // Phys. Rev. C. 2005. Vol. 72. P. 034612.
  93. Borisyuk D., Kobushkin A. Box diagram in the elastic electron-proton

- scattering // Phys. Rev. C. 2006. Vol. 74. P. 065203.
94. Kondratyuk S., Blunden P. G., Melnitchouk W., Tjon J. A.  $\Delta$  resonance contribution to two-photon exchange in electron-proton scattering // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 172503.
  95. Kondratyuk S., Blunden P. G. Contribution of spin 1/2 and 3/2 resonances to two-photon exchange effects in elastic electron-proton scattering // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 75. P. 038201.
  96. Zhou H.-Q., Yang S. N.  $\Delta(1232)$  resonance contribution to two-photon exchange in electron-proton scattering revisited // Eur. Phys. J. A. 2015. Vol. 51. P. 105.
  97. Chen Y.-C., Afanasev A., Brodsky S. J. et al. Partonic calculation of the two-photon exchange contribution to elastic electron-proton scattering at large momentum transfer // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. P. 122301.
  98. Afanasev A. V., Brodsky S. J., Carlson C. E. et al. Two-photon exchange contribution to elastic electron-nucleon scattering at large momentum transfer // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 013008.
  99. Gorchtein M. Dispersive contributions to  $e^+p/e^-p$  cross section ratio in forward regime // Phys. Lett. B. 2007. Vol. 644. P. 322–330.
  100. Borisyuk D., Kobushkin A. Two-photon exchange in a dispersion approach // Phys. Rev. C. 2008. Vol. 78. P. 025208.
  101. Tomalak O., Vanderhaeghen M. Subtracted dispersion relation formalism for the two-photon exchange correction to elastic electron-proton scattering: Comparison with data // Eur. Phys. J. A. 2015. Vol. 51. P. 24.
  102. Borisyuk D., Kobushkin A. Perturbative QCD predictions for two-photon exchange // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 79. P. 034001.
  103. Kivel N., Vanderhaeghen M. Two-photon exchange in elastic electron-proton scattering: A QCD factorization approach // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 103. P. 092004.
  104. Arrington J. Extraction of two-photon contributions to the proton form

- factors // Phys. Rev. C. 2005. Vol. 71. P. 015202.
105. Tomasi-Gustafsson E., Gakh G. I. Search for evidence of two-photon contribution in elastic electron-proton data // Phys. Rev. C. 2005. Vol. 72. P. 015209.
106. Borisyuk D., Kobushkin A. Phenomenological analysis of two-photon exchange effects in proton form factor measurements // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 76. P. 022201(R).
107. Chen Y. C., Kao C. W., Yang S. N. Is there model-independent evidence of the two-photon-exchange effect in the electron-proton elastic scattering cross section? // Phys. Lett. B. 2007. Vol. 652. P. 269–274.
108. Guttmann J., Kivel N., Meziane M., Vanderhaeghen M. Determination of two-photon exchange amplitudes from elastic electron-proton scattering data // Eur. Phys. J. A. 2011. Vol. 47. P. 77.
109. Graczyk K. M. Two-photon exchange effect studied with neural networks // Phys. Rev. C. 2011. Vol. 84. P. 034314.
110. Qattan I. A., Alsaad A., Arrington J. Reexamination of phenomenological two-photon exchange corrections to the proton form factors and  $e^\pm p$  scattering // Phys. Rev. C. 2011. Vol. 84. P. 054317.
111. Bernauer J. C., Distler M. O., Friedrich J. et al. Electric and magnetic form factors of the proton // Phys. Rev. C. 2014. Vol. 90. P. 015206.
112. Carlson C. E., Vanderhaeghen M. Two-photon physics in hadronic processes // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2007. Vol. 57. P. 171–204.
113. Arrington J., Blunden P. G., Melnitchouk W. Review of two-photon exchange in electron scattering // Prog. Part. Nucl. Phys. 2011. Vol. 66. P. 782–833.
114. Yount D., Pine J. Scattering of high-energy positrons from protons // Phys. Rev. 1962. Vol. 128. P. 1842–1849.
115. Browman A., Liu F., Schaerf C. Positron-proton scattering // Phys. Rev. 1965. Vol. 139. P. B1079–B1085.
116. Anderson R. L., Borgia B., Cassidy G. L. et al. Scattering of positrons and

- electrons from protons // Phys. Rev. Lett. 1966. Vol. 17. P. 407–409.
117. Bartel W., Dudelzak B., Krehbiel H. et al. Scattering of positrons and electrons from protons // Phys. Lett. B. 1967. Vol. 25. P. 242–245.
118. Cassidy G., DeWire J., Fischer H. et al. Comparison of elastic positron-proton and electron-proton scattering cross sections // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1191–1192.
119. Anderson R. L., Borgia B., Cassidy G. L. et al. Positron-proton elastic scattering at 800 and 1200 MeV // Phys. Rev. 1968. Vol. 166. P. 1336–1342.
120. Bouquet B., Benaksas D., Grossetête B. et al. Backward scattering of positrons and electrons on protons // Phys. Lett. B. 1968. Vol. 26. P. 178–180.
121. Mar J., Barish B. C., Pine J. et al. Comparison of electron-proton and positron-proton elastic scattering at four-momentum transfers up to  $5.0 (\text{GeV}/c)^2$  // Phys. Rev. Lett. 1968. Vol. 21. P. 482–484.
122. McKinley W. A., Feshbach H. The Coulomb scattering of relativistic electrons by nuclei // Phys. Rev. 1948. Vol. 74. P. 1759–1763.
123. Алешаев А. Н., Анашин В. В., Анчугов О. В. и др. Ускорительный комплекс ВЭПП-4 // Препринт ИЯФ 2011-20. 2011. URL: [http://www.inp.nsk.su/activity/preprints/files/2011\\_020.pdf](http://www.inp.nsk.su/activity/preprints/files/2011_020.pdf).
124. Астрелина К. В., Блинов М. Ф., Всеволожская Т. А. и др. Получение интенсивных позитронных пучков на инжекционном комплексе ВЭПП-5 // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. С. 94–114.
125. Рачек И. А. Экспериментальное изучение фотодезинтеграции тензорно-поляризованного дейтрона: Кандидатская диссертация / ИЯФ СО РАН. 2008.
126. Мучной Н. Ю. Комптоновское рассеяние в прецизионных экспериментах на электрон-позитронных коллайдерах: Докторская диссертация / ИЯФ СО РАН. 2011.
127. Belyaev S. T., Budker G. I., Popov S. G. The possibility of using storage rings with internal thin targets // Proceedings of the Third International

- Conference on High Energy Physics and Nuclear Structure / Ed. by S. Devons.  
New York: Springer, 1970. P. 606–609.
128. Ekström C. Internal targets — a review // Nucl. Instrum. Methods A. 1995. Vol. 362. P. 1–15.
129. Попов С. Г. Внутренние мишени в накопителях заряженных частиц // Ядерная физика. 1999. Т. 62. С. 291–299.
130. Gilman R., Holt R. J., Kinney E. R. et al. Measurement of tensor analyzing power in electron-deuteron elastic scattering // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 1733–1736.
131. Gilman R., Holt R. J., Kinney E. R. et al. A polarized gas internal target using a storage cell in an electron storage ring // Nucl. Instrum. Methods A. 1993. Vol. 327. P. 277–286.
132. Dyug M. V., Isaeva L. G., Lazarenko B. A. et al. Internal polarized deuterium target with cryogenic atomic beam source // Nucl. Instrum. Methods A. 2002. Vol. 495. P. 8–19.
133. Arrington J. Coulomb corrections in the extraction of the proton radius // J. Phys. G. 2013. Vol. 40. P. 115003.
134. URL: <https://maid.kph.uni-mainz.de>.
135. Gerasimov R. E., Fadin V. S. Contribution of  $\Delta(1232)$  to real photon radiative corrections for elastic electron-proton scattering // J. Phys. G. 2016. Vol. 43. P. 125003.
136. Tomasi-Gustafsson E., Osipenko M., Kuraev E. A., Bystritskiy Y. M. Compilation and analysis of charge asymmetry measurements from electron and positron scattering on nucleon and nuclei // Phys. Atom. Nucl. 2013. Vol. 76. P. 937–946.
137. Arrington J., Sick I. Coulomb distortion in high- $Q^2$  elastic  $e-p$  scattering // Phys. Rev. C. 2004. Vol. 70. P. 028203.