ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Крачков Петр Александрович

Исследование процессов квантовой электродинамики в сильных атомных полях при высоких энергиях

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор
Мильштейн Александр Ильич

Новосибирск – 2016

Оглавление

Введение

Квантовая электродинамика (КЭД), описывающая электромагнитное взаимодействие частиц и фотонов, на сегодняшний день является одной из самых точных теорий, которая находится в поразительном согласии с большим набором экспериментальных данных. В связи с увеличением точности проводимых экспериментов становятся необходимыми более точные расчеты, а значит и дальнейшее развитие теории. Особый интерес с экспериментальной точки зрения представляют процессы квантовой электродинамики в сильных атомных полях, так как они описывают взаимодействие заряженных частиц и фотонов с веществом. На таких процессах основаны принципы детектирования заряженных частиц и фотонов. Например, тормозное излучение и фоторождение пар являются основными процессами, определяющими развитие электромагнитных ливней в веществе. Детальное описание процессов квантовой электродинамики необходимо для проведения прецизионных экспериментов, так как они являются фоновыми процессами при изучении сильных и электрослабых взаимодействий, а также при поиске новой физики. Такие процессы интересны и с фундаментальной точки зрения, так как их изучение выходит за рамки обычной теории возмущений. Это связанно с тем, что эффективная константа связи $\eta = Z\alpha$ (Z — зарядовый номер ядра, $\alpha = e^2 \sim 1/137$ — постоянная тонкой структуры, здесь и далее мы используем систему единиц $\hbar = c = 1$) для тяжелых атомов оказывается величиной, сравнимой с единицей. Поэтому при использовании теории возмущений необходимо вычислять амплитуды процессов в высоких порядках, что на сегодняшний день практически невозможно.

Для проведения расчетов в сильных полях удобно использовать представление Фарри, которое позволяет точно учесть влияние внешнего поля.

Главная идея этого подхода состоит в том, чтобы сначала найти точные решения уравнения Дирака во внешнем классическом поле, а затем, используя эти точные решения, построить теорию возмущений. Поэтому задача о нахождении функций Грина во внешнем поле является принципиально важной для построения теории возмущений в представлении Фарри. Нахождение удобных точных и приближённых представлений для функций Грина критично для приложений — вычисления амплитуд различных процессов КЭД во внешних полях.

Точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле не выражаются в замкнутой форме, а записываются только в виде суммы по угловым квантовым числам. При высоких энергиях по сравнению с массой частиц характерные угловые моменты l_c, дающие главный вклад в сечение, велики: $l_c \sim \varepsilon/m \gg 1$ (ε — характерная энергия частицы, m — масса частицы). Медленная сходимость сумм по угловым квантовым числам приводит к практической неприменимости точных решений. Ярким примером является процесс фоторождения e^+e^- пар, точное сечение которого в виде суммы по угловым моментам для любых $\eta < 1$ было найдено в [1], а численные результаты были получены только для энергии фотона $\omega \lesssim 12.5$ МэВ.

К счастью, при высоких энергиях $\varepsilon_i \gg m$ и малых углах $\theta_i \ll 1$ импульсов конечных частиц по отношению к импульсу начальной частицы применимо квазиклассическое приближение, которое учитывает вклады больших угловых моментов. В работах [2, 3] были получены волновые функции в приближении Фарри-Зоммерфельда-Мауэ, которые являются волновыми функциями электрона в кулоновском поле в главном квазиклассическом приближении. Эти функции были использованы для вычисления кулоновских поправок к сечениям процессов тормозного излучения и фоторождения в кулоновском поле [4–6].

Важным шагом в развитии квазиклассического подхода явилась операторная квазиклассическая техника В.Н. Байера и В.М. Каткова [7]. Операторный подход позволил значительно упростить вывод предыдущих результатов и получить множество новых важных результатов [8] в главном квазиклассическом приближении. Но в рамках этого подхода не удаётся получить поправки по $1/l_c \ll 1$.

Развитый в последние годы метод квазиклассических функций Грина позволил совершить прорыв в этой области. Этот метод позволяет вычислять не только главный квазиклассический вклад, но и первую квазиклассическую поправку (поправку по $1/l_c \ll 1$). Заметим, что поправка по $1/l_c$ имеет принципиальную важность. Во-первых она позволяет получать результаты с большей точностью и контролировать точность вычислений в главном квазиклассическом приближении. Во-вторых эта поправка приводит к новым эффектам (зарядовая и азимутальная асимметрия), отсутствующим в главном квазиклассическом приближении. Мощь этого метода состоит в том, что он позволяет вычислить квазиклассическую функцию Грина в произвольном атомном поле $V(r)$, когда точное аналитическое решение не существует. Квазиклассическая функция Грина имеет довольно простой вид и её можно использовать при вычислениях дифференциальных и полных сечений различных процессов КЭД в атомных полях произвольной конфигурации при высоких энергиях.

Квазиклассическая функция Грина была получена в работе [9] для случая кулоновского поля, в работе [10] для произвольного сферически-симметричного поля, в работе [11, 12] для произвольного локализованного поля, в работе [13] для суперпозиции атомного и лазерного поля. Первая глава посвящена квазиклассическому подходу. В ней подробно обсуждается вывод квазиклассической функции Грина с учётом первой квазиклассической поправки и соответствующих волновых функций уравнения Дирака для произвольного атомного потенциала.

Как было отмечено выше, волновые функции и функции Грина во внешнем поле нужны для вычисления дифференциальных и интегральных сечений процессов, происходящих в этом поле. Особенно важными с экспериментальной точки зрения являются процессы тормозного излучения и рождения пар фотоном в поле ядра или атома, так как этими процессами определяется развитие электромагнитных ливней в веществе.

Тормозное излучение является перекрестным каналом к процессу фоторождения e^+e^- пар и наоборот. Поэтому эти процессы часто рассматривают вместе. Используя перекрестную инвариантность, дифференциальное сечение в борновском приближении и проинтегрированное по углам одной частицы точное по η дифференциальное сечение процесса тормозного излучения можно получить из соответствующих величин для процесса фоторождения. Но это нельзя сделать для полностью дифференциального точного сечения. Асимптотика волновой функции начального электрона в процессе тормозного излучения должна состоять из суммы плоской и сферически сходящейся волны, а асимптотика волновой функции электрона, полученная из волновой функции позитрона в процессе фоторождения, состоит из плоской и сферически расходящейся волны. Поэтому полностью дифференциальные сечения тормозного излучения и фоторождения имеют разные особенности. Например, в отличие от фоторождения, кулоновские поправки к дифференциальному сечению тормозного излучения сильно зависит от радиуса экранировки $r_{scr} \sim Z^{-1/3}(m\alpha)^{-1}$ [6, 14].

Дифференциальное и полное сечение тормозного излучения в борновском приближении для любых энергий частиц было получено в работах [15, 16]. С помощью волновых функций Фарри-Зоммерфельда-Мауэ высокоэнергетическая асимптотика сечения тормозного излучения для кулоновского потенциала была получена в работах [4–6, 17, 18]. Количественное исследование влияния эффекта экранировки на кулоновские поправки полностью дифференциального сечения, а также универсальность кулоновских поправок в дифференциальном сечении, проинтегрированном по углам одной конечной частицы, в главном квазиклассическом приближении было изучено в работе [14]. Так как в этой работе использовались квазиклассические функции в произвольном атомном потенциале, этот результат верен и для тормозного излучения мюонов.

Важным вопросом также является вычисление точной по η зарядовой асимметрии в процессе тормозного излучения (разница между дифференциальным сечением тормозного излучения электрона и позитрона на ядре). В сечении, вычисленном в главном квазиклассическом приближении, зарядовая асимметрия отсутствует, поэтому необходимо учитывать первую квазиклассическую поправку. Этому вопросу посвящена вторая глава, которая основана на работе [12].

Для точного описания процесса тормозного излучения нужно учесть соответствующие радиационные поправки. Двойное тормозное излучение является существенной частью радиационных поправок. До недавнего времени этот процесс изучался или при низких энергиях электрона [19, 20], или для любых энергий электрона, но в борновском приближении [21]. Вычислению точного по внешнему полю дифференциального сечения двойного тормозного излучения для ультрарелятивистских частиц посвящена третья глава, которая основана на работе [22].

В борновском приближении дифференциальное и полное сечение фоторождения для любых энергий частиц было получено в [15, 16]. В работах [4, 5], используя волновые функции Фарри-Зоммерфельда-Мауэ [2, 3], была вычислена точная по η высокоэнергетическая асимптотика сечения в кулоновском поле. Этот результат имеет хорошую точность только при $\omega > 100$ МэВ. Из этой асимптотики видно, что при высоких энергиях борновское сечение усиленно не очень большим фактором $\ln(mr_{scr})$ (случай полной экранировки), что приводит к большим кулоновским поправкам $\sim 20\%$. Точное по энергии и η сечение фоторождения e^+e^- пар было получено в [1]. Это выражение имеет настолько сложную структуру, что численные результаты удалось получить только для $\omega < 12.5$ МэВ. В работе [23] была получена интерполяционная формула для промежуточных энергий фотона ($5 - 100$ МэВ), которая основана на высокоэнергетической асимптотики [4, 5] и на точном сечении при низких энергиях [1]. Метод квазиклассических функций Грина позволил получить первую квазиклассическую поправку по m/ω к спектру и к полному сечению процесса фоторождения [24]. Так как поправка к спектру вычислялась для больших энергий конечных частиц, она не описывает края спектра, где электрон или позитрон не являются релятивистскими. Используя дисперсионное соотношение, в [25] была вычислена поправка к спектру в области $\varepsilon_p \sim m$ и $\varepsilon_q \sim m$. Проинтегрированная поправка к краю спектра находится в согласии с поправкой к полному сечению [24]. В работе [26] была вычислена первая квазиклассическая поправка к дифференциальному сечению фоторождения электрон-позитронных пар. В отличие от ведущего члена, эта поправка оказалась антисимметричной относительно замены $\eta \to -\eta$. Таким образом, она определяет зарядовую асимметрию в процессе фоторождения. Учет эффекта экранировки для фоторождения e^+e^- пар при высоких энергиях сводится к умножению борновской амплитуды на атомный формфактор, а кулоновские поправки при этом не меняются. Эффект конечного размера ядра для фоторождения электрон-позитронных пар (отличие потенциала от кулоновского на расстоянии порядка радиуса ядра) не важен. Для фоторождения $\mu^+\mu^-$ пар необходимо учитывать не только атомную экранировку, но и эффект конечного размера ядра. Вычисление дифференциального сечения фоторождения $\mu^+\mu^-$ пар с учетом первой квазиклассической поправки было проведено в недавней работе [27].

Для более точного описания процесса фоторождения e^+e^- пар необходимо также учитывать радиационные поправки. Важной частью радиационных поправок является процесс фоторождения $e^+e^-\gamma$. Несмотря на всю важность, этот процесс до недавнего времени был исследован либо в борновском приближении [28], либо в мягко-фотонном приближении и его модификациях [29–31]. Четвертая глава посвящена изучению характеристик этого процесса. Она основана на работе [32], где в рамках главного квазиклассического приближения было получено точное по параметру η дифференциальное сечение.

Квазиклассический подход — мощный метод для вычисления дифференциальных и интегральных характеристик различных процессов квантовой электродинамики в сильных атомных полях при высоких энергиях. Он позволяет вычислить не только главный вклад в сечение, но и первую квазиклассическую поправку (поправку по m/ε и θ), что значительно увеличивает точность вычислений и приводит к новым эффектам, отсутствующим при вычислении в главном квазиклассическом приближении. Квазиклассический подход основан на том, что основной вклад в амплитуду дают большие угловые моменты $l \gg 1$. Возникает вопрос, как далеко мы можем продвинуться в повышении точности вычисления сечений в рамках квазиклассического приближения. Исследованию этого вопроса на примере упругого рассеяния посвящена заключительная глава данной диссертации, которая основана на работе [33].

Упругое рассеяние заряженной частицы во внешнем поле является базовым процессом квантовой электродинамики. Точная амплитуда рассеяния в кулоновском поле была получена в работе [34] в виде суммы по угловым квантовым числам. Кулоновские поправки порядка η^3 были получены в работе [35] из разложения точного ответа и в [36], используя теорию возмущений. Для ультрарелятивистских частиц точное по η сечение, но приближенное по параметрам m/ε и θ, было получено в работе [3], где весь эффект кулоновских поправок свёлся к фазовому множителю, так что дифференциальное сечение совпадало с борновским. Первая поправка к дифференциальному сечению была получена в работе [37] с помощью операторного квазиклассического подхода. Используя приближение эйконала, амплитуда рассеяния с учётом первой поправки была получена в работах [38, 39]. С помощью квазиклассического подхода, который имеет более широкую область применимости, чем эйкональное приближение, то же выражение было получено в работе [11]. В нашей недавней работе [33] была получена точная по параметру η амплитуда упругого рассеяния в кулоновском поле с точностью θ^2. Полученный результат выходит за рамки квазиклассического приближения, так как угловые моменты $l \sim 1$ дают существенный вклад в эту амплитуду. Помимо дифференциального сечения упругого рассеяния, большой интерес представляют поляризационные эффекты. Особый интерес представляет функция Шермана, которая определяет конечную поляризацию изначально неполяризованного пучка, или наоборот — угловую асимметрию в случае изначально поляризованного пучка. Функция Шермана была получена в [40] путём разложения точной амплитуды по η. В нашей работе [33] была получена функция Шермана для произвольного сферически симметричного потенциала в главном приближении по θ, а для кулоновского поля — с учётом первой поправки.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Получение с учётом первой квазиклассической поправки квазиклассической функции Грина и соответствующих волновых функций уравнения Дирака в произвольном атом потенциале.

- Исследование зарядовой и азимутальной асимметрии в тормозном излучении при высоких энергиях.

- Вычисление в рамках главного квазиклассического приближения дифференциального сечения процесса двойного тормозного излучения.

- Получение в рамках главного квазиклассического приближения дифференциального сечения фоторождения пар с испусканием дополнительного фотона.

- Исследование предела применимости квазиклассического приближения на примере упругого рассеяния.

Глава 1

Квазиклассическое приближение

Как уже было сказано выше, при вычислении дифференциальных сечений процессов КЭД в сильных полях удобно использовать функцию Грина уравнения Дирака во внешнем поле.

$$G(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon) = \langle \boldsymbol{r}_1 | \frac{1}{\hat{\mathcal{P}} - m + i0} | \boldsymbol{r}_2 \rangle\,, \tag{1.1}$$

$\hat{\mathcal{P}} = \gamma^\mu \mathcal{P}_\mu$, $\mathcal{P}_\mu = (\varepsilon - V(r), i\boldsymbol{\nabla})$, а $V(r)$ — атомный потенциал.

Если энергия частиц велика, $\varepsilon \gg m$, то характерные углы, дающие основной вклад в полное сечение, малы $\theta \sim m/\varepsilon \ll 1$. В таком случае применимо квазиклассическое приближение. Для оценки характерных значений параметров рассмотрим, в качестве примера, процесс, протекающий через образование электрон-позитронной пары. Используя соотношение неопределённости, нетрудно показать, что характерное расстояние между частицами в собственной системе отсчета равно $1/m$. При переходе в лабораторную систему отсчёта поперечный размер ρ не меняется, а продольный размер увеличивается в $\gamma = \varepsilon/m$ раз, $z \sim \varepsilon/m^2 \gg 1/m$. Таким образом, характерные аргументы функции Грина, $r_{1,2}$ и ε, удовлетворяют следующим соотношениям

$$\varepsilon r_{1,2} \sim \varepsilon^2 \rho^2 \sim \varepsilon^2/m^2 \gg 1\,. \tag{1.2}$$

Из этих оценок видно, что характерные угловые моменты, дающие основной вклад в матричный элемент, велики, $l_c = p\rho \approx \varepsilon\rho \approx \varepsilon/m \gg 1$. Квазиклассическое приближение основано на учёте только больших угловых моментов $l \gg 1$. Так как во внешнем поле импульс не сохраняется, то пропадает выделенная роль импульсного представления, и поэтому вычисления удобнее проводить в координатном представлении.

С учётом первой поправки по m/ε и θ квазиклассическая функция Грина уравнения Клейна-Фока-Гордона $D_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon)$ для произвольного локализованного потенциала $V(\boldsymbol{r})$ (не обязательно сферически симметричного) была найдена в работе [11]:

$$D_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon) = \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \int d\boldsymbol{Q} \exp\left[iQ^2 - ir\int_0^1 dx V(\boldsymbol{R}_x)\right]$$
$$\times \left\{1 + \tfrac{ir^3}{2\kappa}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy (x-y) \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{R}_x)\cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{R}_y)\right\}\ ,$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\,, \quad \boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r} + \boldsymbol{Q}\sqrt{\tfrac{2r_1 r_2}{\varepsilon r}}\,, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{Q}$ — двумерный вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{r}$. Эта функция имеет довольно ясную физическую интерпретацию. Частица летит по прямой от $\boldsymbol{r}_1$ до $\boldsymbol{r}_2$, но помимо простого набора фазы, как в приближении эйконала [38], также учитываются квантовые флуктуации вблизи прямолинейной траектории (интеграл по двумерному вектору $\boldsymbol{Q}$).

Уместно также обсудить связь с приближением эйконала. Приближение эйконала справедливо, когда поперечный градиент мал на всём прямолинейном участки траектории частицы от $\boldsymbol{r}_1$ до $\boldsymbol{r}_2$:

$$\frac{|\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})|}{V(\boldsymbol{r})} \ll \sqrt{\frac{p}{r_{min}}} \sim \frac{1}{\rho}\,, \quad r_{min} = \min(r_1, r_2)\,. \tag{1.4}$$

Как было сказано выше, в случае быстрых частиц основной вклад в амплитуды дает область, в которой выполняются условия $pr_{1,2} \gg 1$. Таким образом, приближение эйконал не работает, если частица пролетает вблизи центра потенциала. Поэтому для вычисления амплитуд процессов квантовой электродинамики необходимо использовать именно квазиклассические функции Грина и волновые функции, а не эйкональные. Заметим, что если частица пролетает далеко от центра потенциала, то можно пренебречь членом, пропорциональным $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{R}_x$ в функции Грина (1.3) и проинтегрировать по $\boldsymbol{Q}$. Таким образом, квазиклассическая функция Грина уравнения Клейна-Фока-Гордона переходит в эйкональную волновую функцию.

Вычислению квазиклассической функции Грина с учётом первой квазиклассической поправки и соответствующих волновых функций уравнения Дирака посвящён следующий раздел, основанный на работе [12].

1.1. Вычисление квазиклассической функции Грина уравнения Дирака

Для практических расчётов удобно использовать квадрированную функцию Грина $D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon)$, которая связана с обычной функцией Грина уравнения Дирака следующим образом

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon) = (\hat{\mathcal{P}} + m)D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon)\,,\\
&D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon) = \langle \boldsymbol{r}_1|\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}^2 - m^2 + i0}|\boldsymbol{r}_2\rangle\\
&\quad = \langle \boldsymbol{r}_2|\left[(\varepsilon - V(r))^2 + \boldsymbol{\nabla}^2 - m^2 + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}V(r) + i0\right]^{-1}|\boldsymbol{r}_1\rangle\,,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$\hat{\mathcal{P}} = \gamma^\mu \mathcal{P}_\mu$, $\mathcal{P}_\mu = (\varepsilon - V(r), i\boldsymbol{\nabla})$, а $V(r)$ — атомный потенциал.

Вся матричная структура функции Грина квадрированного уравнения Дирака находится в множителе $i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}V(r)$, поэтому квадрированную функцию Грина можно записать в следующем виде

$$D(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = d_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon) + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon) + \gamma^5 d_3(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon), \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma}$, $d_i(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ — некоторые скалярные функции (не содержат матричных структур). Заметим, что для сферически симметричного потенциала $d_3 = 0$, так как из-за сохранения чётности d_3 должен быть псевдоскаляром, а из двух векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ нельзя построить псевдоскаляр. Так как при больших энергиях $\varepsilon \gg m$ слагаемое, содержащее матричную структуру, является малой поправкой $|\boldsymbol{\nabla} V(r)| \ll \varepsilon V(\boldsymbol{r})$, то функции d_i имеют различные характерные значения

$$d_0 \sim l_c d_1 \sim l_c^2 d_2 \sim l_c^3 d_3\,, \tag{1.7}$$

где $l_c \sim \varepsilon/m \gg 1$ — характерный угловой момент. Чтобы найти квазиклассическую функцию Грина с учётом первой поправки, необходимо вычислить $\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ в главном квазиклассическом приближении, а $d_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ и $\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ с учётом первой квазиклассической поправки.

Разложим функцию Грина $D(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ в уравнении (1.5) до второго порядка по $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} V(r)$:

$$\begin{aligned}
&D(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = \langle \boldsymbol{r}_2|\frac{1}{\mathcal{H}} - \frac{1}{\mathcal{H}} i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} V(r)\frac{1}{\mathcal{H}} + \\
&\frac{1}{\mathcal{H}} i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} V(r)\frac{1}{\mathcal{H}} i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} V(r)\frac{1}{\mathcal{H}}|\boldsymbol{r}_1\rangle\,,\\
&\mathcal{H} = \varepsilon^2 - m^2 - 2\varepsilon\varphi(r) + \boldsymbol{\nabla}^2 + i0\,,\\
&\varphi(r) = V(r) - \frac{V^2(r)}{2\varepsilon}\,.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Где $D^{(0)}(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = \langle \boldsymbol{r}_2|\mathcal{H}^{-1}|\boldsymbol{r}_1\rangle$ — функция Грина уравнения Клейна-Фока-Гордона. В квазиклассическом приближении с учётом первой поправки эта функция была найдена в работе [11] (см. (1.3)). Функция $D^{(0)}(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ совпадает с функцией $d_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ из (1.6).

Используя соотношение

$$i\boldsymbol{\nabla} V(r) = \frac{1}{2\varepsilon}[\boldsymbol{p}\,,\, \mathcal{H}] + \frac{i}{2\varepsilon}\boldsymbol{\nabla} V^2(r)\,, \tag{1.9}$$

и записывая линейный по $\boldsymbol{\nabla} V(r)$ член в уравнении (1.8) как $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1)$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\nabla}_1+\boldsymbol{\nabla}_2)D^{(0)}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon)+\delta\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\,,\\
&\delta\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = -\langle\boldsymbol{r}_2|\frac{1}{\mathcal{H}}\frac{i}{2\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}V^2(r)\frac{1}{\mathcal{H}}|\boldsymbol{r}_1\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Если заменить $V(r)$ на $V(r)+\delta V(r)$ в операторе $\mathcal{H}$, где $\delta V(r) = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}V^2(r)/(2\varepsilon)^2$, то нетрудно получить выражение для $\delta\boldsymbol{d}_1$, используя (1.3),

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = &-\frac{ie^{i\kappa r}}{16\pi^2\varepsilon^2}\int d\boldsymbol{Q}\exp\left[iQ^2-ir\int_0^1 dxV(\boldsymbol{R}_x)\right]\\
&\times\int_0^1 dx\,\boldsymbol{\nabla}V^2(\boldsymbol{R}_x)\,,
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

где $\boldsymbol{R}_x$ определенно в (1.3).

Для того, чтобы преобразовать третий член в уравнении (1.8), заменим $i\boldsymbol{\nabla}V(r)$ на $\frac{1}{2\varepsilon}[\boldsymbol{p}\,,\,\mathcal{H}]$. После простых преобразований функция $\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)$ принимает следующий вид

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = -\frac{i}{(2\varepsilon)^2}[\boldsymbol{\nabla}_2\times\boldsymbol{\nabla}_1]D^{(0)}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon)+\delta\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon)\,,\\
&\delta\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = \boldsymbol{l}_{21}\,\langle\boldsymbol{r}_2|\frac{1}{\mathcal{H}}\frac{V'(r)}{2\varepsilon r}\frac{1}{\mathcal{H}}|\boldsymbol{r}_1\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

где $\boldsymbol{l}_{21} = -(i/2)(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{\nabla}_2-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{\nabla}_1)$ и $V'(r)=\partial V(r)/\partial r$. Если заменить $V(r)$ на $V(r)+\delta V(r)$ в операторе $\mathcal{H}$, где $\delta V(r) = r^{-1}V'(r)/(2\varepsilon)^2$, мы получим простое выражение для $\delta\boldsymbol{d}_2$ из уравнения (1.3)

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = &\boldsymbol{l}_{21}\,\frac{e^{i\kappa r}}{16\pi^2\varepsilon^2}\int d\boldsymbol{Q}\exp\left[iQ^2-ir\int_0^1 dxV(\boldsymbol{R}_x)\right]\\
&\times\int_0^1 dx\,\frac{V'(\boldsymbol{R}_x)}{R_x}\,.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Подставляя это выражение в (1.12), получаем

$$
\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = -\frac{re^{i\kappa r}}{16\pi^2\varepsilon^2}\int d\boldsymbol{Q}\exp\left[iQ^2 - ir\int\limits_0^1 dxV(\boldsymbol{R}_x)\right] \times\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\left[\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{R}_x)\times\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{R}_y)\right]. \tag{1.14}
$$

Таким образом, квазиклассическая функция Грина уравнения Дирака с учётом первой квазиклассической поправки имеет следующий вид

$$
\begin{aligned}
&D(\boldsymbol{r}_2,\,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = d_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon),\\
&d_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r}\int d\boldsymbol{Q}\left\{1 + \frac{ir^3}{2\kappa}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy(x-y)\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{R}_x)\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{R}_y)\right\}\mathcal{T},\\
&\boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\nabla}_1 + \boldsymbol{\nabla}_2)d_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon) - \frac{ie^{i\kappa r}}{16\pi^2\varepsilon^2}\int d\boldsymbol{Q}\int\limits_0^1 dx\,\boldsymbol{\nabla}V^2(\boldsymbol{R}_x)\,\mathcal{T}\,,\\
&\boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1|\varepsilon) = -\frac{re^{i\kappa r}}{16\pi^2\varepsilon^2}\int d\boldsymbol{Q}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\left[\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{R}_x)\times\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{R}_y)\right]\mathcal{T}\,,\\
&\mathcal{T} = \exp\left[iQ^2 - ir\int\limits_0^1 dxV(\boldsymbol{R}_x)\right], \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\,,\\
&\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r} + \boldsymbol{Q}\sqrt{\frac{2r_1r_2}{\kappa r}}\,,
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

Зная функцию Грина квадрированного уравнения Дирака, нетрудно получить квазиклассические волновые функции. Воспользуемся соотношениями из [27] для связи между волновыми функциями и функцией Грина

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{ipr_1}}{4\pi r_1} u^{(+)}_{\lambda \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_2) = -\lim_{r_1\to\infty} D(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon_p) u_{\lambda \boldsymbol{p}}\,, \quad \boldsymbol{p} = -p\boldsymbol{n}_1\,,\\
&\frac{e^{ipr_1}}{4\pi r_1} v^{(-)}_{\lambda \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_2) = -\lim_{r_1\to\infty} D(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\,-\varepsilon_p) v_{\lambda \boldsymbol{p}}\,, \quad \boldsymbol{p} = p\boldsymbol{n}_1\,,\\
&\frac{e^{ipr_1}}{4\pi r_2} \bar{u}^{(-)}_{\lambda \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1) = -\lim_{r_2\to\infty} \bar{u}_{\lambda \boldsymbol{p}} D(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\,\varepsilon_p)\,, \quad \boldsymbol{p} = p\boldsymbol{n}_1\,,\\
&\frac{e^{ipr_1}}{4\pi r_2} \bar{v}^{(+)}_{\lambda \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1) = -\lim_{r_2\to\infty} \bar{v}_{\lambda \boldsymbol{p}} D(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\,-\varepsilon_p)\,, \quad \boldsymbol{p} = -p\boldsymbol{n}_1\,.
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

Индексы $(+)$ и $(-)$ означают наличие в асимптотике функции на больших расстояниях, соответственно, расходящейся и сходящейся сферической волны.

Из (1.6) и (1.16) следует вид волновых функций:

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}^{(-)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \bar{u}_{\boldsymbol{p}}[f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})]\,,\\
&u^{(+)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = [f_0(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p})]u_{\boldsymbol{p}}\,,\\
&v^{(+)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = [g_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})]v_{\boldsymbol{p}}\,,\\
&\bar{v}^{(-)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \bar{v}_{\boldsymbol{p}}[g_0(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p})]\,,\\
&u_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_p+m}{2\varepsilon_p}}\begin{pmatrix}\phi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\varepsilon_p+m}\phi\end{pmatrix}\,,\quad v_{\boldsymbol{q}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_q+m}{2\varepsilon_q}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}}{\varepsilon_q+m}\chi\\ \chi\end{pmatrix}\,,
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

где ϕ и χ спиноры. Коэффициенты g_i отличаются от f_i заменой $V(r) \to -V(r)$. Стоит отметить, что в квазиклассическом приближении функции f_0, g_0, $\boldsymbol{f}_{1,2}$ и $\boldsymbol{g}_{1,2}$ имеют разные характерные значения

$$
f_0 \sim l_c f_1 \sim l_c^2 f_2\,, \quad g_0 \sim l_c g_1 \sim l_c^2 g_2\,. \tag{1.18}
$$

Формулы для коэффициентов f_i следуют из уравнений (1.16) и (1.15):

$$
\begin{aligned}
& f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = -\frac{i}{\pi} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \int d\boldsymbol{Q} \left\{ 1 + \frac{i}{2\varepsilon_p} \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x dy (x-y) \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}_x) \cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}_y) \right\} \mathcal{T}_1, \\
& \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\varepsilon_p}(i\boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{p}) f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \frac{i}{4\pi\varepsilon_p^2} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \int d\boldsymbol{Q} \int\limits_0^\infty dx \boldsymbol{\nabla} V^2(\boldsymbol{r}_x) \mathcal{T}_1 \,, \\
& \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = -\frac{e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_p^2} \int d\boldsymbol{Q} \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x dy \, [\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}_x) \times \boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}_y)] \mathcal{T}_1 \,, \\
& \mathcal{T}_1 = \exp\left[iQ^2 - i \int\limits_0^\infty dx V(\boldsymbol{r}_x) \right] \,, \quad \boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{r} + x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{Q}\sqrt{\frac{2r}{\varepsilon_p}} \,,
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

где $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}} = 0$, $\boldsymbol{\nabla}_\perp$ — компонента градиента, перпендикулярная вектору $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/p$.

Для кулоновского поля $V_c(r) = -\eta/r$ коэффициенты f_0 и $\boldsymbol{f}_{1,2}$ равны

$$
\begin{aligned}
f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}) &= F_A + (1 + \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{n}) F_C \,, \\
\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}) &= (\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{n}) \eta F_B \,, \\
\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}) &= -i\boldsymbol{\Sigma} \cdot [\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}} \times \boldsymbol{n}] F_C \,,
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& F_A(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{q},\, \eta) = \exp\left(\frac{\pi\eta}{2} - i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}\right) [\Gamma(1-i\eta) F(i\eta, 1,\, iz) \\
& + \frac{\pi\eta^2 \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2qr}} \Gamma(1/2 - i\eta) F(1/2 + i\eta, 1,\, iz)] \,, \\
& F_B(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{q},\, \eta) = -\frac{i}{2} \exp\left(\frac{\pi\eta}{2} - i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}\right) [\Gamma(1-i\eta) F(1+i\eta,\, 2,\, iz) \\
& + \frac{\pi\eta^2 \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2qr}} \Gamma(1/2 - i\eta) F(3/2 + i\eta,\, 2,\, iz)] \,, \\
& F_C(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{q},\, \eta) = -\exp\left(\frac{\pi\eta}{2} - i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}\right) \frac{\pi\eta^2 \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{8\sqrt{2qr}} \Gamma(1/2 - i\eta) F(3/2 + i\eta, 2,\, iz) \,, \\
& z = (1 + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}}) qr \,, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \,.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Здесь $\Gamma(x)$ — Г-функция Эйлера, а $F(\alpha, \beta, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Этот результат находится в согласии с [26].

Волновые функции для кулоновского потенциала в главном квазиклассическом приближении есть не что иное, как волновые функции Фарри-Зоммерфельда-Мауэ [2, 3].

1.2. Выводы к первой главе

Данная глава посвящена квазиклассическому подходу. В части 1.1 были получены выражения для квазиклассической функции Грина с учётом первой поправки в случае произвольного атомного потенциала (1.15) и для соответствующих волновых функций (1.19). Приведённых в этом разделе формул достаточно для вычисления сечений различных процессов в атомных полях при высоких энергиях в квазиклассическом приближении.

Глава 2

Зарядовая асимметрия в тормозном излучении

В настоящей главе мы следуем работе [12], которая посвящена исследованию зарядовой асимметрии в процессе тормозного излучения электронов и мюонов. Мы также исследуем влияние атомной экранировки и конечного размера ядра на дифференциальное сечение этого процесса.

Зарядовая асимметрия — это разница между сечениями взаимодействия частицы и античастицы с атомным полем. Как уже было сказано выше, зарядовая асимметрия отсутствует при вычислении в лидирующем квазиклассическом приближении, поэтому для получения зарядовой асимметрии необходимо учесть первую квазиклассическую поправку. Дифференциальное сечение тормозного излучения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&d\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta) = d\sigma_s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta) + d\sigma_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)\,,\\
&d\sigma_s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta) = \frac{d\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta) + d\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},-\eta)}{2}\,,\\
&d\sigma_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta) = \frac{d\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta) - d\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},-\eta)}{2}\,,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

где $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ — импульс начального и конечного электрона, $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор фотона. Дифференциальное сечение тормозного излучения античастицы получается заменой $\eta \to -\eta$. Таким образом, величина $d\sigma_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)$ определяет зарядовую асимметрию в тормозном излучении.

2.1. Дифференциальное сечение тормозного излучения

Дифференциальное сечение тормозного излучения заряженной частицы с начальным импульсом $\boldsymbol{p}$ можно записать в следующем виде [41]

$$d\sigma = \frac{\alpha\omega q\varepsilon_q}{(2\pi)^4}\, d\Omega_{\boldsymbol{k}}\, d\Omega_{\boldsymbol{q}}\, d\omega |M|^2\,, \tag{2.23}$$

где $d\Omega_{\boldsymbol{k}}$ и $d\Omega_{\boldsymbol{q}}$ — телесные углы, соответствующие импульсам фотона $\boldsymbol{k}$ и конечного лептона $\boldsymbol{q}$, $\omega = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ — энергия фотона, $\varepsilon_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $\varepsilon_q = \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + m^2}$, m — масса заряженной частицы. Также мы подразумеваем, что все частицы ультрарелятивистские, $\varepsilon_p \gg m$ и $\varepsilon_q \gg m$. Матричный элемент M равен (см. рисунок 2.1)

$$M = \int d\boldsymbol{r}\, \bar{u}^{(-)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}^*\, u^{(+)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\,, \tag{2.24}$$

где γ^μ — матрицы Дирака, $u^{(+)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ и $u^{(-)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})$ — решения уравнения Дирака в атомном поле (1.19). Индексы $(-)$ и $(+)$ напоминают, что асимптотика функций $u^{(-)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ и $u^{(+)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})$ на больших $\boldsymbol{r}$ состоит из сумм плоской волны и соответствующей сферически сходящейся и расходящейся волны.

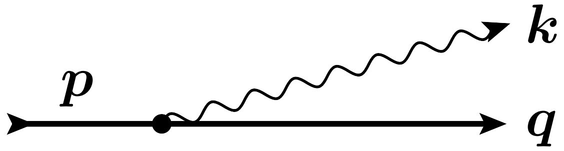

Рис. 2.1. Диаграмма процесса $e^-Z \to e^-\gamma Z$. Жирные линии соответствуют волновым функциям в атомном поле.

Используя вид волновых функций (1.17) и матрицу $\mathcal{F} = u_{\boldsymbol{p}\,\mu_p}\bar{u}_{\boldsymbol{q}\,\mu_q}$, матричный элемент M можно записать в следующем виде

$$M = \int d\boldsymbol{r}\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{Sp}\{(f_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}^*_\lambda(g_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{g}_2)\mathcal{F}\}\,. \tag{2.25}$$

Будем вычислять матричный элемент в спиральном базисе. Пусть μ_p, μ_q, и λ — знаки спиральностей начальной, конечной частицы и фотона. Пусть вектор $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k}/\omega$ направлен по оси z, а $\boldsymbol{q}$ лежит в плоскости xz с $q_x > 0$. Тогда спиноры с нужной нам точностью в спиральном базисе равны

$$\phi_{\mu_p} = \frac{1+\mu_p\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p}{4\cos(\theta_p/2)}\begin{pmatrix}1+\mu_p\\ 1-\mu_p\end{pmatrix} \approx \frac{1}{4}\left(1+\frac{\theta_p^2}{8}\right)(1+\mu_p\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p)\begin{pmatrix}1+\mu_p\\ 1-\mu_p\end{pmatrix},$$
$$\chi_{\mu_q} = \frac{1+\mu_q\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_q}{4\cos(\theta_q/2)}\begin{pmatrix}1+\mu_q\\ 1-\mu_q\end{pmatrix} \approx \frac{1}{4}\left(1+\frac{\theta_q^2}{8}\right)(1+\mu_q\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_q)\begin{pmatrix}1+\mu_q\\ 1-\mu_q\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{e}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\lambda\boldsymbol{e}_y)\,, \tag{2.26}$$

где θ_p и θ_q — полярные углы векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, соответственно. Единичные вектора $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$ направленны вдоль $\boldsymbol{q}_\perp$ и $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q}$, также мы будем использовать следующие обозначения: $\boldsymbol{X}_\perp = \boldsymbol{X} - (\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$ для любого вектора $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\theta}_p = \boldsymbol{p}_\perp/p$, $\boldsymbol{\theta}_q = \boldsymbol{q}_\perp/q$. Используя явный вид четырехмерных спиноров (1.17), нетрудно найти явный вид матрицы $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8}(a_{\mu_p\mu_q} + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{b}_{\mu_p\mu_q})[\gamma^0(1+PQ) + \gamma^0\gamma^5(P+Q) + (1-PQ) - \gamma^5(P-Q)],$$
$$P = \frac{\mu_p p}{\varepsilon_p + m}\,,\quad Q = \frac{\mu_q q}{\varepsilon_q + m}\,, \tag{2.27}$$

где $a_{\mu_p\mu_q}$ и $\boldsymbol{b}_{\mu_p\mu_q}$ определяются из соотношения

$$\phi_{\mu_p}\chi^\dagger_{\mu_q} = \frac{1}{2}(a_{\mu_p\mu_q} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}_{\mu_p\mu_q})\,. \tag{2.28}$$

С помощью уравнения (2.26) получаем явный вид этих коэффициентов в спиральном базисе

$$a_{\mu\mu} = 1 - \frac{\theta_{pq}^2}{8} - \frac{i\mu}{4}\boldsymbol{\nu}\cdot[\boldsymbol{\theta}_p\times\boldsymbol{\theta}_q]\,,\quad a_{\mu\bar{\mu}} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{\theta}_{pq}\,,$$
$$\boldsymbol{b}_{\mu\mu} = \left\{\mu\left[1-\frac{1}{8}(\boldsymbol{\theta}_p+\boldsymbol{\theta}_q)^2\right] + \frac{i}{4}\boldsymbol{\nu}\cdot[\boldsymbol{\theta}_p\times\boldsymbol{\theta}_q]\right\}\boldsymbol{\nu} + \frac{\mu}{2}(\boldsymbol{\theta}_p+\boldsymbol{\theta}_q) + \frac{i}{2}[\boldsymbol{\theta}_{pq}\times\boldsymbol{\nu}]\,,$$
$$\boldsymbol{b}_{\mu\bar{\mu}} = \sqrt{2}\boldsymbol{e}_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{\theta}_p+\boldsymbol{\theta}_q)\boldsymbol{\nu}\,, \tag{2.29}$$

где $\boldsymbol{\theta}_{pq} = \boldsymbol{\theta}_p - \boldsymbol{\theta}_q$ и $\bar{\mu} = -\mu$.

Заметим, что только члены, пропорциональные $(P+Q)$ и $(1+PQ)$ в $\mathcal{F}$ (2.1), дают ненулевой вклад, так как они содержат нечетное число гамма матриц. Так как в квазиклассическом приближении функции f_0, $\boldsymbol{f}_{1,2}$, g_0, и $\boldsymbol{g}_{1,2}$ имеют различные характерные значения (см. (1.18)), необходимо учесть первую квазиклассическую поправку к функциям f_0, g_0, $\boldsymbol{f}_1$, и $\boldsymbol{g}_1$, а функции $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{g}_2$ можно брать в главном квазиклассическом приближении. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&(A_{00},\, \boldsymbol{A}_{01},\, \boldsymbol{A}_{10},\, \boldsymbol{A}_{02},\, \boldsymbol{A}_{20}) \\
&= \int d\boldsymbol{r}\, \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)(f_0 g_0,\, f_0\boldsymbol{g}_1,\, \boldsymbol{f}_1 g_0,\, f_0\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{f}_2 g_0)\,.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Тогда матричный элемент M можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
M = \delta_{\mu_p\mu_q}\Big[&\delta_{\lambda\mu_p}(\boldsymbol{e}_\lambda^*, -\boldsymbol{\theta}_q A_{00} - 2\boldsymbol{A}_{10} + 2\mu_p\boldsymbol{A}_{20}) \\
&+\delta_{\lambda\bar{\mu}_p}(\boldsymbol{e}_\lambda^*, -\boldsymbol{\theta}_p A_{00} + 2\boldsymbol{A}_{01} + 2\mu_p\boldsymbol{A}_{02})\Big] - \frac{m\mu_p(p-q)}{\sqrt{2}\,pq}\delta_{\mu_q\bar{\mu}_p}\delta_{\lambda\mu_p}A_{00}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Мы будем проводить вычисления для произвольного атомного потенциала $V(r)$, что позволит учесть эффект атомной экранировки и эффект конечного размера ядра.

Вычисление амплитуд A_{00}, $\boldsymbol{A}_{01}$, $\boldsymbol{A}_{10}$, $\boldsymbol{A}_{02}$, и $\boldsymbol{A}_{20}$ (2.30) выполняется таким же способом, как и в [14]. Оно детально описано в приложении A.

Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
&A_{00} = \frac{1}{\omega m^4}\int d\boldsymbol{r}\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\Big[i2\varepsilon_p\varepsilon_q\xi_p\xi_q(\boldsymbol{p}_\perp+\boldsymbol{q}_\perp)\\
&+m^2(\varepsilon_p\xi_p-\varepsilon_q\xi_q)\int\limits_0^\infty dx\,x\,\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}-x\boldsymbol{\nu})\Big]\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})\,,\\
&\boldsymbol{A}_{01} = \frac{\varepsilon_q\xi_q}{\omega m^2}\int d\boldsymbol{r}\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\\
&\times\Big[i\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}) + \frac{\boldsymbol{\Delta}}{2\varepsilon_p}\int\limits_0^\infty dx\,x\,\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}-x\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}) + \frac{i}{2\varepsilon_p}\boldsymbol{\nabla}_\perp V^2(\boldsymbol{r})\Big]\,,\\
&\boldsymbol{A}_{02} = -\frac{\varepsilon_q\xi_q}{2\omega\varepsilon_p m^2}\int d\boldsymbol{r}\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\\
&\times\int\limits_0^\infty dx\left[\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r}-x\boldsymbol{\nu})\times\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r})\right],\\
&\boldsymbol{A}_{10} = -\boldsymbol{A}_{01}(\varepsilon_q\leftrightarrow\varepsilon_p,\,\xi_q\leftrightarrow\xi_p)\,,\quad \boldsymbol{A}_{20} = -\boldsymbol{A}_{02}(\varepsilon_q\leftrightarrow\varepsilon_p,\,\xi_q\leftrightarrow\xi_p)\,,\\
&\chi(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(z,\boldsymbol{\rho})dz\,,\quad \xi_p = \frac{m^2}{m^2+p_\perp^2}\,,\quad \xi_q = \frac{m^2}{m^2+q_\perp^2}\,.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Подставляя (2.32) в уравнение (2.31), находим явный вид матричного элемента

$$
\begin{aligned}
&M = \frac{\sqrt{2}\mu_p}{m\omega}\delta_{\mu_p\bar{\mu}_q}\delta_{\lambda\mu_p}(\varepsilon_p-\varepsilon_q)[A_0(\xi_p-\xi_q)+A_1(\varepsilon_p\xi_p-\varepsilon_q\xi_q)]\,,\\
&+\frac{2}{m^2\omega}\delta_{\mu_p\mu_q}(\varepsilon_p\delta_{\lambda\mu_p}+\varepsilon_q\delta_{\lambda\bar{\mu}_p})[A_0(\boldsymbol{e}_\lambda^*,\xi_p\boldsymbol{p}_\perp-\xi_q\boldsymbol{q}_\perp)+A_1(\boldsymbol{e}_\lambda^*,\varepsilon_p\xi_p\boldsymbol{p}_\perp-\varepsilon_q\xi_q\boldsymbol{q}_\perp)]\\
&A_1 = -\frac{1}{2\varepsilon_p\varepsilon_q}\int d\boldsymbol{r}\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\int\limits_0^\infty dx\,x\,\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}-x\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})\,.\\
&A_0 = -\frac{i}{\Delta^2}\int d\boldsymbol{r}\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})\,,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Заметим, что из-за сферической симметрии потенциала $V(r)$, вклады от $\boldsymbol{A}_{02}$ и $\boldsymbol{A}_{20}$ сокращаются с членами, пропорциональными $\boldsymbol{\nabla}_\perp V^2(\boldsymbol{r})$ в $\boldsymbol{A}_{01}$ и $\boldsymbol{A}_{10}$ (2.32). Для тормозного излучения электронов необходимо учесть атомную экранировку, а для тормозного излучения мюонов, помимо экранировки, необходимо учесть влияние эффекта конечного размера ядра (отличие потенциала от кулоновского на расстояниях порядка радиуса ядра), так как комптоновская длинна волны мюона $\lambda_\mu = 1/m_\mu = 1.87\,$фм меньше, чем радиус ядра R, например для золота $R = 7.3\,$фм.

Квадрат матричного элемента, усреднённый по поляризациям конечных частиц, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\,\mu_q} |M|^2 = S_0 + S_1 + S_2\,,\\
&S_0 = \frac{2|A_0|^2}{m^2\omega^2}\left[\frac{\Delta^2}{m^2}(\varepsilon_p^2+\varepsilon_q^2)\xi_p\xi_q - 2\varepsilon_p\varepsilon_q(\xi_p-\xi_q)^2\right]\,,\\
&S_1 = \frac{2\mathrm{Re}A_0A_1^*}{m^2\omega^2}\left\{\frac{\Delta^2}{m^2}(\varepsilon_p^2+\varepsilon_q^2)(\varepsilon_p+\varepsilon_q)\xi_p\xi_q\right.\\
&\left.+\Big[(\varepsilon_p^2+\varepsilon_q^2)(\varepsilon_p-\varepsilon_q) - 4\varepsilon_p\varepsilon_q(\varepsilon_p\xi_p-\varepsilon_q\xi_q)\Big](\xi_p-\xi_q)\right\}\,,\\
&S_2 = -\frac{4\mu_p\mathrm{Im}A_0A_1^*}{m^4\omega^2}\,\omega^2(\varepsilon_p+\varepsilon_q)\xi_p\xi_q\,[\boldsymbol{p}_\perp\times\boldsymbol{q}_\perp]\cdot\boldsymbol{\nu}\,.
\end{aligned}\tag{2.34}$$

Так как S_0 и S_2 — четные функции по η, они дают вклад в симметричную часть дифференциального сечения $d\sigma_s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)$ в (2.22). Величина S_1 антисимметрична относительно замены $\eta\to-\eta$, поэтому она дает вклад в антисимметричную часть сечения $d\sigma_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)$ в (2.22). S_2 отвечает асимметрии относительно азимутального угла φ_i. Как и должно быть, этот член сокращается после усреднения по спиральности начальной частицы. Заметим, что член S_0 отвечает главному квазиклассическому вкладу, а члены $S_{1,2}$ — первой квазиклассической поправке.

Коэффициенты A_0 и A_1 зависят от импульсов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{k}$ только через передачу импульса $\mathbf{\Delta}$. Поэтому можно найти из (2.23) и (2.34) сечение

$$\frac{d\sigma_s}{d\omega d\mathbf{\Delta}_\perp} = \frac{\alpha\varepsilon_q}{2\pi^3\omega\varepsilon_p}|A_0|^2\Phi\,, \quad \frac{d\sigma_a}{d\omega d\mathbf{\Delta}_\perp} = \frac{\alpha\varepsilon_q(\varepsilon_p+\varepsilon_q)}{2\pi^3\omega\varepsilon_p}\,\mathrm{Re}\,A_0A_1^*\Phi\,,$$
$$\Phi = \frac{\ln(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2})}{\zeta\sqrt{1+\zeta^2}}\left(\zeta^2\frac{\varepsilon_p^2+\varepsilon_q^2}{\varepsilon_p\varepsilon_q}+1\right)-1\,, \quad \zeta = \frac{\Delta_\perp}{2m}\,. \tag{2.35}$$

Функция Φ имеет следующие асимптотики:

$$\Phi = \left(\frac{\varepsilon_p^2+\varepsilon_q^2}{\varepsilon_p\varepsilon_q}-\frac{2}{3}\right)\zeta^2 \quad \text{при}\,\zeta\ll 1\,,$$
$$\Phi = \frac{\varepsilon_p^2+\varepsilon_q^2}{\varepsilon_p\varepsilon_q}\ln(2\zeta)-1 \quad \text{при}\,\zeta\gg 1\,. \tag{2.36}$$

2.2. Кулоновские поправки к тормозному излучению электронов

Кулоновские поправки к симметричной части дифференциального сечения в главном квазиклассическом приближении определяются областью малых передач импульса $\Delta \sim \max(r_{scr}^{-1}, \Delta_{min})$ [6, 14], где $\Delta_{min} = p - q - \omega \approx m^2\omega/2\varepsilon_q\varepsilon_p$, $r_{scr} \sim 1/(m\alpha Z^{1/3})$ — радиус экранировки . Основной вклад кулоновских поправок в зарядовую и азимутальную асимметрии набирается в области $\Delta \gg \max(r_{scr}^{-1}, \Delta_{min})$. В этой области мы можем пренебречь эффектом экранировки и заменить $V(r)$ на кулоновский потенциал $V_c(r) = -\eta/r$, и также пренебречь $\Delta_\parallel$ по сравнению с $\Delta_\perp$. Тогда коэффициенты A_0 и A_1 в (2.33) принимают следующий вид

$$A_0 = -\frac{4\pi\eta(L\Delta)^{2i\eta}}{\Delta^2}\frac{\Gamma(1-i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)}\,,$$
$$A_1 = -\frac{\pi^2\eta^2(L\Delta)^{2i\eta}}{\varepsilon_p\varepsilon_q\Delta}\frac{\Gamma(1/2-i\eta)}{\Gamma(1/2+i\eta)}\,, \tag{2.37}$$

где $L \sim \min(\varepsilon_p/m^2,\, r_{scr})$. Фактор $(L\Delta)^{2i\eta}$ не важен, так как он сокращается в $|M|^2$. Тогда факторы в S_0, S_1, и S_2 в (2.34), определяющие их зависимость от потенциала, равны

$$|A_0|^2 = \left(\frac{4\pi\eta}{\Delta^2}\right)^2 , \quad \mathrm{Re}A_0A_1^* = \frac{\pi\mathrm{Re}g(\eta)\Delta}{4\varepsilon_p\varepsilon_q}|A_0|^2 ,$$
$$\mathrm{Im}A_0A_1^* = \frac{\pi\mathrm{Im}g(\eta)\Delta}{4\varepsilon_p\varepsilon_q}|A_0|^2 , \;\; g(\eta) = \eta\frac{\Gamma(1-i\eta)\Gamma(1/2+i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)\Gamma(1/2-i\eta)} . \quad (2.38)$$

В области $\Delta \sim m$ дифференциальное сечение в главном квазиклассическом приближении $d\sigma_s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)$ совпадает с результатом, полученным в борновском приближении. Кулоновские поправки к $d\sigma_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)$ (член S_1) и к $d\sigma_s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\eta)$ (член S_2) пропорциональны $\mathrm{Re}g(\eta)$ и $\mathrm{Im}g(\eta)$, соответственно. Реальная и мнимая часть функции $g(\eta)$ показана на рисунке 2.2.

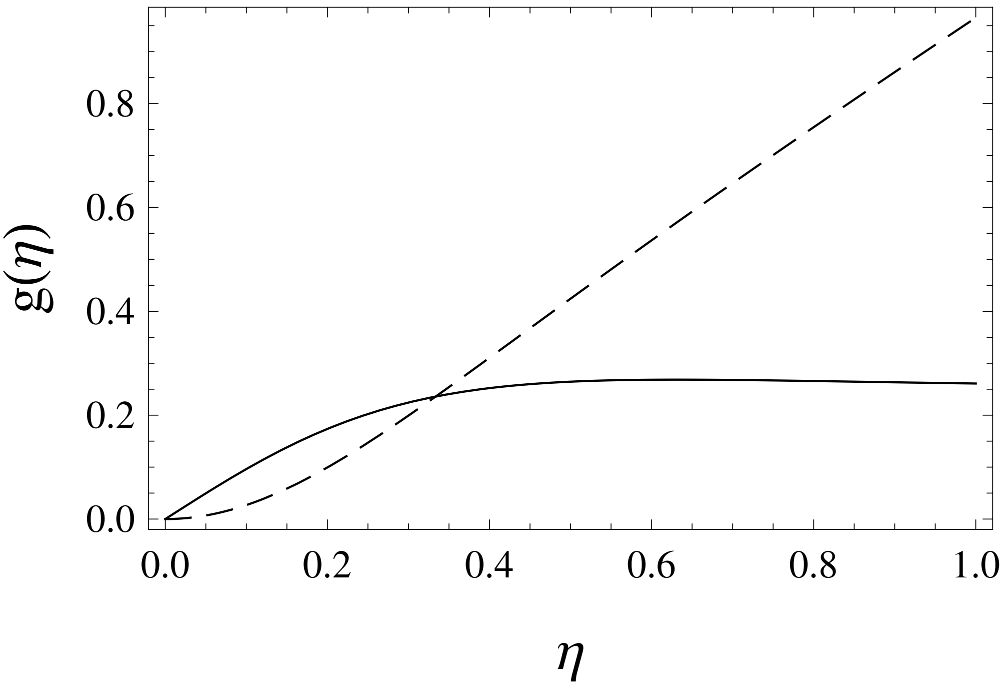

Рис. 2.2. Функция $\mathrm{Re}g(\eta)$ (сплошная линия) и $-\mathrm{Im}g(\eta)$ (пунктирная линия), см. ур.(2.34).

При $\omega \ll \varepsilon_p$, отношение антисимметричной части сечения к симметричной,

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{\pi\Delta\mathrm{Re}g(\eta)}{2\varepsilon_p} , \quad (2.39)$$

возрастает с ростом Δ/ε_p и может достигать десятков процентов. Отношение S_2/S_0 мало при $\omega \ll \varepsilon_p$, так как подавленно фактором $(\omega/\varepsilon_p)^2$.

Если $\boldsymbol{p}_\perp \gg m$ и $\boldsymbol{q}_\perp \gg m$, тогда

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{\pi \mathrm{Re} g(\eta)}{2\Delta} \boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{qp} \,, \quad \frac{S_2}{S_0} = \mu_p \frac{\pi\omega(\varepsilon_p + \varepsilon_q) \mathrm{Im} g(\eta)}{2(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2)\Delta} [\boldsymbol{\Delta} \times \boldsymbol{\theta}_{qp}] \cdot \boldsymbol{\nu} \,, \quad (2.40)$$

где $\boldsymbol{\theta}_{qp} = \boldsymbol{p}_\perp/p - \boldsymbol{q}_\perp/q$. Азимутальная асимметрия возрастает с ростом ω и может быть существенна.

Дифференциальное сечение $d\sigma/d\omega d\boldsymbol{\Delta}_\perp$ (2.35) при $\Delta \gg \max(r_{scr}^{-1}, \Delta_{min})$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_s}{d\omega d\boldsymbol{\Delta}_\perp} &= \frac{8\alpha\eta^2\varepsilon_q}{\pi\omega\varepsilon_p\Delta_\perp^4} \Phi \,, \\ \frac{d\sigma_a}{d\omega d\boldsymbol{\Delta}_\perp} &= \frac{\pi \mathrm{Re} g(\eta)(\varepsilon_p + \varepsilon_q)\Delta}{4\varepsilon_p\varepsilon_q} \frac{d\sigma_s}{d\omega d\boldsymbol{\Delta}_\perp} \,. \end{aligned} \quad (2.41)$$

На рисунке 2.3 показана зависимость $A = \sigma_0^{-1} d\sigma_a/d\omega d\boldsymbol{\Delta}_\perp$ от $\zeta = \Delta_\perp/2m$ для некоторых значениях $t = \varepsilon_q/\varepsilon_p$; $\sigma_0 = \alpha\eta^2 \mathrm{Re} g(\eta)/(2m^2\omega\varepsilon_p\Delta_\perp)$. Этот рисунок подтверждает наше утверждение о том, что главный вклад в антисимметричную часть дифференциального сечения дает область $\Delta \sim m$.

Можно получить дифференциальное сечение, проинтегрированное по углам конечного электрона. Подставляя в (2.23) выражения из (2.38) и интегрируя по $\boldsymbol{q}$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma_s}{d\boldsymbol{k}} = \frac{4\alpha\eta^2\xi_p^2}{\pi m^4\omega^3} \left\{ (\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2)L - \varepsilon_p\varepsilon_q[1 + 4\xi_p(1-\xi_p)(L - 3/2)] \right\} \,, \\ &\frac{d\sigma_a}{d\boldsymbol{k}} = \frac{\pi\alpha\eta^2 \, \mathrm{Re}\, g(\eta)}{m^3\omega^3\varepsilon_p\varepsilon_q} \xi_p \Big[\varepsilon_q(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2 + 2\varepsilon_p\omega\xi_p)F_1 + \xi_p(\varepsilon_p^2\omega - \varepsilon_q^3 - 4\varepsilon_p\varepsilon_q\omega\xi_p)F_2 \Big] \,, \\ &L = \ln\left(\frac{2\varepsilon_p\varepsilon_q}{m\omega}\right) - \frac{1}{2} - f(\eta) \,, \\ &F_1 = F(1/2, 1/2; 1; -p_\perp^2/m^2) = \frac{2}{\pi} K(-p_\perp^2/m^2) \,, \\ &F_2 = F(-1/2, 1/2; 1; -p_\perp^2/m^2) = \frac{2}{\pi} E(-p_\perp^2/m^2) \,, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $K(x)$ и $E(x)$ — эллиптические функции.

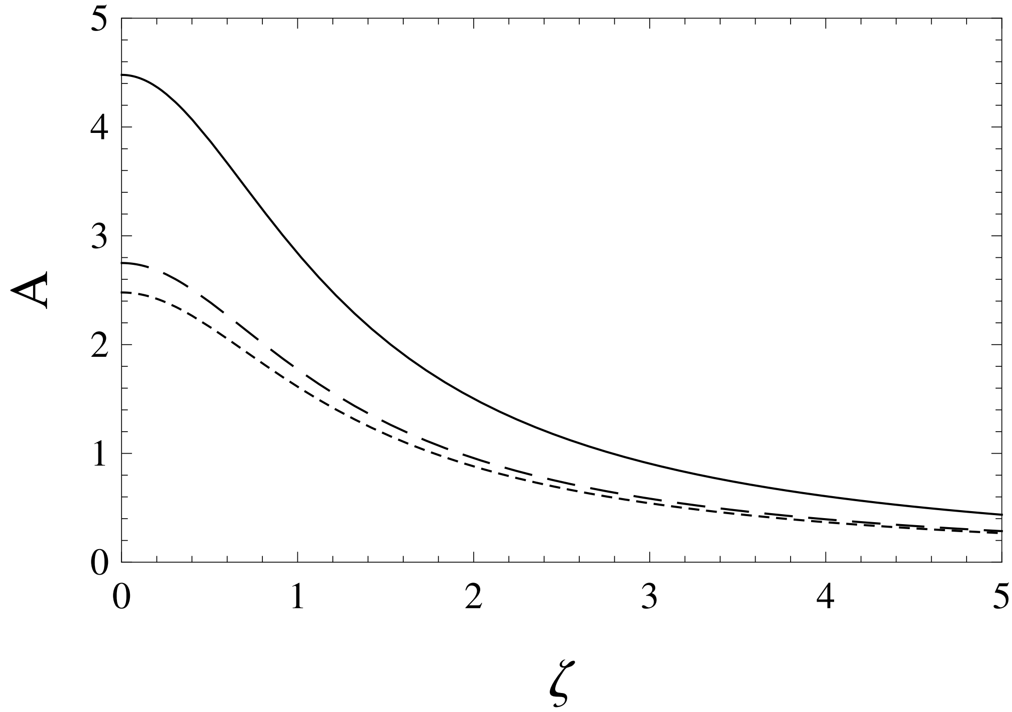

Рис. 2.3. Зависимость $A = \sigma_0^{-1} d\sigma_a / d\omega d\boldsymbol{\Delta}_\perp$ от $\zeta = \Delta_\perp / 2m$ (2.41), для нескольких значений $t = \varepsilon_q/\varepsilon_p$; $\sigma_0 = \alpha\eta^2 \mathrm{Re} g(\eta)/(2m^2\omega\varepsilon_p\Delta_\perp)$: $t = 0.25$ (сплошная кривая), $t = 0.5$ (штриховая кривая) и $t = 0.75$ (пунктирная кривая).

Интегрируя по $\boldsymbol{\Delta}_\perp$ дифференциальное сечение (2.35), получаем антисимметричную часть спектра

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega} = \frac{\alpha\pi^3\eta^2 \mathrm{Re} g(\eta)}{4m\omega\varepsilon_p^2} \left[2\frac{\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2}{\varepsilon_p\varepsilon_q} - 1 \right] (\varepsilon_p + \varepsilon_q)\,. \tag{2.43}$$

Этот результат находится в согласии с первой квазиклассической поправкой к сечению фоторождения электрон-позитронной пары, полученной в [14, 24].

На рисунке 2.4 показана зависимость $A_1 = \sigma_1^{-1} d\sigma_a / d\omega d\boldsymbol{k}_\perp$ от $\zeta_1 = k_\perp/m$ для некоторых значений $t = \varepsilon_q/\varepsilon_p$; $\sigma_1 = \alpha\eta^2 \mathrm{Re} g(\eta)/(2m^3\omega\varepsilon_p)$. Здесь $\boldsymbol{k}_\perp$ — компонента вектора $\boldsymbol{k}$, перпендикулярная вектору $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{k}_\perp = -\omega\boldsymbol{p}_\perp/p$.

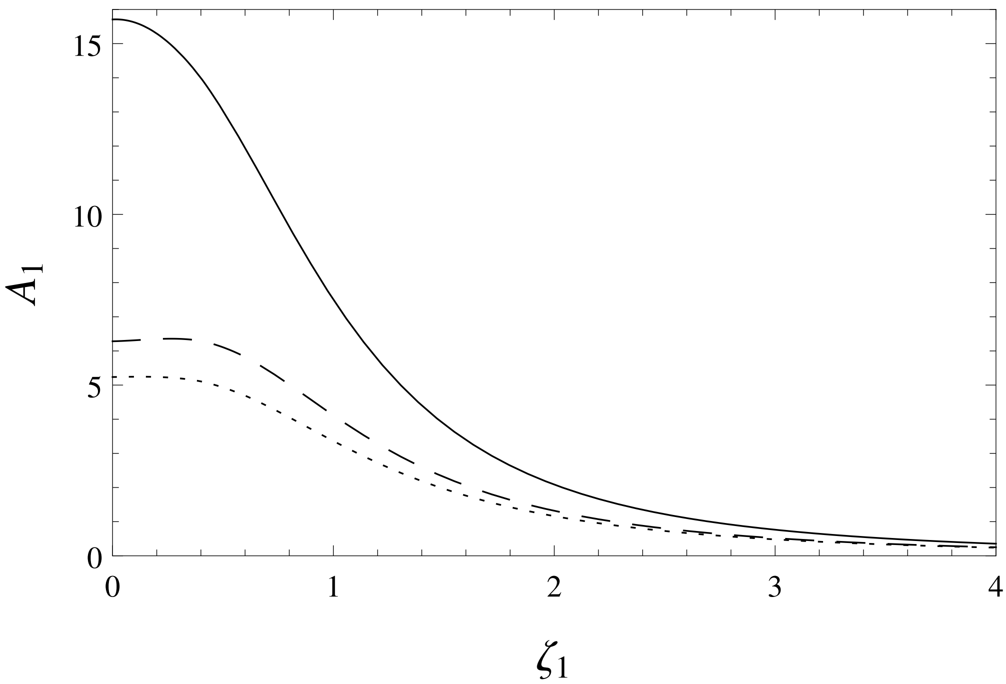

Рис. 2.4. Зависимость $A_1 = \sigma_1^{-1} d\sigma_a / d\omega d\boldsymbol{k}_\perp$ от $\zeta_1 = k_\perp / m$, для нескольких значений $t = \varepsilon_q / \varepsilon_p$; $\sigma_1 = \alpha \eta^2 \mathrm{Re} g(\eta) / (2m^3 \omega \varepsilon_p)$: $t = 0.25$ (сплошная кривая), $t = 0.5$ (штриховая кривая) и $t = 0.75$ (пунктирная кривая).

2.3. Кулоновские поправки к тормозному излучению мюонов

В случае тормозного излучения мюонов оказывается важным учёт отличия атомного потенциала от кулоновского на расстояниях r порядка радиуса ядра R (эффект конечного размера ядра).

Преобразование Фурье $V_F(\Delta^2)$ потенциала $V(r)$ можно представить в следующем виде

$$V_F(\Delta^2) = -\frac{4\pi\eta F(\Delta^2)}{\Delta^2}\,, \tag{2.44}$$

где $F(\Delta^2)$ формфактор, который существенно отличается от единицы при $\Delta \gtrsim 1/R$ и $\Delta \lesssim 1/r_{scr}$. Сначала обсудим кулоновские поправки к симметричной части сечения, вычисленные в главном квазиклассическом приближении. В этом случае дифференциальное сечение $d\sigma_s$ зависит от потенциала через A_0 (2.33). В борновском приближении

$$A_{0B} = \frac{-i}{\Delta^2}\int d\boldsymbol{r}\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}) = V_F(\Delta^2)\,. \qquad (2.45)$$

Кулоновские поправки $\mathcal{A}_0$ к величине $|A_0|^2$ равны

$$\mathcal{A}_0 = |A_0|^2 - |A_{0B}|^2\,. \qquad (2.46)$$

Кулоновские поправки $\mathcal{A}_0$ исчезают при $r_{scr}^{-1} \ll \Delta \ll R^{-1}$ и имеют два пика: при $\Delta \sim r_{scr}^{-1}$ и при $\Delta \sim R^{-1}$. Вклад от этих областей в интеграл $\int \Delta^2\mathcal{A}_0 d\boldsymbol{\Delta}_\perp$ [14] равен

$$\int \Delta^2\mathcal{A}_0 d\boldsymbol{\Delta}_\perp = \mp - 32\pi^3\eta^2 f(\eta)\,,\quad f(\eta) = \mathrm{Re}\psi(1+i\eta) - \psi(1)\,, \qquad (2.47)$$

где $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$. Отрицательный вклад соответствует $\Delta \sim r_{scr}^{-1}$, а положительный вклад — $\Delta \sim R^{-1}$. Интересно, что эти вклады являются универсальными функциями, которые зависят только от η и не зависят от формы потенциала, хотя функция $\mathcal{A}_0$ очень чувствительна к форме потенциала [6, 14]. Для тормозного излучения электрона $m \ll R^{-1}$, поэтому только область $r \sim r_{scr}$ дает ненулевые кулоновские поправки к $d\sigma_s/d\omega$ [6]

$$\frac{d\sigma_C}{d\omega} = -\frac{4\alpha\eta^2 f(\eta)}{m^2\omega}\left(t^2 - \frac{2}{3}t + 1\right)\,,\quad t = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_p}\,. \qquad (2.48)$$

Для мюонов $m_\mu \gg R^{-1}$, так что вклад дают обе области, $\Delta \gtrsim 1/R$ и $\Delta \lesssim 1/r_{scr}$, таким образом суммарные кулоновские поправки к $d\sigma_s/d\omega$ равны нулю. Однако кулоновские поправки к дифференциальному сечению при $\Delta \sim R^{-1}$ существенны. Для того, чтобы проиллюстрировать это утверждение, мы рассмотрим формфактор $F(\Delta^2)$

$$F(\Delta^2) = \frac{\Lambda^2}{\Delta^2 + \Lambda^2}\,, \qquad (2.49)$$

где $\Lambda \sim 60$ МэВ. Этот формфактор описывает потенциал для тяжелых атомов при $\Delta \gg r_{scr}^{-1}$. Фактор A_0 (2.33) равен

$$A_0 = -\frac{4\pi\eta}{\Delta^2}\int\limits_0^\infty d\rho\, J_1(\rho)\left[1 - \frac{\rho}{\beta}K_1\left(\frac{\rho}{\beta}\right)\right]\exp\left\{-2i\eta\left[\ln\frac{\rho}{2} + K_0\left(\frac{\rho}{\beta}\right)\right]\right\},$$
$$A_{0B} = -\frac{4\pi\eta}{\Delta^2(1+\beta^2)}\,, \quad \beta = \frac{\Delta}{\Lambda}\,, \tag{2.50}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя и $K_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. На рисунке 2.5 показана зависимость $G_0 = |A_0|^2/|A_{0B}|^2 - 1$ от $\beta = \Delta/\Lambda$ для некоторых значений η.

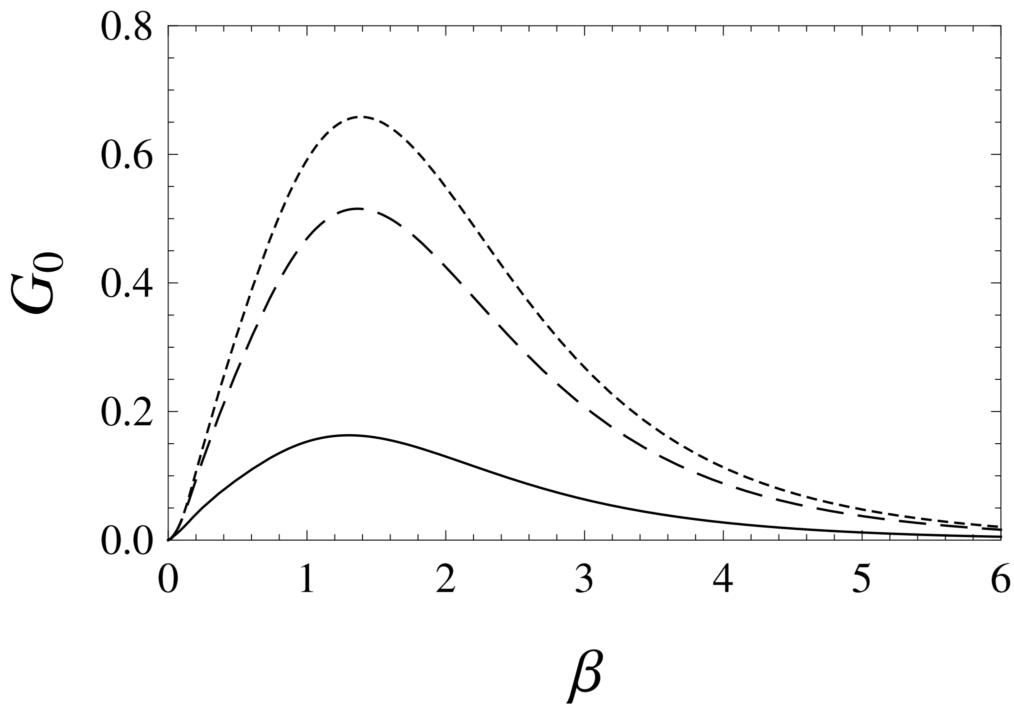

Рис. 2.5. Зависимость $G_0 = |A_0|^2/|A_{0B}|^2 - 1$ от $\beta = \Delta/\Lambda$ при $\beta \gg 1/(r_{scr}\Lambda)$ и нескольких значений η; $\eta = 0.34$ (Ag, сплошная кривая), $\eta = 0.6$ (Pb, штриховая кривая) и $\eta = 0.67$ (U, пунктирная кривая).

Заметим, что узкий пик при $\Delta \sim r_{scr}^{-1}$ ($\beta \sim 1/(r_{scr}\Lambda) \ll 1$) не показан на этом рисунке. Зависимость формы пика от формы потениала при $\Delta \sim r_{scr}^{-1}$ исследовалась в работе [14]. Из рисунка 2.5 видно, что кулоновские поправки к $|A_0|^2$ существенны в области $\Delta/\Lambda \sim 1$.

Фактор A_1 (2.33) в низшем по η приближении имеет следующий вид

$$
\begin{aligned}
&A_{1B} = -\frac{\mathcal{J}(\Delta)}{2\varepsilon_p\varepsilon_q}\,,\\
&\mathcal{J}(\Delta) = \int \frac{d\boldsymbol{s}}{(2\pi)^3}[V_F(Q_+)V_F(Q_-) + (\Delta^2 - 4s_\parallel^2)V_F(Q_+)V_F'(Q_-)]\,,\\
&Q_\pm = (\boldsymbol{s} \pm \boldsymbol{\Delta}/2)^2\,, \quad s_\parallel = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\Delta}/\Delta\,,
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

где $V_F'(Q) = \partial V_F(Q)/\partial Q$, см. [27]. Для формфактора (2.49), функция $\mathcal{J}(\Delta)$ равна [27]

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\Delta) = \frac{2\pi^2\eta^2}{\Delta}\mathcal{F}(\beta)\,, \quad \beta = \frac{\Delta}{\Lambda}\,,\\
&\mathcal{F}(\beta) = 1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{2} - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(\beta) - \frac{12\beta}{\pi(\beta^2+4)(\beta^2+1)}\,.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Точный по η фактор A_1 при $\Delta \gg r_{scr}^{-1}$ равен

$$
\begin{aligned}
A_1 = &-\frac{\pi^2\eta^2}{\varepsilon_p\varepsilon_q\Delta}\iint\limits_{00}^{\infty} dx d\rho\, \mathcal{F}(\beta x/\rho)\, J_0(\rho) J_0(x)\\
&\times \exp\left\{-2i\eta\left[\ln\frac{\rho}{2} + K_0\left(\frac{\rho}{\beta}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

На рисунках 2.6 и 2.7 показана зависимость величин G_1 и G_2,

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\mathrm{Re}A_0A_1^*}{|A_0|^2\Sigma_R}\,, \quad \Sigma_R = \frac{\pi \mathrm{Re} g(\eta)\Delta}{4\varepsilon_p\varepsilon_q}\,,\\
G_2 &= \frac{\mathrm{Im}A_0A_1^*}{|A_0|^2\Sigma_I}\,, \quad \Sigma_I = \frac{\pi \mathrm{Im} g(\eta)\Delta}{4\varepsilon_p\varepsilon_q}\,,
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

от $\beta = \Delta/\Lambda$. Заметим, что для кулоновского поля $G_1 = G_2 = 1$ (2.38).

Видно, что величины G_1 и G_2 быстро убывают с ростом β при $\beta \lesssim 1$.

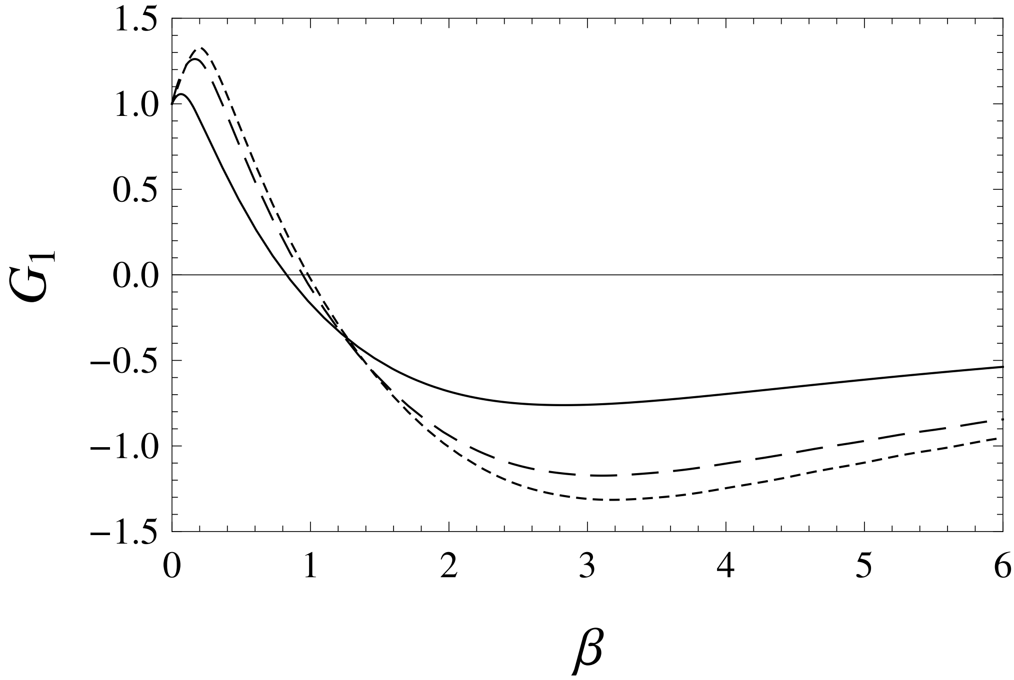

Рис. 2.6. Зависимость $G_1 = \Sigma_R^{-1}\,\mathrm{Re}\,A_0A_1^*/|A_0|^2$ от $\beta = \Delta/\Lambda$, (2.54), для нескольких значений η; $\eta = 0.34$ (серебро, сплошная линия), $\eta = 0.6$ (свинец, штрихованная линия), $\eta = 0.67$ (уран, пунктирная линия).

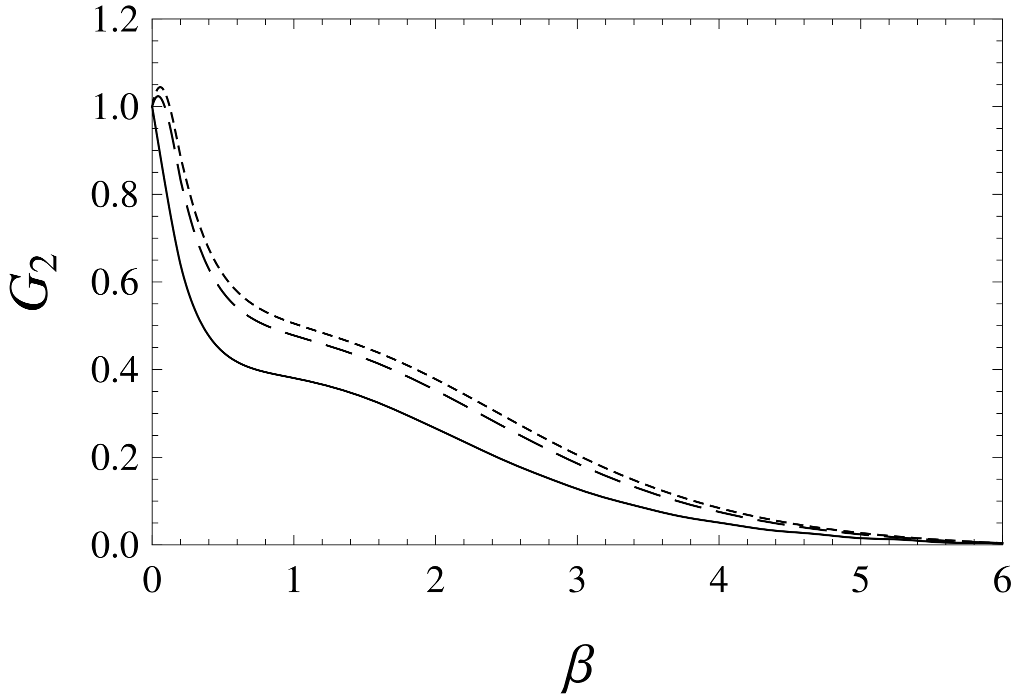

Рис. 2.7. Зависимость $G_2 = \Sigma_I^{-1}\,\mathrm{Im}\,A_0A_1^*/|A_0|^2$ от $\beta = \Delta/\Lambda$, (2.54), для нескольких значений η; $\eta = 0.34$ (серебро, сплошная линия), $\eta = 0.6$ (свинец, штрихованная линия), $\eta = 0.67$ (уран, пунктирная линия).

2.4. Выводы ко второй главе

В настоящей главе мы рассмотрели зарядовую и азимутальную асимметрии в процессе тормозного излучения при высоких энергиях. Эти асимметрии отсутствуют при вычисления сечения в главном квазиклассическом приближении и возникают только при учете первой квазиклассической поправки. Полученный результат является точным по параметру η и справедлив для произвольного сферически симметричного атомного потенциала. Проведён подробный анализ эффекта экранировки для тормозного излучения электрона и эффектов конечного размера ядра и атомной экранировки для тормозного излучения мюона. Показано, что кулоновские поправки дают существенный вклад в дифференциальное сечение.

Глава 3

Двойное тормозное излучение

Изложение этой главы основано на работе [22], в которой процесс двойного тормозного излучения рассматривается в ведущем квазиклассическом приближении. Мы получим точное по η дифференциальное сечение двойного тормозного излучения релятивистского электрона в атомном поле и исследуем влияние эффекта атомной экранировки на дифференциальное сечение этого процесса.

3.1. Процесс $e^-Z \to e^-\gamma_1\gamma_2 Z$

Дифференциальное сечение двойного тормозного излучения заряженной частицы с начальным импульсом $\boldsymbol{p}$ можно записать в следующем виде [41]

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^6}\omega_1\omega_2 q\varepsilon_q d\omega_1 d\omega_2\, d\Omega_{\boldsymbol{k}_1}\, d\Omega_{\boldsymbol{k}_2} d\Omega_{\boldsymbol{q}}\, |M|^2\,, \tag{3.55}$$

где $d\Omega_{\boldsymbol{k}_1}$, $d\Omega_{\boldsymbol{k}_2}$, и $d\Omega_{\boldsymbol{q}}$ — телесные углы, соответствующие импульсам фотонов $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ и конечному импульсу заряженной частицы $\boldsymbol{q}$, $\varepsilon_q = \varepsilon_p - \omega_1 - \omega_2$ — энергия конечной заряженной частицы, $\varepsilon_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $\varepsilon_q = \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + m^2}$. Также мы подразумеваем, что $\varepsilon_p \gg m$ и $\varepsilon_q \gg m$. Матричный элемент M равен (см. рисунок 3.1)

$$\begin{aligned}
&M = M^{(1)} + M^{(2)}\,,\\
&M^{(1)} = -\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 - i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}\, \bar{u}^{(-)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}_2)\hat{e}_2^* G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon_p - \omega_1)\hat{e}_1^*\, u^{(+)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1)\,,\\
&M^{(2)} = M^{(1)}(\boldsymbol{k}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{k}_2\,,\, \omega_1 \leftrightarrow \omega_2\,,\, \boldsymbol{e}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{e}_2)\,,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

где $\hat{e} = \gamma^\nu e_\nu = -\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_{1,2}$ — вектора поляризации фотонов и $G(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ — функция Грина уравнения Дирака во внешнем поле $V(r)$. С помощью уравнения Дирака перепишем матричный элемент $M^{(1)}$ в (3.56) через функцию Грина $D(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon)$ квадрированого уравнения Дирака (1.5):

$$M^{(1)} = -\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 - i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}\, \bar{u}^{(-)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}_2)\hat{e}^*_2 D(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1|\varepsilon_p - \omega_1)$$
$$\times\, [2i\boldsymbol{e}^*_1\cdot\boldsymbol{\nabla} + \hat{e}^*_1\hat{k}_1]\, u^{(+)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1)\,. \tag{3.57}$$

В пределах нашей точности необходимо учесть d_0, $\boldsymbol{d}_1$, f_0, $\boldsymbol{f}_1$, g_0 и $\boldsymbol{g}_1$ в главном квазиклассическом приближении (см. (1.19) и (1.15)).

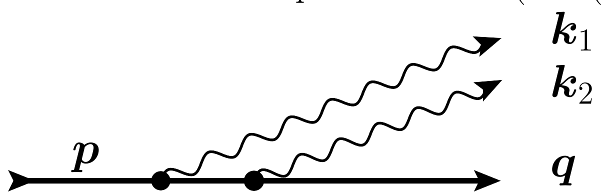

Рис. 3.1. Диаграммы процесса $e^-Z \to \gamma_1\gamma_2 e^- Z$. Жирные линии соответствуют волновым функциям и функциям Грина в атомном поле.

Удобно проводить вычисления в спиральном базисе. Пусть μ_p, μ_q, λ_1, и λ_2 — знаки спиральностей начального и конечного электрона и испускаемых фотонов. Зафиксируем систему координат следующим образом: $\boldsymbol{\nu} \equiv \boldsymbol{n}_p = \boldsymbol{p}/p$ направлен по оси z, $\boldsymbol{q}$ лежит в плоскости xz с $q_x > 0$.

Используя матрицу $\mathcal{F} = u_{\boldsymbol{p}\,\mu_p}\bar{u}_{\boldsymbol{q}\,\mu_q}$ (2.1), матричный элемент M можно переписать в следующем виде

$$M^{(1)} = -\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 - i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}\, \mathrm{Tr}\, [f_0\hat{e}^*_2 d_0\Theta\, g_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{f}_1\hat{e}^*_2 d_0\Theta\, g_0$$
$$+\, f_0\hat{e}^*_2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{d}_1\Theta\, g_0 - f_0\hat{e}^*_2 d_0\Theta\, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_1]\mathcal{F}\,,$$
$$\Theta = 2i\boldsymbol{e}^*_1\cdot\boldsymbol{\nabla} + \hat{e}^*_1\hat{k}_1\,. \tag{3.58}$$

Заметим, что только члены, пропорциональные $(P+Q)$ и $(1+PQ)$ в $\mathcal{F}$ (2.1), дают вклад в матричный элемент (3.58), так как только они содержат четное число γ-матриц. Мы будем проводить вычисления M для произвольного атомного потенциала $V(r)$, что позволит учесть эффект атомной экранировки.

3.2. Матричный элемент и дифференциальное сечение

Вычисление матричного элемента (3.56) подробно описано в приложении Б.

Матричный элемент равен

$$
\begin{aligned}
&M_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Delta})\cdot\Big[\boldsymbol{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_2\lambda_1}(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)\Big]\,,\\
&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Delta}) = -i\int d\boldsymbol{r}\,\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\boldsymbol{\nabla}_\perp V(r)\,,\quad \chi(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{z^2+\rho^2})dz\,,\\
&\boldsymbol{T}_{++++}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = p\left[(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{j}_0 + N_1(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})\boldsymbol{e}^* + N_3(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{e}^*\right]\,,\\
&\boldsymbol{T}_{+++-}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \left[p(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2}) - \frac{m^2\omega_1}{2pq}\right]\boldsymbol{j}_0 + p(N_2+N_3)(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})\boldsymbol{e}\\
&+N_3(\boldsymbol{e},\,p\boldsymbol{\theta}_{k_2} - \boldsymbol{\Delta}_\perp)\boldsymbol{e}^*\,,\\
&\boldsymbol{T}_{++-+}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \varkappa\left[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{j}_0 + N_1(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})\boldsymbol{e}^* + N_3(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{e}\right]\,,\\
&\boldsymbol{T}_{++--}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = q\left[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{j}_0 + N_1(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})\boldsymbol{e} + N_3(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{e}\right]\,,\\
&\boldsymbol{T}_{+-++}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = -\frac{m(\omega_1+\omega_2)}{\sqrt{2}q}\left[(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})\boldsymbol{j}_0 + N_3\boldsymbol{e}^*\right]\\
&-\frac{m\omega_1}{\sqrt{2}p}\left[(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2k_1})\boldsymbol{j}_0 + N_2\boldsymbol{e}^*\right]\,,\\
&\boldsymbol{T}_{+-+-}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = -\frac{m\omega_1}{\sqrt{2}p}\left[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\boldsymbol{j}_0 + N_1\boldsymbol{e}\right]\,,\\
&\boldsymbol{T}_{+--+}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = -\frac{m\omega_2}{\sqrt{2}q}\left[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta}_{k_1})\boldsymbol{j}_0 + N_3\boldsymbol{e}\right]\,,\\
&\boldsymbol{T}_{+---}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = 0\,,\\
&\boldsymbol{T}_{\bar\mu_p\bar\mu_q\bar\lambda_1\bar\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \bar\mu_p\bar\mu_q\boldsymbol{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\,|_{\boldsymbol{e}\leftrightarrow\boldsymbol{e}^*}\,,\quad \bar\mu = -\mu\,,\quad \bar\lambda = -\lambda\,.
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Мы использовали следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)\,, \quad \boldsymbol{\theta}_{k_2q} = \boldsymbol{\theta}_{k_2} - \boldsymbol{\theta}_q\,, \quad \boldsymbol{\theta}_{k_2k_1} = \boldsymbol{\theta}_{k_2} - \boldsymbol{\theta}_{k_1}\,,\\
&\varkappa = p - \omega_1\,, \quad \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}\,, \quad \boldsymbol{\Delta}_\perp = q\boldsymbol{\theta}_q + \omega_1\boldsymbol{\theta}_{k_1} + \omega_2\boldsymbol{\theta}_{k_2}\,,\\
&\boldsymbol{j}_0 = \frac{4}{a_1a_2a_3a_4}\{a_3[(p+q)\boldsymbol{\Delta}_\perp - 2pq\boldsymbol{\theta}_q] + a_1\omega_2(\boldsymbol{\Delta}_\perp + 2q\boldsymbol{\theta}_{k_2q})\}\,,\\
&N_1 = \frac{4}{a_2a_3}\,, \quad N_2 = \frac{4}{a_3a_4}\,, \quad N_3 = \frac{4}{a_1a_4}\,,\\
&a_1 = -\frac{\omega_1}{\varkappa}[(\boldsymbol{\Delta}_\perp - p\boldsymbol{\theta}_{k_1})^2 + m^2] - \frac{p\omega_2}{q\varkappa}[q^2\boldsymbol{\theta}_{k_2q}^2 + m^2]\,,\\
&a_2 = \frac{\omega_2}{\varkappa}[(\boldsymbol{\Delta}_\perp + q\boldsymbol{\theta}_{k_2q})^2 + m^2] + \frac{q\omega_1}{p\varkappa}[p^2\boldsymbol{\theta}_{k_1}^2 + m^2]\,,\\
&a_3 = \frac{\omega_1}{p}[p^2\boldsymbol{\theta}_{k_1}^2 + m^2]\,, \quad a_4 = \frac{\omega_2}{q}[q^2\boldsymbol{\theta}_{k_2q}^2 + m^2]\,.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

В пределах нашей точности можно заменить p и q в уравнениях (3.59) и (3.60) на ε_p и ε_q. Используя то, что $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Delta})$ параллелен вектору $\boldsymbol{\Delta}_\perp$:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Delta}) = A_0(\boldsymbol{\Delta})\,\boldsymbol{\Delta}_\perp\,,\\
&A_0(\boldsymbol{\Delta}) = -\frac{i}{\Delta_\perp^2}\int d\boldsymbol{r}\exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right]\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(r)\,,
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

можно переписать матричный элемент $M_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}$ следующим образом

$$
\begin{aligned}
&M_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = -A_0(\boldsymbol{\Delta})\,\mathcal{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}\,,\\
&\mathcal{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = \boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\Big[\boldsymbol{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_2\lambda_1}(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Видно, что матричный элемент двойного и однократного тормозного излучения в главном квазиклассическом приближении пропорциональны одному и тому же фактору $A_0(\boldsymbol{\Delta})$, который подробно обсуждался в предыдущей главе. В борновском приближении

$$
A_0^B(\boldsymbol{\Delta}) = V_F(\Delta^2) = -\frac{4\pi\eta F(\Delta^2)}{\Delta^2}\,,
\tag{3.63}
$$

где $V_F(\Delta^2)$ — преобразование Фурье от потенциала $V(r)$, и $F(\Delta^2)$ — атомный формфактор, который существенно отличается от единицы при $\Delta \lesssim 1/r_{scr}$.

Таким образом, амплитуда в борновском приближении равна

$$M^B_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = -V_F(\Delta^2)\,\mathcal{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}\,, \tag{3.64}$$

где $\mathcal{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}$ определён в (3.62).

Из результатов для амплитуд однократного и двойного тормозного излучения видно, что такая же структура будет возникать и при n-кратном тормозном излучении (амплитуда будет пропорциональна $A_0(\boldsymbol{\Delta})$). Для получения амплитуды излучения n фотонов в атомном поле в главном квазиклассическом приближении можно следовать следующему рецепту: сначала вычисляем амплитуду в борновском приближении, а затем делаем замену $V_F(\Delta^2) \to A_0(\boldsymbol{\Delta})$. Следует отметить, что такая факторизация происходит только в главном квазиклассическом приближении, и она нарушается при учёте первой квазиклассической поправки, как это видно из матричного элемента однократного тормозного излучения (2.33).

При $\Delta_\perp \gg \max(r_{scr}^{-1}, |\Delta_\parallel|)$ мы можем пренебречь эффектом атомной экранировки и заменить $V(r)$ на кулоновский потенциал $V_c(r) = -\eta/r$, а также пренебречь параллельной передачей импульса $\Delta_\parallel = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\Delta}$, которая для двойного тормозного излучения равна

$$\Delta_\parallel = -\frac{1}{2}\left[q\theta_q^2 + \omega_1\theta_{k_1}^2 + \omega_2\theta_{k_2}^2 + \frac{m^2(\omega_1+\omega_2)}{pq}\right]. \tag{3.65}$$

В этом случае фактор $A_0(\boldsymbol{\Delta})$ можно заменить на (см. (2.37))

$$A_0(\boldsymbol{\Delta}) = -\frac{4\pi\eta(L\Delta)^{2i\eta}}{\Delta^2}\frac{\Gamma(1-i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)}\,, \tag{3.66}$$

где $\Gamma(x)$ — Γ-функция Эйлера, а $L \sim \min(|\Delta_\parallel|^{-1},\, r_{scr})$. Как уже было сказано выше, фактор $(L\Delta)^{2i\eta}$ не важен, так как он не входит в $|M|^2$. Также как и в случае однократного тормозного излучения, в области $\Delta_\perp \gg \max(r_{scr}^{-1}, |\Delta_\parallel|)$ точный ответ с точностью до фазы совпадает с борновским результатом $|A_0(\boldsymbol{\Delta})| = |A_0^B(\boldsymbol{\Delta})|$.

Дифференциальное сечение двойного тормозного излучения $d\sigma$ (3.55) можно представить в виде суммы борновского сечения и кулоновских поправок:

$$
\begin{aligned}
& d\sigma_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = d\sigma^B_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} + d\sigma^C_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}\,,\\
& d\sigma^B_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^6}\omega_1\omega_2\, d\omega_1 d\omega_2\, d\boldsymbol{\theta}_{k_1}\, d\boldsymbol{\theta}_{k_2} d\boldsymbol{\Delta}_\perp\, |A_0^B(\boldsymbol{\Delta})|^2 |\mathcal{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}|^2\,,\\
& d\sigma^C_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^6}\omega_1\omega_2\, d\omega_1 d\omega_2\, d\boldsymbol{\theta}_{k_1}\, d\boldsymbol{\theta}_{k_2} d\boldsymbol{\Delta}_\perp\, \mathcal{A}_0(\boldsymbol{\Delta})\, |\mathcal{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}|^2\,,\\
& \mathcal{A}_0 = |A_0|^2 - |A_{0B}|^2\,,
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

где мы перешли от интегрирования по телесному углу $d\Omega_{\boldsymbol{q}}$ к интегрированию по двумерному вектору $d\boldsymbol{\Delta}_\perp$. Из уравнений (3.63) и (3.66) видно, что только область малых $\Delta_\perp$, $\Delta_\perp \sim \max(r_{scr}^{-1}, |\Delta_\parallel|) \ll m$, даёт вклад в $d\sigma^C$. Как было показано в [14], функция $\mathcal{A}_0(\boldsymbol{\Delta})$ очень чувствительна к форме атомного потенциала при $r \sim r_{scr}$, а интеграл

$$
\begin{aligned}
& \int \Delta^2 \mathcal{A}_0(\boldsymbol{\Delta}) d\boldsymbol{\Delta}_\perp = -32\pi^3\eta^2 f(\eta)\,,\\
& f(\eta) = \mathrm{Re}\,\psi(1+i\eta) - \psi(1)\,,
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

не зависит от формы потенциала; $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$. Таким образом, кулоновские поправки, проинтегрированные по $d\boldsymbol{\Delta}_\perp$, имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
d\sigma^C_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} &= -\frac{\alpha^2\eta^2 f(\eta)}{4\pi^3}\omega_1\omega_2\, d\omega_1 d\omega_2\, d\boldsymbol{\theta}_{k_1}\, d\boldsymbol{\theta}_{k_2}\\
&\times |\boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_2\lambda_1}(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_1)|^2\,,
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

где функция $\boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)$ равна $\boldsymbol{T}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)$, см. уравнение (3.59), взятая при $\boldsymbol{\Delta}_\perp = 0$. Главный вклад в борновское сечение, проинтегрированное по $d\boldsymbol{\Delta}_\perp$, дается областью малых $\Delta_\perp$: $m \gg \Delta_\perp \gg m\beta$, где

$$
\beta = \max\left\{\frac{1}{mr_{scr}}\,, \frac{|\Delta_\parallel|}{m}\right\}\,. \tag{3.70}
$$

При условии $\ln(1/\beta) \gg 1$ борновское сечение с логарифмической точностью равно

$$d\sigma^B_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} = \frac{\alpha^2\eta^2}{4\pi^3}\omega_1\omega_2\, d\omega_1 d\omega_2\, d\boldsymbol{\theta}_{k_1}\, d\boldsymbol{\theta}_{k_2}\, \ln\frac{1}{\beta}$$
$$\times\, |\boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_2\lambda_1}(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)|^2\,. \tag{3.71}$$

Для демонстрации угловой зависимости кулоновских поправок, на рисунках 3.2 и 3.3 показана зависимость безразмерной величины S,

$$S = \frac{m^6}{2}\sum_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2} |\boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{T}^{(0)}_{\mu_p\mu_q\lambda_2\lambda_1}(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)|^2\,, \tag{3.72}$$

от $\delta_2 = pk_{2\perp}/m\omega_2$ и от азимутального угла φ между векторами $\boldsymbol{k}_{1\perp}$ и $\boldsymbol{k}_{2\perp}$.

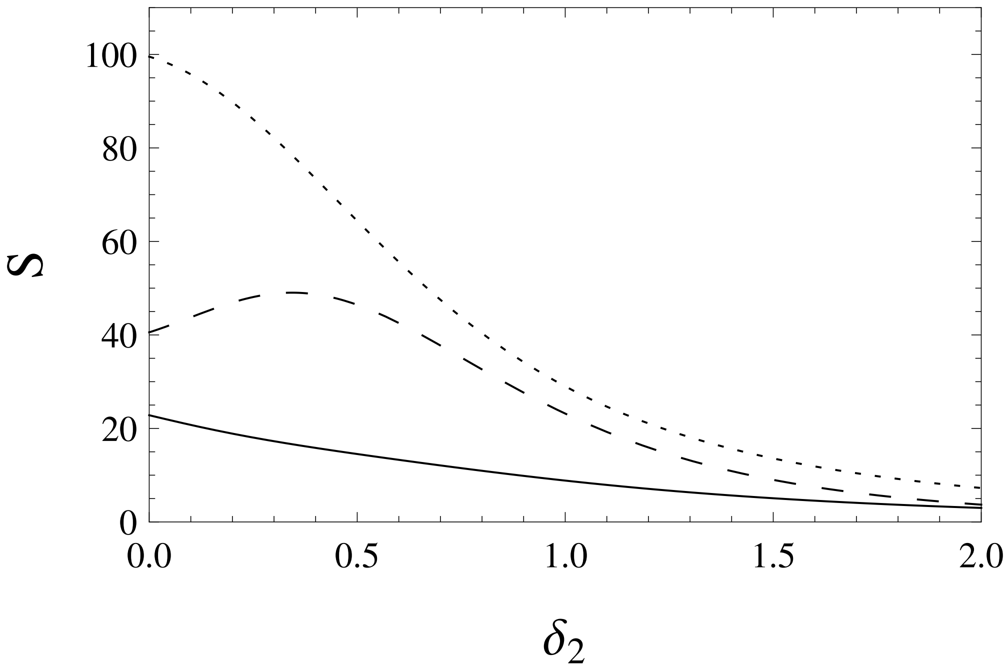

Рис. 3.2. Зависимость S (3.72) от $\delta_2 = pk_{2\perp}/m\omega_2$ при $\omega_1/\varepsilon_p = 0.2$, $\omega_2/\varepsilon_p = 0.4$, $\varphi = 0$, $\delta_1 = pk_{1\perp}/m\omega_1 = 0.2$ (штрихованная линия), $\delta_1 = 1$ (пунктирная линия) и $\delta_1 = 2$ (сплошная линия).

На рисунке 3.4 показана зависимость величины S_1 от $\delta_1 = pk_{1\perp}/m\omega_1$ при фиксированных ω_1/ε_p и ω_2/ε_p, где

$$S_1 = \frac{p^2}{16\pi^2 m^2}\int S\, d\boldsymbol{\theta}_{k_2}\,. \tag{3.73}$$

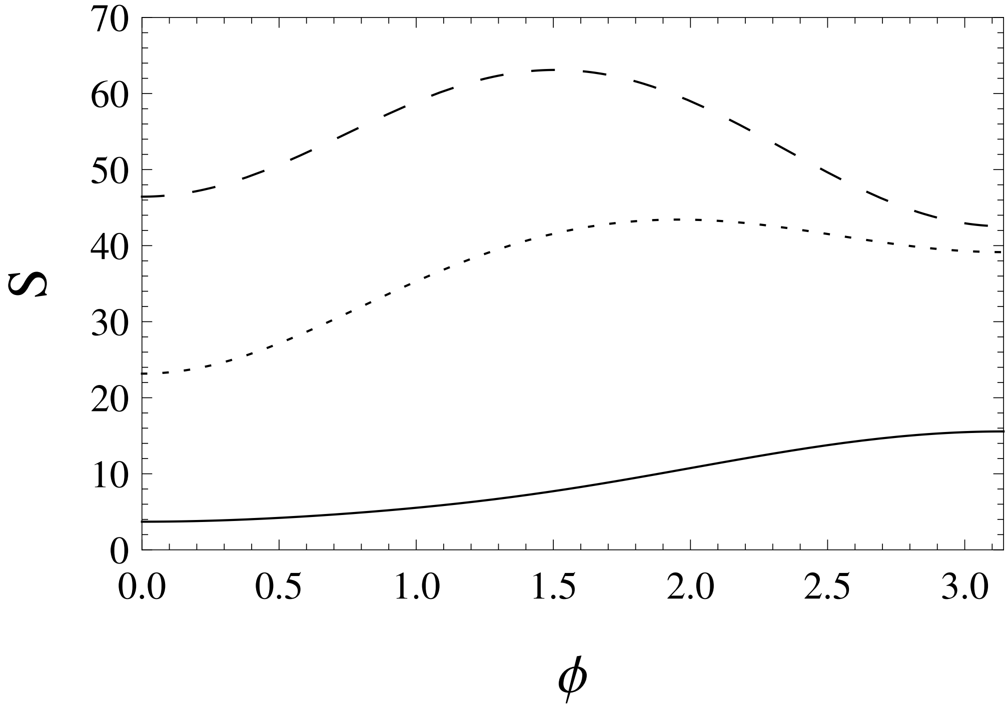

Рис. 3.3. Зависимость S (3.72) от азимутального угла φ между векторами $\boldsymbol{k}_{1\perp}$ и $\boldsymbol{k}_{2\perp}$ при $\omega_1/\varepsilon_p = 0.2$, $\omega_2/\varepsilon_p = 0.4$, $\delta_1 = 0.2$, $\delta_2 = 0.5$ (штрихованная линия), $\delta_2 = 1$ (пунктирная линия) и $\delta_2 = 2$ (сплошная линия).

Видно, что основной вклад в сечение будет набираться в области $\delta_1 \sim 1$.

Кулоновские поправки к спектру двойного тормозного излучения, усредненному по поляризациям начального электрона и просуммированному по поляризациям конечных частиц, равны

$$d\sigma^C = -\frac{8\alpha^2\eta^2 f(\eta) d\omega_1 d\omega_2}{\pi m^2 \omega_1 \omega_2} G(\omega_1/\varepsilon_p,\, \omega_2/\varepsilon_p)\,, \tag{3.74}$$

где функция $f(\eta)$ определена в (3.68), функция $G(\omega_1/\varepsilon_p,\, \omega_2/\varepsilon_p)$ для произвольных частот вычислялась путём численного интегрирования дифференциального сечения по углам вылета фотонов. На рисунке 3.5 показана зависимость функции $G[\Omega x, \Omega(1-x)]$ от x для нескольких значений Ω, где $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/\varepsilon_p$ и $x = \omega_1/(\omega_1 + \omega_2)$. Для $\omega_2 \ll \omega_1$, ε_q получаем результат,

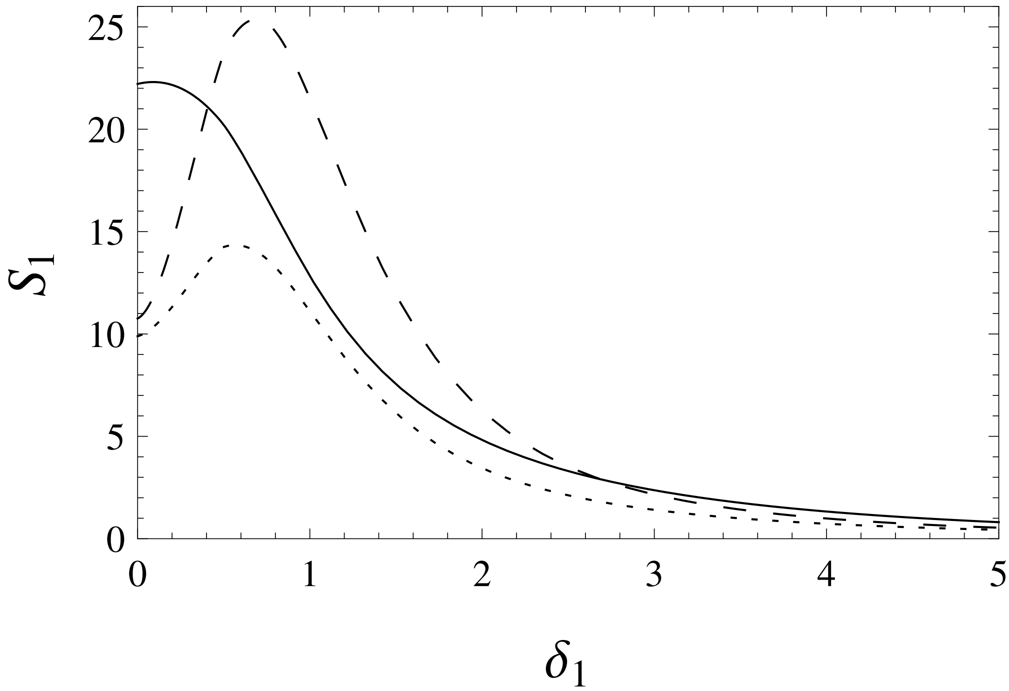

Рис. 3.4. Зависимость S_1 (3.73) от δ_1 при $\omega_1/\varepsilon_p = \Omega x$ и $\omega_2/\varepsilon_p = \Omega(1-x)$, где $\Omega = 0.4$, $x = 0.3$ (штрихованная линия), $x = 0.5$ (пунктирная линия) и $x = 0.7$ (сплошная линия).

согласующийся с мягкофотонным приближением [41],

$$F(x) = G(x,0) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{(1+y)^2}\left[1+(1-x)^2 - \frac{4y(1-x)}{(1+y)^2}\right]\Phi(x,y)\,,$$

$$\Phi(x,y) = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\ln(t+\sqrt{t^2-1}) - 1\,, \quad t = 1 + \frac{x^2(1+y)}{2(1-x)}\,. \tag{3.75}$$

Функция $F(x)$ показана на рисунке 3.6. Она имеет следующие асимптотики:

$$F(x) \approx \frac{4}{3}x^2 \ln\frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \ll 1\,,$$
$$F(x) \approx \ln\frac{1}{1-x} \quad \text{при} \quad 1-x \ll 1\,. \tag{3.76}$$

С логарифмической точностью спектр борновского сечения равен

$$d\sigma^B = \frac{8\alpha^2\eta^2 d\omega_1 d\omega_2}{\pi m^2\omega_1\omega_2}\, G(\omega_1/\varepsilon_p,\, \omega_2/\varepsilon_p)\, \ln\frac{1}{\beta_0}\,, \tag{3.77}$$

где функция G определена в (3.74) и

$$\beta_0 = \max\left\{\frac{1}{mr_{scr}}\,,\, \frac{m(\omega_1+\omega_2)}{\varepsilon_p\varepsilon_q}\right\} \ll 1\,. \tag{3.78}$$

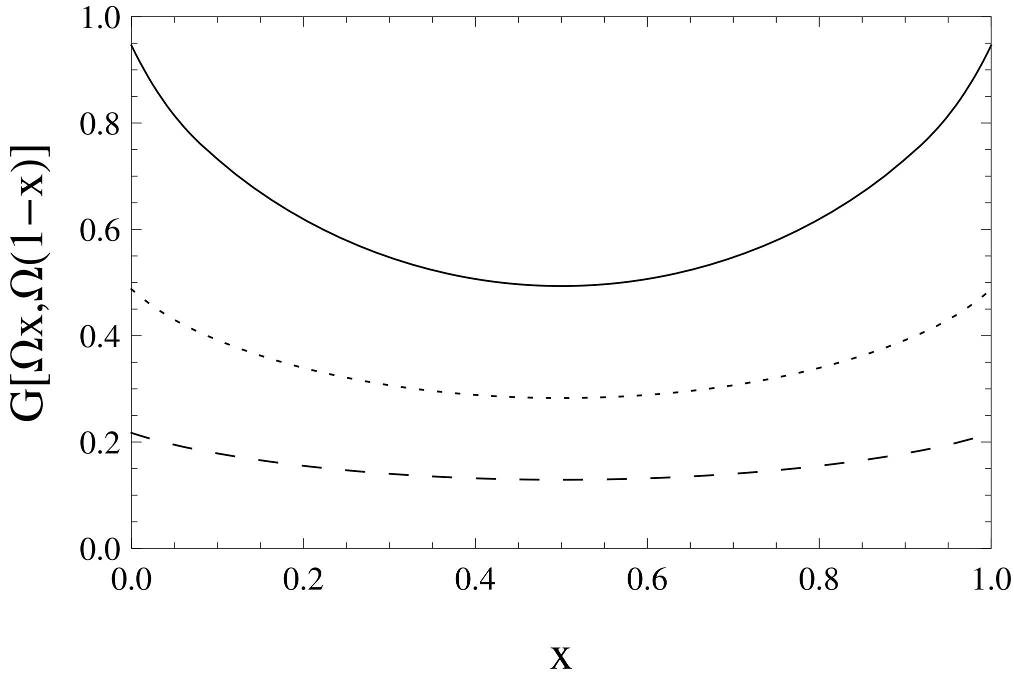

Рис. 3.5. Зависимость $G[\Omega x, \Omega(1-x)]$ от x (3.74) при $\Omega = 0.3$ (штрихованная линия), $\Omega = 0.5$ (пунктирная линия) и $\Omega = 0.7$ (сплошная линия). Здесь $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/\varepsilon_p$ и $x = \omega_1/(\omega_1 + \omega_2)$.

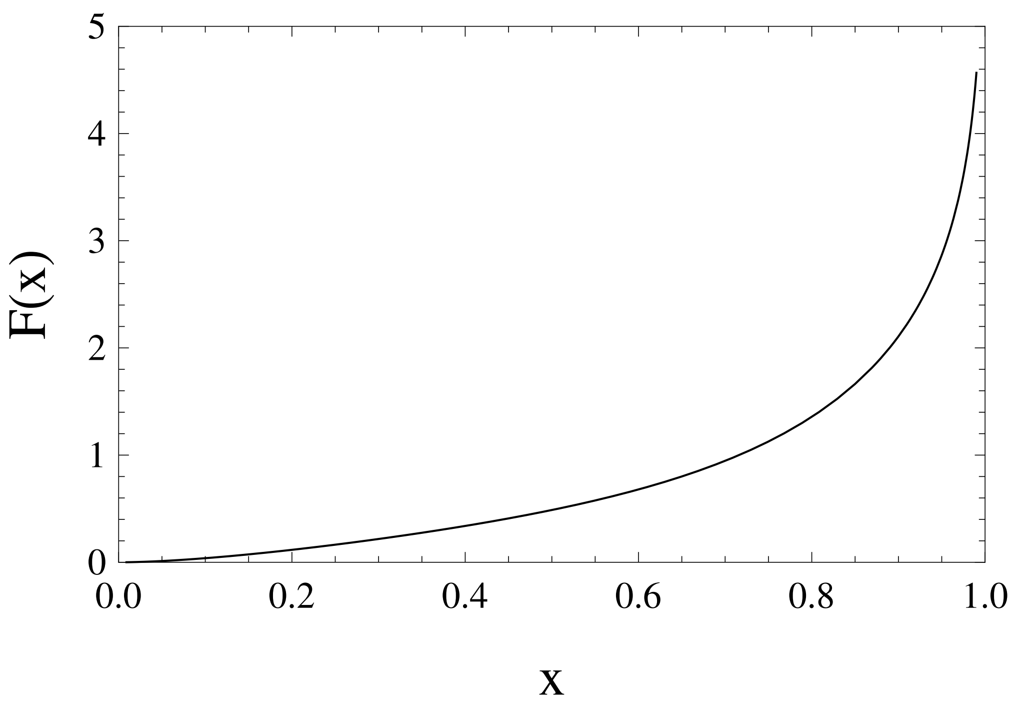

Рис. 3.6. Зависимость of $F(x)$, см. (3.75), от $x = \omega_1/\varepsilon_p$.

3.3. Выводы к третьей главе

В настоящей главе мы получили точное по η дифференциальное сечение двойного тормозного излучения. Оказалось, что вся зависимость от потенциала в главном квазиклассическом приближении сводится к тому же фактору $A_0(\Delta)$, что и в случае однократного тормозного излучения. Из проведённого анализа видно, что для n-кратного тормозного излучения будет выполнятся такая же факторизация. Это утверждение позволяет сформулировать рецепт для вычисления амплитуды n-кратного тормозного излучения в главном квазиклассическом приближении: нужно вычислить амплитуду в борновском приближении и заменить Фурье образ потенциала на $A_0(\Delta)$.

Глава 4

Фоторождение пар, сопровождаемое излучением фотона

Данная глава посвящена изучению процесса $\gamma \to e^+e^-\gamma'$ в поле тяжёлого атома. Мы получим амплитуду этого процесса в спиральном базисе в виде двукратного интеграла и исследуем влияние атомной экранировки, кулоновских поправок на дифференциальное сечение этого процесса. Изложение этой главы основано на работе [32].

4.1. Процесс $\gamma Z \to e^+e^-\gamma' Z$

Основной вклад в сечение этого процесса даёт область малых поперечных импульсов по сравнению с импульсом налетающей частицы. В этой области

$$d\sigma = \alpha^2 |M|^2 \frac{d\boldsymbol{p}_\perp \, d\boldsymbol{q}_\perp \, d\boldsymbol{k}_{2\perp} d\varepsilon_p d\varepsilon_q}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2}\,, \tag{4.79}$$

где $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ — импульсы налетающего и улетающего фотона, электрона, и позитрона, $\varepsilon_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $\varepsilon_q = \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + m^2}$, $\omega_2 = \omega_1 - \varepsilon_p - \varepsilon_q$. Фиксируем систему координат: вектор $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k}_1/\omega_1$ направлен по оси z, $\boldsymbol{k}_2$ лежит в плоскости xz и $k_{2x} > 0$. Удобно ввести следующие обозначения: $\boldsymbol{X}_\perp = \boldsymbol{X} - (\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{X}_\perp/(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nu})$ и $\boldsymbol{\theta}_{XY} = \boldsymbol{\theta}_X - \boldsymbol{\theta}_Y$, где $\boldsymbol{X}$ произвольный вектор.

Матричный элемент имеет следующий вид

$$
\begin{aligned}
M = M^{(1)} + M^{(2)} = -\int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2\, \bar{u}^{(-)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1) \\
\times \Big\{ (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_2^*) e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_1} G(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon_p + \omega_2) e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_1) \\
+ (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_1) e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1} G(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2| - \varepsilon_q - \omega_2) e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_2^*) \Big\} v^{(+)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}_2)\,. \quad (4.80)
\end{aligned}
$$

Где $u^{(-)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ и $v^{(+)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})$ — положительно и отрицательно частотные решения уравнения Дирака в поле ядра, $\boldsymbol{e}_{1,2}$ — вектора поляризации начального и конечного фотона, γ^μ — матрицы Дирака, $G(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon)$ функция Грина уравнения Дирака во внешнем поле. Индексы $(-)$ и $(+)$ напоминают, что асимптотика функций $u^{(-)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ и $v^{(+)}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})$ на больших $\boldsymbol{r}$ состоит из сумм плоской волны и соответственно сферически сходящейся и расходящейся волны. Первый член $M^{(1)}$ уравнения (4.80) соответствует излучению с электронной линии, а второй член $M^{(2)}$ — излучению с позитронной линии, см. рисунок 4.1, a и b. Удобно переписать уравнение (4.80) через квадрированную функцию Грина $D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon)$, представленную в (1.5).

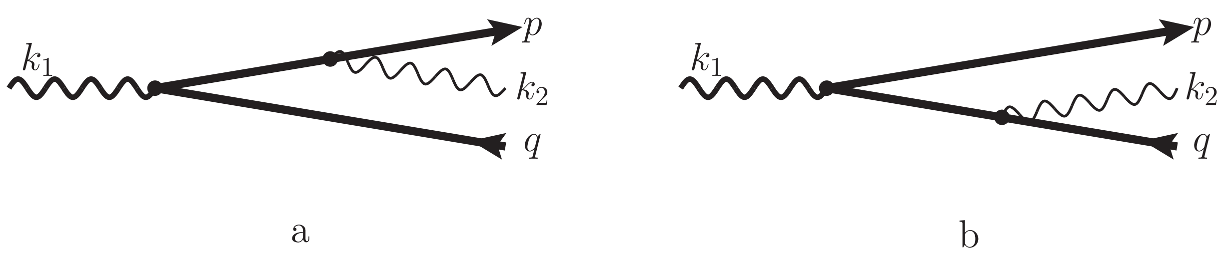

Рис. 4.1. Диаграмма процесса $\gamma_1 Z \to e^+e^-\gamma_2 Z$. Жирная линия обозначает точный пропагатор в поле ядра.

Подставляя (1.5) в (4.80), интегрируя по частям и используя уравнение

Дирака, получаем

$$M = -\int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2\, \bar{u}_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1)$$
$$\times \Big\{ [(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_2^*)\hat{k}_2 + 2(\boldsymbol{e}_2^*\cdot\boldsymbol{p}_1)]e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_1} D(\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{r}_2|\varepsilon_p+\omega_2)e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_1)$$
$$+ (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_1)e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1} D(\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{r}_2|-\varepsilon_q-\omega_2)e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}\,[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_2^*)\hat{k}_2 + 2(\boldsymbol{e}_2^*\cdot\boldsymbol{p}_2)] \Big\}\, v_{\boldsymbol{q}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2)\,. \tag{4.81}$$

Где $\boldsymbol{p}_1 = -i\partial/\partial\boldsymbol{r}_1$, и $\boldsymbol{p}_2 = -i\partial/\partial\boldsymbol{r}_2$. Достаточно вычислить $M^{(1)}$, а затем найти $M^{(2)}$, используя C-чётность.

Из-за сокращений в матричном элементе M необходимо удерживать не только главные члены в f_0, g_0, d_0, но также и $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{d}_1$, а членами $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{d}_2$ в главном приближении можно пренебречь (см. (1.17) и (1.15)). Таким образом, матричный элемент $M^{(1)}$ можно представить в следующем виде

$$M^{(1)} = -\int d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{r}_2\, \mathrm{Sp}\{(f_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{f}_1)[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_2^*)\hat{k}_2 + 2(\boldsymbol{e}_2^*\cdot\boldsymbol{p}_1)]e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_1}$$
$$\times (d_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{d}_1)e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_1)(g_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_1)\tilde{\mathcal{F}}\}\,. \tag{4.82}$$

где $\tilde{\mathcal{F}} = v_{\boldsymbol{q}\mu_q}\bar{u}_{\boldsymbol{p}\mu_p}$. Будем вычислять матричный элемент в спиральном базисе. Пусть λ_1, λ_2, μ_p и μ_q — знаки спиральностей начального и конечного фотона, электрона, и позитрона. Тогда матрица $\tilde{\mathcal{F}}$ в спиральном базисе равна

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{8}(\tilde{a}_{\mu_p\mu_q} + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}_{\mu_p\mu_q})[\gamma^0(Q+P) + \gamma^0\gamma^5(1+PQ) - (P-Q) - \gamma^5(1-PQ)],$$
$$P = \frac{\mu_p p}{\varepsilon_p + m}\,, \quad Q = -\frac{\mu_q q}{\varepsilon_q + m}\,, \tag{4.83}$$

где $\tilde{a}_{\mu_p\mu_q}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}}_{\mu_p\mu_q}$ определены, как

$$\chi_{\mu_q}\phi^\dagger_{\mu_p} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{\mu_p\mu_q} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}_{\mu_p\mu_q})\,, \tag{4.84}$$

Заметим, что только члены с $(P+Q)$ и $(1+PQ)$ дают вклад в матричный элемент (4.82), так как они содержат чётное число гамма матриц. Фиксируем фазы спиральных амплитуд следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{\mu_p} = \frac{1+\mu_p \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p}{4\cos(\theta_p/2)}\begin{pmatrix}1+\mu_p\\ 1-\mu_p\end{pmatrix} \approx \frac{1}{4}\left(1+\frac{\theta_p^2}{8}\right)(1+\mu_p\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_p)\begin{pmatrix}1+\mu_p\\ 1-\mu_p\end{pmatrix}\,,\\
&\chi_{\mu_q} = -\frac{1-\mu_q \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_q}{4\cos(\theta_q/2)}\begin{pmatrix}\mu_q-1\\ \mu_q+1\end{pmatrix} \approx -\frac{1}{4}\left(1+\frac{\theta_q^2}{8}\right)(1-\mu_q\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}_q)\begin{pmatrix}\mu_q-1\\ \mu_q+1\end{pmatrix}\,,\\
&\boldsymbol{e}_{1\lambda_1} = \boldsymbol{e}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\lambda_1\boldsymbol{e}_y)\,,\\
&\boldsymbol{e}_{2\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}'_x + i\lambda_2\boldsymbol{e}_y) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\lambda_2\boldsymbol{e}_y - \theta_{k_2}\boldsymbol{\nu})\,.
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

Напомним, что орты $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$ направлены вдоль $\boldsymbol{k}_{2\perp}$ и $\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2$.

Используя (4.85), получаем

$$
\begin{aligned}
&\tilde{a}_{\mu\mu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_\mu^*\cdot\boldsymbol{\theta}_{pq}\,,\quad \tilde{a}_{\mu\bar{\mu}} = \mu\Big(1-\frac{\theta_{pq}^2}{8}\Big) + \frac{i}{4}\boldsymbol{\nu}\cdot[\boldsymbol{\theta}_p\times\boldsymbol{\theta}_q]\,,\\
&\tilde{\boldsymbol{b}}_{\mu\bar{\mu}} = \left[1-\frac{1}{8}(\boldsymbol{\theta}_p+\boldsymbol{\theta}_q)^2 - \frac{i\mu}{4}\boldsymbol{\nu}\cdot[\boldsymbol{\theta}_p\times\boldsymbol{\theta}_q]\right]\boldsymbol{\nu} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_p+\boldsymbol{\theta}_q) + \frac{i\mu}{2}[\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\theta}_{pq}]\,,\\
&\tilde{\boldsymbol{b}}_{\mu\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}\left[(\boldsymbol{e}_\mu^*, \boldsymbol{\theta}_p+\boldsymbol{\theta}_q)\boldsymbol{\nu} - \sqrt{2}\boldsymbol{e}_\mu^*\right]\,,
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

Основной вклад в интегралы (4.82) даёт область $r_{1,2}\sim\omega_1/m^2$, $r_{1\perp}\sim r_{2\perp}\sim 1/\Delta$, $\Delta\gg m^2/\omega_1$, угол между векторами $-\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{k}_1$ мал. Угол между векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{k}_1$ может быть мал или близок к π, обозначим вклады в матричный элемент $M^{(1)}$ от этих областей через $M^{(1,1)}$ и $M^{(1,2)}$, соответственно. Тогда матричный элемент имеет следующий вид $M^{(1)} = M^{(1,1)} + M^{(1,2)}$.

В случае малого угла между векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{k}_1$ можно использовать квазиклассическое приближение для функции Грина $D(\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{r}_2|\varepsilon_p+\omega_2)$ квадрированого уравнения Дирака в кулоновском поле [24]:

$$D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon) = \frac{i\kappa}{8\pi^2 r_1 r_2} e^{i\kappa(r_1+r_2)} \int d\boldsymbol{s}\, \exp\left\{ i\kappa \left[\frac{(r_1+r_2)}{2r_1 r_2} s^2 + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\theta}_{21} \right] \right\} \\ \times \left(\frac{s^2}{4r_1 r_2} \right)^{-i\eta} \left[1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\theta}_{12} \right) \right], \quad (4.87)$$

где $\kappa = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, $\boldsymbol{s}$ — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, и $\boldsymbol{\theta}_{12} = \boldsymbol{r}_1/r_1 + \boldsymbol{r}_2/r_2$. Также можно использовать квазиклассическую волновую функцию позитрона $v_{\boldsymbol{q}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2)$ и эйкональную волновую функцию электрона $\bar{u}_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1)$:

$$v_{\boldsymbol{q}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2) = \frac{q}{2i\pi r_2} e^{iqr_2} \int d\boldsymbol{\tau}\, \exp\left[iq\left(\frac{\tau^2}{2r_2} + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}_{2q} \right) \right] \\ \times \left(\frac{q\tau^2}{4r_2} \right)^{i\eta} \left[1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{r_2} + \boldsymbol{\theta}_{2q} \right) \right] v_{\boldsymbol{q}}, \\ \bar{u}_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1) = \bar{u}_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_1} (pr_1)^{-i\eta}. \quad (4.88)$$

Где $\boldsymbol{\theta}_{2q} = -\boldsymbol{r}_2/r_2 - \boldsymbol{q}/q$, $\boldsymbol{\tau}$ — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{q}$.

В случае малого угла между векторами $-\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{k}_1$ можно использовать эйкональную функцию Грина $D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon_p + \omega_2)$ и квазиклассические волновые функции $\bar{u}_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1)$ и $v_{\boldsymbol{q}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2)$ [24]:

$$D(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2|\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi r} e^{i\kappa r} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{i\eta}, \quad r_2 > r_1\,, \quad r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|\,, \\ \bar{u}_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{p}{2i\pi r_1} e^{ipr_1} \bar{u}_{\boldsymbol{p}} \int d\boldsymbol{s}\, \exp\left[ip\left(\frac{s^2}{2r_1} + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\theta}_{1p} \right) \right] \\ \times \left(\frac{ps^2}{4r_1} \right)^{-i\eta} \left[1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{s}}{r_1} + \boldsymbol{\theta}_{1p} \right) \right], \quad (4.89)$$

где — $\boldsymbol{s}$ двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{p}$, и $\boldsymbol{\theta}_{1p} = -\boldsymbol{r}_1/r_1 - \boldsymbol{p}/p$. Функция $v_{\boldsymbol{q}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2)$ определена в (4.88).

4.2. Вычисление матричного элемента

Дополнительную информацию о матричных элементах в спиральном базисе можно получить, используя дискретные симметрии. C-чётность позволяет найти связь между $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$

$$M^{(1)}_{\lambda_1,\lambda_2,\mu_p,\mu_q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},Z\alpha) = -M^{(2)}_{\lambda_1,\lambda_2,\mu_q,\mu_p}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},-Z\alpha)\,,$$

P-чётность даёт связь между матричными элементами с противоположными спиральностями

$$M_{\lambda_1,\lambda_2,\mu_p,\mu_q} = -\mu_p\mu_q M_{-\lambda_1,-\lambda_2-\mu_p,-\mu_q}\,.$$

Для вычисления матричного элемента (4.82) при $\Delta \gg \Delta_{\min} = m^2(\varepsilon_p + \varepsilon_q)/2\varepsilon_p\varepsilon_q$ подставляем волновые функции и функцию Грина в уравнение (4.82), берём след, разлагаем выражение, учитывая, что нам нужно удержать только главный член по углам, и берем интеграл по $\boldsymbol{\theta}_{1p}$ и $\boldsymbol{\theta}_{2q}$. Заметим, что с нашей точностью векторы $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}_{12}$, $\boldsymbol{\theta}_{1p}$, и $\boldsymbol{\theta}_{2q}$ перпендикулярны $\boldsymbol{k}_1$. После замены переменных $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{s}$ матричные элементы $M^{(1,1)}$ и $M^{(1,2)}$ имеют следующий вид

$$M^{(1,i)}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = \int\limits_0^\infty dr_2 \int\limits_0^{L_i} dr_1 \int d\boldsymbol{T} \int d\boldsymbol{\xi} \left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\xi}|}\right)^{2i\eta} \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Delta}_\perp\right] \mathcal{G}_i(r_1,r_2,\boldsymbol{\xi})\,, \tag{4.90}$$

где $\mathcal{G}_{1,2}(r_1,r_2,\boldsymbol{\xi})$ — некоторые функции, $L_1 = \infty$ и $L_2 = r_2$. Удобно использовать следующие преобразования [42]:

$$
\begin{aligned}
&\int d\boldsymbol{T} \left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\xi}|}\right)^{2i\eta} \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Delta}_\perp\right] \\
&= \int d\boldsymbol{T} \left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta} \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\xi}\right] \frac{\xi^2}{\Delta_\perp^2} \\
&= -\frac{4}{\Delta_\perp^2} \int d\boldsymbol{T} \left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}^2 \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\xi}\right] \\
&= \frac{8i\eta}{\Delta_\perp^2} \int d\boldsymbol{T} \left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta} \boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}} \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\xi}\right] , \\
&\boldsymbol{\chi} = \frac{\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp}{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp)^2} - \frac{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp}{(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp)^2} .
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

После таких преобразований интегралы по $\boldsymbol{\xi}$, r_1 и r_2 легко берутся. Тогда полная амплитуда $M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = M^{(1)}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} + M^{(2)}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}$ равна

$$
\begin{aligned}
M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} &= \frac{32\eta}{\omega_1\omega_2\Delta^2} \int d\boldsymbol{T} \left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta} \boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}} \mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{T}) , \\
\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{T}) &= F_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{T}) - F_{\lambda_1\lambda_2\mu_q\mu_p}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},-\boldsymbol{T}) ,
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

где $\boldsymbol{\chi}$ определено в (4.91), а функции $F_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{T})$ равны

$$
\begin{aligned}
F_{+++-} &= (\varepsilon_p+\omega_2)^2\, \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q)\,(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{A}) , \\
F_{+-+-} &= \varepsilon_p\,(\varepsilon_p+\omega_2)\,\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q)\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A}) , \\
F_{++-+} &= -\varepsilon_p\varepsilon_q\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q)\,(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{A}) - 2m^2\omega_1\omega_2 B + \frac{\varepsilon_q\varepsilon_p\omega_1\omega_2}{2\,(\varepsilon_p+\omega_2)\,D_2} , \\
F_{+--+} &= -\varepsilon_q\,(\varepsilon_p+\omega_2)\,\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q)\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A}) , \\
F_{++++} &= -\sqrt{2}m\,(\varepsilon_p+\omega_2)\,\omega_1\,(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{A}) , \\
F_{++--} &= \sqrt{2}m\,(\varepsilon_p+\omega_2)\,\omega_2\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q)\,B , \\
F_{+-++} &= -\sqrt{2}m\varepsilon_p\omega_1\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A}) + \sqrt{2}m\varepsilon_q\omega_2\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q)\,B , \\
F_{+---} &= 0 , \\
F_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} &= -\mu_p\mu_q\left(F_{\overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2\overline{\mu}_p\overline{\mu}_q}\right)^* .
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

Где $\overline{\mu}_{p,q} = -\mu_{p,q}$, $\overline{\lambda}_{1,2} = -\lambda_{1,2}$ и

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{D_1}\left[\frac{\varepsilon_p \boldsymbol{\theta}_{pk_2}}{2(m^2+\varepsilon_p^2\boldsymbol{\theta}_{pk_2}^2)} + \frac{\omega_2\varepsilon_q\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp - 2\varepsilon_p\boldsymbol{\theta}_{pk_2}\right)}{\left(\varepsilon_p+\omega_2\right)D_2}\right], \tag{4.94}$$

$$B = \frac{1}{D_1}\left[\frac{1}{4(m^2+\varepsilon_p^2\boldsymbol{\theta}_{pk_2}^2)} - \frac{\omega_2\varepsilon_q}{\left(\varepsilon_p+\omega_2\right)D_2}\right],$$

$$D_1 = 4m^2 + \left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}_q\right)^2, \quad \boldsymbol{\delta}_q = \boldsymbol{\Delta}_\perp - 2\varepsilon_q\boldsymbol{\theta}_q\,,$$

$$\boldsymbol{\theta}_{pk_2} = \boldsymbol{\theta}_p - \boldsymbol{\theta}_{k_2}\,,$$

$$D_2 = \frac{4\omega_1\omega_2\varepsilon_p\varepsilon_q}{\varepsilon_p+\varepsilon_q}\boldsymbol{\theta}_{k_2}^2 + (\varepsilon_p+\varepsilon_q)$$
$$\times\left[\left(\boldsymbol{T} - \varepsilon_p\boldsymbol{\theta}_p + \varepsilon_q\boldsymbol{\theta}_q - \frac{\varepsilon_p-\varepsilon_q}{\varepsilon_p+\varepsilon_q}\omega_2\boldsymbol{\theta}_{k_2}\right)^2 + 4m^2\right]. \tag{4.95}$$

В уравнении (4.92) был опущен несущественный фактор $(q/p)^{i\eta}$, а в знаменателе $\Delta_\perp^2$ заменена на Δ^2. После такой замены амплитуда (4.92) может быть использована не только для $\Delta_\perp \gg \Delta_z \sim m^2/\omega_1$, но и для $\Delta_\perp \sim \Delta_z$, смотри [42]. Напомним, что $d\boldsymbol{T} = dT_x\,dT_y$.

Для $\omega_2 \ll p,\ q$ выражение (4.92) существенно упрощается:

$$M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = \frac{16\eta}{\omega_1\omega_2\Delta^2}\left[\frac{\varepsilon_p^2(\boldsymbol{e}_{\lambda_2}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_p)}{m^2+\varepsilon_p^2\theta_p^2} - \frac{\varepsilon_q^2(\boldsymbol{e}_{\lambda_2}^*\cdot\boldsymbol{\theta}_q)}{m^2+\varepsilon_q^2\theta_q^2}\right]$$
$$\times\int d\boldsymbol{T}\left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta}\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\frac{1}{4m^2+(\boldsymbol{\delta}_0-\boldsymbol{T})^2}$$
$$\times\left[\delta_{\mu_p,-\mu_q}(\varepsilon_p\delta_{\mu_p,\lambda_1}-\varepsilon_q\delta_{\mu_q,\lambda_1})(\boldsymbol{e}_{\lambda_1},\boldsymbol{\delta}_0-\boldsymbol{T}) + \sqrt{2}m\omega_1\lambda_1\delta_{\mu_q,\lambda_1}\delta_{\mu_p,\lambda_1}\right], \tag{4.96}$$

где $\boldsymbol{\delta}_0 = \varepsilon_p\boldsymbol{\theta}_p - \varepsilon_q\boldsymbol{\theta}_q$. Этот результат согласуется с мягкофотонным приближением для процесса фоторождения пар [41].

4.3. Борновская амплитуда и кулоновские поправки

Амплитуду M можно представить в следующем виде

$$M = M^B + M^C\,, \tag{4.97}$$

где M^B — линейный член по η (борновская амплитуда) и M^C — вклад высоких порядков по η (кулоновские поправки). Для того, чтобы найти борновскую амплитуду, опустим фактор $(|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|/|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|)^{2i\eta}$ и проинтегрируем по частям, используя следующие соотношения

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{\chi} = 2\pi[\delta(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp)-\delta(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp)]\,. \tag{4.98}$$

Мы получим

$$M^B_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = \frac{64\pi\eta}{\omega_1\omega_2\Delta^2}[\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{\Delta}_\perp)-\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(-\boldsymbol{\Delta}_\perp)]. \tag{4.99}$$

Для нахождения кулоновских поправок используем следующее тождество

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\mathcal{F}(\boldsymbol{T}) = {}& \frac{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp)}{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp)^2}\cdot\nabla_{\boldsymbol{T}}[\mathcal{F}(\boldsymbol{T})-\mathcal{F}(-\boldsymbol{\Delta}_\perp)]\\ &-\frac{(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp)}{(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp)^2}\cdot\nabla_{\boldsymbol{T}}[\mathcal{F}(\boldsymbol{T})-\mathcal{F}(\boldsymbol{\Delta}_\perp)]\end{aligned} \tag{4.100}$$

и выполним интегрирование по частям в (4.92). Поверхностный член даёт борновскую амплитуду (4.99), а кулоновские поправки имеют следующий вид

$$\begin{aligned}&M^C_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = -\frac{128i\eta^2}{\omega_1\omega_2\Delta^2}\int\frac{d\boldsymbol{T}}{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp)^2(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp)^2}\left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta}\\ &\times\left\{(\boldsymbol{\Delta}_\perp^2+\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Delta}_\perp)[\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{T})-\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{\Delta}_\perp)]\right.\\ &\left.+(\boldsymbol{\Delta}_\perp^2-\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Delta}_\perp)[\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\boldsymbol{T})-\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(-\boldsymbol{\Delta}_\perp)]\right\}\,.\end{aligned} \tag{4.101}$$

Двумерное интегральное представление (4.101) удобно для численных расчётов. Заметим, что возможно представить (4.101) в виде однократного интеграла, используя приём из [43], но результат получается довольно громоздкий и не представлен в этой работе.

4.4. Обсуждение результатов

Эффект экранирования важен только в области $\Delta \lesssim r_{scr}^{-1} \ll m$, где $r_{scr}^{-1} \sim m\alpha Z^{1/3}$ — радиус экранировки. В этой области амплитуда (4.92) совпадает с борновской амплитудой, где эффект экранировки может быть учтён умножением борновской амплитуды $M^B_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}$ на атомный формфактор $[1 - F_e(\Delta^2)]$. Этот формфактор стремиться к нулю при $\Delta \to 0$ и к единице при $\Delta \to \infty$. Простая параметризация этого формфактора может быть найдена в [44]. Таким образом, умножая амплитуду для кулоновского поля (4.92) на формфактор $[1 - F_e(\Delta^2)]$, мы получаем амплитуду, которая справедлива при любых Δ. На рисунках 4.2 и 4.3 изображена величина S (дифференциальное сечение в единицах σ_0, усреднённое по поляризациям конечных частиц и просуммированное по поляризации начального фотона),

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} \frac{\sigma_0^{-1} d\sigma_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}}{d\boldsymbol{p}_\perp\, d\boldsymbol{q}_\perp\, d\boldsymbol{k}_{2\perp} d\varepsilon_p d\varepsilon_q}\,, \quad \sigma_0 = \frac{\alpha^2\eta^2\Delta_\perp^2}{(2\pi)^6 m^6 \omega_1\omega_2\Delta^4} \tag{4.102}$$

как функция k_{2x} при фиксированных $\boldsymbol{p}_\perp$, $\boldsymbol{q}_\perp$, ε_p, ε_q, $k_{2y} = 0$ для различных значений заряда ядра Z. Видно, что кулоновские поправки значительно меняют сечение. Вблизи точки $\Delta_\perp = 0$ ($k_{2x} = -3.9m$ на рисунке 4.2 и $k_{2x} = -3.03m$ на рисунке 4.3) вклад борновской амплитуды доминирует над кулоновскими поправками. Заметим, что величина S для кулоновского поля не зависит от ω_1, при фиксированных значениях ε_p/ω_1, ε_q/ω_1, $\boldsymbol{p}_\perp/m$, $\boldsymbol{q}_\perp/m$, $\boldsymbol{k}_{2\perp}/m$. Для атомного поля зависимость от ω_1 есть только в формфакторе, который важен вблизи точки $\Delta_\perp = 0$, где кулоновские поправки не существенны.

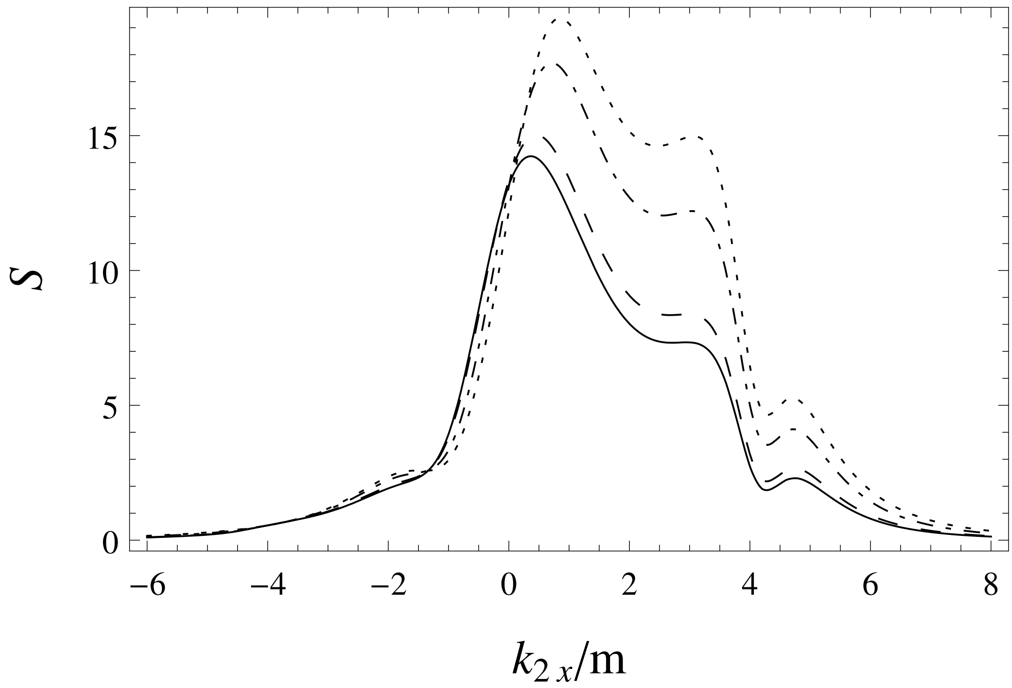

Рис. 4.2. Величина S, см. ур. (4.102), как функция переменной k_{2x} для $\varepsilon_p = 0.4\omega_1$, $\varepsilon_q = 0.25\omega_1$, $p_x = 4.7m$, $q_x = -0.8m$, $p_y = q_y = k_{2y} = 0$; $Z = 1$ (борновская амплитуда, пунктирная кривая), $Z = 47$ (Ag, штрих-пунктирная кривая), $Z = 82$ (Pb, штриховая кривая), и $Z = 92$ (U, сплошная кривая).

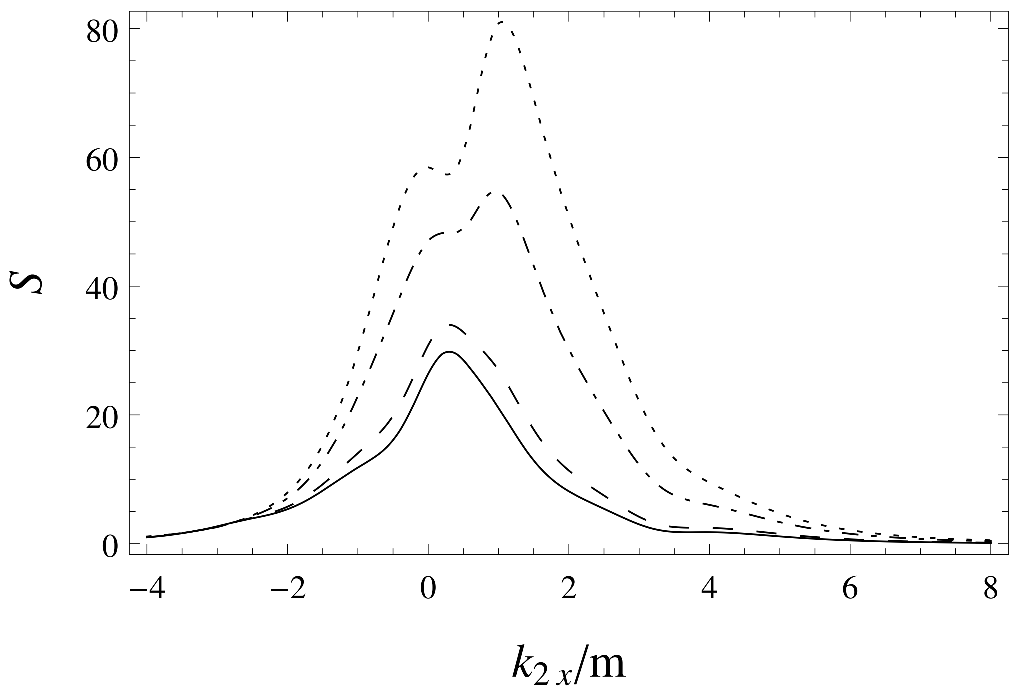

Рис. 4.3. Тоже, что и на рисунке 4.2 но для $p_x = 0.7m$, $q_x = 2.33m$.

Если начальный фотон циркулярно поляризован, то возникает асимметрия $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{d\sigma_+ - d\sigma_-}{d\sigma_+ + d\sigma_-}\,,\\ d\sigma_\pm &= \sum_{\lambda_2\mu_p\mu_q} d\sigma_{\pm\lambda_2\mu_p\mu_q}\,.\end{aligned} \tag{4.103}$$

В борновском приближении асимметрия отсутствует для любых $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{k}_2$. Этот факт следует из соотношения

$$M^B_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = -\mu_p\mu_q\left(M^B_{\overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2\overline{\mu}_p\overline{\mu}_q}\right)^*\,, \tag{4.104}$$

см. ур. (4.93) и (4.99). Но для кулоновских поправок такое тождество отсутствует из-за фактора $\left(\frac{|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Delta}_\perp|}{|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Delta}_\perp|}\right)^{2i\eta}$ в ур. (4.101). На Рисунках 4.4 и 4.5 показана асимметрия как функция угла φ между векторами $\boldsymbol{k}_{2\perp}$ и $\boldsymbol{p}_\perp$. Асимметрия равна нулю, когда $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{p}$, и $\boldsymbol{q}$ лежат в одной плоскости ($\varphi = 0, \pi$ на рисунках 4.4 и 4.5). Видно, что асимметрия достигает десятков процентов даже для умеренных значений Z.

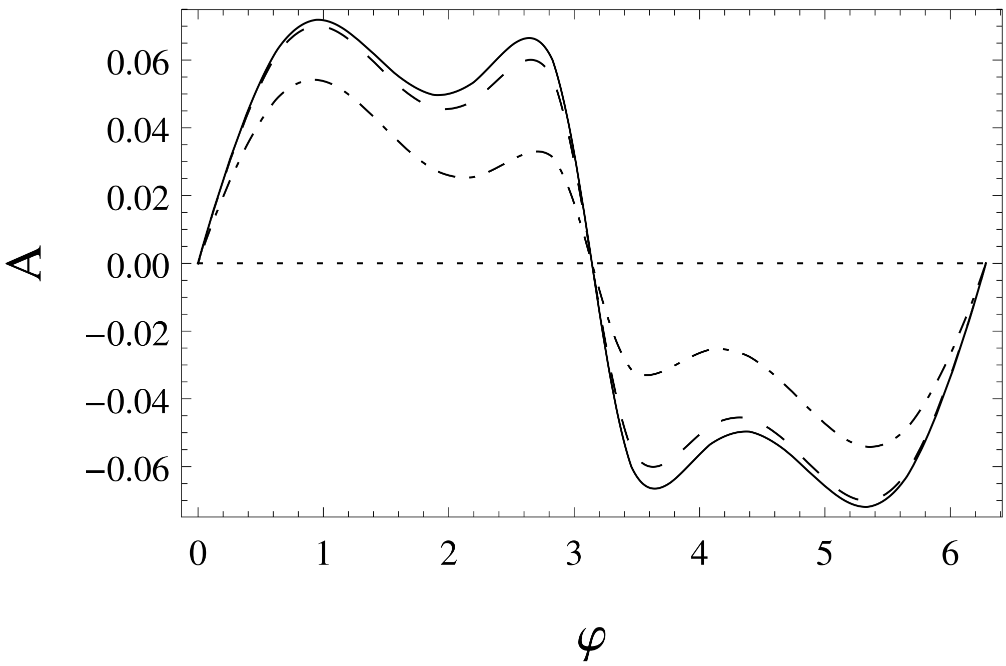

Рис. 4.4. Асимметрия $\mathcal{A}$, ур. (4.103), как функция угла φ между $\boldsymbol{k}_{2\perp}$ и $\boldsymbol{p}_{\perp}$ для $\varepsilon_p = 0.4\omega_1$, $\varepsilon_q = 0.25\omega_1$, $\boldsymbol{p}_{\perp} \parallel -\boldsymbol{q}_{\perp}$, $p_{\perp} = 4.7m$, $q_{\perp} = 0.8m$, $k_{2\perp} = m$; $Z = 1$ (борновская амплитуда, пунктирная кривая), $Z = 47$ (Ag, штрих-пунктирная кривая), $Z = 82$ (Pb, штриховая кривая), и $Z = 92$ (U, сплошная кривая).

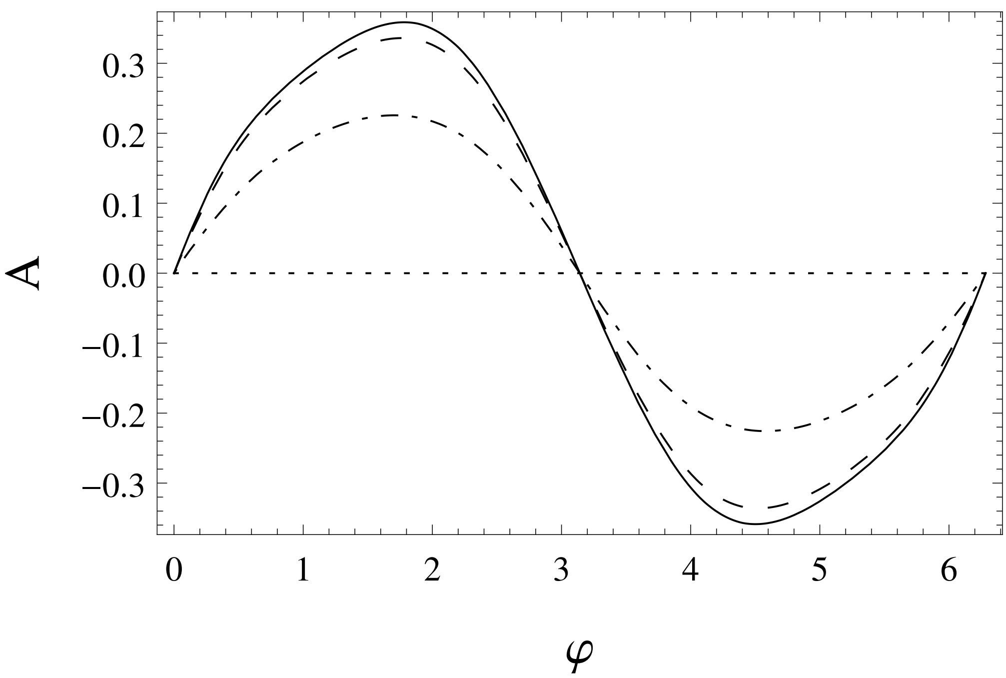

Рис. 4.5. То же, что и на рисунке 4.4, но для $\boldsymbol{p}_{\perp} \parallel \boldsymbol{q}_{\perp}$, $p_{\perp} = 0.7m$, $q_{\perp} = 2.33m$.

4.5. Выводы к четвёртой главе

Используя квазиклассическое приближение, были получены точные по параметру η спиральные амплитуды для процесса $\gamma Z \to e^+e^-\gamma' Z$. Результат, представленный в уравнениях (4.92), (4.99), (4.101), имеет довольно компактный вид и может быть использован для численных расчётов. Показано, что кулоновские поправки значительно меняют дифференциальное сечение, за исключением области $\Delta \ll m$, поэтому учёт экранировки сводится к умножению на атомный формфактор $[1 - F_e(\Delta^2)]$. Когда начальный фотон циркулярно поляризован, возникает угловая асимметрия по азимутальному углу φ_i конечных частиц относительно замены $\varphi_i \to -\varphi_i$ в (4.103).

Глава 5

Упругое рассеяние на малые углы

Данная глава посвящена исследованию предела применимости квазиклассического приближения на примере упругого рассеяния электрона на сферически симметричном атомном потенциале. Мы вычислим дифференциальное сечение и функцию Шермана в первом квазиклассическом приближении. Для кулоновского поля, прямым разложением формулы Мотта [34], будут получены результаты с точностью θ^2 и θ, соответственно.

5.1. Упругое рассеяние в квазиклассическом приближении

Сечение этого процесса может быть записано в следующем виде [45]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\frac{d\sigma_0}{d\Omega}\left[1 + S\,\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2) + T^{ij}\zeta_1^i\zeta_2^j\right]\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|}\,, \tag{5.105}$$

где $d\sigma_0/d\Omega$ — дифференциальное сечение для неполяризованных частиц, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — импульсы начального и конечного электронов, $\boldsymbol{\zeta}_1$ — вектор поляризации начального электрона, $\boldsymbol{\zeta}_2$ — регистрируемый вектор поляризации конечного электрона, S — функция Шермана, T^{ij} — некоторый тензор.

Как было сказано выше, волновая функция $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ в произвольном локализованном потенциале $V(r)$ может быть записана в следующем виде:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = [g_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})]u_{\boldsymbol{p}}\,, \tag{5.106}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma}$. Мы также предполагаем, что $m/\varepsilon \ll 1$. Асимптотика функции $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ при больших r равна

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) \approx e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}u_{\boldsymbol{p}} + \frac{e^{ipr}}{r}[G_0 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{G}_2]\,u_{\boldsymbol{p}}\,. \tag{5.107}$$

Функции G_0, $\boldsymbol{G}_1$, и $\boldsymbol{G}_2$ могут быть без труда получены из (1.19):

$$G_0 = f_0 + \delta f_0\,, \quad \boldsymbol{G}_1 = -\frac{\boldsymbol{\Delta}_\perp}{2\varepsilon}[f_0 + \delta f_0 + \delta f_1]\,, \quad \boldsymbol{G}_2 = i\frac{[\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}]}{2\varepsilon^2}\delta f_1\,, \tag{5.108}$$

где

$$\begin{aligned}
f_0 &= -\frac{i\varepsilon}{2\pi}\int d\boldsymbol{\rho}\, e^{-i\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}\left[e^{-i\chi(\boldsymbol{\rho})}-1\right]\,,\\
\delta f_0 &= -\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{\rho}\, e^{-i\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}-i\chi(\boldsymbol{\rho})}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx V^2(r_x)\,,\\
\delta f_1 &= \frac{i}{4\pi\Delta_\perp^2}\int d\boldsymbol{\rho}\, e^{-i\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}-i\chi(\boldsymbol{\rho})}\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx V^2(r_x)\,,\\
\chi(\boldsymbol{\rho}) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx V(r_x)\,, \quad r_x = \sqrt{x^2+\rho^2}\,.
\end{aligned} \tag{5.109}$$

Здесь $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} = p\boldsymbol{r}/r$, $\boldsymbol{\rho}$ — двумерный вектор, перпендикулярный начальному импульсу $\boldsymbol{p}$, также будем использовать обозначения $\boldsymbol{X}_\perp = \boldsymbol{X} - (\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{n}_p)\boldsymbol{n}_p$ для любого вектора $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{n}_p = \boldsymbol{p}/p$. Для малых углов рассеяния $\theta \ll 1$: $\delta f_0 \sim \delta f_1 \sim \theta f_0$. С помощью этих соотношений нетрудно получить следующие выражения для $\dfrac{d\sigma_0}{d\Omega}$, T^{ij} и S

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = |f_0|^2\left[1 + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\delta f_0}{f_0}\right]\,, \tag{5.110}$$

$$\begin{aligned}
T^{ij} &= \delta^{ij} + \theta\epsilon^{ijk}\xi^k\,,\\
S &= -\frac{m\theta}{\varepsilon}\,\mathrm{Im}\,\frac{\delta f_1}{f_0}\,.
\end{aligned} \tag{5.111}$$

В уравнениях (5.110) и (5.111) мы оставили только члены порядка θ в $d\sigma_0/d\Omega$ и T^{ij}, а в функции Шермана S мы оставили только главный член, пропорциональный θ^2. Явный вид T^{ij} является следствием закона сохранения спиральности для ультрарелятивистских частиц. Заметим, что $f_0 \to -f_0^*$, $\delta f_0 \to \delta f_0^*$ и $\delta f_1 \to \delta f_1^*$ при замене $V \to -V$. Функция Шермана S (5.111) инвариантна относительно замены $V \to -V$. Поэтому член $2\,\mathrm{Re}(\delta f_0/f_0)$ в $d\sigma_0/d\Omega$, см. (5.110), определяет зарядовую асимметрию в упругом рассеянии (разница между сечениями рассеяния электрона и позитрона на ядре), см.[45].

Хотя выражение для $d\sigma_0/d\Omega$ находится в согласии с ответом, полученным в приближении эйконала [38], необходимо обсудить применимость этого приближения. В случае кулоновского поля при выводе амплитуды рассеяния в эйкональном приближении обычно пользуются следующим точным соотношением

$$G_0 = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int d\boldsymbol{r} e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} V(r)\psi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(\boldsymbol{r})\,, \tag{5.112}$$

где $\psi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(\boldsymbol{r})$ — точная волновая функция. Далее, пренебрегая Δ_z по сравнению с $\Delta_\perp$, заменяя $\psi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(\boldsymbol{r})$ на эйкональную волновую функцию, которая получается из квазиклассической функции после пренебрежения квантовыми флуктуациями и интегрируя по z, получают G_0. Но в случае кулоновского поля этот вывод вызывает ряд вопросов: во-первых, почему мы можем пренебрегать квантовыми флуктуациями, а во-вторых, почему мы можем пренебрегать Δ_z по сравнению с $\Delta_\perp$, ведь для ультрарелятивистских частиц $\Delta_z z \sim \boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}$. Причем, если пренебречь квантовыми флуктуациями, но оставить Δ_z, или наоборот, учитывать квантовые флуктуации, но пренебречь Δ_z, то ответ для дифференциального сечения получится неправильный. В таких случаях появляются лишние множители $\pm\dfrac{2\pi\eta}{e^{\pm 2\pi\eta}-1}$. И только при использовании квазиклассической волновой функции и при удерживании Δ_z получается правильный ответ.

Для кулоновского поля $V_c(r) = -\eta/r$ из уравнений (5.110), (5.111) и

(5.109) получаем

$$f_0 = \frac{2\eta}{\varepsilon\theta^{2-2i\eta}}\frac{\Gamma(1-i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)}\,,$$
$$\frac{\delta f_0}{f_0} = \frac{1}{4}\pi\theta\eta h(\eta)\,, \qquad \frac{\delta f_1}{f_0} = -\frac{\pi\theta\eta h(\eta)}{4(1+2i\eta)}\,,$$
$$h(\eta) = \frac{\Gamma(1+i\eta)\Gamma(1/2-i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)\Gamma(1/2+i\eta)}\,, \tag{5.113}$$

где $\Gamma(x)$ — Γ-функция Эйлера. Используя (5.110) и (5.111), получаем

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{4\eta^2}{\varepsilon^2\theta^4}\Big[1 + \frac{\pi\theta\eta}{2}\,\mathrm{Re}\,h(\eta)\Big]\,, \tag{5.114}$$
$$S = \frac{\pi m\eta\theta^2}{4\varepsilon}\,\mathrm{Im}\,\frac{h(\eta)}{1+2i\eta}\,. \tag{5.115}$$

Заметим, что функция Шермана в квазиклассическом приближении (5.115) пропорциональна θ^2, а из формулы Мотта [34] в главном по η приближении S пропорциональна $\theta^3\ln\theta$. Но здесь нет никаких противоречий, так как функция из (5.115) начинается с η^2, а в формуле Мотта она пропорциональна η. Таким образом, Функция Шермана в главном приближении по η нечприменима при $\theta \lesssim \eta$. В следующей главе мы более детально рассмотрим случай кулоновского поля и выведем следующую поправку по θ.

Обсудим влияние эффекта конечного размера ядра на дифференциальное сечение $d\sigma_0/d\Omega$ и функцию Шермана S. Мы будем использовать потенциал

$$V(r) = -\frac{\eta}{\sqrt{r^2+R^2}}\,, \tag{5.116}$$

где R — характерный размер ядра. Для такого потенциала мы можем аналитически взять все интегралы в (5.108)

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{4\eta^2}{\varepsilon^2\theta^4}\left|\frac{bK_{1-i\eta}(b)}{\Gamma\left(1+i\eta\right)}\right|^2(1+A)\,, \tag{5.117}$$

$$A = \frac{\pi\eta\theta}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma(1+i\eta)(2K_{1/2-i\eta}(b) - bK_{3/2-i\eta}(b))}{\Gamma(3/2+i\eta)\sqrt{2b}K_{1-i\eta}(b)}\,, \tag{5.118}$$

$$S = \frac{\pi\eta m\theta^2}{4\varepsilon}\,\mathrm{Im}\,\frac{\Gamma(1+i\eta)K_{1/2-i\eta}(b)}{\Gamma\left(3/2+i\eta\right)\sqrt{2b}\,K_{1-i\eta}(b)}\,,\quad b = \theta\varepsilon R\,, \tag{5.119}$$

где $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Величина A в уравнении (5.118) — зарядовая асимметрия

$$A = \frac{d\sigma_0(\eta) - d\sigma_0(-\eta)}{d\sigma_0(\eta) + d\sigma_0(-\eta)}\,. \tag{5.120}$$

Как и должно быть, в пределе $b \to 0$ результаты (5.117) и (5.119) переходят в (5.114) и (5.115). На рисунках 5.1 и 5.2 изображена зависимость асимметрии A и функции Шермана S от b для нескольких значений η. Видно, что обе функции сильно зависят от b и η. Интересно, что обе функции меняют знак при $b \sim 1$.

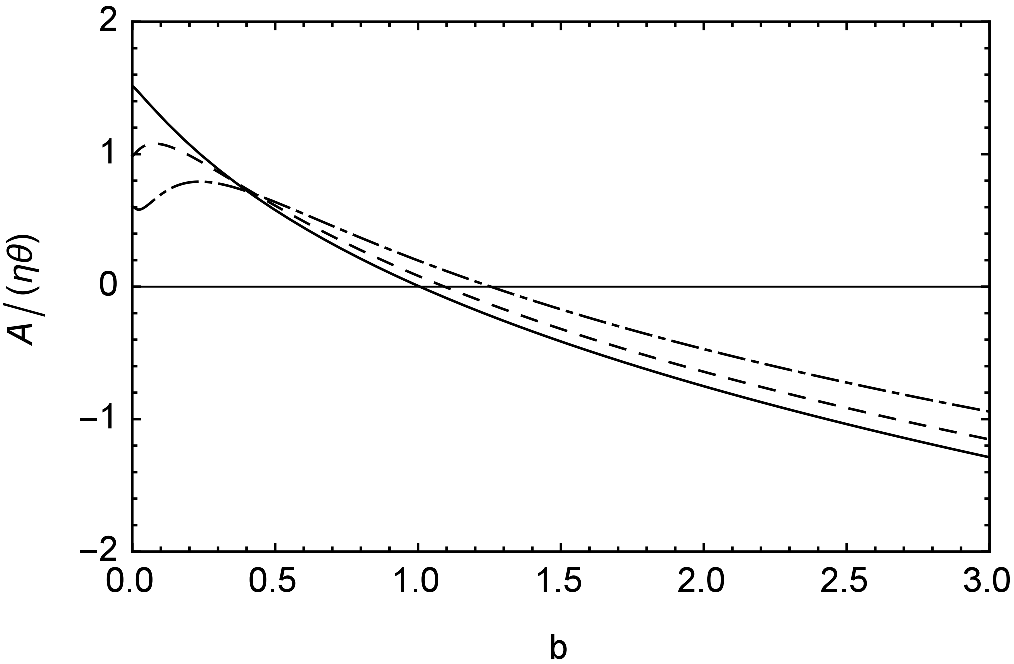

Рис. 5.1. Зависимость асимметрии A (5.118) в единицах $\eta\theta$ от $b = \theta\varepsilon R$ для $\eta = 0.1$ (сплошная линия), $\eta = 0.4$ (штриховая линия) и $\eta = 0.7$ (штрих-пунктирная линия).

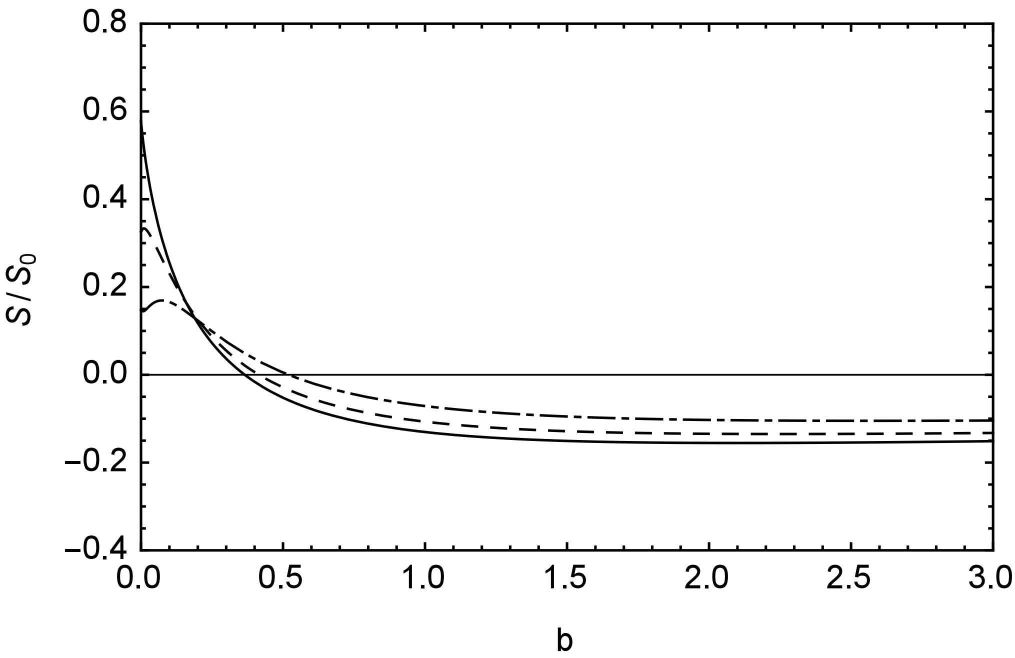

Рис. 5.2. Зависимость функции Шермана S (5.119) в единицах $S_0 = m\eta^2\theta^2/\varepsilon$ от $b = \theta\varepsilon R$ для $\eta = 0.1$ (сплошная линия), $\eta = 0.4$ (штриховая линия) и $\eta = 0.7$ (штрих-пунктирная линия).

5.2. Разложение точной амплитуды в кулоновском поле при малых углах

В этом разделе мы исследуем нетривиальное соотношение между вкладом больших угловых моментов (квазиклассический вклад) и $l \sim 1$ (неквазиклассический вклад) в амплитуду упругого рассеяния в кулоновском поле. Заметим, что при малых углах рассеяния $\theta \ll 1$ основной вклад даётся большими угловыми моментами не только для ультрарелятивистских частиц, но и для частиц с произвольной скоростью $\beta = p/\varepsilon$. Поэтому в этом разделе мы будем использовать два независимых параметра: $\eta = Z\alpha$ и $\nu = Z\alpha/\beta$. Мы выполним разложение по малому углу рассеяния θ, не предполагая малости η, в отличие от работы [46].

Амплитуда упругого рассеяния равна (см. [41, 45]):

$$M_{fi} = \frac{i}{2p}\phi_f^{\dagger}\left[G(\theta) - \frac{i\eta m}{p}F(\theta) - i\left(G(\theta)\tan\frac{\theta}{2} + \frac{i\eta m}{p}F(\theta)\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{\xi\sigma}\right]\phi_i\,,$$

где ϕ_i и ϕ_f — спиноры начального и конечного электрона. Функции $F(\theta)$ и $G(\theta)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma_l - i\nu)}{\Gamma(\gamma_l + i\nu + 1)}e^{i\pi(l-\gamma_l)}l\left[P_l - P_{l-1}\right]\,, \\ G(\theta) &= -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\frac{dF}{d\theta}\,. \end{aligned} \tag{5.121}$$

Здесь $P_l = P_l(\cos\theta)$ — полином Лежандра, $\gamma_l = \sqrt{l^2 - \eta^2}$.

Неполяризованное сечение $d\sigma_0/d\Omega$ и функция Шермана $S(\theta)$, выраженные через $F(\theta)$ и $G(\theta)$, равны

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_0}{d\Omega} &= \frac{1}{4p^2}\left\{\frac{|G(\theta)|^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\eta^2 m^2 |F(\theta)|^2}{p^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\} \\ S(\theta) &= \frac{\eta m p\sin\theta\,\mathrm{Re}\,FG^*}{|G(\theta)|^2 p^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \eta^2 m^2 |F(\theta)|^2\cos^2\frac{\theta}{2}} \end{aligned} \tag{5.122}$$

Как было сказано выше, основной вклад в сумму (5.121) даёт область больших угловых моментов $l \gg 1$. Поэтому удобно переписать функцию F в следующем виде

$$
\begin{aligned}
&F = F_a + F_b\,,\\
&F_a = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(l-i\nu\right)}{\Gamma\left(l+i\nu+1\right)} l\, T_l \left[P_l - P_{l-1}\right]\,,\\
&F_b = -\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\gamma_l-i\nu\right)}{\Gamma\left(\gamma_l+i\nu+1\right)} e^{i\pi(l-\gamma_l)} - \frac{\Gamma\left(l-i\nu\right)}{\Gamma\left(l+i\nu+1\right)} T_l\right] l \left[P_l - P_{l-1}\right]\,,\\
&T_l = 1 + \frac{i\pi}{2l}\eta^2 + \frac{\eta^2}{2l^2}\left(1 + 2i\nu - \frac{\pi^2\eta^2}{4}\right)\,.
\end{aligned}
\tag{5.123}
$$

Величина T_l — разложение функции $\dfrac{\Gamma\left(\gamma_l-i\nu\right)/\Gamma\left(l-i\nu\right)}{\Gamma\left(\gamma_l+i\nu+1\right)/\Gamma\left(l+i\nu+1\right)} e^{i\pi(l-\gamma_l)}$ по параметру $1/l$ до $O\left(1/l^2\right)$. Сумма F_a может быть вычислена аналитически при $\theta \ll 1$, используя интегральное представление бета-функции

$$
\frac{\Gamma\left(l-i\nu\right)}{\Gamma\left(l+i\nu+1\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(1+2i\nu\right)} \int_0^{\infty} dy\, \frac{y^{2i\nu}}{\left(1+y\right)^{l+i\nu+1}}
$$

и беря сумму по l с помощью производящей функции полиномов Лежандра. Мы получаем

$$
\begin{aligned}
F_a\left(\theta\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1+2i\nu\right)} \int_0^{\infty} \frac{dy\, y^{2i\nu}}{\left(1+y\right)^{1+i\nu}} &\left\{ \frac{2s^2\left(2+y\right)\left(1+y\right)}{\varrho^3} + \frac{i}{2}\pi\eta^2\left(1-\frac{y}{\varrho}\right) \right.\\
&\left. + \frac{\eta^2}{2}\left(1+2i\nu-\frac{\pi^2\eta^2}{4}\right) \ln\left[\frac{\left(1-s^2\right)\left(2s^2+y+\varrho\right)}{y+\varrho-2s^2\left(1+y\right)}\right] \right\},
\end{aligned}
\tag{5.124}
$$

где $s = \sin\frac{\theta}{2}$ и $\varrho = \sqrt{y^2 + 4s^2\left(1+y\right)}$. В интеграл (5.124) при $s \ll 1$ основной вклад дают две области:

$$
\text{I. } y \sim s \ll 1\,, \quad \text{II. } y \sim 1\,.
$$

Первая область даёт вклад пропорциональный $\propto s^{n+2i\nu}$ ($n = 0, 1, \ldots$), а вклад от второй области пропорционален $\propto s^n$ ($n = 2, 3\ldots$). Вычисляя интеграл методом разложения по областям (см. [47]), получаем

$$F_a(\theta) \approx \frac{\Gamma(1-i\nu)}{\Gamma(1+i\nu)}(t_0+t_1+t_2)\,, \tag{5.125}$$

$$t_0 = s^{2i\nu}\,, \quad t_1 = i\pi\eta^2 \frac{s^{1+2i\nu}}{1+2i\nu} h(\nu)\,,$$

$$t_2 = i\frac{s^{2+2i\nu}\eta^2}{2(1+i\nu)\nu}\left[1+2i\nu - \frac{\pi^2\eta^2}{4}\right] - is^2\eta^2\left[\frac{1}{2\nu} + i + \frac{\pi}{2(1-2i\nu)} - \frac{\pi^2\eta^2}{8\nu}\right].$$

Члены t_0 и t_1 соответствуют главному квазиклассическому вкладу и первой квазиклассической поправке ($|t_0| = 1$, $|t_1| \sim \theta^1$). Хотя величина t_2 пропорциональна θ^2, мы не можем интерпретировать её как вторую квазикласическую поправку, так как величина t_2 такого же порядка, как и слагаемые в сумме (5.121) с $l \sim 1$. Легко проверить, что вклад в t_2 пропорциональный $s^{2+2i\nu}$ не изменится, если взять сумму по l, начиная с некоторого $l_0 \gg 1$ такого, что $l_0 \ll 1/s$. Поэтому этот вклад можно отождествить со второй квазиклассической поправкой.

Давайте теперь рассмотрим функцию F_b в уравнении (5.123). Сумма по l сходится при $l \sim 1$, и мы можем аппроксимировать $P_l(\theta) - P_{l-1}(\theta)$ функцией $-2ls^2$. Таким образом F_b в главном приближении по порядку величины пропорционально s^2, поэтому естественно прибавить к F_b член из F_a, ур. (5.125), пропорциональный s^2. Таким образом, мы получаем

$$F = F_{\mathrm{QC}} + \delta F + O\left(s^3\right)\,,$$

$$F_{\mathrm{QC}} = \frac{\Gamma(1-i\nu)}{\Gamma(1+i\nu)} s^{2i\nu}\left[1 + \frac{i\pi\eta^2}{1+2i\nu} h(\nu)\, s + \frac{i\eta^2}{2(1+i\nu)\nu}\left(1+2i\nu - \frac{\pi^2\eta^2}{4}\right) s^2\right],$$

$$\delta F = \frac{\Gamma(1-i\nu)}{\Gamma(1+i\nu)} C(\eta,\nu)\, s^2\,, \tag{5.126}$$

где

$$C(\eta,\nu) = -i\eta^2\left[\frac{1}{2\nu} + i + \frac{\pi}{2(1-2i\nu)} - \frac{\pi^2\eta^2}{8\nu}\right]$$
$$+ \frac{\Gamma(1+i\nu)}{\Gamma(1-i\nu)}\sum_{l=1}^{\infty} 2l^2\left[\frac{\Gamma(\gamma_l - i\nu)\, e^{i\pi(l-\gamma_l)}}{\Gamma(\gamma_l + i\nu + 1)} - \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+i\nu+1)}T_l\right], \quad (5.127)$$

величина T_l определена в уравнении (5.123), а $h(\nu)$ — в (5.113). Разложение по малым углам функции F до членов порядка η^4 при малых η и произвольных ν было рассмотрено в работе [46]. Разлагая (5.127) по η до η^4 и беря сумму по l, получаем ответ, который находится в согласии с [46] с точностью до опечатки в уравнении (3.27) в этой статье (в правой стороне ур. (3.27) нужно сделать замену$j \to j+1$). Функция $C(\eta,\nu)$ сильно зависит от параметра η и ν. Это утверждение иллюстрируется на рисунке 5.3, где изображена реальная и мнимая часть $C(\eta,\nu)$ при $\nu = \eta$ ($\beta = 1$) как функция η.

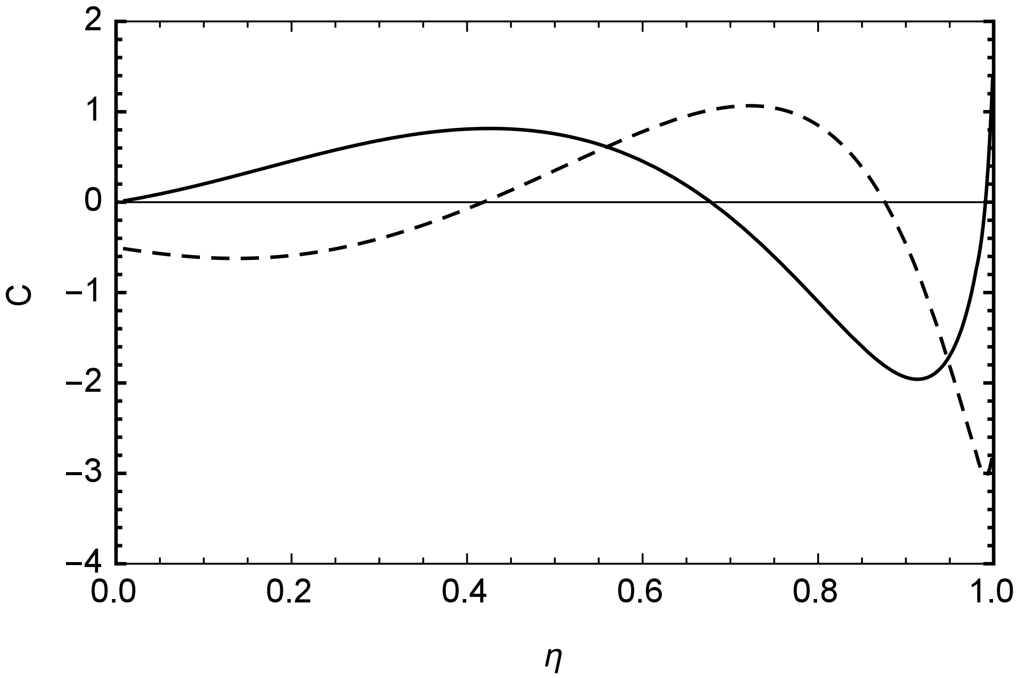

Рис. 5.3. Реальная часть (сплошная линия) и мнимая часть (штрихованная линия) функции $C(\eta,\nu)$ (5.127), при $\nu = \eta$ как функции η.

Подставляя уравнение (5.126)) в (5.122), получаем дифференциальное сечение и функцию Шермана с точностью $O(s^2)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\nu^2}{4p^2 s^4}\left[1 + \pi\eta\beta\,\mathrm{Re}\,h\,(\nu)\,s - 2\nu^{-1}\,\mathrm{Im}[s^{2i\nu}C^*\,(\eta,\nu)]s^2\right], \qquad (5.128)$$

$$S\,(\theta) = \frac{ms^2}{\varepsilon\nu}\left\{\pi\eta^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{h\,(\nu)}{1+2i\nu}\right] + \left[\frac{\eta^2}{1+\nu^2}\left(1 - \frac{3\pi^2\eta^2}{4\,(1+4\nu^2)}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\pi^2\eta^4}{\nu}\,\mathrm{Im}\left[\frac{h\,(\nu)}{1+2i\nu}\right]\mathrm{Re}\,h\,(\nu) - 2\,\mathrm{Re}[(1+i\nu)\,s^{2i\nu}C^*\,(\eta,\nu)]\right]s\right\}. \qquad (5.129)$$

Поправка порядка s^2 в дифференциальном сечении возникла из-за интерференции между квазиклассическим и неквазиклассическим слагаемыми. Таким образом, эту поправку нельзя получить в рамках квазиклассического подхода.

Как уже было сказано выше, дифференциальное сечение, полученное в приближении эйконала с учетом первой поправки, совпадает с квазиклассическим дифференциальным сечением с учетом первой поправки. В приближении эйконала можно выполнить регулярное разложение волновой функции до нужного порядка, см., например, работы [48, 49]. Возникает вопрос, можно ли получить верный ответ для дифференциального сечения с точностью $O(s^2)$ в (5.128) в рамках эйконального приближения. Амплитуда рассеяния в приближении эйконала для $\Delta_\perp \neq 0$ равна

$$M_{fi} = -\frac{ip}{2\pi}\int d\boldsymbol{\rho} e^{-i\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho} - i\chi_0(\boldsymbol{\rho})}\phi_f^\dagger\left[1 - i\chi_1 - i\chi_2 - \chi_1^2/2 + \ldots\right]\phi_i\,, \qquad (5.130)$$

В кулоновском поле $\chi_0 = 2\nu\ln p\rho$. Учитывая то, что в кулоновском поле нет размерной константы, нетрудно получить, что эйкональные поправки имеют вид $\chi_{n>0}(\rho) = \mathcal{P}_n(\ln p\rho)/(p\rho)^n$, где $\mathcal{P}_n(x)$ — некоторые полиномы с матричными коэффициентами. Выполняя замену переменных $\boldsymbol{\rho} \to (2/\Delta_\perp)\boldsymbol{\rho}$, получаем

$$M_{fi} = -s^{2i\nu}\frac{2ip}{\pi\Delta_\perp^2}\int d\boldsymbol{\rho} e^{-2i\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\rho}}\rho^{-2i\nu}\phi_f^\dagger\Big\{1 - i\frac{s}{\rho}\mathcal{P}_1\left(\ln\frac{\rho}{s}\right) \\ - \frac{s^2}{\rho^2}\left[i\mathcal{P}_2\left(\ln\frac{\rho}{s}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_1^2\left(\ln\frac{\rho}{s}\right)\right] + \ldots\Big\}\phi_i\,, \quad (5.131)$$

где $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta}_\perp/\Delta_\perp$. Беря интегралы по $\boldsymbol{\rho}$, находим амплитуду M_{fi} в приближении эйконала:

$$M_{fi} = \frac{\Gamma(1-i\nu)}{\Gamma(1+i\nu)}s^{2i\nu}\frac{\nu}{2ps^2}\phi_f^\dagger[1 + s\mathcal{Q}_1(\ln s) + s^2\mathcal{Q}_2(\ln s) + \ldots]\phi_i\,, \qquad (5.132)$$

где $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ — некоторые полиномы. Так как вся амплитуда пропорциональна $s^{2i\nu}$, приближение эйконала даёт неправильный результат (оно не может воспроизвести интерференционный член $\mathrm{Im}[s^{2i\nu}C^*(\eta,\nu)]$). В этом нет ничего необычного, так как условие применимости приближения эйконала нарушается при прохождении частицы на малых расстояниях от кулоновского центра.

Давайте обсудим нетривиальные соотношения между результатом, полученным с помощью разложения по s, и результатом, полученным с помощью разложения по η. Разлагая по ν (5.128) и (5.129) и удерживая только главные члены, получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\nu^2}{4p^2s^4}(1 + s\pi\eta\beta - s^2\beta^2)\,, \qquad (5.133)$$

$$S(\theta) = \frac{2\eta m s^2}{\varepsilon}\left[\pi\eta(2\ln 2 - 1) + \beta s\ln s\right]\,. \qquad (5.134)$$

Сечение (5.133) согласуется с результатом из [35, 36] при малых углах рассеяния. Функция Шермана S (5.134), также совпадает с разложением при малых углах функции Шермана, полученным в [34, 40].

Таким образом видно, что отношение первой и второй поправки в дифференциальном сечении (5.133) пропорционально отношению двух малых параметров ν/θ, поэтому это отношение может быть и много больше, и много меньше единицы. Аналогично, для функции Шермана (5.134) отношение главного вклада к первой квазиклассической поправке пропорционально $\nu/(\theta \ln \theta)$.

Интересно, что хотя результат (5.133) получен для малых углов, эта формула неплохо описывает дифференциальное сечение и для $\theta \sim 1$. Для демонстрации этого утверждения на рисунке 5.4 показана зависимость дифференциального сечения рассеяния неполяризованных частиц на свинце (5.133) как функция $s = \sin(\theta/2)$.

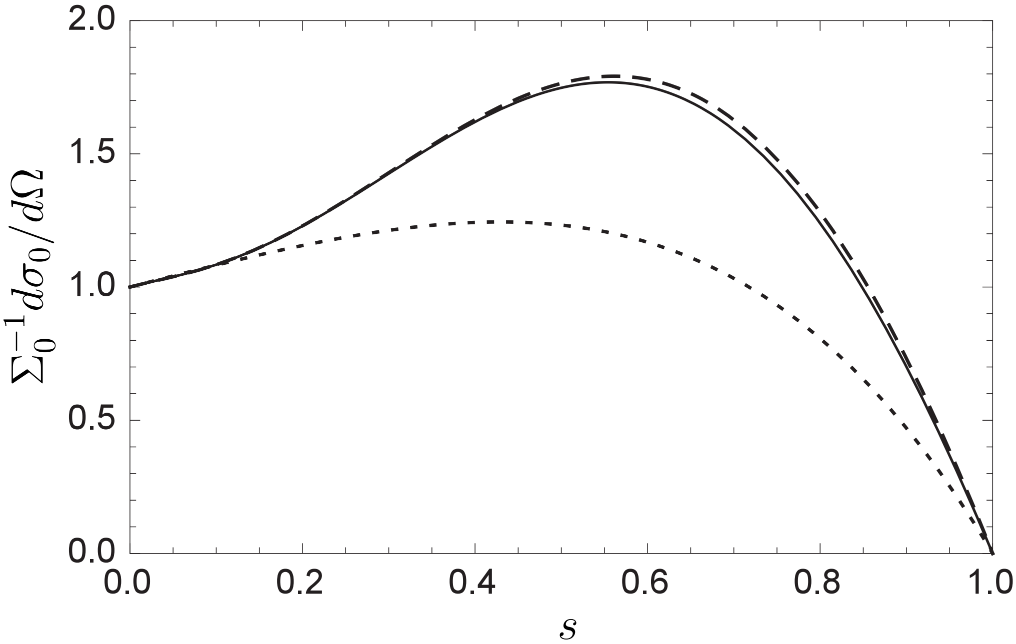

Рис. 5.4. Зависимость дифференциального сечения $d\sigma_0/d\Omega$, уравнение (5.122), в единицах $\Sigma_0 = \frac{\nu^2}{4p^2 s^4}$, от $s = \sin\frac{\theta}{2}$ для $\varepsilon \gg m$ и $\nu = \eta = 0.6$. Сплошная линия: точный результат, полученный из (5.121); штрихованная линия: результат, полученный из (5.126); пунктирная линия: результат, полученный из F в квазиклассическом приближении с учётом первой квазиклассической поправки (определяется формулой (5.126) с отброшенными членами $\propto s^2$).

5.3. Выводы к пятой главе

В данной главе исследовался предел применимости квазиклассического приближения на примере упругого рассеяния электронов, включая поляризационные эффекты. Используя квазиклассическую функцию Грина, было найдено дифференциальное сечение с учётом первой поправки по θ и функция Шермана в главном по θ приближении для произвольного сферически симметричного атомного потенциала. Для кулоновского поля, используя разложение точной амплитуды, была вычислена амплитуда упругого рассеяния с точностью θ^2, из которой были получены выражения для дифференциального сечения с точностью θ^2 и для функции Шермана с точностью θ^1 . Было показано, что вклад порядка θ^2 в дифференциальное сечение и порядка θ^1 в функцию Шермана определяется не только большими угловыми моментами $l \sim 1/\theta$, но и $l \sim 1$. Таким образом, в этой главе был сделан важный вывод о том, что с помощью квазиклассического приближения нельзя продвинуться в вычислении сечений дальше первой поправки, не учитывая вклада малых угловых моментов (неквазиклассический вклад).

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации:

- С учётом первой квазиклассической поправки найдены квазиклассическая функция Грина уравнения Дирака и соответствующие волновые функции в произвольном атомном потенциале. Квазиклассическая поправка позволяет не только увеличить точность теоретических предсказаний для сечений различных процессов, но и приводит к новым эффектам, отсутствующим при вычислении этих сечений в рамках главного квазиклассического приближения.

- Получены зарядовая и азимутальная асимметрии в дифференциальном сечении тормозного излучения при высоких энергиях в произвольном атомном потенциале. Эти асимметрии отсутствуют при вычислении в главном квазиклассическом приближении и возникают только при учёте первой квазиклассической поправки. Рассмотрен случай тормозного излучения электронов и мюонов. В случае тормозного излучения электронов исследовано влияние атомной экранировки, а в случае тормозного излучения мюонов — влияние атомной экранировки и эффекта конечного размера ядра.

- В главном квазиклассическом приближении вычислены кулоновские поправки к дифференциальному сечению двойного тормозного излучения при высоких энергиях. Исследовано влияния экранировки на дифференциальное и полное сечение. Из анализа однократного и двойного тормозного излучения сформулировано простое правило для нахождения в главном квазиклассическом приближении амплитуды n-кратного тормозного излучения из борновской амплитуды.

- В рамках главного квазиклассического приближения вычислено дифференциальное сечение процесса $\gamma Z \to e^+e^-\gamma' Z$. Показано , что кулоновские поправки значительно влияют на дифференциальное сечение этого процесса.

- Проведено исследование применимости квазиклассического приближения на примере упругого рассеяния. Используя точную амплитуду упругого рассеяния, показано, что вклад области угловых моментов $l \sim 1$ по порядку величины равен вкладу от второй квазиклассической поправки. Таким образом, сделан важный вывод о том, что нельзя выйти за рамки первого квазиклассического приближения без учёта области $l \sim 1$.

В заключение, я хотел бы выразить благодарность моему научному руководителю А.И. Мильштейну у которого я многому научился. Я также благодарен Р.Н. Ли за совместную работу и ценные советы в обсуждении физических результатов.

Приложение А

Вычисление матричного элемента тормозного излучения

В этом приложении мы будем обсуждать метод вычисления матричного элемента однократного тормозного излучения на примере амплитуды A_{00} (2.30):

$$A_{00} = \int d\boldsymbol{r}\, \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right) f_0 g_0\,, \tag{A.135}$$

где функция $f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q})$ определена в (1.19), а $g_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = f_0(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{p})$. Другие величины уравнения (2.32) вычисляются аналогичным образом. Разобьём этот интеграл на два, при $z>0$ и при $z<0$, и обозначим соответственные вклады в A_{00} как A_{00}^{+} и A_{00}^{-}. Для $z>0$ в функции f_0 можно пренебречь квантовыми флуктуациями (f_0 имеет вид эйкональной волновой функции)

$$f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}) = e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \exp\left[-i\int\limits_0^\infty dx V(\boldsymbol{r}+x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}})\right]\,, \tag{A.136}$$

тогда

$$\begin{aligned} A_{00}^{+} &= \int\limits_{z>0} d\boldsymbol{r} \int \frac{d\boldsymbol{Q}}{i\pi} \exp\left\{iQ^2 - i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\int\limits_0^\infty dx[V(\boldsymbol{r}_x) + V(\boldsymbol{r}+x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}})]\right\} \\ &\times \left[1 + \frac{i}{2\varepsilon_p}\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x dy(x-y)\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}_x)\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}_y)\right]\,, \end{aligned} \tag{A.137}$$

где $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{Q}\sqrt{2r/p}$. В пределах нашей точности можно заменить величину $V(\boldsymbol{r}+x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}})$ в (A.137) на $V(\boldsymbol{r}+x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{Q}\sqrt{2r/p})$, тогда после сдвига

$\boldsymbol{\rho} \to \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{Q}\sqrt{2r/p}$, интеграл по переменой $\boldsymbol{Q}$ вычисляется без особого труда:

$$A_{00}^{+} = \int\limits_{z>0} d\boldsymbol{r} \exp\left\{ -i\frac{z}{2p}\Delta_{\perp}^{2} - i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\int\limits_{0}^{\infty} dx[V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n_p}) + V(\boldsymbol{r} + x\boldsymbol{n_q})] \right\}$$
$$\times\left[1 + \frac{i}{2\varepsilon_p}\int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{x} dy (x-y) \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n_p}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} - y\boldsymbol{n_p})\right] . \qquad (A.138)$$

Аналогично для $z < 0$ получаем

$$A_{00}^{-} = \int\limits_{z<0} d\boldsymbol{r} \exp\{ i\frac{z}{2q}\Delta_{\perp}^{2} - i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\int\limits_{0}^{\infty} dx[V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n_p}) + V(\boldsymbol{r} + x\boldsymbol{n_q})]\}$$
$$\times\left[1 + \frac{i}{2\varepsilon_q}\int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{x} dy (x-y) \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} + x\boldsymbol{n_q}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} + y\boldsymbol{n_q})\right] . \qquad (A.139)$$

Существуют две перекрывающиеся области переменной Δ:

$$\text{I. } \Delta \ll \frac{m\omega}{\varepsilon_p}$$
$$\text{II. } \Delta \gg \Delta_{min} = \frac{m^2\omega}{2\varepsilon_p\varepsilon_q} . \qquad (A.140)$$

В первой области можно пренебречь в экспоненте в уравнениях (A.138) и (A.139) членом пропорциональным $\Delta_{\perp}^{2}$. Тогда сумма $A_{00} = A_{00}^{+} + A_{00}^{-}$ равна

$$A_{00} = \int d\boldsymbol{r} \exp\left\{ - i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\int\limits_{0}^{\infty} dx[V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n_p}) + V(\boldsymbol{r} + x\boldsymbol{n_q})) \right\}$$
$$\times\left[1 + \frac{i}{2\varepsilon_p}\int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{x} dy (x-y) \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n_p}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} - y\boldsymbol{n_p})\right.$$
$$\left. + \frac{i}{2\varepsilon_q}\int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{x} dy (x-y) \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} + x\boldsymbol{n_q}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\perp} V(\boldsymbol{r} + y\boldsymbol{n_q})\right] . \qquad (A.141)$$

В квадратных скобках можно сделать замену $\boldsymbol{n_p}, \boldsymbol{n_q} \to \boldsymbol{\nu}$, а в показателе экспоненты мы должны также учесть линейные члены при разложении по

$\boldsymbol{n_p} - \boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{n_q} - \boldsymbol{\nu}$. В интегралах по x и y, которые стоят внутри квадратных скобок, в зависимости от аргумента функции $V(\boldsymbol{r} \pm y\boldsymbol{\nu})$ делаем замену $z \to z \mp y$ и берём интеграл по y. Таким образом, вклад от первой области (A.140) равен

$$A_{00} = \int d\boldsymbol{r} \exp[-i\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{r} - i\chi(\rho)] \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})$$
$$\cdot \left[i\frac{\boldsymbol{\theta}_{qp}}{\Delta_z^2} - \frac{\omega}{2\Delta_z \varepsilon_p \varepsilon_q} \int\limits_0^\infty dx x \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{\nu}) \right],$$
$$\chi(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(z, \boldsymbol{\rho}) dz\,, \tag{A.142}$$

где $\Delta_z = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\theta}_{qp} = \boldsymbol{q}_\perp/q - \boldsymbol{p}_\perp/p$.

Во второй области (A.138) можно заменить $\boldsymbol{n}_q \to \boldsymbol{n}_p$ и $z\Delta_\perp^2/2p \to (\boldsymbol{n}_q \cdot \boldsymbol{n})\Delta_\perp^2/2p$. Полярный угол $\boldsymbol{n}$ мал, поэтому мы можем интегрировать (A.138) по области $\boldsymbol{n}_q \cdot \boldsymbol{n} > 0$. После интегрирования по z, величина A_{00}^+ имеет следующий вид

$$A_{00}^+ = \frac{1}{\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{n}_p + \Delta_\perp^2/2p} \int d\boldsymbol{\rho} \exp[-i\boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\chi(\rho)]$$
$$\times \left[-i + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_0^\infty dx x \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n}_p) \right]. \tag{A.143}$$

Величина A_{00}^- вычисляется аналогичным образом:

$$A_{00}^- = \frac{1}{-\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{n}_q + \Delta_\perp^2/2q} \int d\boldsymbol{\rho} \exp[-i\boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\chi(\rho)]$$
$$\times \left[-i + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_0^\infty dx x \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{n}_q) \right]. \tag{A.144}$$

Учитывая тождества

$$\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{n}_p + \Delta_\perp^2/2p = -\frac{m^2\omega}{2\varepsilon_p\varepsilon_q\xi_q}\,, \quad -\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{n}_q + \Delta_\perp^2/2q = \frac{m^2\omega}{2\varepsilon_p\varepsilon_q\xi_p},$$
$$\xi_p = \frac{m^2}{m^2 + \boldsymbol{p}_\perp^2}\,, \quad \xi_q = \frac{m^2}{m^2 + \boldsymbol{q}_\perp^2}\,,$$

матричный элемент $A_{00} = A_{00}^{+} + A_{00}^{-}$ во второй области равен

$$A_{00} = \frac{1}{m^4\omega}\int d\boldsymbol{\rho}\exp[-i\boldsymbol{\Delta}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho} - i\chi(\rho)]\Bigg[2i\varepsilon_p\varepsilon_q\xi_p\xi_q(\boldsymbol{p}_\perp + \boldsymbol{q}_\perp)\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp\chi(\rho)$$
$$+m^2(\varepsilon_p\xi_p - \varepsilon_q\xi_q)\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\int\limits_0^{\infty}dx x\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})\Bigg]\,. \qquad \text{(A.145)}$$

Так как области (A.140) перекрываются, мы можем сшить решения (A.142) и (A.145) и получить выражение, которое справедливо для всех Δ. Таким образом, получаем:

$$A_{00} = \frac{1}{m^4\omega}\int d\boldsymbol{r}\exp[-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r} - i\chi(\rho)]\Bigg[2i\varepsilon_p\varepsilon_q\xi_p\xi_q(\boldsymbol{p}_\perp + \boldsymbol{q}_\perp)$$
$$+m^2(\varepsilon_p\xi_p - \varepsilon_q\xi_q)\int\limits_0^{\infty}dx x\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r} - x\boldsymbol{\nu})\Bigg]\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\boldsymbol{r})\,. \qquad \text{(A.146)}$$

Приложение Б

Вычисление матричного элемента двойного тормозного излучения

В этом приложении мы обсудим метод вычисления матричного элемента двойного тормозного излучения на примере амплитуды

$$\mathcal{M} = \iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 - i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2} f_0(\boldsymbol{r}_2) d_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) g_0(\boldsymbol{r}_1)\,, \tag{Б.147}$$

которая даёт вклад в полную амплитуду (3.58). Остальные части этой амплитуды вычисляются таким же образом. Функции d_0, f_0, и g_0 определенны в уравнениях (1.15) и (1.19). Разобьём интеграл на три области, $z_1 < z_2 < 0$, $z_1 < 0 \,\&\, z_2 > 0$, $z_2 > z_1 > 0$, и обозначим соответственные вклады в $\mathcal{M}$ как $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, и $\mathcal{M}_3$. В первой области функции g_0 и d_0 имеют эйкональный вид

$$\begin{aligned}
g_0(\boldsymbol{r}_1) &= e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_1} \exp\left[-i\int_0^\infty dx V(\boldsymbol{r}_1 - x\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}})\right]\,, \\
d_0(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) &= -\frac{e^{i\kappa r}}{4\pi r} \exp\left[-ir\int_0^1 dx V(\boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r})\right]\,, \\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\,, \quad \kappa = \sqrt{(\varepsilon_p - \omega_1)^2 - m^2}\,,
\end{aligned} \tag{Б.148}$$

тогда

$$\mathcal{M}_1 = \frac{i}{(2\pi)^2} \iint\limits_{z_1<z_2<0} \frac{d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2}{r} \int d\boldsymbol{Q}\, \exp(i\Phi)\,,$$

$$\Phi = Q^2 + (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{r}_1 - (\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}_2 + \kappa r$$

$$-\int\limits_0^\infty dx\, V(\boldsymbol{r}_1 - x\boldsymbol{n}_p) - r\int\limits_0^1 dx V(\boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r}) - \int\limits_0^\infty dx\, V(\boldsymbol{r}_q)\,,$$

$$\boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{r}_2 + x\boldsymbol{n}_q + \boldsymbol{Q}\sqrt{\frac{2|\boldsymbol{n}_q\cdot\boldsymbol{r}_2|}{q}}\,. \tag{Б.149}$$

В пределах нашей точности можно заменить величины $V(\boldsymbol{r}_1 - x\boldsymbol{n}_p)$ и $V(\boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r})$ в (Б.149) на $V(\boldsymbol{r}_1 - x\boldsymbol{n}_p + \boldsymbol{Q}\sqrt{2|\boldsymbol{n}_q\cdot\boldsymbol{r}_2|/q})$ и $V(\boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r} + \boldsymbol{Q}\sqrt{2|\boldsymbol{n}_q\cdot\boldsymbol{r}_2|/q}\,)$ и сделать замены переменных $\boldsymbol{\rho}_1 \to \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{Q}\sqrt{2|\boldsymbol{n}_q\cdot\boldsymbol{r}_2|/q}$, $\boldsymbol{\rho}_2 \to \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{Q}\times\sqrt{2|\boldsymbol{n}_q\cdot\boldsymbol{r}_2|/q}$, где $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{r}_{1\perp}$ и $\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{r}_{2\perp}$. После интегрирования по $\boldsymbol{Q}$ получаем

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{z_1<z_2<0} \frac{d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2}{r}\, \exp[i(\Phi_0+\Phi_1)]\,,$$

$$\Phi_0 = (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{r}_1 - (\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}_2 + \kappa r$$

$$-\int\limits_0^\infty dx\, V(\boldsymbol{r}_1 - x\boldsymbol{n}_p) - r\int\limits_0^1 dx V(\boldsymbol{r}_1 + x\boldsymbol{r}) - \int\limits_0^\infty dx\, V(\boldsymbol{r}_2 + x\boldsymbol{n}_q)\,,$$

$$\Phi_1 = -\frac{\Delta_\perp^2|\boldsymbol{n}_q\cdot\boldsymbol{r}_2|}{2q}\,. \tag{Б.150}$$

Аналогичным образом можно получить выражения для $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$,

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{z_2>0,z_1<0} \frac{d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2}{r}\, \exp[i(\Phi_0+\Phi_2)]\,,$$

$$\mathcal{M}_3 = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{z_2>z_1>0} \frac{d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2}{r}\, \exp[i(\Phi_0+\Phi_3)]\,,$$

$$\Phi_2 = -\frac{\Delta_\perp^2|\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_2|}{2\kappa r^3}\,,\quad \Phi_3 = -\frac{\Delta_\perp^2|\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{r}_1|}{2p}\,. \tag{Б.151}$$

Существуют две перекрывающиеся области переменной Δ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I.}\, \Delta \gg \frac{m^2(\omega_1+\omega_2)}{\varepsilon_p \varepsilon_q} \\ &\mathrm{II.}\, \Delta \ll \frac{m(\omega_1+\omega_2)}{\varepsilon_p} \,. \end{aligned} \qquad (Б.152)$$

В первой области мы можем пренебречь в фазе Φ_0 членом $\Delta_\parallel$ по сравненипю с $\Delta_\perp$ и заменить в интеграле $\boldsymbol{n}_q \to \boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{r} \to (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nu}$, где ось z параллельна $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}_p$. После интегрирования по z_1, z_2, и $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$, получаем

$$\mathcal{M} = \frac{i}{2}\int d\boldsymbol{\rho} \exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\chi(\rho)\right]\left[qN_1 - \kappa N_2 - pN_3\right], \qquad (Б.153)$$

где величины $\chi(\rho)$, N_1, N_2 и N_3 определены в уравнении (3.60). Воспользуемся соотношением

$$qN_1 - \kappa N_2 - pN_3 = \boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{j}_0\,, \qquad (Б.154)$$

где $\boldsymbol{j}_0$ определено в (3.60). Интегрируя по частям, получаем $\mathcal{M}$ в первой области (Б.152):

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{i}{2}\int d\boldsymbol{\rho} \exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\chi(\rho)\right] \boldsymbol{\nabla}_\perp \chi(\rho)\cdot \boldsymbol{j}_0 \\ &= -\frac{i}{2}\int d\boldsymbol{r} \exp\left[-i\boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\chi(\rho)\right] \boldsymbol{\nabla}_\perp V(r)\cdot \boldsymbol{j}_0\,. \end{aligned} \qquad (Б.155)$$

Во второй области (Б.152) можно пренебречь членом Φ_1 в (Б.150) и членами $\Phi_{2,3}$ в (Б.151). В фазе Φ_0 мы будем учитывать только линейные члены при разложении по $\boldsymbol{n}_q - \boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$. Результат, верный для обоих областей (Б.152) имеет следующий вид

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{2}\int d\boldsymbol{r} \exp\left[-i\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{r} - i\chi(\rho)\right] \boldsymbol{\nabla}_\perp V(r)\cdot \boldsymbol{j}_0\,. \qquad (Б.156)$$

Он соответствует (Б.155) с заменой $\boldsymbol{\Delta}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} \to \boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r}$.

Список литературы

1. Overbo I., Mork K. J., Olsen H. A. Exact calculation of pair production // Phys. Rev. 1968. Vol. 175. Pp. 1978–1981.

2. Furry W. H. Approximate Wave Functions for High Energy Electrons in Coulomb Fields // Phys. Rev. 1934. Vol. 46. Pp. 391–396.

3. Sommerfeld Arnold, Maue August Wilhelm. Verfahren zur näherungsweisen Anpassung einer Lösung der Schrödinger-an die Diracgleichung // Annalen der Physik. 1935. Vol. 414, no. 7. Pp. 629–642.

4. Bethe H. A., Maximon L. C. Theory of Bremsstrahlung and Pair Production. 1. Differential Cross Section // Phys. Rev. 1954. Vol. 93. Pp. 768–784.

5. Davies Handel, Bethe H. A., Maximon L. C. Theory of Bremsstrahlung and Pair Production. 2. Integral Cross Section for Pair Production // Phys. Rev. 1954. Vol. 93. Pp. 788–795.

6. Olsen Haakon, Maximon L. C., Wergeland Harald. Theory of High-Energy Bremsstrahlung and Pair Production in a Screened Field // Phys. Rev. 1957. — Apr. Vol. 106. Pp. 27–46. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.27.

7. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, 1973.

8. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах. Новосибирск:Наука, 1989.

9. Milshtein A. I., Strakhovenko V. M. Quasiclassical Approach to the High-energy Delbruck Scattering // Phys. Lett. 1983. Vol. A95. P. 135.

10. Lee R.N., Milstein A.I. Quasiclassical Green function and Delbrück scattering in a screened Coulomb field // Physics Letters A. 1995. Vol. 198, no. 3. Pp. 217 – 224. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960195000558.

11. Ли Роман, Мильштейн Александр, Страховенко Владимир. Квазиклассическая функция Грина во внешнем поле и процессы рассеяния на малые углы // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2000. Т. 117. С. 75.

12. Krachkov P. A., Milstein A. I. Charge asymmetry in the differential cross section of high-energy bremsstrahlung in the field of a heavy atom // Phys. Rev. 2015. Vol. A91, no. 3. P. 032106. arXiv:hep-ph/1501.03897.

13. Di Piazza A., Milstein A. I. Quasiclassical approach to high-energy QED processes in strong laser and atomic fields // Phys. Lett. 2012. Vol. B717. Pp. 224–228. arXiv:physics.atom-ph/1204.2502.

14. Lee R. N., Milstein A. I., Strakhovenko V. M., Schwarz O. Ya. Coulomb Corrections to Bremsstrahlung in the Electric Field of a Heavy Atom at High Energies // JETP. 2005. Т. 127. С. 5–17. arXiv:hep-ph/0404224.

15. Bethe H., Heitler W. On the Stopping of fast particles and on the creation of positive electrons // Proc. Roy. Soc. Lond. 1934. Vol. A146. Pp. 83–112.

16. Racah Giulio. Sopra L'irradiazione Nell'urto di Particelle Veloci // Il Nuovo Cimento (1924-1942). 2008. Vol. 11, no. 7. Pp. 461–476. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02959918.

17. Olsen Haakon. Outgoing and Ingoing Waves in Final States and Bremsstrahlung // Phys. Rev. 1955. — Aug. Vol. 99. Pp. 1335–1336. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.99.1335.

18. Olsen Haakon, Maximon L. C. Photon and Electron Polarization in High--Energy Bremsstrahlung and Pair Production with Screening // Phys. Rev. 1959. Vol. 114. Pp. 887–904.

19. Korol A. V. Methods of the approximate treatment of the two-photon bremsstrahlung in point Coulomb field // J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys. 1995. Vol. 28.

20. Крыловецкий А.А., Манаков Н.Л., Мармо С.И., Старасе А.Ф. Двухфотонные тормозные процессы в атомах: поляризационные эффекты и аналитические результаты для кулоновского потенциала // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2002. Vol. 122, no. 6.

21. Smirnov A. I. Double Bremsstrahlung of Soft Photons // Izv. Vuz. Fiz. 1977. Vol. 1. Pp. 136–138.

22. Krachkov P. A., Lee R. N., Milstein A. I. Double bremsstrahlung from high--energy electrons in an atomic field // Phys. Rev. 2015. Vol. A91, no. 6. P. 062109. arXiv:hep-ph/1504.00765.

23. Overbo I. The Coulomb Correction to electron Pair Production by Intermediate-Energy Photons // Phys. Lett. 1977. Vol. B71. P. 412.

24. Lee R. N., Milstein A. I., Strakhovenko V. M. High-energy expansion of Coulomb corrections to the e+ e- photoproduction cross-section // Phys. Rev. 2004. Vol. A69. P. 022708. arXiv:hep-ph/hep-ph/0310108.

25. Di Piazza A., Milstein A. I., Muller C. Polarization of the electron and positron produced in combined Coulomb and strong laser fields // Phys. Rev. 2010. Vol. A82. P. 062110. arXiv:hep-ph/1010.6274.

26. Lee R. N., Milstein A. I., Strakhovenko V. M. Charge Asymmetry in the Differential Cross Section of High-Energy e+e- Photoproduction in the Field of a Heavy Atom // Phys. Rev. 2012. Vol. A85. P. 042104. arXiv:hep-ph/1111.5895.

27. Downie E. J., Lee R. N., Milstein A. I., Ron G. Charge asymmetry in high--energy $\mu^+\mu^-$ photoproduction in the electric field of a heavy atom // Phys. Lett. 2014. Vol. B728. Pp. 645–649. arXiv:nucl-th/1312.1192.

28. Bjorken J. D., Drell S. D., Frautschi S. C. Wide-Angle Pair Production and Quantum Electrodynamics at Small Distances // Phys. Rev. 1958. Vol. 112. Pp. 1409–1417.

29. Huld B. Hard photon radiative correction to wide angle pair production // Physics Letters B. 1967. Vol. 24, no. 4. Pp. 185 – 187. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269367904893.

30. Corbo G. Radiative Corrections in electron-Positron Pair Photoproduction // Phys. Rev. 1978. Vol. D17. Pp. 725–728.

31. Lomon E. L. An additional radiative correction to wide angle pair production // Phys. Lett. 1966.

32. Krachkov P. A., Lee R. N., Milstein A. I. High-energy e^+e^- photoproduction in the field of a heavy atom accompanied by bremsstrahlung // Phys. Rev. 2014. Vol. A90, no. 6. P. 062112. arXiv:hep-ph/1410.6566.

33. Krachkov P. A., Lee R. N., Milstein A. I. Small-angle scattering and quasiclassical approximation beyond leading order // Phys. Lett. 2015. Vol. B751. Pp. 284–288. arXiv:physics.atom-ph/1507.04111.

34. Mott Neville F. The scattering of fast electrons by atomic nuclei // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1929. Vol. 124, no. 794. Pp. 425–442.

35. McKinley William A., Feshbach Herman. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei // Phys. Rev. 1948. Vol. 74. Pp. 1759–1763.

36. Dalitz R. H. On higher Born approximations in potential scattering // Proc. Roy. Soc. Lond. 1951. Vol. 206. Pp. 509–520.

37. Байер В.Н., Катков В.М. Поправки к приближению эйконала и тормозное излучение электронов при высоких энергиях. // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 227. С. 325.

38. Ахиезер А.И., Болдышев В.Ф., Шульга Н.Ф. К теории упругого рассеяния быстрых частиц в квазиклассическом приближении // Теоретическая и Математическая Физика. 1975. Т. 23. С. 11.

39. Ахиезер А.И., Болдышев В.Ф., Шульга Н.Ф. Теория упругого рассеяния и тормозного излучения быстрых заряженных частиц в кристаллах // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1979. Т. 10. С. 51–89.

40. Johnson W. R., Weber T. A., Mullin C. J. Coulomb Scattering of Polarized Electrons // Phys. Rev. 1961. — Feb. Vol. 121. Pp. 933–939. URL: `http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.121.933`.

41. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Москва "Наука", 1989.

42. Ли Р. Н., Мильштейн А. И., Страховенко В. М. Расщепление фотона высокой энергии в сильном кулоновском поле // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1997. Т. 112. С. 1921–1940.

43. Lee R. N., Milstein A. I., Strakhovenko V. M. High-energy photon splitting on heavy atoms // Phys. Rev. A. 1998. — Apr. Vol. 57. Pp. 2325–2338. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.2325.

44. Moliere G. Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen I. Einzelstreuung am abgeschirmten Coulomb-Feld // Z. Naturforsch. 1947. Vol. A2. P. 133.

45. Überall. Electron Scattering From Complex Nuclei. Academic, 2012.

46. Gluckstern RL, Lin Shin-R. Relativistic Coulomb Scattering of Electrons // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 5. Pp. 1594–1602.

47. Beneke M., Smirnov V.A. Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold // Nuclear Physics B. 1998. Vol. 522, no. 1–2. Pp. 321 – 344. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398001382.

48. Wallace Stephen J. High-Energy Expansions of Scattering Amplitudes // Phys. Rev. D. 1973. — Sep. Vol. 8. Pp. 1846–1863. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.8.1846.

49. Tjon J. A., Wallace S. J. Coulomb corrections in quasielastic scattering based on the eikonal expansion for electron wave functions // Phys. Rev. C. 2006. — Dec. Vol. 74. P. 064602. URL: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.74.064602.