40

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 66

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ С ЭЛЕКТРОМАГ - НИТНОЙ ВОЛНОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск
1976

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрены радиационные эффекты при движении скалярной частицы в поле плоской электромагнитной волны общего вида, распространяющейся вдоль магнитного поля. В рамках операторной техники вычислен массовый оператор частицы. Проведен детальный анализ в случае циркулярно поляризованной монохроматической волны. Исследовано поведение вблизи циклотронного резонанса.

Institute for Nuclear Physics,Novosibirsk,630090

QUANTUM THEORY OF CHARGED PARTICLE INTERACTION
WITH ELECTROMAGNETIC PLANE-WAVE IN MAGNETIC FIELD

V.N.BAIER,A.I.MILSTEIN

a b s t r a c t

Radiative effects for spin-0 particle interacting with the intence plane-wave of general type (see Eqs.(1),(2)) propagating along the magnetic field H have been considered.The mass operator on the mass shell is calculated using an operator technique (seeEqs.(13),(22) - (24)).A detatailed analisys has been made in a specific case,when plane-wave is monochromatic and circulary polarized (mass operator for this case is represented by Eqs (43),(44),(9)).Special limiting cases are discussed:weak magnetic field corrections for the events in the intense plane-wave(see Eq.(45)),Compton scattering in the magnetic field (see Eqs.(47) - (50)),a vicinity of a cyclotron resonance (see Eqs.(51) - (54)), where it is shown,that the radiative effects in the nearest vicinity of the resonance become quasicsassical (see Eqs.(55) - (57)).

I. В последние годы широко обсуждается поведение частиц в электромагнитных полях сложной конфигурации. Одним из такого рода типов полей является плоская электромагнитная волна распространяющаяся вдоль магнитного поля. Решение уравнений Клейна-Гордона и Дирака в таком поле было получено Рэдмондом /1/, который провел также простой анализ классического движения частицы.Функции Грина скалярной и спинорной частицы для этого случая были найдены Баталиным и Фрадкиным с использованием техники функционального интегрирования/2/.Рождение пары частиц фотоном в таком поле обсуждалось Олейником /3/.

В рассматриваемой конфигурации поля реализуется весьма интересная резонансная ситуация: в точке циклотронного резонанса, в которой частота волны совпадает с циклотронной частотой движения частицы в магнитном поле с учетом допплеровского сдвига, может иметь место резонансная передача энергии частицы волне и обратно, что может быть использовано для физических приложений.Одно из таких приложений обсуждалось Коломенским, Лебедевым и Ворониным /4,5/, которые рассмотрели возможность ускорения заряженных частиц в таком поле, естественно, в рамках классической теории. Резонансное усиление волны частицей обсуждается в работе авторов /6/. По-видимому, аналогичный механизм может быть использован для затухания поперечных колебаний в пучках заряженных частиц.

Для рассмотрения процессов во внешних полях в рамках квантовой электродинамики удобно использовать операторную диаграммную технику, развитую для случая однородного электромагнитного поля в работке Каткова, Страховенко и одного из авторов /7/, и для случая плоской электромагнитной волны в работе Каткова, Страховенко и авторов /8/. Метод основывается на операторном представлении функции Грина заряженной частицы в поле с последующим специфическим распутыванием операторных выражений. Рассмотрение радиационных эффектов в данном поле является существенно более сложной задачей, чем для случаев указанных выше, и ранее не проводилось. В данной работе эта задача решена с помощь соответствующей операторной техники, которая и в этом случае оказалась весьма адекватной задаче. Ниже найден массовый оператор скалярной частицы в поле рассматриваемой конфигурации, который описывает основные характеристики поведения заряженной частицы и в то же время позволяет избежать усложнений, возникающих при решении задачи для спинорных частиц, которую предполагается рассмотреть в дальнейшем.

Изучаемое электромагнитное поле будем описывать потенциалом

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu(x_{\shortparallel}) + \mathcal{A}_\mu(\varphi) \qquad \text{(I)}$$

где $\varphi = \varkappa x$, $\varkappa x_{\shortparallel} = 0$. Положим, что магнитное поле направлено по оси 3, вдоль которой распространяется волны, тогда

$$A^1(x_{\shortparallel}) = -x^2 H, \quad \mathcal{A}^\mu(\varphi) = n_1^\mu a_1(\varphi) + n_2^\mu a_2(\varphi) \qquad (2)$$

здесь $\varphi = \varkappa x = x^0 - x^3$, введены вектора $\varkappa^\mu = g_0^\mu + g_3^\mu$, $n_1^\mu = g_1^\mu$, $n_2^\mu = g_2^\mu$ где g_ν^μ – компоненты метрического тензора.

Напряженность электромагнитного поля (I) представим в виде

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{2} f_k^{\mu\nu} a_k'(\varphi), \quad f_k^{\mu\nu} = \varkappa^\mu n_k^\nu - \varkappa^\nu n_k^\mu \qquad (3)$$

где $F^{21} = H$; H – магнитное поле.

2. В принятом подходе массовый оператор частицы со спином 0 может быть представлен в виде (см./7/, формула (I.IO)):

$$M^{(0)} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k\, (2\mathcal{P}-k)^\mu \frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2 - m^2 + i\epsilon} (2\mathcal{P}-k)_\mu \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \qquad (4)$$

где $\mathcal{P}_\mu = i\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu$ $(e>0)$. Перед выполнением интегрирования по k в (4) необходимо провести преобразование подынтегрального выражения с учетом некоммутативности компонент оператора $\mathcal{P}_\mu$. Проведем стандартную экспоненциальную параметризацию пропагаторов

$$\frac{1}{k^2+i\epsilon}\,\frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2 - m^2 + i\epsilon} = -\int_0^\infty s\,ds \int_0^1 du\, e^{-isum^2} e^{isu(\mathcal{P}^2 - 2\mathcal{P}k) + isk^2} \qquad (5)$$

Используя это представление можно преобразовать среднее значение оператора (4) на массовой оболочке к форме:

$$\langle M^{(0)} \rangle = \Big\langle \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^\infty ds \Big\{ s \int_0^1 du\, 4\mathcal{P}^\mu e^{isu(\mathcal{P}-k)^2} \mathcal{P}_\mu \times$$
$$\times\, e^{is(1-u)k^2 - isum^2} - i e^{is[(\mathcal{P}-k)^2 - m^2]} \Big\} \Big\rangle \qquad (6)$$

В формуле (6) проведено интегрирование по частям члена, содержащего $\mathcal{P}k$ в предэкспоненциальном выражении, что позволило привести $\langle M^{(0)} \rangle$ к виду, где от k зависит только показатель экспоненты. В (6) не выписан член не зависящий от поля, так как он выпадает при перенормировке. Таким образом, взятие интеграла по k сводится к вычислению величины

$$Q^{(0)} = \int d^4k\, e^{isu(\mathcal{P}-k)^2} e^{is(1-u)k^2} =$$
$$= \int d^4k\, e^{-ikX} e^{isu\mathcal{P}^2} e^{ikX} e^{is(1-u)k^2} \qquad (7)$$

где использован оператор сдвига в импульсном пространстве: для некоторой функции $f(\mathcal{P})$ имеет место $e^{-ikX} f(\mathcal{P}) e^{ikX} = f(\mathcal{P}-k)$, $[\mathcal{P}_\mu, X_\nu] = ig_{\mu\nu}$.
Для вычисления интеграла (7) необходимо преобразовать операторное выражение $\exp(isu\mathcal{P}^2)$. Это преобразование (распутывание), являющееся одним из центральных мест в данном рассмотрении, проведено в Приложении. При вычислении интеграла (7) используем представление (П.I2) для $\exp(isu\mathcal{P}^2)$. Интегрирование по переменным k^0, k^3 может быть выполнено с помощью методики, использованной в работе /8/. При этом следует перейти к переменным

$$k_\varphi = \frac{1}{2}(k^0 + k^3), \quad k_\xi = \frac{1}{2}(k^0 - k^3)$$

причем интегрирование по k_φ дает $\delta(k_\xi - up_\xi)$, что означает, что интегрирование по k_ξ сводится к замене $k_\xi \to up_\xi$. Интегрирование по переменным k^1, k^2 может быть проведено с помощью методики, принятой в работе /7/. В итоге получаем

$$Q^{(0)} = -\frac{i\pi^2}{s^2} \frac{1}{\sqrt{D}} e^{i\Phi} \exp\Big[i(\mathcal{P}-q)_{\shortparallel}^2 \frac{\varrho}{eH}\Big] e^{i\eta \mathcal{P}_\perp^2} \qquad (8)$$

здесь использованы обозначения[ж)]: (см.формулы (П.4), (П.6)):

$$q = x\int_0^1 \Delta(\eta y) e^{-2xBy} dy\, (\mathrm{ctg}\, x + B), \quad \eta = su(1-u),$$

$$\varrho = x - a(x), \quad a(x) = \mathrm{arc\,tg}\Big[\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x + 2x\frac{(1-u)}{u}}\Big], \qquad (9)$$

ж) Выбор ветвей многозначных функций в формуле (9) должен проводиться как в работе /7/. Здесь и ниже широко используется матричная форма записи, напр. $\Delta B q = \Delta_\mu B^{\mu\nu} q_\nu$.

$$\Phi = su\Big[2su\int_0^1 dy_2\int_0^{y_2} dy_1\,\Delta(\eta y_1)\,e^{-2Bx(y_1-y_2)}\,eF\,\Delta(\eta y_2) + \int_0^1\Delta^2(\eta y)\,dy - x\,\mathrm{ctg}\,x\Big(\int_0^1\Delta(\eta y)\,e^{-2Bxy}dy\Big)^2\Big],$$

$$D = \frac{u^2}{x^2}\Big[\sin^2 x + x^2\Big(\frac{1-u}{u}\Big)^2 + \frac{1-u}{u}\,x\sin 2x\Big]$$

где $x = useH$, матрица $B^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\nu}}{H}$. В массовый оператор (6) входит комбинация $\mathcal{P}^\mu Q^{(0)}\mathcal{P}_\mu$. Нетрудно убедиться, что (ср. формулу (П.I))

$$\mathcal{P}^\mu Q^{(0)}\mathcal{P}_\mu = \frac{1}{2}\Big\{(\mathcal{P}^2-\mathcal{P}_\parallel^2),\,Q^{(0)}\Big\} + \mathcal{P}_\parallel^{\mu}Q^{(0)}\mathcal{P}_{\parallel\mu} \qquad \text{(I0)}$$

С учетом этого задача сводится к вычислению комбинации

$$\exp\Big[i(\mathcal{P}-q)_\parallel^2\frac{\rho}{eH}\Big]e^{i\eta\mathcal{P}_\perp^2}\,\mathcal{P}_\parallel\,e^{-i\eta\mathcal{P}_\perp^2}\exp\Big[-i(\mathcal{P}_\parallel-q)^2\frac{\rho}{eH}\Big] = \qquad \text{(II)}$$

$$= q - \Delta(\eta) + e^{-2B\rho}(\mathcal{P}_\parallel - q)$$

Используя (II) имеем на массовой оболочке

$$\mathcal{P}^\mu Q^{(0)}\mathcal{P}_\mu = \Big\{m^2 + ieH\sin 2\rho - \frac{1}{2}\Big[(1-e^{-2B\rho})(\mathcal{P}_\parallel - q) + \Delta(\eta)\Big]^2\Big\}Q^{(0)} \qquad \text{(I2)}$$

Для вычисления $\langle M^{(0)}\rangle$ (формула (6)) необходимо найти еще второй член в фигурных скобках. Нетрудно убедиться, что интеграл $\int d^4k$ от этого выражения есть $-iQ^{(0)}(u{=}1)e^{-ism^2}$. Подставляя этот результат и (I2) и (6) получим среднее от массового оператора на массовой оболочке. Перенормировка этой величины сводится к вычитанию её значения при поле $\mathcal{F}^{\mu\nu}=0$ (см. /7, 8/). В итоге получаем среднее значение перенормированного массового оператора частицы со спином 0: $\langle M^{(0)}\rangle = M_1 + M_2$

$$M_2 = \frac{i\alpha}{4\pi}\Big\langle\int_0^\infty\frac{ds}{s^2}\,e^{-ism^2}\Big(1 - \frac{eHs}{\sin(eHs)}\Big)\Big\rangle \qquad \text{(I3)}$$

$$M_1 = \frac{\alpha}{\pi}\Big\langle\int_0^1\frac{ds}{s}\int_0^1 du\Big\{\Big[m^2 + ieH\sin 2\rho - \frac{1}{2}\{(1-e^{-2B\rho})(\mathcal{P}_\parallel-q)+\Delta(\eta)\}^2\Big]\frac{e^{i\Phi}}{\sqrt{D}}\exp\Big[i(\mathcal{P}-q)_\parallel^2\frac{\rho}{eH}\Big]\times e^{i\eta\mathcal{P}_\perp^2 - isum^2} - m^2e^{-isu^2m^2}\Big\}\Big\rangle$$

где контур интегрирования проходит ниже вещественной оси. Полученное выражение (I3) в предельном случае Н = 0 (ρ =0) непосредственно переходит в среднее значение массового оператора в поле плоской электромагнитной волны (см./8/, формула (2.22), где следует учесть, что $\langle d\beta/d\varphi\rangle = 0$). Что касается случая магнитного поля, то результат следующий из (I3) в пределе $a_{1,2}=0$ есть новое представление массового оператора в этом поле. Можно показать, что это представление совпадает с полученным ранее (см./7/, формула (2.4I)), проведя преобразование последнего с использованием интегрирования по частям.

3. Решение уравнения Клейна-Гордона для рассматриваемой конфигурации поля было найдено в /I/. Мы представим его в виде:

$$\Psi_n = \exp\Big\{-i\Big[\frac{\lambda}{2}\xi + \frac{m^2+b_n}{2\lambda}\varphi - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varphi}e\mathcal{A}(\varphi')\dot{K}(\varphi')d\varphi' + K(\varphi)\pi\Big]\Big\}\psi_n(x_\parallel) \qquad \text{(I4)}$$

где

$$\pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu(x_\parallel),\quad \xi = x^0 + x^3\ \Big(p_\xi\Psi_n = \frac{\lambda}{2}\Psi_n\Big),\quad b_n = eH(2n+1),$$

$$K(\varphi) = e^{\frac{eF\varphi}{\lambda}}\int_{-\infty}^{\varphi}e^{-\frac{eF\varphi'}{\lambda}}e\mathcal{A}(\varphi')\frac{d\varphi'}{\lambda},\quad \dot{K}(\varphi) \equiv \frac{dK(\varphi)}{d\varphi},$$

$$\psi_n(x_\parallel) = \Big(\frac{\sqrt{eH}}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\Big)^{1/2}e^{ip_x x}\,e^{-\frac{eH}{2}\left(y+\frac{p_x}{eH}\right)^2}H_n\Big(\sqrt{eH}\Big(y+\frac{p_x}{eH}\Big)\Big) \qquad \text{(I5)}$$

где H_n - полиномы Эрмита, удобства ради мы перешли от обозначений компонент вектора x^1, x^2, x^3 к x, y, z. Используя приведенное решение уравнения Клейна-Гордона, формулы (П.I0), (П.I2), также соотношения

$$\mathcal{P}^2\Psi_n = m^2\Psi_n\,, \quad \pi_\parallel^2\psi_n = -b_n\psi_n\,,$$

$$e^{iK\pi} f(\mathcal{P}_\parallel)\, e^{-iK\pi} = f(\mathcal{P}_\parallel - eFK), \quad \lambda\dot{K} = eA(\varphi) + eFK,$$

$$e^{i\eta(\pi_\parallel-\beta)^2} = e^{i\eta\pi_\parallel^2}\exp\left[-2i\eta\beta\int_0^1 e^{2eF\eta y}dy\,\pi_\parallel\right]e^{i\nu},$$

$$\nu = \beta^2\eta + 2\beta\eta^2\int_0^1 dy_2\int_0^{y_2} dy_1\, e^{2eF\eta(y_2-y_1)}\, eF\beta = \tag{16}$$

$$= \beta^2\,\frac{\sin 2eH\eta}{2eH}$$

где $f(\mathcal{P}_\parallel)$ – некоторая функция, η – параметр, $\beta=\beta(x_\parallel)$ произвольный 4-вектор, приходим к следующему выражению для M_I (13):

$$M_1 = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_0^1 du\, e^{-isu^2m^2}\int d\varphi\, dx\, dy\left(\psi_n^*(x_\parallel)\left[(\sigma_0 + \sigma\pi_\parallel)\frac{e^{i\Xi}}{\sqrt{D}}\, e^{-iX\pi}\, e^{i\tau\pi} - m^2\right]\psi_n(x_\parallel)\right) \tag{17}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$X = \frac{2\rho}{eH}\int_0^1 e^{-2B\rho y}dy\,(q + \lambda\dot{K}) = \frac{1-e^{-2B\rho}}{eF}(q+\lambda\dot{K}),$$

$$\tau = \frac{1-e^{-2eF\eta}}{eF}(q_\eta + \lambda\dot{K}),$$

$$\sigma = (1-e^{-2B\rho})(\Delta(\eta) - eFX),$$

$$\sigma_0 = m^2 + ieH\sin 2\rho + 2b_n\sin^2\rho - \frac{1}{2}(\Delta(\eta) - eFX)^2, \tag{18}$$

$$\Xi = \Phi - \Phi(\eta) + \Phi_1 + \Phi_2\,,$$

$$\Phi_1 = \frac{eH}{4}\left[X^2\operatorname{ctg}\rho - \tau^2\operatorname{tg} eH\eta\right], \quad \Phi_2 = b_n\left(\frac{eH\eta-\rho}{eH}\right),$$

где $X,\ \tau,\ \sigma$ – 4 векторы, q_η дается формулой (П.11), $\Phi(\eta)$ – формулой (П.13), а $q,\ \Phi$ даются формулой (9), т.е. следует различать q и q_η и Φ и $\Phi(\eta)$.

Для проведения дальнейших вычислений учтем, что функция ψ_n удовлетворяет соотношению

$$\sigma\pi\psi_n = -\sqrt{eH}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\sigma^+\psi_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}\,\sigma^-\psi_{n-1}\right) \tag{19}$$

где $\sigma^\pm = \sigma^x \pm i\sigma^y$. Входящие в (17) операторы $e^{-iX\pi}$, $e^{i\tau\pi}$ преобразуем следующим образом:

$$e^{i\tau\pi} = e^{i\tau^x\pi_x}e^{i\tau^y\pi_y}e^{\frac{\tau^x\tau^y}{2}[\pi_x,\pi_y]} = \exp\left[i\tau^x\pi_x + \frac{ieH}{2}\tau^x\tau^y\right]e^{i\tau^y\pi_y} \tag{20}$$

отметим, что $e^{i\tau^y\pi_y}$ есть оператор сдвига по оси y. Учитывая (19), (20), а также интеграл /9/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_m(x+y)H_n(x+z)\,dx = 2^n\sqrt{\pi}\, m!\, z^{n-m}L_m^{n-m}(-2yz), \quad m\le n \tag{21}$$

где L_m^{n-m} – полиномы Лагерра,

проведем в (17) интегрирование по $x,\ y$:

$$M_1 = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_0^1 du\, e^{-isu^2m^2}\left[\int d\varphi\left\{\sigma_0 L_n(\vartheta) - \frac{ieH}{2}\left[\sigma^+(X^- - \tau^-)L_{n-1}^1(\vartheta) + \sigma^-(X^+ - \tau^+)L_n^1\right]\right\}\times\frac{e^{i\Xi_1-\frac{\vartheta}{2}}}{\sqrt{D}} - m^2\right] \tag{22}$$

здесь

$$\Xi_1 = \Xi + \frac{eH}{2}(\tau B X), \quad \vartheta = -\frac{eH}{2}(X-\tau)^2 \geq 0, \tag{23}$$

$$X^\pm = X^x \pm iX^y, \quad \tau^\pm = \tau^x \pm i\tau^y$$

остальные обозначения см. в (9), (18).

При выполнении усреднения в M_2 (I3) возникают нормировочные интегралы, т.е.

$$M_2 = \frac{i\alpha}{4\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\, e^{-ism^2}\left(1 - \frac{eHs}{\sin eHs}\right) \qquad (24)$$

Подставляя полученные результаты (22), (24) в $\langle M^{(0)}\rangle = M_1 + M_2$ получим среднее значение массового оператора скалярной частицы на массовой оболочке в поле плоской электромагнитной волны общего вида, распространяющейся вдоль магнитного поля H. Для вычисления интеграла по φ необходимо задать явную форму поля. Ниже будет рассмотрен случай монохроматической волны.

4. Для выяснения смысла среднего значения массового оператора в зависящем от времени поле рассмотрим модифицированное уравнение Клейна-Гордона с учетом радиационных поправок, предложенное Швингером

$$\left(\mathcal{P}_0^{\,2} - \vec{\mathcal{P}}^2 - m^2 - M^{(0)}\right)\Psi = 0 \qquad (25)$$

В случае, когда потенциал является периодической функцией времени, решение его можно представить в виде

$$\Psi = e^{-i\varepsilon t} f(\vec{x}, t) \qquad (26)$$

где ε – квазиэнергия частицы, f – периодическая функция (с тем же периодом). Решение уравнения (25) в нулевом порядке ($M^{(0)} = 0$) представим в таком же виде:

$$\Psi_0 = e^{-i\varepsilon_0 t} f_0(\vec{x}, t) \qquad (27)$$

Умножив уравнение (25) слева на Ψ_0^+ и проинтегрировав по пространственным координатам, получим

$$\int\left(\Psi_0^+ \partial_0^2 \Psi - \Psi \partial_0^2 \Psi_0^+\right) d^3x = -\int \Psi_0^+ M^{(0)} \Psi\, d^3x \qquad (28)$$

Возьмем интеграл по времени по периоду от (28) и учтем, что в низшем порядке теории возмущений разность $\varepsilon - \varepsilon_0$ и $M^{(0)}$ являются величинами порядка α, тогда отбросив члены более высокого порядка, найдем*)

$$\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{2\langle \mathcal{P}_0\rangle}\int d^4x\, \Psi_0^+ M^{(0)} \Psi_0 \qquad (29)$$

где $\langle \mathcal{P}_0\rangle = \frac{i}{2}\int d^4x \left(\Psi_0^+ \overleftrightarrow{\partial_0} \Psi_0\right)$ есть нулевая компонента среднего кинетического импульса частицы (при выбранной нормировке волновых функций). Этот результат и определяет физический смысл среднего значения массового оператора. Представим

$$\Delta\varepsilon = \mathrm{Re}\,\Delta\varepsilon - \frac{iW}{2} \qquad (30)$$

где W есть средняя по периоду вероятность излучения частицы в данном поле в единицу времени. Подставляя (30) в (29) имеем

$$W = -\frac{\mathrm{Im}\langle M^{(0)}\rangle}{\langle \mathcal{P}_0\rangle} \qquad (31)$$

где $\langle M^{(0)}\rangle \equiv \int d^4x\, \Psi_0^+ M^{(0)} \Psi_0$

5. Перейдем теперь к рассмотрению случая монохроматической волны. Эллиптически поляризованную монохроматическую плоскую волну можно описывать потенциалом

$$eA^\mu(\varphi) = n_1^\mu \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\cos\omega\varphi + n_2^\mu \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}\sin\omega\varphi \qquad (32)$$

Оказывается весьма удобным использовать спиральные орты

$$\epsilon = \frac{n_1 + i n_2}{\sqrt{2}}, \quad \epsilon^* = \frac{n_1 - i n_2}{\sqrt{2}} \qquad (33)$$

причем $B\epsilon = i\epsilon$, $B\epsilon^* = -i\epsilon^*$. В этих терминах вектор $K(\varphi)$ (I5) для поля (32) имеет вид:

$$K(\varphi) = \frac{i}{2\sqrt{2}eH}\left[\xi_1\left(\frac{\epsilon e^{-i\omega\varphi}}{\nu+1+i0} - \frac{\epsilon^* e^{i\omega\varphi}}{\nu+1-i0}\right) - \xi_2\left(\frac{\epsilon e^{i\omega\varphi}}{\nu-1-i0} - \frac{\epsilon^* e^{-i\omega\varphi}}{\nu-1-i0}\right)\right] \qquad (34)$$

где $\nu \equiv \omega\lambda/eH$. Аналогично вектор q (9) есть

$$q = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\epsilon\left(c_+ \xi_1 e^{-i\omega\varphi} + c_- \xi_2 e^{i\omega\varphi}\right) + \text{к.с.}\right] \qquad (35)$$

*) Рассматривается сдвиг квазиэнергии при фиксированном квазиимпульсе

где

$$C_\pm = \frac{x\sin(x\pm y)}{(x\pm y)\sin x} e^{\pm iy} - 1, \quad x = sueH, \quad y = \omega\lambda\eta \tag{36}$$

Из найденных величин строятся вектора X и τ, в терминах которых представлен ответ (см.(22)). Приведем еще явный вид фазы Φ (13),(9):

$$\Phi = \frac{x}{4eH}\left[\zeta_1^2 V_1 + \zeta_2^2 V_2 + \zeta_1\zeta_2 \cos 2(\omega\varphi - y) V_3\right] \tag{37}$$

где

$$V_1 = \frac{y}{x+y}\left[\frac{\sin(x+y)}{x+y}\frac{\sin y}{y}\frac{x}{\sin x} - 1\right], \quad V_2 = V_1(y\to -y), \tag{38}$$

$$V_3 = \frac{\sin 2y}{x^2-y^2}\left[y - x\,\mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\right]$$

Аргумент полиномов Лагерра есть

$$\vartheta = \frac{1}{2eH}\left|\Pi_1 e^{i(\omega\varphi - y)} + \Pi_2 e^{-i(\omega\varphi - y)}\right|^2 \tag{39}$$

где

$$\Pi_1 = \frac{\zeta_1}{\sin x}\left[\frac{x}{x+y}\sin(x+y)\sin\varrho - \frac{1}{\nu+1}\sin(\varrho+y)\sin x\right] \tag{40}$$

$$\Pi_2 = \Pi_1(\zeta_1\to\zeta_2, \ y\to -y; \ \nu\to -\nu)$$

Оказывается, что для эллиптически поляризованной волны члены $\zeta_1\zeta_2$ в показателе экспоненты в (22) и в аргументе полиномов Лагерра (см.(39)) явно зависят от φ, причем эта зависимость входит только как линейная функция $\cos 2(\omega\varphi - y)$. Поэтому при выполнении интегрирования по φ в (22) для волны (32) необходимо взять интегралы типа

$$\int_0^{2\pi} e^{\alpha\cos 2\varphi} L_n(a + b\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\left((s-1)^n e^{sa} I_0(\alpha + sb)\right)\Big|_{s=0} \tag{41}$$

где I_0 – функция Бесселя мнимого аргумента. Используя (41) можно получить явный вид интеграла по φ в $\langle M^{(0)}\rangle = M_1 + M_2$

(см.(22), (24)) для монохроматической волны с эллиптической поляризацией.

В дальнейшем мы ограничимся анализом случая циркулярно поляризованной волны ($\zeta_2 = 0, \zeta_1 = \zeta$), причем стандартный параметр интенсивности волны есть

$$\xi^2 = \frac{\zeta^2}{4m^2} \tag{42}$$

В этом случае подынтегральное выражение в (22) не зависит от φ, так что интеграл по φ сводится к нормировочному. Итак, среднее значение массового оператора скалярной частицы в поле циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля H, есть:

$$\langle M^{(0)}\rangle = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s}\left\{\int_0^1 du\, e^{-isu^2m^2}\left[\frac{Z}{\sqrt{D}} e^{i\Phi_c - \frac{\vartheta}{2}} - 1\right] + \frac{i}{4sm^2} e^{-ism^2}\left(1 - \frac{eHs}{\sin eHs}\right)\right\} \tag{43}$$

где

$$Z = Z_0 L_n(\vartheta) + \xi^2 Z_1, \quad \Phi_c = \Phi_0 + \xi^2\Phi_1,$$

$$Z_0 = 1 + 2i\frac{H}{H_0}\sin 2\varrho + 2\frac{H}{H_0}(2n+1)\sin^2\varrho,$$

$$Z_1 = 2|R - \sin y|^2 L_n(\vartheta) + 4i\sin\varrho\left(N L_{n-1}^1(\vartheta) + N^* L_n^1(\vartheta)\right),$$

$$\Phi_0 = (2n+1)[x(1-u) - \varrho],$$

$$\Phi_1 = \frac{H_0}{H}\left[\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \frac{\sin y}{\sin x}\sin(x+y) - \frac{\sin 2y}{2(1+\nu)^2} - \frac{\nu xyu}{(x+y)(1+\nu)} - \mathrm{ctg}\,\varrho\,|R|^2 - \frac{2\,\mathrm{Im}\,R}{1+\nu}\sin y\right],$$

$$R = e^{i\varrho}\sin\varrho\left[\frac{x}{x+y}\frac{\sin(x+y)}{\sin x} - \frac{e^{iy}}{1+\nu}\right],$$

$$N = e^{i\varrho}(R - \sin y)\left(R^* - \frac{\sin y}{1+\nu}\right), \quad \vartheta = 2\xi^2\frac{H_0}{H}\frac{(\mathrm{Im}\,R)^2}{\sin^2\varrho} \tag{44}$$

здесь $x = sueH,\ y = \omega\lambda\eta,\ \nu = \frac{\omega}{eH},\ H_0 = \frac{m^2}{e}$, остальные обозначения см. в (9).

6. Полученный результат (43) дает общую картину радиационных эффектов (вероятность излучения, сдвиг уровней) в поле рассматриваемой конфигурации, когда монохроматическая волна имеет циркулярную поляризацию. Рассмотрим теперь $\langle M^{(0)}\rangle$ (43) в ряде предельных случаев.

При выполнении неравенств $H/H_0 \ll 1$, $\nu = \frac{\lambda\omega}{eH} \gg 1$ имеем частицу в интенсивной электромагнитной волне и относительно слабом магнитном поле. В этом случае основной вклад в интеграл (43) дает область малых x. Проводя соответствующие разложения и сохраняя члены, линейные по $1/\nu$ (разложение по H/H_0 начинается с квадратичных членов) получим:

$$\langle M^{(0)}\rangle = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y} \int\limits_0^\infty \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^2} e^{-\frac{i\sigma y}{\Lambda}} \Big\{ \exp\Big[\frac{i\xi^2\sigma y}{\Lambda}\Big(\frac{\sin^2 y}{y^2} - 1\Big)\Big] \times$$

$$\times \Big[\big(1+2\xi^2\sin^2 y\big)\Big\{1 + \frac{i\xi^2 y\sigma}{\Lambda\nu}\Big(2+\sigma+\sigma\frac{\sin 2y}{2y} - 2(1+\sigma)\frac{\sin^2 y}{y^2}\Big)\Big\} - \frac{4\xi^2}{\nu}\sin^2 y\Big] - 1\Big\} \qquad (45)$$

где $\Lambda = \omega\lambda/m^2$, использованы переменные $y = \lambda\omega\eta$, $\sigma = \frac{u}{1-u}$.

При $\nu \to \infty$ (45) переходит в выражение для среднего значения массового оператора в поле интенсивной циркулярно поляризованной волны (см. /8/, формула (2.30)), члены $1/\nu$ представляют собой поправки, обусловленные наличием магнитного поля.

В случае $\xi \ll 1$ имеем описание процессов в магнитном поле любой напряженности в присутствии слабой плоской волны. Для получения явного выражения для $\langle M^{(0)}\rangle$ в этом случае следует провести в формуле (43) следующие замены

$$Z \to Z_0 + \xi^2 Z_2,\quad i\varphi_c - \frac{\vartheta}{2} \to i\varphi_0 \qquad (46)$$

где

$$Z_2 = 2|R - \sin y|^2 + 8i\sin y\, \mathrm{Re}\, N + iZ_0\varphi_1 - (2n+1)\frac{H_0}{H} Z_0 \Big(\frac{\mathrm{Im}\, R}{\sin y}\Big)^2 \qquad (47)$$

остальные обозначения см. в (44). Член Z_0 в Z (46) описывает радиационные эффекты в магнитном поле. Член $\xi^2 Z_2$ подставленный в формулу (3I) дает после деления на поток $\lambda/\langle\mathcal{P}_0\rangle$ и замены $\xi^2 \to 4\pi\alpha/m^2\omega$ полное сечение комптон-эффекта в магнитном поле произвольной напряженности

$$\sigma = -\frac{4\alpha^2}{m^2\Lambda}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s}\int\limits_0^1 du\, e^{-isu^2m^2}\,\frac{e^{i\varphi_0}}{\sqrt{D}}\, Z_2 \qquad (48)$$

Комптон-эффект во внешнем магнитном поле обсуждался ранее де Радом и др. /I0/, которым удалось в рамках операторной техники Швингера для скалярной частицы в магнитном поле учесть в низшем порядке теории возмущений взаимодействие с электромагнитной монохроматической волной, распространяющейся вдоль поля H. Полученное здесь выражение (48) является существенно более компактным, чем в /I0/.

В случае $H/H_0 \ll 1$ и $\nu \gg 1$ можно получить явное выражение для сечения σ. При этом вклад в интеграл (48) дает область малых x. Проведя разложения и выполнив интегрирование найдем

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_H \qquad (49)$$

здесь

$$\sigma_0 = \frac{2\pi\alpha^2}{m^2\Lambda}\Big[\frac{2(1+\Lambda)^2}{(2\Lambda+1)\Lambda} - \frac{1}{\Lambda}\Big(1+\frac{1}{\Lambda}\Big)\ln(1+2\Lambda)\Big]$$

$$\sigma_H = \frac{2\pi\alpha^2}{m^2\Lambda\nu}\Big[\frac{2}{\Lambda} - \frac{2\Lambda}{1+2\Lambda} - \frac{1}{\Lambda}\Big(1+\frac{1}{\Lambda}\Big)\ln(1+2\Lambda)\Big] \qquad (50)$$

где

$$\Lambda = \frac{\omega(\langle\mathcal{P}_0\rangle - \langle\mathcal{P}^3\rangle)}{m^2},\quad \langle\mathcal{P}_0\rangle^2 = \langle\mathcal{P}^3\rangle^2 + m^2 + eH(2n+1)$$

совпадает по форме с сечением комптон-эффекта на скалярной частице в отсутствие магнитного поля, если $\Lambda = \frac{kp}{m^2}$, k, p – импульсы фотона и электрона; σ_H – поправка, обусловленная присутствием магнитного поля. При усреднении по поляризациям фотона (а также в случае линейной поляризации) эта поправка выпадает. По этой причине её нет в работе /I0/, где рассматривался случай неполяризованных фотонов.

Как уже отмечалось, в рассматриваемой конфигурации поля имеет место резонансная ситуация, когда частота волны совпадает с циклотронной частотой частицы в магнитном поле; $\nu = -1$. Мы рассмотрим этот вопрос в случае, когда $H/H_0 \ll 1,\ \nu \sim 1\ (\Lambda = \frac{\lambda\omega}{m^2} \ll 1)$. Тогда выражение $\langle M^{(0)} \rangle$ (43) может быть преобразовано к виду

$$\langle M^{(0)} \rangle = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{dy}{y} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} e^{-\frac{ivy}{\Lambda}} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[\frac{ivy}{\Lambda} \frac{\xi^2 y^2}{\delta^2} \left(\frac{\sin^2 y}{y^2} - 1 \right) \right] \left(1 + \frac{2\xi^2 y^2}{\delta^2} \sin^2 y \right) - 1 \right\} \qquad (51)$$

где $\delta = |1+\nu|$.

Приведем здесь для справок значение средних $\langle \mathcal{P}^0 \rangle, \langle \mathcal{P}^3 \rangle$ если вдоль магнитного поля H распространяется циркулярно поляризованная монохроматическая волна

$$\langle \mathcal{P}^0 \rangle = \frac{\lambda}{2} + \frac{m^2 + eH(2n+1)}{2\lambda} + \frac{\nu^4 m^6}{2\lambda^5} \frac{\xi^2 H^2}{\delta^2 H_0^2}$$

$$\langle \mathcal{P}^3 \rangle = \langle \mathcal{P}^0 \rangle - \lambda \qquad (52)$$

Величина $\langle \mathcal{P}^0 \rangle$ входит в выражение для вероятности излучения (31).

Заметный интерес представляют свойства среднего значения массового оператора вблизи резонанса. Оказывается, что эти свойства существенно зависят от степени близости к резонансу. Рассмотрим значение $\langle M^{(0)} \rangle$ (51) в области, где $\frac{H\xi}{H_0} \ll \delta \lesssim 1$. Тогда основной вклад в интеграл по v в (51) дает интервал $v \ll 1$. Проведя соответствующие разложения и взяв интеграл по v найдем

$$\langle M^{(0)} \rangle = -\frac{i\alpha}{\pi} m^2 \frac{\Lambda \xi^2 y^2}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^4} \frac{\sin^2 y - y^2 \cos 2y}{1 + \frac{\xi^2 y^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{\sin^2 y}{y^2}\right)} \qquad (53)$$

так что в этой области величина $\langle M^{(0)} \rangle$ является чисто мнимой. В пределе $\xi \to 0$ воспользовавшись процедурой, принятой при получении формулы (48), имеем из (53) сечение томпсоновского рассеяния циркулярно поляризованной волны в магнитном поле

$$\sigma_T = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \frac{\nu^2}{(\nu+1)^2} \qquad (54)$$

В области же $\delta \lesssim \frac{H\xi}{H_0}$ основной вклад в интеграл (51) дает область малых y. Разложив показатель экспоненциальной функции по y и взяв интеграл, получим

$$\langle M^{(0)} \rangle = \frac{\alpha}{3\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} (5+2v) \left[L_{2/3}\left(\frac{2v}{3\varkappa}\right) - \frac{i}{\sqrt{3}} K_{2/3}\left(\frac{2v}{3\varkappa}\right) \right] \qquad (55)$$

где $\varkappa = \xi H / \delta H_0$, $K_{2/3}$ – функция Бесселя мнимого аргумента (функция Макдональда), функция $L_{2/3}$ определена в /11/, стр.181.

Приведем здесь также асимптотические разложения (55) (ср. /11/).

$$\langle M^{(0)} \rangle = \alpha m^2 \varkappa \left(\frac{8}{3\pi} \varkappa \ln\frac{1}{\varkappa} - \frac{i5}{2\sqrt{3}} \right) \quad \varkappa \ll 1$$

$$\langle M^{(0)} \rangle = \frac{4}{9} \alpha m^2 \Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) (3\varkappa)^{2/3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i \right) \quad \varkappa \gg 1 \qquad (56)$$

Обсудим полученные результаты. В области, где $\frac{H\xi}{H_0} \ll \delta \lesssim 1$, мы находимся сравнительно далеко от точки резонанса, в частности резонансный вклад в $\langle \mathcal{P}^0 \rangle$ (52) еще не является определяющим. При приближении к резонансу (по мере уменьшения δ) величина $|\langle M^{(0)} \rangle|$ растет. Растет также вероятность излучения (см.(31), (52)). При $\delta \ll 1$ имеем из (53)

$$M^{(0)} = -i \frac{5}{2\sqrt{3}} \alpha m^2 \frac{\xi}{\delta} \frac{H}{H_0} \qquad (57)$$

В области же, где $\delta \lesssim \frac{H\xi}{H_0}$, мы находимся в непосредственной близости к точке резонанса. При этом среднее значение нулевой компоненты кинетического импульса резонансно растет по мере уменьшения δ (см.(52)), причем резонансный вклад в $\langle \mathcal{P}^0 \rangle$ теперь является доминирующим. Движение частицы становится квазиклассическим. По этой причине выражение (55) совпадает с массовым оператором скалярной частицы вычисленном в квазиклассическом приближении (см./II/, стр.I88). Однако вместо характерного параметра $\chi = \frac{H}{H_0}\frac{\langle \mathcal{P}^0 \rangle}{m}$ теперь входит совсем иной параметр $\varkappa = \frac{\xi H}{\delta H_0}$. По мере приближения к резонансу массовый оператор растет (см.(56)), но вероятность излучения (3I) падает вследствие более быстрого роста стоящей в знаменателе величины $\langle \mathcal{P}^0 \rangle$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим оператор $e^{is\mathcal{P}^2}$, который мы представим в виде: (ср.Приложение работы /8/):

$$e^{is\mathcal{P}^2} = e^{is(a+b)} = L(s)\, e^{isb}\, e^{isa} \qquad (\text{П.I})$$

где

$$a \equiv \mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_3^2 \equiv \mathcal{P}_\perp^2, \quad b \equiv -(\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2) \equiv \mathcal{P}_\parallel^2$$

Продифференцировав (П.I) по s и умножив результат слева на L^{-1} и справа на $e^{-isa}e^{-isb}$, получим

$$i L^{-1}\frac{dL}{ds} = b(\varphi) - e^{isb(\varphi)} f(s)\, e^{-isb(\varphi)} \qquad (\text{П.2})$$

где $f(s) = e^{isa}\, b(\varphi)\, e^{-isa}$. Будем использовать переменные

$$\varphi = x^0 - x^3, \quad \xi = x^0 + x^3$$

тогда

$$\mathcal{P}_\perp^2 = 4 p_\xi p_\varphi \qquad (\text{П.3})$$

где $p_\varphi = i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $p_\xi = i\frac{\partial}{\partial\xi}$. Теперь очевидно, что e^{isa} есть оператор сдвига по переменной φ, так что

$$f(s) = b(\tilde{\varphi}_s), \quad \tilde{\varphi}_s = \varphi - 4p_\xi s \qquad (\text{П.4})$$

Запишем оператор $\mathcal{P}_\parallel$ в виде $\mathcal{P}_\parallel = i\partial_\parallel - eA(x_\parallel) - eA(\varphi) = \pi_\parallel - eA(\varphi)$. С учетом этого и (П.4) можно преобразовать уравнение (П.2) к виду:

$$i L^{-1}\frac{dL}{ds} = -\Delta^2 + 2\Delta\, e^{-2eFs}\mathcal{P}_\parallel \qquad (\text{П.5})$$

где использована матричная форма записи, например $AF\mathcal{P} = A_\mu F^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu$,

$$\Delta_\mu(s) = e\left[A_\mu(\tilde{\varphi}_s) - A_\mu(\varphi)\right] \qquad (\text{П.6})$$

При выводе (П.5) учтено соотношение коммутации $[\pi_{\parallel i}, \pi_{\parallel k}] = -ieF_{ik}$

Решение уравнения (П.5) можно записать в виде

$$L = \exp\left[is\int_0^1 \Delta^2(ys)\,dy\right] T^{(-)} \exp\left[-2is\int_0^1 \Delta(sy)\, e^{-2eFsy}\mathcal{P}_{\parallel}\, dy\right] \qquad (\text{П.7})$$

где символ $T^{(-)}$ означает антихронологическое произведение по "времени" y. Входящее в (П.7) $T^{(-)}$ – произведение может быть вычислено явно, поскольку коммутатор операторов, стоящих в показателе экспоненты, есть c –число (ср./II/, раздел 6.3). Нетрудно убедиться, что

$$T^{(-)}\exp\left[\int_0^1 B(s)\,ds\right] = \exp\left[\int_0^1 B(s)\,ds\right] \times$$
$$\times \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\, \vartheta(s_2-s_1)\left[B(s_1),B(s_2)\right]\right] \qquad (\text{П.8})$$

Подставляя (П.8) в (П.7), а затем в (П.I) получаем

$$e^{is\mathcal{P}^2} = \exp\left[is\int_0^1 \Delta^2(sy)\,dy\right] \times$$
$$\times \exp\left[-2is\int_0^1 \Delta(sy)\, e^{-2eFsy}\mathcal{P}\, dy\right] \times$$
$$\times \exp\left[2is^2\int_0^1 dy_1\int_0^1 dy_2\, \vartheta(y_2-y_1)\Delta(sy_1)\, e^{2eFs(y_2-y_1)} eF\Delta(sy_2)\right] \times \qquad (\text{П.9})$$
$$\times\ e^{is\mathcal{P}_{\parallel}^2}\, e^{is\mathcal{P}_{\perp}^2}$$

Для дальнейшего удобно преобразовать (П.9) к виду, не содержащему линейных по $\mathcal{P}$ членов. С этой целью воспользуемся формулой

$$\exp\left[is(\mathcal{P}-q)_{\parallel}^2\right] = \exp\left\{i\left[q^2 s + 2s^2\int_0^1 dy_2\int_0^1 dy_1\, q\, e^{2eFs(y_2-y_1)} eFq\right]\right\} \times \qquad (\text{П.10})$$
$$\times \exp\left[-2iqs\int_0^1 e^{-2eFsy}\mathcal{P}\, dy\right] e^{is\mathcal{P}_{\parallel}^2}$$

Положив

$$q = q_s = \frac{\int_0^1 \Delta(sy)\, e^{-2eFsy}dy}{\int_0^1 e^{-2eFsy}dy} = \int_0^1 \Delta(sy)\, e^{-2eFsy}dy\left[Fes + eHs\,\mathrm{ctg}\,eHs\right] \qquad (\text{П.II})$$

приходим к следующему представлению $e^{is\mathcal{P}^2}$:

$$e^{is\mathcal{P}^2} = e^{i\Phi(s)}\, e^{is(\mathcal{P}-q_s)_{\parallel}^2}\, e^{is\mathcal{P}_{\perp}^2} \qquad (\text{П.I2})$$

где

$$\Phi(s) = 2s^2\int_0^1 dy_2\int_0^{y_2} dy_1\, \Delta(sy_1)\, e^{2eFs(y_2-y_1)} eF\Delta(sy_2) \qquad (\text{П.I3})$$
$$+ s\int_0^1 \Delta^2(sy)\,dy - eHs^2\,\mathrm{ctg}\,eHs\left[\int_0^1 \Delta(sy)\, e^{-2eFsy}dy\right]^2$$

Л и т е р а т у р а

I. P.Redmond.Jour.Math.Phys.6,1163,1965

2. И.А.Баталин, Е.С.Фрадкин, ТМФ 5, I90, I970.

3. В.П.Олейник, ЖЭТФ, 6I, 27, I97I.

4. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, ЖЭТФ 44, 260, I963.

5. В.С.Воронин, А.А.Коломенский, ЖЭТФ, 47, I529, I964

6. В.Н.Байер, А.И.Мильштейн. (в печати)

7. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко, ЖЭТФ, 67, 453, I974.

8. В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко,ЖЭТФ, 69, 783, I975.

9. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, I962.

IO. L.De Raad,N.Dass,K.Milton.Phys.Rev.D9,1041,1974

II. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. М., Атомиздат, I973.

Работа поступила – 8 июня I976 г.

Ответственный за выпуск – С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 5.УП-I976г. МН 07380
Усл. печ. I,3 л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 66.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР, мп