58

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 91

Э.А.Кураев, Г.В.Меледин

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ С УЧЁТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ ЖЕСТКИХ ФОТОНОВ

Новосибирск
1976

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ С УЧЁТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ ЖЕСТКИХ ФОТОНОВ

Э.А.Кураев, Г.В.Меледин

А Н Н О Т А Ц И Я

В α^3 порядке теории возмущений получены выражения для зарядово-четного и зарядово-нечетного вкладов в дифференциальное сечение процесса аннигиляции e^+e^- пары в пару $\mu^+\mu^-$.

Вклад от излучения виртуальных и мягких в с.ц.и. e^+e^- пучков ($\omega/\varepsilon < \Delta$, ε – энергия одного из пучков в с.ц.и.) найден как точная функция m_μ/ε в пренебрежении членами $(m_e/\varepsilon)^2$, $(m_e/m_\mu)^2$.

Получены различные распределения в случае, когда дополнительный фотон является жестким в с.ц.и. в пределе $(m_\mu/\varepsilon)^2 \ll 1$.

В этом пределе даны выражения для полного сечения и зарядовой асимметрии, не зависящие от доли энергии Δ, уносимой фотонами. Причём оказывается, что зарядовая асимметрия для полной энергии в с.ц.и. пучков $2\varepsilon = 3$ ГэВ достигнет 5 %.

В в е д е н и е

Процесс аннигиляции e^+e^- пары в пару $\mu^+\mu^-$ с (без) излучением дополнительного фотона является одним из процессов квантовой электродинамики, детально изучавшимся как экспериментально, так и теоретически на протяжении многих лет [I-6]. Он интересен в связи с проблемой μ-e универсальности, в связи с возможностью получить информацию о нейтральных токах в слабых взаимодействиях, проверкой квантовой электродинамики и т.д. В последнее время интерес к этому процессу возрос в связи с опытами на встречных e^+e^- пучках с образованием адронов и частиц семейства ψ , где он выступает в качестве фонового, а также нормировочного процесса.

Детальное теоретическое рассмотрение процесса $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ в рамках квантовой электродинамики (QED) в α^3 порядке было проведено в работе А.И.Никишова [I]. Им были получены выражения для дифференциального сечения как точные, так и в пределе больших энергий ($\sqrt{s}$) начальных частиц, учитывающие вклад излучения виртуальных и мягких в с.ц.и. реальных $0<\omega<\Delta\varepsilon\ll\varepsilon$ фотонов. В жесткой части спектра фотона ряд распределений были впервые рассмотрены в работе В.Н.Байера и В.А.Хозе [2]. Позже этот процесс в связи с возможностью на фоне электромагнитных взаимодействий выделить вклад слабых взаимодействий был рассмотрен И.Б.Хрипловичем и рядом других авторов [3]. (При этом были исправлены некоторые неточности, содержащиеся в [I] . В работах [3] вычислялся вклад в коэффициент зарядовой асимметрии

$$\eta = \frac{d\sigma(\theta)/dO_{\mu^+} - d\sigma(\pi-\theta)/dO_{\mu^+}}{d\sigma(\theta)/dO_{\mu^+} + d\sigma(\pi-\theta)/dO_{\mu^+}} ,$$

где $d\sigma(\theta)/dO_{\mu^+}$ - дифференциальное сечение вылета μ^+ мезона под углом θ к оси ($\vec{p}$) пучков. Члены порядка $m_e^2/s, m_\mu^2/s$ при этом опускались. Оказалось, что η достигает I5% для $2\varepsilon = \sqrt{s} = 3$ ГэВ, $2\,\Delta\varepsilon/\sqrt{s} = 0.I$ (вклад слабых взаимодействий $\sim$ I%). В работах Берендса и др. [4] сделана попытка написать точные выражения для вкладов в с-четную и с-нечетную части дифференциального сечения с учетом виртуальных и мягких квантов, однако, окончательных результатов, удобных в практических применениях в ней не содержится. Что касается жесткой части спектра фотона, то в этих работах имеются лишь результаты численных расчетов для различных наборов пороговых энергий для фотонов $\Delta\omega$ и энергий пучков ε. Удобных для практики выражений на таком пути получить не удается в силу громоздкости выражений. Однако, если интересоваться областью больших энергий пучков, то при расчете радиационных поправок в α^3 приближении вполне оправдано ограничиться более простыми выражениями, получаемыми в пренебрежении членами $\sim(m_e/\varepsilon)^2$, $(m_\mu/\varepsilon)^2$, $(m_e/m_\mu)^2$. Действительно, для энергий $\varepsilon \geqslant 1$ ГэВ отброшенные слагаемые становятся меньше радиационных поправок $\sim\alpha^4$.

В I-й части настоящей работы мы прямым расчетом, пренебрегая лишь членами порядка $(m_e/\varepsilon)^2$, $(m_e/m_\mu)^2$ по сравнению с единицей, получаем вклад в с-четную и с-нечетную части $d\sigma/dO_{\mu^+}$, учитывая поправки от излучения виртуальных и мягких реальных в с.ц.и. фотонов как точную функцию m_μ/ε. (См. формулы (8), (16)). В пределе $m_\mu/\varepsilon \to 0$ наш результат совпадает с результатом И.Б.Хрипловича и др. [3]. Полученные формулы справедливы и в области малых углов вылета μ^+ к оси пучков.

Во 2-й части рассмотрено излучение жесткого фотона в пределе $(m_\mu/\varepsilon)^2 \ll 1$. В этом пределе удается получить сравнительно компактные аналитические выражения для распределения по энергиям конечных частиц (Далиц-плот (26,27)), сечения по энергии и углу вылета μ^+ мезона (34), (35) и распределения только по углу вылета μ^+ мезона к оси пучка (37,39), а также вклад в полное сечение как функции параметров $\Delta\omega$ – – минимальной энергии фотона в с.ц.и. и энергии пучка ε (31). Приводятся также аналитические выражения для с-четной и с-нечетной части распределения по углу вылета μ^+ мезона к оси пучков (40), (38), не зависящие от доли энергии, уносимой фотонами. Коэффициент зарядовой асимметрии η оказывается

при этом не зависящей от энергии функцией угла, величина его не превосходит 5%. Получены также полное сечение аннигиляции в мюоны с точностью до членов α^3 (32) и поправка к борновскому дифференциальному сечению, учитывающая углы расколлинеарности μ – мезонов, не превышающие некоторого $\Delta\theta$ (приложение IX).

I. Реакция $e^+(p_+) + e^-(p_-) \to \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-)$ в низшем порядке т.в. описывается матричным элементом фейнмановской диаграммы рис.Iа: $M_0 = \frac{4\pi\alpha}{s} i\bar{v}(p_+)\gamma_\mu u(p_-)\bar{u}(q_-)\gamma_\mu v(q_+)$,

$$s = (p_+ + p_-)^2 = 4\varepsilon^2; \quad t = (p_- - q_-)^2; \quad u = (p_- - q_+)^2;$$

чему соответствует (после усреднения по спиновым состояниям начальных частиц и суммирования по состояниям конечных; нормировка спиноров и т.д. в приложении I) сечение в низшем порядке т.в.

$$\frac{d\sigma_0}{dO_{\mu^+}} = \frac{\alpha^2}{4s}\beta\left(2 - \beta^2 + \beta^2\cos^2\theta\right). \tag{I}$$

Здесь и везде мы будем систематически опускать члены $\sim(m_e/m_\mu)^2$, $(m_e/\varepsilon)^2$, но величину $(m_\mu/\varepsilon)^2 \equiv (m/\varepsilon)^2$ считаем порядка единицы; θ – угол в с.ц.и. между импульсами μ^+ мезона и электрона; $\beta^2 = 1 - m^2/\varepsilon^2$, ε – энергия электрона в с.ц.и.

Фейнмановские диаграммы рис.Iб дают поправку к зарядовочетной части дифференциального сечения. Матричный элемент совокупности диаграмм рис.Iа, б записывается в виде

$$-M_0\Pi^{(e)} - M_0\Pi^{(\mu)} + \frac{4\pi\alpha}{s} i\bar{v}(p_+)\left[\gamma_\mu(1+F_1^{(e)}) + \frac{1}{4m_e}[\gamma_\mu, \hat{p}_+ + \hat{p}_-]F_2^{(e)}\right]u(p_-)\bar{u}(q_-)\left[\gamma_\mu(1+F_1^{(\mu)}) - \frac{1}{4m}[\gamma_\mu, \hat{q}_+ + q_-]F_2^{(\mu)}\right]v(q_+), \tag{2}$$

где $\Pi^{(e)}, \Pi^{(\mu)}$ соответствуют вкладам электронной и μ – мезонной петель в собственно-энергетическую часть фотонной функции Грина

$$\Pi = \frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{(-i4\pi\alpha)}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k\, Sp\,\gamma_\mu(\hat{p}+\hat{k}-m)\gamma_\nu(\hat{k}-m)}{[(p+k)^2-m^2](k^2-m^2)};$$

$$Re\,\Pi^{(\mu)} = \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{8}{9} - \frac{1}{3}\beta^2 + \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\beta^2\right)\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\right]; \tag{3}$$

$$Re\,\Pi^{(e)} = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{s}{m_e^2}\right); \qquad p = p_+ + p_-.$$

вершинные функции в канале аннигиляции имеют вид

$$F_1^{(\mu)}=\frac{\alpha}{\pi}\Big\{\left(\ln\frac{m}{\lambda}-1\right)\left(1+\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)+\frac{1+\beta^2}{2\beta}\Big[\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)+\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\ln\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right)-\int\limits_0^{(1-\beta)/(1+\beta)}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big]+\frac{1}{4\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\Big\}, \tag{4}$$

$$F_2^{(\mu)}=\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1-\beta^2}{4\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta},$$

$$F_1^{(e)}=\frac{\alpha}{\pi}\Big[\left(\ln\frac{m_e}{\lambda}-1\right)\left(-\ln\frac{s}{m_e^2}+1\right)+\frac{1}{3}\pi^2-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{s}{m_e^2}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{s}{m_e^2}\Big],$$

$$F_2^{(e)}=0,$$

λ - "масса" фотона. Интерференция матричных элементов диаграмм Iа и Iб приводит к следующему вкладу в с-четную часть сечения

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{even}_{virt}=\frac{d\sigma_0}{dO_\mu}\Big\{-2\,\mathrm{Re}\,\Pi^{(\mu)}-2\,\mathrm{Re}\,\Pi^{(e)}+2F_1^{(\mu)}+2F_1^{(e)}+\frac{4F_2^{(\mu)}}{2-\beta^2-\beta^2\cos^2\theta}\Big\}. \tag{5}$$

Подставляя приведенные выше величины в (5), получим для вклада виртуальных поправок в зарядово-четную часть дифференциального сечения:

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{even}_{virt}=\frac{\alpha^3\beta}{2\pi s}\left(2-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta\right)\Big\{-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\ln\frac{s}{m_e^2}-\frac{8}{9}+\frac{1}{3}\beta^2-\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\beta^2\right)\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}+\left(1-\ln\frac{s}{m_e^2}\right)\left(\ln\frac{m_e}{\lambda}-1\right)+\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{s}{m_e^2}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{s}{m_e^2}+\left(\ln\frac{m}{\lambda}-1\right)\left(1+\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)+\frac{1+\beta^2}{2\beta}\Big[\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)+\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\ln\frac{2\beta}{1+\beta}-\int\limits_0^{(1-\beta)/(1+\beta)}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big]+\frac{1}{4\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\beta^2}{4\beta\left(2-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta\right)}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\Big\}. \tag{6}$$

Излучение мягкого в с.ц.и. фотона (с частотой $\omega<\Delta\varepsilon$) описывается диаграммами рис. Iв. Квадрат модуля соответствующего матричного элемента, просуммированный по спиновым состояниям всех частиц

$$\sum_{спин}|M^{e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma}|^2=\sum_{спин}|M_0|^2\left(\frac{p_-}{p_-k}+\frac{q_+}{q_+k}-\frac{p_+}{p_+k}-\frac{q_-}{q_-k}\right)^2=$$

$$=\sum_{спин}|M_0|^2\Big\{\frac{m_e^2}{(p_-k)^2}+\frac{m_e^2}{(p_+k)^2}+\frac{m^2}{(q_-k)^2}+\frac{m^2}{(q_+k)}-\frac{2(p_+p_-)}{(p_+k)(p_-k)}-\frac{2(q_+q_-)}{(q_+k)(q_-k)}\Big\}+$$

$$+\sum_{спин}|M_0|^2\Big\{\frac{2(p_+q_-)}{(p_+k)(q_-k)}+\frac{2(p_-q_+)}{(p_-k)(q_+k)}-\frac{2(p_-q_-)}{(p_-k)(q_-k)}-\frac{2(p_+q_+)}{(p_+k)(q_+k)}\Big\}$$

естественным образом разбивается на сумму двух слагаемых: четного и нечетного при перестановке импульсов μ - мезонов: $q_+\leftrightarrow q_-$, которые дают вклад в зарядово-четную и нечетную части сечения соответственно.

Пользуясь значениями интегралов (см.приложение)

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int\limits_{\omega<\Delta\varepsilon}\frac{m^2\,d^3k}{\omega(q_+k)^2}=\frac{-\alpha}{\pi}\Big[\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right)-\frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big]$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int\limits_{\omega<\Delta\varepsilon}\frac{(q_+q_-)\,d^3k}{\omega(q_+k)(q_-k)}=-\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1+\beta^2}{2\beta}\Big[\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right)-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)+\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\ln\frac{2\beta}{1+\beta}+\int\limits_{(1-\beta)/(1+\beta)}^{1}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big],$$

где $\omega=\sqrt{k^2+\lambda^2}$ - частота фотона в с.ц.и. e^+e^- пары, получим для вклада в с-четную часть сечения от излучения мягких фотонов

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{even}_{soft}=\frac{\alpha^3\beta}{2\pi s}\left(2-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta\right)\Big\{\left(\ln\frac{s}{m_e^2}-1\right)\ln\left(\frac{\Delta\varepsilon\, m_e}{\lambda\varepsilon}\right)+\Big[\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\Big]\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right)+\frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{s}{m_e^2}\right)-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1+\beta^2}{2\beta}\Big[-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)+\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\ln\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right)+\int\limits_{(1-\beta)/(1+\beta)}^{1}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big]\Big\}. \tag{7}$$

Суммируя борновское сечение с (6),(7), получим для зарядово-четной части дифференциального сечения процесса $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ с учетом виртуальных поправок и поправки от излучения реального фотона частоты $\omega \le \Delta\varepsilon$ в с.ц.и.:

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{even} = \frac{\alpha^2\beta}{4s}(2-\beta^2+\beta\cos^2\theta)\Big\{1+\frac{2\alpha}{\pi}\Big[\ln\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(-2+\ln\frac{s}{m_e^2}+\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)+$$
$$+\frac{13}{12}\ln\frac{s}{m_e^2}+\left(\beta-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\beta^3+\frac{3}{4\beta}\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}+\ln\frac{1+\beta}{2}+\frac{1+\beta^2}{\beta}\Big[\frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\ln\frac{1+\beta}{2}- \tag{8}$$
$$-\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\ln\beta+\frac{\pi^2}{12}-\int_0^{(1-\beta)/(1+\beta)}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big]+\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{3}\beta^2-\frac{31}{9}-\frac{1-\beta^2}{4\beta(2-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta)}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big]\Big\}.$$

Приступим теперь к вычислению зарядово-нечетного вклада. С-нечетный вклад происходит от интерференции матричных элементов борновской диаграммы, в которой в промежуточном состоянии s – канала имеется один фотон и диаграмм рис. 2а, б с двумя γ в s-канале, причём вклад в сечение от диаграммы рис. 2б связан со вкладом диаграммы рис. 2а следующим соотношением

$$\frac{d\sigma_\delta(s,t)}{dO_\mu} = -\frac{d\sigma_a(s,u)}{dO_\mu}, \tag{9}$$

поэтому мы ограничимся рассмотрением диаграммы 2а, вклад которой имеет вид:

$$\left(\frac{d\sigma_a}{dO_\mu}\right)^{odd} = \frac{16\beta\cdot 4\pi\alpha^3}{(16\pi)^2 s^2}\,2\operatorname{Re}R, \qquad R=\sum_{спин}\frac{s}{64\pi\alpha^3}\operatorname{Re}(-iM_0)^*(-iM_{2a}). \tag{10}$$

Входящий в величину R матричный элемент диаграммы равен

$$-iM_{2a} = -i\frac{\alpha^2}{\pi^2}\int d^4k\,\frac{\bar{u}(q_-)Tv(q_+)\bar{v}(p_+)Zu(p_-)}{(\Delta)(Q)(+)(-)}, \tag{11}$$

где

$$T=\gamma_\alpha(\hat{k}-\hat{Q}+m)\gamma_\beta;\quad Z=\gamma_\beta(k-\Delta)\gamma_\alpha;$$
$$(\Delta)\equiv(k-\Delta)^2-m_e^2;\quad (Q)\equiv(k-Q)^2-m^2;\quad (\pm)\equiv(k\mp p)^2-\lambda^2; \tag{11a}$$
$$\Delta=\frac{1}{2}(p_+-p_-);\quad p=\frac{1}{2}(p_++p_-);\quad Q=\frac{1}{2}(q_+-q_-).$$

При вычислении M_{2a} встречаются интегралы

$$J,\,J_\mu,\,J_{\mu\nu} = -\frac{i}{\pi^2}\int\frac{1,\,k_\mu,\,k_\mu k_\nu}{(\Delta)(Q)(+)(-)}\,d^4k, \tag{12}$$

для которых, пользуясь симметрией подинтегрального выражения, запишем в виде

$$J_\mu = \Delta_\mu J_\Delta + Q_\mu J_Q$$
$$J_{\mu\nu} = K_0 g_{\mu\nu}+K_p p_\mu p_\nu+K_\Delta\Delta_\mu\Delta_\nu+K_Q Q_\mu Q_\nu+K_x(Q_\mu\Delta_\nu+Q_\nu\Delta_\mu). \tag{12a}$$

Величину R (см.(10)) удобно выразить через коэффициенты J_Δ, J_Q, и коэффициенты при определённых тензорных структурных $J_{\mu\nu}$:

$$R=\frac{1}{16}Sp(\hat{q}_-+m)T(\hat{q}_+-m)\gamma_\mu Sp\,\hat{p}_+Z\hat{p}_-\gamma_\mu =$$
$$= P_1J+P_2J_\Delta+P_3J_Q+P_4K_0+P_5K_\Delta+P_6K_Q+P_7K_p+P_8K_x, \tag{13}$$

где полиномы P_i имеют вид

$$P_1=8[-\Delta^6-\Delta^2\tau^2+2\tau^3+(\Delta^4-2\Delta^2\tau)m^2];\ P_2=16(\Delta^4\tau-\tau^3+\Delta^2\tau m^2);$$
$$P_3=8[2\Delta^4\tau-2\tau^3+m^2(\Delta^4+2\Delta^2\tau-\tau^2)+\Delta^2m^4],\ P_4=8[5\Delta^4-6\Delta^2\tau+5m^2\tau^2-5m^4\Delta^2];$$
$$P_5=8[\Delta^6-2\Delta^4\tau+\Delta^2(\tau^2-m^2\Delta^2)];\quad P_7=8(-\Delta^6+2\Delta^4\tau-\Delta^2\tau^2+\Delta^4m^2);$$
$$P_6=8[\Delta^6-2\Delta^4\tau+\Delta^2\tau^2+m^2(-\Delta^4-2\Delta^2\tau+2\tau^2)-2\Delta^2m^4]; \tag{13a}$$
$$P_8=8[-\Delta^6+\Delta^4\tau-3\Delta^2\tau^2+3\tau^3-m^2(\Delta^4+3\Delta^2\tau)],$$

здесь $\tau=\Delta Q=\frac{1}{4}(u-t)$.

Коэффициенты J_Q, J_Δ, K_i находятся проще всего стандартной процедурой домножения (12а) на Δ_μ, Q_μ, p_μ и сводятся к интегралам, содержащим меньшее количество сомножителей в знаменателе (12). Выражения для них даны в приложении III, IУ, мы же приведем здесь лишь окончательное выражение для величины $R(s,t)$ (см. 10, 13)

$$R=4(\tau-\Delta^2)(2\tau-m^2)F+16(\tau-\Delta^2)(\tau^2+\Delta^4-m^2\Delta^2)J+$$
$$+4(\Delta^4-3\Delta^2\tau+2\tau^2-m^2\tau)F_Q+4(2\Delta^4-2\Delta^2\tau+2\tau^2-m^2\Delta^2)F_\Delta+ \tag{14}$$
$$+4(\Delta^4+\Delta^2\tau+\Delta^2m^2)G_Q+4(-\Delta^4+\tau^2-2\Delta^2m^2)H_Q,$$

где

$$J = -\frac{1}{s(m^2-t)}\left(\ln\frac{m^2-t}{m^2} + \ln\frac{m^2-t}{m_e^2}\right)\ln\frac{s}{\lambda^2}; \quad F_\Delta = \frac{1}{s}\left[\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{s}{m_e^2}\right)\right];$$

$$F_Q = \frac{1}{s\beta}\left\{\ln\frac{s}{m^2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} + 2F\left(\frac{1-\beta}{2}\right) - 2F\left(\frac{1+\beta}{2}\right) + 2F\left(-\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - \frac{\pi^2}{6}\right\}, \tag{I4a}$$

$$H_Q = \frac{1}{t}\ln\frac{m^2-t}{m^2}; \quad F = \frac{-1}{2(m^2-t)}\left\{\left(\ln\frac{m^2-t}{m^2} + \ln\frac{m^2-t}{m_e^2}\right)\ln\frac{s}{m^2} - \ln^2\left(\frac{m^2-t}{m^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{m^2}{m_e^2}\right) + 2\int\limits_0^{m^2/(m^2-t)}\frac{dz}{1-z}\ln z\right\};$$

$$G_Q = \frac{1}{s-4m^2}\left(-2\ln\frac{s}{m^2} + sF_Q\right).$$

Окончательно с-нечетная часть дифференциального сечения, происходящая от излучения виртуальных фотонов, имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{odd}_{virt} = \frac{\alpha^3\beta}{2\pi s}D; \qquad D = \frac{1}{s}\left[R(s,t) - R(s,u)\right] =$$

$$= -(2-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta)\ln\frac{1-\beta\cos\theta}{1+\beta\cos\theta}\ln\frac{s}{\lambda^2} + \frac{1}{4}(1-2\beta^2+\beta^2\cos^2\theta)\left(\frac{s}{t}\ln\frac{m^2-t}{m^2} - \frac{s}{u}\ln\frac{m^2-u}{m^2}\right) +$$

$$+ \frac{\cos\theta}{2\beta}\left(-2\ln\frac{s}{m^2} + sF_Q\right) - \frac{\beta\cos\theta}{2}(2+\beta^2)sF_Q - \beta\cos\theta\, sF_\Delta -$$

$$- \frac{4m^2}{s}\left[-\frac{1}{2}(\ln s)\ln\frac{m^2-t}{m^2-u} + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{m^2-t}{m^2}\right) - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{m^2-u}{m^2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{m^2/(m^2-u)}^{m^2/(m^2-t)}\frac{dx}{1-x}\ln x\right] - \tag{I5}$$

$$- 2\beta(\cos\theta)\left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s}{m^2}\right)\ln\frac{m^2}{m_e^2} - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{m^2}{m_e^2}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{m^2-t}{s}\right) + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{m^2-u}{s}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{m^2/(m^2-t)}\frac{dx}{1-x}\ln x - \frac{1}{2}\int\limits_0^{m^2/(m^2-u)}\frac{dx}{1-x}\ln x\right].$$

Чтобы учесть излучение мягких реальных фотонов, необходимо вычислить интеграл $-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int\limits_{\omega<\Delta\varepsilon}\frac{d^3k}{\omega}\frac{(pq)}{(pk)(qk)}\Big|^{p^2=m_e^2}_{p^2=m^2}$,

он равен

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\left[\ln\frac{m^2-t}{m^2} + \ln\frac{m^2-t}{m_e^2}\right]\ln\frac{(\Delta\varepsilon)m}{\lambda\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{m^2-t}{m^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{m^2}{m_e^2}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \int\limits_0^{m^2/(m^2-t)}\frac{dx}{1-x}\ln x + \tilde{D}\right\},$$

где

$$\tilde{D} = -\frac{\pi^2}{6} - \int\limits_0^{1-\chi}\frac{dx}{x}\ln(1-x) - \int\limits_0^{4m^2/s}\frac{d\rho}{\rho\sqrt{1-\rho/\chi}}f(\rho); \quad f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)\ln\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x}}{2},$$

Подставляя, получим для вклада в с-нечетную часть от излучения реальных фотонов с частотой $\omega < \Delta\varepsilon$ в с.ц.и.:

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{odd}_{soft} = -\frac{\alpha^3\beta}{2\pi s}(2-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta)\left\{2\ln\frac{1+\beta\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1+\beta\cos\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-\beta\cos\theta}{2}\right) + \int\limits_{1-\chi_u}^{1-\chi_t}\frac{dx}{x}\ln(1-x) + \tag{I6}$$

$$\left. + \int\limits_{m^2/(m^2-u)}^{m^2/(m^2-t)}\frac{dx}{1-x}\ln x + \int\limits_0^{1-\beta^2}\frac{dx}{x}f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x/\chi_t}} - \frac{1}{\sqrt{1-x/\chi_u}}\right)\right\},$$

где $\chi_t = \frac{m^2-t}{-t}$; $\chi_u = \frac{m^2-u}{-u}$.

Приведем выражение для полного дифференциального сечения процесса $e^+e^- \to \mu^+\mu^-(\gamma)$ в α^3 порядке с учётом поправок от излучения виртуальных и мягких ($\omega < \Delta\varepsilon$) в с.ц.и. реальных фотонов; в пределе $(m/\varepsilon)^2 \to 0$ оно имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_\mu}\right)^{asymp.} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta)\left\{1 + \frac{2\alpha}{\pi}\left[-\left(\ln\frac{s}{m^2} + \ln\frac{s}{m_e^2} - 2\right)\left(\ln\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - \frac{13}{12}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi^2}{3} - \frac{17}{18}\right]\right\} + \frac{\alpha^3}{\pi s}\left\{2(1+\cos^2\theta)\ln\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} + (1-\cos\theta+\cos^2\theta)\ln^2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) - \right.$$

$$- (1+\cos\theta+\cos^2\theta)\ln^2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\int\limits_{\sin^2(\theta/2)}^{\cos^2(\theta/2)}\frac{dx}{x}\ln(1-x) + \tag{I8}$$

$$\left. + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right\}; \qquad s = 4\varepsilon^2, \quad \theta = \widehat{\vec{q}_+\vec{p}_+}.$$

Выражение для с-нечетной части совпадает с полученной ранее И.Б. Хрипловичем и другими [I, 3] . В приложении У приводится поправка к $(d\sigma/dO_\mu)^{even}_{asymp.}$ асимптотическому (I8) $\sim (m/\varepsilon)^2$. Из приведённого выше следует, что в пределе углов $\theta \to 0, \pi$ в выражении (I8) следует заменить $\sin\frac{\theta}{2} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\beta\cos\theta}$, $\cos\frac{\theta}{2} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\beta\cos\theta}$, где $\beta^2 = 1 - m^2/\varepsilon^2$.

2. Вычисление распределений в жесткой части спектра фотона мы начнем с нахождения квадрата модуля матричного элемента процесса рис. I в просуммированного по спиновым состояниям всех частиц. Матричный элемент совокупности диаграмм рис. Iв, пользуясь тем, что

волновые функции начальных и конечных фермионов удовлетворяют уравнению Дирака, можно представить в виде

$$
iM = \frac{1}{s}\bar{v}(p_+)\gamma_\mu u(p_-)\bar{u}(q_-)Q^{(3)}_\mu v(q_+) + \frac{1}{s_1}\bar{v}(p_+)Q^{(4)}_\mu u(p_-)\bar{u}(q_-)\gamma_\mu v(q_+), \tag{I9}
$$

где $Q^{(3)}_\mu = (q_3 e)\gamma^\mu + \dfrac{\hat{e}\hat{k}\gamma_\mu}{2\chi'_-} - \dfrac{\gamma_\mu \hat{k}\hat{e}}{2\chi'_+}$; $Q^{(4)}_\mu = (q_4 e)\gamma_\mu + \dfrac{\gamma_\mu \hat{k}\hat{e}}{2\chi_-} - \dfrac{\hat{e}\hat{k}\gamma_\mu}{2\chi_+}$;

$$
q_3 = n'_- - n'_+, \quad q_4 = n_+ - n_-; \quad n_\pm = p_\pm/\chi_\pm, \quad n'_\pm = q_\pm/\chi'_\pm .
$$

Введем кинематические инварианты

$$
s = (p_+ + p_-)^2, \quad t = (p_+ - q_+)^2, \quad u = (p_- - q_+)^2, \quad \chi_\pm = kp_\pm,
$$

$$
s_1 = (q_+ + q_-)^2, \quad t_1 = (p_- - q_-)^2, \quad u_1 = (p_+ - q_-)^2, \quad \chi'_\pm = kq_\pm .
$$

Через вектора $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ просуммированный по спиновым состояниям квадрат модуля $M_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma}$ запишется в виде

$$
\begin{aligned}
R = \frac{1}{16(4\pi\alpha)^3}\sum_{\text{спин}}|M_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma}|^2 &= \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{4}Sp\,p_+\gamma_\mu p_-\gamma_\nu\cdot\frac{1}{4}Sp(q_-+m)Q^{(3)}_\mu \times \\
&\times(q_+-m)\bar{Q}^{(3)}_\nu + \frac{1}{s_1^2}\,\frac{1}{4}Sp(q_-+m)\gamma_\mu(q_+-m)\gamma_\nu\cdot\frac{1}{4}Sp\,p_+Q^{(4)}_\mu p_-\bar{Q}^{(4)}_\nu + \\
&+\frac{2}{ss_1}\,\frac{1}{4}Sp\,p_+\gamma_\mu p_-\bar{Q}^{(4)}_\nu\cdot\frac{1}{4}Sp(q_-+m)Q^{(3)}_\mu(q_+-m)\gamma_\nu .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

В приложении УI мы приводим результат точного (опуская лишь члены $(m_e/m_\mu)^2$, $(m_e/\varepsilon)^2$) вычисления (20). Здесь мы приведем величину R, оставляя лишь члены могущие привести к неубывающему в пределе

$$
\left(\frac{m_e}{\varepsilon}\right)^2, \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2, \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \to 0 \tag{2I}
$$

вкладу в различные распределения. В этом пределе R упрощается.*

$$
\begin{aligned}
R = &-\frac{1}{2}s(uu_1+tt_1)a^2 + a\left(r+\frac{s}{s_1}q\right) - (t\chi_- + u\chi_+)\frac{1}{s\chi'_-} - (u_1\chi_- + t_1\chi_+)\frac{1}{s\chi'_+} - \\
&-\frac{s}{s_1^2\chi_-}(u_1\chi'_+ + t\chi'_-) - \frac{s}{s_1^2\chi_+}(u\chi'_- + t_1\chi'_+) + \frac{2}{s_1}(t+t_1-u-u_1),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

---

*) Это выражение может быть получено из формул работы В.Н.Байера и В.А.Хозе [5] .

где

$$
\begin{aligned}
q &= n'_-\chi'_-(u-t) + n'_+\chi'_+(t_1-u_1) + n_-(\chi'_+u_1 + \chi'_-t) - n_+(\chi'_-u + \chi'_+t_1), \\
r &= n_+\chi_+(t_1-u) + n_-\chi_-(u_1-t) + n'_-(\chi_-t + \chi_+u) - n'_+(\chi_-u_1 + \chi_+t_1), \\
a &= \frac{1}{s}(n'_- - n'_+) + \frac{1}{s_1}(n_+ - n_-).
\end{aligned}
\tag{22a}
$$

Записывая фазовый объём конечного состояния в виде

$$
\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{d^3q_+\,d^3q_-\,d^3k}{2\varepsilon_+2\varepsilon_-2\omega(2\pi)^9}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k) = \\
&= \frac{s}{(4\pi)^4}\,d\nu_+d\nu_-\nu_+\nu_-dz_+dz_-d\varphi\,\delta\{(2-\nu_+-\nu_-)^2 - [\nu_+^2\beta_+^2 + \nu_-^2\beta_-^2 + \\
&+2\nu_+\nu_-\beta_+\beta_-(z_+z_- - \sqrt{(1-z_+^2)(1-z_-^2)}\cos\varphi)]\},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\nu_\pm, \nu \equiv \varepsilon_\pm/\varepsilon$, ω/ε – доли энергий μ^+, μ^- и фотона; $z_\pm$, z – косинусы углов их вылета, отсчитываемых от направления импульса начального электрона; φ – азимутальный угол между плоскостями ($\vec{p}_-, \vec{q}_-$) и ($\vec{p}_-$, $\vec{q}_+$); $\beta_\pm$ – скорости $\mu^\pm$ в с.ц.и. ($\beta_\pm^2 = 1 - m^2/(\varepsilon^2\nu_\pm^2)$).

Из закона сохранения энергии-импульса следует

$$
\nu_+ + \nu_- + \nu = 2, \quad \beta_+\nu_+z_+ + \beta_-\nu_-z_- + \nu z = 0,
$$

$$
\nu_+\beta_+\sqrt{1-z_+^2}\cos\varphi_+ + \nu_-\beta_-\sqrt{1-z_-^2}\cos\varphi_- + \nu\sqrt{1-z^2} = 0.
$$

Выполняя в (23) интегрирование по азимуту φ с помощью δ- функции, получим сечение в одном из альтернативных видов

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{\alpha^3}{4\pi s}\,\frac{R\,d\nu_+d\nu_-dz_+dz_-}{\sqrt{(z_--c_2)(c_1-z_-)}}, \qquad c_{1,2} = az_+ \pm\sqrt{(1-a^2)(1-z_+^2)}; \\
d\sigma &= \frac{\alpha^3}{4\pi s}\,\frac{R\,d\nu_+d\nu\,dz_+dz}{\sqrt{(z-z_2)(z_1-z)}}, \qquad z_{1,2} = a_+z_+ \pm\sqrt{(1-a_+^2)(1-z_+^2)},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где $a = \dfrac{(2-\nu_+-\nu_-)^2 - \nu_+^2\beta_+^2 - \nu_-^2\beta_-^2}{2\nu_+\nu_-\beta_+\beta_-}$, $\quad a_+ = \dfrac{(2-\nu_+-\nu)^2 - \nu_+^2 - \nu^2}{2\nu_+\beta_+\nu}$.

Величина R естественным образом разбивается на два слагаемых: четное и нечётное относительно перестановки $q_+ \leftrightarrow q_-$

$$
\left\{ q_+ \leftrightarrow q_- \Rightarrow \begin{matrix} s \leftrightarrow s_1; & u \leftrightarrow t_1; \\ t \leftrightarrow u_1; & \chi'_+ \leftrightarrow \chi'_-; \end{matrix} \; n'_\pm \leftrightarrow n'_\mp; \begin{matrix} \chi_\pm \leftrightarrow \chi_\pm \\ n_\pm \leftrightarrow n_\pm \end{matrix} \; \begin{pmatrix} q \to q \\ r \to -r \end{pmatrix} \right\}
$$

которые дадут вклад в зарядово (С-) четную и С-нечетную части дифференциального сечения:

$$R = R_{even} + R_{odd},$$

где

$$R_{even} = \frac{\nu_+^2(1+z_+^2)+\nu_-^2(1+z_-^2)}{2(1-\nu_-)(1-\nu_+)} - \frac{2}{1-\nu} + \frac{4[\nu_+^2 2(1-\nu)-\nu_+\nu_-(1+z_+z_-)]}{\nu^2(1-\nu)(1-\beta_e^2 z^2)} - \frac{m^2}{s}\left[\frac{1+z_+^2}{(1-\nu_+)^2}+\frac{1+z_-^2}{(1-\nu_-)^2}\right]+$$

$$+\frac{4m_e^2}{s\nu^2(1-\nu)(1+z\beta_e)}[-\nu_+\nu_-(1-z_+z_-)+\nu_+(1-\nu_+)(1-z_+)+\nu_-(1-\nu_-)(1-z_-)]+ \qquad (25а)$$

$$+\frac{4m_e^2}{s\nu^2(1-\nu)(1-z\beta_e)}[-\nu_+\nu_-(1-z_+z_-)+\nu_+(1-\nu_+)(1+z_+)+\nu_-(1-\nu_-)(1+z_-)],$$

$$(1-\nu)R_{odd} = \frac{2\nu\nu_+(z_+-z)}{\nu^2(1-z^2\beta_e^2)} + \frac{(1-\nu)\nu_-z_-}{1-\nu_+} + \frac{\nu_+(1+z_+)}{2\nu(1-\nu_-)(1+z\beta_e)}[2\nu_+\nu_-(1-z_+z_-)+$$

$$+\nu\nu_-(1-2z_-)-\nu_+(1-\nu_+)(1-z_+)-\nu_-(1-\nu_-)(1-z_-)]-$$

$$-\frac{\nu_-(1+z_-)}{2\nu(1+\nu_+)(1+z\beta_e)}[2\nu_+\nu_-(1-z_+z_-)+\nu\nu_+(1-2z_+)-\nu_+(1-\nu_+)(1-z_+)- \qquad (25б)$$

$$-\nu_-(1-\nu_-)(1-z_-)]+2\nu_-z_-+\left\{\begin{array}{c} z\to -z \\ z_\pm \to z_\mp \\ \nu_+\leftrightarrow\nu_- \end{array}\right\},\quad \beta_e^2 = 1-\frac{m_e^2}{\varepsilon^2}.$$

Величина R_{even} содержит слагаемые $\sim m_e^2/s$, m^2/s, но вклад их не убывает в пределе (2I) в случае, когда иммитируется двухчастичная кинематика в системе 3-х частиц $\mu^+\mu^-\gamma$, либо когда фотон испускается по направлению начальных частиц.

Исходя из вида сечения (24б), мы сейчас получим распределение по энергиям конечных частиц (распределение в Далиц-плот) и инклюзивное сечение по энергии и углу вылета μ^+ мезона.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что вклад от С-нечетной части R в распределение по энергиям конечных частиц есть тождественный нуль. Это понятно, поскольку исчезает информация о начальных частицах.

Интегрирование по углам вылета фотона производится по области положительности подкоренного выражения в (24б) и дает (соответствующие интегралы приведены в приложении УП):

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu_+ d\nu_-} = \frac{2\alpha^3}{s}\left\{-\frac{2}{3}+\frac{\nu^2-2\nu+2}{3(1-\nu_+)(1-\nu_-)}+\frac{2(1-\nu_+)(1-\nu_-)}{\nu^2(1-\nu)}+\frac{16(1-\nu_+)(1-\nu_-)}{\nu^4}-\right. \qquad (26)$$

$$\left.-\frac{4}{\nu^2}-\frac{1}{1-\nu}+\left[\frac{1}{1-\nu}+\frac{2}{\nu^2}-\frac{2(1-\nu_-)(1-\nu_+)}{\nu^2(1-\nu)}-\frac{4(1-\nu_+)(1-\nu_-)}{\nu^4}\right]\ln\frac{s}{m_e^2}\right\}$$

это распределение справедливо при

$$\Delta < \nu < 1 - m^2/\varepsilon^2, \quad (\nu_+ + \nu_- + \nu = 2),$$

$$(1-\nu_+)(1-\nu_-)(1-\nu) \geq \frac{m^2}{s}\nu^2, \qquad (27)$$

причем знак равенства в (27) реализуется, когда две из 3-х частиц летят в направлении, обратном направлению 3-й. Область (27) вблизи $\nu_+, \nu_-, \nu \to 1$ дает ограничения

$$1-\nu_+ \leq \frac{m^2}{s}\frac{\nu}{1-\nu} \approx \frac{m^2}{s}\frac{(1-\nu_-)}{\nu_-};\quad 1-\nu_- \leq \frac{m^2}{s}\frac{\nu}{1-\nu} \approx \frac{m^2}{s}\frac{1-\nu_+}{\nu_+};\quad 1-\nu \leq \frac{m^2}{s\nu_+(1-\nu_+)} \approx \frac{m^2}{s\nu_-(1-\nu_-)}$$

Из законов сохранения можно показать, что задание ν_+, ν_- однозначно определяет углы между импульсом фотона и импульсами мезонов в плоскости, проходящей через направления импульсов конечных частиц в с.ц.и. (плоскости образования). Поскольку сумма этих трех углов равна 2π, то иногда оказывается удобным наносить данные опыта на диаграмму, в которой по осям откладываются значения углов между импульсами частиц в плоскости образования. При этом углы и энергии связаны следующим образом (в пренебрежении массами конечных $\mu^\pm$ (2I)):

$$\nu = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin\frac{\theta_+}{2}\sin\frac{\theta_-}{2}};\quad \nu_+ = \frac{\cos(\theta_-/2)}{\sin\frac{\theta_+}{2}\sin\frac{\theta}{2}};\quad \nu_- = \frac{\cos(\theta_+/2)}{\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta_-}{2}}; \qquad (28)$$

$$\theta = \widehat{\vec{q}_+,\vec{q}_-};\quad \theta_+ = \widehat{\vec{k},\vec{q}_+};\quad \theta_- = \widehat{\vec{k},\vec{q}_-},$$

а плотность распределения точек на диаграмме дается выражением

$$d\nu_+ d\nu_- = \frac{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta_+}{2}\cos\frac{\theta_-}{2}}{2(\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta_+}{2}\sin\frac{\theta_-}{2})^2}d\theta_+ d\theta_- \qquad (29)$$

Состоянию с инвариантной массой в системе частиц I,2 на диаграмме соответствуют кривые:

$$\frac{m_{12}^2}{s} = \operatorname{ctg}\frac{\theta_{23}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta_{13}}{2};\qquad \theta_{ik} = \widehat{\vec{q}_i\vec{q}_k} \qquad (30)$$

Из распределения по энергиям (26), интегрируя по области (27) внутри треугольника $0 < 1-\nu, 1-\nu_+, 1-\nu_- < 1$, получим вклад в полное сечение от излучения жестких фотонов. При интегрировании удобно использовать переменные

$$u = \nu, \quad v = \nu_+ - \nu_- ;$$

область интегрирования (27) в этих переменных будет

$$v^2 = u^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{1-u}\right), \quad \Delta < u < 1-\sigma^2, \quad \sigma = m/\varepsilon . \tag{27a}$$

Интегрирование дает

$$\sigma^{hard} = \frac{\alpha^3}{s}\Big\{ \frac{8}{3}\left(\ln\frac{s}{m_e^2} + \ln\frac{s}{m^2} - 2\right)\ln\frac{1}{\Delta} + \frac{4}{3}\ln\frac{s}{m^2}\ln\frac{s}{m_e^2} - $$
$$ - \frac{10}{3}\ln\frac{s}{m^2} - \frac{38}{9}\ln\frac{s}{m_e^2} + \frac{71}{9} - \frac{4}{9}\pi^2 \Big\}. \tag{3I}$$

Вместе с вкладом от виртуальных и жестких фотонов (следующим из (I8))

$$\sigma^{virt} + \sigma^{soft} = \frac{\alpha^3}{s}\Big\{ -\frac{8}{3}\left(\ln\frac{s}{m_e^2} + \ln\frac{s}{m^2} - 2\right)\left(\ln\frac{1}{\Delta} - \frac{13}{12}\right) - \frac{68}{27} + \frac{8}{9}\pi^2 \Big\} \tag{3Ia}$$

получим для сечения аннигиляции e^+e^- пары в пару мюонов с точностью до α^3 :

$$\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\Big\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi}\Big[\ln\frac{s}{m_e^2}\ln\frac{s}{m^2} - \frac{1}{3}\ln\frac{s}{m_e^2} - \ln\frac{s}{m^2} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{11}{36} \Big]\Big\}. \tag{32}$$

Заметим, что это выражение согласуется с выражением для полного сечения процесса аннигиляции e^+e^- пары в $\mu^+\mu^-$ пару с произвольным числом дополнительных фотонов, найденной ранее в работе одного из авторов [6]

$$\sigma_1 = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\, ch\,\rho , \qquad \rho^2 = \frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{s}{m^2}\ln\frac{s}{m_e^2} \tag{33}$$

в дважды логарифмическом приближении. Инклюзивное по энергии и углу вылета μ^+ мезона сечение получается интегрированием (24б) с R из (25а,б) при фиксированных ν_+, z_+, детали которого приводятся в приложении VIII.

В результате, для вклада С-четной части получим

$$\frac{d\sigma^{even}}{dz_+ d\nu_+} = \frac{\alpha^3}{2s}\Big\{\Big[-2\nu_+\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{2\nu_+^3(1+z_+^2)}{1-\nu_+} + 4\nu_+(2-\nu_+) + $$
$$ + \frac{4(1-2\nu_+ + 2\nu_+^2)}{1-z_+^2}\Big]\ln\frac{s}{m_e^2} + \Big[\frac{5+3z_+^2}{4(1-\nu_+)} - \frac{\nu_+ + 3 + z_+^2(1+3\nu_+)}{4} + $$
$$ + 2\frac{1+z_+^2}{1-z_+^2}(1-2\nu_+ + 2\nu_+^2)\Big]\ln\frac{s\nu_+^2}{m^2(1-\nu_+)} + \Big[-4 + 4\nu_+(1-\nu_+) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + $$
$$ + \frac{4(1-2\nu_+ + 2\nu_+^2)}{1-z_+^2}\Big]\ln(1-\nu_+) - 4\nu_+\left(\frac{1}{a}\ln\frac{a}{2} + \frac{1}{b}\ln\frac{b}{2}\right) + $$
$$ + \frac{4\left[1-\nu_+(1+z_+) + \nu_+^2(1+z_+^2)\right]}{1-z_+}\ln\frac{1-z_+}{2} + \frac{4\left[1-\nu_+(1-z_+) + \nu_+^2(1+z_+^2)\right]}{1+z_+}\ln\frac{1+z_+}{2} + \tag{34}$$
$$ + \frac{1}{8}\Big[-\frac{31+29z_+^2}{1-\nu_+} - \nu_+(21-17z_+^2) - 17z_+^2 + 35\Big] + 2\nu_+^2(1+z_+^2)\Big\},$$

$$a \equiv 2-\nu_+(1+z_+), \quad b \equiv 2-\nu_+(1-z_+), \quad z_+ \equiv \cos\widehat{\vec p_-\vec q_+}, \quad \nu_+ \equiv \varepsilon_+/\varepsilon .$$

Распределение (34) справедливо для

$$1-\nu_+ \gg \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2, \qquad 1-z_+^2 \gg \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2. \tag{34a}$$

При $z_+ \to \pm 1$ в (34) величину $1 \pm z_+$ надо заменить на $1 \pm \beta_+ z_+$; $\beta_+^2 = 1 - m^2/\nu_+^2\varepsilon^2$. Распределение же в конце спектра по ν_+ несколько сложнее, поскольку величина $1/(1-\nu_+)$ присутствует в некоторых местах в виде $1/(1-\nu_+ + m^2/s)$. Аналогичное вычисление для C -нечетной части приводит к результату

$$\frac{d^2\sigma^{odd}_{hard}}{d\nu_+ dz_+} = \frac{\alpha^3}{2s}\Big\{ -2\nu_+ z_+\ln(1-\nu_+) + z_+(\nu_+ - 3) + \frac{4\nu_+}{a} + 2\Big[\frac{z_+^2 + z_+ + 1}{1-\nu_+} - $$
$$ - z_+^2(1-\nu_+) - \nu_+ - z_+\Big]\ln\frac{1+z_+}{a} - 2\Big[\frac{z_+^2+1}{1-\nu_+} - z_+^2(1+\nu_+) - \tag{35}$$
$$ - z_+\nu_+ - \nu_+\Big]\ln\frac{1-z_+}{a}\Big\} - \{z_+ \to -z_+\},$$

где $a = 2-\nu_+(1-z_+)$.

Это выражение также как и (34) справедливо при условиях (34а). Для энергий $2\varepsilon \sim 3$ ГэВ эти условия обеспечивают справедливость (34,35) для углов вылета μ^+ мезона

$$\theta \geq 5^\circ; \quad \pi - \theta \geq 5^\circ; \qquad (\varepsilon - \varepsilon_+)/\varepsilon \geq 10^{-3}. \tag{36}$$

Интегрирование (25б) по энергиям и углу вылета γ -кванта даёт для вклада в C – нечетную часть $d\sigma/dz_+$ от жесткого спектра фотонов

$$\left(\frac{d\sigma}{dz_+}\right)^{odd}_{hard} = \frac{\alpha^3}{2s}\Big\{4(1+z_+^2)\ln\frac{1+z_+}{1-z_+}\ln\frac{1}{\Delta} - 6z_+ + 2(1-3z_+^2)\ln\frac{1+z_+}{1-z_+} +$$
$$+\frac{6}{1-z_+}\left(-1+\frac{2}{1-z_+}\ln\frac{2}{1+z_+}\right) - \frac{6}{1+z_+}\left(-1+\frac{2}{1+z_+}\ln\frac{2}{1-z_+}\right) +$$
$$+2(1+z_+^2)\Big[\int\limits_{(1-z_+)/2}^{(1+z_+)/2}\frac{dx}{x}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-z_+}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1+z_+}{2}\right)\Big] - \qquad (37)$$
$$-z_+\left(1+4\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\right) - 2z_+\Big[\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-z_+}{1+z_+}\right)\Big]\Big\},$$
$$z_+ \equiv \cos\vec{q}_+\hat{\ }\vec{p}_-$$

Вспоминая вклад мягких и виртуальных фотонов (I8), получим для C – нечетной части распределения по углу вылета μ^+ мезона к оси пучков ($\theta = \vec{q}_+\hat{,}\vec{p}_-$) в постановке, когда не измеряется энергия μ^+ мезона:

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_{\mu^+}}\right)^{odd} = \frac{\alpha^3}{2\pi s}\Big\{\cos\theta\Big[C+\left(2\ln\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(2\ln\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)\Big] +$$
$$+3(1-2\cos^2\theta)\ln\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1+2\frac{\ln\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{3}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(1+2\frac{\ln\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) +$$
$$+2(1+\cos^2\theta)\int\limits_{\sin^2(\theta/2)}^{\cos^2(\theta/2)}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big\};\quad C = -\frac{15}{4}-\frac{\pi^2}{6}-2\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{x}\ln(1-x) = -4{,}860. \qquad (38)$$

При $\theta \to 0,\pi$ $\quad \sin\theta \to \sqrt{(\sin^2\theta + m^2/s}$.

(см. таблицу).

Приведём, наконец, вклад жесткой части спектра фотона в —четную часть распределения по углу вылета мезона к оси пучка, необходимую для постановки, когда на опыте не измеряются его энергии частиц

$$\left(\frac{d\sigma}{dz_+}\right)^{even}_{hard} = \frac{\alpha^3}{s}\Big\{(1+z_+^2)\left(\ln\frac{s}{m^2}+\ln\frac{s}{m_e^2}-2\right)\ln\frac{1}{\Delta} + 2(L_-^2+L_+^2) +$$

$$+\left(\ln\frac{s}{4m^2}\right)\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3(1-z_+^2)}\right) + (1+z_+^2)\Big[-\frac{3}{4}\ln\frac{s}{m^2}+\frac{83}{24}-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{1-z_+^2} -$$
$$-\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+z_+}{1-z_+}\right)\Big] - z_+^2 - \frac{2}{(1+z_+)^2}F\left(\frac{1+z_+}{1-z_+}\right) - \frac{2}{(1-z_+)^2}F\left(\frac{1-z_+}{1+z_+}\right) + \frac{1}{2} - \frac{2}{1-z_+^2} +$$
$$+\ln\frac{s}{m_e^2}\Big[-\frac{1}{2}-\frac{11}{6}z_+^2+\frac{10}{3(1-z_+^2)} + \left(-\frac{2}{1+z_+}+\frac{1}{2}(1+z_++z_+^2+z_+^3)\right)L_- + \qquad (39)$$
$$+\left(-\frac{2}{1-z_+}+\frac{1}{2}(1-z_++z_+^2-z_+^3)\right)L_+\Big] + \Big[\frac{4}{1+z_+}-\frac{8}{3(1-z_+)}+\frac{1}{3}(2z_+^2+z_+-3)\Big]L_- +$$
$$+L_+\Big[\frac{4}{1-z_+}-\frac{8}{3(1+z_+)}+\frac{1}{3}(2z_+^2-z_+-3)\Big]\Big\},$$

где $L_\pm = \dfrac{1}{1\mp z_+}\ln\dfrac{2}{1\pm z_+}$; $\quad F(x) = \displaystyle\int\limits_0^x\frac{dt}{t}\ln(1+t)$.

Полное распределение для C –четной части с учётом вклада виртуальной поправки и вклада излучения мягких фотонов (I8):

$$\left(\frac{d\sigma}{dz_+}\right)^{even} = \left(\frac{d\sigma}{dz_+}\right)^{even}_{virt} + \left(\frac{d\sigma}{dz_+}\right)^{even}_{soft} + \left(\frac{d\sigma}{dz_+}\right)^{even}_{hard} =$$
$$= \frac{\alpha^3}{s}\Big\{\Big[\frac{13}{12}\left(\ln\frac{s}{m^2}+\ln\frac{s}{m_e^2}-2\right)+\frac{\pi^2}{3}-\frac{17}{18}+\frac{83}{24}-\frac{3}{4}\ln\frac{s}{m^2} -$$
$$-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{1-z_+^2}-\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+z_+}{1-z_+}\right)\Big](1+z_+^2)+\frac{1}{2}-z_+^2-\frac{2}{1-z_+^2}-\frac{2}{(1+z_+)^2}F\left(\frac{1+z_+}{1-z_+}\right) - \qquad (40)$$
$$-\frac{2}{(1-z_+)^2}F\left(\frac{1-z_+}{1+z_+}\right)+\left(\ln\frac{s}{4m^2}\right)\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3(1-z_+)^2}\right)+\ln\frac{s}{m_e^2}\Big[-\frac{1}{2}-\frac{11}{6}z_+^2 +$$
$$+\frac{10}{3(1-z_+^2)}+\left(-\frac{2}{1+z_+}+\frac{(1+z_+)(1+z_+^2)}{2}\right)L_- + \left(-\frac{2}{1-z_+}+\frac{(1-z_+)(1+z_+^2)}{2}\right)L_+\Big] + 2(L_+^2+L_-^2) +$$
$$+\Big[\frac{4}{1+z_+}-\frac{8}{3(1-z_+)}+\frac{1}{3}(2z_+^2+z_+-3)\Big]L_- + \Big[\frac{4}{1-z_+}-\frac{8}{3(1+z_+)}+\frac{1}{3}(2z_+^2+z_+-3)\Big]L_+\Big\}.$$

Эти формулы справедливы при $1-z_+^2 \gg m^2/\varepsilon^2$, $1-v \gg m^2/\varepsilon^2$. Для углов θ, $z_+ = \cos\theta \to \pm 1$ в знаменателях (37–39) следует заменить $1\pm z_+ \to 1\pm z_+ + 2m^2/\varepsilon^2$.

В пределе больших энергий ($m_\mu/\varepsilon \ll 1$) можно получить аналитическое выражение для распределения по углу в с.ц.и. между импульсами μ^+ и μ^- мезонов $\theta = \widehat{\vec{q}_+, \vec{q}_-}$. Заметим прежде, что для фиксированного значения θ, $\cos\theta = 1 - 2(1-\nu)(\nu_+\nu_-)^{-1}$ частота фотона меняется в пределах $\max(\Delta, 2(ctg\frac{\theta}{2})(tg\frac{\theta}{4})) < \nu < 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2}$. Переходя в (26) от переменных ν_+, ν_- к ν, $\cos\theta$ получим после стандартного интегрирования (см. приложение X)

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\alpha^3}{2s} I, \quad I = \frac{1}{2}(p+1)^{3/2}\left[F_1(p) + F_2(p)\ln s/m_e^2\right] \qquad (41)$$

$$F_1 = \frac{8}{3}\left(1-(1+2p)L\right) + \frac{4}{3p}\left[-\frac{3}{2}(1+2p) + 2(1+3p+3p^2)L\right] - 4L +$$

$$+ (8p-16)\varphi_1 + 64p\varphi_2, \quad F_2 = 4L + 8(1-p)\varphi_1 - 16p\varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4p} - \frac{1}{8\sqrt{p}}\theta, \quad \varphi_2 = \frac{(1-p)(p-3)}{48[p(p+1)]^{3/2}} + \frac{4-3p}{96p^2} + \frac{p-1}{16p^{3/2}}\cdot\frac{\theta}{4},$$

$$L = -\ln\cos\theta/2, \quad p = ctg\,\theta/2$$

Величина I приведена в таблице для $2\varepsilon = 3$ ГэВ. Возрастание I при $\theta \to 0$ объясняется [2] как иммитация двухквантовой аннигиляции с последующей конверсией одного из фотонов в пару $\mu^+\mu^-$. Возрастание I при $\theta \to \pi$ отражает инфракрасную расходимость.

В приложении IX приведено выражение для сечения $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ когда угол расколлинеарности мезонов (угол в с.ц.и. между $\vec{q}_+$ и $\vec{q}_-$) не превышает некоторого $\Delta\theta \ll 1$ (детали в [8]).

В заключение заметим, что параметр зарядовой асимметрии с учетом излучения фотонов в произвольной жесткости не превышает 5%. По-видимому это позволит на фоне электромагнитных взаимодействий увидеть вклад в $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ от слабых взаимодействий (для которых при $2\varepsilon = 3$ ГэВ η достигает $\sim 1.5\%$ и растет с энергией).

Мы благодарим В.Н.Байера и И.Б.Хрипловича за привлечение внимания к этому процессу и интерес к работе, А.П.Онучина и С.И.Эйдельмана за обсуждения и помощь в численных расчетах.

Литература

1. А.И.Никишов. ЖЭТФ 39, 757 (1960).
2. В.Н.Байер, В.А.Хозе. ЖЭТФ 48, № 3, 946, (1965); препринт НГУ, 1964.
3. И.Б.Хриплович. Препринт ИЯФ 59-72 (1972). Остальные ссылки приведены в /4/.
4. F.A.Berends et al. Nucl. Phys. B57, 381 (1973); Nucl. Phys. B63, 381 (1973).
5. B.L. Beron et al. Phys. Rev. Lett. 33, 663 (1974); J.E. Augustin et al. Phys. Rev. Lett. 34, 233 (1975).
6. Э.А.Кураев, М.М.Нестеров, Ю.И.Ольшанский. ЯФ 13 № 4 (1973).
7. Р.В.Половин. ЖЭТФ 31, 449 (1956).
8. Э.А.Кураев, С.И.Эйдельман. Процесс препринт ИЯФ.
9. Г.Б.Двайт. Таблицы интегралов, 1964 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Мы используем свойства спиноров

$$u(p_-)\bar{u}(p_-) = \hat{p}_- + m_e, \quad v(q_+)\bar{v}(q_+) = \hat{q}_+ - m_\mu$$

Метрика $\quad pq_+ = \varepsilon\varepsilon_+ - \vec{p}\vec{q}_+$.

При вычислении шпуров полезно соотношение (см. статью Р.Половина /7/)

$$\frac{1}{4} Sp\, \gamma^\mu \gamma_i \gamma^\nu \gamma_k \gamma^\lambda \gamma_\ell \cdot \frac{1}{4} Sp\, \gamma^\mu \gamma_m \gamma^\nu \gamma_n \gamma^\lambda \gamma_p =$$

$$= 6(im)(kn)(\ell p) + 2(im)[(k\ell)(np) + (kp)(\ell n)] +$$
$$+ 2(kn)[(i\ell)(mp) + (ip)(\ell m)] + 2(\ell p)[(ik)(nm) +$$
$$+ (in)(km)] + 2(in)(kp)(\ell m) + 2(ip)(\ell n)(mk) -$$
$$- 2(ik)[(\ell n)(mp) + (\ell m)(np)] - 2(k\ell)[(ip)(mn) +$$
$$+ (in)(mp)] - 2(i\ell)[(km)(np) + (kp)(mn)],$$

где $\quad (\alpha\beta) \equiv \delta_{\alpha\beta}$.

Алгебра $\quad \gamma$ -матриц: $\quad \{\gamma_\alpha \gamma_\beta\} = 2g_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta} = (1,-1,-1,-1)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ П

При вычислении вклада в зарядово-четную радиационную поправку от излучения мягкого в системе центра инерции e^+e^- фотона (см. / 6 /) используются

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int \frac{m^2}{\omega(q_+k)^2}\, d^3k = -\frac{\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right),$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int \frac{q_+q_-}{\omega(q_+k)(q_-k)}\, d^3k = -\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1+\beta^2}{2\beta}\Big[\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} -$$

$$- \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\ln\frac{1+\beta}{2\beta} + F(1) - F\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\Big]; \qquad (П2.I)$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2},$$

где интегрирование $\quad (d^3k = k^2\, dk\, dO) \quad$ идет по области

$$0 < k < \Delta\varepsilon, \qquad \Delta\varepsilon \ll \varepsilon,$$

$$\omega^2 = \lambda^2 + k^2, \quad \lambda - \text{„масса фотона"}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t}\ln(1-t). \qquad (П2.2)$$

При вычислении зарядово нечетного вклада появляется интеграл

$$R = -\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int \frac{(pq)}{\omega(pk)(qk)}\, d^3k, \quad p^2 = m_e^2, \quad q^2 = m^2, \quad m^2 \gg m_e^2,$$

где интегрирование идет по области П2.2. Интегрирование по углам с использованием фейнмановской параметризации дает для R

$$R = -\frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{m^2-t}{m^2}\int_0^1 \frac{dx}{\rho\varepsilon^2}\Big\{\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{2}\ln\frac{\rho}{4} - \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\rho}}{2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} - 1\right)\ln\frac{\sqrt{\rho}}{2}\Big\},$$

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[xm^2 + (1-x)m_e^2 - tx(1-x)\right], \qquad t = (p-q)^2.$$

Дальнейшее вычисление дает

$$R = -\frac{\alpha}{2\pi}\Big\{\ln\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon\lambda}\left(2\ln\frac{m^2-t}{m^2} + \ell\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{m^2-t}{m^2}\right) - \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{\pi^2}{6} +$$

$$+ F\left(-\frac{t}{m^2-t}\right) - F(1-\chi) - \int_0^{m^2/\varepsilon^2}\frac{d\rho}{\rho\sqrt{1-\rho/\chi}}\, f(\rho)\Big\},$$

$$f(\rho) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} - 1\right)\ln\left(\frac{\rho}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho}}{2}\right), \qquad (П2.2)$$

$$\chi = \frac{(m^2-t)^2}{-4t\,\varepsilon^2}; \qquad \ell = \ln\frac{m^2}{m_e^2}.$$

Последнее слагаемое в фигурных скобках П2.3 может быть выражено через функцию Спенса, но приводить его не будем.

ПРИЛОЖЕНИЕ Ш

Система уравнений для вычисления $\quad J_{\mu\nu} \quad$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\Delta^2 & 0 & 2\Delta Q \\ 0 & 0 & 0 & 2\Delta Q & 2\Delta^2 \\ 0 & 0 & 2\Delta Q & 0 & 2Q^2 \\ 2 & 2p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & p^2 & \Delta^2 & Q^2 & 2\Delta Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_p \\ K_\Delta \\ K_Q \\ K_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_\Delta - 2p^2 J_\Delta \\ H_Q - 2p^2 J_Q - G_Q \\ H_\Delta - 2p^2 J_\Delta - G_\Delta \\ H_p \\ \frac{1}{2}(G-F) \end{pmatrix} \qquad K_i = D_i/D$$

$$D = 16p^2(\Delta Q)[(\Delta Q)^2 - \Delta^2 Q^2],$$

$$K_0=-\frac{1}{2\tau}\Big[\tau(F-G+H_p+H_\Delta+H_Q)+H_\Delta(\tau-\Delta^2)-H_Q(\tau-Q^2)+$$
$$+2p^2J_\Delta(\Delta^2-2\tau)+\Delta^2G_\Delta-Q^2G_Q-2p^2Q^2J\Big];$$
$$K_p'=\frac{1}{2p^2\tau}\Big[2\tau\Big(H_\Delta-2p^2J_\Delta+H_p+\frac{1}{2}F-\frac{1}{2}G\Big)+Q^2(H_Q-2p^2J_Q-G_Q)-$$
$$-\Delta^2(H_\Delta-2p^2J_\Delta-G_\Delta)\Big];\qquad K_x=-\frac{1}{2\tau d}(\tau^2\mathcal{H}+Q^2\tau A_Q-2\Delta^2\tau A_\Delta);$$
$$K_\Delta=-\frac{1}{2\tau d}\Big[Q^4\tau^2(G-F-H_p-3H_\Delta+6p^2J_\Delta)+(\Delta^2Q^2+\tau^2)(H_\Delta-2p^2J_\Delta-G_\Delta)-$$
$$-Q^4(H_Q-2p^2J_Q-G_Q)\Big];\quad K_Q=-\frac{1}{2\tau d}\Big[-\Delta^2\tau\mathcal{H}+2\Delta^4A_\Delta+(\tau-2\Delta^2Q^2)A_Q\Big].$$
$$J_\Delta=\frac{1}{2d}\Big[(F+F_\Delta)\tau-Q^2(F+F_Q)\Big];\ J_Q=\frac{1}{2d}\Big[(F+F_Q)\tau-\Delta^2(F+F_\Delta)\Big];\quad d=\Delta^2Q^2-\tau^2;$$
$$A_\Delta=H_\Delta+2\Delta^2J_\Delta-G_\Delta;\ A_Q=H_Q+2\Delta^2J_Q-G_Q;\ \mathcal{H}=F-G+H_p+3H_\Delta+6\Delta^2J_\Delta$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IУ

Приведем таблицу интегралов, возникающих при вычислении интерференции одно и двух фотонных обменов в $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ (мы опускаем члены $\sim m_e^2/\varepsilon^2,\ m_e^2/m_\mu^2$).

$$J=\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{d^4k}{(\Delta)(Q)(+)(-)}=-\frac{1}{s(m^2-t)}\Big(2\ln\frac{m^2-t}{m^2}+\ln\frac{m^2}{m_e^2}\Big)\ln\frac{s}{\lambda^2},$$
$$F_\Delta=\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{d^4k}{(\Delta)(+)(-)}=\frac{1}{s}\Big(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2\Big(\frac{s}{m_e^2}\Big)\Big),$$
$$F_Q=\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{d^4k}{(Q)(+)(-)}=\frac{1}{s\beta}\Big[\ln\frac{s}{m^2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}+2F\Big(\frac{1-\beta}{2}\Big)-2F\Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)+$$
$$+2F\Big(-\frac{1-\beta}{1+\beta}\Big)-\frac{1}{2}\ln^2\Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big)-\frac{\pi^2}{6}\Big],$$
$$H=\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{d^4k}{(\Delta)(Q)(+)}=G=\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{d^4k}{(\Delta)(Q)(-)}=$$
$$=-\frac{1}{2(m^2-t)}\Big[\Big(2\ln\frac{m^2-t}{m^2}+\ln\frac{m^2}{m_e^2}\Big)\ln\frac{m^2}{\lambda^2}+\ln^2\Big(\frac{m^2-t}{m^2}\Big)-\frac{1}{2}\ln^2\Big(\frac{m^2}{m_e^2}\Big)+2F\Big(-\frac{t}{m^2-t}\Big),$$
$$F=\frac{1}{2}sJ-G=-\frac{1}{2(m^2-t)}\Big[\Big(2\ln\frac{m^2-t}{m^2}+\ln\frac{m^2}{m_e^2}\Big)\ln\frac{s}{m^2}-\ln^2\Big(\frac{m^2-t}{m^2}\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\ln^2\Big(\frac{m^2}{m_e^2}\Big)-2F\Big(-\frac{t}{m^2-t}\Big),$$

$$H^\mu=\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{k^\mu d^4k}{(\Delta)(Q)(+)}=H_pP_\mu+H_\Delta\Delta_\mu+H_QQ_\mu,$$
$$H_p=G+\frac{1}{m^2-t}\Big(2\ln\frac{m^2-t}{m^2}+\ln\frac{m^2}{m_e^2}\Big),$$
$$H_Q=\frac{1}{t}\ln\frac{m^2-t}{m^2}$$
$$H_\Delta=\frac{-1}{m^2-t}\Big[\Big(\frac{m^2}{t}+1\Big)\ln\frac{m^2-t}{m^2}+\ln\frac{m^2}{m_e^2}\Big],$$
$$\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{k^\mu d^4k}{(\Delta)(+)(-)}=G_\Delta\Delta^\mu,$$
$$G_\Delta=\frac{1}{s}\Big(-2\ln\frac{s}{m_e^2}+\frac{1}{2}\ln^2\Big(\frac{s}{m_e^2}\Big)+\frac{\pi^2}{6}\Big),$$
$$\Big(-\frac{i}{\pi^2}\Big)\int\frac{k^\mu d^4k}{(Q)(+)(-)}=G_QQ^\mu,$$
$$G_Q=\frac{1}{s-4m^2}\Big(-2\ln\frac{s}{m^2}+sF_Q\Big).$$

Здесь

$$(\Delta)=k^2-2(k\Delta)+\Delta^2,\qquad \Delta=\frac{1}{2}(p_+-p_-),$$
$$(Q)=k^2-2(kQ)+\Delta^2,\qquad p=\frac{1}{2}(p_++p_-),$$
$$(\pm)=k^2\mp2(kp)+p^2-\lambda^2,\qquad Q=\frac{1}{2}(q_+-q_-).$$

Имеются два соотношения: $H_p+H_\Delta+H_Q=G,$

$$2\Delta^2(-G_\Delta-F_Q+F_\Delta)=-2Q^2G_Q+(m^2-t)H_\Delta+(m^2+t)H_Q.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ У

Приведем зарядово-четное сечение с точностью до членов $\sim(m^2/\varepsilon^2)$

$$\left(\frac{d\sigma}{dO}\right)^{even} = \left(\frac{d\sigma}{dO}\right)^{even}_{asympt} + \frac{\alpha^2 m^2}{2s^2}\left[1-3c^2+\frac{m^2}{s}(3c^2-5)\right]+$$

$$+\frac{\alpha^3}{\pi}\frac{m^2}{s^2}\left\{\left(\ln\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[5c^2-3+(1-3c^2)\left(\ln\frac{s}{m^2}+\ln\frac{s}{m_e^2}\right)\right]+\frac{1}{6}(14-9c^2)\ln\frac{s}{m^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{13}{12}(1-3c^2)\ln\frac{s}{m_e^2}+\frac{\pi^2}{3}(1-3c^2)+\frac{1}{36}(-157+291c^2)\right\},$$

$$c \equiv \cos\theta,$$

θ – угол вылета $\mu^+(\mu^-)$ мезона к оси пучков $(\vec{p}_-)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ УI

Точный шпур для реакции $e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma$ имеет вид

$$\frac{(4\pi\alpha)^{-3}}{16}\sum_{спин}|M_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma}|^2 = -\left(\frac{g_3}{s}+\frac{g_4}{s_1}\right)^2\left[m^2 s+\frac{1}{2}(m^2-u_1)(m^2-u)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(m^2-t_1)(m^2-t)\right]+\frac{1}{s^2}\left\{-\frac{4m^2\chi_+\chi_-}{\chi'_+\chi'_-}+\frac{\chi_-(m^2-t)+\chi_+(m^2-u)}{\chi'_-}+\right.$$

$$+\frac{\chi_-(m^2-u_1)+\chi_+(m^2-t_1)}{\chi'_+}+g_3\left[n_+\chi_+(t_1-u)+n_-\chi_-(u_1-t)+n'_-(t\chi_-+u\chi_+)-\right.$$

$$\left.\left.-n'_+(u_1\chi_-+t_1\chi_+)+m^2(\chi_++\chi_-)(n'_+-n'_-)\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{s_1^2}\left\{\frac{2m^2\chi_++(m^2-u_1)\chi'_++(m^2-t)\chi'_-}{\chi_-}+\frac{2m^2\chi_-+(m^2-u)\chi'_-+(m^2-t_1)\chi'_+}{\chi_+}+\right.$$

$$+\left[n'_-\chi'_-(u-t)+n'_+\chi'_+(t_1-u_1)+2m^2(n_+\chi_+-n_-\chi_-)-n_-\left(2m^2\chi_++\chi'_+(m^2-u_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\chi'_-(m^2-t)\right)+n_+\left(2m^2\chi_-+\chi'_-(m^2-u)+\chi'_+(m^2-t_1)\right)\right]g_4\right\}-$$

$$-\frac{2}{ss_1}\left\{-t-t_1+u+u_1+\frac{m^2-u_1}{2}(n_--n'_+)(\chi'_+g_3+\chi_-g_4)+\right.$$

$$+\frac{m^2-t}{2}(n_--n'_-)(\chi'_-g_3-\chi_-g_4)-m^2(\chi_++\chi_-)g_3g_4+$$

$$\left.+\frac{m^2-t_1}{2}(n'_+-n_+)(g_3\chi'_+-g_4\chi_+)+\frac{m^2-u}{2}(n'_--n_+)(\chi'_-g_3+\chi_+g_4)\right\}.$$

Все обозначения даны в тексте (19),

$$g_3=(q_-/\chi'_-)-(q_+/\chi'_+);\quad g_4=(p_+/\chi_+)-(p_-/\chi_-).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ УII

Приведем интегралы, необходимые для интегрирования по углам вылета фотона.

$$\mathcal{P}\equiv(z_1-z)(z-z_2);\quad z_1+z_2=2a_+z_+;\quad z_1z_2=a_+^2+z_+^2-1.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dz}{\sqrt{\mathcal{P}}}=2\int_{z_2}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{\mathcal{P}}}=2\pi,$$

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{\mathcal{P}}}=2\pi a_+z_+,$$

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{\mathcal{P}}}=\pi(3a_+^2z_+^2-a_+^2-z_+^2+1),$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\mathcal{P}}(1\pm\beta_e z)}=\frac{2\pi}{\sqrt{(z_+\pm a_+)^2+(1-\beta_e^2)(1-a_+^2)}},$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\mathcal{P}}(1\pm\beta_e z)^2}=\frac{2\pi(1\pm a_+z_+)}{\left[(z_+\pm a_+)^2+(1-\beta_e^2)(1-a_+^2)\right]^{3/2}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ УШ

При интегрировании $d^2\sigma/d\nu_+d\nu_-$ по энергиям с целью получить полное сечение удобны переменные

$$u=\nu\ ,\quad v=\nu_+-\nu_-.$$

При этом область интегрирования (27) будет

$$v^2<u^2\left(1-\frac{\sigma^2}{1-u}\right),\quad \Delta<u<1-\sigma^2,\quad \sigma^2=m_\mu^2/\varepsilon^2.$$

$$\int d\nu_+\int d\nu_-\longrightarrow\frac{1}{2}\int_{\Delta}^{1-\sigma^2}du\int_{-u\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{1-u}}}^{u\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{1-u}}}dv$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е IX

Приведем поправку к упругому сечению. Она складывается из поправки за счет излучения виртуального фотона и поправки за счет излучения реального фотона, как мягкого, так и жесткого в с.ц.и. Причем энергия и угол вылета этого фотона должны быть такими, чтобы угол расколлинеарности между импульсами $\mu^{\pm}$-мезонов в с.ц.и. (угол между $\vec{q}_+$ и $-\vec{q}_-$) не превышал некоторого $\Delta\theta$. Мы будем полагать

$$m/\varepsilon \ll \Delta\theta \ll 1$$

Приведенная ниже формула справедлива с точностью до членов, исчезающих в пределе $\Delta\theta \to 0,\ (m/\varepsilon)^2 \to 0$.

$$\frac{d\sigma^{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}}{d\cos\theta} = \left(\frac{d\sigma_0^{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}}{d\cos\theta}\right)(1+\delta),$$

$$\delta = \frac{2\alpha}{\pi}\Big\{\Big[\ln\frac{\Delta\theta}{\sin\theta} + \frac{13}{12}\Big]\ln\frac{s}{m_e^2} + \frac{1}{3}\ln\frac{s}{m^2} - (\ln(\Delta\theta))^2 +$$
$$+ C_1\ln(\Delta\theta) + C_2 + \ln\sin\theta - \Big(\ln ctg\frac{\theta}{2}\Big)^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\big(\ln(1+|\cos\theta|)\big)^2 - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\sin^2\theta}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big\};$$

$$C_1 = 2\ln 2 - \frac{5}{2} = -1{,}114; \quad C_2 = -\frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{47}{18} = -1{,}811;$$

$$\frac{d\sigma_0^{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s}(1+\cos^2\theta).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ X

Рассмотрим распределение по углу $\theta = \widehat{\vec{q}_+, \vec{q}_-}$ - углу между импульсами мезонов в с.ц.и. Из уравнения

$$\cos\theta = 1 - 2(1-\nu)(\nu_+\nu_-)^{-1}, \quad \nu_+ + \nu_- + \nu = 2$$

находим X.I

$$(1-\nu_+)(1-\nu_-) = (1-\nu)\,ctg\frac{\theta}{2}; \quad d\nu_+ d\nu_- = \frac{(1-\nu)}{\sqrt{X}}\frac{(1+\rho)^2}{4}d\nu\, d\cos\theta$$

где

$$X = \frac{\nu^2}{4} - (1-\nu)\,ctg\,\theta/2$$

Для искомого распределения получим

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha^3}{2s}\frac{1}{4\sin^4\theta/2}\int\limits_{\nu_0}^{1} d\nu\,\frac{(1-\nu)\,J(\nu,\rho)}{\sqrt{X}}, \quad \nu_0 = 2(\sqrt{\rho^2+\rho} - \rho) \qquad \text{X.2}$$

$$(1-\nu)J(\nu,\rho) = -8(1-\nu)/3 + 4[1+(1-\nu)^2]/3\rho + (8\rho-16)(1-\nu)/\nu^2 +$$
$$+ 64\rho(1-\nu)^2/\nu^4 - 4 + [4 + 8(1-\rho)(1-\nu)/\nu^2 - 16\rho(1-\nu)^2/\nu^4]\ln\frac{s}{m^2}$$

Переходя к новой переменной,

$$\nu = \frac{x^2+\rho}{x+\rho}; \quad \int\limits_{\nu_0}^{1}\frac{d\nu}{\nu} = 2\int\limits_0^{\nu_0/2}\frac{dx}{x+\rho}$$

После стандартного интегрирования [9], I20-I25.9 приходим к выражению (4I).

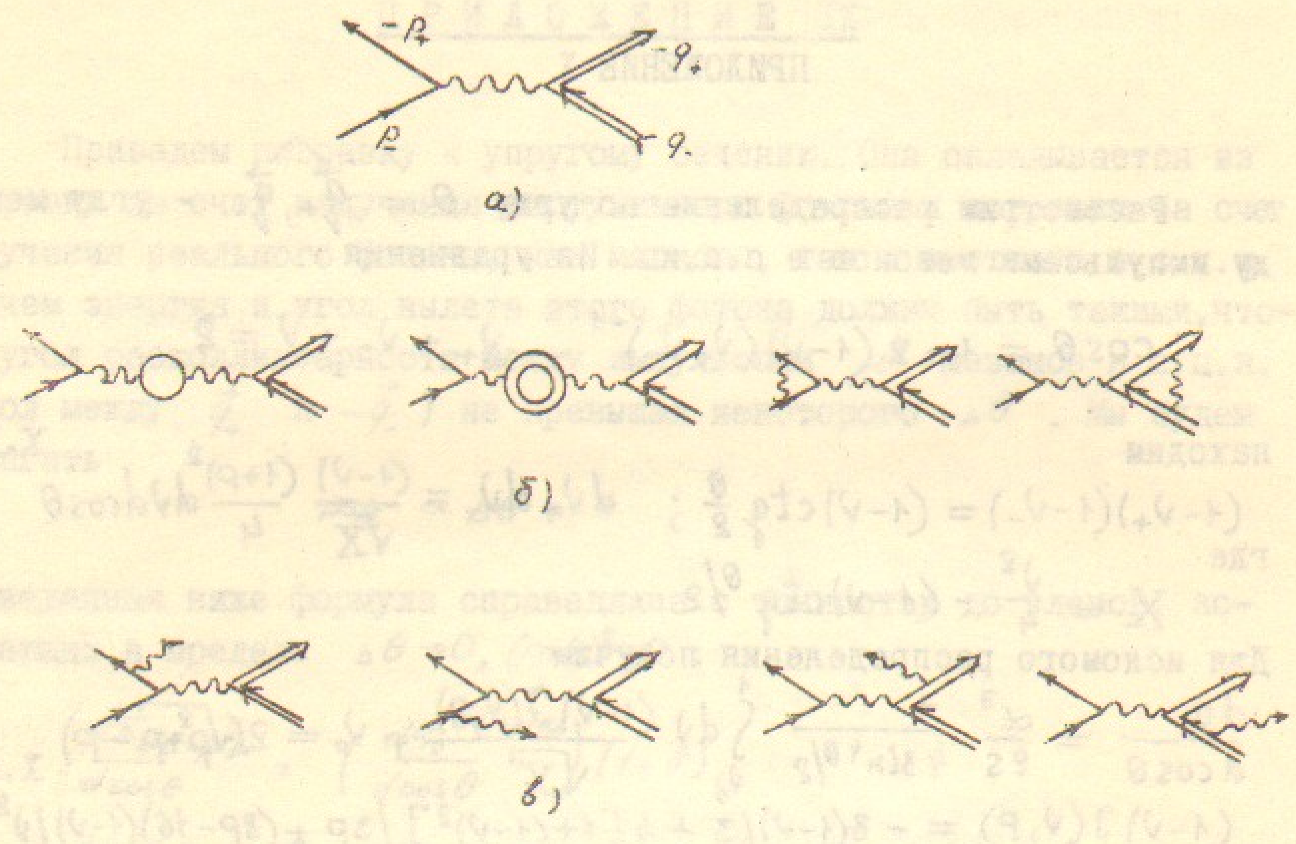

Рис. 1

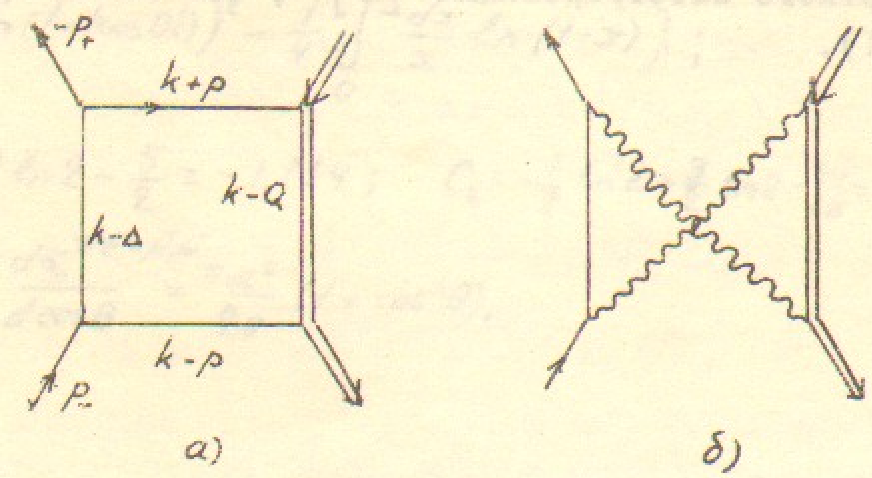

Рис. 2

Таблица ($\sqrt{s}$ =3 ГэВ)

θ	$\frac{S}{\alpha^3}\frac{d\sigma^{odd}}{d\cos\theta}$	$\frac{2S}{\alpha^3}\frac{d\sigma}{d\theta}$	θ	$\frac{S}{\alpha^3}\frac{d\sigma^{odd}}{d\cos\theta}$	$\frac{2S}{\alpha^3}\frac{d\sigma}{d\theta}$
0			90	0	28.8
5	-24.4		95	0.4	30.9
10	-20.4		100	0.84	33.6
15	-17.6		105	1.33	36.9
20	-15.4	421	110	1.91	41
25	-13.3	218	115	2.61	46.2
30	-11.5	129	120	3.43	52.6
35	- 9.8	84	125	4.4	60.8
40	- 8.2	60	130	5.5	71.5
45	- 6.78	45	135	6.78	86
50	- 5.5	37	140	8.2	106
55	- 4.4	31	145	9.8	136
60	- 3.43	28	150	11.5	181
65	- 2.61	26	155	13.3	258
70	- 1.91	25.6	160	15.4	403
75	- 1.33	25.5	165	17.6	
80	- 0.84	26.1	170	20.4	
85	- 0.4	27.2	175	24.4	

Работа поступила - 25 июня 1976г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 27.9-1976г. МН 02980
Ус. 2,0 печ.л., I,00 учетно-изд.л.
Тираж I50 экз. Бесплатно
Заказ №94

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР