

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

48

Г.В.Ступаков

**ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ  
ПЛАЗМЫ В АМБИПОЛЯРНОЙ  
ЛОВУШКЕ**

ПРЕПРИНТ И ЯФ 78-93

Новосибирск

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ  
В АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКЕ

Г.В. Ступаков

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуются гидродинамически равновесные конфигурации плазмы в амбиполярной ловушке. Показано, что при учете конечного, хотя и малого, значения  $\beta$  поверхности постоянного давления на длинной части центрального пробкотрона искажаются и, вообще говоря, не являются круговыми цилиндрами. Эти эффекты искажения поверхностей  $p = \text{const}$  можно уменьшать специальным выбором геометрии поля магнитных пробок.

MHD - PLASMA EQUILIBRIUM IN AN  
AMBIPOLEAR TRAP

G.V. Stupakov

A B S T R A C T

Equilibrium configurations of a plasma in an ambipolar trap are studied. It is shown that even at small values of  $\beta$ , the constant pressure surfaces on the long part of the solenoid become generally speaking different from circular cylinders. These effects of the distortion of the surfaces  $p = \text{const}$  can be reduced by the special choice of the mirror magnetic field.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1,2], амбиполярная ловушка представляет собой три связанных пробкотрона: крайние пробкотроны — это обычные зеркальные ловушки с "минимумом В", а в центральном пробкотроне имеется область, где вакуумное магнитное поле однородно, и магнитные пробки, в которых поле является аксиально-несимметричным (см. рис. 1, где изображена магнитная поверхность центрального пробкотрона, сечение которой в области однородного поля представляет собой окружность). Длина однородной области  $L$  велика по сравнению с длиной магнитных пробок  $L_p$ ,  $L \gg L_p$ .

Плазма в центральном пробкотроне удерживается в поперечном направлении давлением магнитного поля, а в продольном направлении давлением плазмы крайних пробкотронов. При этом отсутствие аксиальной симметрии задачи приводит, как оказывается, к интересным особенностям гидродинамически равновесных плазменных конфигураций. Они связаны с тем, что в асимметричных магнитных пробках центрального пробкотрона, наряду с поперечными токами  $\vec{j}_\perp$ , обеспечивающими силовое равновесие, текут токи вдоль силовых линий  $\vec{j}_\parallel$  (в аксиально-симметричной ловушке, очевидно,  $\vec{j}_\parallel = 0$ ). Линии тока не замыкаются внутри магнитной пробки и, вообще говоря, проходят через однородную часть центрального пробкотрона, приводя к появлению составляющей  $j_z$  на длинном участке ловушки (см. рис. 2). Этот ток создает поперечное магнитное поле  $H_\perp$ , которое при малых  $\beta$  ( $\beta$  — отношение давления плазмы к магнитному давлению), хотя и мало по сравнению с вакуумным полем  $H_z$ , но на большой длине  $L$  может привести к сильному уходу силовой линии относительно первоначального направления. В результате этого поверхности постоянного давления плазмы в области однородного поля искажаются и не являются более круговыми цилиндрами, а представляют собой "жеваные" поверхности сложного вида.

В настоящей работе получены уравнения, описывающие гидродинамическое равновесие плазмы с учетом искажения магнитных поверхностей и найдено их решение для случая, когда это искажение мало. Везде ниже предполагается, что  $\beta$  мало по сравнению с единицей.

## 2. РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПРОБКОТРОНЕ

Поскольку время жизни плазмы в центральном пробкотроне много больше времени ион-ионного столкновения, то для исследования гидродинамического равновесия здесь можно воспользоваться уравнениями магнитной гидродинамики с изотропным давлением. При известном распределении магнитного поля и давления плазмы плотность перпендикулярного к магнитному полю тока  $\vec{j}_\perp$  находится из уравнения  $c \nabla p = [\vec{j} \vec{H}]$ :

$$\vec{j}_\perp = c H^{-2} [\vec{H} \nabla p], \quad (1)$$

а распределение продольного тока из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j}_\parallel = - \operatorname{div} \vec{j}_\perp = 2 H^{-1} \vec{j}_\perp \nabla H. \quad (2)$$

Вводя скалярную функцию  $\xi$  таким образом, что  $\vec{j}_\parallel = \xi \vec{H}$ , из (2) найдем

$$\xi = \xi_0 + 2 \int_0^s ds H^{-2} \vec{j}_\perp \nabla H, \quad (3)$$

где интеграл берется вдоль силовой линии, длина дуги которой, для определенности отсчитывается от плоскости I (см. рис. I), обозначена через  $s$ ;  $\xi_0$  — значение  $\xi$  при  $s = 0$ . Для решения задачи о равновесии плазмы в центральной ловушке в качестве граничных условий необходимо задать распределение продольных токов в сечениях I и 4. Эти токи определяются крайними пробкотронами, которые, таким образом, при полном самосогласованном решении задачи должны включаться в рассмотрение. Однако, как показано в следующем разделе, довольно реальна ситуация, когда эти токи можно считать равными нулю. Ниже мы ограничимся рассмотрением именно этого случая. При этом из (3) и (1) следует, что

$$\int ds H^{-4} [\vec{H} \nabla p] \nabla H = 0, \quad (4)$$

где интегрирование ведется вдоль всей силовой линии между плоскостями I и 4. Можно показать (см. Приложение I), что если

силовые линии пересекают эти плоскости перпендикулярно их поверхности, то соотношение (4) эквивалентно известному утверждению [3] о постоянстве давления на поверхностях

$$\int ds H^{-1} = \text{const}. \quad (5)$$

В случае  $\beta = 0$  это уравнение сразу позволяет находить равновесные плазменные конфигурации. Нашей же задачей является учет конечного  $\beta$ , приводящего к искажению магнитного поля ловушки.

Оценим прежде всего величину продольного тока в сечениях 2, 3, где вакуумные силовые линии уже прямые (см. рис. I), то есть токов, втекающих в длинную часть ловушки из пробок центрального пробкотрона. Относительно последних будем предполагать, что напряженность азимутальной компоненты поля в них  $H_\psi \sim H_r \sim HR/L_n$ , где  $R$  — радиус плазмы,  $L_n$  — длина пробки (используем цилиндрическую систему координат  $r, \psi, z$ ), так что на длине пробки силовая линия смещается по азимуту на расстояние порядка  $R$ . Для оценки  $j_\parallel$  с помощью (3) удобно воспользоваться тождеством

$$\vec{j}_\perp \nabla H = H^{-1} \vec{j}_\perp (\vec{H} \nabla) \vec{H} = H \vec{j}_\perp \vec{\varkappa}, \quad (6)$$

где  $\vec{\varkappa}$  — вектор кривизны силовой линии. В магнитной пробке  $\varkappa \sim R/L_n^2$ ,  $j_\perp \sim cr/RH$  и из (3) получаем

$$j_\parallel \sim cr/L_n H.$$

Этот ток, протекая по длинной части пробкотрона, создает поперечное магнитное поле  $H_\perp \sim j_\parallel R/c \sim \beta HR/L_n$ , которое на длине  $L$  приведет к уходу силовой линии на расстояние  $x_L$

$$x_L \sim R \frac{L}{L_c}, \quad L_c \equiv L_n / \beta. \quad (7)$$

Таким образом, если длина однородной части  $L$  по порядку величины равна или превышает величину  $L_c$ , то следует ожидать сильного искажения поверхностей постоянного давления по сравнению с круговыми цилиндрами.

В то же время, смещение силовой линии в пробке на длине  $L_n$  относительно первоначального положения за счет эффекта конечного  $\beta$ , равное  $x \sim \beta R$ , при  $\beta \ll 1$  пренебрежимо мало. Это, в частности, позволяет по известному распределению давления на входе в пробку  $p_2(r, \psi)$  ( $p_3(r, \psi)$ ) в сечении 2 (3) и заданному вакуумному полю, пользуясь постоянством давления вдоль силовых линий, найти его распределение в пробке и, вычислив интеграл (3), получить распределение продольного тока  $j_2(r, \psi)$  ( $j_3(r, \psi)$ ) в том же сечении 2 (3). Для случая параксиальной пробки, когда  $R \ll L_n$ , эти вычисления проведены в Приложении 2, и результат имеет вид

$$\begin{aligned} j_2 &= a r \frac{\partial p_2}{\partial r} \sin 2\psi + (a \cos 2\psi + b) \frac{\partial p_2}{\partial \psi}, \\ j_3 &= a r \frac{\partial p_3}{\partial r} \sin 2\psi + (a \cos 2\psi - b) \frac{\partial p_3}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, определяемые геометрией магнитного поля в пробке. Легко видеть, что полный ток в сечении 2 (3), как и должно быть, равен нулю.

Рассмотрим теперь, как изменяется ток, вытекающий из пробки, вдоль длинной части ловушки. Кривизна силовых линий здесь связана с магнитным полем самих продольных токов и оценивается из того условия, что на длине  $L_c$  силовая линия сместилась бы на расстояние  $R$ ,  $x \sim R/L_c^2$ . Теперь, используя (3), (6) находим изменение  $j_{||}$  на длине  $L$ :

$$\Delta j_{||} \sim L \frac{c p}{R H} \frac{R}{L_c^2} \sim j_{||} \frac{L}{(L_c/\beta)}$$

Если выполняется условие

$$L \ll \frac{L_c}{\beta} \sim \frac{L_n}{\beta^2}, \quad (9)$$

что мы будем предполагать, то изменением продольного тока между плоскостями 2 и 3 можно пренебречь. Это условие постоянства  $j_{||}$  вдоль силовых линий можно записать в виде следующего уравнения

$$\frac{\partial j}{\partial z} = - \frac{H_r}{H_0} \frac{\partial j}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{H_\psi}{H_0} \frac{\partial j}{\partial \psi}, \quad (10)$$

где  $H_0 - z$  — компонента магнитного поля, которая с нужной точностью равна просто вакуумному магнитному полю на однородной части, а  $j_{||}$  для краткости обозначено просто через  $j$ . При нахождении компонент поперечного магнитного поля  $H_r$  и  $H_\psi$ , можно считать, что ток  $j$  направлен вдоль оси  $z$ , тогда  $H_r = r^{-1} \partial A_z / \partial \psi$ ,  $H_\psi = -\partial A_z / \partial r$ , где  $A_z(r, \psi, z)$  —  $z$ -компонента векторного потенциала, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \psi^2} = - \frac{4\pi}{c} j. \quad (11)$$

Переписывая уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \frac{1}{r H_0} \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial j}{\partial \psi} - \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{\partial j}{\partial r} \right), \quad (12)$$

и добавляя условие постоянства давления вдоль силовых линий

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r H_0} \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial \psi} - \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (13)$$

получим систему уравнений (11)–(13), которые вместе с граничными условиями (8) описывают равновесные конфигурации плазмы в центральном пробкотроне амбиполярной ловушки.

При  $\beta = 0$  ( $L_c = \infty$ ) решение этой системы тривиально:

$$A_z = 0, \quad p = p_0(r), \quad j = j_0 \equiv a r \frac{d p_0}{d r} \sin 2\psi, \quad (14)$$

где  $p_0(r)$  — произвольная функция радиуса  $r$ . Зависимость давления только от  $r$  соответствует известному факту, что поверхности, определяемые условием (5), посчитанные по вакуумному полю в параксиальном приближении представляют собой круговые цилиндры в центральной части ловушки [4] \*).

В этом случае решать уравнения (11)–(13) можно, повици-мому, только численными методами. Мы здесь рассмотрим ситуацию, когда  $L \ll L_c$ , и найдем поправки в первом порядке по малому параметру  $L/L_c$  к нулевому приближению (14).

\* Строго говоря, это справедливо только с точностью до членов  $\sim (R/L_n)^2$ .

Обозначая поправки к давлению и току через  $\delta p$  и  $\delta j$ , будем искать решение в виде

$$p = p_0(r) + \delta p(r, \psi, z),$$

$$j = j_0(r, \psi) + \delta j(r, \psi, z).$$

При этом в правую часть (II) достаточно подставить  $j_0$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \psi^2} = - \frac{4\pi}{c} a r p_0' \sin 2\psi,$$

откуда находим, что решение, ограниченное в нуле и на бесконечности, имеет вид

$$A_z = - \frac{4\pi a}{c} G(r) \sin 2\psi,$$

где

$$G(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \zeta^3 p(\zeta) d\zeta.$$

В этом приближении функция  $A_z$  не зависит от  $z$ . Из уравнений (I2), (I3) находим, что

$$\delta j_3 = \delta j_2 + \frac{L}{r H_0} \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial j_0}{\partial \psi} - \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{\partial j_0}{\partial r} \right),$$

$$\delta p_3 = \delta p_2 - \frac{L}{r H_0} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} p_0'$$

Эти уравнения совместно с граничными условиями (8) позволяют определить  $\delta p_2$ ,  $\delta p_3$ ,  $\delta j_2$ ,  $\delta j_3$  и с помощью соотношения, следующего из (I3),

$$\delta p = \delta p_2 - \frac{z}{r H_0} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} p_0',$$

получить распределение давления  $\delta p$  по длине. При этом  $\delta p$  находится с точностью до произвольной функции от радиуса, для определения которой можно наложить условие

$$\langle \delta p \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta p d\psi = 0.$$

Результат гласит

$$\delta p(r, \psi, z) = \frac{4aLp_0'}{crH_0} \left[ \left( \frac{2z}{L} - 1 \right) G \cos 2\psi + \frac{a}{4b} (2G - rG') \cos 4\psi \right]$$

Учитывая малость  $\delta p$ , уравнение поверхности  $p = \text{const}$  можно записать в виде

$$r(\psi, z) = r_0 - \frac{\delta p}{p_0'} \Big|_{r=r_0}, \quad r_0 \equiv \langle r \rangle$$

Сечение этой поверхности плоскостями 2, 3 и экваториальной плоскостью ловушки ( $z = L/2$ ) изображено на рис.3. Величина "размаха"  $(r_{\text{max}} - r_{\text{min}})/r_0$  по порядку величины равна  $L/L_c$ .

### 3. РАВНОВЕСИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ КОМПОНЕНТЫ В КРАЙНЕМ ПРОБКОТРОНЕ

Рассмотрим теперь, чем определяются продольные токи, текущие через сечения I и 4, которые соединяют центральную ловушку с крайними пробкотронами. Для определенности будем говорить о левом пробкотроне, имеющем с центральной ловушкой общую плоскость I (см.рис.4). Токи, текущие в этой плоскости, как будет видно из дальнейшего, в основном связаны с электронными потоками, поэтому для их определения достаточно воспользоваться уравнением равновесия электронной компоненты в крайнем пробкотроне. При этом, чтобы не усложнять формул, будем считать, что электронная температура постоянна во всем объеме пробкотрона:

$$-T_e \nabla n_e + e n_e \nabla \psi + \frac{1}{c} [\vec{j}_e \vec{H}] = 0. \quad (I5)$$

Что касается ионов, то нам потребуется только распределение их плотности  $n(\vec{r})$  по объему. В крайнем пробкотроне энергия ионов существенно превышает электронную температуру  $T_e$ , поэтому влиянием амбиполярного поля на их движение можно пренебречь. Тогда распределение их плотности определяется геометрией магнитного поля и условиями инжекции и не зависит от распределения потенциала  $\psi$  в пробкотроне. Мы будем считать функцию  $n(\vec{r})$  заданной и пользоваться условием квазинейтральности  $n_e = n(\vec{r})$ .

Изменение потенциала вдоль силовой линии подчиняется закону Больцмана. Если задать плотность  $n_m$  и потенциал  $\psi_m$  в экваториальной плоскости пробкотрона (см.рис.4), то можно записать, что вдоль силовой линии

$$n = n_m \exp \left[ \frac{e}{T_e} (\psi - \psi_m) \right],$$

где значения  $n_m$  и  $\psi_m$  относятся к точке пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью. Удобно ввести функцию  $F$ , которая постоянна вдоль силовой линии и равна на ней

$$F = - (e\psi_m / T_e) \ln n_m ; \partial F / \partial s = 0 ,$$

тогда  $n = \exp (F + e\psi / T_e)$ . Перепишывая уравнение равновесия (I5) в виде

$$-T_e n \nabla F + \frac{1}{c} [\vec{j}_e \vec{H}] = 0 ,$$

найдем из него плотность поперечного тока  $\vec{j}_{e\perp}$ , а затем, так же как и в предыдущем разделе, воспользовавшись уравнением непрерывности, получим выражение для  $\xi_e \equiv j_{e\parallel} / H$ :

$$\xi_e(s) - \xi_{e0} = -c T_e \int_{s_0}^s ds H^{-1} (\nabla F)_{\text{rot}} (n \vec{H} / H^2), \quad (I6)$$

где интегрирование ведется вдоль силовой линии от плоскости 0, значение  $\xi_e$  на которой обозначено через  $\xi_{e0}$ . Таким образом, для определения продольного тока в концевом пробкотроне необходимо знать его распределение в плоскости 0. Величина тока в этой плоскости определяется условиями вне пробкотрона: наличием или отсутствием здесь плазмы, проводимостью торцов установки и т.д. В частности, если проводимость пространства вне пробкотрона достаточно мала, то токи  $\vec{j}_e$  должны замыкаться внутри пробкотрона и  $\xi_{e0} = 0$ . Рассмотрением этого случая мы и ограничимся. При этом величина  $\xi_e$  в сечении I ( $s = s_1$ ) равна

$$\xi_e(s_1) = -c T_e \int_{s_0}^{s_1} ds H^{-1} (\nabla F)_{\text{rot}} (n \vec{H} / H^2). \quad (I7)$$

Как следует из этой формулы, задание потенциала в экваториальной плоскости (при известном распределении плотности  $n$ ) однозначно определяет продольные токи в сечении I. В работе [5] отмечалось, что сильные эффекты неклассического переноса могут приводить к тому, что максвелловское распределение устанавливается не только вдоль силовой линии, но и во всем объеме

ме крайнего пробкотрона (вместе с тем становится однородной во всей плазме и электронная температура). В этом случае функция  $F$ , очевидно, тождественно равна константе и  $\xi_e(s_1) = 0$ , т.е. электронные токи в сечении I не текут. Именно это предполагалось в предыдущем разделе.

В общем случае, как показано в Приложении I, интеграл (I7) обращается в нуль, если функция  $F$  постоянна вдоль поверхностей

$$\int_{s_0}^{s_1} n ds / H = \text{const}. \quad (I8)$$

В параксиальном пробкотроне пересечения дрейфовых поверхностей ионов с экваториальной плоскостью ловушки с хорошей точностью представляют собой окружности, поэтому в этой плоскости плотность плазмы зависит только от  $r$ . Вдоль силовой линии  $n$  меняется таким образом, что является функцией только модуля  $H$ . Как можно показать, отсюда следует, что с точностью до параметра параксиальности  $(R_{\text{пр}} / L_{\text{пр}})^2$  поверхности (I8) также являются окружностями в экваториальном сечении ( $R_{\text{пр}}$  — радиус плазмы и  $L_{\text{пр}}$  — длина пробки в крайнем пробкотроне). Таким образом, мы приходим к выводу, что продольные токи отсутствуют в сечении I, если распределение потенциала аксиально-симметрично в экваториальной плоскости крайнего пробкотрона.

Кроме электронов в продольные токи в сечении I вносят вклад ионы центральной ловушки, проникающие в концевой пробкотрон. Строго говоря, для них тоже следует писать уравнение типа (I5) и находить из него  $\vec{j}_{i\parallel}$ . Однако, поскольку плотность плазмы в крайнем пробкотроне существенно больше плотности в центральной ловушке, то эти ионы проникают в крайний пробкотрон на малое расстояние, так что  $\vec{j}_{i\parallel}$  будет мало по сравнению с  $\vec{j}_{e\parallel}$  по крайней мере по параметру, равному отношению этого расстояния к  $L_{\text{пр}}$ .

В заключение заметим, что рассмотренные в этом разделе условия равновесия электронов применимы и к отдельному аксиально-несимметричному пробкотрону. В частности, при отсутствии продольных токов через торцы, в параксиальном пробкотроне распределение потенциала должно быть аксиально симметричным в экваториальной плоскости.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящей работе эффекты конечного  $\beta$ , приводящие к тому, что поверхности постоянного давления деформируются в области аксиально-симметричного поля, прежде всего сказываются на процессах переноса поперек магнитного поля [5,6]. Это обусловлено тем, что теперь не только радиальное, но и азимутальное смещение частицы при отражении её от пробки приводит к переходу с одной поверхности постоянного  $p$  на другую и, следовательно, вызывает поперечный перенос. Как известно [5], в силу специфической симметрии центрального пробкотрона радиальные смещения  $\Delta r$  с одной и той же силовой линии в противоположных пробках, равные по порядку величины  $\rho_n R/L_n$ , где  $\rho_n$  — ларморский радиус частицы, почти полностью компенсируют друг друга, приводя к тому, что величина расщепления дрейфовых поверхностей содержит малый множитель  $(R/L_n)^2$ . Но такому сокращению не подвержено азимутальное смещение  $\Delta \psi$ . Поэтому, в случае асимметричных поверхностей  $p = \text{const}$  расхождение дрейфовых поверхностей частиц возрастет, приводя к увеличению коэффициентов переноса в неклассическом [5] режиме. Вообще говоря, скорость переноса возрастет и в резонансном [6] режиме.

Величину деформации поверхностей  $p = \text{const}$  можно пытаться уменьшать специальным выбором конфигурации магнитного поля. Если эта конфигурация такова, что коэффициент  $\alpha$  в формуле (8) равен нулю (см. формулу (П2.7)), то аксиально-симметричное распределение давления не приводит (в первом порядке по параксиальности) к возникновению продольных токов и возмущению магнитного поля и, следовательно, является допустимой гидродинамически равновесной конфигурацией.

В заключение автор пользуется случаем поблагодарить Д.Д. Рютова за многочисленные обсуждения в ходе выполнения этой работы.

#### Приложение I.

Здесь мы докажем, что условие (4) эквивалентно требованию постоянства давления на поверхностях (5), а обращение в нуль интеграла (I7) означает, что  $F$  постоянно на поверхностях (I8). Легко видеть, что соотношение (I4) можно получить, положив в равенстве

$$\int_{S_0}^{S_1} ds H^{-1} (\nabla F) \text{rot} (n \vec{H} / H^2) = 0 \quad (\text{П. I})$$

$F = p$ ,  $n = I$ , так что первое утверждение является частным случаем второго.

Введем в рассмотрение тонкую силовую трубку, в которой содержится силовая линия интеграла (П. I). Учитывая, что площадь ее сечения пропорциональна  $H^{-1}$ , запишем (П. I) в виде

$$\int dV (\nabla F) \text{rot} (n \vec{H} / H^2) = 0,$$

где интегрирование теперь ведется по объему силовой трубки. В качестве последней выберем силовую трубку, заключенную между поверхностями, на которых  $F$  постоянно и различается на малую величину  $\Delta F$  (см. рис. 5). Тогда  $\nabla F = \vec{n} \Delta F / \Delta x$ , где  $\Delta x$  — расстояние между выбранными поверхностями, а  $\vec{n}$  — нормаль к ним. Принимая во внимание, что  $\vec{n} dV / \Delta x$  — это элемент площади  $d\vec{\sigma}$ , приходим к

$$\int d\vec{\sigma} \text{rot} \frac{n \vec{H}}{H^2} = \oint d\vec{s} \cdot \frac{n \vec{H}}{H^2} = 0 \quad (\text{П. 2.})$$

Замкнутый контур, по которому ведется интегрирование в последнем интеграле изображен на рис. 5. Если силовые линии перпендикулярны к плоскостям  $O, I$ , то отрезки контура интегрирования, лежащие в этих плоскостях, не вносят вклада в интеграл и из (П. 2) получаем

$$\oint \frac{ds n}{H} = 0,$$

что и означает постоянства интеграла  $\int ds n / H$  вдоль поверхностей  $F = \text{const}$ .



Приложение 2.

С помощью формул (3), (I) находим, что продольный ток в сечении  $z = 0$  дается формулой

$$\left(\frac{j}{H}\right)\Big|_{z=0} = 2c \int_{-L_n}^0 dz \left(\frac{ds}{dz}\right) H^{-4} [\vec{H} \nabla p] \nabla H, \quad (\text{П2.1})$$

где интегрирование ведется вдоль силовой линии. В параксиальном приближении вакуумное магнитное поле в ловушке определяется двумя функциями  $H_{0z}(z)$  и  $h_2(z)$ :

$$H_z = H_{0z} - \frac{1}{4} r^2 H_{0z}'' - r^2 h_2' \cos 2\psi,$$

$$H_r = -2r h_2 \cos 2\psi - \frac{1}{2} r H_{0z}',$$

$$H_\psi = 2r h_2 \sin 2\psi.$$

В центральной части,  $0 < z < L$ , магнитное поле однородно:  $H_{0z} = H_0 = \text{const}$ ,  $h_2 = 0$ . Уравнение силовой линии этого поля, проходящей в плоскости  $z = 0$  через точку  $r_0, \psi_0$ , имеет вид

$$r(r_0, \psi_0, z) = r_0 \sqrt{\frac{H_0}{H_{0z}(z)}} \left( e^{\phi} \sin^2 \psi_0 + e^{-\phi} \cos^2 \psi_0 \right)^{1/2}, \quad (\text{П2.2})$$

$$\psi(\psi_0, z) = \text{arctg} \left( e^{\phi} \text{tg} \psi_0 \right),$$

где

$$\phi(z) = -4 \int_z^0 \left[ h_2(z') / H_{0z}(z') \right] dz'.$$

Входящий в интеграл (П2.1) модуль магнитного поля с помощью (П2.2) можно записать как функцию переменных  $r_0, \psi_0, z$ :

$$H = H_{0z} + \frac{1}{2} r_0^2 \frac{H_0}{H_{0z}^2} \left( F_1 e^{-\phi} \cos^2 \psi_0 + F_2 e^{\phi} \sin^2 \psi_0 \right)$$

$$F_1 = 4h_2^2 - \frac{1}{2} H_{0z} H_{0z}'' + \frac{1}{4} (H_{0z}')^2 \pm 2H_{0z}' h_2 \mp 2H_{0z} h_2' \quad (\text{П2.3})$$

Наконец, введем еще функцию  $\chi = -r^2 h_2 \cos 2\psi - \frac{1}{4} r^2 H_{0z}'$ , производные от которой дают поперечные компоненты поля

$$H_r = \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad H_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \psi}.$$

В координатах  $r_0, \psi_0, z$  она имеет вид

$$\chi = -r_0^2 \frac{H_0}{H_{0z}} \left\{ e^{-\phi} \left( \frac{1}{4} H_{0z}' + h_2 \right) \cos^2 \psi_0 + e^{\phi} \left( \frac{1}{4} H_{0z}' - h_2 \right) \sin^2 \psi_0 \right\}. \quad (\text{П2.4})$$

Приступая теперь к вычислению интеграла (П2.1), заметим, что с нужной точностью можно положить производную  $ds/dz$  равной единице и заменить  $H$  там, где оно не входит под знак дифференцирования, на  $H_{0z}$ . Тогда

$$\begin{aligned} j &= 2c H_0 \int_{-L_n}^0 dz H_{0z}^{-4} \left\{ -\frac{H_{0z}}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{H_{0z}}{r} \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r} H_r \frac{\partial p}{\partial \psi} - H_\psi \frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial H}{\partial z} \right\} = \\ &= 2c H_0 \int_{-L_n}^0 dz H_{0z}^{-4} \left\{ -\frac{H_{0z}}{r} \frac{\partial(H, p)}{\partial(r, \psi)} + \frac{H_{0z}'}{r} \frac{\partial(\chi, p)}{\partial(r, \psi)} \right\} = \quad (\text{П2.5}) \\ &= 2c H_0 \int_{-L_n}^0 dz H_{0z}^{-3} \frac{1}{r} \frac{\partial(r_0, \psi_0)}{\partial(r, \psi)} \left\{ -\frac{\partial(H, p)}{\partial(r_0, \psi_0)} + \frac{H_{0z}'}{H_{0z}} \frac{\partial(\chi, p)}{\partial(r_0, \psi_0)} \right\} \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{\partial(r_0, \psi_0)}{\partial(r, \psi)} = \frac{H_{0z}}{H_0} \frac{r}{r_0}$$

которое с очевидностью следует из условия сохранения магнитного потока внутри силовой трубки, перепишем (П2.5) в виде

$$j = 2c \int_{-L_n}^0 dz H_{0z}^{-2} \frac{1}{r_0} \frac{\partial(\chi H_{0z}' H_{0z}^{-1} - H, p)}{\partial(r_0, \psi_0)}$$

Подставляя в этот интеграл выражения для  $H$  и  $\chi$  (П2.3), (П2.4), окончательно получим:

$$j = a r_0 \frac{\partial p}{\partial r_0} \sin 2\psi_0 + (a \cos 2\psi_0 + b) \frac{\partial p}{\partial \psi_0} \quad (\text{П2.6})$$

где

$$\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = \pm c N_0 \int_{-L_0}^0 dz N_{0z}^{-4} (e^{\Phi} G_2 \mp e^{-\Phi} G_1), \quad (\text{П2.7})$$

$$G_1 = 4h_2^2 - \frac{1}{2} N_{0z} N_{0z}'' + \frac{3}{4} (N_{0z}')^2 \pm (4N_{0z}' h_2 - 2N_{0z} h_2').$$

Симметрия ловушки означает, что  $N_{0z}$  и  $h_2$  — симметричные, а  $\Phi$  — антисимметричная функция относительно центра ловушки. Нетрудно видеть, что это приведет к изменению знака  $b$  в выражении (П2.6), записанном для противоположной пробки.

## Л и т е р а т у р а

1. Г.И. Димов, В.В. Закайдаков, М.Е. Кишиневский. Физика плазмы, 2, 597, 1976.
2. Т.К. Fowler, В.Г. Logan. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 11, 167, 1977.
3. В.Д. Шафранов. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып. 2, стр. 92, Атомиздат, 1963.
4. Н.Р. Furth, М.Н. Rosenbluth. Phys. Fluids, 7, 764, 1964.
5. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. Физика плазмы, 4, 501, 1978.
6. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. ДАН СССР, 240, 1086, 1978.



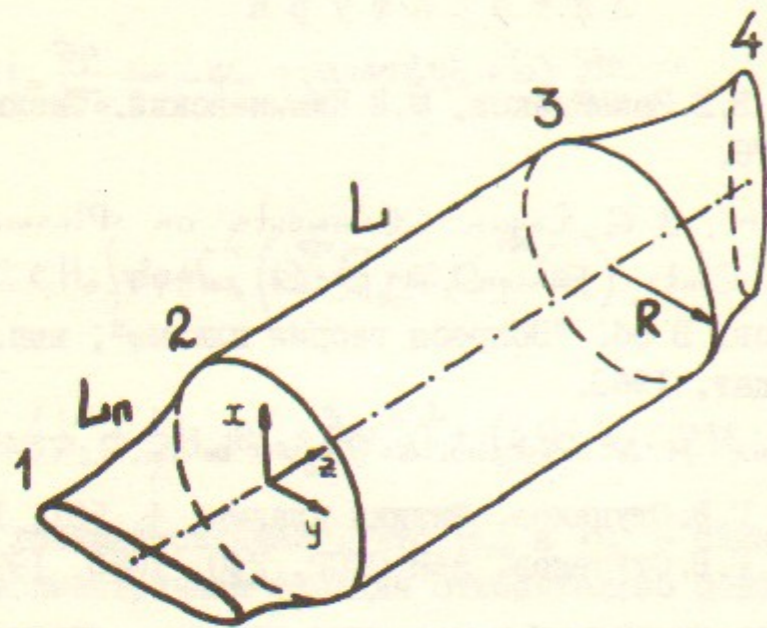


Рис.1. Конфигурация магнитного поля в центральном пробкотроне амбиполярной ловушки (крайние пробкотроны не изображены). Ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля ловушки, а координата  $z$  отсчитывается от плоскости 2.

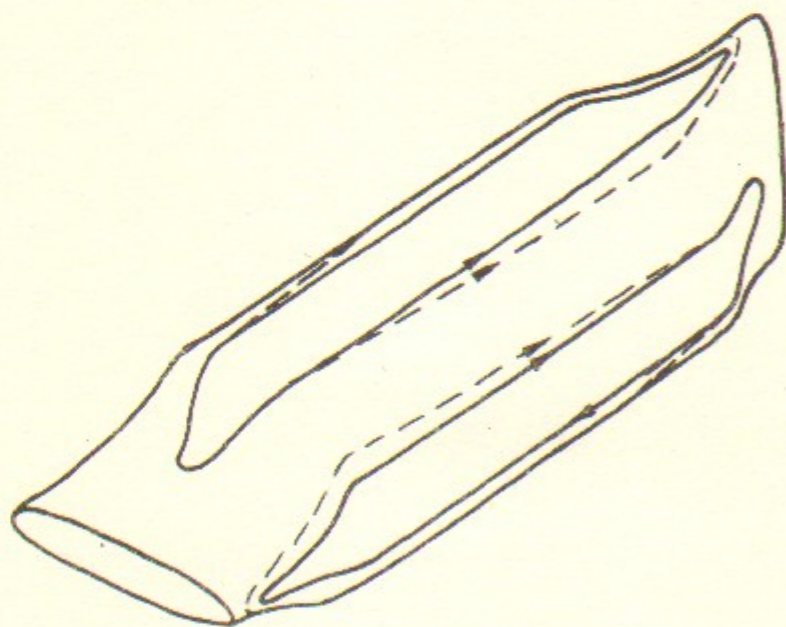


Рис.2. Линии тока в плазме центрального пробкотрона (в предположении, что через плоскости 1, 4 токи не текут). При учете конечного  $\beta$  продольные токи приводят к искажению магнитного поля на однородном участке (пунктирные линии).

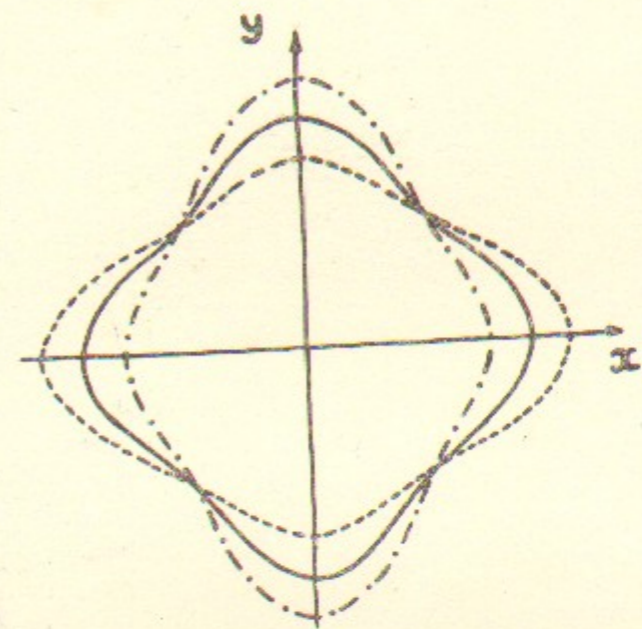


Рис.3. Сечение поверхностей постоянного давления плоскостями 2 (пунктирная линия), 3 (штрихпунктирная кривая) и экваториальной плоскостью ловушки (сплошная кривая).

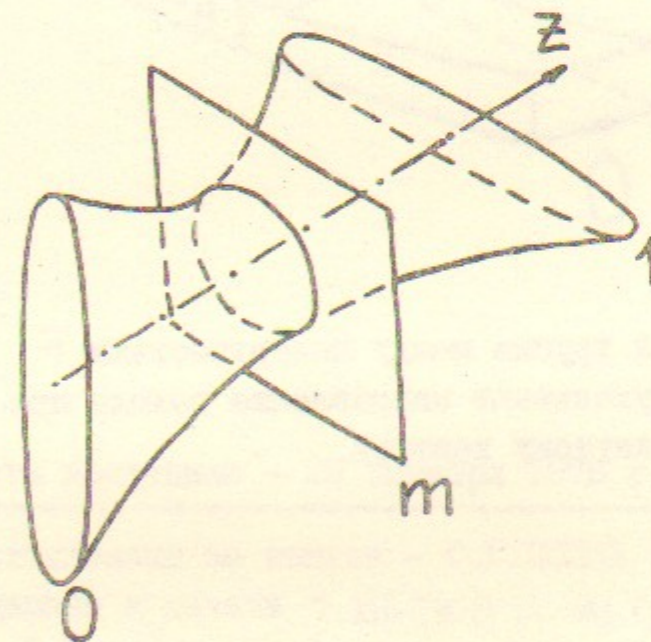


Рис.4. Геометрия поля в крайнем пробкотроне.  $m$  — экваториальная плоскость.

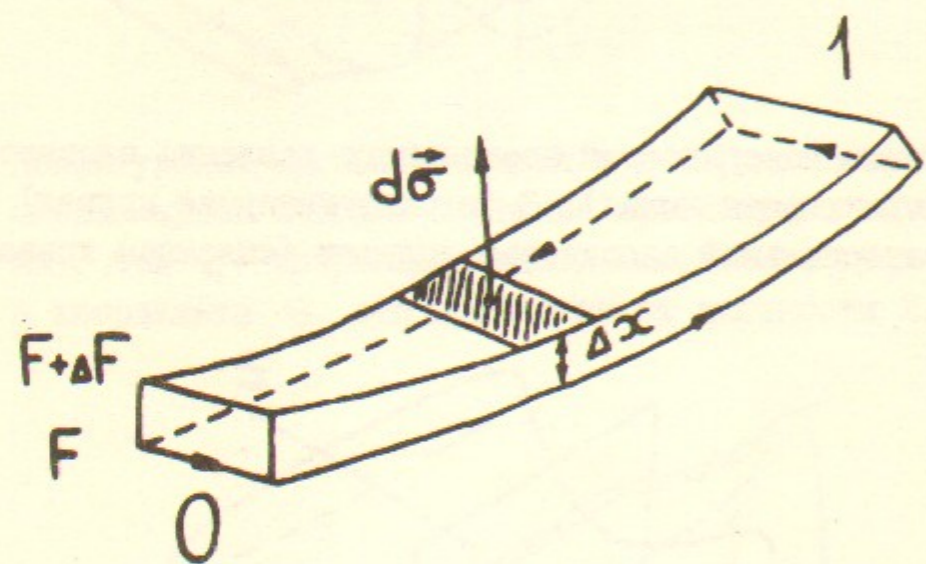


Рис.5. Силловая трубка между поверхностями  $F$  и  $F+\Delta F$ . Стрелочки указывают направление обхода при интегрировании по замкнутому контуру.

Работа поступила - 25 октября 1978 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 7.XII-1978 г. МН 07899

Усл. 1,0 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.

Тираж 250 экз. Бесплатно

Заказ № 93.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР