Равновесие плазмы с плещущимися ионами выше порога зеркальной неустойчивости

И.А. Котельников

ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск

Семинар плазменных лабораторий, 19.01.2010

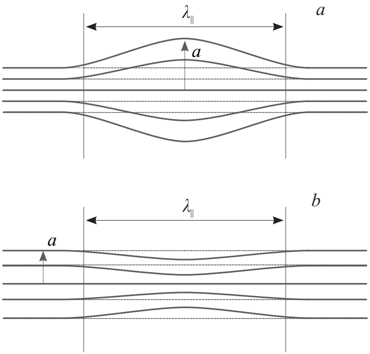
Аннотация

В рамках параксиального приближения обсуждается равновесие плазмы в открытой ловушке с плещущимися ионами в случае, когда превышен порог зеркальной неустойчивости. Показано, что неоднородность магнитного поля стабилизирует зеркальную неустойчивость, но вблизи точки остановки плещущихся ионов образуется плотный сгусток плазмы с резким фронтом, обращённым в сторону магнитной пробки. На этом фронте магнитное поле и давление изменяются скачком. При малом превышении порога неустойчивости поверхность разрыва имеет форму усечённого параболоида. Величина скачка магнитного поля на оси плазмы пропорциональна радиусу параболоида, постепенно уменьшаясь до нуля при удалении от оси. Показано, что имеются два равновесных состояния, незначительно различающиеся по величине радиуса сгустка. Между этими состояниями возможен переход, сопровождающийся выбросом плазмы из сгустка.

Далее...

Качественное рассмотрение

Пусть $p_\perp > p_\parallel$. Рассмотрим силовую трубку с пологим вздутием, таким что $\lambda_\parallel \gg a$. В области разрежения магнитных силовых линий образуется пробкотрон (рис. a). Туда будет втянута дополнительная порция плазмы. Её давление $p_\perp$ увеличится, но давление магнитного поля $p_M = B^2/8\pi$ уменьшится. Если $\delta p_\perp + \delta p_M > 0$ при $\delta B < 0$, возникает неустойчивость.



Критерий зеркальной неустойчивости

Кинетическое уравнение в дрейфовом приближении,

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} + v_\parallel \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\mu}{m}\frac{\partial B}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial v_\parallel} = 0,$$

на пороге неустойчивости имеет решение

$$\delta f = \frac{\mu\,\delta B}{m v_\parallel}\,\frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} = \mu\,\delta B\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\parallel}.$$

Отсюда можно вычислить давление плазмы

$$p_\perp = \frac{2\pi}{m}\int \mathrm{d}v_\parallel\, B\,\mathrm{d}\mu\,\mu B\, f$$

и его возмущение при изменении магнитного поля:

$$\delta p_\perp = \frac{2\pi}{m}\,B^2 \int \mathrm{d}v_\parallel\;\mathrm{d}\mu\,\mu\,\delta f + \frac{2\delta B}{B}\,p_\perp.$$

Неустойчивость развивается, если

$$\delta p_\perp + \frac{1}{4\pi}\, B\, \delta B > 0$$

при $\delta B < 0$. Отсюда получается критерий *устойчивости* в форме А.А. Веденова [BBC61]:

$$p_\perp + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\pi B^3}{m} \int \mathrm{d}v_\parallel\, \mathrm{d}\mu\, \mu^2\, \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_\parallel} > 0 \qquad \text{(устойчивость).} \quad (1)$$

Для двухтемпературной плазмы он приводится к виду

$$\frac{\beta_\perp}{\beta_\parallel} < 1 + \frac{1}{\beta_\perp} \qquad \text{(устойчивость).}$$

Эквивалентен критерию У. Томпсона (W. Tompson [Tho64]),

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi}\right) > 0 \qquad \text{(устойчивость),} \quad (2)$$

для любой функции распределения вида $f(\varepsilon, \mu)$.

Условие Грэда

H. Grad [Gra67] утверждает, что условие

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(p_\perp + \frac{B^2}{8\pi}\right) > 0$$

необходимо для корректной постановки краевой задачи на равновесие плазмы в открытой ловушке (“necessary condition for the boundary value problem of the plasma equilibrium in an open-ended domain to be well posed”).

Известно также, что это условие ограничивает область применимости параксиального приближения в открытых системах для удержания плазмы пределом, когда давление плазмы достаточно мало (И.М. Ланский, [Lan93]).

Однако пример К. Лотова [Lot96] побуждает презреть эти ограничения.

Далее…

Основные уравнения

Используем приближённое уравнение

$$p_\perp(\Phi, B) + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{H^2(z)}{8\pi}$$

вместо точного уравнения поперечного равновесия

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(B^2 + 8\pi p_\perp\right) = \kappa\,\left(2B^2 + 8\pi p_\perp - 8\pi p_\parallel\right).$$

В том же приближении

$$\frac{\partial r^2}{\partial \Phi} = \frac{1}{\pi\, B(\Phi, H)}. \tag{3}$$

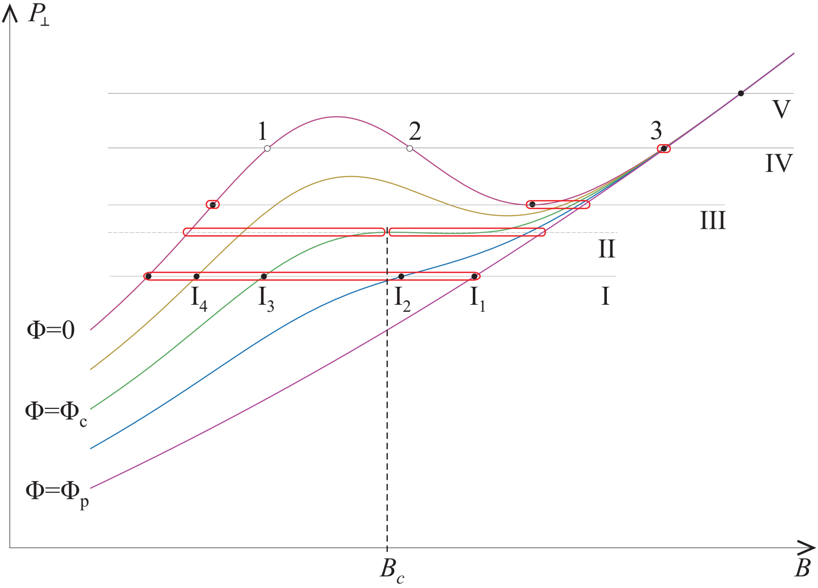
Вне плазмы $B(\Phi, H) = H$. Нужно найти решение на интервале $0 \leqslant \Phi \leqslant \Phi_p$, где $p_\perp > 0$.

Для известной функции $B(\Phi, H)$ уравнение Eq. (3) формально решается в квадратурах:

$$r^2(\Phi, H) - r_p^2(H) = \int_{\Phi}^{\Phi_p} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\pi\, B(\Phi, H)},$$

причём радиус плазмы $r_p(H)$ определяется из условия $r(0, H) = 0$.

Проблемы возникают, если зависимость $P_\perp$ от Φ при заданном B неоднозначна (при этом неоднозначна также зависимость $P_\perp$ от B при заданном Φ). Неоднозначность возникает вблизи точки остановки плещущихся ионов при достаточном большом давлении и/или достаточно малом угловом разбросе ионов.



$P_\perp$
1
2
3
V
IV
III
II
I
I_4
I_3
I_2
I_1
$\Phi=0$
$\Phi=\Phi_c$
$\Phi=\Phi_p$
B_c
B

- Из 3-х корней нужно выбрать максимальный.
- В магнитном поле возникает «дыра».
- Подобные дыры обнаружены в магнитосферах Земли и других планет [KHW70], а также в солнечном ветре [SNB+00, ZBR+09].
- В отличие от магнитосферных дыр, в лабораторной плазме с плещущимися ионами локальные пробкотрончики не образуются (магнитное поле монотонно по z и по r). В этом смысле зеркальная неустойчивость стабилизируется неоднородностью магнитного поля.

Далее. . .

$$P_\perp(\Phi, B) = \frac{B^2}{8\pi} + p_\perp(\Phi, B)$$

Параметры критической точки B_c и Φ_c находим из уравнений

$$\frac{\partial P_\perp}{\partial B} = 0, \qquad \frac{\partial^2 P_\perp}{\partial B^2} = 0.$$

Вблизи точки остановки

$$\frac{\partial p_\perp}{\partial B} \sim -\frac{p_{\perp *}}{\Delta B},$$

где $\Delta B = B_0\,\Delta b$ — масштаб изменения B, $b = B/B_0$, $\Delta b = 2\sqrt{b_* - 1}\,b_*\,\Delta\theta$, $b_* = 1/\sin^2\theta_*$, $\Delta\theta \ll 1$ — угловой разброс ионов.

Порог зеркальной неустойчивости:

$$p_{\perp *} > p_{\perp c} \sim \tfrac{1}{4\pi} B_c \, \Delta B.$$

$$\beta_c \sim \frac{\Delta b}{b_c} \approx \frac{\Delta b}{b_*}$$

Приближение «мелкого дна»:

$$\Phi_c \ll \Phi_p.$$

Размеры мелкой магнитной дыры малы:

$$r_c \ll r_p \sim a,$$
$$z_c \ll \ell \sim \beta_c L \sim (\Delta b/b_c)L.$$

Раскладываем $P_\perp$ вблизи критической точки:

$$\psi \frac{\partial P_\perp}{\partial \psi} + \psi\, \zeta \frac{\partial^2 P_\perp}{\partial \zeta \partial \psi} + \frac{\zeta^3}{6} \frac{\partial^3 P_\perp}{\partial \zeta^3} = \frac{H^2(z)}{8\pi} - P_\perp,$$

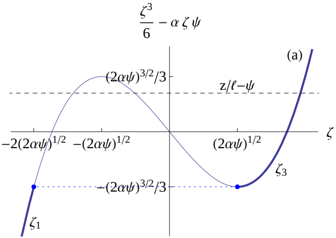
$\psi = (\Phi_c - \Phi)/\Phi_p$, $\zeta = (B - B_c)/\Delta B$, $P_\perp$ оценивается в этой точке. То же разложение в безразмерном виде:

$$\tfrac{1}{6}\zeta^3 - \alpha\psi\, \zeta = \frac{z}{\ell} - \underbrace{\gamma}_{=1} \psi, \tag{4}$$

$$\alpha = -\frac{\partial^2 P_\perp}{\partial \zeta \partial \psi} \;/\; \frac{\partial^3 P_\perp}{\partial \zeta^3}, \qquad \gamma = \frac{\partial P_\perp}{\partial \psi} \;/\; \frac{\partial^3 P_\perp}{\partial \zeta^3},$$
$$\ell = \left(\frac{\partial^3 P_\perp}{\partial \zeta^3} \;/\; \frac{1}{8\pi} H_c^2 \right) L.$$

Эквивалентное уравнение:

$$\frac{1}{6}\zeta^3 - \frac{\alpha z}{\ell}\zeta = \frac{z}{\ell} - \psi. \tag{5}$$



Графическое решение уравнений (4) при фиксированном $\psi > 0$ (слева) и Eq. (5) при фиксированном $z > 0$ (справа). Ветвь ζ_1 соответствует области внутри магнитной дыры вблизи оси z, а ветвь ζ_3 — вне дыры.

$$r^2 = a^2\left[\psi_c - \psi\right] + a^2\frac{\Delta b}{b_c}\int_{\psi_c}^{\psi} \zeta(\psi, z)\;\mathrm{d}\psi.$$

Радиус магнитной дыры:

$$r_b^2 = a^2\frac{(z_c - z)}{\ell} + \frac{2^{3/2}\alpha^{3/2}a^2}{3}\frac{(z_c^{3/2} - z^{3/2})}{\ell^{3/2}} + \mathcal{O}(\Delta b),$$

Внутри дыры:

$$r^2 = a^2\left[\psi_c - \psi\right] + a^2\frac{\Delta b}{b_c}\left[\frac{\alpha z}{2\ell}\left(\zeta_1^2 - \zeta_{1c}^2\right) - \frac{1}{8}\left(\zeta_1^4 - \zeta_{1c}^4\right)\right].$$

Снаружи:

$$r^2 = a^2\left[\psi_c - \psi\right] + a^2\frac{\Delta b}{b_c}\left[\frac{\alpha z}{2\ell}\left(\zeta_3^2 - \zeta_{1c}^2\right) - \frac{1}{8}\left(\zeta_3^4 - \zeta_{1c}^4\right) - \frac{9}{2}\frac{\alpha^2 z^2}{\ell^2}\right].$$

Параксиальное приближение применимо, если, *во-первых*,

$$|\partial r/\partial z| \ll 1.$$

Это условие выполняется на достаточном удалении от «носика» параболической поверхности разрыва, а именно если

$$z_c - z \gg z_c \, (a/L)^2 \,.$$

Вблизи «носика», параксиальное приближение неприменимо. Подобная ситуация имеет место в примере К. Лотова [Lot96].

Во-вторых, необходимо, чтобы

$$\left\{B^2 + 8\pi p_\perp\right\} \,/\, B^2 \ll 3\,(\Delta b/b_c)\,\sqrt{2\alpha z/\ell},$$

иначе нельзя использовать приближенное уравнение

$$p_\perp(\Phi, B) + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{H^2(z)}{8\pi}$$

вместо точного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(B^2 + 8\pi p_\perp\right) = \kappa\,\left(2B^2 + 8\pi p_\perp - 8\pi p_\parallel\right).$$

На поверхности разрыва

$$\kappa = \{\partial r/\partial z\}\,\delta(z - z_b),$$

$$\{\partial r/\partial z\} \approx -\frac{a^2}{2r_b\ell}\frac{\Delta b}{b_c}\,(\zeta_3 - \zeta_1) = -\frac{3a}{2\ell}\frac{\Delta b}{b_c}\frac{\sqrt{2\alpha z}}{\sqrt{z_c - z}}.$$

$$\left\{\frac{B^2 + 8\pi p_\perp}{2B^2 + 8\pi p_\perp - 8\pi p_\parallel}\right\} = \int_{r_b(z)-0}^{r_b(z)+0} \kappa\,dr.$$

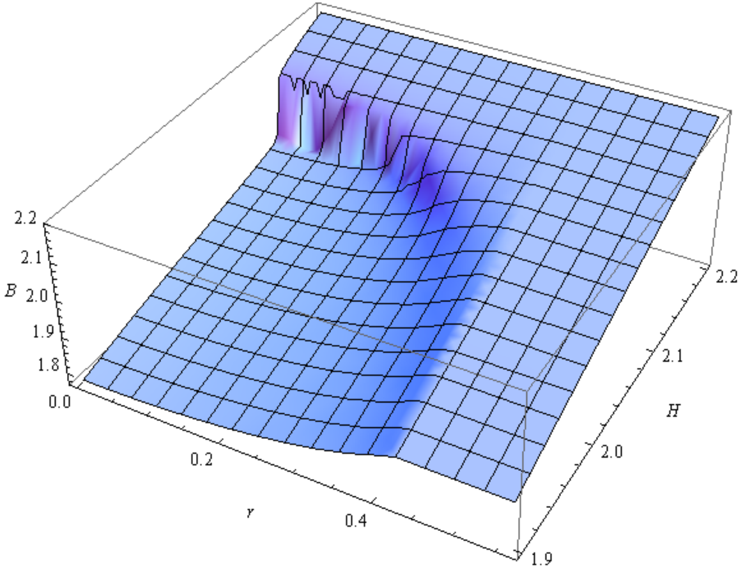
$$z_c - z \gg \frac{a^2}{4\ell} \sim \frac{a^2}{4(\Delta b/b_c)L}.$$

Это более жёсткое условие.

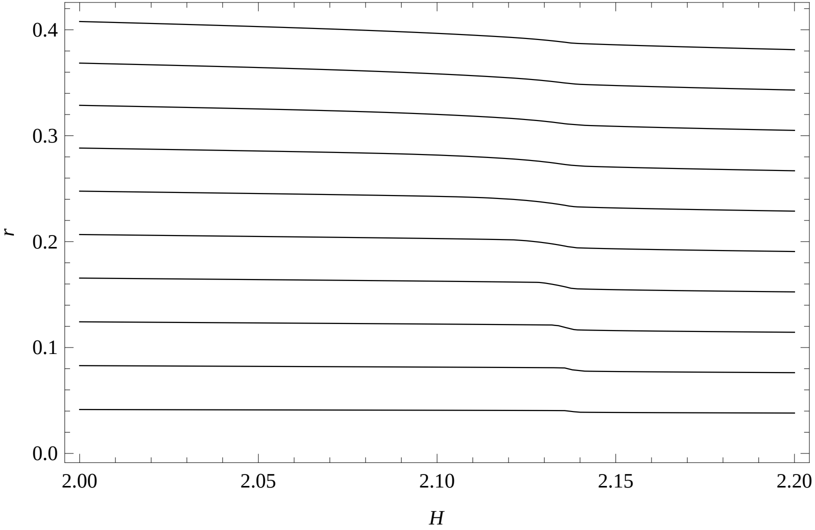
Область применимости имеется, если

$$\ell \gg a.$$

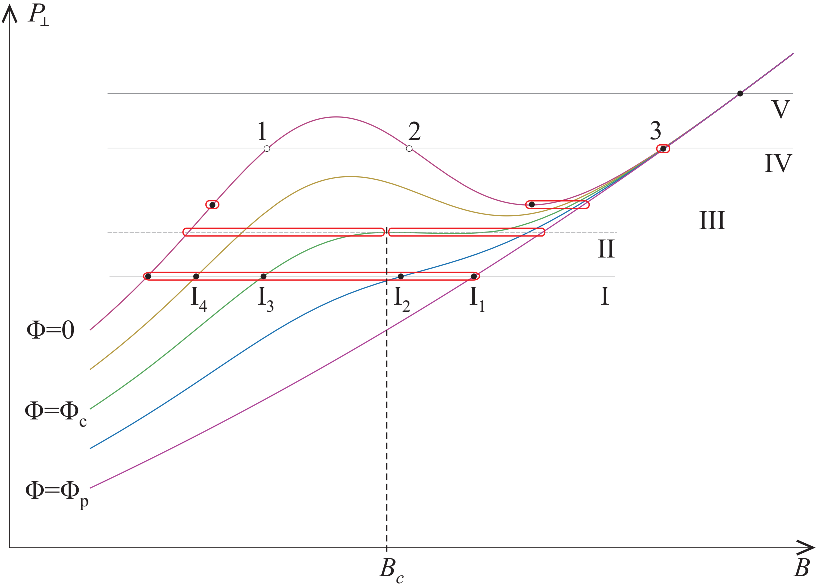
Далее. . .



$$b_* = 2,\ \Delta b = 0.1,\ \Phi_p = 1,\ B_0 = 1$$


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
r
2.00
2.05
2.10
2.15
2.20
H

Далее...



$P_\perp$
1
2
3
V
IV
III
II
I
I_4
I_3
I_2
I_1
$\Phi=0$
$\Phi=\Phi_c$
$\Phi=\Phi_p$
B_c
B

При выборе минимального корня вместо максимального магнитная дыра будет меньше:

$$r_b^2 = a^2 \frac{(z_c - z)}{\ell} - \frac{2^{3/2}\alpha^{3/2}a^2}{3}\frac{(z_c^{3/2} - z^{3/2})}{\ell^{3/2}} + \mathcal{O}(\Delta b),$$

В рамках нашего приближения энергия плазмы с магнитными дырами двух разных типов одинакова.

Далее. . .

1. Зеркальная неустойчивость
2. Равновесие плазмы за порогом зеркальной неустойчивости
3. Магнитная дыра с мелким дном
4. Численный расчёт
5. Магнитная дыра №2
6. Выводы

- Неоднородность магнитного поля стабилизирует зеркальную неустойчивость. (?)
- Выше порога зеркальной неустойчивости существуют два равновесных состояния, отвечающие выбору максимального и минимального корней уравнения $P_\perp(B,\Phi) = H^2/8\pi$. Между ними возможны переходы, сопровождающиеся выбросом плазмы в центральную часть ловушки.
- Данная модель не учитывает эффекты конечного ларморовского радиуса.

- А. А. Веденов, Е. П. Велихов, and Р. З. Сагдеев.
  Устойчивость плазмы.
  УФН, 73(4):701–766, Апрель 1961.

- Harold Grad.
  The guiding center plasma.
  Magneto-Fluid and Plasma Dynamics; Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, XXVIII:162, 1967.

- R. L. Kaufmann, J. T. Horng, and A. Wolfe.
  Large amplirude hydromagnetic waves in the inner magnetosheath.
  J. Geophys. Res., 75:4666, 1970.

- I. M. Lansky.
  On the paraxial equilibrium of the finite β plasma in open magnetic configuration.
  Budker INP 93–96, Budker INP, Novosibirsk, 1993.

- K. V. Lotov.
  Spontaneous formation of zero magnetic field region near the axis of a high-β mirror device.
  Phys. Plasmas, 3:1472, 1996.

- W.A. Newcomb.
  Equilibrium and stability of collisionless systems in the paraxial limit.
  J. Plasma Physics, 26(3):529–584, 1981.

- K. Sperveslage, F. M. Neubauer, K. Baumgärtel, , and N. F. Ness.
  Magnetic holes in the solar wind between 0.3 au and 17 AU.
  Nonlinear Processes Geophys., 7:191–200, 2000.

- W. B. Thompson.
  An Introduction to Plmma Physics.
  Pergamon, New York, second revised impression edition, 1964.

- T. L. Zhang, W. Baumjohann, C. T. Russell, L. K. Jian, C. Wang, J. B. Cao, M. Balikhin, X. Blanco-Cano, M. Delva, and M. Volwerk.
  Mirror mode structures in the solar wind at 0.72 AU.
  J. Geophys. Res., 114:A10107, 2009.