

# О стабилизации дрейфово-циклотронной конусной и двугорбой неустойчивостей в открытой ловушке

И.А. Котельников, И.С. Черноштанов, В.В. Приходько



ИЯФ СО РАН, Новосибирск, Россия

Семинар плазменных лабораторий  
10 октября 2017 г.

# План доклада

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты
- 3 Коротковолновое приближение
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний
- 5 Критерий устойчивости
- 6 Выводы и следствия



# Далее...

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты
- 3 Коротковолновое приближение
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний
- 5 Критерий устойчивости
- 6 Выводы и следствия



# Drift-Cyclotron Loss-Cone instability: основные факты I

- Неустойчивость DCLC теоретически предсказана Постом и Розенблютом [Phys. Fluids 1966]. Иногда упоминают Михайловского [Nucl. Fusion 1965], по-моему мнению, незаслуженно.
- DCLC возникает в открытых ловушках, если удержание плазмы осуществляется в кинетическом режиме. Этот режим характеризуется тем, что длина свободного пробега частиц плазмы значительно превышает длину ловушки, что приводит к опустошению конуса потерь.
- Физическим механизмом неустойчивости DCLC является раскачка ионами дрейфовых колебаний электронного сгустка, а источником энергии — инверсная заселённость уровней энергии в популяции ионов в ловушке с конусом потерь.



## Drift-Cyclotron Loss-Cone instability: основные факты II

- DCLC активно исследовалась в 1960х-80х годах. Итоги исследований суммированы Постом [Nucl. Fusion 1987]. Более поздних публикаций практически нет.
- Частота DCLC порядка ионной циклотронной частоты, инкремент может быть больше ионной циклотронной частоты.
- DCLC является неустойчивостью потенциальных возмущений желобкового типа ( $k_{\parallel} = 0$ ).
- Длина волны DCLC меньше ларморовского радиуса ионов.
- Неустойчивость DCLC развивается, если градиент плотности превышает пороговое значение.
- В приближении однородного магнитного поля пороговое значение градиента чрезвычайно мало. Система устойчива, если отношение радиуса столба плазмы к величине ларморовского радиуса быстрых ионов превышает несколько сотен.



## Drift-Cyclotron Loss-Cone instability: основные факты III

- Учёт эффектов неоднородности магнитного поля и конечного бета повышает пороговое значение градиента плотности в несколько раз, но всё равно пороговое отношение радиального размера плазмы к ларморовскому радиусу достигает приблизительно сотни.
- Напуск тёплой плазмы в конус потерь является эффективным средством стабилизации DCLC (Post 1967, Berk 1968). Однако в некоторых случаях требуемая доля тёплой плазмы достигает нескольких десятков процентов.
- Параметры плазмы должны быть выбраны с учётом условий стабилизации неустойчивости DH (Double-Hump) колебаний. Сами эти условия в имеющейся литературе не конкретизированы.



## Drift-Cyclotron Loss-Cone instability: основные факты IV

- В некоторых экспериментах (Иоффе и др. 1971–75 — ПР-6, ПР-7) DCLC появлялась только после некоторого устойчивого периода. Это явление было объяснено тем, что из-за контакта с торцами (с плазменной пушкой) конус потерь был на начальном этапе достаточно заполнен плазмой.
- В других экспериментах (Канаев 1979 — ПР-6) для стабилизации DCLC в конус потерь инжектировался поток тёплой плазмы. Также использовался ЭЦР нагрев на полпути до пробок, чтобы создать популяцию анизотропных электронов. Они создавали локальное понижение потенциала, куда захватывались тёплые ионы.



## Drift-Cyclotron Loss-Cone instability: основные факты V

- В других экспериментах (Coensgen et al 1974-75 — 2XII, 2XIIB) проявления DCLC наблюдались после выключения нейтральной инжекции. Для стабилизации DCLC в слаботочном режиме была включена пушка, которая использовалась для создания мишенной плазмы. Она инжектировала поток тёплой плазмы. Также использовался gas box.
- Плещущиеся ионы косвенно содействуют стабилизации DCLC. Эффект был объяснён тем, что вблизи точек остановки плещущихся ионов образуются пики потенциала, между которыми захватываются тёплые ионы. (Kesner 1973)
- Существуют естественные механизмы стабилизации DCLC путём заполнения конуса потерь. В результате устанавливается околопороговое (marginal) равновесие. (Baldwin et al 1976)





## Drift-Cyclotron Loss-Cone instability: основные факты VI

- Увеличение доли тёплых ионов понижает инкремент неустойчивости и сужает спектр неустойчивых частот. В экспериментах на 2XIIВ наблюдались колебания на частоте чуть ниже ионной циклотронной. Высокие гармоники наблюдались с гораздо меньшей интенсивностью. (Turner et al 1977, Ng 1979)
- Экспериментально проверено, что для подавления DCLC тёплые ионы должны быть того же сорта, что и горячие ионы. Канаев сообщил (1979), что добавление 5% водорода стабилизировало DCLC, а добавление 5% аргона — нет. Кажется, что подробных расчётов DCLC в плазме с двумя сортами ионов нет.



# Далее...

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты**
- 3 Коротковолновое приближение
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний
- 5 Критерий устойчивости
- 6 Выводы и следствия



## Double-Hump instability: основные факты I

- Электростатическая «Двугорбая» неустойчивость (Double-Hump, DH) описывается тем же дисперсионным уравнением, что и DCLC. Название связано с тем, что функция распределения ионов или электронов имеет два максимума.
- Возникает в плазме с конусом потерь при наличии добавки тёплых ионов, если их доля превышает критическое значение.
- В приближении низкой температуры критическое значение доли тёплых ионов вычислено Пирлстейном, Розенблютом и Чангом [Phys. Fluids 1966].
- Частота DH порядка ионной циклотронной частоты, инкремент может быть больше ионной циклотронной частоты.



## Double-Hump instability: основные факты II

- В отличие от DCLC, неустойчивость ДН возникает даже в однородной плазме.
- Для подавления неустойчивости ДН нужно повышать температуру тёплых ионов, чтобы «замазать» провал между горбами на функции распределения.
- If certain critical density ratios were satisfied, a strongly excited high-frequency instability appeared, resulting in the smoothing out and coalescing of the distribution functions, thereby leading to the self-destruction of the instability.



# Далее...

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты
- 3 Коротковолновое приближение**
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний
- 5 Критерий устойчивости
- 6 Выводы и следствия



Дисперсионное уравнение потенциальных желобковых ( $k_{\parallel} = 0$ ) колебаний в коротковолновом ( $k \rightarrow \infty$ ) низкочастотном ( $\omega \ll \Omega_w$ ) приближении:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} + \frac{\omega_{pw}^2}{\Omega_w^2} = \frac{\omega_{ph}^2}{\omega \Omega_h} \frac{k\eta}{k^2} - \frac{\omega_{ph}^2}{k^2} \frac{\omega}{k v_3^3} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi \omega}{\Omega_h} \right). \quad (1)$$

Здесь

$$\eta = \frac{1}{n_h} \frac{dn_h}{dx}, \quad v_3 = \left[ \int \frac{F_h}{v_{\perp}^3} \pi dv_{\perp}^2 \right]^{-1/3},$$

$$F_h(v_{\perp}) = \int f_h(v_{\perp}, v_{\parallel}) dv_{\parallel}, \quad \int_0^{\infty} F_h(v_{\perp}) \pi dv_{\perp}^2 = 1$$

и добавлено третье слагаемое в левой части к уравнению, которое было исследовано Постом и Розенблютом.



Вводим безразмерные параметры:

$$\Omega_w = \Omega_h = \Omega_p/A, \quad A = m_i/m_p, \quad \Omega_p = eB/m_p c,$$

$$\omega_{ph}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \alpha}, \quad \omega_{pw}^2 = \frac{\alpha \omega_{pi}^2}{1 + \alpha}, \quad \omega_{pi}^2 = \omega_{ph}^2 + \omega_{pw}^2,$$

$$v = \omega/\Omega_p, \quad \mu = m_e/m_p, \quad \gamma = \Omega_e^2/\omega_{pe}^2,$$

$$u_3 = v_3/v_p, \quad \rho_p = v_p/\Omega_p, \quad \kappa = k\rho_p, \quad \tilde{\eta} = \eta\rho_p.$$

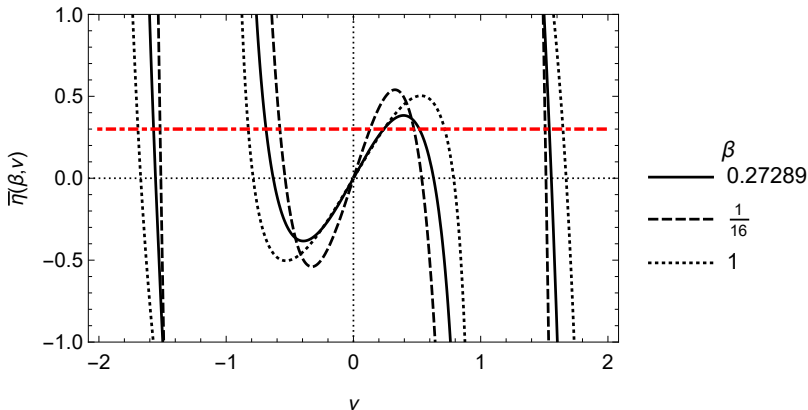
Приняв во внимание, что  $\Omega_p = -\mu\Omega_e$  и  $\omega_{pi}^2 = \mu\omega_{pe}^2/A$ , получим

$$(Au_3^3/G^2)^{1/3} \tilde{\eta} = \frac{\beta v + v^2 \operatorname{ctg}(\pi Av)}{\beta^{2/3}} \equiv \bar{\eta}(\beta, v), \quad (2)$$

где

$$G = (1 + \alpha)(1 + \gamma)\mu + \alpha A, \quad \beta = \kappa^3 u_3^3 AG.$$





**Figure 1:** График функции  $[\beta\nu + \nu^2 \operatorname{ctg}(\pi A\nu)]/\beta^{2/3}$  при  $A = 1$  и разных значениях параметра  $\beta$  (показаны на рисунке). Комплексные корни возникают, если пунктирная линия опускается ниже локального минимума. Сплошная кривая имеет экстремумы, ближе всего расположенные к оси абсцисс.





Абсолютный минимум градиента плотности, при котором начинают возникать неустойчивые решения дисперсионного уравнения, определяется из совместного решения уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \bar{\eta}(\beta, \nu) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \bar{\eta}(\beta, \nu) = 0. \quad (3)$$

Численное решение даёт

$$\beta = 0.273/A, \quad \nu = 0.394/A.$$

В размерных величинах

$$\eta_{\text{crit}} = 0.383 \frac{G^{2/3}}{A^{5/3} \rho_3}, \quad k = \frac{0.649}{A^{2/3} G^{1/3} \rho_3}, \quad \omega = 0.394 \frac{\Omega_p}{A}, \quad (4)$$

где  $\rho_3 = v_3/\Omega_p$ ,  $G = (1 + \alpha)(1 + \gamma)\mu + \alpha A$ .



## Критерий стабилизации DCLC в приближении $k \rightarrow \infty$

Для стабилизации DCLC необходимо, чтобы было выполнено условие  $|\eta| < \eta_{\text{crit}}$ . Его можно переписать в виде

$$G > 4.216 A^{5/2} |\eta \rho_3|^{3/2}. \quad (5)$$

При отсутствии холодных ионов  $G \sim \mu = m_e/m_p \ll 1$  и неустойчивость DCLC могла бы быть стабилизирована только в плазме чудовищно большого радиуса, при

$$a = 1/|\eta| \gtrsim 2.5 (m_p/m_e)^{2/3} A^{5/3} \rho_3.$$

Добавление даже небольшой доли холодных ионов с  $\alpha \sim \mu$  существенно увеличивает параметр  $G = (1 + \alpha)(1 + \gamma)\mu + \alpha A$  и смещает границу устойчивости. При  $\alpha \gg \mu$  DCLC устойчива, если

$$\alpha > 4.216 (A \rho_3 / \alpha)^{3/2}. \quad (6)$$



## Критерий стабилизации DH в приближении $k \rightarrow \infty$

Критерий устойчивости Double-Hump колебаний получен в работе [Pearlstein, Rosenbluth, Chang // Phys. Fluids 1966]:

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} < \frac{5}{4} (1 + \gamma) \mu. \quad (7)$$

Критерии (6) и (7) противоречат один другому, что фактически означают невозможность стабилизации потенциальных возмущений в открытой ловушке.

Для получения практически полезного критерия необходимо учесть температуру тёплых ионов.



# Далее...

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты
- 3 Коротковолновое приближение
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний**
- 5 Критерий устойчивости
- 6 Выводы и следствия



Стандартным методом интегрирования по траекториям получаем дисперсионное уравнение

$$1 = \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int J_l^2(\xi) \left( 2 \frac{\partial F_a}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{k_{\perp} \eta}{\omega \Omega_a} F_a \right) \frac{l \Omega_a}{\omega + l \Omega_a} \pi dv_{\perp}^2, \quad (8)$$

где  $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_a$ . Для его решения написана программа на языке Fortran (И. Черноштанов). При помощи тождества

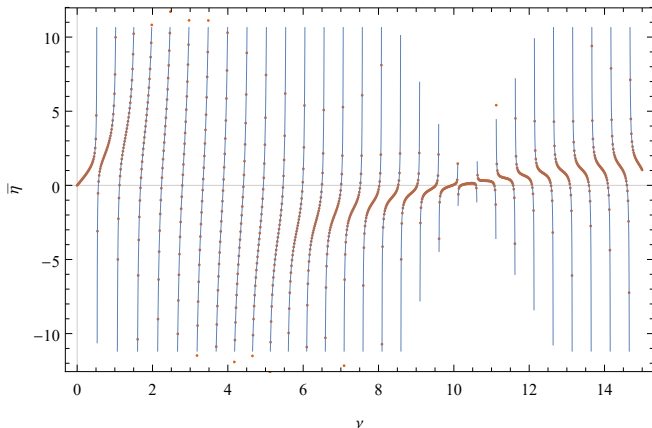
$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{l J_l(\xi)^2}{v + l} = 1 - \pi v \frac{J_{-v}(\xi) J_v(\xi)}{\sin(\pi v)}$$

удаётся выполнить суммирование ряда по индексу  $l$ :

$$1 = \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int \left( 2 \frac{\partial F_a}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{k_{\perp} \eta}{\Omega_a \omega} F_a \right) \left( 1 - \pi v \frac{J_v(\xi) J_{-v}(\xi)}{\sin(\pi v)} \right) \pi dv_{\perp}^2. \quad (9)$$

Для анализа этого уравнения написана программа для Wolfram Mathematica (И. Котельников).





**Figure 2:** График функции  $\bar{\eta}(x, \nu)$  при  $\alpha = 2/3, A = 2, R = 6, u_G = 0.5, u_w = 0.05$  и  $\kappa = 5$  (слева) и  $\kappa = 50$  (справа): точки — расчёт программой Fortran, сплошная линия — расчёт Wolfram Mathematica.

Проверено, что обе программы дают одинаковый результат.



Тёплые ионы моделируем функцией распределения Максвелла:

$$F_M(u) = \frac{1}{\pi u_w^2} e^{-u^2/u_w^2}. \quad (10)$$

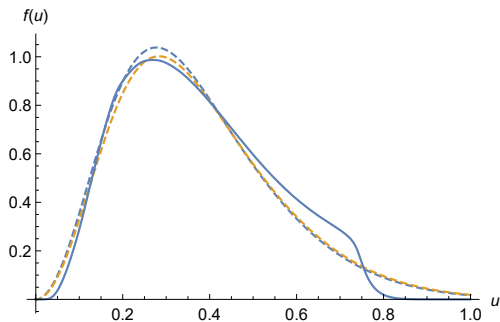
Функцию распределения быстрых ионов моделируем функцией Гервера:

$$F_G(u) = \frac{R + 1}{\pi u_G^2 (R - 1)} \left( e^{-(R+1)u^2/R u_G^2} - e^{-(R+1)u^2/u_G^2} \right). \quad (11)$$

При этом интегралы в уравнении (8) выражаются через функции Бесселя мнимого аргумента ( $I_l$ ), а в уравнении (9) — через гипергеометрическую функцию ( ${}_2F_2$ ).

Здесь и далее  $u = v_{\perp}/v_p$  обозначает безразмерную скорость; аналогично  $u_w = v_w/v_p$ ,  $u_G = v_G/v_p$ .





**Figure 3:** Сравнение функции Юрова (сплошная линия) и функции Гервера (синяя штриховая линия) при  $u_G = 0.5$  и  $R = 6$ . Эти значения близки к значению  $R = 5.874$ ,  $u_G = 0.508$ , которые найдены методом численной подгонки (оранжевая штриховая линия). Реальное пробочное отношение было 16.314. Резкое уменьшение функции распределения при  $u \approx 0.7$  соответствует энергии нейтральной инжекции.





# Далее...

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты
- 3 Коротковолновое приближение
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний
- 5 Критерий устойчивости**
- 6 Выводы и следствия



Из дисперсионного уравнения выражаем  $\bar{\eta}(v, \kappa)$ . Равенство

$$\bar{\eta}(v, \kappa) = (\rho_p/n)(\partial n/\partial x) \quad (12)$$

будет уравнением для определения (безразмерной) частоты  $v$  при заданном значении градиента плотности  $\partial n/\partial x$  и (безразмерного) волнового числа  $\kappa$ . Затем исследуем поведение экстремумов

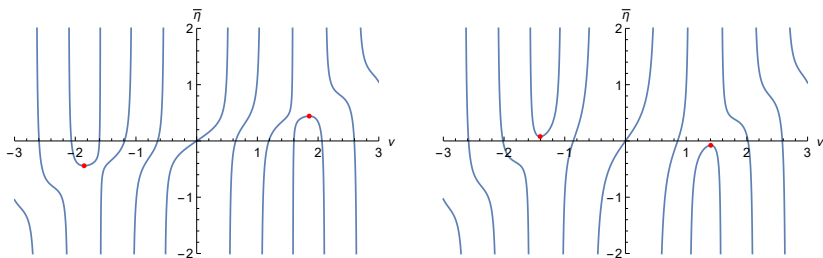
$$\frac{\partial}{\partial v} \bar{\eta}(v, \kappa) = 0 \quad (13)$$

при изменении  $\kappa$ . Уравнение (13) определяет частоту  $v(\kappa)$  на границе устойчивого состояния, а уравнение

$$\bar{\eta}_*(\kappa) = \bar{\eta}(v(\kappa), \kappa) \quad (14)$$

определяет при заданном значении  $\kappa$  критическое значение  $\bar{\eta}_*(\kappa)$ , соответствующее возникновению неустойчивых решений.

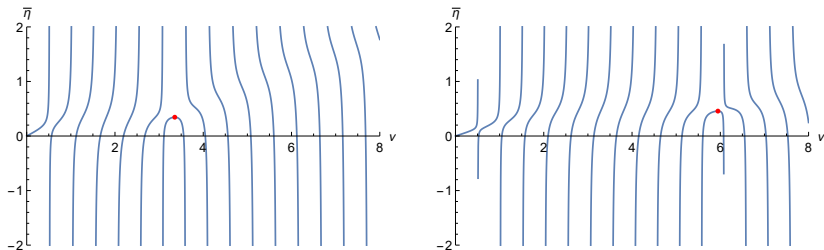




**Figure 4:** График функции  $\bar{\eta}(v, k)$  при  $\alpha = 0.1$ ,  $u_G = 0.5$ ,  $A = 2$ ,  $\kappa = 10$ :  
 слева —  $u_w = 0.1$ , неустойчивость DCLC;  
 справа —  $u_w = 0.05$ , неустойчивость DH.

(#1) По сравнению с приближением Поста-Розенблюта появляется новый тип экстремума, который соответствует неустойчивости типа Double-Hump.

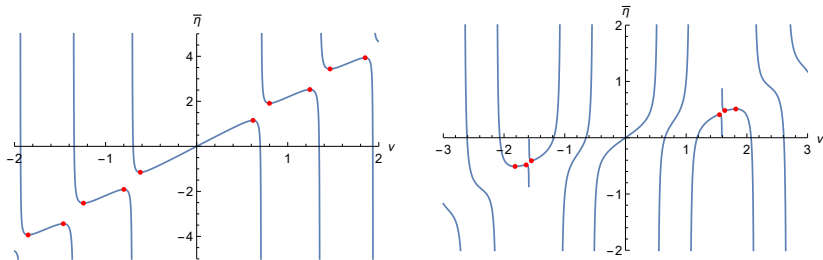




**Figure 5:** График функции  $\bar{\eta}(v, k)$  при  $\alpha = 0.1$ ,  $u_w = 0.1$ ,  $u_G = 0.5$ ,  $A = 2$ : слева —  $\kappa = 20$ ;  
справа —  $\kappa = 40$ .

(#2) Неустойчивость становится высокочастотной.





**Figure 6:** График функции  $\bar{\eta}(v, k)$  при  $\alpha = 0.1$ ,  $u_w = 0.1$ ,  $u_G = 0.5$ ,  $A = 2$ : слева —  $\kappa = 2$ ; справа —  $\kappa = 9.5$ .

(#3) Может быть много экстремумов. Выбираем тот, который ниже всего.

(#4) Изменение частоты при изменении волнового числа происходит немонотонно.



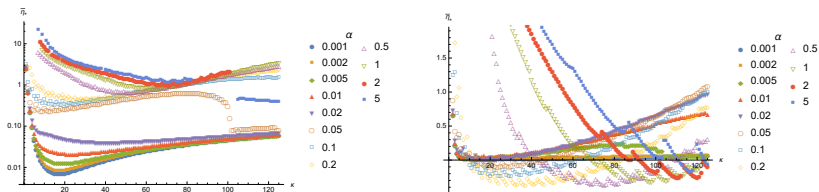


Figure 7: График функции  $\min[\bar{\eta}_*(\kappa)]$  при  $u_g = 0.5$ ,  $A = 2$ ,  $R = 6$  и разных значениях  $\alpha$  (показаны на рисунке) при  $u_w = 0.10$  (слева, логарифмический масштаб, нет DH) и  $u_w = 0.05$  (справа, линейный масштаб, есть DH).

При выбранных параметрах  $R = 6$ ,  $u_G = 0.5$ ,  $A = 2$  неустойчивость Double-Hump исчезает при

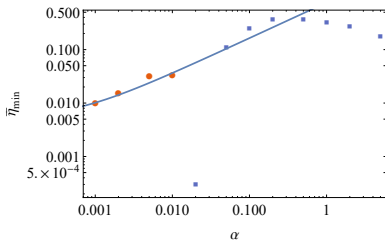
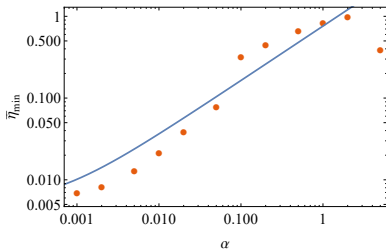
$$u_w > 0.0721,$$

т.е. при температуре тёплых ионов в 1% от энергии инжекции.



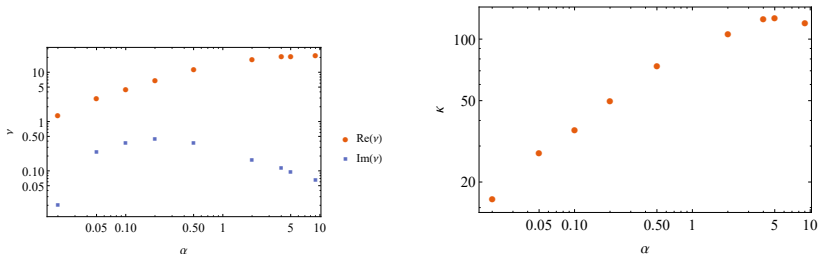
Границу устойчивости определяем по функции

$$\bar{\eta}_{\min} = \min_{\kappa} \bar{\eta}_*(\kappa).$$



**Figure 8:** Зависимость  $\bar{\eta}_{\min}$  от доли тепловых ионов  $\alpha$  при  $u_G = 0.5$ ,  $R = 6$ ,  $A = 2$ ,  $u_w = 0.1$  (слева) и  $u_w = 0.05$  (слева). Сплошная линия изображает границу устойчивости в коротковолновом приближении.

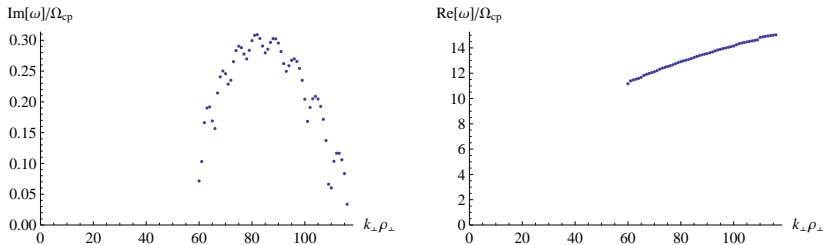




**Figure 9:** Частота (слева) и волновое число (справа) наиболее неустойчивых колебаний в зависимости от доли тёплых ионов при  $R = 6$ ,  $u_G = 0.5$ ,  $u_W = 0.05$ ,  $A = 2$  и нулевом градиенте  $\partial n / \partial x = 0$ .







**Figure 10:** Мнимая (слева) и вещественная (справа) части частоты в зависимости от волнового числа при  $R = 6$ ,  $u_G = 0.5$ ,  $u_w = 0.05$ ,  $\alpha = 2/3$  и нулевом градиенте плотности.

Мы обнаружили, что неустойчивость DCLC становится высокочастотной ( $\omega \gtrsim \Omega_i$ ) в коротковолновом пределе, если  $\alpha \gtrsim 0.05$ . Коротковолновый предел при был проанализирован в пионерской статье Поста и Розенблюта [Phys. Fluids 1966], где для случая  $\alpha = 0$  была обнаружена низкочастотная неустойчивость ( $\omega \approx 0.4\Omega_i$ ).



# Далее...

- 1 DCLC instability: основные факты
- 2 DH instability: основные факты
- 3 Коротковолновое приближение
- 4 Дисперсионное уравнение потенциальных колебаний
- 5 Критерий устойчивости
- 6 Выводы и следствия**



# Выводы I

Перечислим выводы из наших расчётов.

- Мы не учитывали эффекты конечного бета и неоднородности магнитного поля. Согласно литературным данным, эти эффекты расширяют зону устойчивости. Таким образом, наши расчёты указывают достаточное условие устойчивости.
- В коротковолновом пределе получен простой критерий устойчивости колебаний типа DCLC.
- Получена новая форма дисперсионного уравнения потенциальных колебаний неоднородной плазмы, в которой выполнено суммирование ряда по функциям Бесселя с целочисленным индексом. Результат выражен через функцию Бесселя с индексом, равным отношению частоты колебаний к циклотронной частоте.



## Выводы II

- В частном случае, когда функцию распределения по поперечным скоростям можно выразить через сумму максвелловских функций, интегралы в дисперсионном уравнении выражаются через гипергеометрическую функцию вида  ${}_2F_2$ .
- Выполнен анализ дисперсионного уравнения для функции распределения, взятой из результатов численного моделирования. Установлено, что для стабилизации неустойчивости типа Double-Hump температура тёплых ионов должна превышать 1% от энергии нейтральной инжекции.
- В зависимости от доли тёплых ионов вычислено критическое значение градиента плотности плазмы, ниже которого устойчивы колебания типа DCLC.



## Выводы III

- Сравнение с часто цитируемой статьей Гервера [Phys. Fluids 1976], где предложены степенные зависимости частоты и инкремента DCLC колебаний от параметров плазмы, показало лишь частичное совпадение.
- Неустойчивость DCLC становится высокочастотной в коротковолновом пределе, если  $\alpha \gtrsim 0.05/A$ .  
Коротковолновый предел был проанализирован в пионерской статье Поста и Розенблюта [Phys. Fluids 1966] для случая  $\alpha = 0$ , где была предсказана низкочастотная неустойчивость.



## Продолжение следует...

- Необходимо выполнить анализ устойчивости потенциальных колебаний в плазме с разными изотопами.
- Ожидается, что D-T плазма будет менее устойчива, чем D-D плазма.
- Если эти опасения подтвердятся, предсказания теории можно будет проверить в экспериментах с H-D плазмой.

