

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное агентство  
по образованию**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**НОВОСИБИРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**физический факультет**

**Квалификационная работа на соискание  
степени магистра**

**Кафедра физики плазмы**

**Аракчеев Алексей Сергеевич**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ  
НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ МАСШТАБНОГО ПОДОБИЯ**

**Научный руководитель:**

**д-р физ.-мат. наук,**

**в.н.с. лаб. 9-0 ИЯФ СО РАН**

**К.В. Лотов**

**Новосибирск – 2010 год**

## Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель	4
3	Аналогия с фракталами	7
4	Дополнительное предположение	8
5	Заключение	10
6	Благодарности	11

# 1 Введение

В большинстве термоядерных установок пыль появляется из-за взаимодействия плазмы со стенками. Частицы пыли создают потенциальные проблемы для удержания плазмы: уменьшение температуры плазмы, поглощение трития и т.д. Поэтому необходимо исследовать механизмы образования пыли и ее свойства. Распределение по размерам – важная характеристика пыли, так как оно определяет площадь поверхности пыли. Последняя, в свою очередь, определяет скорость испарения пыли и скорость поглощения трития. По нашему представлению, на данный момент не существует аналитической модели, объясняющей наблюдаемые в эксперименте распределения пыли по размерам.

Для аппроксимации экспериментальных результатов обычно используют два распределения: логарифмически нормальное и степенное (распределение Юнга) [1–3]. В ряде экспериментов [2–6] было получено распределение Юнга для пыли вольфрама и графита в диапазоне размеров от нанометра до десятков микрон (Рис. 1). Показатели степени этих распределений попадают в диапазон от  $-3.3$  до  $-2.1$ . Степенное распределение наблюдалось как в термоядерных установках [7], так и в установках предназначенных специально для исследования эрозии материалов [8].

Степенное распределение по размерам было обнаружено также у атмосферной пыли [1]. Это распределение объясняется моделью коагуляции частиц [9]. Результатом коагуляции является образование агломераций, распределенных по размерам степенным образом. В плазменных установках степенное распределение по размерам наблюдалось не только для агломераций, но и для одиночных пылевых частиц в диапазоне размеров от нанометра до нескольких микрон [2]. Значит, модель коагуляции не объясняет распределение по размерам пыли во всем диапазоне размеров.

Обычно отличают четыре механизма образования пыли в плазменных установках: отслаивание, хрупкое разрушение, конденсация из перенасыщенного пара и рост из углеводородных молекул [10]. Для механизмов образования пыли из газовой фазы (конденсация из перенасыщенного пара и рост из углеводородных молекул) степенное распределение не характерно [11]. Характерный размер пыли, образовавшейся в результате отшелушивания, больше микрона. В этой работе мы покажем, что хрупкое разрушение может обеспечивать степенное распределение по размерам.

Хрупкое разрушение изучалось теоретически и экспериментально [13–18]. Степенное распределение для одиночных частиц наблюдалось в широком диапа-

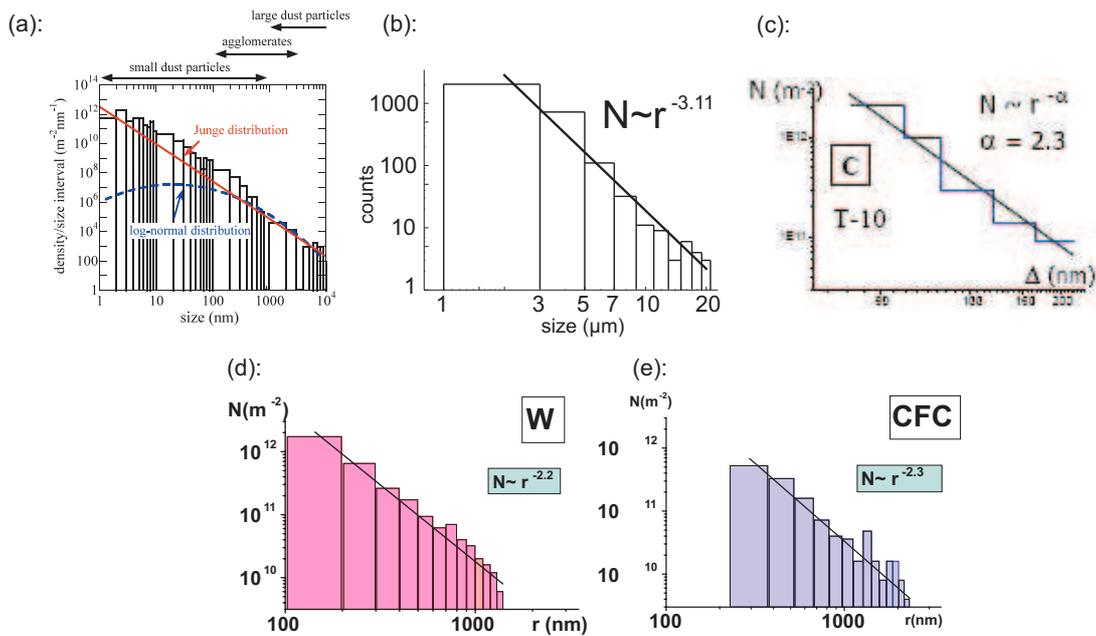


Рис. 1: Распределения по размерам пыли, полученные на (a) стеллараторе LHD (из [2]), (b) открытой ловушке ГОЛ-3 (данные из [6]), (c) токамаке Т-10 (из [4]), (d,e) ускорителе плазмы КСПУ (из [5])

зоне размеров между двумя характерными размерами: размер зерна материала и межатомное расстояние. Это подсказывает, что закон дробления материала не зависит от масштаба. Более того, степенное распределение, отличающееся отсутствием характерного размера, само указывает на такой вывод. Мы найдем, какие распределения по размеру могут реализовываться при предположении масштабного подобия, и покажем, что это степенное распределение с показателем в диапазоне от  $-4$  до  $-1$ . При применении дополнительных предположений геометрического характера можно показать, что этот показатель близок к  $-3$ . Мы также покажем связь обсуждаемой модели с теорией фракталов и найдем соотношение между показателем степени распределения по размерам и фрактальной размерностью.

## 2 Математическая модель

Сначала сформулируем задачу математически. Пылинки, образовавшиеся в результате хрупкого разрушения, являются фрагментами твердого тела. Значит, тело должно быть разделено на фрагменты согласно какому-то закону. В предположении масштабного подобия этот закон должен не зависеть от размера. Будем

мысленно удалять эти фрагменты из тела один за другим в порядке уменьшения их размера и будем нумеровать их последовательно индексом  $n$ . Функция распределения по размерам не будет зависеть от формы начального тела только для фрагментов, размер которых много меньше характерных размеров начального тела. Поэтому мы будем предполагать  $n \gg 1$ .

Обозначим объем и площадь поверхности тела, остающегося после удаления  $n$ -ого фрагмента,  $V_n$  и  $S_n$ . Можно написать рекуррентные выражения на  $V_n$  и  $S_n$ , используя характерный линейный размер  $n$ -ого фрагмента  $r_n$ :

$$V_n = V_{n-1} - c_1 r_n^3, \quad (1)$$

$$S_n = S_{n-1} + c_2 r_n^2, \quad (2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – константы, зависящие от формы удаляемого фрагмента. Из-за гипотезы масштабного подобия в дальнейшем мы будем предполагать, что эти константы не зависят от размера и номера фрагмента. Константа  $c_1$  положительная, так как объем тела уменьшается при удалении фрагмента. Константа  $c_2$  может быть как положительной, так и отрицательной.

Для замыкания рекуррентной схемы необходимо выразить  $r_{n+1}$  через  $V_n$  и  $S_n$ . После удаления большого количества фрагментов размер следующего фрагмента становится много меньше характерных размеров начального тела. Структура остающегося тела перестает зависеть от формы начального тела и определяется формой удаляемых фрагментов. При увеличении  $n$  локальная структура тела остается самоподобной, так как закон построения одинаков на всех масштабах. Отличается только размер элементов структуры. Из гипотезы подобия следует, что размер удаляемого фрагмента пропорционален размеру этих элементов. Линейный размер этих элементов может быть определен как отношение его объема к площади поверхности. При таком определении результат не зависит от количества таких элементов, так как и то и другое зависит от их количества линейно. Таким образом, мы получаем требовавшееся выражение:

$$r_{n+1} = c_3 V_n / S_n, \quad (3)$$

где  $c_3$  – положительная константа, зависящая от формы удаляемого фрагмента.

Для анализа удобно использовать последовательность  $q_n = S_n^3 / V_n^2$  вместо последовательностей  $V_n$ ,  $S_n$  и  $r_n$ . Рекуррентное выражение для  $q_n$  не содержит других переменных:

$$q_{n+1} = q_n \frac{(1 + c_2 c_3^2 / q_n)^3}{(1 - c_1 c_3^3 / q_n)^2}. \quad (4)$$

Эта последовательность стремится к ненулевой константе  $q_\infty$  или к бесконечности. Второй случай может реализоваться только при условии

$$3c_2 + 2c_1c_3 > 0. \quad (5)$$

В первом случае рекуррентные выражения (1) и (2) могут быть упрощены при  $n \gg 1$ :

$$V_{n+1} = V_n \left(1 - c_1c_3^3/q_\infty\right), \quad (6)$$

$$S_{n+1} = S_n \left(1 + c_2c_3^2/q_\infty\right). \quad (7)$$

В этом же пределе формула (4) имеет вид

$$\left(1 - c_1c_3^3/q_\infty\right)^2 = \left(1 + c_2c_3^2/q_\infty\right)^3. \quad (8)$$

Из формул (6) и (7) следует, что последовательности  $V_n$  и  $S_n$  являются геометрическими последовательностями:

$$V_n \propto \left(1 - c_1c_3^3/q_\infty\right)^n, \quad (9)$$

$$S_n \propto \left(1 + c_2c_3^2/q_\infty\right)^n. \quad (10)$$

Подстановка (9) и (10) в (3) дает

$$r_n \propto \left(1 - c_1c_3^3/q_\infty\right)^{n/3}, \quad (11)$$

где мы для упрощения использовали выражение (8). Отсюда получается распределение по размерам фрагментов:

$$f(r) = \left| \frac{dn}{dr} \right| \propto \frac{1}{r}. \quad (12)$$

Этот результат не наблюдался в экспериментах, поэтому мы сосредоточимся на втором случае.

Если последовательность  $q_n$  стремится к бесконечности, можно упростить выражение (4) в пределе большого  $q_n$ :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &\approx q_n \left(1 + \frac{3c_2c_3^2 + 2c_1c_3^3}{q_n}\right) = \\ &= q_n + (3c_2c_3^2 + 2c_1c_3^3). \end{aligned} \quad (13)$$

При  $n \gg 1$ , последовательность  $q_n$  растет линейно:

$$q_n \sim (3c_2c_3^2 + 2c_1c_3^3) n. \quad (14)$$

Зависимость  $V_n$  от  $n$  следует из (1) и (14):

$$V_{n+1}/V_n = 1 - c_1c_3^3/q_n, \quad (15)$$

откуда мы получаем асимптотическое поведение последовательности  $V_n$ :

$$V_n \propto n^{-\frac{c_1 c_3^3}{3c_2 c_3^2 + 2c_1 c_3^3}}. \quad (16)$$

Таким же образом из формул (2) и (14) следует выражение для площади поверхности остающегося тела:

$$S_n \propto n^{\frac{c_2 c_3^2}{3c_2 c_3^2 + 2c_1 c_3^3}}. \quad (17)$$

Подстановка (16) и (17) в (3) дает

$$r \propto n^{-\frac{c_2 c_3^2 + c_1 c_3^3}{3c_2 c_3^2 + 2c_1 c_3^3}}. \quad (18)$$

Из этой зависимости получаем функцию распределения по размерам

$$f(r) = \left| \frac{dn}{dr} \right| \propto r^{-3 - \frac{1}{1 + c_1 c_3 / c_2}}. \quad (19)$$

Пользуясь условием (5), получаем, что показатель степени функции распределения лежит в интервале от  $-4$  до  $-1$ . Все известные экспериментальные значения лежат в этом интервале.

В случае разбиения  $N$ -мерного тела аналогичные вычисления дают допустимый диапазон значений показателя степени от  $-N - 1$  до  $-1$ .

### 3 Аналогия с фракталами

Описанная модель дробления тела напоминает алгоритм построения фрактала и ее можно рассматривать в терминах теории фракталов. Трудно представить пример хорошо известного фрактала, при построении которого размер удаляемых фрагментов строго убывает с номером фрагмента. Проще сделать пример на основе простого фрактала типа ковра Серпинского [19, 20]. При построении фрактала такого типа на каждой стадии удаляется несколько фрагментов одинакового размера. Процесс построения характеризуется двумя параметрами: отношение линейных размеров фрагментов, удаляемых на соседних стадиях ( $k_1 > 1$ ), и отношение количества фрагментов, удаляемых на соседних стадиях ( $k_2 > 1$ ). Обозначим номер стадии построения  $i$ . Мы можем написать выражения для номера и размера фрагмента:

$$n = 1 + k_2 + k_2^2 + \dots + k_2^i = \frac{k_2^{i+1} - 1}{k_2 - 1}, \quad (20)$$

$$r \propto k_1^{-i}, \quad (21)$$

и найти соотношение между ними при  $i \gg 1$ :

$$n \propto r^{-\log_{k_1} k_2} = r^{-D}, \quad (22)$$

где  $D$  – так называемая фрактальная размерность [19, 20]. Получаем функцию распределения по размерам:

$$f(r) = \left| \frac{dn}{dr} \right| \propto r^{-1-D}. \quad (23)$$

Для куба Серпинского (трехмерный аналог ковра Серпинского), показатель степени в (23) равен  $-1 - \log_3 26 \approx -3.97$ . Этот фрактал не полностью соответствует представленной модели, так как константа  $c_3$  осциллирует как функция от номера фрагмента. Поэтому необходимо брать среднее значение  $c_3$ .

Трехмерный аналог треугольника Серпинского [19, 20] – тетраэдр, из которого удаляется центральный октаэдр так, что остаются четыре тетраэдра вдвое меньшего размера. Показатель в распределении (23) для него равен точно  $-3$ . Этот случай соответствует  $c_2 = 0$ , что означает постоянство площади поверхности остающегося тела в процессе построения фрактала. Если удаляемый фрагмент будет больше, а остающиеся тетраэдры меньше, (Рис. 2), то  $k_1 > 2$ ,  $k_2 = 4$ , и, следовательно, показатель меньше по абсолютному значению. Пределу бесконечно маленьких остающихся тетраэдров соответствует показатель степени  $-1$ , что является одновременно одной из границ допустимого интервала в представленной модели разрушения.

В работе [4] обнаружена фрактальная структура отдельной пылинки, упавшей на подложку. Фрактальная размерность пылинки была измерена и равна 2.2, что соответствует показателю  $-3.2$  в функции распределения по размерам. Однако, части такой пылинки перекрывают друг друга на подложке, и это может изменить измеряемое распределение по размерам.

## 4 Дополнительное предположение

Комбинации констант в выражении (19) можно придать геометрический смысл:

$$\frac{c_1 c_3}{c_2} = -\frac{\Delta V_n / V_n}{\Delta S_n / S_n}, \quad (24)$$

где  $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n$  и  $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$ . Если  $V_n^*$  и  $S_n^*$  – площадь поверхности и объем  $n$ -ого фрагмента, то  $\Delta V_n = V_n^*$  и  $\Delta S_n \leq S_n^*$ . Отсюда следует

$$\left| \frac{\Delta V_n}{\Delta S_n} \right| \geq \frac{V_n^*}{S_n^*}. \quad (25)$$

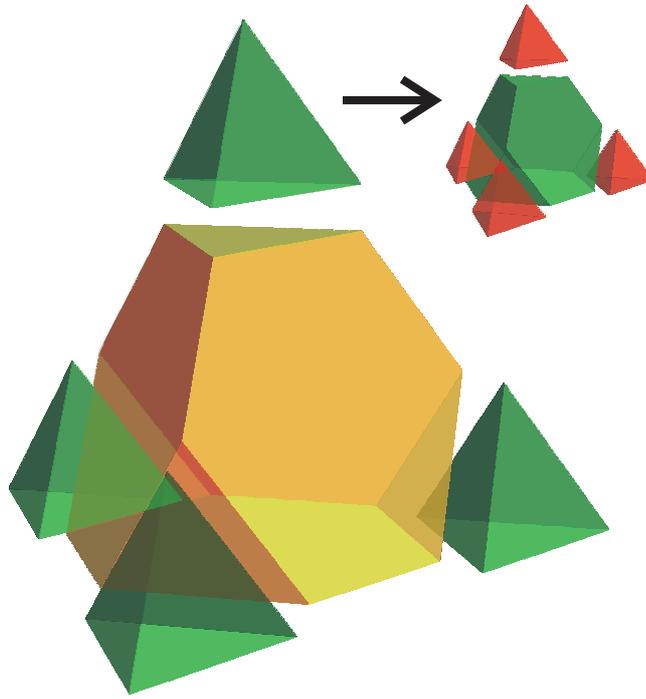


Рис. 2: Схема построения модифицированного тетраэдра Серпинского с фрактальной размерностью 1.3.

Подстановка (25) в (24) дает

$$\left| \frac{c_1 c_3}{c_2} \right| \geq \left| \frac{V_n^*}{S_n^*} / \frac{V_n}{S_n} \right|. \quad (26)$$

Разумно предположить, что форма каждого отдельного фрагмента регулярнее, чем форма остающегося тела. В таком случае правая часть неравенства (26) много больше единицы как и левая. Соответственно, показатель степени в функции распределения (19) отличается от  $-3$  на величину порядка обратного большого параметра (24). В случае разбиения  $N$ -мерного тела, подобные вычисления дают показатель близкий к  $-N$ .

Можно численно проверить насколько точно выполняется это приближение для конкретного закона разбиения тела. При удалении максимального шара, который можно вписать в остающееся тело, получается зависимость радиуса от номера (Рис. 3)

$$r \approx n^{-0.45}. \quad (27)$$

Это соответствует показателю в функции распределений  $-3.3$ . Отличие от полученного аналитически значения  $0.3$  можно рассматривать как малый параметр.

Величины показателя степени, полученные в экспериментах, варьируются в диапазоне от  $-3.3$  до  $-2.1$  [2–5]. Несколько источников [4, 5] дают экспериментальные значения между  $-2.3$  и  $-2.2$  с точностью  $0.1$ . В соответствии с

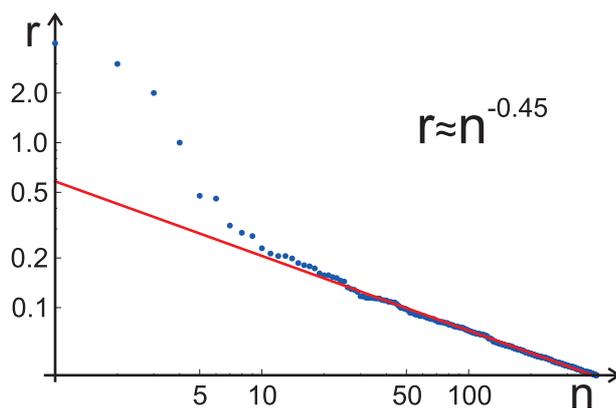


Рис. 3: Зависимость радиуса от номера фрагмента при удалении максимального шара.

формулой (19), это возможно только если  $c_2 < 0$ . Другими словами, площадь поверхности остающегося тела уменьшается при удалении фрагментов. Это возможно только если более чем половина поверхности фрагмента совпадает с поверхностью остающегося тела, из которого он удаляется. Этот случай похож на трехмерный аналог треугольника Серпинского. Показатель степени  $-2.3$  реализуется при  $k_1 \approx 2.9$  и фрактальной размерности 1.3 (Рис. 2).

Отличия между предсказанием модели и измеренными значениями могут быть объяснены не только неопределенностью модели, но также особенностями экспериментов. Подсчет пылинок и измерение их размеров происходит после удара о поверхность подложки. Несколько факторов могут изменить распределение по размерам на подложке по сравнению с начальным: изменение формы и размера пылинок по пути через плазму и при ударе о подложку, перекрытие частиц на подложке, коагуляция, зависимость коэффициента прилипания от размера частицы и т.д.

## 5 Заключение

Показано, что предположение масштабного подобия законов хрупкого разрушения приводит к степенному распределению по линейным размерам образующейся пыли с показателем от  $-4$  до  $-1$ . Показатель степени выражен через фрактальную размерность. При дополнительном предположении геометрического характера показано, что показатель степени близок к  $-3$ . Это значение попадает в экспериментально измеренные значения этой величины. Таким образом, хрупкое разрушение может быть механизмом, благодаря которому образуется мелкая

пыль (меньше микрона) в плазменных установках.

Важной особенностью модели является то, что распределение по размерам фрагментов зависит только от геометрических характеристик, а не от физических свойств разрушаемого вещества. Поэтому представленная модель хрупкого разрушения объясняет одинаковые результаты для распределения пыли по размерам для таких разных материалов, как графит и вольфрам.

## 6 Благодарности

Автор очень признателен за обсуждения и предоставление экспериментальных данных С. Аракчееву, И. Гаркуше, М. Ширатани, А. Шошину, Д. Сковородину и А. Судникову.

## Список литературы

- [1] С.Е. Junge, Air Chemistry and Radioactivity (Academic Press, 1963)
- [2] K. Koga *et al.*, Plasma and Fusion Research: Regular Articles **4**, 034 (2009).
- [3] L.N. Khimchenko *et al.*, 21th IAEA Fusion Conference, Chengdu, 16-21 October, 2006.
- [4] L.N. Khimchenko *et al.*, 34th EPS Conference on Plasma Phys. Warsaw, 2 - 6 July 2007 ECA Vol.31F, O-2.006, 2007.
- [5] L.Khimchenko *et al.*, Proc.33th EPS Conf. Plasma Phys.,Rome, 2006, P-4.091.
- [6] A.V. Burdakov *et al.*, Transact. of Fusion Techn **35**, 1T, 146 (1999).
- [7] M.Okamoto *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, 3A, A267, (1999).
- [8] Tereshin V.I., Plasma Phys. Control. Fusion **37**, 11A, A177 (1995).
- [9] S.K. Friedlander, Journal of Meteorogy, **17**, 5 (1960).
- [10] J.Winter, Plasma Phys. Control. Fusion **46**, B583 (2004).
- [11] E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, Physical kinetics. New York (Pergamon Press, 1981).
- [12] J.Winter, Plasma Phys. Control. Fusion **40**, 1201 (1998).

- [13] O.V. Ogorodnikova *et al.*, Journal of Nuclear Materials **337-339**, 1-3 SPEC. ISS.,791 (2005).
- [14] A.V. Burdakov , *et al.*, Journal of Nuclear Materials **233-237**, Part 1, 697 (1996).
- [15] M. Rubel *et al.*, Nucl. Fusion **41**, 1087 (2001).
- [16] J. Linke *et al.*, Phys. Scr. **T91**, 36 (2001).
- [17] J. Linke *et al.*, Fus. Eng. Des. **66-68**, 395 (2003).
- [18] Y. Koza *et al.*, Phys. Scr. **T111**, 167 (2004).
- [19] J. Feder, Fractals (Plenum press. 1989).
- [20] R.M. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos Fractals (Jones and Bartlett Publishers, Inc. 1995).