

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
"Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет" (Новосибирский государственный
университет, НГУ)
Физический факультет
Кафедра физики плазмы

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ЭЛЕКТРОННЫЙ ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС ВБЛИЗИ ОСИ
ГДЛ

студента 4 курса, 8302 группы

БАГУЛОВ Денис Сергеевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
И. А. Котельников

Новосибирск 2012

Содержание

I Введение	2
II Магнитное поле в параксиальном приближении	3
III Лучевой гамильтониан	5
IV Критерий устойчивости зоны резонанса	7
V Лучевые траектории	10
5.1 Случай $0 < \zeta < 1$	11
5.2 Случай $\zeta > 1$	13
5.3 Случай $\zeta < 0$	15
VI Учет влияния конечного давления	15
VII Заключение	18

I Введение

Поведение электромагнитных волн электронного циклотронного (ЭЦ) диапазона частот в плазме является целью исследований уже длительное время, и основные результаты этих исследований широко известны (см. напр., [1, 2]). Интерес к проблеме обусловлен важными прикладными задачами, такими как высокочастотный нагрев и диагностика плазмы в магнитных ловушках.

Теория распространения электромагнитных волн в плазме с одномерной неоднородностью детально разработана (см. [2]). В случае двумерной неоднородности определить положение резонансной поверхности сложнее. Согласно работе [3], это можно сделать, анализируя траектории волновых пакетов (лучевые траектории). Волновые пакеты замедляют движение вдоль неоднородности при приближении к плоскости пространственного резонанса. Это приводит к накоплению волновой энергии в окрестности резонансной точки и появлению особенности в распределении электромагнитных полей.

Вследствие малой длины волны распространение волн ЭЦ-диапазона в лабораторных магнитных ловушках, как правило, с хорошей точностью описывается приближением геометрической оптики. Исследование лучевых траекторий позволяет дать как качественную, так и количественную оценки возможности нагрева плазмы в ловушке.

В данной работе аналитически и численно исследуется поведение лучевых траекторий вблизи поверхности циклотронного резонанса в геометро-оптическом приближении, соответствующем случаю аксиально-симметричной магнитной ловушки.

Для начала, опишем магнитное поле в ловушке (раздел II) в параксиальном приближении, пространственная зависимость которого очень важна для дальнейшего анализа. Затем, в разделе III выведем дисперсионное уравнение для электромагнитных волн вблизи частот ЭЦ-диапазона. Далее, в IV, определим аналитический вид лучевых траекторий, а вместе с тем и условие для их устойчивости. Наконец, в разделе V графически исследуем эти траектории, в качестве проверки полученных аналитических выводов. В разделе VI оценим влияние конечного давления.

II Магнитное поле в параксиальном приближении

Магнитное поле вне источников описывается уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Из которых видно, что поле \mathbf{B} потенциально, т.е. $\mathbf{B} = \nabla\psi$. Причём потенциал ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$, которое для осесимметричной системы выглядит как:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Если искать решение в виде степенного ряда по r с коэффициентами, зависящими от z $\psi = \sum_n r^n A_n(z)$, из уравнения Лапласа получим рекуррентную формулу для A_n :

$$A_n'' + (n+2)^2 A_{n+2} = 0.$$

С ее помощью четные коэффициенты разложения A_n можно выразить рекуррентно через A_0 . В свою очередь, A_0 выражается через функцию магнитного поля $B_0(z)$ на оси ловушки $A_0 = \int B_0(z) dz$, которую будем считать известной. Нечетные коэффициенты A_n полагаем равными нулю.

В приближении $rB_0'/B_0 \ll 1$, $r^2 B_0''/B_0 \ll 1$ (параксиальное приближение), ограничиваясь несколькими первыми членами разложения, получаем

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_z dz' B_0(z') - \frac{r^2}{4} B_0'(z).$$

Отсюда легко получить выражение для модуля магнитного поля

$$B(\mathbf{r}) \approx B_0(z) - \frac{r^2}{4} \left(B_0'' - \frac{1}{2} \frac{B_0'^2}{B_0} \right). \quad (1)$$

Разложим его вблизи точки циклотронного резонанса на оси:

$$B(z \approx z_s; r) \approx B(z_s, r) + (z - z_s) B_z'(z_s, r). \quad (2)$$

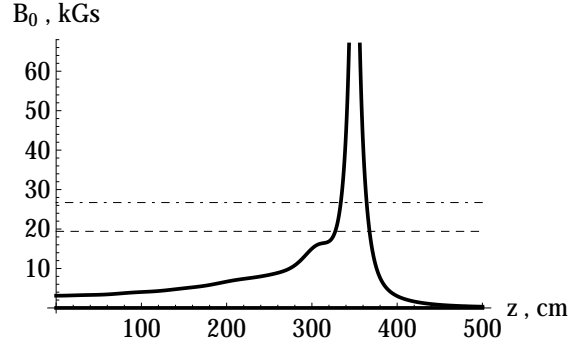


Рис. 1: Функция магнитного поля $B_0(z)$ на оси (сплошная); значения полей, соответствующих частотам 54,5 ГГц (пунктир) и 75 ГГц (штрих-пунктир).

ν (GHz)	z_s (cm)	L_{\parallel} (cm)	L_{\perp}^2 (cm ²)	$L_{\parallel}^2/L_{\perp}^2$
54,5	327,5	29,8	770	1,16
75	334	15	531,5	0,43

Таблица 1: Основные характеристики резонансов для двух частот.

Подставляя сюда модуль поля и оставляя члены только до первого порядка малости, окончательно получаем:

$$B(z \approx z_s; r) = B_0(z_s) \left(1 + \frac{z - z_s}{L_{\parallel}} - \frac{r^2}{L_{\perp}^2} \right), \quad (3)$$

где

$$\frac{1}{L_{\parallel}} = \frac{B_0'(z_s)}{B_0(z_s)}, \quad \frac{1}{L_{\perp}^2} = \left(B_0''(z_s) - \frac{1}{2} \frac{B_0'^2(z_s)}{B_0(z_s)} \right) / 4B_0. \quad (4)$$

На установке ГДЛ было предложено создание системы дополнительного ЭЦР-нагрева на основе двух гиротронов с частотами 54,5 и 75 ГГц (см. [4]). На рис. 1 показан график распределения магнитного поля на оси установки $B_0(z)$ в западной ее половине, а также линии значений полей, соответствующих экспериментальным частотам 54,5 и 75 ГГц. Точки их пересечения с кривой B_0 на оси z определяют положения резонанса z_s на оси. Соответствующие этим резонансам значения параметров L_{\parallel} , L_{\perp}^2 , z_s приведены в таблице 1:

III Лучевой гамильтониан

Для нахождения лучевых траекторий электромагнитных волн необходимо знать соответствующее им дисперсионное уравнение, его вывод проведен в настоящем разделе.

Для начала запишем дисперсионное уравнение в приближении холодной плазмы (см., напр. [2]):

$$1 + N^+ N_+ \left(\frac{1}{\varepsilon_+ - N^2} + \frac{1}{\varepsilon_- - N^2} \right) + \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} = 0, \quad (5)$$

где $N_{\parallel} = N_z$ и $N^{\pm} = N_{\mp} = (N_x \pm iN_y)/\sqrt{2}$ обозначают компоненты вектора $\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$, пропорционального волновому вектору \mathbf{k} , в спиральных координатах $s^{\pm} = (x \pm iy)/\sqrt{2}$ (см. [2]), а

$$\varepsilon_{\pm} \equiv \varepsilon_{\pm}^{\pm} = \varepsilon_{\mp}^{\mp} = \frac{1}{2} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \mp i\varepsilon_{xy} \pm i\varepsilon_{yx}] \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_e)}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{zz} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (7)$$

обозначают компоненты тензора диэлектрической проницаемости; в формулах для диэлектрической проницаемости мы пренебрегли ионными членами, которые малы в области электронных частот. Так же стоит заметить, что циклотронная частота, входящая в ε определена по абсолютной величине заряда, то есть $\omega_e = |e|B/m_e c$.

Вектор поляризации, в согласии с (5), принимает вид:

$$\mathbf{E} = (E_+, E_-, E_{\parallel}) \propto \left(\frac{N_+}{\varepsilon_+ - N^2}, \frac{N_-}{\varepsilon_- - N^2}, \frac{N_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} \right). \quad (8)$$

При этом, его компоненты E_+ , E_- , E_{\parallel} имеют смысл лево-, право- и параллельно поляризованной составляющей электрического поля соответственно (первые две компоненты также называют ионной и электронной).

Заметим, что ε_- при частоте $\omega = \omega_e$ обращается в бесконечность, а правополяризованная составляющая электрического поля — в нуль. Таким образом, для получения дисперсионного уравнения колебаний в случае квазипоперечного распространения волны, нужно опустить слагаемое с ε_- в знаменателе в

уравнении (5).

$$1 + \frac{N_{\perp}^2}{2} \frac{1}{\varepsilon_+ - N^2} + \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} = 0.$$

У этого уравнения существуют два решения, описывающие обыкновенную и необыкновенную волны. Обыкновенная волна имеет продольную поляризацию $\mathbf{E} \propto (0, 0, E_{\parallel})$ и закон дисперсии $N^2 = \varepsilon_{\parallel}$. Необыкновенная волна — левую циркулярную поляризацию $\mathbf{E} \propto (E_+, 0, 0)$ с законом дисперсии $N^2 = 2\varepsilon_+$. При квазипоперечном распространении волны гораздо более эффективно происходит поглощение обыкновенной волны.

В случае же распространения волны под малым углом к полю (квазипродольное распространение), нагрев происходит в основном на необыкновенной волне, так как она более эффективно поглощается. Чтобы получить дисперсию, нужно действовать точнее, чем в случае квазипоперечного распространения, так как показатель преломления необыкновенной волны неограниченно возрастает, делая слагаемое с ε_- в (5) основным. Поэтому положим

$$\frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_+ - N^2} \approx -\frac{N_{\perp}^2}{N^2}, \quad \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} \approx -1 + \frac{N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}}{N^2}.$$

Тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$\varepsilon_{\parallel} N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_- + \frac{\varepsilon_- N_{\perp}^2}{2} = 0, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$N^2 = \frac{\varepsilon_-}{1 + \frac{\varepsilon_- \theta^2}{2\varepsilon_{\parallel}}}.$$

Последнее выражение показывает, что в предельном случае, когда угол между вектором \mathbf{N} и направлением магнитного поля θ мал, причем $\theta \ll \sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_-}$ дисперсия не зависит от направления магнитного поля $N^2 \approx \varepsilon_-$. В другом пределе $\theta \gtrsim \sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_-}$ имеем $N_{\perp}^2 \approx 2\varepsilon_{\parallel}$. Заметим также, что поляризация этой волны перестраивается при заметно меньшем угле $\theta \sim 2\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_-$ с правой циркулярной в продольную при увеличении угла.

В области частот близких к электронному циклотронному резонансу $\omega \approx \omega_e$, в выражении (6) для ε_- оставляем только последнее слагаемое, тогда дис-

персионное уравнение (9) принимает вид:

$$H = \varepsilon_{\parallel} N_{\parallel}^2 \frac{\omega(\omega_e(\mathbf{r}) - \omega)}{\omega_{pe}^2} + \frac{1}{2} N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}, \quad (10)$$

здесь важна пространственная зависимость циклотронной частоты ω_e , которая нам уже известна (см. (3)). Дисперсионное уравнение (10) далее будем называть лучевым гамильтонианом. Исследование лучевых траекторий, определяемых им, составляет содержание последующих разделов.

IV Критерий устойчивости зоны резонанса

Определим величины, входящие в гамильтониан (10). При этом, в отличие от работы [2], учтем слабую неоднородность направления магнитного поля, так что оно имеет компоненты: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_z$, с условием $B_r/B_z \ll 1$. Но также как и в указанной работе, будем рассматривать только двумерные лучевые траектории в плоскости (r, z) . Тогда вектор \mathbf{N} разложим на две составляющие: вдоль и поперек магнитного поля, из рис.2 находим: $N_{\perp} = \cos \psi N_r - \sin \psi N_z$, $N_{\parallel} = \cos \psi N_z + \sin \psi N_r$, где ψ — угол между направлением магнитного поля и осью z — мал, то есть можно записать $\sin \psi \approx \psi \approx B_r/B_0 = -r/2L_{\parallel}$. Вместе с этим отношение N_r/N_z также мало, что позволяет упростить эти выражения:

$$N_{\perp} = N_r - \psi N_z \quad N_{\parallel} = N_z.$$

Для определения траекторий волновых пакетов воспользуемся уравнениями аналитической механики в приближении геометрической оптики:

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial H / \partial \mathbf{k}}{\partial H / \partial \omega}, \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{\partial H / \partial \mathbf{r}}{\partial H / \partial \omega}. \quad (12)$$

Для удобства вычислений введём безразмерные переменные. Здесь удобным параметром является безразмерная величина

$$\alpha = \frac{\omega_{pe}^2}{4\varepsilon_{\parallel}\omega^2}.$$

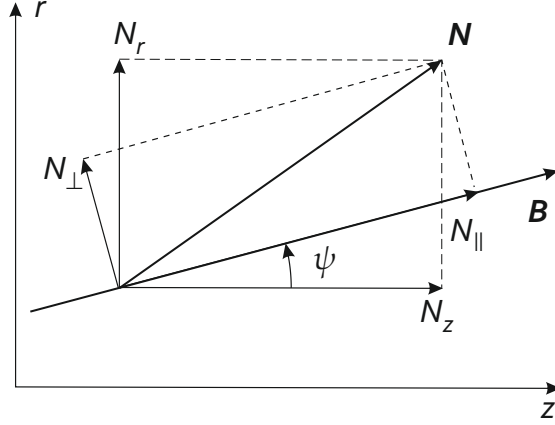


Рис. 2: Неоднородность направления магнитного поля.

Тогда, все параметры длины нормируем на

$$\beta = 2\alpha L_{\parallel} = \frac{\omega_{pe}^2 L_{\parallel}}{2\varepsilon_{\parallel}\omega^2}.$$

Таким образом, $\rho = r/\beta$, $\chi = (z - z_s)/\beta$.

Далее, вместо безразмерного вектора \mathbf{N} введём другой безразмерный вектор \mathbf{p} , с компонентами:

$$p_{\rho} = \frac{\omega\beta N_r}{c}, \quad p_{\chi} = \frac{\omega\beta N_z}{c}.$$

С учетом всех выше сказанных предположений, гамильтониан (10) приобретает вид

$$H = (\chi - \mu\rho^2)p_{\chi}^2 - \nu + (p_{\rho} + \alpha\rho p_{\chi})^2 = 0, \quad (13)$$

где

$$\mu = 2\alpha \left(\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} \right)^2 = \frac{1}{2\varepsilon_{\parallel}} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \left(\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} \right)^2,$$

$$\nu = 2\alpha \left(\frac{\omega_{pe} L_{\parallel}}{c} \right)^2 = \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^4 \frac{L_{\parallel}^2}{2\varepsilon_{\parallel}}.$$

Если отождествить N_{\perp} с N_r , то выражение (13) совпадет с гамильтонианом из работы [2]. Однако, это допущение приводит к значительной ошибке в вычислениях, так как при большой величине N_{\parallel} поправка ψN_z также существенна, что показано в [5].

Уравнения геометрической оптики (11)-(12) приводятся к следующим

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = 2(p_\rho + \alpha \rho p_\chi), \quad (14)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = 2\mu \rho p_\chi^2 - 2\alpha p_\chi(p_\rho + \alpha \rho p_\chi), \quad (15)$$

$$\dot{p}_\chi = -\frac{\partial H}{\partial \chi} = -p_\chi^2. \quad (16)$$

Решение последнего уравнения очевидно: $p_\chi = 1/\tau$ (константу интегрирования занулим выбором начала отсчета). Подставляя его в два предыдущих уравнения и замечая что они однородны относительно τ , ищем решения, определенные на интервале $0 < \tau < \infty$, в виде:

$$\rho = A_+ \tau^{\gamma_+} + A_- \tau^{\gamma_-}, \quad p_\rho = B_+ \tau^{\gamma_+ - 1} + B_- \tau^{\gamma_- - 1}.$$

Константы A_\pm задают начальные условия для траекторий. Подставляя в (14), (15) получаем

$$\gamma_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\alpha + 16\mu} \right), \quad (17)$$

$$B_\pm = \frac{A_\pm (\gamma_\pm - 2\alpha)}{2}. \quad (18)$$

Функцию $\chi(\tau)$ находим из уравнения (13):

$$\begin{aligned} \chi = \mu \rho^2 + \nu \tau^2 - (\tau p_\rho + \alpha \rho)^2 = \\ \nu t^2 + A_- A_+ t (4\mu - \alpha) - \frac{1}{4} A_+^2 t^{2\gamma_+} (\gamma_+ - 2\alpha) - \frac{1}{4} A_-^2 t^{2\gamma_-} (\gamma_- - 2\alpha). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, лучевая траектория определяется параметрически уравнениями $\chi(\tau)$, $\rho(\tau)$. Напомним, что смысл этих решений существует только при $\rho \ll 1$, $\chi \ll 1$, где справедливо разложение (3).

При одновременном выполнении условий $\rho \rightarrow 0$ и $\chi \rightarrow 0$, при $\tau \rightarrow 0$, все траектории сходятся в точке резонанса на оси, т.е. эта точка «притягивает» траектории и является так называемым аттрактором. В обратном случае, она является репеллером. Исходя из вида функций ρ и χ эти условия эквивалентны $\gamma_\pm > 0$ или $1 - 8\alpha + 16\mu < 1$, что при подстановки введенных обозначений приводит к следующему критерию:

$$\frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} < \frac{1}{4}. \quad (20)$$

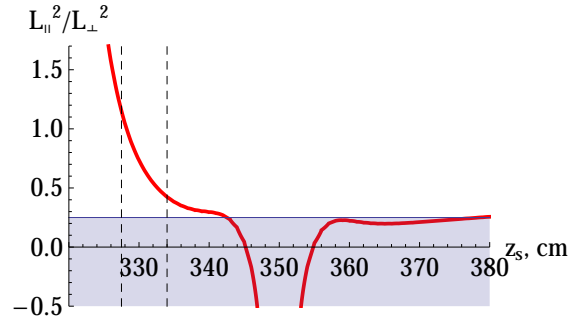


Рис. 3: Критерий устойчивости: заштрихованная область - зона устойчивости.

На рис. 3 графически отображено условие (20), так, точки пересечения прямой резонанса (пунктир) и кривой $L_{\parallel}^2/L_{\perp}^2$ (сплошная), в согласии с этим критерием, должны находиться в заштрихованной области. Как видно, для наших точек резонанса, соответствующим двум данным частотам 54,5 и 75 ГГц, это условие не выполняется. Таким образом, заключим, что эти точки на оси в общем случае (при произвольном выборе начальных условий) являются репеллерами.

Сравнивая (20) с критерием, полученным численным методом в работе [5], которое в наших обозначения выглядит как:

$$\frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} < \frac{1}{2}, \quad (21)$$

закключаем что условие (20) более жесткое.

Так, согласно (21), одна из точек резонанса (соответствующая частоте 75 ГГц) удовлетворяет условию и является аттрактором.

Не смотря на то, что, согласно нашим рассуждениям, обе точки на оси не удовлетворяют нашему условию (20), к ним также могут подходить специально подобранные лучевые траектории, которые мы исследуем в следующем разделе.

V Лучевые траектории

В предыдущем разделе мы выяснили, что вид лучевых траекторий определяются уравнениями (17), (19). В согласии с ними, параметрами, задающи-

ми картину траекторий, являются γ_{\pm} (отвечает за вид траекторий) и A_{\pm} (за начальные условия). Удобно анализировать не случаи различных γ , а параметра $\zeta = 1 - 8\alpha + 16\mu$, входящего в определение γ_{\pm} . В зависимости от этого параметра ζ , траектории можно разделить на три типа, каждый из которых рассматривается в последующих подразделах.

5.1 Случай $0 < \zeta < 1$

Рассмотрим сначала случай, когда $0 < \zeta < 1$. Как нетрудно видеть из уравнений (6): $\text{Im}\gamma_{\pm} = 0$, $0 < \gamma_- < \gamma_+ < 1$, это означает, что траектории будут сходиться к точке $(0, 0)$.

Для начала, рассмотрим частный случай $A_+ = 0$. Тогда легко выразить χ как функцию от ρ из уравнения (19):

$$\chi = \tilde{\nu}\rho^{2/\gamma_-} - \frac{1}{4}(\gamma_- - 2\alpha)\rho^2,$$

здесь $\tilde{\nu} = \nu/A^{2/\gamma_-}$.

При $\rho \rightarrow 0$ основной вклад вносит второе слагаемое, т.к. $\gamma_- < 1$. Таким образом, выражение упрощается и лучевая траектория вблизи точки резонанса определяется параболой

$$\chi = -\frac{1}{8}\left(1 - 4\alpha - \sqrt{1 - 8\alpha + 16\mu}\right)\rho^2,$$

ветви которой направлены в сторону положительных χ , за исключением узкой области параметров α и μ , в которой $\mu < \alpha/2$, $\mu > \alpha/2 + 1/16$ и $\mu < \alpha^2$ (первые два условия следуют из $0 < \zeta < 1$, третье — из знака коэффициента параболы). В этой области лучевые траектории подходят к точке резонанса со стороны слабого магнитного поля (из области отрицательных χ), на рис. 4 изображены такие траектории.

Типичная картина в ином случае, когда траектории подходят со стороны более сильного поля, приведена на рис. 5.

В другом частном случае, когда $A_- = 0$, траектории определяются аналогичным образом параболой и также возможны эти два варианта поведения траекторий вблизи точки резонанса (см. рис. 6, 7).

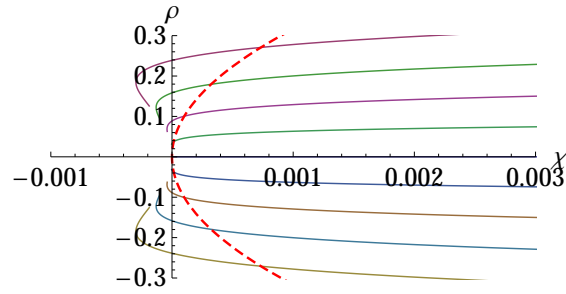


Рис. 4: Картина лучевых траекторий при $0 < \zeta < 1$, траектории подходят со стороны слабого магнитного поля; пунктир - линия электронного циклотронного резонанса. Параметры $\alpha = 0,13$, $\mu = 0,01$, $\nu = 10$, $\gamma_+ = 0,70$, $\gamma_- = 0,30$

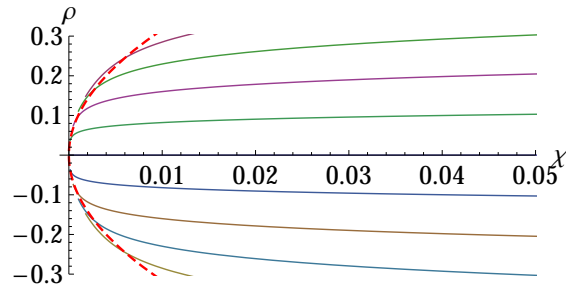


Рис. 5: Картина лучевых траекторий при $0 < \zeta < 1$, траектории подходят со стороны сильного магнитного поля. Параметры $\alpha = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\nu = 30$, $\gamma_+ = 0,72$, $\gamma_- = 0,28$

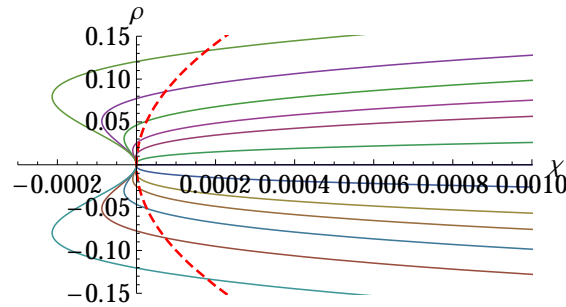


Рис. 6: Картина лучевых траекторий при $0 < \zeta < 1$, случай $A_- = 0$, траектории подходят со стороны слабого магнитного поля. Параметры $\alpha = 0,125$, $\mu = 0,01$, $\nu = 5$, $\gamma_+ = 0,7$, $\gamma_- = 0,3$

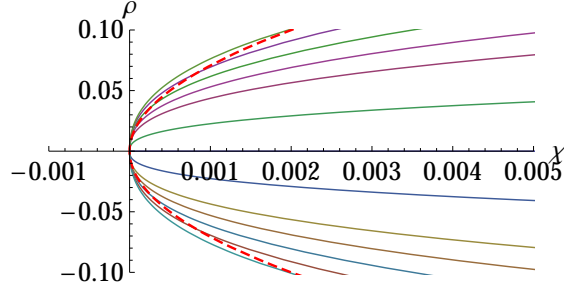


Рис. 7: Картина лучевых траекторий при $0 < \zeta < 1$, случай $A_- = 0$, траектории подходят со стороны сильного магнитного поля. Параметры $\alpha = 0,5$, $\mu = 0,2$, $\nu = 5$, $\gamma_+ = 0,72$, $\gamma_- = 0,28$

Как уже отмечалось в разделе IV, все траектории сходятся на оси в точке резонанса, т.е. точка является аттрактором, этот факт мы и можем наблюдать на рис. 4-7.

5.2 Случай $\zeta > 1$

В этой области параметра ζ , имеем: $\text{Im}\gamma_{\pm} = 0$, $\gamma_- < 0$, $\gamma_+ > 1$. А значит основной вклад в ρ при $\tau \rightarrow 0$ будет вносить слагаемое $A_- \tau^{\gamma_-}$, за исключением случая, когда $A_- = 0$.

Это и есть особый случай, когда точка не удовлетворяет условию (20), но при этом является аттрактором, о котором упоминалось выше. Рассмотрим его более подробно. Если $A_- = 0$, то

$$\chi = \hat{\nu} \rho^{2/\gamma_+} - \frac{1}{4} \rho^2 (\gamma_+ - 2\alpha),$$

где $\hat{\nu} = \nu/A_+^{\gamma_+}$. В пределе $\rho \rightarrow 0$ доминирует первое слагаемое, заметим, что оно всегда положительно. Но можно различать два разных варианта, когда $2/\gamma_+ > 1$ и $2/\gamma_+ < 1$. В первом случае, имеем траектории зажатые между параболой ($\chi \propto \rho^2$) и прямой ($\chi \propto \rho$), см. рис. 8. Во втором же - траектории прижатые к оси χ , см. рис. 9. Как видно из рисунков, все траектории подходят к точке резонанса, хоть и не удовлетворяют условию (20).

Для всех остальных траекторий, когда $A_- \neq 0$ имеем картину типичного репеллера, то есть траектории отталкиваются от оси за счет слагаемого $A_- \tau^{\gamma_-}$,

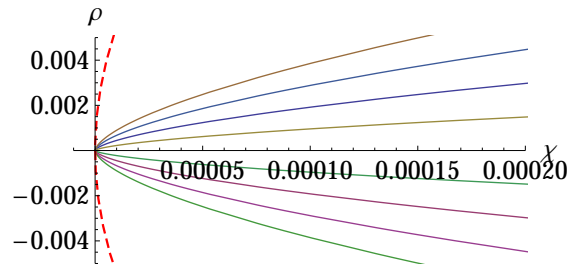


Рис. 8: Картина лучевых траекторий при $\zeta > 1$. Случай $A_- = 0$, $1 < \gamma_+ < 2$.
 Параметры $\alpha = 0,5$, $\mu = 0,33$, $\nu = 2$, $\gamma_+ = 1,53$, $\gamma_- = -0,26$

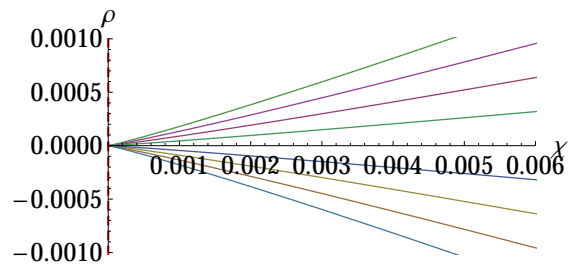


Рис. 9: Картина лучевых траекторий при $\zeta > 1$. Случай $A_- = 0$, $\gamma_+ > 2$.
 Параметры $\alpha = 0,5$, $\mu = 0,2$, $\nu = 5$, $\gamma_+ = 2,19$, $\gamma_- = -1,19$

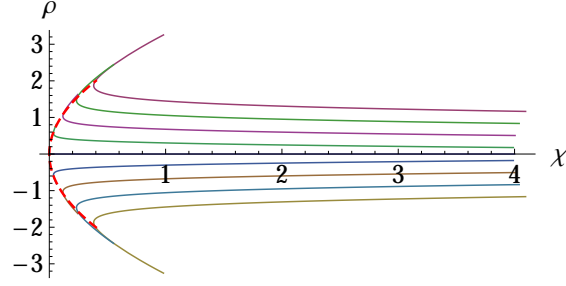


Рис. 10: Картина лучевых траекторий при $\zeta > 1$. Случай $A_- \neq 0$. Параметры $\alpha = 0,5$, $\mu = 0,9$, $\nu = 5$, $\gamma_+ = 1,17$, $\gamma_- = -0,17$

см. рис. 10.

5.3 Случай $\zeta < 0$

Наконец, рассмотрим случай $\zeta < 0$, при этом $\text{Im}\gamma_{\pm} \neq 0$. Траектории ведут себя схоже с описанными в 5.1, отличие состоит в том, что приближаются они к точке резонанса $\chi = \rho = 0$ осцилляторно

$$\rho \propto A\tau^{1/2} \cos \left[1/2\sqrt{1 - 8\alpha + 16\mu} \ln t + C \right],$$

$$\chi \propto \tau.$$

На рис. 11 показана картина таких траекторий. Как из него видно, такие траектории могут подходить к точке резонанса как со стороны сильного, так и со стороны слабого магнитного поля.

VI Учет влияния конечного давления

До этого мы работали в приближении, когда давление плазмы не учитывалось. Покажем в заключительном разделе, что его учет не вносит каких-либо существенных изменений.

Считая плазму изотропной, имеем условие ее равновесия [6]

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \kappa \frac{B^2}{4\pi}, \quad (22)$$

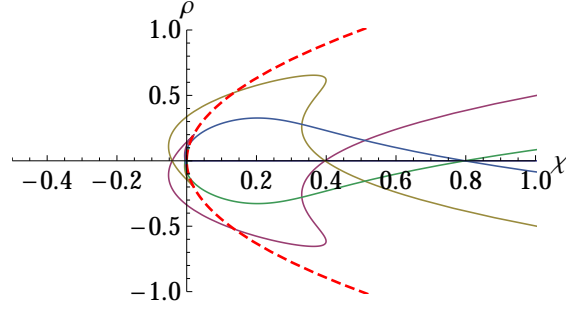


Рис. 11: Картина лучевых траекторий при $\xi < 0$. Параметры $\alpha = 2$, $\mu = 0,5$, $\nu = 10$, $\text{Re}\gamma_{\pm} = 0,5$, $\text{Im}\gamma_{\pm} = \pm 1,32$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование вдоль вектора нормали к поверхности силовых линий.

Рассмотрим в первом приближении цилиндрический столб плазмы, для которого $\kappa = 0$, тогда условие (22) выглядит следующим образом

$$\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right)(r) = \text{const.}$$

Рассматриваем поле B как возмущение относительно вакуумного, т.е. $B = B_v + \delta B$, где B_v - вакуумное поле в параксиальном приближении (3). Исходя из предыдущего условия равновесия можно найти δB :

$$\delta B = -\frac{4\pi p}{B_v} = -\frac{4\pi p_0 (1 - r^2/a^2)}{B_v},$$

здесь $\beta = \frac{8\pi p_0}{B_0^2}$, a - радиус плазмы.

Пользуясь параксиальным приближением (3) и раскладывая выражение в ряд Тейлора, получим возмущение магнитного поля:

$$\delta B = -\frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) B_0 \left(1 - \frac{z - z_s}{L_{\parallel}} + \frac{r^2}{L_{\perp}^2}\right) \approx -\frac{\beta}{2} B_0 \left(1 - \frac{z - z_s}{L_{\parallel}} + r^2 \left(\frac{1}{L_{\perp}^2} - \frac{1}{a^2}\right)\right). \quad (23)$$

Тогда полное поле:

$$B = B_v + \delta B = B_0 \left[1 - \frac{\beta}{2} + \frac{z - z_s}{L_{\parallel}} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) - r^2 \left(\frac{1}{L_{\perp}^2} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{2a^2}\right)\right]. \quad (24)$$

В установке ГДЛ при рабочей плотности $n \approx 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и температуре $T \approx 200 \text{ эВ}$ $\beta \sim 10^{-4}$, таким образом, нужно пренебречь ей по сравнению с единицей в формуле (24), что в итоге приводит лишь к переопределению параметра L_{\perp} :

$$\frac{1}{L_{\perp}'^2} = \frac{1}{L_{\perp}^2} - \frac{\beta}{2a^2}.$$

При этом уравнения (14)-(16) остаются прежними с точностью до замены L_{\perp} на L_{\perp}' (или μ на μ').

В таком случае, критерий (20) будет иметь следующий вид:

$$\frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}'^2} = \frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} \left(1 - \frac{\beta L_{\perp}^2}{2a^2} \right) < \frac{1}{4}.$$

При радиусе плазмы $a \approx 1 \text{ см}$, поправка к условию (20) может достигать 30%, что все же не является критичным для двух данных частот, так как они все равно не будут удовлетворять условию устойчивости.

Наконец, рассмотрим влияние кривизны силовых линий.

Оценим кривизну κ [6]:

$$\kappa \simeq \frac{d^2 r}{dz^2} \sim \frac{r}{L_{\parallel}^2}.$$

Теперь в уравнении (22) можно провести интегрирование, попутно сделав упрощение $\partial/\partial n = \partial/\partial r$. Тогда условие равновесия принимает вид

$$p + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi L_{\parallel}^2} \int B(z, r)^2 r dr = \text{const}.$$

Проводя такую же как и ранее замену $B = B_v + \delta B$ и подставляя в уравнение равновесия получим:

$$p + \frac{B_v \delta B}{4\pi} + \frac{2B_0}{4\pi L_{\parallel}^2} \int \left(1 + \frac{z - z_s}{L_{\parallel}} - \frac{r^2}{L_{\perp}^2} \right) \delta B r dr = 0.$$

Подставляя в последнее выражение δB в первом приближении (23), с точностью до членов порядка r^2 получаем:

$$p + \frac{B_v \delta B}{4\pi} + \frac{B_0}{2\pi L_{\parallel}^2} \left(-\frac{\beta}{4} B_0 r^2 \right) = 0.$$

Отсюда

$$\delta B = -\frac{\beta}{2} B_0 \left[1 - \frac{z - z_s}{L_{\parallel}} + r^2 \left(\frac{1}{L_{\perp}^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2L_{\parallel}^2} \right) \right) \right].$$

Таким образом, поправка в величине δB за счет учета кривизны силовых линий составляет $a^2/2L_{\parallel}^2 \lesssim 0,2\%$, что, безусловно, никак не повлияет на условие нагрева.

Подводя итог разделу, скажем, что учет влияния конечного давления плазмы на критерий (20) не играет большой роли. Так, например, для частоты 54,5 ГГц, максимальном давлении плазмы 10^{13} см^{-3} и температуре 200 эВ граница зоны устойчивости сдвинется только на 30% (с 0,25 до 0,32), в то время как само значение $L_{\parallel}^2/L_{\perp}^2$ согласно табл. 1 составляет 1,16 и по-прежнему гораздо больше порогового значения.

VII Заключение

В данной работе проведен анализ лучевых траекторий в аксиально-симметричной открытой ловушке ГДЛ на основе аналитической теории плазменных электронных циклотронных колебаний вблизи оси ловушки, разработанной в [2], с учетом неоднородности направления магнитного поля. Получены выражения, определяющие аналитический вид этих траекторий в приближении геометрической оптики в области электронного циклотронного резонанса. Были построены и исследованы все типы возникающих лучевых траекторий.

Получен критерий, когда точка электронного циклотронного резонанса на оси является аттрактором (притягивающим узлом).

Согласно представленным нам данным о распределении магнитного поля на оси ловушки и рабочих частотах, можно сделать вывод, что траектории будут вести себя подобно описанным в 5.2, т.е. точки резонанса являются репеллерами.

Также, в качестве дополнения, было рассмотрено влияние диамагнетизма (конечного давления) плазмы на условие ее нарева, которое оказалось не существенно в области рабочих параметров.

Список литературы

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М. : Физматлит, 1960.
2. Тимофеев А. В. Резонансные явления в колебаниях плазмы. — 2-е изд., испр. и доп. изд. — М. : Физматлит, 2009. — 296 с. — ISBN: 978-5-9221-1043-3.
3. Пилия А.Д. ВЧ-нагрев плазмы. — Горький : ИПФ АН СССР, 1983. — 281 с.
4. Аржанников А. В., др. "Компьютерное моделирование нагрева плазмы в открытой магнитной ловушке ГДЛ потоком миллиметрового излучения, генерируемого гиротронным комплексом-// Итоговый отчет.
5. Господничков Е. Д., Смолякова О. Б. О лучевых траекториях вблизи поверхности электронного циклотронного резонанса в прямых магнитных ловушках // Физика Плазмы. — 2011. — Vol. 37. — P. 824–830. — 10.1134/S1063780X11080034.
6. Котельников И.А. Лекции по физике плазмы. — Новосибирск : Новосибирский Государственный университет, 2010. — 352 с.