

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра Физики Плазмы

Направление подготовки **03.04.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **МАГИСТРАТУРА**

### ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Константинова Сергея Евгеньевича

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы ”Вихревая динамика плазмы высокого давления в осесимметричной ловушке”

**«К защите допущена»**

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

зам. директора ИЯФ СО РАН по научной  
работе

Иванов А.А./.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

**Научный руководитель**

к.ф.-м.н., доцент

в.н.с. ИЯФ СО РАН

Беклемишев А.Д./.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....».....20...г.

Новосибирск, 2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Динамика вихревого движения</b>	<b>9</b>
2.1	Определение вихревого движения . . . . .	9
2.2	Основные уравнения . . . . .	13
2.2.1	Непрерывность . . . . .	13
2.2.2	Конечная проводимость . . . . .	13
2.2.3	Уравнение движения . . . . .	15
2.3	Эффекты высокого $\beta$ . . . . .	22
2.3.1	Закон Ома . . . . .	22
2.3.2	Расширение магнитных поверхностей . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Моделирование</b>	<b>27</b>
3.1	Нормализация . . . . .	27
3.2	Численная схема . . . . .	30
3.2.1	Конвекция идеальной завихренности . . . . .	31
3.2.2	Столкновительная вязкость . . . . .	36
3.2.3	Токи в уравнении завихренности . . . . .	38
3.3	Корректность численной схемы . . . . .	40
3.4	Моделирование для $\beta = 0.9$ . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>45</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>45</b>

# 1. Введение

Открытые ловушки (ОЛ) - разновидность магнитных ловушек для удержания термоядерной плазмы. Для ОЛ характерна линейная геометрия, а силовые линии магнитного поля пересекают торцевые поверхности плазмы. ОЛ просты в инженерном отношении, в них более эффективно используется энергия магнитного поля, удерживающего плазму, легче решается проблема удаления из плазмы тяжёлых примесей и продуктов термоядерных реакций. Однако возможность реализации этих преимуществ в термоядерном реакторе на основе ОЛ требует экспериментальных подтверждений.

Одной из реализаций осесимметричной ОЛ с максимально простой магнитной системой является газодинамическая ловушка. Она представляет из себя простой пробкотрон с большим пробочным отношением  $\mathcal{R} \gg 1$  и с длиной  $L$ , для которых выполняется условие

$$L \gg \lambda_{ii} \frac{\ln \mathcal{R}}{\mathcal{R}}, \quad (1)$$

где  $\lambda_{ii}$  - длина свободного пробега ионов при рассеянии на малый угол. Условие (1) означает, что время жизни плазмы оценивается как время истечения идеального газа из большого объема с малым отверстием.

В ИЯФ была построена осесимметричная ловушка газодинамического типа «ГДЛ», в которой удерживается двухкомпонентная плазма - столкновительная фоновая плазма с  $T_e, T_i < 1$  кэВ и плотностью до  $2 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup> и горячие ионы со средней энергией порядка 10 кэВ и плотностью до  $10^{13}$  см<sup>-3</sup>. Горячая компонента создаётся инжекторами нейтральных пучков, расположенных под углом 45° к оси установки (Рис. 1). Горячие ионы удерживаются в бесстолкновительном газодинамическом режиме между точками остановки с пробочным соотноше-

нием  $\mathcal{R} = 2$ .

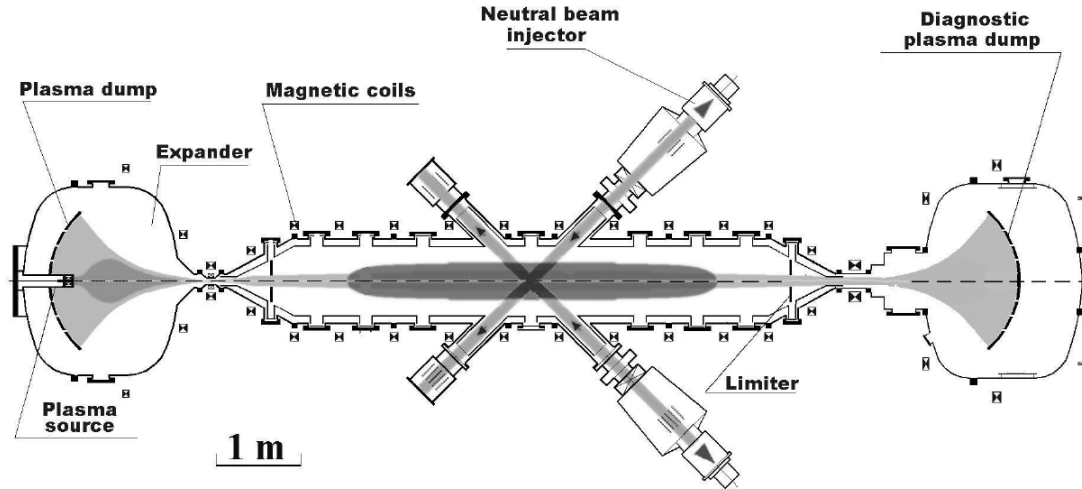


Рис. 1: Схема ГДЛ

В ОЛ с осесимметричной геометрией магнитного поля существует желобковая неустойчивость [10], приводящая к сильным потерям. Возникновение желобковой неустойчивости связано с тем, что плазма, как всякий диамагнетик, стремится перемещаться в сторону более слабых магнитных полей. В результате отдельные трубки силовых линий будут всплывать вместе с заключённой в них плазмой в сторону более слабого поля. Для обеспечения устойчивости плазмы были предложены различные способы стабилизации желобковой неустойчивости.

Критерий устойчивости ОЛ по отношению к желобковой неустойчивости представляется в виде

$$\mathcal{I} = \int \frac{\pi_{\parallel} + \pi_{\perp}}{r(l) B^2} \kappa(l) dl > 0, \quad (2)$$

где  $\pi_{\parallel}$  и  $\pi_{\perp}$  - компоненты тензора плотности потока импульса,  $r(l)$  - расстояние от силовой линии до оси,  $\kappa(l)$  - кривизна силовой линии. В работе [1] была

разработана схема стабилизатора для ГДЛ. При добавлении концевого элемента в установку экспериментально были созданы условия, при которых критерий (6) удовлетворялся. Магнитное поле в стабилизаторе имело конфигурацию антипробкотрона, что создавало среднюю кривизну, благоприятную для удержания. Дополнительным методом стабилизации является эффект конечного ларморовского радиуса (КЛР) частиц. Коротковолновые возмущения в ГДЛ стабилизируются горячими ионами и этот эффект усиливается с азимутальным номером возмущения. Нестабилизированной остаётся только электростатическая мода  $m = 1$  [9].

Ещё одним возможным механизмом подавления желобковой неустойчивости является сдвиговое течение плазмы. В экспериментах на ГДЛ, при которых напряжение подавалось на лимитеры и секционированный плазмоприёмник, был обнаружен улучшенный режим удержания в необычных условиях.

По данным о потоке ионов в расширитель и о плазме в центральной ячейке в эксперименте с отключенным каспом-стабилизатором [2] оказалось, что для ГДЛ критерий (2) не выполняется и  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{expander} + \mathcal{I}_{center} < 0$ . При этом, время удержания плазмы в ловушке становится порядка времени продольных потерь. Распределение плавающего потенциала в центральной области удержания показано на Рис. 2.

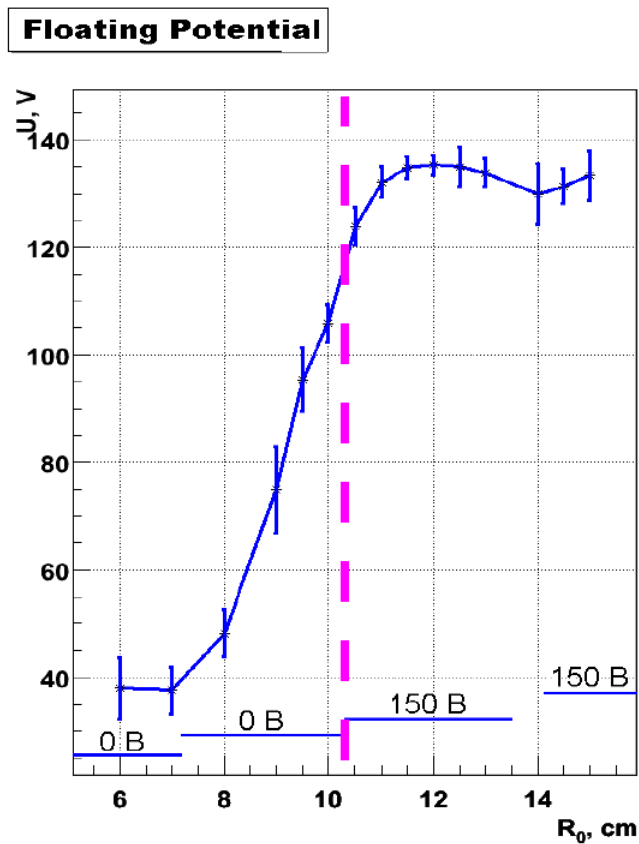


Рис. 2: Радиальный профиль плавающего потенциала в центральном сечении ГДЛ. Розовым - «ступенька» потенциала, синим - плавающий потенциал плазмы.

Обоснование режима удержания с потенциалом на плазмодриёмниках проводилось в [6, 4]. Основная идея заключалась в том, что горячая плазма, находящаяся в центре двухмерного вихря, будет удерживаться внутри не перемещаясь конвективным образом к стенке, если линии тока в этом вихре концентричны и замкнуты, и сам вихрь не смещается. Эти условия удовлетворяются, если вихревой поток поддерживается дополнительным широм скорости от пластин плазмодриёмника, находящихся под постоянным потенциалом. Оказывается, что если на пластинах плазмодриёмника сформировать ступенчатый потенциал (Рис. 2), в плазме его форма изменится вследствие переноса момента импульса. Неустойчивая крупномасштабная желобковая мода смещает плазму

с центра. При этом на силовые трубки, проходящие через скачок потенциала, действует сила Ампера, направленная по азимуту, и порождающая радиальный ток

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{e}{c} [\mathbf{B} \times \mathbf{F}]$$

Эта сила возникает, если имеется вынос импульса вдоль ловушки на стенку

$$F_{\phi} \propto v_{\parallel} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial z}.$$

При этом плазма должна оставаться квазинейтральной и поддерживать амби-полярный баланс. Значит в области сдвигового течения образуется область, где пьедестал потенциала размывается радиальным током. Внутри слоя с изменяющимся потенциалом возникает дополнительное радиальное поле, порождающее вихревой барьер. Центральная часть плазмы будет находиться в застойной зоне вихревого течения, а неустойчивые моды при определённой высоте потенциала нелинейно насыщаться. Этот улучшенный метод удержания был назван «вихревым удержанием», так как при его использовании плазма удерживается в застойной зоне вихревого течения.

В [3] рассматривалась теоретическая модель на основе одножидкостной МГД для описания вихревой динамики плазмы низкого давления  $\beta \ll 1$  и с постоянной плотностью плазмы  $\rho = Const$ . Эффект КЛР учитывался как дрейфовая добавка в уравнении на полную завихренность. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, возникающая при сдвиговом течении, стабилизируется потенциалом плазмодриёмника и столкновительной вязкостью, а если возникает, то добавляет турбулентный перенос в окрестности скачка потенциала. В отсутствие эффекта КЛР получена оценка для «хорошего» удержания на коэффициент «связи с торцом»  $H$  и средней кривизной поля  $\kappa/H \sim 0.2$ . В численном моделировании нелинейного вихревого удержания с эффектом КЛР показано хорошее

соответствие теории и экспериментальных данных с ГДЛ.

Другим подходом к описанию конвекции плазмы является «адиабатическое разделение движения» [7]. Уравнения движения в [7] находятся из принципа наименьшего действия с учётом, что слабая диссипация не влияет на адиабатичность быстрой компоненты. Тогда частицы не покидают фазовый объем и преобразования координат, не изменяющие лагранжиан, действительно соответствуют законам сохранения определённой физической величины. В ГДЛ достаточно источников диссипации, в том числе токи на электроды плазмприёмника, чтобы утверждать о негамильтоновости данной системы и неприменимости теории Пастухова для описания вихревого движения в ГДЛ.

В настоящее время теория вихревого удержания разработана для  $\beta \ll 1$  и постоянной плотности  $\rho = Const$ . Главная цель данной работы - получить основные уравнения для описания вихревого движения плазмы с  $\beta \sim 1$  в открытой ловушке. Получено приближение, по физическому смыслу схожее с идеей отщеплением магнитного звука в [7]. Выведена система уравнений на основе уравнений одножидкостной МГД для плазмы в параксиальном квазиравновесии с высоким давлением. Исследовано влияние эффектов, возникающих при учёте высокого давления плазмы - расширение магнитных поверхностей и проседание электрического потенциала в центральной области удержания. Результаты численного моделирования согласуются с оценкой ослабления эффекта связи с электродами плазмприёмника в случае высокого давления плазмы.



## 2. Динамика вихревого движения

В этом разделе описаны основные приближения и получены основные уравнения для описания динамики вихревого течения замагниченной жидкости. Рассмотрены динамические эффекты в плазме высокого давления и их связь с такими же эффектами из теории вихревого движения малого давления.

### 2.1. Определение вихревого движения

**Разделение движения** В качестве нулевого приближения рассмотрим модель, в которой магнитные силовые линии прямые

$$\mathbf{B} = B(x, y, t) \vec{e}_z, \quad (3)$$

движение происходит в сечении  $(x, y)$  и в плазме нет диссипации. По теореме Гельмгольца скорость описывается вихревым  $\chi$  и дивергентным  $\eta$  потенциалами:

$$\mathbf{v}_\perp = [\nabla \chi \times \vec{e}_z] + \nabla \eta. \quad (4)$$

Движение в поле скоростей (2) можно проиллюстрировать следующим образом:

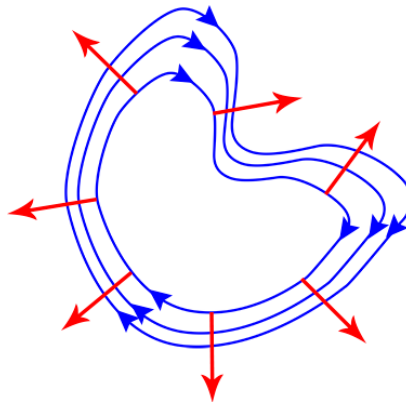


Рис. 3: Линии тока  $\mathbf{v}_\perp$ . Вихревой компоненте  $\chi$  соответствуют вложенные замкнутые линии, дивергентной  $\eta$  - направленные от центра к краю.

Рассмотрим плазму в параксиальном квазиравновесии:

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_v^2}{8\pi}, \quad (5)$$

$B_v$  - магнитное поле без плазмы. Воспользуемся уравнением состояния сжимаемого газа

$$p = C\rho^\gamma, \quad (6)$$

а также уравнениями непрерывности и вмороженности:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}], \quad (7)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{v}_\perp = 0. \quad (8)$$

Из (7) и (8) выразим дивергенцию скорости

$$\text{div} \mathbf{v}_\perp = -\frac{1}{2B^2} \frac{dB^2}{dt}, \quad (9)$$

$$\text{div} \mathbf{v}_\perp = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (10)$$

уравнения (5) и (6) продифференцируем по времени и выразим полную производную давления

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \frac{dB^2}{dt}, \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dt} = C_s^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (12)$$

где  $C_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ . Уравнения (9 – 12) содержат два равенства между  $d_t B^2$  и  $d_t \rho$

$$\frac{1}{2B^2} \frac{dB^2}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (13)$$

$$-\frac{1}{8\pi} \frac{dB^2}{dt} = C_s^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (14)$$

откуда с учётом (10) получим

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_\perp \left( \frac{C_s^2}{C_A^2} + 1 \right) = 0, \quad (15)$$

где  $C_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}$ . Уравнение (15) имеет простой физический смысл - частота быстрого магнитного звука намного больше характерных частот в системе.

Выражение в (15), стоящее в скобках, является положительной величиной, никогда не обращающейся в ноль. Значит,  $\operatorname{div} \mathbf{v}_\perp = 0$  и движение бездивергентно, то есть  $\eta = 0$ . Кроме того, из (13) следует  $d_t \ln B = d_t \ln \rho$ , а значит

$$\frac{d}{dt} \left( B^2, p, \rho, \frac{\rho}{B} \right) \sim \operatorname{div} \mathbf{v}_\perp = 0. \quad (16)$$

То есть если силовые магнитные линии прямые (3) и диссипация отсутствует, то давление, плотность и магнитное давление переносятся вместе с завихренностью, и удельный объем силовой трубки сохраняется. Значит, если в плазме есть диссипация или магнитные силовые линии искривлены, вещество будет перемещаться по радиусу и  $\eta \neq 0$ . В реальности, эти условия не выполняются. В ГДЛ удерживается бесстолкновительная горячая плазма, силовые линии слабо изогнуты и диссипация мала, поэтому всякий вклад в поперечное движение  $\nabla \eta$  будет малой поправкой:

$$|\nabla \chi| \gg |\nabla \eta| \sim \mathcal{O}(\nabla \eta). \quad (17)$$

В приближении слабой кривизны и диссипации условие (16) перейдёт в

$$\frac{d}{dt} \left( B^2, p, \rho, \frac{\rho}{B} \right) \sim \text{div} \mathbf{v}_\perp = \mathcal{O}(\nabla \eta). \quad (18)$$

К таким вкладам относится, например, диффузия в уравнении непрерывности (8), обусловленная сближением двух силовых трубок с разными плотностями в процессе конвекции

$$\nu_{dens} \nabla^2 \rho \sim \text{div}(\rho \nabla \eta) \sim \mathcal{O}(\nabla \eta). \quad (19)$$

**Лагранжева производная** В полную производную по времени входит вектор скорости, в соответствии с которым

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + ([\nabla \chi \times \vec{e}_z] \cdot \nabla) + (\nabla \eta \cdot \nabla) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \{\dots, \chi\} + (\nabla \eta \cdot \nabla), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\{a, b\} = a'_x b'_y - a'_y b'_x$  - скобка Пуассона. Любое выражение вида  $\vec{e}_z \cdot [\nabla a \times \nabla b]$  или  $\nabla a \cdot \text{rot} b$  сводится к  $\{a, b\}$ .

В (20) выделим производную, связанную с быстрым вихревым движением

$$\hat{D}_v = \frac{\partial}{\partial t} + \{\dots, \chi\} \quad (21)$$

и дивергентный остаток, связанный с медленными процессами диссипации

$$\hat{\partial}_\eta = (\nabla \eta \cdot \nabla), \quad (22)$$

так что

$$\frac{d}{dt} = \hat{D}_v + \hat{\partial}_\eta. \quad (23)$$

Будем использовать лагранжеву производную в виде (21 – 23) в дальнейшем.

## 2.2. Основные уравнения

### 2.2.1. Непрерывность

Пользуясь в (8) тем, что  $div \mathbf{v}_\perp = \Delta \eta$  и раскрывая полную производную в соответствии с (23) имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div \mathbf{v}_\perp \equiv \hat{D}_v \rho + \hat{\partial}_\eta \rho + \rho \Delta \eta.$$

Выражение в правой части, не связанное с вихрем, приводится к

$$\hat{\partial}_\eta \rho + \rho \Delta \eta = (\nabla \eta \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \nabla \eta) = div (\rho \nabla \eta).$$

В итоге получаем уравнение непрерывности в консервативной форме:

$$\hat{D}_v \rho = -div (\rho \nabla \eta) = \mathcal{O} (\nabla \eta). \quad (24)$$

### 2.2.2. Конечная проводимость

В уравнении (7) с учётом конечной проводимости

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = rot [\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}] + D_m \Delta \mathbf{B} \quad (25)$$

раскроем  $rot$  в правой части

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D_m \Delta \mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp div \mathbf{B} - \mathbf{B} div \mathbf{v}_\perp + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_\perp - (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

$D_m$  - коэффициент диффузии магнитного поля в плазму. В правой части слагаемые  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v}_\perp$  и  $\mathbf{v}_\perp \operatorname{div} \mathbf{V}$  занулятся. Заменяя  $\mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{v}_\perp = \mathbf{V} \Delta \eta$ , перенося  $(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{V}$  в левую часть и объединяя с частной производной по времени получаем

$$\frac{dB}{dt} = D_m \Delta B - B \Delta \eta.$$

По аналогии с уравнением непрерывности, отщепим вихревую производную от полной, а остаток объединим с членом  $B \Delta \eta$

$$\hat{D}_v B = D_m \Delta B + \mathcal{O}^B(\nabla \eta), \quad (26)$$

где дивергентная добавка  $\mathcal{O}^B(\nabla \eta) = -\operatorname{div}(B \nabla \eta)$ . Проводящее слагаемое  $D_m \Delta B$  в приближении (17) тоже является малой поправкой, однако мы его сохраним в целях устойчивости разностных схем при численном моделировании.

**Эволюция давления** Эволюция давления в общем случае описывается уравнением энергобаланса, и это уравнение вместе с уравнением конечной проводимости (26) и равновесием (5) определяют три величины -  $p$ ,  $B$  и  $\eta$ . В данной работе основной целью является изучение вихревой компоненты движения, а с практической точки зрения удобнее использовать для численного моделирования уравнение на давление. Поэтому, для получения уравнения на  $p$  выразим давление магнитного поля из равновесия (5) и подставим в уравнение конечной проводимости (26), умноженное на  $B$ :

$$\hat{D}_v p = D_m \Delta p + Q_p + \mathcal{O}^p(\nabla \eta).$$

В (27)  $Q_p$  - источник, дивергентная добавка  $\mathcal{O}^p(\nabla \eta) = 2p \Delta \eta - \frac{B_v^2}{4\pi} \Delta \eta$ . Кроме того, важным элементом уравнения энергобаланса являются продольные поте-

ри, которые мы хотели бы учесть в (27). Тогда уравнение, выражающее закон сохранения энергии, будет выглядеть следующим образом

$$\hat{D}_v p = D_m \Delta p + Q_p - \nu_{lt} p + \mathcal{O}^p(\nabla \eta). \quad (27)$$

$\nu_{lt}$  - коэффициент продольных потерь.

### 2.2.3. Уравнение движения

Получим основные слагаемые в уравнении на эволюцию вихревого потенциала в нулевом приближении по малости кривизны поля (3) из уравнения Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = -\nabla p + \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]}{c}. \quad (28)$$

Выразим из (28) полный ток  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_d + \mathbf{j}_\parallel$ , где  $\mathbf{j}_p$  - поляризационный ток,  $\mathbf{j}_d$  - диамагнитный ток,  $\mathbf{j}_\parallel$  - продольный ток

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} = \frac{\rho}{B} \left[ \vec{e}_z \times \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right] + \frac{[\vec{e}_z \times \nabla p]}{B} + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}_\parallel)}{cB^2}.$$

Условие квазинейтральности  $div \mathbf{j} = 0$  приводит к уравнению

$$div \left( \frac{\rho}{B} \left[ \vec{e}_z \times \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right] \right) + div \left( \frac{[\vec{e}_z \times \nabla p]}{B} \right) + \frac{1}{c} div \left( \frac{\mathbf{B} j_\parallel}{B} \right) = 0. \quad (29)$$

Первое слагаемое  $div \mathbf{j}_p$  пропорционально полной завихренности и описывает конвективные процессы в неидеальной жидкости, следующее  $div \mathbf{j}_d$  соответствует диамагнитному току, последнее  $div \mathbf{j}_\parallel$  - продольным токам. Разберёмся с ними по-отдельности.

**Неоднородная завихренность** Получим инерционный член в (29) для чисто вихревой скорости  $\mathbf{v}_\perp = [\nabla\chi \times \vec{e}_z]$ :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\rho}{B} \left[ \vec{e}_z \times \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right] \right) \equiv \operatorname{div} \left( \frac{\rho}{B} \nabla \dot{\chi} \right) + \left\{ \frac{(\nabla\chi)^2}{2}, \frac{\rho}{B} \right\} + \left\{ \frac{\rho\Delta\chi}{B}, \chi \right\}. \quad (30)$$

В выражении (30) первое слагаемое несёт эволюционный характер, но не разрешено относительно производной по времени. В теории конвекции неоднородной жидкости с  $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$  сохраняется вихревой импульс [11]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} dV, \quad (31)$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}(\rho\mathbf{v})$  - завихренность неоднородной жидкости. По аналогии с (31) введём новую величину, которая позволит разрешить выражение в (30) относительно производной по времени

$$\Omega = \vec{e}_z \cdot \operatorname{rot} \left( \frac{\rho\mathbf{v}}{B} \right) = -\operatorname{div} \left( \frac{\rho\nabla\chi}{B} \right). \quad (32)$$

Дифференцируя (32) по времени в Лагранжевом смысле получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\operatorname{div} \left( \frac{\rho}{B} \nabla \dot{\chi} \right) - 2 \left\{ \frac{(\nabla\chi)^2}{2}, \frac{\rho}{B} \right\} - \left\{ \frac{\rho\Delta\chi}{B}, \chi \right\}. \quad (33)$$

Сравнивая слагаемые в (33) и (30), инерционный член примет вид

$$\operatorname{div} \left( \frac{\rho}{B} \left[ \vec{e}_z \times \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right] \right) = -\frac{d\Omega}{dt} + \left\{ \frac{\rho}{B}, \frac{(\nabla\chi)^2}{2} \right\}. \quad (34)$$

Нужно учитывать, что величина (31) сохраняется только в ограниченной неоднородной жидкости с чисто вихревым полем скоростей. В нашем формализме  $\operatorname{div}\mathbf{v} = \mathcal{O}(\nabla\eta)$  и может создаться впечатление, что введение обобщённой за-



вихренности не приведёт к разрешению относительно производной по времени. Однако, для более общего профиля скоростей

$$\mathbf{v} = [\nabla\chi \times \vec{e}_z] + \nabla\eta$$

с  $div\mathbf{v} = \Delta\eta \neq 0$ ,  $rot\mathbf{v} = -\vec{e}_z\Delta\chi$  и обобщённой завихренности  $\widehat{\Omega}$  с этим профилем скоростей

$$\widehat{\Omega} = \vec{e}_z \cdot rot \left( \frac{\rho\mathbf{v}}{B} \right)$$

можно получить ещё более общее выражение для инерционного слагаемого, учитывающее все порядки малости по  $\nabla\eta$

$$\begin{aligned} div \left( \frac{\rho}{B} \left[ \vec{e}_z \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] \right) = & - \frac{d\widehat{\Omega}}{dt} - \vec{e}_z \cdot \left[ \left( \nabla \frac{\rho}{B} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \times \mathbf{v} \right] - \\ & - \left( \nabla \frac{\rho}{B} \cdot \mathbf{v} \right) (\vec{e}_z \cdot rot\mathbf{v}) - \frac{\rho}{B} \vec{e}_z \cdot rot\mathbf{v} div\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (35)$$

Выражение (35) переходит в (34), если положить  $\eta = 0$ . Тем не менее, вследствие малой диссипации и слабой кривизны поля мы будем пользоваться упрощённым выражением (34).

**Диамангнитный ток** Слагаемое в (29), описывающее диамагнетизм, приводится к скобке Пуассона

$$div \left( \frac{[\vec{e}_z \times \nabla p]}{B} \right) = [\vec{e}_z \times \nabla p] \cdot \nabla \frac{1}{B} = \left\{ p, \frac{1}{B} \right\}. \quad (36)$$

Магнитный поток сохраняется  $Br^2 = Const$ , значит для магнитных конфигураций с  $\beta \sim 1$

$$\left\{ p, \frac{1}{B(r, z)} \right\} = \left\{ p, \frac{1}{B(0, z)} + \alpha(z, p) r^2 \right\},$$

где в отличие от  $\beta \ll 1$  функция  $\alpha(z, p)$  уже зависит от давления. В конечном итоге, эта зависимость не окажет влияние на результат, поскольку  $\{p, \alpha(z, p)\} \equiv 0$ . Если предположить  $p(r, z) = p(r)g(z)$ , то вклад диамагнитного тока локально будет иметь вид

$$\operatorname{div} \left( \frac{[\vec{e}_z \times \nabla p]}{B} \right) = \kappa \{p(r), r^2\}, \quad (37)$$

где  $\kappa = \alpha(z, p)g(z)$  - кривизна поля при данном  $z$ .

**Усреднение вдоль магнитных силовых линий** С учётом изменений (34), (35) и (37), изложенных в параграфах «Неоднородная завихренность» и «Диамагнитный ток», уравнение (29) примет вид

$$-\frac{d\Omega_{full}}{dt} + \left\{ \frac{\rho}{B}, \frac{(\nabla\chi)^2}{2} \right\} + \kappa \{p(r), r^2\} + \frac{1}{c} \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{B}j_{\parallel}}{B} \right) = \mathcal{O}(\nabla\eta). \quad (38)$$

Уравнение (38) выполняется для любого  $z$ . Для того, чтобы учесть вклад потенциала с плазмприёмника, нужно усреднить (38) вдоль силовых линий. Пусть длина участка с прямым магнитным полем  $L$  намного больше длины припробочного  $\delta L$  (Рис. 4)

$$L \gg \delta L. \quad (39)$$

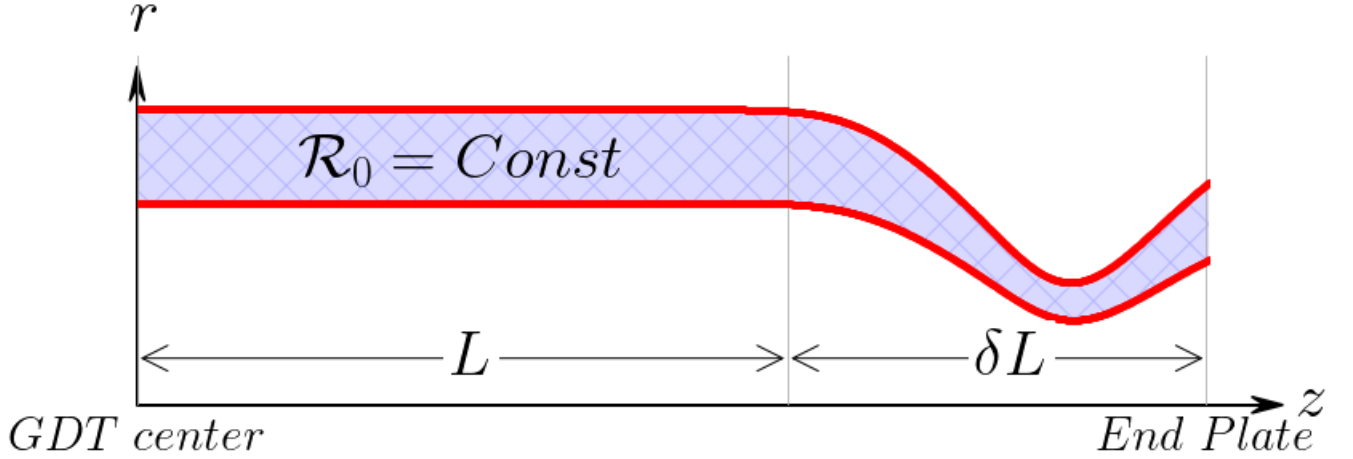


Рис. 4: Магнитная силовая трубка с длинной секцией длины  $L$  и припробочной области малой длины  $\delta L$ .

В приближении (39) не нужно учитывать вклад в кривизну на краях. Тогда дивергенция полного тока, проинтегрированная вдоль силовой линии между пробок

$$\int_{-L}^L \frac{1}{B} \operatorname{div} \mathbf{j}_p dl + \int_{-L}^L \frac{1}{B} \operatorname{div} \mathbf{j}_a dl + \int_{-L-\delta L}^{L+\delta L} \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial l} \frac{1}{B} = 0. \quad (40)$$

Определим процедуру усреднения вдоль силовой линии как

$$\langle \mathcal{F} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} B_v \int_{-L}^L \frac{\mathcal{F}}{B} dl, \quad (41)$$

где  $\mathcal{F}$  - произвольная функция  $r$  и  $z$ ,  $B_v$  - вакуумное магнитное поле в центральном сечении. В (40) интегрирование первых двух слагаемых проводится только по области удержания, так как припробочная область вносит малый вклад. Третье слагаемое интегрируется вдоль всей ловушки до пластины плазмopриёмника и сводится к поверхностному интегралу, то есть к токам на электродах плазмopриёмника. Тогда условие квазинейтральности (40) в приближении па-

раксиальной ловушки (41) и (34) примет вид

$$-\langle \dot{\Omega} \rangle - \langle \{\Omega, \chi\} \rangle + \left\langle \left\{ \frac{\rho}{B}, \frac{(\nabla \chi)^2}{2} \right\} \right\rangle + \langle \kappa \rangle \{p(r), r^2\} + \frac{j_{\parallel}}{B} \Big|_{-L+\delta L}^{L+\delta L} = \mathcal{O}(\nabla \eta). \quad (42)$$

Первые три слагаемых в (42) не зависят от продольной координаты, поэтому при усреднении дадут множитель  $2L$  и заменятся на значение в центре ловушки. Скобка Пуассона в четвёртом слагаемом не зависит от  $z$ , поэтому усредняться будет только кривизна  $\kappa$ .

Получим законченный вид последнего слагаемого в (42). Потенциал плазмы в открытых ловушках формируется так, чтобы соблюдался амбиполярный баланс. На торец плазмаприёмника, находящегося под потенциалом  $\varphi_{lim}$ , текут ионный и электронный токи  $j_{\parallel} = j_e + j_i$ . Если принять функцию распределения частиц по скоростям максвелловской, то

$$j_{\parallel} = j_i \left( 1 + \frac{j_e}{j_i} \right) = j_i \left( 1 - e^{-\frac{q(\varphi + \varphi_{lim} - \varphi_A)}{T_e}} \right), \quad (43)$$

$\varphi$  - потенциал плазмы,  $\varphi_{lim}$  - потенциал плазмаприёмника,  $\varphi_A$  - амбиполярный потенциал.

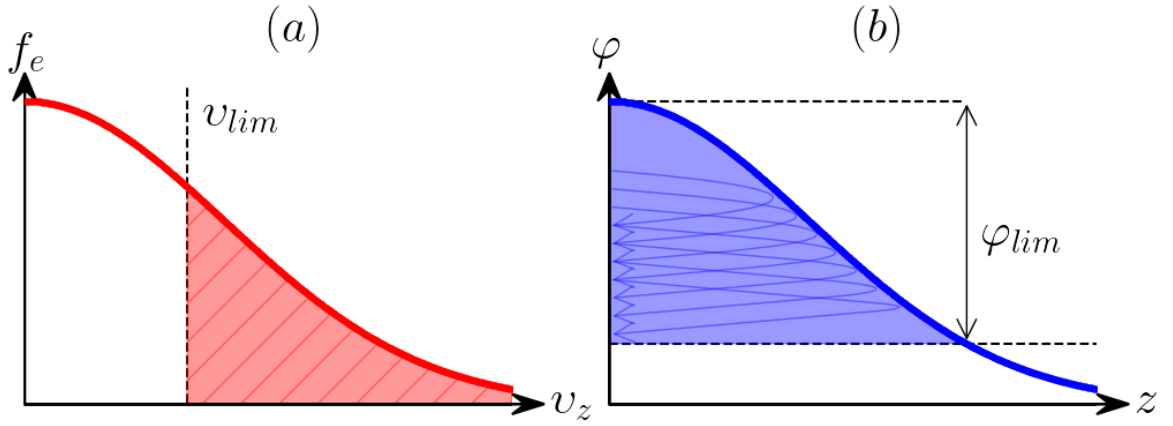


Рис. 5: (a) - максвелловское распределение электронов по скоростям, (b) - электрический потенциал. Частица, захваченная электрическим потенциалом на торце  $\varphi_{lim}$  имеет скорость  $v_{lim} = \sqrt{\frac{2q\varphi_{lim}}{m}}$ .

Управляя потенциалом на плазмоприёмнике можно добиться  $\varphi = \varphi_A$  и соответственно  $j_{\parallel} = 0$ . В большинстве случаев удаётся создать такой  $\varphi_{lim}(r)$ , что  $\varphi - (\varphi_A - \varphi_{lim}) \ll 1$ , так что вклад продольных токов в (42) будет

$$\left. \frac{j_{\parallel}}{B} \right|_{-L}^L = j_i \frac{2q}{cT_e B} (\varphi + \varphi_{lim} - \varphi_A) = j_i \frac{2q}{cT_e B} (\varphi - \varphi_{eq}), \quad (44)$$

$\varphi_{eq}(r) = \varphi_A - \varphi_{lim}(r)$  - равновесный потенциал, имеющий форму ступеньки в случае, если применяется метод вихревого удержания.

В конечном виде уравнение движения после усреднения можно переписать как

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left\{ \frac{\rho}{B}, \frac{(\nabla\chi)^2}{2} \right\} + \langle \kappa \rangle \{p(r), r^2\} + j_i \frac{q}{cT_e L B} (\varphi - \varphi_{eq}(r)) + \mathcal{O}(\nabla\eta). \quad (45)$$

## 2.3. Эффекты высокого $\beta$

### 2.3.1. Закон Ома

Как видно из уравнения (45), в него входят одновременно потенциал плазмы  $\varphi$  и вихревой потенциал скорости  $\chi$ . Связь между ними можно получить из закона Ома с кулоновской калибровкой  $div \mathbf{A} = 0$

$$-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{[\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}]}{c} = 0. \quad (46)$$

Применяя  $div$  к обеим частям уравнения (46) получим связь

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{c} div(B\nabla\chi). \quad (47)$$

В теории вихревого удержания плазмы низкого давления [3] уравнение (47) трансформировалось в более простую связь  $\Delta\varphi = -\frac{B}{c}\Delta\chi$ , то есть потенциалы совпадали с точностью до численного коэффициента. Заменой  $\chi = -\frac{c}{B}\varphi$  в уравнении движения оставался единственный потенциал. Для случая  $\beta \sim 1$  связь  $\varphi(\chi)$  оказывается нетривиальной.

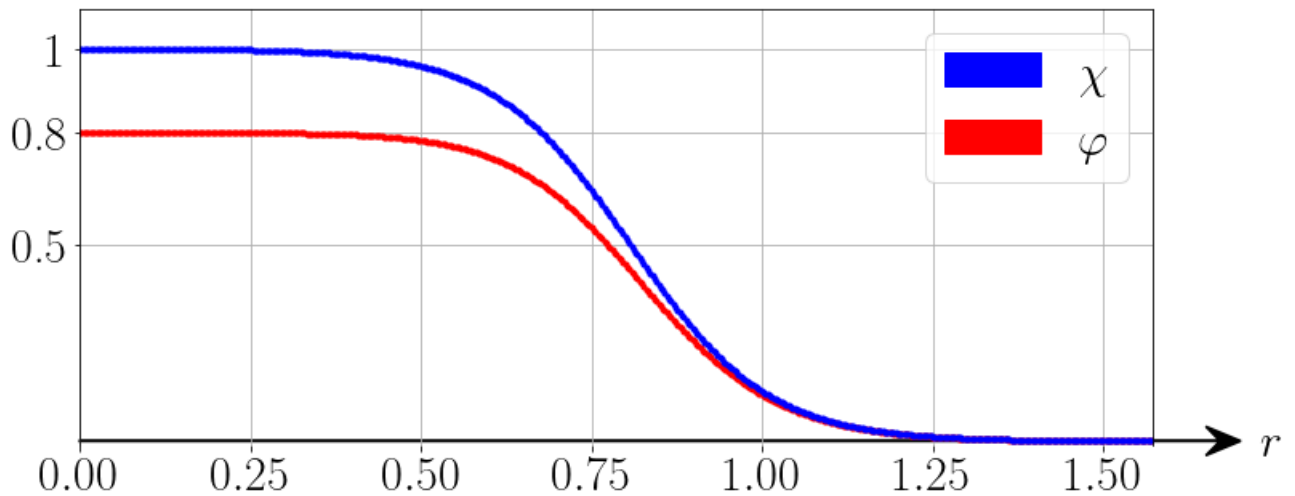


Рис. 6: Различие между вихревым потенциалом скорости  $\chi$  и потенциалом плазмы  $\varphi$  для профиля давления (50) с  $\alpha = 1, \beta = 1$

В параграфе «Продольные токи» мы перешли к средним вдоль магнитной силовой линии величинам. Уравнение (47) при усреднении в смысле (41) свой вид не изменит, а величины  $\varphi$ ,  $\chi$  и  $B$  заменятся на значения в среднем сечении.

### 2.3.2. Расширение магнитных поверхностей

Плотная плазма с высоким давлением  $p(r)$  вытесняет магнитное поле в центре удержания. Чем больше давление, тем больше величина, на которую сместится магнитная поверхность постоянного потока по радиусу (Рис. 7). Поэтому радиус новой магнитной поверхности можно найти из сохранения магнитных потоков

$$B(r) dS = B_v dS'. \quad (48)$$

Отнормируем магнитное поле на вакуумное  $\tilde{B}(r) = B(r) / B_v$  и перейдём в (48) к интегрированию, тогда новый радиус  $r_>$  можно найти из выражения

$$r_<^2 = \int_0^{r_>} \tilde{B}(r) dr^2, \quad (49)$$

где  $r_<$  - радиус заданной магнитной поверхности при  $\beta \ll 1$ .

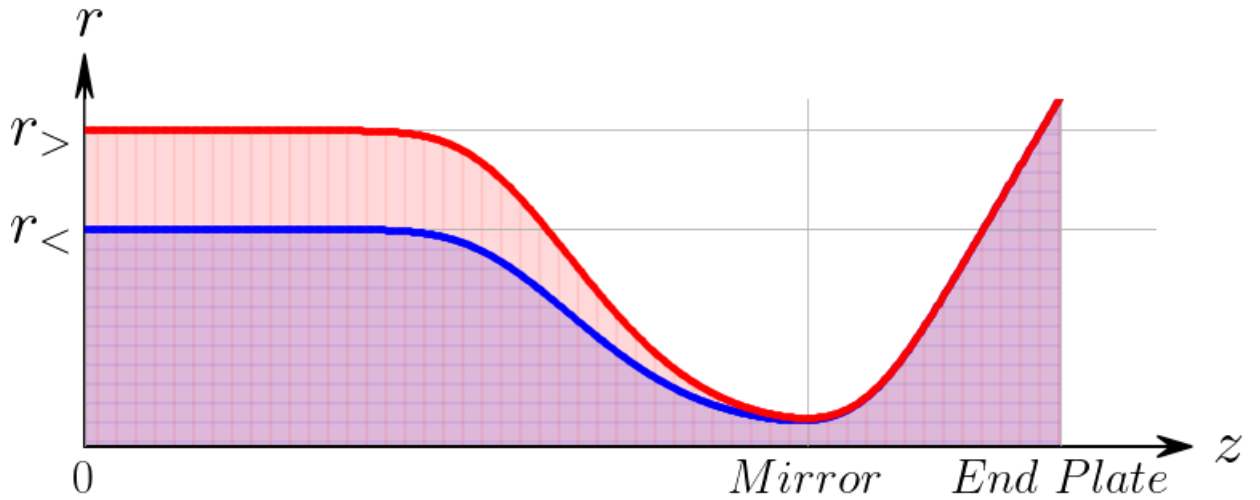


Рис. 7: Расширение магнитной силовой трубки постоянного потока.  $r_>$  - радиус раздутой магнитной поверхности с  $\beta \sim 1$ ,  $r_<$  - радиус для поверхности с  $\beta \ll 1$ .

В общем случае интегрирование в (49) следует проводить и по углу, так как в нелинейной стадии конвекции магнитное поле сильно отличается от равновесного и не обладает угловой симметрией. Для оценки смещения магнитных поверхностей начальное распределение давления выберем в виде

$$p(t=0, r) = p_0 e^{-\alpha \frac{r^2}{r_<^2}}, \quad (50)$$

$r^2 = x^2 + y^2$ ,  $p_0$  - давление в центре,  $\alpha$  - ширина профиля. В (5) перенормируем давление на его величину в центре  $\tilde{p}(r) = p(r)/p_0$  и получим отнормированное уравнение равновесия

$$\tilde{B} = \sqrt{1 - \beta_0 \tilde{p}}, \quad (51)$$

$\beta_0 = \frac{8\pi p_0}{B_v^2}$  - начальное  $\beta$  в центре, дальше будет обозначено как просто  $\beta$ . Под-



ставим (50) и (51) в (49), перейдем к новой переменной  $x = \frac{r^2}{r_{<}^2}$

$$1 = \int_0^{b(\beta)} \sqrt{1 - \beta e^{-b}} dx, \quad (52)$$

в верхнем пределе интеграла неизвестная функция обозначена как  $b(\beta) = \alpha \frac{r_{>}^2(\beta)}{r_{<}^2}$ . Пользуясь правилом Лейбница, продифференцируем (52) по параметру  $\beta$  и приведем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 - \beta e^{-b}}} \right], \quad (53)$$

решение которого с начальным условием  $b(\beta = 0) = 1$  показано на Рис. 8. Для  $\beta \sim 1$  радиус магнитной поверхности увеличивается на  $\sim 20\%$ . В нелинейной стадии конвекции зависимость  $r_{>}(\beta)$  оказывается слабее, если начальное распределение давления задать по формуле (50). Такое изменение в динамике расширения магнитных поверхностей в нелинейной стадии проявляется благодаря увеличению магнитной ямы в центре. Отличие при  $\beta > 0.3$  составляет порядка  $10\%$ .

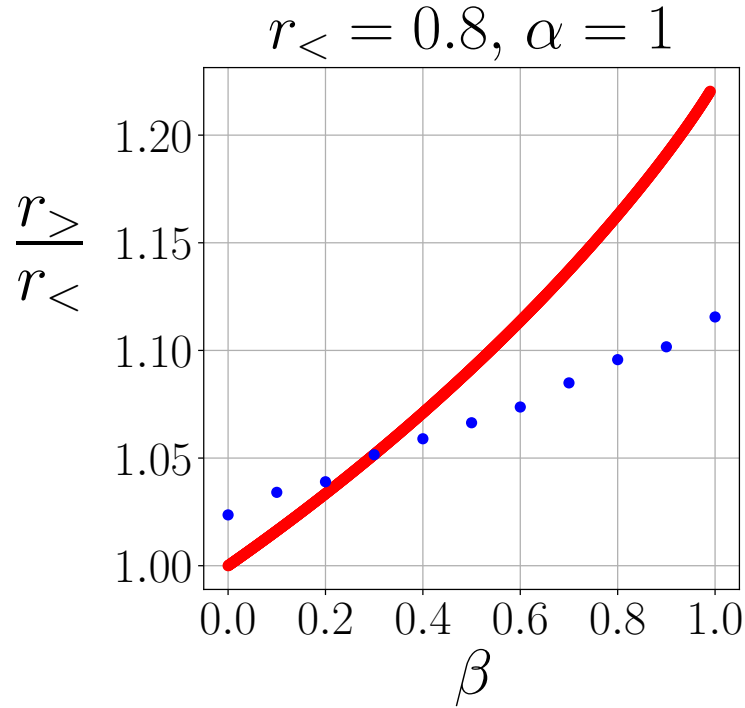


Рис. 8: Зависимость радиуса магнитной поверхности от относительного давления плазмы в центре. Красным - решение уравнения (53), синим - моделирование с начальным распределением давления (50) до момента динамики в стадии сильной нелинейности с усреднением по углу.

Как уже упоминалось ранее, уравнение (53) получено для определённого профиля давления (50) и не содержит угловую зависимость. В общем случае для произвольного распределения давления следует решать уравнение (49).

Эффект расширения магнитных поверхностей оказывает непосредственное влияние на удержание. Магнитная поверхность увеличивается в центральном объеме, но проецируется на неподвижную на электродах плазмоприёмника точку. Формально, это приведёт к изменению в (45):

$$\varphi_{eq}(r) \mapsto \varphi_{eq}\left(r \cdot \frac{r_{>}(\beta)}{r_{<}}\right),$$

то есть магнитная поверхность сместится в сторону большего магнитного поля.

### 3. Моделирование

В этой секции описаны проведена нормализация системы уравнений (54), использовавшиеся численные методы и результаты моделирования. Система (54) упрощена для ускорения численного моделирования. Основную техническую трудность представляет разностная аппроксимация скобки Пуассона. Остальные слагаемые добавляются как конечно-разностные аналоги в явном виде. Для подтверждения корректности используемых разностных аппроксимаций приведены сравнения с результатами расчётов в [3].

#### 3.1. Нормализация

В предыдущих разделах в приближении слабой диссипативности (17) и малой кривизны магнитного поля (3) мы модернизировали основные уравнения одножидкостной МГД (8, 25, 28, 46) в параксиальном квазиравновесии (5) и получили систему уравнений для описания конвекции плазмы с высоким давлением

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} + \{\Omega, \chi\} &= \left\{ \frac{\rho}{B}, \frac{(\nabla\chi)^2}{2} \right\} + \langle \kappa \rangle \{p(r), r^2\} + \\
 &+ j_i \frac{q}{cT_e L B} \left( \varphi - \varphi_{eq} \left( r \cdot \frac{r_{>}(\beta)}{r_{<}} \right) \right) + \mathcal{O}(\nabla\eta), \\
 \dot{p} + \{p, \chi\} &= D_m \Delta p + Q_p - \nu_{tt} p + \mathcal{O}(\nabla\eta), \\
 \dot{\rho} + \{\rho, \chi\} &= \nu_{dens} \Delta \rho + \mathcal{O}(\nabla\eta), \\
 \Delta \varphi &= -\frac{1}{c} \operatorname{div}(B \nabla \chi), \\
 \Omega &= -\operatorname{div} \left( \frac{\rho \nabla \chi}{B} \right), \\
 p + \frac{B^2}{8\pi} &= \frac{B_v^2}{8\pi}.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Для проведения численного моделирования необходимо обезразмерить систему (54). Обозначим все безразмерные параметры соответственно их физической величине с волной:

$$\left\{ \tilde{r}, \tilde{t}, \tilde{\chi}, \tilde{B}, \tilde{p}, \tilde{z}, \tilde{\varphi}, \tilde{\rho}, \tilde{\Omega} \right\} \longrightarrow \left\{ \frac{r}{R}, \frac{t}{\tau}, \frac{\chi}{\chi_0}, \frac{B}{B_v}, \frac{p}{p_0}, \frac{z}{L}, \frac{\varphi}{\varphi_0}, \frac{\rho}{\rho_0}, \frac{\Omega}{\Omega_0} \right\},$$

$R$  - радиус сдвигового течения,  $B_v$  - вакуумное магнитное поле,  $p_0$  - начальное давление в центре,  $L$  - длина удержания от центра,  $\varphi_0$  - электрический потенциал на плазмаприёмнике,  $\rho_0$  - начальная плотность ионов в центре,  $\chi_0$  - величина вихревого потенциала в центре,  $\Omega_0$  - начальная неоднородная завихренность в центре,  $\tau$  - характерное время. Тогда система (54) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}} + \left\{ \tilde{\Omega}, \tilde{\chi} \right\} &= \left\{ \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{B}}, \frac{(\nabla \tilde{\chi})^2}{2} \right\} + \kappa^* \left\{ \tilde{p}, r^2 \right\} + H^* (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_{eq}) + \mathcal{O}(\nabla \eta), \\ \dot{\tilde{p}} + \left\{ \tilde{p}, \tilde{\chi} \right\} &= D_m^* \Delta \tilde{p} + Q_p - \nu_{tr} \tilde{p} + \mathcal{O}(\nabla \eta), \\ \dot{\tilde{\rho}} + \left\{ \tilde{\rho}, \tilde{\chi} \right\} &= \nu_{dens}^* \Delta \tilde{\rho} + \mathcal{O}(\nabla \eta), \\ \Delta \tilde{\varphi} &= -div \left( \tilde{B} \nabla \tilde{\chi} \right), \\ \tilde{\Omega} &= -div \left( \frac{\tilde{\rho} \nabla \tilde{\chi}}{\tilde{B}} \right), \\ \tilde{B} &= \sqrt{1 - \beta_0 \tilde{p}} \end{aligned} \quad (55)$$

где безразмерные параметры

$$\kappa^* = \frac{p_0 B_v \tau R^2}{\rho_i c \varphi_0} \langle \alpha(z, p) g(z) B(z) \rangle, \quad H^* = j_{i0} \frac{q}{T_e} \frac{B_v^2 R^2 \tau}{\rho_i c^2 L}$$

совпадают со средней кривизной  $\kappa$  и связью с торцом  $H$  в теории малого  $\beta$  [3]. В процессе обезразмеривания образовались естественный параметр  $\tau = \frac{B_v R^2}{c \varphi_0}$

- характерное время, и связи  $\chi_0 = \frac{c \varphi_0}{B_v}$ ,  $\Omega_0 = \frac{\rho_0 \chi_0}{B_v R^2}$ .

Уравнение (32) численно решается с использованием релаксационных методов и оказывается крайне затратным при решении совместно с уравнениями эволюционного типа. На каждом шаге по времени уравнения на завихренность требуется около 200 итераций для (32). Поэтому для ускорения вычислений сделаем ещё одно физическое упрощение:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{B} \right) = 0. \quad (56)$$

Приближение (56) соответствует адиабате ЧГЛ, однако является искусственным и, как правило, для неидеальной плазмы не выполняется. Тем не менее, с его использованием достигается желаемый результат в моделировании в смысле скорости вычислений и теоретических оценок.

С учётом (56) неоднородная завихренность модифицируется в завихренность идеальной жидкости

$$\Omega_{ideal} = -\Delta\chi = \frac{B}{\rho} \cdot \Omega. \quad (57)$$

Тогда основные уравнения в приближении (57) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\tilde{\chi}} + \{\Delta\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\} + \kappa^* \{\tilde{p}, r^2\} + H^* \tilde{B} (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_{eq}) &= 0, \\ \dot{\tilde{p}} + \{\tilde{p}, \tilde{\chi}\} &= \nu^* \nabla^2 \tilde{p} + Q_p - \nu_{tr} \tilde{p}, \\ \Delta\tilde{\varphi} &= -div \left( \tilde{B} \nabla \tilde{\chi} \right), \\ \tilde{B} &= \sqrt{1 - \beta_0 \tilde{p}}, \end{aligned} \quad (58)$$

Построим разностную аппроксимацию упрощённой системы (58).

### 3.2. Численная схема

Определим основные параметры разностной аппроксимации. Пусть уравнения системы (58) заданы на равномерной сетке  $\{x_i, y_i\}$  с шагом  $h$ , определяемым количеством точек  $N$ , в квадратной счётной области  $\Gamma = (-L, L) \times (-L, L)$ , и все переменные величины зануляются на её границе  $\partial\Gamma$ . Все уравнения эволюционного типа будем решать по явной схеме, величину  $\mathcal{F}$  на  $(n + 1)$  шаге по времени в точке сетки  $(i, j)$  будем обозначать  $\mathcal{F}_{i,j}^{(n+1)}$ .

Для временных итераций системы (58) нужно задать начальные профили давления и вихревого потенциала. Для давления будем использовать формулу (50), а начальную функцию скорости будем задавать в виде

$$\chi^{(0)}(r) = \chi_0 th \left( \frac{r_0 - r}{\delta} \right). \quad (59)$$

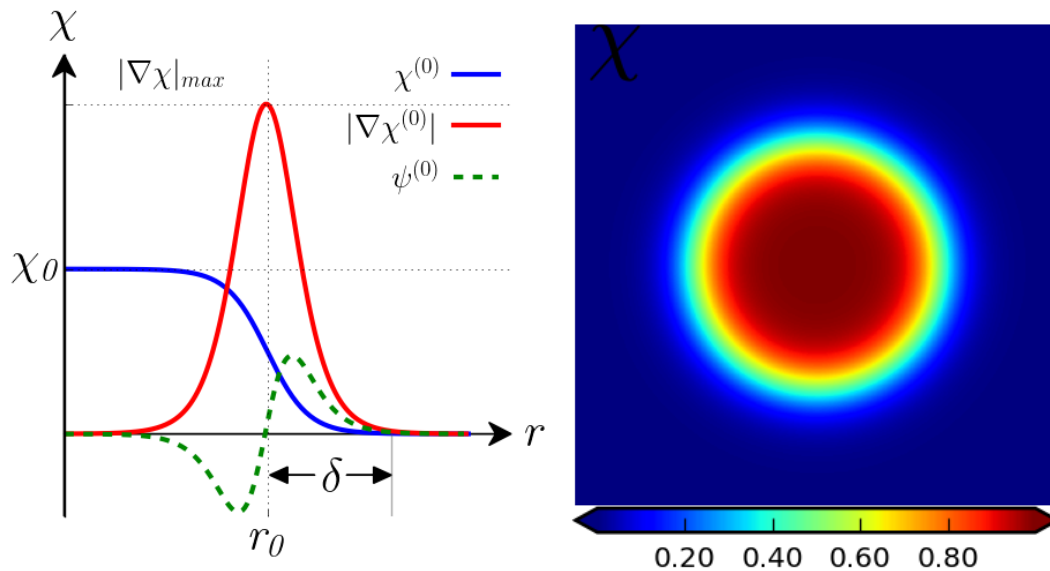


Рис. 9: Начальное распределение вихревого потенциала.

Для имплементации полученных разностных схем будем использовать язык программирования Python версии 3.7 в среде Spyder.

Получим разностные аппроксимации уравнений (58) по частям - начиная

с уравнения конвекции идеальной жидкости, затем добавляя вязкость, токи и уравнение на давление.

### 3.2.1. Конвекция идеальной завихренности

Первое уравнение из системы (58) в отсутствии продольных и диамагнитного токов является уравнением конвекции идеальной жидкости

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{J}(\chi, \psi) = 0. \quad (60)$$

Здесь  $\psi = -\Delta \chi$  - завихренность и вместо скобки Пуассона введено обозначение якобиана  $\mathcal{J}(\chi, \psi) = \chi_x \psi_y - \chi_y \psi_x$ . Для уравнения (60) существует множество способов численного решения. Большинство из них представляют собой обычные центральные разности для оператора  $\mathcal{J}$ , например

$$\mathcal{J}_{i,j}(\chi, \psi) = \frac{1}{4h^2} [(\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}) \cdot (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - (\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}) \cdot (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})] \quad (61)$$

и неизбежно приводят к численной неустойчивости, связанной с дискретностью спектра (Рис. 10).

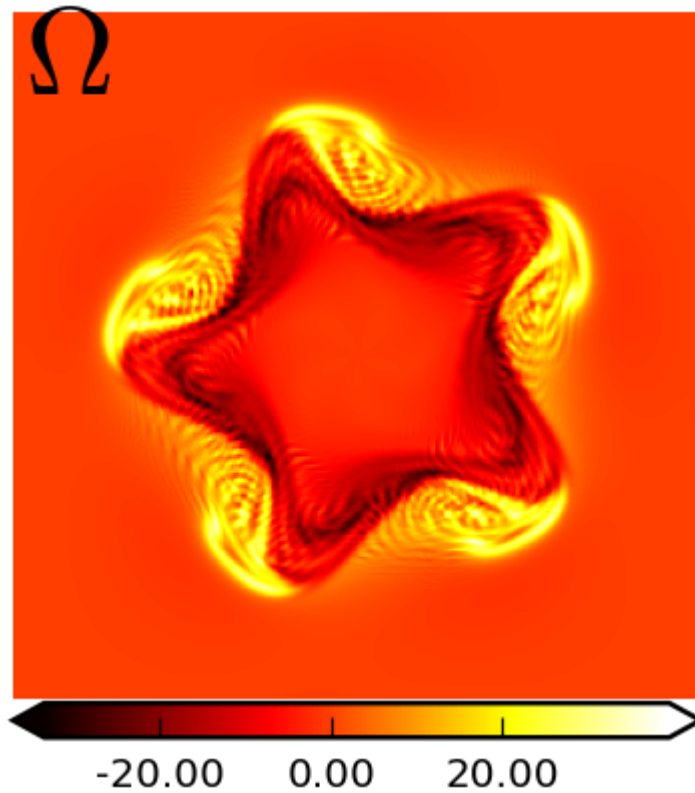


Рис. 10: Численная неустойчивость «noodling» в моделировании.

Эта численная неустойчивость, названная «noodling» или лапшичная неустойчивость [8], представляет малые флуктуации, распространяющиеся в направлении вектора скорости и возникающие в тех местах, где нелинейный член в (60) доминирует. Одной из причин является использование разностных аппроксимаций, не удовлетворяющих элементарным свойствам якобиана. Сконструируем разностную схему для оператора якобиана, основываясь на его физических симметриях.

Уравнение (60) подразумевает сохранение завихренности для каждой частицы жидкости, значит для несжимаемого двумерного течения спектр по завихренности не изменяется со временем. Это приведёт к сохранению среднего квадрата волнового числа  $k$

$$k^2 = \frac{\sum_n k_n^2 K_n}{\sum_n K_n}, \quad (62)$$



где  $K_n$  - кинетическая энергия  $n$ -ой частицы. Более того, для якобиана выполняются равенства

$$\int_{\Gamma} \mathcal{J}(\chi, \psi) dx dy = \int_{\Gamma} \chi \mathcal{J}(\chi, \psi) dx dy = \int_{\Gamma} \psi \mathcal{J}(\chi, \psi) dx dy = 0, \quad (63)$$

равноправность которых легко проверяется интегрированием по частям. Интегралам в (63) соответствуют сохраняющиеся величины средней завихренности  $\bar{\psi}$ , средней кинетической энергии  $K = \frac{1}{2} \overline{(\nabla \chi)^2}$  и среднему от квадрата завихренности  $2V = \bar{\psi^2} = \overline{(\Delta \chi)^2}$  (энстрофии). Также, оператор  $\mathcal{J}$  антисимметричен

$$\mathcal{J}(\chi, \psi) = -\mathcal{J}(\psi, \chi). \quad (64)$$

Условия (62, 63, 64) выполняются для любого течения в ограниченной области, в которой отсутствуют источники и диссипация. Якобиан, заданный конечной разностью в виде (61), не удовлетворяет этим условиям. Мы хотим получить такую разностную аппроксимацию для якобиана, чтобы все его физические симметрии сохранялись.

Разностный аналог для якобиана в самом общем виде можно представить в виде

$$\mathcal{J}_{i,j}(\chi, \psi) = \sum_{i' j'} \sum_{i'' j''} C_{i,j;i',j';i'' j''} \psi_{i+i', j+j'} \chi_{i+i'', j+j''}, \quad (65)$$

где  $\psi_{i+i', j+j'}$  - завихренность в точке  $(i+i', j+j')$ , а  $\chi_{i+i'', j+j''}$  - функция скорости в точке  $(i+i'', j+j'')$ , а коэффициенты  $C_{i,j;i',j';i'' j''}$  мы должны найти, удовлетворяя условиям (62, 63, 64). Например, для того, чтобы удовлетворить сохранению энстрофии введём величину

$$A_{i,j;i+i', j+j'} \equiv \sum_{i'' j''} C_{i,j;i',j';i'' j''} \chi_{i+i'', j+j''},$$

которая соответствует линейной комбинации компонент завихренности:

$$\mathcal{J}_{i,j}(\chi, \psi) = \sum_{i'j'} A_{i,j;i+i',j+j'} \psi_{i+i',j+j'}.$$

Если положить завихренность каждой частицы константой, якобиан занулится, значит

$$\sum_{i'j'} A_{i,j;i+i',j+j'} = 0,$$

что соответствует несжимаемости  $div \mathbf{v} = 0$ . Умножая (65) на  $2\psi_{i,j}$  получим

$$2\psi_{i,j} \mathcal{J}_{i,j}(\chi, \psi) = 2 \sum_{i'j'} A_{i,j;i+i',j+j'} \psi_{i,j} \psi_{i+i',j+j'}. \quad (66)$$

Уравнение (66) является по физическому смыслу уравнением (60), умноженным на  $2\psi$ . Значит можно интерпретировать член  $2A_{i,j;i+i',j+j'} \psi_{i,j} \psi_{i+i',j+j'}$  как величина, на которую квадрат завихренности изменился за единицу времени при взаимодействии вихря в точке  $(i, j)$  с вихрем в  $(i + i', j + j')$ . И наоборот,  $2A_{i+i',j+j';i,j} \psi_{i+i',j+j'} \psi_{i,j}$  является увеличением квадрата завихренности в точке  $(i + i', j + j')$  при взаимодействии с вихрем в  $(i, j)$ . Эти две величины одинаковые по величине но обратные по знаку, значит если условие

$$A_{i,j;i+i',j+j'} = -A_{i+i',j+j';i,j}$$

выполнено, то средний квадрат завихренности сохраняется.

Продельвая подобные выкладки для оставшихся симметрий якобиана, можно получить следующее выражение

$$\mathcal{J}_{i,j}^{sym}(\chi, \psi) = \frac{J_1(\chi, \psi) + J_2(\chi, \psi) + J_3(\chi, \psi)}{3}, \quad (67)$$

где верхнему индексу в якобиане соответствует метод вычисления конечной разности для соответствующего аргумента изображённый на Рис. 11.

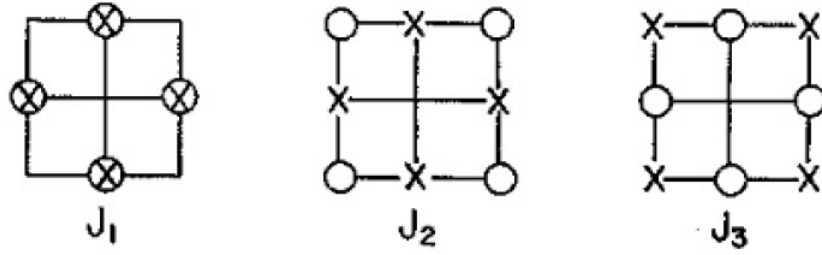


Рис. 11: 9-точечные конечные разности для разных типов якобианов, сохраняющих определённую физическую симметрию.  $J_1$  сохраняет среднюю завихренность,  $J_2$  - энстрофию,  $J_3$  - кинетическую энергию. Центральная точка имеет индекс  $(i, j)$ , круг на точке означает, что в ней берётся значение  $\psi$ , крестик - значение  $\chi$ .

Конечно-разностный якобиан, вычисленный по формуле (67), будет сохранять все свои физические симметрии с точностью по шагу сетки  $\mathcal{O}(h^2)$ . В терминах конечных разностей уравнение (57) для консервативного якобиана (67) будет выглядеть следующим образом

$$\frac{\psi_{i,j}^{(n+1)} - \psi_{i,j}^{(n)}}{\tau} + \mathcal{J}_{i,j}^{sym} \left( \chi^{(n)}, \psi^{(n)} \right) = 0. \quad (68)$$

Уравнение (68) определяет величину завихренности на следующем шаге по времени. Для нахождения функции скорости  $\chi_{i,j}^{(n+1)}$  используем связь

$$\psi_{i,j}^{(n+1)} = -\Delta \chi_{i,j}^{(n+1)}. \quad (69)$$

Для дискретного оператора Лапласа воспользуемся центральной разностью.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi_{i,j}^{(n+1)} \simeq \frac{1}{h^2} \left( \chi_{i,j+1}^{(n+1)} + \chi_{i,j-1}^{(n+1)} + \chi_{i+1,j}^{(n+1)} + \chi_{i-1,j}^{(n+1)} - 4\chi_{i,j}^{(n+1)} \right) = -\psi_{i,j}^{(n+1)} \quad (70)$$

Поскольку ранее мы договорились, что все величины зануляются на границе

счётной области, для уравнения (69) можно использовать метод разложения в дискретные ряды Фурье по обеим координатам. Польза этого метода в том, что он позволяет избежать итераций и достаточно быстрый.

Возьмём симметричные дискретные ряды Фурье по экспонентам для завихренности и функции скорости

$$\widehat{\chi}_{m,n}^{(n+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{W}^{mi+nj} \chi_{i,j}^{(n+1)}, \quad (71)$$

$$\widehat{\psi}_{m,n}^{(n+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{W}^{mi+nj} \psi_{i,j}^{(n+1)}, \quad (72)$$

где  $\mathcal{W} = e^{2\pi i/N}$ . Подставляя (71, 72) в (70) получим

$$\widehat{\chi}_{m,n}^{(n+1)} = \frac{h^2 \widehat{\psi}_{m,n}^{(n+1)}}{4 - \mathcal{W}^m - \mathcal{W}^{-m} - \mathcal{W}^n - \mathcal{W}^{-n}}. \quad (73)$$

Уравнение (73) является алгебраическим, поэтому Фурье-образ функции скорости  $\widehat{\chi}_{m,n}^{(n+1)}$  вычисляется обычными алгебраическими операциями над матрицами. Чтобы восстановить  $\chi_{i,j}^{(n+1)}$  по Фурье-образу, нужно взять обратное преобразование Фурье от вычисленного  $\widehat{\chi}_{m,n}^{(n+1)}$ .

Заметим, что закон Ома, связывающий электрический потенциал плазмы и функцию скорости, является уравнением Пуассона, поэтому мы также будем применять спектральный метод для его решения.

### 3.2.2. Столкновительная вязкость

При длительном интегрировании уравнения (68) возникает ещё одна, более фатальная и неисправимая модернизацией численных схем, неустойчивость, которая обусловлена сближением в процессе конвекции двух вихрей с сильно разнющей завихренностью. Этот факт устраняется внесением в численную схему

«искусственной» диффузии

$$\frac{\psi_{i,j}^{(n+1)} - \psi_{i,j}^{(n)}}{\tau} + \mathcal{J}_{i,j}^{sym} \left( \chi^{(n)}, \psi^{(n)} \right) = u \Delta \psi_{i,j}^{(n)}. \quad (74)$$

С добавлением диффузии в счётной области  $\Gamma$  перестанут сохраняться величины (63), но сам якобиан своих свойств не потеряет. Как правило, добавление численной диффузии имеет определённый физический смысл. В уравнении (74) это слагаемое имеет смысл столкновительной вязкости, или диссипации завихренности.

Для учёта диффузии в расщепим уравнение (74) на два полушага по времени

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{i,j}^{(n+1/2)} - \psi_{i,j}^{(n)}}{\tau/2} + \mathcal{J}_{i,j}^{sym} \left( \chi^{(n)}, \psi^{(n)} \right) &= 0, \\ \frac{\psi_{i,j}^{(n+1)} - \psi_{i,j}^{(n+1/2)}}{\tau/2} &= u \Delta \psi_{i,j}^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (75)$$

Первое уравнение совпадает с (68). Поскольку уравнение Пуассона (69) является стационарным уравнением диффузии, то для решения уравнения (75) применим тот же метод решения, что и для разностного уравнения Пуассона. Для этого мы используем неявную схему по времени. Разностная аппроксимация уравнения (75) с учётом выкладок (69 – 73) в Фурье представлении примет вид

$$\widehat{\psi}_{m,n}^{(n+1)} = \frac{\widehat{\psi}_{m,n}^{(n)}}{1 - \frac{\tau u}{2h^2} (4 - \mathcal{W}^m - \mathcal{W}^{-m} - \mathcal{W}^n - \mathcal{W}^{-n})}.$$

Таким образом, одна временная итерация первого уравнение из (58) в отсут-

ствии токов принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{i,j}^{(n+1/2)} - \psi_{i,j}^{(n)}}{\tau/2} + \mathcal{J}_{i,j}^{sym} \left( \chi^{(n)}, \psi^{(n)} \right) &= 0, \\ \frac{\psi_{i,j}^{(n+1)} - \psi_{i,j}^{(n+1/2)}}{\tau/2} &= u \Delta \psi_{i,j}^{(n+1)}, \\ \psi_{i,j}^{(n+1)} &= -\Delta \chi_{i,j}^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (76)$$

### 3.2.3. Токи в уравнении завихренности

Добавление токов в уравнение на завихренность влечёт непосредственное добавление в (76) уравнений переноса давления, закона Ома и равновесия, поскольку вклад диамагнитного тока зависит от давления, а продольного тока от электрического потенциала. Таким образом, последовательность решения уравнений системы (58) становится следующей:

1. Задаются начальные профили давления  $p_{i,j}^{(0)}$  и функции скорости  $\chi_{i,j}^{(0)}$ ;
2. Для профиля давления  $p_{i,j}^{(0)}$  и функции скорости  $\chi_{i,j}^{(0)}$  вычисляются магнитное поле  $B_{i,j}^{(0)}$  через (51), завихренность  $\psi_{i,j}^{(0)}$  через (69) и электрический потенциал  $\varphi_{i,j}^{(0)}$  из (47):

$$B_{i,j}^{(0)} = \sqrt{1 - \beta_0 p_{i,j}^{(0)}}, \quad \psi_{i,j}^{(0)} = -\Delta \chi_{i,j}^{(0)}, \quad \Delta \varphi_{i,j}^{(0)} = -div \left( B_{i,j}^{(0)} \nabla \chi_{i,j}^{(0)} \right)$$

3. Радиус скачка ступенчатого потенциала на плазмopриёмнике  $\varphi_{eq}^{(0)}$  пересчитывается для магнитного поля  $B_{i,j}^{(0)}$  в соответствии с уравнением (49):

$$\varphi_{eq}^{(0)} = \Theta \left( r_{>} \left( B_{i,j}^{(0)} \right) \right)$$

4. Из уравнения движения с токами явно находится завихренность на следу-

ющем полушаге по времени  $\psi_{i,j}^{(1/2)}$ :

$$\frac{\psi_{i,j}^{(1/2)} - \psi_{i,j}^{(0)}}{\tau/2} + \mathcal{J}_{i,j}^{sym} \left( \chi^{(0)}, \psi^{(0)} \right) = \kappa^* \left\{ p^{(0)}, r^2 \right\} + H^* \tilde{B} \left( \varphi_{i,j}^{(0)} - \varphi_{eq}^{(0)} \right);$$

5. Неявно решается уравнение диффузии для завихренности на втором полушаге по времени  $\psi_{i,j}^{(1)}$ :

$$\frac{\psi_{i,j}^{(1)} - \psi_{i,j}^{(1/2)}}{\tau/2} = u \Delta \psi_{i,j}^{(1)};$$

6. Из уравнения Пуассона находится вихревой потенциал на следующем шаге по времени  $\chi_{i,j}^{(1)}$ :

$$\psi_{i,j}^{(1)} = -\Delta \chi_{i,j}^{(1)};$$

7. Решается уравнение переноса давления для вихревого потенциала на новом шаге по времени:

$$\frac{p_{i,j}^{(1/2)} - p_{i,j}^{(0)}}{\tau/2} + \mathcal{J}_{i,j}^{sym} \left( \chi^{(1)}, p^{(0)} \right) = Q_p - \nu_{tr} p_{i,j}^{(0)};$$

8. Неявно решается уравнение диффузии для давления на втором полушаге по времени  $p_{i,j}^{(1)}$ :

$$\frac{p_{i,j}^{(1)} - p_{i,j}^{(1/2)}}{\tau/2} = \nu^* \Delta p_{i,j}^{(1)};$$

9. Временной слой повышается на единицу  $(n) \rightarrow (n+1)$ , пункты 2-7 повторяются для величин  $\psi_{i,j}^{(n+1)}$ ,  $\chi_{i,j}^{(n+1)}$  и  $p_{i,j}^{(n+1)}$ , как для начальных в новой итерации по времени.

### 3.3. Корректность численной схемы

Корректность численной схемы проверялась по результатам моделирования из [5, 3]. Одним из результатов являлась зависимость ширины сдвигового течения от инкремента неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для разных мод неустойчивости. Для этого в начальное распределение вихревого потенциала 59 добавим угловую модуляцию

$$\chi_m^{(0)} = \chi_0 \text{th} \left( \frac{r_0 - r - a \cdot \sin(m\varphi)}{\delta} \right).$$

Для исследования эволюции модового состава введём норму

$$\|N\|_k(m) = \sqrt{\sum_{i,j} \left( \chi_m^{(0)} - \chi_m^{(k)} \right)^2}, \quad (77)$$

которая характеризует отличие функции скорости  $\chi_m^{(k)}$  на текущем шаге по времени  $k$  от её начального распределения  $\chi_m^{(0)}$ . Поскольку моды неустойчивости Кельвина-Гельмгольца эволюционируют экспоненциально, то норма 77 будет связана с инкрементом неустойчивости  $\gamma$

$$\|N\|_k(m) = \left\| \chi_m^{(0)} \right\| \cdot \sqrt{(1 - (1 + e^{\gamma k}))^2} = \alpha_m \cdot e^{\gamma k}.$$

На Рис. 12 показана зависимость инкремента неустойчивости от ширины сдвигового течения.



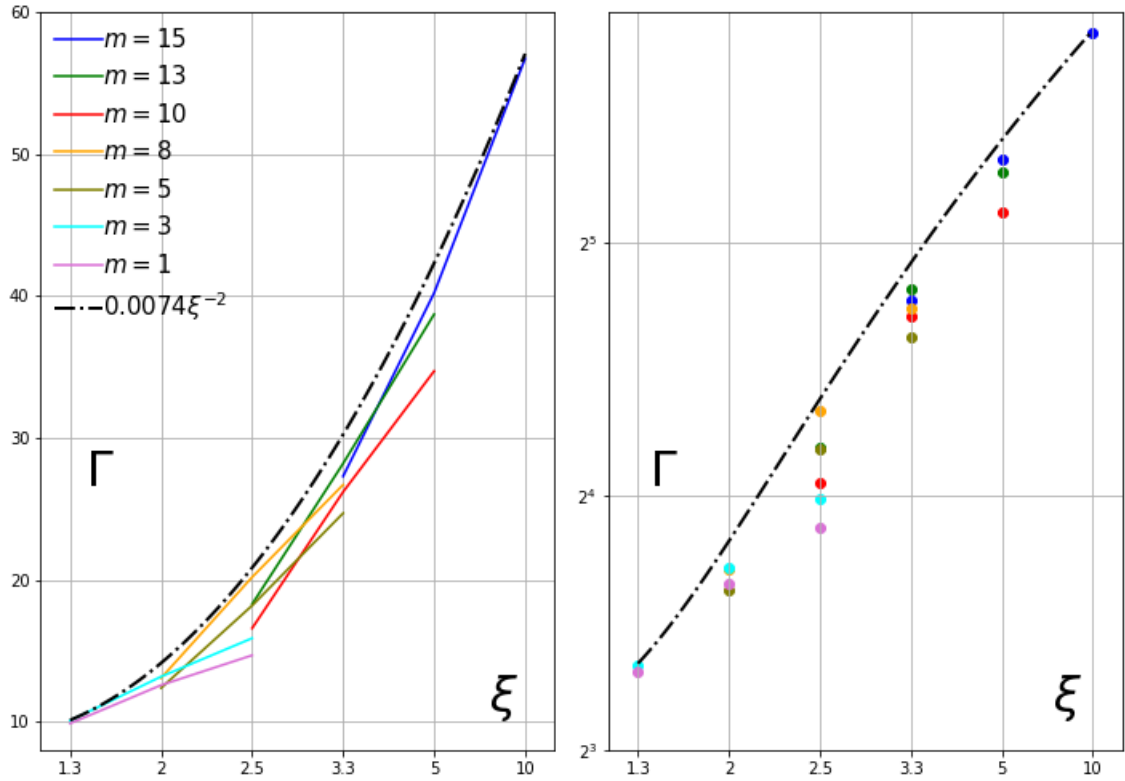


Рис. 12: Инкременты неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для разных мод в зависимости от ширины сдвигового течения  $\xi$ .

Максимальный инкремент неустойчивости оказался равен  $0.0074\xi^{-2}$ , что отличается от результата из работы [3] в  $0.087\xi^{-2}$ . Это объясняется разной нормировкой  $\alpha_m$  в численных схемах, факт квадратичной зависимости подтверждён.

### 3.4. Моделирование для $\beta = 0.9$

Для моделирования системы (58) возьмём пространственные параметры  $N = 256$ ,  $L = \pi$ ,  $r_0 = 0.8$ ,  $\delta = 0.2$ , скачок потенциала поставим в точку перегиба потенциала, что соответствует условиям эксперимента.

Отличительной особенностью упрощённой системы (58) от общей (55) является связь с торцом  $H$ . В (58) слагаемое  $H^* \tilde{B} (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_{eq})$  линейно по безразмерному магнитному полю. Как упоминалось ранее, магнитное поле сильно вытесняется из приосевой области, значит вклад в области сдвигового течения

уменьшится.

Величину, на которую уменьшится вклад в удержание электродами плазмо-приёмника, можно оценить из безразмерного уравнения параксиального квазиравновесия. Поле в центре уменьшится на величину  $\sqrt{1 - \beta}$ , значит эффективная связь с торцом  $H_{eff} \sim H^* \sqrt{1 - \beta}$ .

В теории вихревого удержания плазмы малого давления [3] была получена оценка для области параметров  $\kappa$  и  $H$ , благоприятных для длительного удержания

$$\frac{\kappa}{H} \sim 0.2.$$

Тогда, согласно теории, описанной в данной работе, область благоприятных для удержания при  $\beta = 0.9$  должен быть

$$\frac{\kappa^*}{H_{eff}} \sim 0.2 \cdot \sqrt{1 - \beta} = 0.06$$

Результаты численного моделирования системы (58) с  $\beta = 0.9$  приведены на Рис. 13. Синей прямой соответствует граница параметров кривизны и связи с торцом для случая  $\beta \ll 1$ . Для неё круг обозначает пару параметров  $(\kappa, H)$ , при которых конвекция оказалась фатальной для удержания, а квадрат - стабилизированной на длительное время. Оранжевой прямой показана граница  $\kappa(H)$  для эффективной связи с торцом при  $\beta = 0.9$ . Красным точкам соответствуют сильные потери, синим - удержание.

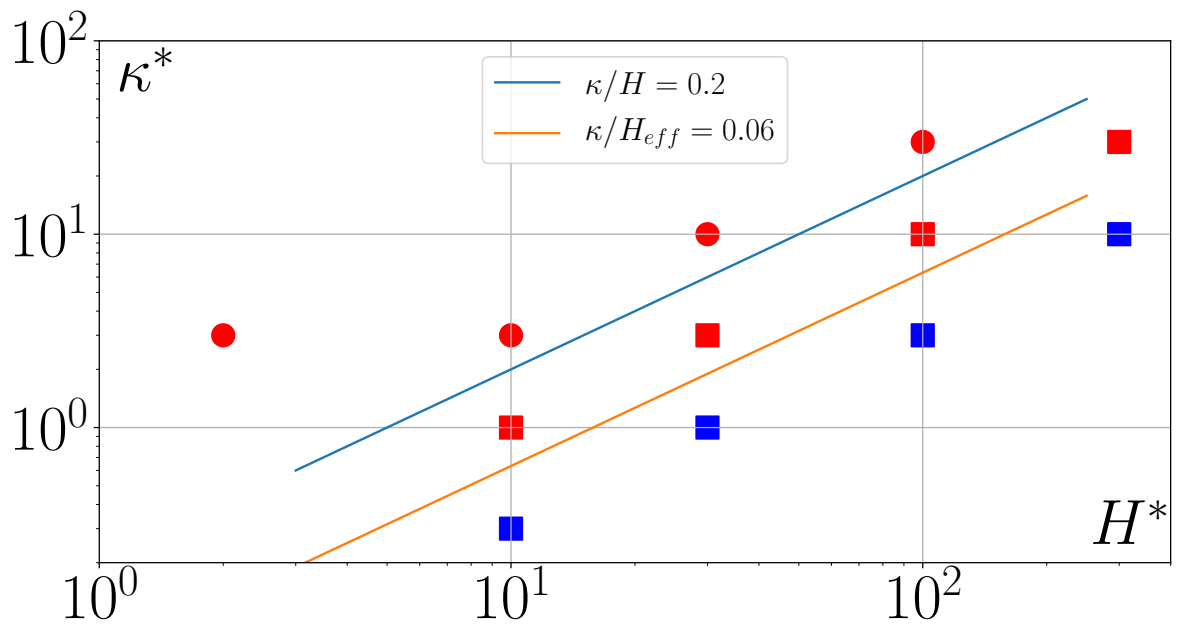


Рис. 13: Область благоприятных параметров для удержания.

Поскольку связь с торцом не может полностью стабилизировать желобковую неустойчивость, критерием «хорошего» удержания было невозникновение желобков за длительный промежуток времени моделирования. На Рис. 14 и Рис. 15 приведены примеры из моделирования «хорошего» и «плохого» удержания соответственно. Счётная область  $\Gamma$  попрежнему квадратная, круглая рамка добавлена для «красоты».

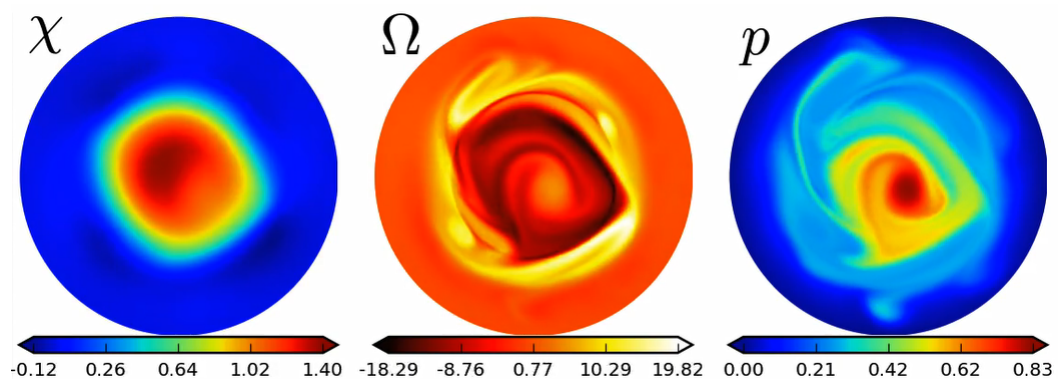


Рис. 14: «Хорошее» удержание для параметров  $\kappa = 1$   $H = 30$ . На профиле давления начинает всплывать желобок

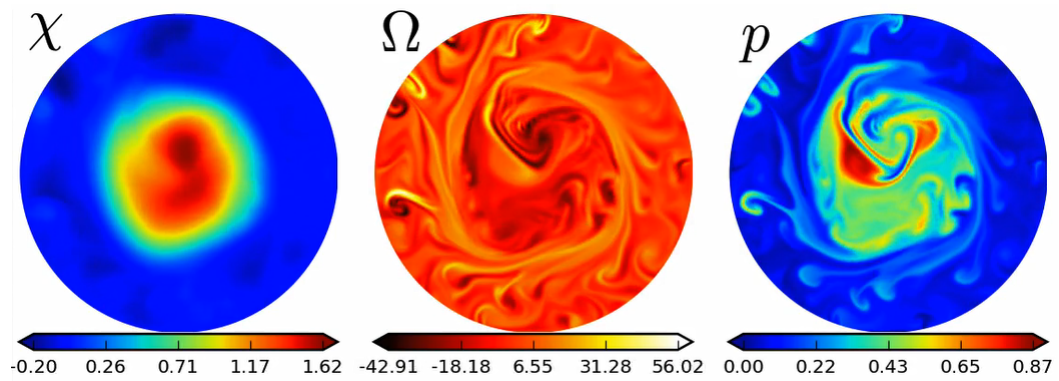


Рис. 15: «Плохое» удержание для параметров  $\kappa = 1$   $H = 10$ . Вихревой барьер не сдерживает конвекцию.

Как и ожидалось, вклад контролируемого потенциала на плазмаприёмниках уменьшается в соответствии с фактором  $\sqrt{1 - \beta}$ , уменьшающим связь с торцом из-за проседания по радиусу магнитного поля в центре ловушки.

## 4. Заключение

В представленной работе рассмотрена вихревая динамика плазмы с высоким давлением. При этом

1. Получены основные уравнения, описывающие вихревое движение неоднородной плазмы высокого давления в приближении малой кривизны магнитного поля и малой диссипации. В предельном переходе к низкому давлению и однородной плотности полученные уравнения совпадают с полученными в теории вихревого удержания однородной плазмы низкого давления.
2. Исследован вклад эффектов в удержание, возникающих в системе с высоким давлением - расширение магнитных поверхностей и проседание потенциала в области вытесненной плазмой магнитного поля. Первый эффект вносит положительный вклад в вихревое удержание, второй - более негативный, ослабевающий связь с электродами плазмодриёмника за счёт изменения равновесия.
3. Построена и реализована численная схема, аппроксимирующая систему уравнений. Её корректность подтверждена моделированием в сравнении с результатами предыдущих работ. Результаты численного моделирования находятся в хорошем согласии с оценкой ухудшения вихревого удержания на величину  $\sqrt{1 - \beta}$ .

## Список литературы

- [1] A.V. Anikeev, P.A. Bagryansky, and P.P. Deichuli. Observation of Magnetihydrodynamic Stability Limit in Cusp-Anchored Dynamic Trap.

*Physics of Plasmas*, 4:347, 1997.

- [2] P. A. Bagryansky, A. D. Beklemishev, and E. I. Soldatkina. Influence of radial electric field on high-beta plasma confinement in the gas dynamic trap. *Fusion Science and Technology*, 51(2 T.):340–342, 2007.
- [3] A. D. Beklemishev. Shear-flow Effects in Open Traps. *AIP Conference Proceedings*, 3, 2008.
- [4] A. D. Beklemishev and M. S. Chaschin. Effect of differential rotation on plasma stability in the gas-dynamic trap. *Fusion Science and Technology*, 47(5):279–281, 2005.
- [5] Alexeid D. Beklemishev, Peter A. Bagryansky, Maxim S. Chaschin, and Elena I. Soldatkina. Vortex confinement of plasmas in symmetric mirror traps. *Fusion Science and Technology*, 57(4):351–360, 2010.
- [6] Alexander A Ivanov, P. A. Bagryansky, Andrej A. Lizunov, A. L. Solomakhin, and A.A. Zuev. Effect Of Limiter Biasing On Plasma MHD Stability In GDT. *Fusion Energy Conference Proceedings*, 2002.
- [7] V. P. Pastukhov. Adiabatic separation of motions and reduced MHD equations. *Plasma Physics Reports*, 26(6):529–538, 2002.
- [8] George w. Platsman. An Approximation to the Product os Discrete Functions. *Journal of Meteorology*, 18(February):31–37, 1961.
- [9] M.N. Rosebluth, N.A. Krall, and N. Rostoker. Finite Larmor Radius Stabilization of “Weakly” Unstable Confined Plasmas. *Nuclear Fuision: Supplement, Part 1*, 6:1359, 1962.

- [10] M. N. Rosenbluth and C. L. Longmire. Stability of plasmas confined by magnetic fields. *Annals of Physics*, 1(2):120–140, 1957.
- [11] Г. Лэмб. *Гидродинамика*. Государственное издательство Научно-Технической литературы, 1947.