

Моделирование разлёта паров при
импульсном нагреве вольфрама
электронным пучком

В. А. Попов

5 июня 2018 г.

Титульный лист проще отдельно распечатать, это лишь его эрзац.

Содержание

1	Введение	3
2	Модели образования капель	5
2.1	Модель кипения	5
2.1.1	Разбиение капель	8
2.2	Влияние нагрева электронным пучком	9
2.3	Модель конденсации	10
2.4	Влияние газового потока	11
3	Движение сплошной среды	13
3.1	Уравнение на энергию	13
3.2	Граничные условия	14
3.3	Лагранжевы координаты	16
3.3.1	Уравнения в Лагранжевых координатах	17
4	Численная модель	19
4.1	Граничные условия	20
4.2	Анализ устойчивости	22
5	Заключение	24
	Список литературы	26

1 Введение

Одной из ключевых проблем термоядерного реактора с магнитным удержанием плазмы будет проблема первой стенки. С неё должен осуществляться съём энергии, а значит для этого нужны стойкие к высокой температуре материалы. В случае внештатных ситуаций на стенку вылетают импульсные мощные потоки плазмы. Токамаки считаются основным направлением развития термоядерной энергетики. В плазме токамаков могут развиваться неустойчивости, которые не приводят к разрушению плазмы, и потому считаются частью нормальной работы установки. Развитие таких неустойчивостей приводит к импульсным нагрузкам на стенку токамака [1]. Кроме импульсных тепловых нагрузок на первая стенку токамака воздействуют: постоянные тепловые нагрузки, нейтронное облучение, проникновение атомов из плазмы, других стенок, напускаемых газов. Полностью воспроизвести условия стенки на современных испытательных стендах не удаётся, поэтому в экспериментах воспроизводят различные составные части воздействия и подробно изучают их влияние на материал. На испытательных стендах, моделирующих импульсную тепловую нагрузку, в том числе установке ВЕТА расположенной в ИЯФ[2] и установке КСПУ [10] наблюдается разлёт капель, зафиксированных с помощью различных диагностик, в том числе оптической ПЗС-камерой. Такие капли не желательны на термоядерном реакторе по двум причинам: во-первых, капли сразу уносят макроскопическое количество вещества, внося большой вклад в эрозию, во-вторых, попадание капли в плазму приводит к её гашению.

Наблюдаемые капли могут быть результатом вскипания перегретого слоя жидкости. Образование такого слоя жидкости продемонстрировано в численных расчётах в предыдущей работе [6]. В новой работе для выяснения параметров капель, образовавшихся в результате кипения вольфрама при импульсном нагреве электронным пучком, были получены теоретические оценки размеров капель, времён вылета, скоростей. В пользу того что

наблюдаемые капли образовались именно в результате вскипания также говорит интерпретация снимков[4]. На этих снимках запечатлены треки светящихся частиц, улетающих в разные стороны от поверхности. Оказывается, что расстояние до поверхности и длина трека линейно связаны. При этом если считать, что капли имели постоянную скорость, то момент вылета всех капель будет совпадать с моментом окончания пучка. Такая интерпретация подразумевает отсутствие ускорения частиц. Для проверки справедливости этого предположения численно моделировался разлёт испарённого с поверхности нагреваемого материала газа и его влияние на летящие капли.

2 Модели образования капель

За каплеобразование при высоких тепловых импульсных нагрузках могут быть ответственны несколько различных механизмов. В работе рассмотрено образование капель из расплава в процессе кипения и конденсация капель из разлетающихся паров. Часто рассматривается другой механизм образования капель - модель развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В случае нагрева электронным пучком нет потока плазмы, а поток образующихся паров имеет преимущественно нормальную к поверхности компоненту скорости. Поэтому этот механизм не рассматривался. Также рассмотрена модель конденсации и влияние конденсации на газ. Все численные оценки в главе получены для вольфрама, как перспективного материала дивертора ИТЕР.

2.1 Модель кипения

При импульсном нагревании электронным пучком, как было показано [6], что при достаточной длительности и интенсивности ожидается уход максимума температуры под поверхность. Давление в жидкости в вакууме определяется потоком импульса испарённого вещества. Это значение зависит от температуры поверхности и может быть оценено, как давление насыщенного пара при этой температуре. Нахождение максимума температуры под поверхностью ведёт к тому, что давление насыщенных паров оказывается выше давления испаряющегося пара на поверхность (по крайней мере при достаточно большом перегреве, наблюдаемом в моделировании $\sim 100\text{K}$). В случае, если эта разность велика, то зародышевый пузырёк будет расти. Условие на равновесный радиус r_* задаётся равенством сил

$$\frac{2\sigma}{r_*} = P_s - P_0, \quad (1)$$

где σ - поверхностное натяжение, r_* - критический радиус пузырька, P_0 - давление приложенное к жидкости, P_s - давление насыщенных паров при

данной температуре. Эта формула верна для газа в однородной жидкости. Но для получения простейшей оценки параметров такого зародыша можно пренебречь изменением давления насыщенных паров от глубины, считая, что газ испаряется с самых тёплых мест. Пузырёк должен уместиться в зону с перегретой жидкостью $\lambda > r_*$, где λ - глубина пробега электрона в веществе. Он не сможет вырасти вне области, даже если случайно образуется, поскольку вне этой области давление насыщенных паров уже меньше давления жидкости. Он не может так же стать много больше, чем эта область, поскольку только в ней давление насыщенных паров выше и с поверхности будет происходить унос массы в газ, а не наоборот. Также следует учесть, что нагрев происходит за малое время и зародыш должен успеть образоваться прежде, чем жидкость слишком остынет. Это значит, что время образования капли должно быть сравнимым со временем существования слоя перегретой жидкости. Для чистого вещества можно получить оценку на необходимое время образования исходя из вероятности возникновения флуктуации с добавочной энергией равной энергии зародыша критического размера [12].

$$t = \frac{1\text{М}^3\text{с}}{R_h^2\lambda} e^{\frac{16\pi\sigma^3}{3(P_s - P_0)kT} - 88}, \quad (2)$$

где R_h - радиус облучённой области. Следовательно, превышение давления должно быть несколько большим, чем в уравнении 1. Оценку условия вскипания можно выразить так:

$$P_s - P_0 \geq \sqrt{\frac{16\pi\sigma^3}{3(88 + \ln(\tau R_h^2\lambda))kT}} \approx 10^9 \text{ Па}, \quad (3)$$

где τ - время облучения в секундах, а R_h и λ должны быть выражены в метрах. Столь высокие перепады давлений не ожидаются для ВЕТА, но возможны для более высокоэнергичных электронных пучков. На ВЕТА не используются чистые металлы и кипение идёт по гетерогенному пути с неизвестным числом зародышей и образующих их примесей. Поэтому указать характерные времена образования зародышей критического размера

становится трудно. При указанных условиях, пузырь возникнет и станет расти вплоть до границы, где он начнёт взаимодействовать с границей. Если к этому времени ещё не прекратился нагрев, то с промежутка жидкости, отделяющего пузырь от внешнего газа, не будет осуществляться теплоотвод. Промежуток продолжит истончаться вплоть до образования отверстия.

Отверстие, соединяющее пузырь с внешним газом, после образования начинает расширяться. Характерное время расширения отверстия в пренебрежении вязкостью

$$\tau_{ex} = \sqrt{\frac{\rho h r^2}{\sigma}}, \quad (4)$$

где h - толщина плёнки и r - радиус отверстия. Для оценки числа сверху r и h можно ограничить размером пузыря (его размер можно оценить как размер нагреваемой области) $r, h < \lambda \approx 10^{-5}$ м и тогда $\tau_{ex} \approx 10^{-6}$ с.

Газ, находящийся под плёнкой, начнёт вытекать из пузыря сквозь отверстие. Характерное время истечения оценим как время вязкого истечения через отверстие постоянного сечения

$$\tau_{fl} = \frac{h\eta R^3}{r^4(P_s - P_0)}, \quad (5)$$

где η - динамическая вязкость паров. Будем пользоваться типичным для металлов значением вязкости паров $\eta_g \approx 10^{-4}$ Па·с. Тогда $\tau_{fl} \approx 10^{-7}$ с.

Оценим время деформации полости под действием сил поверхностного натяжения. В пренебрежении вязкостью можно написать характерное время заполнения полости:

$$\tau_l = \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}} \approx 10^{-5} \text{ с}. \quad (6)$$

Получившееся время существенно больше времени стягивания к краям жидкости из промежутка, ранее разделявшего пузырь и внешний газ, а

также времени истечения газа $\tau_l \gg \tau_{fl}, \tau_{ex}$. Время роста пузыря можно оценить так:

$$\tau_{gr} = \sqrt{\frac{\rho R^2}{P_s - P_0 - \frac{\sigma}{R}}}. \quad (7)$$

В предположении, что разница давлений порядка самих давлений, время оказывается того же порядка. Согласно оценкам самым характерным временем процесса в целом оказывается время зарождения критического зародыша $\approx 10^{-5}$ с.

Поскольку стадии, предшествующие развитию полости делятся много меньше времени изменения формы полости, то можно считать, что полость движется при уже установившемся газе над поверхностью. На основании этого для оценок предположим, что полости, образованные различными способами, эквивалентны. Тогда из результатов работ [3],[5] можно сделать оценку на максимальную скорость улетающих капель $v_{max} \sim \frac{\sigma}{\eta}$. Такая величина максимальной скорости обусловлена тем, что при малых размерах полости доминирующую роль играет вязкость, и капли не образуются. С ростом же размера скорость капель падает.

2.1.1 Разбиение капель

Поскольку капля жидкая, её поверхность может колебаться. В зависимости от её размеров и скорости движения газового потока относительно капли часть собственных колебаний может стать неустойчивой. Появление первой неустойчивой моды задаёт условие на максимальный размер капли при заданной скорости относительно окружающего газа:

$$We = \frac{\rho_g d u^2}{\sigma} < We^*, \quad (8)$$

где We - число Вебера, We^* - критическое число Вебера, находящееся по различным измерениям в диапазоне от 1 до 100, d - радиус капли u - скорость капли относительно газа, ρ_g - плотность газа. Время разбиения кап-

ли $\tau_{fr} = \sqrt{\frac{\rho d^3}{\sigma}}$, расстояние от поверхности, на котором капли разобьются $l_{fr} = \sqrt{Wed} \frac{u_1}{u}$, где u_1 - скорость относительно поверхности. Полагая $u_1 \approx u$ получаем $l_{fr} = \sqrt{Wed}$. Таким образом, капли наблюдаются на расстоянии, когда разбиение уже должно завершиться.

Измерение скорости потока на установке ВЕТА не проводилось, поэтому пока нет сравнения результата этого раздела с экспериментом.

2.2 Влияние нагрева электронным пучком

В процессе нагрева материала над ним в результате испарения образуется облако паров, которые начинают разлетаться и охлаждаться. В работе [8] рассмотрен процесс разлёта газа при импульсном нагреве в приближении слабого поглощения энергии паром. Сделаем оценку применимости для нашего случая. В рамках приближения равномерного выделения энергии по массе оценим скорость разогрева газа. Характерная плотность мощности импульсного нагрева электронным пучком ВЕТА $\approx 10^{10}$ Вт/м². Глубина пробега электрона зависит от начальной энергии и равна по порядку величины 10^2 г/м², а молярная масса вольфрама 184 г/моль, откуда энергия пучка, рассеиваемая на моле вольфрамовых паров по порядку равна 10^{10} Вт/моль или если выразить нагрев в терминах температуры 10^9 К/с. Следовательно, при времени облучения газового слоя порядка 10^{-5} с уже становится определяющим процесс рассеяния энергии, поскольку энергия отданная электронами станет сравнимой с энергией в газе. В условиях облучения длительностью 100 мкс это приближение не применимо в случае, если переходит в тепло хотя бы 10% энергии выделяющейся электронами на атомах газа.

2.3 Модель конденсации

После того, как нагрев прекратится, газ будет занимать некоторую область над нагретым образцом, температура поверхности которого быстро падает, в связи с чем испарение замедлится. Сам газ будет остывать и существенным вопросом станет конденсация.

Как было сказано в пункте 2.2, на эту модель сильно влияет процесс рассеяния энергии пучка на газе, что затрудняет её моделирование и предсказание результатов экспериментов. Оценим то, что всё же возможно установить. В росте отдельной капли по оценкам важную роль играет процесс переноса энергии. Если бы капля росла на поверхности отводящего тепло тела, то её скорость роста была бы высокой и определялась бы давлением пара над каплей. Но при росте капли из вольфрамового пара конденсирующаяся частица приносит с собой огромную энергию, что приводит к тому, что капля быстро разогревается и начинает испаряться со сравнимой скоростью. Разница же испущенных и поглощённых частиц определяется балансом поступающей и уходящей энергии. Чтобы частица росла, она должна быть холоднее газа. Пренебрежём частью теплообмена с газом, обусловленной разностью температур газа и тела, поскольку удельная энергия конденсации велика ($L \sim 6 \times 10^4 \text{K} \gg T$). Запишем равенство теплообмена с газом, связанным с разным количеством частиц и излучением.

$$\dot{d} = \frac{\sigma_b T^4}{L\rho}, \quad (9)$$

где d - размер капли, σ_b - постоянная Больцмана, L - теплота испарения. Капли при этом движутся от мишени со скоростью потока, которая порядка тепловой $v_T = \sqrt{\frac{RT}{M}}$. Откуда размер капли в зависимости от расстояния может быть оценён по следующей формуле:

$$d = l \frac{\sigma_b T^4}{L\rho v_T}. \quad (10)$$

Для типичных условий $d/l = 10^{-5}$ и это значит, что на расстоянии в 1см, на котором фиксируются капли с размерами в несколько мкм по рассеянию

лазерного излучения, не могут быть образованы таким способом. Таким образом, эта модель не может объяснить наблюдаемых на ВЕТА разлетающихся капель. Также, в этой модели нет порога по тепловой нагрузке, до которого бы не образовывались капли.

Также важно знать темпы образования капель. В работе [8] оценивается вероятность образования капли в пересыщенном газе как вероятность тройных столкновений. По порядку величины частота тройных столкновений может быть оценена, как вероятность при случайном распределении частиц оказаться ещё одной в области столкновения $\nu_3 \propto T^{-1/2} \rho^{-2}$. Подстановка размера частиц даёт результат, что при температуре $\approx 7000\text{K}$ длина пробега до тройного столкновения становится $\approx 10^{-6}\text{мкм}$, что означает важность учёта этого фактора в моделировании. При этом следует учитывать здесь же то, что наличие ионов может ускорить процесс конденсации.

2.4 Влияние газового потока

После того, как капля сформируется и начинает свой полёт от газа, она, помимо возможности разбиения на более мелкие капли, также будет доускоряться потоком газа. Эффект наблюдался Ньютоном и может быть объяснён, как отражение изначально неподвижных атомов от поверхности с удвоенной скоростью. В учебнике [7] тормозящая (относительно потока) сила лобового сопротивления имеет вид

$$F_{tr} = C_x \frac{\rho_g V^2}{2} S, \quad (11)$$

где C_x - безразмерный коэффициент, зависящий от скорости при малых скоростях и приближающийся к единице при больших ($Re \geq 1000$), V - относительная скорость, S - площадь поперечного сечения. Для начала необходимо убедиться в том, что скорость велика.

$$Re = \frac{ur}{\nu} = \frac{ur}{u_T \lambda}, \quad (12)$$

где λ - длина свободного пробега, u_T - среднеквадратичная скорость. В нашем случае скорость газа порядка его среднеквадратичной скорости, а размер капли оказывается в окрестности диапазона 1 – 100 длин свободного пробега. Таким образом, желателен учёт зависимости коэффициента от скорости. Поскольку коэффициент растёт с падением скорости, то для оценок снизу можно положить его равным единице.

Оценим влияние разгона на каплю, скорость которой мала по сравнению со скоростью газа. В таком случае её ускорение будет

$$\frac{4\pi}{3}\rho_l R^3 a \approx \frac{\pi}{2}\rho_g R^2 V_g^2 \quad (13)$$

$$V \approx \sqrt{2ax} \approx V_g \sqrt{\frac{3\rho_g x}{4\rho_l R}}, \quad (14)$$

где R - радиус капли, V_g - скорость газа, x - пройденный путь, где и регистрируется скорость частицы. При этом на ВЕТА оказывается, что для частиц с размером порядка 10мкм скорость, до которой они разгоняются, становится порядка скорости газа. Требуется подробное моделирование этого эффекта для объяснения наблюдаемых скоростей намного меньших, чем у разлетающегося газа.

3 Движение сплошной среды

При разлёте газа его масса и импульс изменяются локально (на размерах много больших, чем длина свободного пробега), в соответствии с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho v) = 0 \quad (15)$$

и уравнением Эйлера

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla P, \quad (16)$$

где ρ - плотность вещества, v - скорость, P - давление.

3.1 Уравнение на энергию

Этих уравнений недостаточно и необходимы две связи давления, плотности и температуры вещества. Поскольку процесс быстрый, будем полагать, что теплопроводность не существенна. Простым частным случаем после окончания нагрева может служить уравнение адиабаты идеального газа:

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь случай выделения энергии пучком в идеальный газ. Известно, что электронный пучок выделяет почти постоянную энергию на единицу массы. В таком случае выведем уравнение, описывающее изменение энергии. Будем везде далее писать для 1 моля:

$$dU = Ndt - PdV \quad (18)$$

при этом если мы считаем газ идеальным, то энергия на один моль зависит только от температуры

$$U = C_v T. \quad (19)$$

Будем считать C_v постоянной. dT выразим из дифференциала уравнения состояния

$$PdV + VdP = RdT \quad (20)$$

Собирая всё в одно уравнение получаем

$$C_v(PdV + VdP) = R(Ndt - PdV) \quad (21)$$

учтём, что $V\rho = M$ и $\rho dV + Vd\rho = 0$ что даёт $dV = -M\frac{d\rho}{\rho^2}$. Тогда получаем

$$\frac{C_v}{R} \left(-P\frac{Md\rho}{\rho^2} + \frac{M}{\rho}dP \right) - P\frac{Md\rho}{\rho^2} = Ndt \quad (22)$$

учтём также, что $C_v = \frac{1}{\gamma-1}R$. Поделим уравнение [22] на C_v/R (используя $\rho RT = PM$) и получим:

$$-P\frac{Md\rho}{\rho^2} + \frac{M}{\rho}dP - P(\gamma-1)\frac{Md\rho}{\rho^2} = \frac{RN}{C_v}dt \quad (23)$$

$$-\gamma P\frac{Md\rho}{\rho^2} + \frac{M}{\rho}dP = \frac{RN}{C_v}dt \quad (24)$$

$$-\gamma\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dP}{P} = \frac{\rho}{PM}\frac{RN}{C_v}dt = \frac{\rho RT}{PM}\frac{N}{TC_v}dt = \frac{N}{TC_v}dt \quad (25)$$

$$d \ln (\rho^{-\gamma}P) = \frac{N}{TC_v}dt \quad (26)$$

И называя временем удвоения энергии $\tau_E = \frac{C_v T}{N}$ и выражая через него получаем

$$\frac{d}{dt} \ln(P\rho^{-\gamma}) = \frac{1}{\tau_E}. \quad (27)$$

Тут отмечу, что величина τ_E не является постоянной, а введена для упрощения восприятия смысла написанного.

Три уравнения 27,16,15 определяют эволюцию свойств среды (P, ρ, v) в зависимости от граничных и начальных условий.

3.2 Граничные условия

В работе [9] было проанализировано несколько возможных граничных условий и все они признаны не удовлетворяющими заданным критери-

ям. Обзор позволяет понять, что есть разнообразие приближений, которые могут быть написаны на границе. Но по видимому, идея выписать потоки импульса, массы и энергии как суммы двух независимых слагаемых из вещества и из газа не продуктивна. На картинке 3.2 изображена такая постановка условий. С поверхности жидкости вылетает вещество с таким распределением по скоростям, что его потоки массы энергии и импульса будут скомпенсированы с насыщенным паром соответствующей температуры. С другой стороны полагается поток вещества, летящего из газа на стенку, как та часть распределения, что имеет компоненту скорости на жидкость. Суммарный поток полагается после этого равным потоку с газе на удалении от стенки. Равенство потоков объясняется тем, что слой можно выбрать очень тонким, порядка нескольких длин свободного пробега. Тогда инерцией этого слоя можно пренебречь и потоки сохраняющихся величин равны на границах малой области. В таком случае, у нас имеется следующие неизвестные параметры газа вблизи стенки (уже после установления равновесного распределения по скоростям): ρ, v, T . Также у нас сохраняются потоки импульса, энергии и массы. Как видно, задача о стационарном потоке принципиально разрешается и уже из построения следует, что все три параметра полностью определяются температурой стенки и соответствующему давлению насыщенных паров при этой температуре. Таким образом, принципиально невозможно описывать и конденсацию и испарение и равновесие таким подходом, не меняя выбор функций распределения. Причиной такого результата я вижу в том, что при учёте встречных потоков пренебрегают их взаимодействием. Поток из газа только вдали от переходного (Кнудсеновского) слоя описывается равновесной функцией распределения. Для того же, чтоб приблизиться к поверхности, он должен пролететь сквозь встречный поток. При описанном выше подходе он уже у поверхности описывается как равновесный, несмотря на неравновесное возмущение произвольной интенсивности (поскольку потоки со стенки могут быть как много меньше, так и много больше потоков газа в зависимости

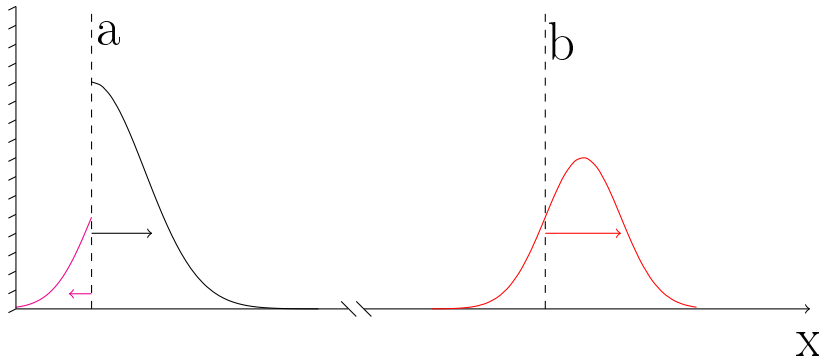


Рис. 1: Схематическая иллюстрация обычного граничного условия: чёрным изображено распределение по скоростям частиц, вылетевших из материала на поверхности 'а', фиолетовым- из газа. Красным изображено распределение частиц на поверхности 'б', которая находится за областью установления равновесия

от температуры поверхности и состояния газа).

3.3 Лагранжевы координаты

Для упрощения модели положим движение одномерным. Возможны два случая разлёта газа случая, когда допустимо использовать одномерное приближение: сферическая симметрия (когда движение осуществляется вдоль радиуса) либо движение вблизи поверхности от неё. Первое может быть использовано для взаимопроверки с интерферометрией, а второе для вычисления воздействия на капли, вылетевшие со стенки. Также перейдём теперь от обычных к субстанциональным массовым координатам (m, τ) , таким что

$$dm = C_n x^n \rho dx \quad (28)$$

$$\tau = t. \quad (29)$$

где $C_n = 1, 2\pi, 2\pi$ при $n = 0, 1, 2$, где n - размерность разлёта за вычетом единицы. В трёхмерном случае константа взята 2π , а не 4π , поскольку разлёт происходит только в полусфере. По своему смыслу τ то же самое, что t ,

а m - масса газа находящегося с одной стороны от нумеруемой поверхности. Чтобы упростить чтение формул, для t и τ используются разные символы (поскольку они из разных систем координат и частная производная по ним различна), а также аргументами всюду является упорядоченная пара (m, τ) . Тогда для всякой функции g выполнено

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial g}{\partial x} v + \frac{\partial g}{\partial t} \quad (30)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial m} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{1}{C_n x^n \rho} \quad (31)$$

3.3.1 Уравнения в Лагранжевых координатах

В этих переменных все уравнения в приближении идеального газа и пренебрежении нагревом выписываются в виде:

$$\frac{\partial \ln(P\rho^{-g})}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_E} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{\rho x^n C_n} \right) \quad (33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial m} \quad (34)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = v \quad (35)$$

Для решения необходимо иметь граничные условия. В целях получения результата, который затем можно будет уточнять возьмём условия в виде:

$$\dot{m}_b(t) = \eta(T_{surf}(t), \rho(m_b, t), T(m_b, t), v(m_b, t)) \quad (36)$$

$$x(m_b, t) = 0 \quad (37)$$

$$P(m_b, t) = P_s(T_{surf}(t)) \quad (38)$$

$$\rho(m_b, t) = \rho_s(T_{surf}(t)) \quad (39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial m}(m_b, t) = 0, \quad (40)$$

где P_s, ρ_s - давление и плотность насыщенного газа при температуре поверхности, η - скорость испарения. Такие граничные условия выполняются в случае равновесия.

$$\eta(T_{surf}, \rho, T, v) = P_s(T_{surf}) \sqrt{\frac{M}{8\pi RT}} - \rho \sqrt{\frac{RT}{8\pi M}} \Gamma(u_* = v \sqrt{\frac{M}{2RT}}) \quad (41)$$

$$\Gamma(u_*) = \left(e^{-u_*^2} - u_* \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(u_*) \right), \quad (42)$$

где $\Gamma(u_*)$ - фактор, получающийся в линейном приближении при пренебрежении взаимодействием с испаряющимися парами. При высокой скорости он обращается в 0, при нулевой скорости в 1. Таким образом эта модель имеет одним из правильных частных решений равновесие.

4 Численная модель

Поскольку уравнения на скорость и координату не влияют прямым образом на пару уравнений 33 и 27, и только эта пара является нелинейной, то и его моделирование является самым сложным. Необходимое к моделированию уравнение выписывается в виде:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{\rho}. \quad (43)$$

Поскольку уравнение нелинейное, будем его решать численно, на сетке (m, t) с постоянным шагом между узлами δm (кроме последнего, там будет ячейка переменной по времени массы) методом последовательных приближений (Ньютона). Запишем уравнение в конечных разностях в таком виде:

$$-P_+^+ - P_-^+ + 2P_0^+ = \frac{\delta m^2}{\delta t^2} \left(\frac{1}{\rho_0^+} - \frac{2}{\rho_0^0} + \frac{1}{\rho_0^-} \right), \quad (44)$$

где, как это принято, верхний индекс означает временной слой, а нижний - координатный. Прямой подстановкой достаточно гладкой функции получаем порядок аппроксимации $O(\tau, \delta m^2)$. Но в этом виде оно не линейное и поэтому необходимо произвести его линеаризацию по неизвестным с верхнего слоя.

Идея метода Ньютона в том, что если $f(x_*) = 0$, а x близка к x_* то $0 = f(x_*) \approx f(x) + f'(x) * (x_* - x)$, откуда выходит, что приближённое линейное уравнение на x_* выглядит как $f(x) + f'(x) * (x_* - x) = 0$. Если повторять эту операцию, то мы всё ближе будем оказываться к решению. Удобно здесь также будет избавиться от плотности на новом шаге, чтобы систему было можно просто решить. Для этого будем означать f^{+} - функцию с предыдущей итерации уравнения.

$$\rho_0^+ = \left(\frac{P_0^+}{A_0^+} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx \rho_0^{+'} \left(1 + \frac{P_0^+ - P_0^{+'}}{\gamma P_0^{+'}} - \frac{A_0^+ - A_0^{+'}}{\gamma A_0^{+'}} \right) \quad (45)$$

$$\frac{1}{\rho_0^+} \approx \frac{1}{\rho_0^{+'}} - \frac{\rho_0^+ - \rho_0^{+'}}{\rho_0^{+'2}} = \frac{1}{\rho_0^{+'}} - \frac{P_0^+ - P_0^{+'}}{\gamma \rho_0^{+'} P_0^{+'}} + \frac{A_0^+ - A_0^{+'}}{\gamma \rho_0^{+'} A_0^{+'}} \quad (46)$$

Если энергия не выделяется, то $A^{+'} = A^+ = A^0$ и A выпадает из разложения.

$$-P_+^+ - P_-^+ + \left(2 + \frac{\delta m^2}{\gamma \delta t^2 P_0^{+'} \rho_0^{+'}} \right) P_0^+ = \frac{\delta m^2}{\gamma \delta t^2} \frac{1}{\rho_0^{+'}} + \frac{\delta m^2}{\delta t^2} \left(\frac{1}{\rho_0^{+'}} - \frac{2}{\rho_0^0} + \frac{1}{\rho_0^-} \right) \quad (47)$$

Иначе необходимо учитывать нагрев через линеаризацию A^+ . Получившиеся уравнения совпадают в таком случае с полностью консервативными уравнениями, предлагаемыми к моделированию Самарским [11]. После получения распределения по давлению по массе легко по формулам 34,35 вычислить распределение по координате и скорость газа. При этом метод вычисления не играет роли, поскольку вычисленные значения нигде не используются кроме финальной визуализации.

4.1 Граничные условия

В текущей модели используются следующие граничные условия:

$$P_0^n = P_s(n\delta t) \quad (48)$$

$$\rho_0^n = \rho_s(n\delta t). \quad (49)$$

Хотя поскольку уравнение второго порядка по времени, то казалось бы, в большем количестве граничных условий нет необходимости, но из-за появления новых точек, их начальную скорость необходимо определять. В текущей модели скорость новых точек равна скорости первой точки, рас-

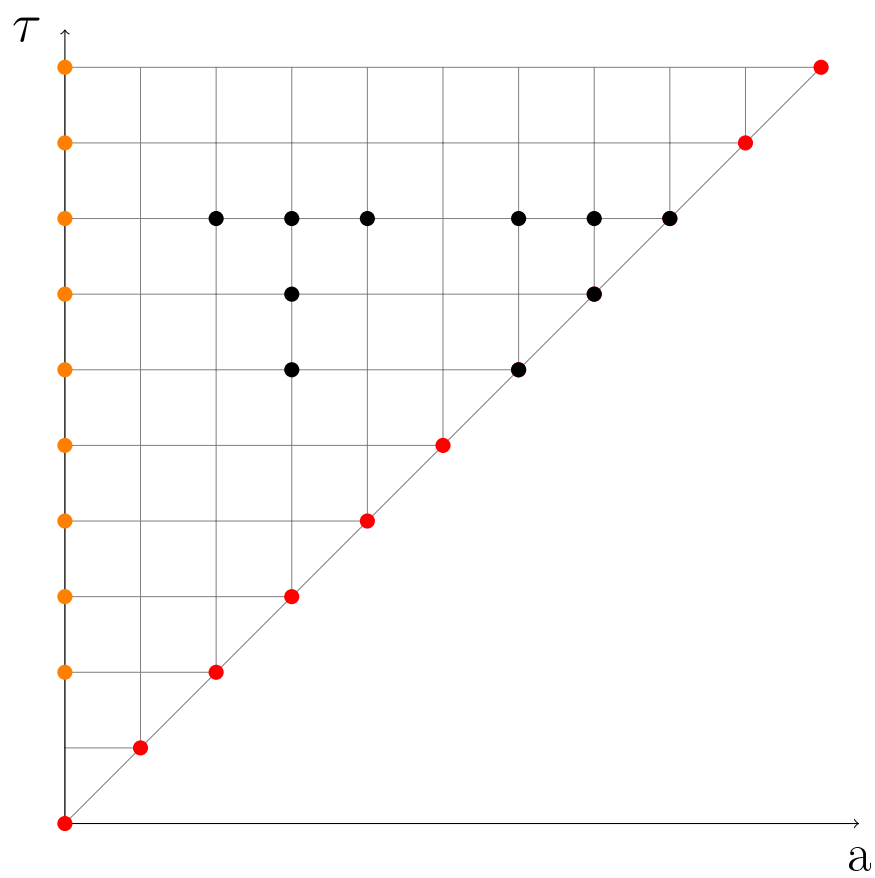


Рис. 2: Иллюстрация сетки: чёрным изображён пример узлов, затрагиваемых одним уравнением, цветными - необходимые граничные условия

щеплением которой они и получаются. Численная схема для скорости движения границы:

$$\frac{m_0^+ - m_0^0}{\delta t} = (\nu(T_s(n\delta t)) - \nu(T_0^{+'})\Gamma(v_0^{+'})) \quad (50)$$

Если масса первой ячейки $m_0^+ > 1.5\delta m$, то на следующем временном слое ячейка разделяется так, чтоб масса добавленных ячеек была δm , а крайней - остаток. При этом интенсивные характеристики этих точек равны (давление, температура, плотность, скорость), а координата делится пропорционально массе. Далее разделившиеся ячейки считаются независимо.

С одной стороны, такой подход позволяет сильно упростить запись граничных условий, с другой стороны он уменьшает точность моделирования у граничной ячейки до $O(\delta m)$. Помимо этого, не устранённым недостатком любой записи граничного условия на данный момент остаётся не доказанная достоверность. Необходимы дальнейшие исследования для отыскания разумно простой, но в тоже время воспроизводящей характер действительной закономерности газообмена в приповерхностном Кнудсеновском слое. В частности, данная форма записи граничных условий завышает поток импульса, поскольку в результате расчётов он оказывается больше, чем обеспечивается испаряющимся материалом, в то время, как скорость продолжает быть направленной от стенки.

4.2 Анализ устойчивости

Задача о определении сходимости может быть разделена на два вопроса. Сходимость линеаризации к нелинейной разностной схеме и сходимость нелинейной разностной схемы к точному решению. Линеаризация оказывается устойчивой в случае достаточно близкого начального приближения, когда остаток разложения оказывается мал по сравнению с линейной частью разложения решаемой функции $F_i(P_{i-1}^+, P_i^+, P_{i+1}^+) = 0$. Поскольку по двум из трёх переменных с верхнего слоя она линейна, то определяться

устойчивость будет разложением по средней переменной. Поскольку вид функции F известен, то можно оценить нелинейный остаток, имеющий вид $\delta F_i = (P_i^+)^{-\frac{1}{\gamma}} - (P_i^{+'})^{-\frac{1}{\gamma}} + (P_i^{+'})^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{P_i^+ - P_i^{+'}}{\gamma P_i^{+'}}$. Если разложить в ряд, то безразмерный коэффициент при множителях $\left(\frac{P_i^+ - P_i^{+'}}{P_i^{+'}}\right)^n$ по модулю медленно строго монотонно падает с ростом n , при этом коэффициенты знакопеременные. На основании этого можно заключить, что при $\left|\frac{P_i^+ - P_i^{+'}}{P_i^{+'}}\right| \leq 1$ этот ряд ограничен своим первым слагаемым $|\delta F_i| < \left|\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial P_i^{+2}} (P_i^+ - P_i^{+'})^2\right| = \frac{1+\gamma}{2\gamma^2} P_i^{+'-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{P_i^+ - P_i^{+'}}{P_i^{+'}}\right)^2$. Если этим слагаемым можно пренебречь, то и метод сойдётся.

Другой подзадачей является анализ устойчивости нелинейной схемы к возмущениям. Пусть, возмущения от точного решения будут малы. Тогда можно разложить в ряд по возмущениям. Исходя из вида уравнения можно ожидать два вида возмущений. Как целого, и колебания соседних точек в противофазе. совместное возмущение параметров приводит к занулению слагаемого с массовой производной. Уравнение становится уравнением на равенство нулю второй производной по времени. Такое возмущение не развивается и остаётся малым. Возмущение колебаний точек в противофазе можно рассмотреть следующим образом. Приравняем возмущения $\delta P_- = \delta P_+ = -\delta P_0$. После чего будем смотреть, как возмущение будет развиваться во времени. Для этого линеаризуем возмущение возмущения $\delta_1 P = \delta P_0^+ - \delta P_0^0 = \delta P_0^0 - \delta P_0^-$. После этого в уравнении остаётся один параметр $\frac{\delta m^2}{\gamma \tau^2 P_0^0 \rho_0^0}$ от которого зависит устойчивость схемы. А именно, если этот параметр оказывается порядка единицы или больше, то возмущение затухает. Что и означает устойчивость схемы. Из устойчивости и аппроксимации следует сходимость.

5 Заключение

Для выяснения возможности закипания вольфрама при импульсном нагреве электронным пучком с длительностью порядка 100 мкс были проделаны аналитические оценки времени необходимого для образования капли в перегретом слое при условии наличия центров образования пузырьков. Оценены времена стадий развития пузырька и показано, что капли могут быть образованы из зародыша за время порядка 10^{-5} с. Из рассмотрения была исключена модель неустойчивости Кельвина-Геймгольца, поскольку она не согласовывалась с наблюдаемыми данными. Модель конденсации капель не позволяет объяснить образования таких крупных капель, которые наблюдались в эксперименте. На основании этого был сделан вывод, что наиболее правдоподобным механизмом генерации капель является кипение. Капли, образующиеся кипением предположительно имеют размер около 1 мкм и скорость порядка 10 м/с. Значение скорости частиц, образованных по механизму кипения, меньше наблюдаемого в экспериментах.

Поскольку после образования капли пролетают в плотном газе, то он меняет их скорость, и были сделаны оценки параметров процесса. Оценки сил, действующих на каплю показали, что эффект сильно меняет скорость капель на расстоянии 1 см - характерном размере наблюдаемого пространства. Такой результат мог быть обусловлен пренебрежением падением давления и плотности газа из-за расширения и прекращения нагрева. Для учёта этих эффектов были получены уравнения движения для идеального газа с учётом и без учёта выделения в нём энергии. Составлены разностные аналоги дифференциальных уравнений. Описанная численная схема была реализована на языке программирования python. На основании распределения давления, плотности и скорости по координате рассчитано влияние газа на каплю. Результаты численного моделирования сходятся с предварительной оценкой в том смысле, что частица размером 10 мкм ускоряется до скорости, близкой к скорости газа и начинает лететь в потоке уже на пер-

вом сантиметре пути. Этот результат также противоречит наблюдаемым значениям скорости. Поэтому необходима дальнейшая теоретическая работа, поскольку модель на текущий момент не учитывает ряд факторов, которые могут количественно изменить результат. Рассмотрение граничных условий привело к пониманию неудовлетворительности распространённого подхода к их построению и необходимости получения более общего описания. Используемые же граничные условия завышают поток импульса. Модель идеального газа возможно выполняется не во всём моделируемом промежутке и требует работы по уточнению в области высокой плотности.

Список литературы

1. A full tungsten divertor for ITER: Physics issues and design status / R. Pitts [и др.] // Journal of Nuclear Materials. — 2013. — Т. 438. — С. S48–S56. — ISSN 0022-3115. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2013.01.008>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022311513000160> ; Proceedings of the 20th International Conference on Plasma-Surface Interactions in Controlled Fusion Devices.
2. Diagnostics of the dynamics of material damage by thermal shocks with the intensity possible in the ITER divertor / L. N. Vyacheslavov [и др.] // Physica Scripta. — 2018. — Март. — Т. 93, № 3. — С. 035602. — ISSN 0031-8949. — DOI: [10.1088/1402-4896/aaa119](https://doi.org/10.1088/1402-4896/aaa119). — URL: <http://stacks.iop.org/1402-4896/93/i=3/a=035602>.
3. Jet formation in bubbles bursting at a free surface Jet formation in bubbles bursting at a free surface / L. Duchemin [и др.]. — 2015. — DOI: [10.1063/1.1494072](https://doi.org/10.1063/1.1494072).
4. Observation of dust particles ejected from the tungsten surface by transient heat flux with small-angle scattering of cw laser light / L. N. Vyacheslavov [и др.] // Nuclear Materials and Energy. — 2017. — Т. 12. — С. 494–498. — ISSN 23521791. — DOI: [10.1016/j.nme.2017.01.023](https://doi.org/10.1016/j.nme.2017.01.023).
5. Shi Y., Miloshevsky G., Hassanein A. Boiling induced macroscopic erosion of plasma facing components in fusion devices // Fusion Engineering and Design. — 2011. — Т. 86, № 2/3. — С. 155–162. — ISSN 09203796. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2010.10.002](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2010.10.002). — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.fusengdes.2010.10.002>.
6. Theoretical modeling of shielding for plasma flow and electron beam heating / V. A. Popov [и др.] // AIP Conference Proceedings. — 2016. — DOI: [10.1063/1.494072](https://doi.org/10.1063/1.494072).

-
- 1063/1.4964217. — URL: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84994182250%7B%5C%7DpartnerID=MN8TOARS>.
7. Аржаников Н., Мальцев В. Аэродинамика. — 2-е изд. — Оборонгиз, 1956.
 8. Действие излучения большой мощности на металлы / С. Анисимов [и др.] ; под ред. А. Бонч-Бруевич, М. Ельяшевич. — Главная редакция физико-математической литературы, 1970.
 9. Мажукин В. И., Прудкоеский П. А., Самохин А. А. Математическое моделирование // МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. — 1993. — Т. 5. — С. 3—10.
 10. Разбрызгивание вольфрама при воздействии интенсивного потока плазмы / Н. Климов [и др.] // Вопросы атомной науки и техники. — 2009. — Т. 2. — С. 52—61. — (Термоядерный синтез).
 11. Самарский А.А. П. Ю. Разностные методы решения задач газовой динамики. — 3 дополненное. — 1992.
 12. Теплофизические свойства жидкостей в метастабильном состоянии / В. Скрипов [и др.]. — Атомиздат, 1980.