

**Министерство образования
Российской Федерации
Новосибирский Государственный Университет
Физический Факультет
Кафедра физики плазмы**

**Квалификационная работа на соискание степени
магистра**

**Численное моделирование генерации волн плотности в
галактическом диске**

Снытников Алексей Владимирович

**Научный руководитель
д.ф.-м.н. Г.И.Дудникова**

Новосибирск – 2002

Содержание

1	Введение	3
1.1	Актуальность проблемы	3
1.2	Описание структуры галактики	4
1.3	Основные понятия теории волн плотности	5
2	Физическая постановка задачи	7
2.1	Оценка влияния столкновительных процессов	7
2.2	Оценка релятивистской поправки	9
3	Исходная система уравнений	10
4	Анализ дисперсионного соотношения	10
5	Численный метод решения задачи	15
5.1	Безразмерные переменные	15
5.2	Методы решения уравнений	16
5.2.1	Кинетическое уравнение	16
5.2.2	Уравнение Пуассона	17
5.3	Распараллеливание алгоритма	19
5.4	Параметры реализации	21
6	Результаты численных расчетов	22
6.1	Инкременты джинсовской неустойчивости	22
6.2	Эволюция диска	25
6.3	Влияние температуры на устойчивость диска	26
6.4	Разогрев диска	29
6.5	Сравнение с наблюдениями	30
7	Выводы	32
	Литература	32

1 Введение

1.1 Актуальность проблемы

Задача образования и эволюции структуры галактики активно исследуется в последнее время [14]. Благодаря новым методам наблюдений в оптическом и инфракрасном диапазонах, а также запуску космического телескопа Хаббла накоплен большой объем данных. В частности, с помощью красных смещений определены возрасты наблюдаемых галактик, эволюция их светимости. Наблюдения в ближнем инфракрасном диапазоне позволяют восстановить историю образования звезд.

Трудность заключается в том, что большинство теоретических работ ограничиваются воспроизведением набора наблюдательных данных в соответствии с некоторой теорией. Число теоретических параметров, влияющих, например, на светимость галактики, очень велико, поэтому фотографическое сходство с наблюдениями может только подтвердить правильность гипотезы.

Следует отметить, что задача моделирования диска галактики является нестационарной, при незначительно отличающихся начальных условиях можно получить совершенно различные варианты эволюции. Кроме того, для определения гравитационного потенциала необходимо решать трехмерное уравнение поля. Этими соображениями объясняется то, что до сих пор не построено адекватной численной модели диска галактики. Большинство существующих моделей содержат серьезные ограничения обусловленные либо использованием сетки в декартовых координатах, что может приводить к образованию нефизических четырехрешечных структур, как было отмечено в [18], либо не позволяют принципиально увеличить количество частиц, что дает высокий уровень численных шумов.

Цель данной работы заключается в том, чтобы создать численную модель диска галактики, которая позволит выйти за рамки только качественных сравнений. Также необходимо было создать средства для диагностики волн плотности как основного меха-

низма образования крупномасштабной структуры диска.

1.2 Описание структуры галактики

Галактика - это четко ограниченная, гравитационно связанная звездная система, содержащая от нескольких миллионов до многих миллиардов звезд [9]. Галактики - основной структурный элемент более крупных объединений - скоплений и сверхскоплений галактик, определяющих крупномасштабную структуру вселенной. Характерные расстояния между галактиками в скоплениях близки к 0.1 - 0.5 Мпк (1 парсек(пк) - $3.0287 \cdot 10^{16}$ м), тогда как размер ярких галактик в 10 - 20 раз меньше (~ 30 кпк).

Крупномасштабная картина распределения яркости у большинства наблюдаемых галактик имеет много общих черт. Это позволяет построить классификацию на основе внешних (оптических) свойств. По классификации Хаббла, галактики делятся на три типа: E, S и SB. Первый тип(E) включает эллиптические и сферические галактики, второй(S) - нормальные спирали, третий тип составляют спирали с центральной перемычкой (баром), иногда называемые пересеченными спиралями. Существуют также галактики с неправильной пространственной структурой (тип Ir).

Размер видимой в оптическом диапазоне части галактики составляет в зависимости от массы от 1 - 3 кпк для карликовых до 50 кпк для гигантских галактик. Средняя плотность вещества галактики составляет 10^{-20} - 10^{-21} кг/м³, в центральных областях достигая 10^{-17} кг/м³. Средняя скорость движения звезд в галактиках $e \sim 100$ км/с. К спиральным относятся около 80 % галактик высокой светимости. Типы S и SB разбиты на три подтипа: Sa, Sb, Sc и SBa, SBb, SBc, соответствующие переходу от сильно закрученных спиралей (подтипы Sa и SBa) к слабо закрученным (подтипы Sc и SBc). Количество S- и SB-галактик примерно одинаково.

Классификация Хаббла отражает не только видимые черты

галактик, но в значительной степени и их физические свойства. Например, в Sa-галактиках, имеющих сильно закрученные спирали, существует, как правило, сильная концентрация массы в центре [12], более того, основная часть массы находится в центре и образует то, называется центральным телом ("балдж" в англоязычной литературе). Напротив, в Sb- и Sc-галактиках с более открытой и мощной спиральной структурой концентрация массы в центре намного меньше. Кроме того, существует связь между массой галактики и мощностью ее спиральной структуры. Так, сверхгигантские галактики имеют протяженную мощную спиральную структуру, в нормальных галактиках она рудиментарна, карликовые галактики поздних типов вообще не имеют спиральной структуры.

Существование долгоживущей структуры в дисковых галактиках - очень серьезный вопрос, так как любое механически не связанное образование должно быстро размываться вследствие дифференциального вращения. Видимые спирали в галактиках, вероятно, представляют собой спиральные волны плотности, которые вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг центра системы.

1.3 Основные понятия теории волн плотности

Впервые идея о волнах плотности как о механизме образования спиральных рукавов в галактиках была высказана Линдбладом [17]. Аналогично волнам пространственного заряда в плазме, малые возмущения плотности рассматриваются в виде

$$\Sigma \sim \Sigma_1(r) \exp [i(\omega t - m\varphi)]$$

здесь r, φ - полярные координаты, m - число спиральных рукавов, ω - частота волн, которая может быть представлена в виде

$$\omega = m\Omega_p - i\gamma$$

здесь Ω_p - угловая скорость спирального узора, γ - инкремент.

Минимальная длина, на которой может развиваться гравитационная неустойчивость - это так называемая джинсовская длина

$$\lambda_J = \sqrt{4\pi G\rho}$$

качественно - это минимальный размер капли, который удерживается вместе вследствие самогравитации. В плазме аналогичной величиной является дебаевский радиус

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi ne}}$$

Дисперсионное уравнение для волн плотности проще всего получить в гидродинамическом приближении.

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 + k^2 c^2 - 2\pi G\sigma \|k\| \quad (1)$$

где c - тепловая скорость звезд, κ - эпициклическая частота

$$\kappa = 2\omega \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \omega}{d \ln r}}$$

Это уравнение дает хорошее качественное описание поведения волн, в частности, оно показывает два механизма стабилизации диска: вследствие высокой динамической температуры или вращения. Однако уравнение (14) применимо только в приближении больших длин волн.

В работе Лина и Шу [16] была впервые показана возможность существования спиральных волн, получено дисперсионное соотношение позволяющее по известным параметрам галактики и скорости волны воспроизвести геометрию спирального узора.

$$\frac{k_J}{k} = \frac{1}{\chi} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(\chi)}{(\nu/n)^2 - 1} \right] \quad (2)$$

здесь I_n - модифицированная функция Бесселя порядка n , k_J - критическое волновое число, соответствующее джинсовской длине $k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J}$, $\chi = \frac{k^2 c^2}{\kappa}$ и ν - безразмерная частота

$$\nu = \frac{\omega - m\Omega_p}{\kappa}$$

смысл которой в следующем: это частота, с которой вещество галактики попадает в рукава спирального узора.

Также в [16] были указаны особенности волн, вызванные неоднородностью системы (резонансы Линдблада, коротационный резонанс). При коротации звезды и волна вращаются с одинаковой угловой скоростью. При внутреннем (внешнем) резонансе Линдблада угловая скорость звезд больше (меньше), чем угловая скорость волны; однако звезды все время проходят пик волны в той же самой фазе и оказывают когерентное воздействие на нее - это явление аналогично затуханию Ландау в плазме.

Условие резонансов имеет вид [12]:

$$\Omega_p = \omega + s \frac{\kappa}{m}$$

где $s = 0$ при коротации, $s = 1$ и -1 при внешнем и внутреннем резонансе Линдблада соответственно. Видно, что при этом знаменатель в правой части уравнения (2) обращается в 0. ω - угловая скорость звезд в диске, Ω_p - угловая скорость волны.

2 Физическая постановка задачи

2.1 Оценка влияния столкновительных процессов

В задаче моделирования генерации волн плотности диск галактики может считаться бесстолкновительным. Время, в течение которого столкновениями можно пренебречь, пропорционально числу частиц. В данном разделе это будет показано на примере диска галактики [12], для которой время релаксации сопоставимо с возрастом вселенной.

Время релаксации по энергии T_D определяется из соотношения

$$v_\infty^2 = T_D \int (\Delta v_p)^2 2\pi(v_\infty n) p dp$$

то есть это время, за которое поперечная кинетическая энергия частицы $mv_p^2/2$ становится сравнимой с изначальной кинетической энергией $mv_\infty^2/2$. Отсюда получается формула, аналогичная

случаю рассеяния заряженной частицы на кулоновском центре

$$T_D = \frac{v_\infty^3}{8\pi n G^2 m_f^2 \ln \Lambda}, \quad \frac{1}{\nu_0} = \frac{m_t^2 v_\infty^3}{4\pi n q_t^2 q_f^2 m_f^2 \ln \Lambda}$$

где m_t, m_f, q_t, q_f - масса и заряд соответственно пробной частицы и частицы поля. $\ln \Lambda = \ln \frac{p_{max}}{p_0}$ - кулоновский логарифм. Равенство массы и гравитационного "заряда" приводит к более простому выражению. Подставляя значения постоянных, получим следующую формулу

$$T_D \approx 2 \times 10^8 \frac{v_\infty^3}{m^2 n} [\text{лет}]$$

где v_∞ выражена в километрах в секунду, m в массах Солнца, а n - число звезд в кубическом парсеке. Взяв $m = 1$, $v = 100$, и из средней плотности вещества в галактике 10^{-20} кг/м³ получаем оценку $n \sim 0.27$. Тогда время релаксации

$$T_D \approx 2 \times 10^{14} \text{лет}$$

Для типичных параметров эллиптической галактики $T_D \approx 10^{14}$ лет, для дисковых галактик даже в центральной области время релаксации обычно превышает 10^{11} лет. Для сравнения, время жизни наиболее ярких звезд $10^6 - 10^7$ лет, возраст галактики порядка 10^{10} лет.

Этот результат можно получить и другим путем. Для ограниченной однокомпонентной невращающейся системы радиуса R из N звезд скорость хаотического движения частиц определяется из теоремы вириала $c^2 = GNm/R$, и время пролета $\tau_c = R/c$. Таким образом, получаем оценку [12]

$$\frac{T_D}{\tau_c} \approx \frac{N}{\ln N}$$

отсюда видно, что большие звездные системы (в типичной галактике $N \sim 10^{10} \div 10^{12}$) должны рассматриваться как бесстолкновительные.

Таким образом, самогравитирующая система с достаточно большим количеством частиц может считаться бесстолкновительной. В такой системе, когда парных столкновений играют пренебрежимо малую роль, релаксация происходит за счет резонансов, важнейшим примером которых является затухание Ландау (применительно к гравитирующим системам это явление называется резонансом Линдблада).

2.2 Оценка релятивистской поправки

Время распространения светового сигнала [12] вдоль радиуса галактики $\sim 10^5$ лет, что много меньше периода оборота галактики ($\sim 10^8$ лет). Поэтому при моделировании периодов времени порядка одного оборота галактики можно считать, что изменение гравитационного поля распространяется по диску мгновенно.

Оценим величину релятивистской поправки к скорости обращения по орбите отдельной звезды. Гравитационный радиус [4] галактики, если бы вся ее масса ($M \sim 10^{40}$ кг) была сосредоточена в центре

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = 1.48 \cdot 10^{13} \text{ м} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ пк}$$

Угловая скорость обращения по круговой орбите из закона всемирного тяготения

$$\Omega_C = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Точное решение исходя из метрики Шварцшильда

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{(r + r_g)^3}} \approx \Omega_C \left(1 - \frac{3r_g}{2r}\right)$$

Таким образом, релятивистские поправки могут быть существенны только при расстояниях, заметно меньших 1 пк. Типичный радиус галактики ~ 30 кпк. Таким образом, при типичном размере расчетной сетки в 1000 узлов по радиусу минимальное расстояние, разрешимое в численной модели ~ 30 пк. Следовательно

но, при численном моделировании крупномасштабной структуры диска можно использовать классическую теорию гравитации.

3 Исходная система уравнений

Как было указано в предыдущем разделе, для описания динамики самогравитирующего диска можно использовать кинетическое уравнение в бесстолкновительной форме - уравнение Власова. В силу того, что диск считается плоским, уравнение Пуассона, определяющее взаимодействие частиц диска, не содержит правой части (объемная плотность равна 0). Система уравнений, описывающая эволюцию самогравитирующего диска - так называемые уравнения звездной динамики - имеет вид [12]

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 4\pi G\rho \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f - \nabla\Phi\frac{\partial f}{\partial\vec{v}} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

граничные условия на бесконечности

$$\Phi(\vec{x}) = 0, \quad f(\vec{x}, \vec{v}) = 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \vec{x} = (r, \varphi, z)$$

и в плоскости диска

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}_{z=0} = 2\pi\sigma$$

Поверхностная плотность σ вычисляется как $\sigma = \int f d\vec{v}$.

4 Анализ дисперсионного соотношения

Цель данного раздела состоит в том, чтобы получить решение дисперсионного уравнения, которое можно сравнить с существующей квазитрехмерной численной моделью галактического диска. Так как рассматриваемая задача является нестационарной, то сравнение неустойчивостей, возникающих в численной модели, с теоретическими представлениями - это единственный способ

проверки правильности расчета, наряду с законами сохранения (энергии, импульса и момента импульса). Особое место занимает вопрос о корректности обычно используемых приближенных выражений, в частности, гидродинамического.

Дисперсионное уравнение было получено в [7] в приближении тонкого бесконечно протяженного слоя. Это означает, что эффекты, связанные с конечной толщиной диска и его вращением, не рассматриваются. Полученное таким образом уравнение будет отражать локальную связь частоты и длины волны, то есть генерацию волн плотности в малой пространственной области.

Слой считается бесконечно тонким, если длина волны возмущения велика по сравнению с толщиной слоя. В таком пределе движение вещества в плоскости может рассматриваться независимо от перпендикулярного к слою движения.

Волны плотности в гравитирующей системе аналогичны волнам пространственного заряда в плазме [12], соответственно, дисперсионное соотношение выводится таким же образом. Линеаризованное уравнение Власова имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\nabla f_1 - \nabla\Phi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = 0, \quad f = f_0 + f_1, \quad f_1 \ll f_0$$

Представляя возмущения в виде

$$\Phi_1, f_1 \sim \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}) \quad (4)$$

получаем

$$-i\omega f_1 + i\vec{k}\vec{v}f_1 - i\vec{k}\Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (5)$$

Возмущенная функция распределения имеет вид

$$f_1 = -\vec{k}\Phi_1 \frac{\partial f / \partial \vec{v}}{\omega - \vec{k}\vec{v}}$$

Отсюда находим возмущение плотности

$$\sigma_1 = -\vec{k}\Phi_1 \int \frac{\partial f / \partial \vec{v}}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \quad (6)$$

Для того, чтобы получить дисперсионное соотношение, нужно исключить из (6) возмущение потенциала Φ_1 и возмущение плотности ρ_1 с помощью уравнения Пуассона, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - k^2 \Phi_1 = 4\pi G \sigma_1 \delta(z)$$

Решения однородного уравнения

$$\Phi_1 = c_1 e^{-kz}, \quad z > 0, \quad \Phi_1 = c_2 e^{kz}, \quad z < 0$$

В плоскости $z = 0$ потенциал Φ непрерывен, нормальная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ испытывает скачок

$$\left(\frac{\partial \Phi_{z+}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{z-}}{\partial z} \right)_{z=0} = 4\pi G \sigma_1$$

Отсюда находится локальное соотношение между потенциалом и поверхностной плотностью [7]

$$\Phi_1(z = 0) = -\frac{2\pi G \sigma_1}{k} \quad (7)$$

Подставляя его в (6), получаем дисперсионное уравнение [7] для бесконечного плоского слоя

$$1 - \frac{2\pi G \sigma_0}{k} \int \frac{\partial f / \partial v}{\omega/k - v} dv = 0 \quad (8)$$

Для максвелловского распределения частиц по скоростям

$$f_M(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{v^2}{2T}\right)$$

получаем аналогично плазме [6]

$$1 - \frac{2\pi G \sigma_0}{kT} \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{kv_T} W\left(\frac{\omega}{kv_T}\right) \right] = 0$$

где T - температура, $W(z)$ - функция Крампа [8], $v_T = \sqrt{2T}$ - средняя тепловая скорость частиц. Перейдем в этом уравнении к безразмерным переменным

$$\hat{k} = \frac{k}{k_0}, \quad k_0 = \frac{2\pi G \sigma_0}{T}, \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi G \sigma_0}{\sqrt{T}} \quad (9)$$

в итоге

$$1 - \frac{1}{\hat{k}} \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{2\hat{k}}} W \left(\frac{\hat{\omega}}{\sqrt{2\hat{k}}} \right) \right] = 0 \quad (10)$$

Можно отметить, что в это уравнение не входят безразмерные параметры, характеризующие диск, в частности температура \hat{T} и плотность $\hat{\sigma}$. Это означает, что дисперсионная кривая, описываемая уравнением (10) будет одинакова во всех случаях. Однако волны с длиной, большей, чем радиус диска

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{k}} > \hat{R}$$

то есть с малыми \hat{k} , в диске с заданной плотностью и динамической, существовать не могут. Кроме того, при возврате к размерным переменным инкременты в точках диска с различной температурой и плотностью будут разными, то есть уравнение (10) является локальным, как и предполагалось при выводе.

Воспользовавшись оценкой функции Крампа [8] для больших значений аргумента

$$W(z) = \frac{i}{z\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^2} \right), \quad |z| \gg 1$$

найдем решения этого уравнения в случае больших длин волн

$$\hat{\omega} = i\sqrt{\hat{k} - 3\hat{k}^2}, \quad \left| \frac{\hat{\omega}}{\hat{k}} \right| \gg 1 \quad (11)$$

это выражение может быть получено аналогично дисперсионному уравнению для ленгмюровских волн в магнитной гидродинамике [5].

Другой предельный случай - когда значение волнового числа близко к критическому (т.е. длина волны порядка λ_J). Это означает, что $\frac{\hat{\omega}}{\hat{k}} \ll 1$. Разложение функции Крампа в ряд при малых значениях аргумента

$$W(z) = 1 + \frac{2iz}{\sqrt{\pi}}, \quad |z| \ll 1$$

приводит к следующему выражению для частоты вблизи границы устойчивости

$$\hat{\omega} = i\hat{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - \hat{k}), \quad \left|\frac{\hat{\omega}}{\hat{k}}\right| \ll 1 \quad (12)$$

При $\hat{k} > 1$ мнимая часть частоты становится отрицательной и неустойчивости подавляются.

В общем случае уравнение (10) не может быть решено аналитически. В данной работе было получено численное решение этого уравнения методом касательных в системе MathCAD2000. Погрешность решения (параметр TOL системы MathCAD) была равна 10^{-6} . Корни проверялись прямой подстановкой в уравнение (10).

Следующий график показывает зависимость инкремента неустойчивости $Im(\hat{\omega})$ от волнового числа (сплошная линия). Штриховой линией изображена дисперсионная кривая (11) для гидродинамического режима $\hat{k} \ll 1$, и штрихпунктирной - вблизи границы устойчивости (12), $\hat{k} \sim 1$,

При $\hat{k} > 1$ значение $Im(\hat{\omega})$ становится отрицательным и в соответствии с выражением (4) неустойчивости подавляются. Максимальное значение инкремента $\gamma_{max} = 0.245$ достигается при $\hat{k} = 0.28$.

На графике видно, что приближенные решения, (11) и (12) нельзя использовать для определения инкремента джинсовской неустойчивости даже в простейшем с физической точки зрения случае плоского слоя. Эти решения соответствуют точному лишь в предельных случаях очень малых или очень больших длин волн. В остальном диапазоне длин волн необходимо использовать точное решение дисперсионного уравнения (10). Кроме того, максимальное значение инкремента неустойчивости может быть получено только из точного выражения.

Важной особенностью полученного дисперсионного уравнения является то, что оно не содержит явной зависимости от температуры и плотности, и при изменении температуры характер

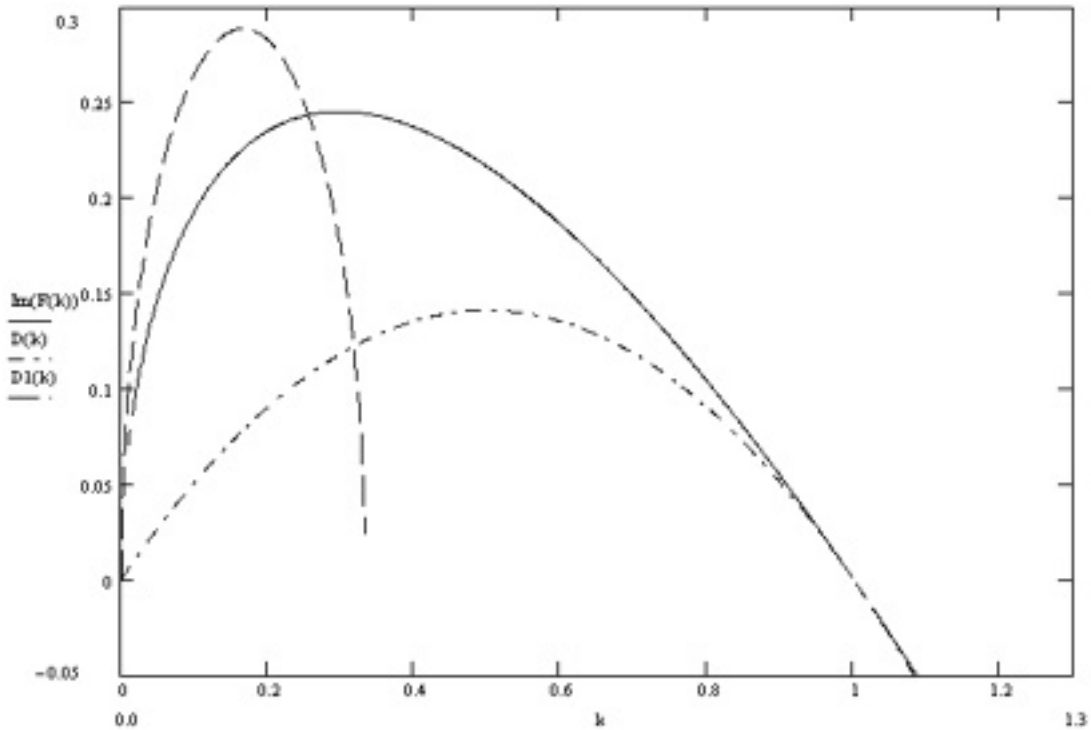


Рисунок 1: дисперсионная кривая для плоского слоя

происходящих в диске процессов не изменяется, меняется лишь их масштаб. Подробнее влияние температуры рассматривается в разделе (6.3).

5 Численный метод решения задачи

5.1 Безразмерные переменные

При численном моделировании все величины, характеризующие диск, задаются в безразмерных единицах. Это продиктовано ограниченной точностью расчетов: при сложении чисел с разным порядком происходит значительная потеря точности. В качестве основных величин можно выбрать длину R_0 (например, типичный радиус галактики, 30 кпк), массу (например, массу одной звезды, $M_{\odot} = 1.96 \times 10^{30}$ кг) и гравитационную постоянную $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}$ Н м²/кг². В таком случае поверхностную плот-

ность вещества можно оценить как

$$\Sigma_0 = \frac{NM_\odot}{\pi R_0^2} \approx 4 \times 10^{-4} \text{ кг/м}^2$$

где N - число звезд в диске ($N \sim 10^{11}$). Характерная скорость получится, если приравнять центробежную и гравитационную силу на краю диска

$$M_\odot \frac{V_0^2}{R_0} = \gamma \frac{\pi R_0^2 \Sigma}{R_0^2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\gamma \frac{M_\odot N}{R_0}} \approx 8 \times 10^4 \text{ м/с}$$

Тогда характерное время и потенциал:

$$t_0 = \frac{R_0}{V_0} = R_0 \sqrt{\frac{R_0}{\gamma M_\odot N}} \approx 10^{17} \text{ с} \approx 10 \text{ млрд. лет} \quad \Phi_0 = \frac{\gamma \pi \sigma}{R_0} \approx 10^{-33} \text{ м}^2/\text{с}^2$$

Далее везде используются безразмерные переменные.

$$r = \frac{\hat{r}}{\hat{R}_0} \quad \Phi = \frac{\hat{\Phi}}{\hat{\Phi}_0}$$

5.2 Методы решения уравнений

5.2.1 Кинетическое уравнение

Для решения кинетического уравнения Власова используем метод частиц в ячейках [1, 10, 2]. Согласно этому методу все вещество разбивается на отдельные крупные частицы, движение которых определяет эволюцию всей системы. Уравнения движения отдельных частиц имеют вид:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla\Phi,$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}.$$

Эти уравнения характеристик для уравнения Власова.

Решение уравнений движения частиц осуществляется по известной схеме Бориса [13], которая состоит в решении уравнений движения в декартовых координатах с последующим пересчетом координат и скоростей частиц в цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_r &= v_r^m + \tau F_r^m, & \tilde{v}_\varphi &= v_\varphi^m + \tau F_\varphi^m, \\
x &= r^m + \tau \tilde{v}_r, & y &= \tau \tilde{v}_\varphi, \\
r^{m+1} &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \sin \alpha &= y/r^{m+1}, \\
\cos \alpha &= x/r^{m+1}, & \varphi^{m+1} &= \varphi^m + \alpha. \\
v_r^{m+1} &= \tilde{v}_r \cos \alpha + \tilde{v}_\varphi \sin \alpha, & v_\varphi^{m+1} &= \tilde{v}_\varphi \cos \alpha - \tilde{v}_r \sin \alpha,
\end{aligned}$$

Здесь v_r , v_φ , r , φ – скорости и координаты отдельных частиц, τ – временной шаг, F_r , F_φ – компоненты силы гравитации, действующей на частицу, интерполированные из узлов сетки в местоположение частиц.

5.2.2 Уравнение Пуассона

В области решения введена равномерная прямоугольная сетка с узлами

$$\begin{aligned}
r_{i-1/2} &= (i - 1/2)h_r, & i &= 0, \dots, I_{max} + 1, \\
\varphi_{k-1/2} &= (k - 1/2)h_\varphi, & k &= 0, \dots, K_{max} + 1, \\
z_l &= lh_z, & l &= 0, \dots, L_{max},
\end{aligned}$$

где

$$h_r = \frac{R_{max}}{I_{max}}, \quad h_\varphi = \frac{2\pi}{K_{max}}, \quad h_z = \frac{Z_{max}}{L_{max}}.$$

на которой аппроксимируется уравнение Пуассона.

Периодические граничные условия по углу дают

$$\Phi_{i-1/2, -1/2, l} = \Phi_{i-1/2, K_{max}-1/2, l},$$

$$\Phi_{i-1/2, K_{max}+1/2, l} = \Phi_{i-1/2, 1/2, l}.$$

При $i = 0$

$$\Phi_{-1/2, k-1/2, l} = \Phi_{1/2, k-1/2, l},$$

а остальные граничные условия задаются по формуле

$$\Phi_{i-1/2, k-1/2, l} = -\frac{M}{R},$$

где M – полная масса диска, а R – расстояние от центра до точки границы.

Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений используется итерационная схема последовательной верхней релаксации [3] с прогонками по φ . Такой выбор метода решения будет объяснен в следующем разделе.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k-3/2, l}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_r^2 r_{i-1/2}} + \frac{2}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} + \frac{2}{h_z^2} \right) \Phi_{i-1/2, k-1/2, l}^{n+1} + \\
& + \frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k+1/2, l}^{n+1} - (1 - \omega) \left[\frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k-3/2, l}^n - \right. \\
& - \left. \left(\frac{2}{h_r^2 r_{i-1/2}} + \frac{2}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} + \frac{2}{h_z^2} \right) \Phi_{i-1/2, k-1/2, l}^n + \frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k+1/2, l}^n \right] + \\
& + \omega \left[\frac{1}{h_r^2 r_{i-1/2}} \left(r_i \Phi_{i+1/2, k-1/2, l}^n + r_{i-1} \Phi_{i-3/2, k-1/2, l}^n \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{h_z^2} \left(\Phi_{i-1/2, k-1/2, l+1}^n + \Phi_{i-1/2, k-1/2, l-1}^n \right) \right] = 0,
\end{aligned}$$

где ω – итерационный параметр, n – номер итерации. При $l = 0$ схема имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k-3/2, 0}^{n+1} - \left(\frac{2}{h_r^2 r_{i-1/2}} + \frac{2}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} + \frac{2}{h_z^2} \right) \Phi_{i-1/2, k-1/2, 0}^{n+1} + \\
& + \frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k+1/2, 0}^{n+1} - (1 - \omega) \left[\frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k-3/2, 0}^n - \right. \\
& - \left. \left(\frac{2}{h_r^2 r_{i-1/2}} + \frac{2}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} + \frac{2}{h_z^2} \right) \Phi_{i-1/2, k-1/2, 0}^n + \frac{1}{h_\varphi^2 r_{i-1/2}^2} \Phi_{i-1/2, k+1/2, 0}^n \right] + \\
& + \omega \left[\frac{1}{h_r^2 r_{i-1/2}} \left(r_i \Phi_{i+1/2, k-1/2, 0}^n + r_{i-1} \Phi_{i-3/2, k-1/2, 0}^n \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{h_z^2} \Phi_{i-1/2, k-1/2, 1}^n - \frac{4\pi}{h_z} \sigma_{i-1/2, k-1/2} \right] = 0.
\end{aligned}$$

5.3 Распараллеливание алгоритма

Распараллеливание алгоритма проведено методом декомпозиции области, расчетная область была разделена между процессорами равномерно по радиусу, как показано на рисунке В каждый из

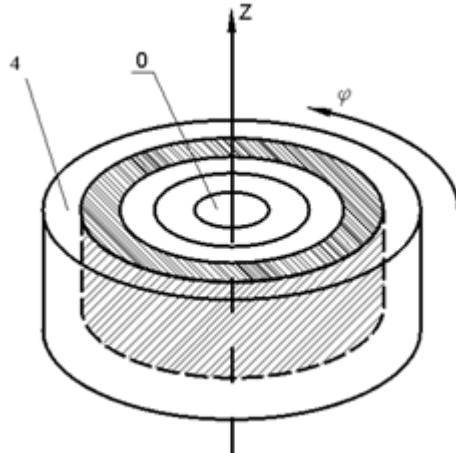


Рисунок 2: декомпозиция расчетной области

M процессоров с номером m ($m = 0, \dots, M - 1$) помещается часть массива значений $\Phi_{i-1/2,k-1/2,l}$, где $i = mI_0, \dots, (m+1)I_0 + 1$. На следующем рисунке показано разделение расчетной области между процессорами ($M = 5$).

Итерация проводится в каждом процессоре независимо для $i = mI_0 + 1, \dots, (m+1)I_0$ и по l от 0 до $L_{max} - 1$ по вышеуказанному алгоритму. После итерации производится обмен крайними рассчитанными значениями Φ . А именно, значения $\Phi_{mI_0+1/2,k-1/2,l}$ пересылаются в процессор с номером $m - 1$, а значения $\Phi_{(m+1)I_0-1/2,k-1/2,l}$ в процессор с номером $m + 1$. Далее этот процесс повторяется до выполнения условия прекращения итераций в каждом процессоре

$$\max_{i,k,l} |\Phi_{i-1/2,k-1/2,l}^{n+1} - \Phi_{i-1/2,k-1/2,l}^n| < \varepsilon.$$

При каждом i и l система уравнений решается методом циклической прогонки.

Главное требование к программе реализующей описанный выше численный алгоритм - это скорость работы. Поэтому эта про-

грамма была написана на языке Fortran 77. Использовались компиляторы Compaq Fortran и Gnu Fortran. Аналогичная программа на языке C++ более удобна в разработке, но работает в среднем в 3-4 раза медленнее. C++-программа использовалась для отработки методики распараллеливания.

Программа была распараллена с использованием системы MPI (Message Passing Interface). Важной особенностью этой системы является то, что программа разрабатывается без учета архитектуры суперкомпьютера, то есть отладка многопроцессорной программы может проводиться на обычной рабочей станции. Однако для достижения минимального времени работы программы необходимо, чтобы структура коммуникаций между процессами в программе совпадала с физическими каналами связи в суперкомпьютере.

На следующем рисунке показано, как изменяется время расчета при увеличении числа процессоров. Под ускорением подразумевается отношение времени расчета на нескольких процессорах к времени расчета на одном процессоре.

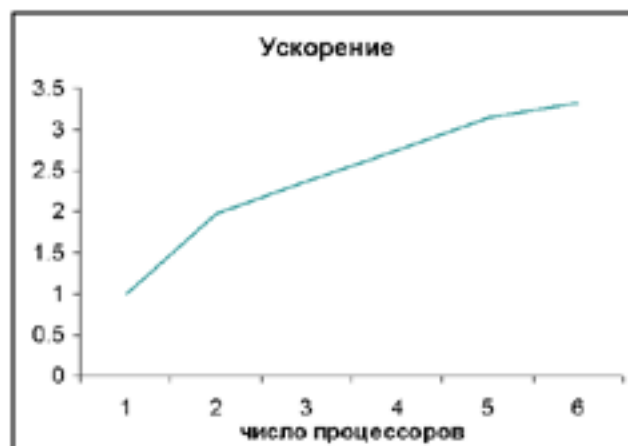


Рисунок 3: ускорение вычислений

Однако основным соображением в пользу распараллеливания было не ускорение (видно, что оно не слишком велико), а возможность расчета на больших сетках, то есть с большим пространственным разрешением, которое недоступно на рабочих станциях

из-за небольшого размера оперативной памяти.

5.4 Параметры реализации

Оценка требуемых ресурсов системы можно получить следующим образом. Одно число двойной точности (тип `real*8` в Фортране) занимает 8 байт. Узел сетки представляется одним числом, частица в плоской модели представляется четырьмя числами - двумя скоростями и двумя координатами.

Оценим размер вычислительной сетки. Радиус типичной галактики 30 кпк, джинсовская длина $\sim 1\text{кпк}$. Исходя из того, что длина ячейки сетки должен быть много меньше джинсовской длины (как минимум, в десять раз), получаем 300 узлов сетки по радиальной координате. Так как граница расчетной области должна быть удалена от границы диска как минимум, на такое же расстояние, то размер сетки по радиусу будет $N_R = 600$. Ячейка сетки должна быть приблизительно квадратной, соответственно, получаем сетки $N_R \times N_\varphi \times N_Z = 600 \times 500 \times 200$. Для того, чтобы обеспечить уровень шумов $\sim 1\%$ необходимо 100 частиц в ячейке, то есть для описанной сетки 3×10^7 частиц. Полный объем памяти для такой модели ~ 550 Мб, что превышает возможности большинства рабочих станций.

В настоящий момент программа работает на суперкомпьютере МВС-1000М: 5 узлов по 2 процессора Alpha21264 над 2 Gb памяти (суммарный объем памяти 10 Gb, вычислительная мощность $\sim 12 \times 10^9$ операций в секунду), а также на различных кластерах на базе рабочих станций с центральным процессором Pentium-III (например, кластер ИК СО РАН, 12 узлов по 2 процессора, суммарная память 24 Gb, вычислительная мощность $\sim 3 \times 10^9$ операций в секунду).

6 Результаты численных расчетов

6.1 Инкременты джинсовской неустойчивости

В качестве диагностики происходящих в диске процессов интересно рассмотреть инкременты волн плотности. Так, в устойчивом диске $R < \lambda_J$ совершенно не должно быть растущих гармоник ($Im(\omega) > 0$). В обратном случае $R \gg \lambda_J$ должны развиваться все гармоники. Полученные по результатам расчетов инкременты трудно сравнивать с дисперсионной кривой из раздела (4) - радиус диска конечный и в силу того, что расчет проводится на сетке, набор волновых чисел будет дискретным. Несмотря на это, наличие или отсутствие определенных гармоник может быть хорошим качественным подтверждением правильности расчета.

Для вычисления гармоник проводим преобразование Фурье поверхностной плотности

$$\tilde{\Sigma}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \Sigma(x, y) e^{-i\vec{k}\vec{x}}$$

В силу того, что решение проводится на сетке, вместо непрерывной функции существует дискретный набор гармоник

$$\tilde{\Sigma}_{k_i, k_j} = \tilde{\Sigma}\left(\frac{k_i}{2h_r N_R}, \frac{k_j}{2h_r N_R}\right)$$

где k_i, k_j - номера гармоники вдоль осей x и y соответственно. Предполагаем экспоненциальную зависимость от времени для каждой гармоники

$$\tilde{\Sigma}(k_x, k_y, t) = \tilde{\Sigma}(k_x, k_y) \exp \gamma t$$

Пусть $\tilde{\Sigma}_{k_i, k_j}^n$ - значение соответствующей гармоники на временном шаге с номером n .

$$\tilde{\Sigma}_{k_i, k_j}^n = \tilde{\Sigma}_{k_i, k_j}(n\tau)$$

где τ - величина временного шага. Далее необходимо определить величину инкремента γ . Она вычисляется по методу наименьших

квадратов, минимизацией функционала

$$\gamma(k_x, k_y) = \min_{\gamma} \sum_{n=1}^{N_T} \left(\tilde{\Sigma}_{k_i, k_j}^n - \Sigma_{k_i, k_j}^0 \exp \gamma t \right)^2$$

Для вычисления инкрементов использовались значения инкрементов на первых 40 временных шагах ($N_T = 40$), что соответствует ~ 0.05 оборота диска. Для упрощения анализа результатов начальная плотность вещества диска была задана однородной

$$\Sigma(r) = \begin{cases} \Sigma_0, & r \leq R \\ 0, & r > 0 \end{cases}$$

где R - радиус диска. Были промоделированы диски с различными значениями джинсовской длины λ_J : $\lambda_J \gg R$, $\lambda_J \sim R$, и $\lambda_J \ll R$. В первом случае диск должен быть полностью устойчив, все волны плотности являются затухающими $\forall k \gamma(k) < 0$, во втором случае развиваются только длинноволновые гармоники, $\lambda \sim R$, в последнем случае - все гармоники в интервале

$$\lambda_J < \frac{2h_r N_R}{k_i} < R, k_i = 1..N_R$$

где k_i - номер гармоники и N_R - число узлов сетки по радиусу. Размер сетки в этих расчетах был $N_R \times N_\varphi \times N_Z = 60 \times 120 \times 50$. Радиус диска был равен 0.2 при размере расчетной области 0.5.

Здесь необходимо отметить, что минимальная длина волны, которая может существовать в численной модели - это $2h$, где h - размер ячейки сетки. Минимальная длина волны гравитационной неустойчивости - это λ_J , следовательно для адекватного моделирования диска с заданной температурой и плотностью необходимо, чтобы $h \ll \lambda_J = \frac{T}{\Sigma}$.

На следующих рисунках представлена зависимость $\gamma(k_x, k_y)$ для описанных выше дисков. Показаны только растущие гармоники, $\gamma > 0$. Кольца соответствуют волнам, длина которых укладывается на целое число узлов. В правом верхнем углу рисунка $j \cdot j$ нефизические гармоники, обусловленные численными эффектами - на сетке с $N_R = 60$ не может быть гармоник с номером,

большим 60. На рисунке видно, что в таком диске существуют

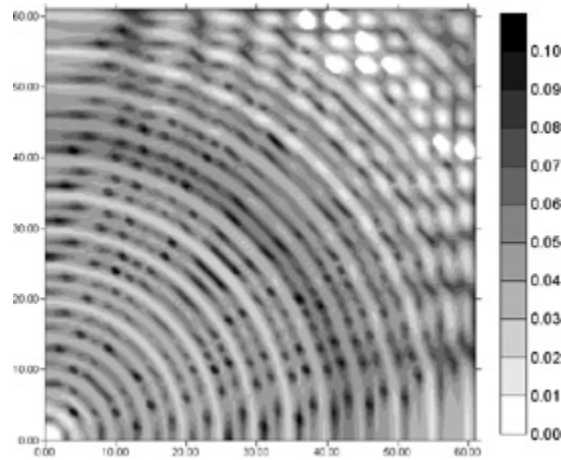


Рисунок 4: $\lambda_J = 0.25R$

волны со всеми возможными значениями волнового числа в интервале $\frac{1}{R} \leq k \leq \frac{1}{R}$, то есть диск неустойчив.

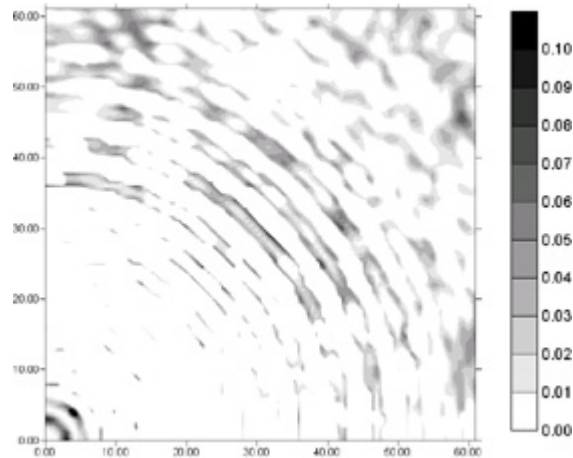


Рисунок 5: $\lambda_J = 4.0R$

В этом диске присутствуют только слабые коротковолновые возмущения, это означает, что диск фактически устойчив. Однако по теории такой диск должен быть полностью стабилен, и имеющиеся возмущения нужно отнести к счетным эффектам.

В этом случае развиваются только длинноволновые гармоники, что полностью соответствует теоретическим предсказаниям.

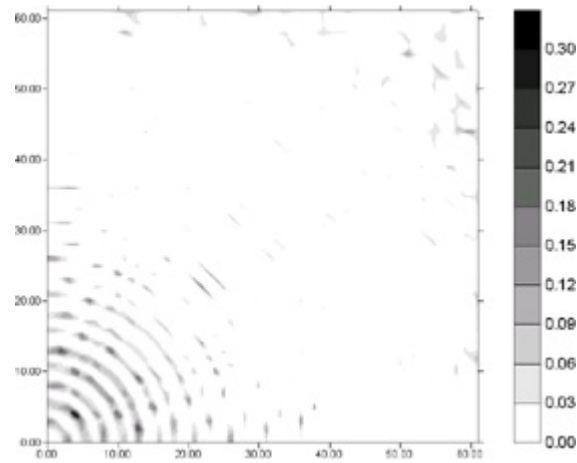


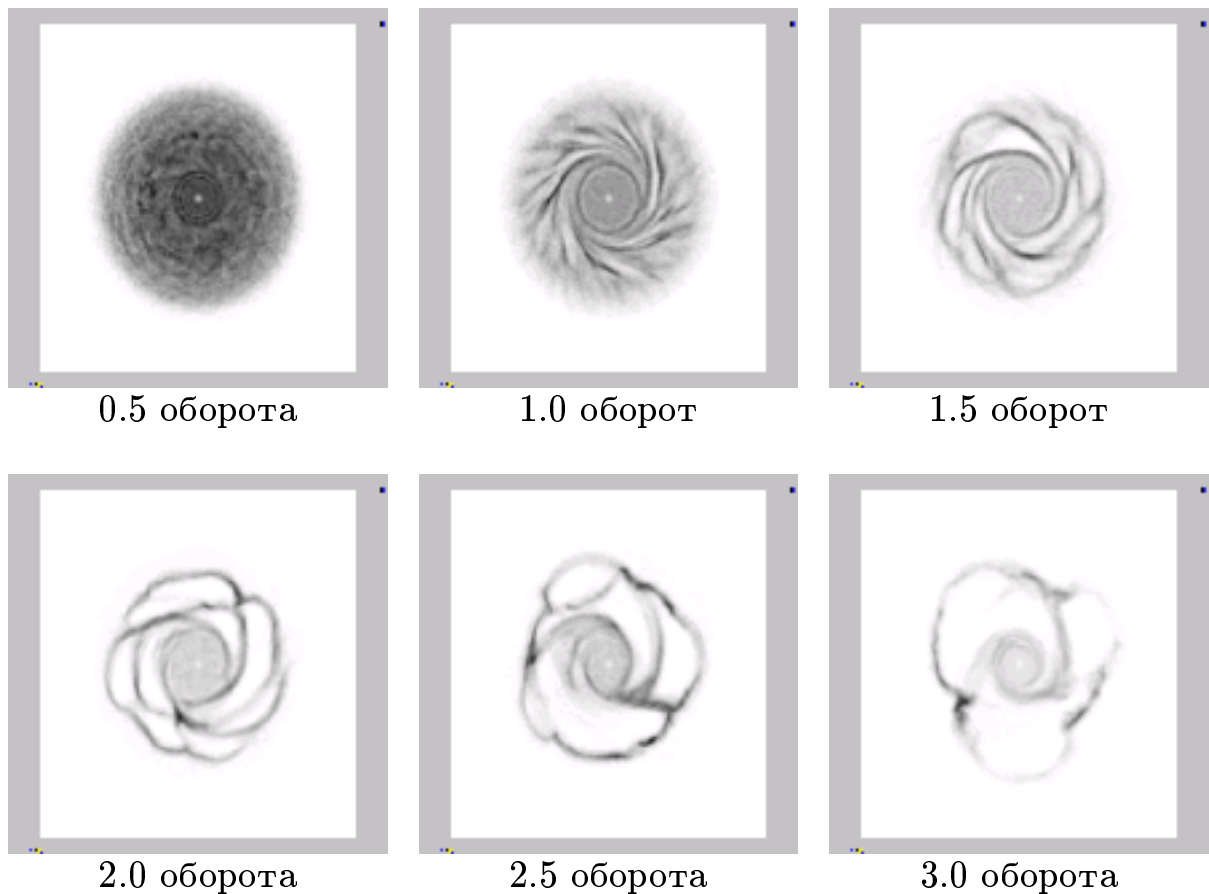
Рисунок 6: $\lambda_J = 0.17R$

6.2 Эволюция диска

В данном разделе мы рассмотрим эволюцию холодного ($Q \sim 0.01$), то есть неустойчивого, диска в течение трех оборотов. На рисунках показан вид поверхностной плотности вещества диска в различные моменты времени.



Рисунок 7: Начальный вид поверхностной плотности



На рисунках видно образование спиральных рукавов из первоначально равновесного диска, и затем их распад и переход к менее регулярной структуре.

6.3 Влияние температуры на устойчивость диска

В этом разделе рассматривается поведение модельного диска с различными значениями динамической температуры. С теоретической точки зрения эта задача была впервые решена в работе [19]. Утверждение, известное как критерий Тумре, качественно состоит в следующем: динамически горячий диск устойчив относительно возмущений с любыми длинами волн.

Этот критерий для осесимметричных возмущений в плоском диске может быть очень просто получен [12] из дисперсионного

соотношения для двумерной жидкостной модели

$$\omega^2 = \kappa^2 + k^2 c^2 - 2\pi G\sigma |k| \quad (13)$$

где $\kappa = 2\Omega\sqrt{1 + \frac{d\ln\Omega^2}{\ln r}}$ - эпициклическая частота. Определим безразмерные переменные: частоту $\nu = \frac{\omega}{\kappa}$ и волновое число $\xi = \frac{kc}{\kappa}$. Тогда уравнение принимает вид

$$\nu^2 = 1 - \xi + \frac{Q^2}{4}\xi^2 \quad (14)$$

где $Q = c\kappa/\pi G\sigma$ - безразмерная дисперсия скоростей.

В диске существуют неустойчивости, если для какого-либо волнового числа $Im(\nu) > 0$. Соответственно, граница устойчивости определяется выражением $\nu^2 = 0$. Полагая $\nu^2 = 0$ в уравнении (14) и вводя безразмерные длины волн $\lambda \equiv 1/\xi$, приводим дисперсионное соотношение к виду

$$\frac{Q^2}{4} = \lambda(1 - \lambda) \quad (15)$$

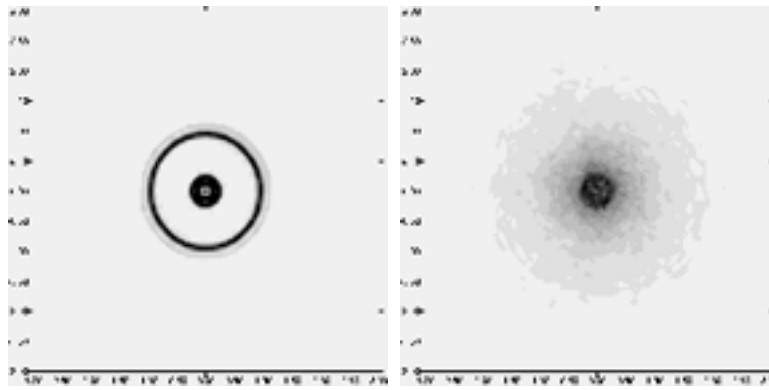
Это совпадает с результатом точного анализа с использованием кинетического уравнения в [19]. Кривая (15) представляет собой параболу в плоскости (λ, Q^2) .



Рисунок 8: температурная граница устойчивости в зависимости от $\hat{\lambda}$

Для точек плоскости ниже кривой дисперсионное соотношение требует, чтобы $\nu^2 < 0$ (т.е. диск неустойчив) Таким образом, для $Q > 1$ диск устойчив для любого значения λ .

Для проверки этого критерия была проведена серия расчетов с различными значениями безразмерной дисперсии скоростей звезд Q : 0.0, 0.01, 0.1, 1.0, 2.0, 3.36, 5.0 и 10.0. На следующем рисунке показан вид распределения плотности после одного оборота для дисков с разными значениями динамической температуры Q .



Вид диска с $Q = 0.0, 5.0$ после одного оборота

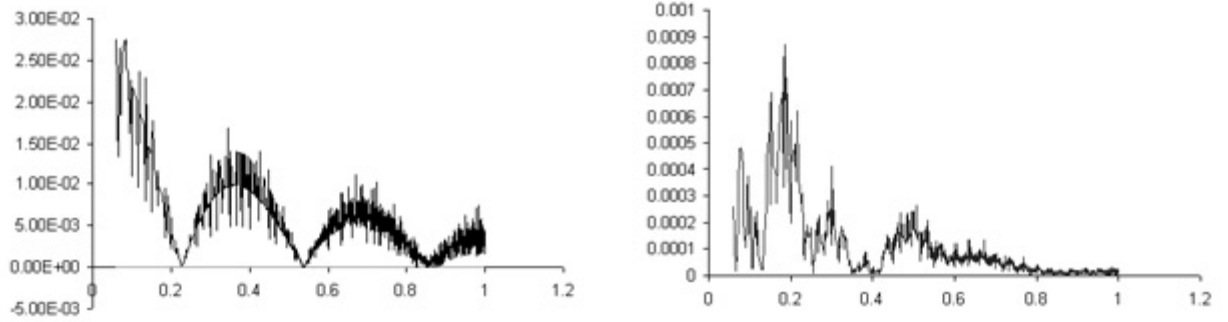
При $Q < 1$ диск быстро распадался на части. Далее скорость распада уменьшалась по мере приближения к границе устойчивости ($Q = 1$). Если значение Q заметно превышало 1, то диск оставался эффективно стабильным все время, структура, которая образовалась вначале практически не менялась до конца.

Это соответствует теоретическим предсказаниям, так как в динамически горячем диске волны плотности незначительны и скорости роста γ всех неустойчивостей очень малы [7]:

$$\gamma = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{kT}{2\pi G\sigma_0} \right)$$

Из этой формулы следует, что при достаточно больших Q , превышающих порог устойчивости, инкремент становится отрицательным и волны плотности подавляются. На следующих двух

графиках показана зависимость амплитуды гармоник от безразмерного волнового числа $\sigma(k)$ для дисков с разной динамической температурой. Графики даны для момента времени, соответствующего четверти оборота диска.



Спектры волн плотности для динамически холодного ($Q = 0$, слева) и динамически горячего ($Q = 5$, справа)

На графиках видно, что для горячего диска все амплитуды много меньше, чем для холодного, что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями.

6.4 Разогрев диска

В статье [15] изучается разогрев диска галактики спиральными волнами плотности. Показывается, что прохождение короткоживущих волн плотности приводит к дрейфу частиц в радиальном пространстве скоростей.

Используется модель ”плоскости среза”, то есть диск считается бесконечно тонким и рассматриваются процессы в области диска, размер которой много меньше радиуса. Такие упрощения позволяют дать аналитическое решение задачи.

Решение кинетического уравнения в статье [15] приводит к следующей зависимости функции распределения от времени

$$f \sim \exp \frac{-u_r^2}{\sigma_0 + \frac{\sigma_1}{2}t}$$

сравнивая это с максвелловской функцией распределения $\exp -u^2/2c^2$, получаем следующую зависимость тепловой скорости от времени [15]

$$c = \sqrt{\sigma_0 + \frac{\sigma_1}{2}t}$$

Для сравнения приводится график зависимости кинетической энергии теплового движения от времени

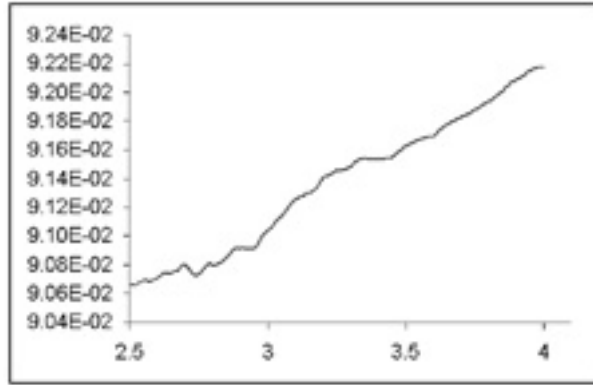


Рисунок 9: энергия теплового движения

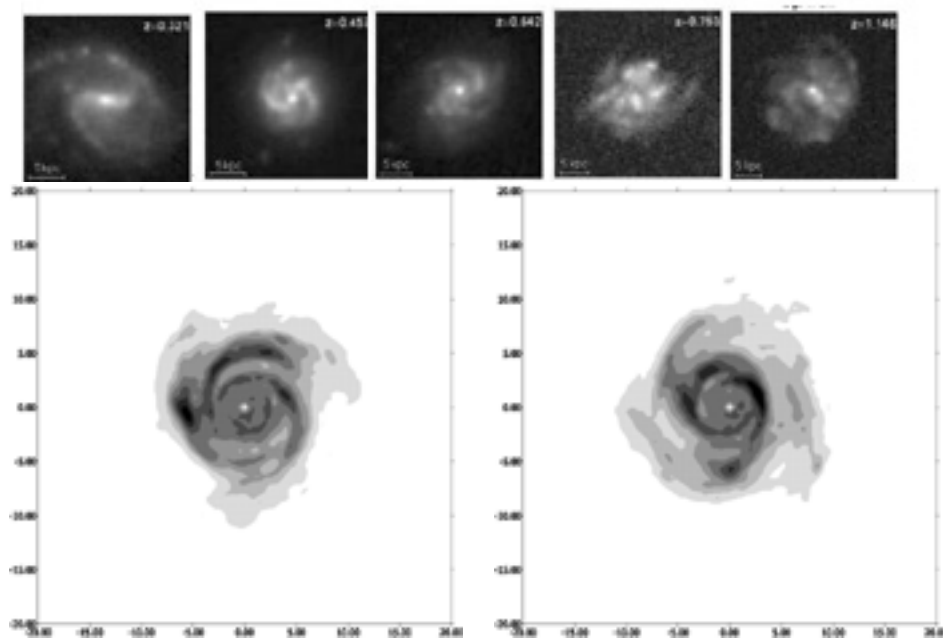
То есть зависимость энергии теплового движения от времени оказывается приблизительно линейной, как и предсказано в [15], однако вопрос о точном соответствии, в частности, величина констант c_1 и D_1 остается открытым.

6.5 Сравнение с наблюдениями

В обзорной [11] обсуждаются наблюдательные данные относительно эволюции спиральных галактик. В частности, говорится, что большинство близких галактик имеет выраженную крупномасштабную структуру (нормальная или пересеченная спираль). Однако, начиная со времени, соответствующего 3.5 оборотам, структура близких и далеких галактик начинают заметно различаться. В частности, при возрасте галактики, превышающем 5 оборотов, спиральный узор является хаотическим и барообразные структуры встречаются редко. Кроме того, в старых

галактических дисках звезды имеют большой разброс по скоростям, что, возможно, и объясняет фрагментарность глобальной структуры диска.

Оба этих эффекта - образование спиральной структуры и ее распад, а также разогрев изначально холодного диска видны по результатам расчетов в разделах (6.2) и (6.4). Ниже приведены снимки галактик с различными возрастами из статьи [11] и для сравнения два рисунка, соответствующие моментам времени 2 и 4 оборота в холодном модельном диске ($Q \sim 0.01$).



Распад крупномасштабной структуры в наблюдениях [11] и в расчетах

Видно, что со временем глобальная структура размывается, спиральные рукава становятся менее выраженными, то есть можно говорить о качественном соответствии расчетов результатам наблюдений.

Точное соответствие наблюдениям в этой модели установить невозможно, так как рассматриваемый здесь диск является чисто звездным. Реальные галактики содержат несколько звездных подсистем с различным значением динамической температуры,

межзвездный газ, а также малоподвижную сферическую звезду систему - так называемое гало. Оба последних фактора стабилизируют неустойчивости звездного диска.

7 Выводы

- Создана математическая модель эволюции диска галактики
- Модель реализована в виде последовательной, а также параллельной программы
- Созданы вспомогательные программы диагностики
- Проведены тестовые расчеты
- Показано, что плоский диск с малой динамической температурой неустойчив относительно формирования радиальных волн
- Моделированием подтверждено, что частицы подвержены нагреву радиальными волнами плотности, аналогично затуханию Ландау
- Исследовано дисперсионное соотношение для волн плотности в модели плоского слоя

Литература

- [1] БЕРЕЗИН Ю.Б., ВШИВКОВ В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы, -Н: Наука, 1980
- [2] ГРИГОРЬЕВ Ю.Н., ВШИВКОВ В.А. // "Численные методы "частицы-в-ячейках", - Новосибирск: "Наука", 2000.
- [3] ИЛЬИН В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. - М: Физматлит, 1995.

- [4] Л.Д.ЛАНДАУ, Е.М.ЛИФШИЦ // Теория поля. М: "Наука", 1976.
- [5] Л.Д.ЛАНДАУ, Е.М.ЛИФШИЦ // Электродинамика сплошных сред. М: "Наука", 1976.
- [6] А.Б.МИХАЙЛОВСКИЙ // Теория плазменных неустойчивостей, том 1. М: "Атомиздат", 1976.
- [7] В.Л.ПОЛЯЧЕНКО, А.М.ФРИДМАН // Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М: "Наука", 1976.
- [8] В.Н.ФАДДЕЕВА, Н.М.ТЕРЕНТЬЕВ // Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, М: ГИТТЛ, 1954.
- [9] "Физическая энциклопедия". - М: издательство "Большая российская энциклопедия", 1994.
- [10] ХОКНИ Р., ИСТВУД ДЖ. Численное моделирование методом частиц, М. "Мир", 1987.
- [11] АВРАНАМ R.G., VAN DEN BERGH S. // Observations of Disk Galaxy Evolution. in the proceedings of "Disks of Galaxies: Kinematics, Dynamics and Perturbations", Vol. iii, 2002.
- [12] BERTIN G. // Dynamics of Galaxies. Cambridge University Press, 2000.
- [13] BORIS J.P. Relativistic plasma simulation – optimization of a hybrid code. // *Proc. Fourth Conf. Num. Sim. Plasmas* Washington, P. 3-67, 1970.
- [14] R.ELLIS Galaxy Formation and Evolution: Recent Progress, //2001, in "Lectures in the XIth Canary Islands Winter School on Astrophysics"
- [15] B.FUCHS // Density waves in the shearing sheet III. Disc heating. *Mon. Not. R. Astron. Soc*, Vol. 1-6, 2001.

- [16] LIN C.C., SHU F.H. //Astrophys. J. 1964. V. 140. P. 646.
- [17] LINDBLAD B. // Stockholm Obs. Ann. 1963. V. 22. P. 3.
- [18] MILLER R. H. Validity of Disk Galaxy Simulations // J. of Comp. Phys. 1976, V.21, p.400.
- [19] TOOMRE A. // On the gravitational stability of a disc of stars. Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217.