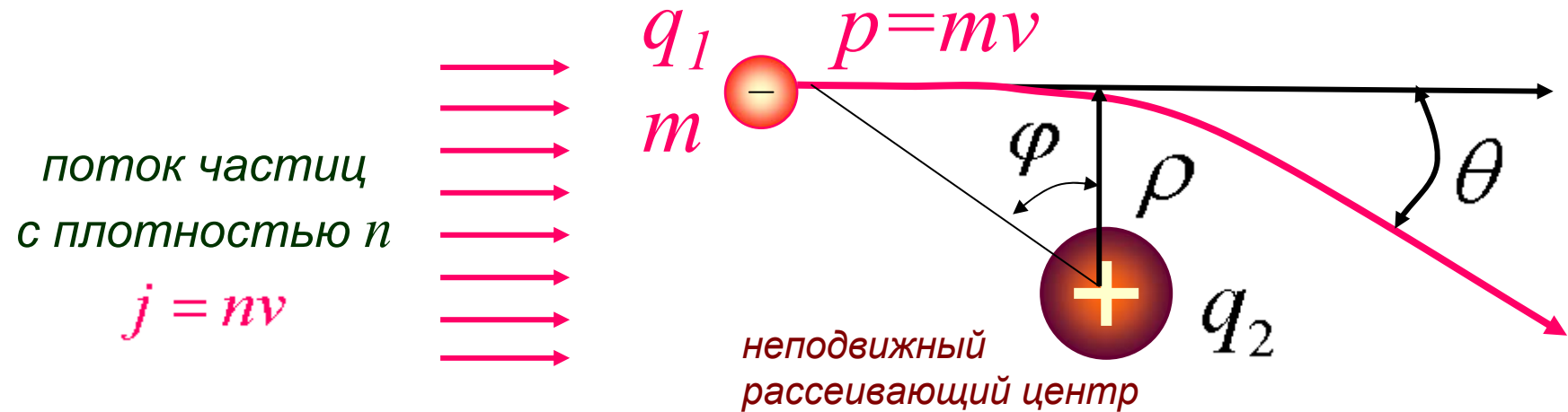


Новая тема 3

Столкновения частиц в плазме

Столкновения частиц в плазме

Ландау, Лифшиц. Механика, §19



Определим среднюю силу, действующую на неподвижный заряд

для потока с заданным $|\rho|$:

$$F = ma = \frac{d}{dt} p_{\parallel} = \frac{d}{dt} (Nmv_{\parallel}) = m \frac{dN}{dt} \Delta v_{\parallel}$$

$$F = mv(1 - \cos \theta) jS$$

$= jS = nvS$

для потока со случайными ρ :

$$F = \int_0^{\infty} jmv(1 - \cos \theta) 2\pi\rho d\rho = mvj\sigma_{\text{Тр}}$$

Транспортное сечение

Ландау, Лифшиц. Механика, §19

определение:

$$\sigma_{tr} \equiv \int_0^{\infty} (1 - \cos \theta(\rho)) \cdot 2\pi\rho d\rho$$

Транспортное сечение – площадь поперечного сечения рассеивающего центра, который полностью поглощает продольный импульс частиц.

При малых θ :

$$\begin{aligned} \theta(\rho) &= \frac{\Delta p_{\perp}}{mv} = \frac{1}{mv} \int F_{\perp} dt = \frac{1}{mv} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\frac{q_1 q_2}{\rho^2} \cos^2 \varphi}_{|F|} \overbrace{\cos \varphi}^{F_{\perp}} \underbrace{\frac{d(\rho \operatorname{tg} \varphi)}{v}}_{dt} = \\ &= \frac{q_1 q_2}{mv^2 \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{2q_1 q_2}{mv^2 \rho} \end{aligned}$$

$dt = dz/v = d(\rho \cdot \operatorname{tg} \varphi)/v$

Ср. с точной формулой Резерфорда: $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sim \frac{q_1 q_2}{mv^2 \rho}$

$$\theta \sim 1 \quad \text{при} \quad \rho \sim \frac{q_1 q_2}{mv^2}$$

Транспортное сечение (2)

для малых углов отклонения $\theta \ll 1$: $1 - \cos \theta \approx \theta^2 / 2$

$$\sigma_{tr} = \int \frac{\theta(\rho)^2}{2} 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4} \int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}$$

расходимость !!!



Если заряд находится в плазме, то:

- $\rho_{\min} \sim \frac{q_1 q_2}{mv^2}$ (нарушается приближение $\theta \ll 1$)
- $\rho_{\max} \sim r_D$ (на больших расстояниях поле экспоненциально спадает)
- $mv^2 \sim T, |q_1| \sim |q_2| \sim e$
- $\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \sim \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}} \cdot \frac{T}{e^2} \sim nr_D^3 \sim N_D \gg 1$

Кулоновский логарифм Λ

определение:

$$\Lambda \equiv \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \sim \ln N_D$$

В большинстве случаев величина Λ находится в пределах от 10 до 20.

Обычно для типичных параметров лабораторной плазмы принимается $\Lambda \approx 15$.

Транспортное сечение:

$$\sigma_{tr} = \frac{4\pi\Lambda q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4}$$

$$\sigma_{tr} \propto 1/E^2$$

для $|q_1| = |q_2| = e$ и $\Lambda \approx 15$ практическая формула:

$$\sigma_{tr} \approx \frac{10^{-12}}{E^2 [\text{эВ}]} \left[\text{см}^2 \right]$$

Замечания о логарифмической точности:

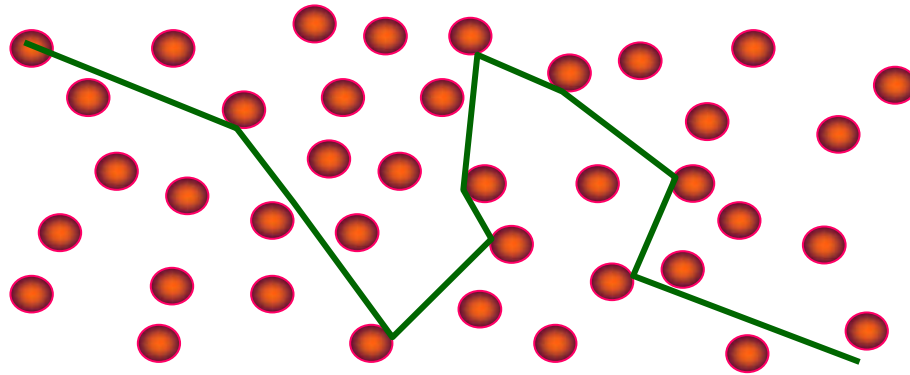
- ошибка в 2 раза при определении ρ_{\min} или ρ_{\max} :

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - \ln 2, \quad \text{относительная ошибка} \quad \Delta\Lambda/\Lambda \sim 1/\Lambda$$

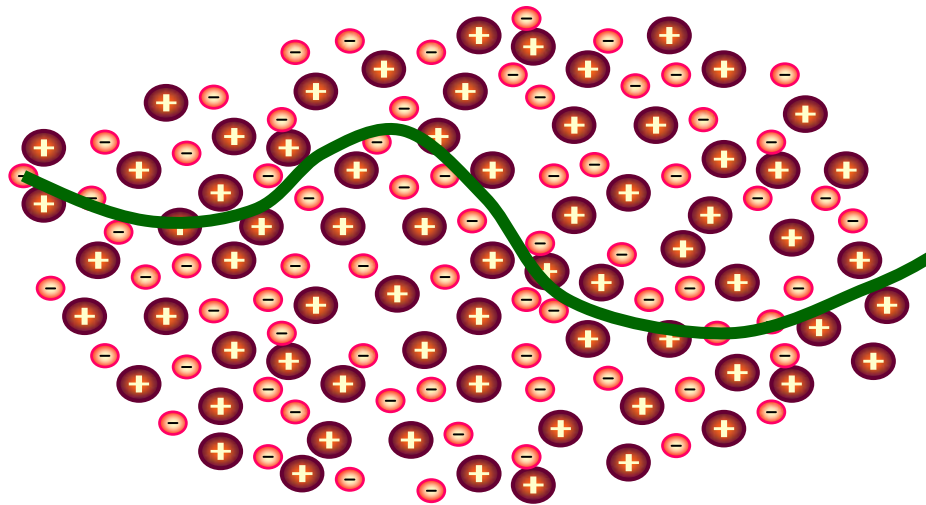
- вклад рассеяния на большие углы $\theta \sim 1$:

$$\Delta\sigma_{tr} \sim \pi\rho_{\min}^2 \sim \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4} \sim \frac{\sigma_{tr}}{\Lambda} \ll \sigma_{tr}$$

Траектории частиц в плазме



газ



плазма

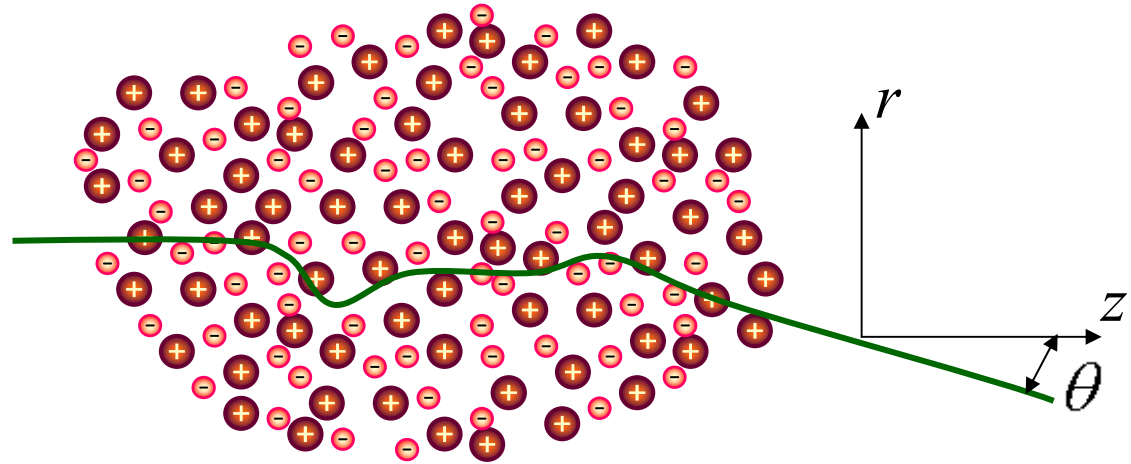
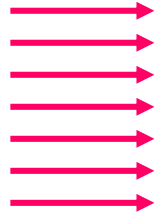
В плазме частицы летят по плавно изменяющимся траекториям!

Релаксация импульса и энергии частиц

Рассмотрим распространение пучка заряженных частиц в плазме

поток частиц
с плотностью n

$$j = nv$$



Характерные
времена процессов

рассеяние (потеря
направленного импульса)

$$\tau_s \equiv - \left(\frac{1}{\langle p_z \rangle} \frac{d\langle p_z \rangle}{dt} \right)^{-1}$$

потеря энергии

$$\tau_\varepsilon \equiv - \left(\frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dt} \right)^{-1}$$

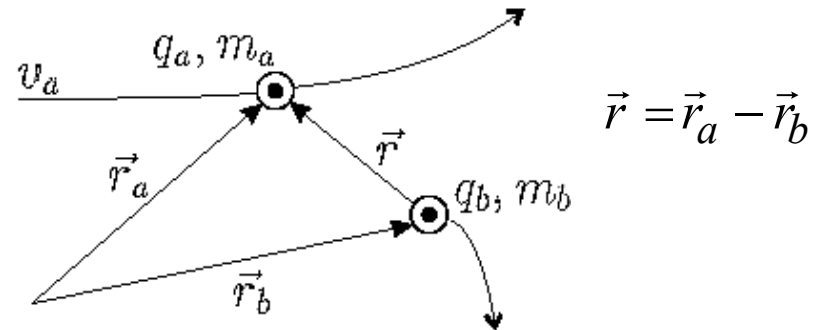
угловой разброс

$$\tau_\theta \equiv \left(\frac{1}{\langle \theta^2 \rangle} \frac{d\langle \theta^2 \rangle}{dt} \right)^{-1}$$

Задача о рассеянии частицы

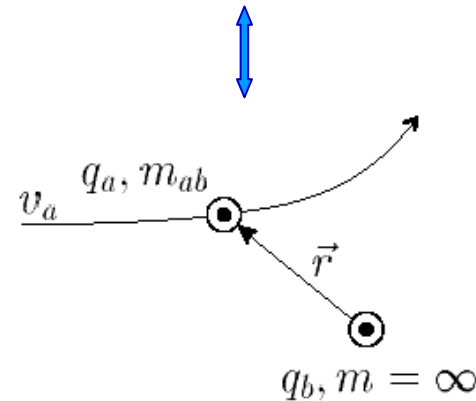
Рассеяние частицы « a » на частице « b » происходит по закону

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = -m_b \ddot{\vec{r}}_b = q_a q_b \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}$$



Введём приведённую массу

$$m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}, \quad \vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b}$$



Получили рассеяние частицы с массой m_{ab} на неподвижном кулоновском центре

$$\ddot{\vec{R}} = 0, \quad m_{ab} \ddot{\vec{r}} = \frac{q_a q_b \vec{r}}{r^3}$$

Рассеяние в холодной плазме

Средняя сила на рассеивающий центр:

$$F_z^b = m_{ab} v_a j \sigma_{tr} = m_{ab} v_a n_a v_a \frac{4\pi \Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}^2 v_a^4} = \frac{4\pi \Lambda n_a q_a^2 q_b^2}{m_{ab} v_a^2}$$

Средняя сила на налетающую частицу со стороны частиц «b»:

$$F_z^a = -\frac{n_b}{n_a} F_z^b, \quad \frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = -\frac{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2}{m_{ab} v_a^2} \frac{\langle p_z \rangle}{m_a v_a} \propto v_a^{-2}$$

откуда:

$$\tau_s^{a/b} = \frac{m_{ab} m_a v_a^3}{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2}$$

эта формула получена для быстрой пробной частицы,
т.е. рассмотрен случай холодной плазмы !

Рассеяние в горячей плазме

Считаем плазму **горячей**, если её частицы имеют среднюю скорость $v_b \geq v_a$

Вводим понятие **функции распределения** f_b так, что число частиц со скоростью v_b равно

$$dn_b = f_b(\vec{v}_b) \cdot d\vec{v}_b, \quad \int f(\vec{v}) \cdot d\vec{v} = n$$

Средняя сила, действующая на частицу «a» со стороны группы частиц dn_b :

$$d\vec{F}^a = -\frac{4\pi\Lambda dn_b q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3}$$

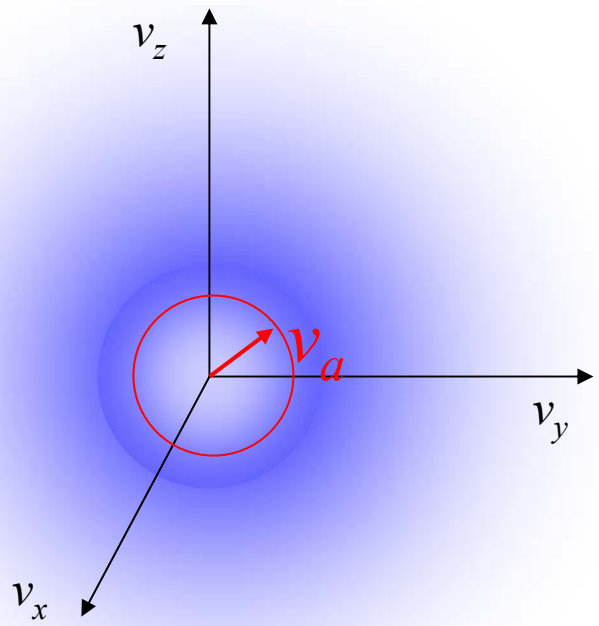
Полная тормозящая сила на «a» со стороны частиц «b»:

$$\vec{F}^{a/b} = \int d\vec{F}^a = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \int f_b(\vec{v}_b) \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3} d\vec{v}_b$$

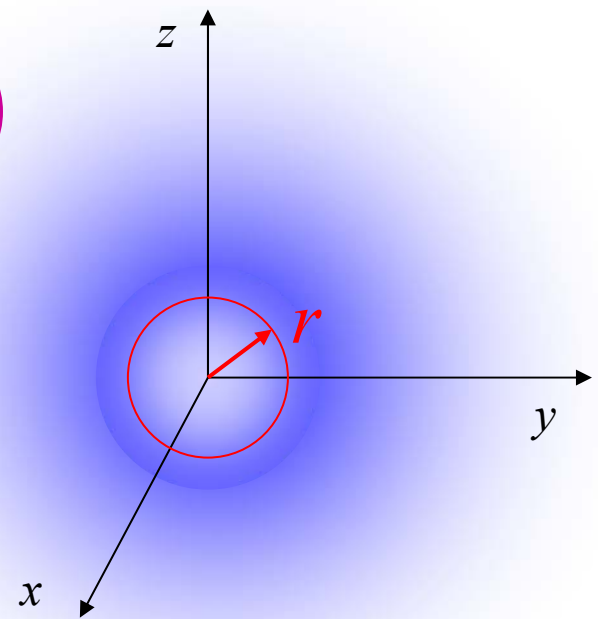
Аналогия с электростатикой

рассеяние частиц в плазме ↔ поле сферически-симметричной системы

$$f_b(\vec{v}_b)$$



$$\rho(\vec{r}')$$



$$\vec{F}^{a/b} = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \int f_b(\vec{v}_b) \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3} d\vec{v}_b$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

$$\vec{F}^{a/b} = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \int_0^{v_a} f_b(\vec{v}_b) \cdot d\vec{v}_b \frac{\vec{v}_a}{v_a}$$

$$E = Q/r^2$$

Заряд, внешний по отношению к сфере, поля не создает


Рассеяние в горячей плазме (2)

в изотропной плазме с $f_b(\vec{v}_b) = f_b(|\vec{v}_b|)$ торможение происходит только на медленных частицах с $|\vec{v}_b| < |\vec{v}_a|$

в максвелловской плазме:
$$f_b = n_b \left(\frac{m_b}{2\pi T_b} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_b v_b^2}{2T_b}\right)$$

Плазма «горячая» при $|\vec{v}_a| \ll v_{Tb} \equiv \sqrt{T_b/m_b}$, тогда

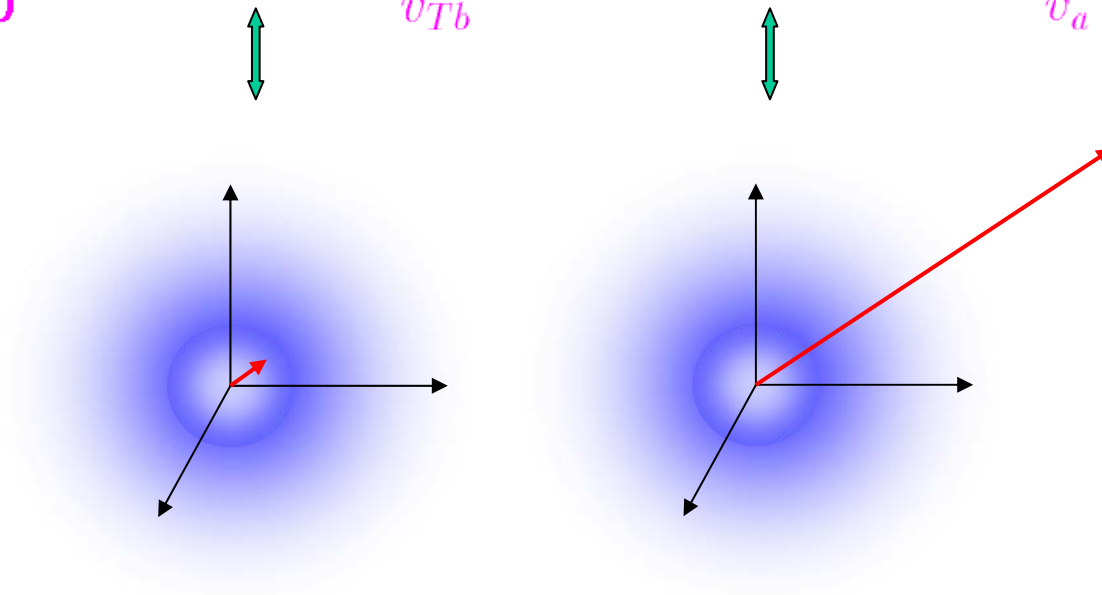
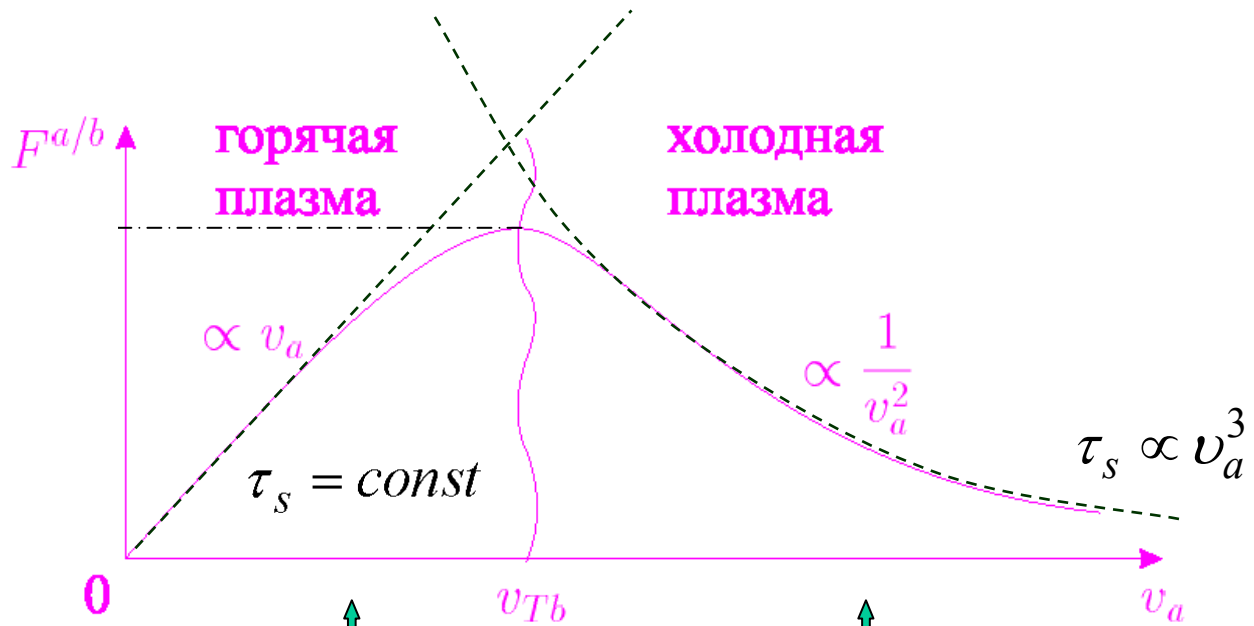
$$\vec{F}^{a/b} = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \frac{\int_0^{v_a} f(\vec{v}_b) d\vec{v}_b}{v_a^2} \frac{\vec{v}_a}{v_a} = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \frac{\int_0^{v_a} f(0) 4\pi v_b^2 dv_b}{v_a^2} \frac{\vec{v}_a}{v_a}$$


$$\vec{F}^{a/b} = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} f(0) \frac{4\pi \vec{v}_a}{3}$$

$$-\vec{F}^{a/b} \sim \frac{m_a \vec{v}_a}{\tau_s^{a/b}(v_{Tb})} = m_a v_{ab}(v_{Tb}) \vec{v}_a \propto \vec{v}_a$$

↑ ↑
по формулам для холодной плазмы

Сила торможения для разных частиц



Сравнение торможения в газе и плазме

Газ или твёрдое тело

Классический вывод формулы ионизационных потерь

В.И. Тельнов. «Современная экспериментальная физика»

<http://kedr.inp.nsk.su/~telnov/modphys/>

[lectures_transp_new/lec3.pdf](#)

$$dE = \int \varepsilon 2\pi\rho n_e \cdot d\rho dx = \frac{4\pi e^2 z_1^2}{m\nu^2} n_e \cdot \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \rho_{\max} \sim r_B$$

Холодная плазма

$$F_z^b = -\frac{4\pi\Lambda n_a q_a^2 q_b^2}{m_{ab}v_a^2}$$

$$\Rightarrow \rho_{\max} \sim r_D$$

кулоновский логарифм

$$\Lambda_B / \Lambda_D \sim 1/3$$

В холодной плазме пробег частицы меньше в 3 раза

Горячая плазма

$$\bar{F}^{a/b} = -\frac{4\pi q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \Lambda \left(\frac{m_e}{2\pi T_b} \right)^{3/2} \frac{4\pi \vec{v}_a}{3}$$

Холодная плазма может быть «прозрачной» для быстрых частиц

Проводимость плазмы

из закона Ома: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

здесь j – ток в плазме, роль v_b играет скорость движения электронов относительно ионов ■ модель горячей плазмы

Малое внешнее поле E ускоряет электроны до тех пор, пока сила трения об ионы не уравновесит электрическую силу

$$e\vec{E} = \vec{F}^{e/i} = m_e \vec{v} v_{ei} |v \sim v_{Te} \quad \longrightarrow \quad \vec{j} = en\vec{v} = \frac{ne^2}{m_e v_{ei} |v \sim v_{Te}} \cdot \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e v_{ei}} \sim \frac{T_e^{3/2}}{4\pi\Lambda e^2 \sqrt{m_e}}$$

Проводимость плазмы зависит только от её температуры и не зависит от плотности

удельное сопротивление:

металлы

плазма

медь: $1.7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

$T = 2$ эВ: $1.5 \cdot 10^{-4}$ Ом·м

нерж. сталь: $7 \cdot 10^{-7}$ Ом·м

$T = 100$ эВ: $5 \cdot 10^{-7}$ Ом·м

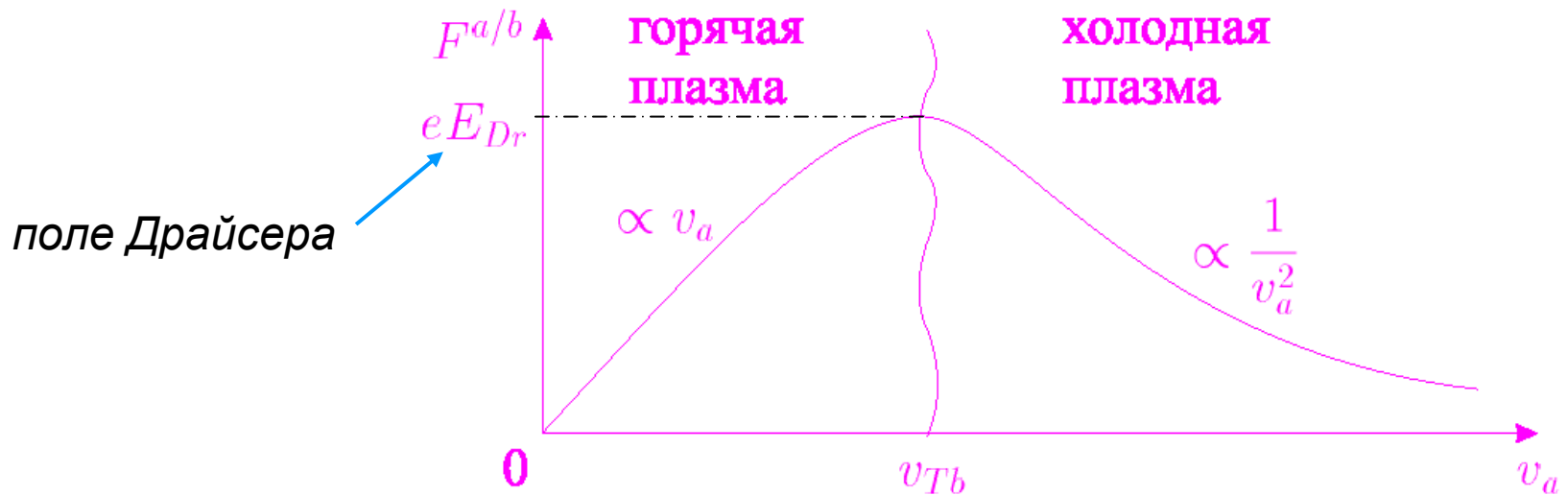
ртуть: 10^{-6} Ом·м

$T = 10$ кэВ: $5 \cdot 10^{-10}$ Ом·м

«Убегающие электроны»

В плазме закон Ома работает не всегда !!!

Пусть плазма помещена в сильное внешнее электрическое поле



поле назовём сильным, если $E > E_{Dr} \sim m_e \nu_{Te} \nu_{ei} (v_{Te}) / e$

тогда ускорение в электрическом поле не может уравновеситься трением об ионы \Rightarrow неограниченное ускорение электронов («просвист» или убежание электронов), или же может возникнуть неустойчивость, приводящая к повышенному рассеянию электронов

Время релаксации энергии

За какое время плазма придёт к максвелловскому равновесию?

оценим времена релаксации из
$$\tau_s^{a/b} = \frac{m_{ab} m_a v_a^3}{4\pi\Lambda n_b q_a^2 q_b^2}$$

возьмём в качестве «a» типичную частицу плазмы

$$\tau_s^{a/b} = \frac{1}{v_{ab}} \approx \frac{m_{ab} m_a v_{Ta}^3}{4\pi\Lambda n_b q_a^2 q_b^2} = \frac{m_{ab} T_a^{3/2}}{4\pi\Lambda n_b q_a^2 q_b^2 \sqrt{m_a}} \propto \frac{m_{ab}}{\sqrt{m_a}}$$

электроны максвеллизуются за время
$$\sim \tau_s^{e/e} \sim \frac{\sqrt{m_e} T^{3/2}}{4\pi\Lambda n e^4}$$

ионы максвеллизуются за время
$$\sim \tau_s^{i/i} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \tau_s^{e/e} \sim 40 \cdot \tau_s^{e/e}$$

температура электронов и ионов
выравниваются за время
$$\sim \tau_E^{e/i} \sim \frac{m_i}{m_e} \cdot \tau_s^{e/e} \sim 2000 \cdot \tau_s^{e/e}$$

для водорода

- при столкновении с ионом лёгкий электрон отдаёт в m_e/m_i раз меньше энергии
- на временах $\tau_s^{i/i} \ll t \ll \tau_s^{e/e}$ ионы и электроны максвелловские, но $T_e \neq T_i$
- высокоэнергичные частицы термализуются последними

Некоторые параметры

Длина свободного пробега $\lambda_a = v_a \tau_s^a$

Частота столкновений $\nu_{ab} = 1 / \tau_s^{a/b}$

$$\tau = (n \sigma_{tr} v)^{-1} \quad \nu_{ei} = n \sigma_{tr} v$$

В водородной плазме

$$\lambda = \frac{1}{n \sigma_{tr}} = \frac{10^{12} \cdot E^2}{n} \quad [\text{см}, \text{эВ}, \text{см}^{-3}]$$

$$\nu_{ei} = 6 \cdot 10^{-5} \frac{n}{E^{3/2}} \quad [\text{с}^{-1}, \text{см}^{-3}, \text{эВ}]$$

Конец темы

Столкновения частиц в плазме. Кулоновский логарифм. Транспортное (кулоновское) сечение, зависимость от энергии и заряда. Сила, действующая на неподвижный рассеивающий центр. Кулоновский логарифм для плазмы и газа. Траектории частиц в плазме и газе.

Релаксация импульса и энергии частиц в плазме. Характерное время потери направленного импульса для холодной и горячей плазмы, отличия в зависимости от скорости частицы. Сравнение времен релаксации электронной компоненты, ионной компоненты и времени выравнивания электронной и ионной температур. Проводимость плазмы, поле Драйсера, убегающие электроны.