

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

6 сентября 2017 г.

«Основы физики плазмы» — первый из трёх теоретических курсов для бакалавров кафедры. Он включает 16 учебных недель по одной лекции и одному семинару в неделю.

Сайт курса: <http://el.nsu.ru/>.

Студенты обязаны зарегистрироваться на сайте курса. Перед каждой новой лекцией необходимо пройти электронный тест по материалу предыдущей лекции. Тест открывается в день лекции и закрывается вечером дня перед следующей лекцией.

Слайды лекций, программу курса, вопросы к экзамену и т. п. можно загрузить с сайта курса.



## Как получить доступ к сайту курса

Для входа на площадку <http://el.nsu.ru> и получения доступа к электронному курсу, нужно иметь активную учётную запись в системе «Мой университет» (<https://my.nsu.ru>). Регистрация пользователей производится в к. 4221 нового корпуса НГУ (необходимо иметь при себе паспорт или пропуск НГУ). Для восстановления ранее активированной учётной записи следует использовать штатную процедуру восстановления пароля <https://my.nsu.ru/public/restore.jsp>.

Не откладывайте регистрацию на последний день!

Доступ к курсам на площадке <http://el.nsu.ru> будет открыт не позднее 12 сентября.

Служба техподдержки: [support@el.nsu.ru](mailto:support@el.nsu.ru), тел. 363-42-86; к. 4215, новый корпус НГУ.





Учебник И. А. Котельникова «Лекции по физике плазмы» имеется в библиотеке НГУ.

При изучении английского языка рекомендуется использовать копии оригинальных статей, размещённые на сайте.



## Лекция 01

# Общие сведения о плазме

- Плазма как состояние вещества
- Квазинейтральность
- Определение плазмы
- Дебаевская экранировка
- Ленгмюровские колебания
- Практические формулы
- Плазма в природе



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара



По мере нагревания *твёрдое вещество* сначала превращается в *жидкость* в процессе *плавления*, а затем жидкость *испаряется*, превращаясь в *газ*.

При дальнейшем нагревании увеличивается энергия хаотического движения молекул газа, поэтому их столкновения друг с другом вызывают всё более разрушительные последствия. Сначала молекулы *диссоциируют* на составляющие их атомы, а затем и атомы *ионизируются*, то есть из разделяются на (отрицательно заряженные) электроны и (положительно заряженные) ионы. Таким образом, при нагревании любое вещество в конечном итоге превращается в ионизованный газ.



От обычного газа электрически нейтральных атомов и молекул он отличается необычными свойствами, в связи с чем английский химик Уильям Крукс (William Crookes) назвал предмет своих исследований *четвёртым состоянием вещества* (1879). Сэр Крукс экспериментировал с так называемыми *катодными лучами*, которые получал, пропуская электрический ток через стеклянные трубки с частично откачанным воздухом. После открытия электрона сэром Дж. Дж. Томсоном (Joseph John Thomson, 1897) стало понятно, что катодные лучи представляют собой поток ускоренных электронов в слабоионизованном газе.

Термин *плазма* применительно к ионизованному газу был введён американским физиком Ирвингом Ленгмюром на полвека позже. Днём рождения физики плазмы следует считать 21 июня 1928 года, когда редакция журнала получила статью Ленгмюра [Irving Langmuir, *Oscillations in Ionized Gases* // National Academy of Sciences of the United States of America, vol.14, pp. 627-637 (1928)].



В отличие от фазовых переходов первого рода, таких как *плавление* и *испарение*, *ионизация* газа не сопровождается пространственным разделением фаз. Степень ионизации

$$\zeta = n_i/n_0,$$

характеризуемая отношением плотности ионов  $n_i$  к начальной плотности нейтральных атомов  $n_0$ , увеличивается во всём объёме газа плавно по мере увеличения температуры.

В атмосферном воздухе всегда имеется некоторое количество ионов и свободных электронов за счёт ионизации космическими лучами, но его едва ли можно считать настоящей плазмой.

Строгое определение состояния вещества, которое можно назвать плазмой, должно включать количественный критерий, когда ионизованный газ приобретает специфические свойства плазмы.



Чтобы найти этот критерий, нужно прежде всего уяснить, чем новое состояние вещества отличается от обычного газа.

Главная особенность коллектива заряженных частиц, составляющих плазму, состоит в появлении нового типа взаимодействия частиц этого коллектива — через далекодействующие электрические и магнитные поля. Именно благодаря дальнему действию электрических и магнитных сил газ заряженных частиц приобретает новые свойства, образуя нечто целое с электромагнитным полем. Это коллективное (говорят также — *самосогласованное*) поле, с одной стороны, создаётся заряженными частицами плазмы, а с другой — существенным образом влияет на их движение.



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность**
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара



Самосогласованное поле, если оно достаточно сильное, делает ионизованный газ квазинейтральным. *Квазинейтральностью* называют приближённое равенство плотности электронов  $n_e$  и ионов  $n_i$ , так что вещество в целом электрически нейтрально. В более общем случае, когда атомы ионизованы многократно, в среднем  $Z$  раз каждый, квазинейтральность означает, что

$$n_e \approx Zn_i. \quad (1)$$

Слово *квазинейтральность* придумал Вальтер Шотки (Walter Schottky, 1924).





При достаточно большой плотности электронов и ионов даже малое пространственное разделение зарядов в ионизованном газе привело бы к возникновению очень сильных электрических полей, препятствующих разделению. Как следствие этого при любых внешних полях «естественной» величины плотности электронов и ионов оказываются близкими друг к другу, а смесь электронов и ионов сохраняет квазинейтральность даже при весьма бурно протекающих в ней процессах.

Напротив, при малой плотности заряженных частиц квазинейтральность разрушится, даже если вначале приготовить электрически нейтральную смесь ионов и электронов. Вследствие хаотического теплового движения более лёгкие электроны быстро разлетятся, оставив позади более тяжёлые ионы, если электрическое притяжение разнозаряженных электронов и ионов недостаточно велико.



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы**
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара



*Квазинейтральный газ заряженных частиц называют плазмой.*

В наиболее распространённом случае плазма состоит из электронов и положительно заряженных ионов. В плазме могут присутствовать также нейтральные атомы. Если доля ионов незначительна ( $n_i/n_0 \ll 1$ ), плазму называют *слабоионизованной*. Если, наоборот, мала доля нейтральных атомов ( $n_i/n_0 \rightarrow 1$ ), то говорят о *полностью ионизованной* плазме.

Существует также понятие *простой плазмы*, применяемое при построении теоретических моделей. Так называют плазму, состоящую из электронов и ионов, произведённых из атомов одного химического элемента, которые потеряли по одному атомарному электрону ( $Z = 1$ ). Пример — водородная плазма.

Плазму с многократно ионизованными ионами (потерявшими много электронов,  $Z \gg 1$ ) называют *лоренцевой*.



Важно понимать, что квазинейтральность есть не изначальная характеристика плазмы, а всего лишь её свойство, вытекающее из главенствующей роли коллективного взаимодействия частиц через самосогласованное поле. При определённых условиях сгусток заряженных частиц одного сорта (например, только электронов) может обладать свойствами, присущими квазинейтральной плазме. В этом контексте такой сгусток называют *заряженной плазмой*.



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование**
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара



Дадим количественную формулировку понятию квазинейтральности.

Рассмотрим плазму, где в единице объёма находится  $n_e$  электронов (каждый с зарядом  $-e$ ) и примерно столько же однозарядных ионов  $n_i$  (с зарядом  $+e$ ). Представим, что вследствие теплового движения частиц в области с размером  $l$  самопроизвольно возникла разность плотностей электронов и ионов

$$\delta n = n_e - n_i.$$

В результате появится электрический заряд с плотностью  $\rho_\varepsilon = en_i - en_e = -e \delta n$  и электрическое поле, потенциал  $\varphi$  которого определяется из уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_\varepsilon = 4\pi e \delta n. \quad (2)$$



$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho_\varepsilon = 4\pi e \delta n. \quad (2)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &\sim \delta\varphi/l^2, \\ \delta\varphi &\sim 4\pi e \delta n l^2. \end{aligned} \quad (3)$$

$$e \delta\varphi \lesssim kT,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. В физике плазмы  $T$  измеряют в единицах энергии; тогда  $k = 1$  и

$$e \delta\varphi \lesssim T.$$

$$\frac{\delta n}{n} \lesssim \frac{T}{4\pi n e^2 l^2}.$$



$$\frac{\delta n}{n} \approx \frac{T}{4\pi n e^2 l^2} = \frac{\lambda_D^2}{l^2}, \quad (4)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

где

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}} \quad (5)$$

обозначает *длину Дебая* (Peter Debye, 1923). Выделенный элемент будет квазинейтральным в том смысле, что  $\delta n/n \ll 1$ , если

$$l \gg \lambda_D. \quad (6)$$





Ионизованный сгусток газа с линейным размером  $L$  квазинейтрален и, следовательно, является плазмой, если

$$L \gg \lambda_D. \quad (7)$$

Флуктуация  $\delta N = \delta n L^3$  числа частиц  $N = n L^3$  в сгустке ограничена неравенством

$$\frac{\delta N}{N} \lesssim \frac{\lambda_D^2}{L^2}, \quad (8)$$

существенно более жёстким, нежели условие (4) для малых объёмчиков с размером  $\lambda_D \ll l \ll L$ . При  $l \sim \lambda_D$  (например, вблизи электродов в газовом разряде)

$$\delta n \sim n.$$

У поверхности электродов возникает *дебаевский слой* с потенциалом  $e \delta \varphi \sim (5 \div 8) T$ . Он экранирует электрическое поле электродов, препятствуя его проникновению вглубь плазмы.



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания**
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара



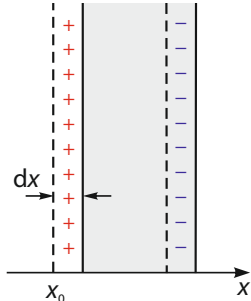
Характерное время существования флуктуаций плотности в объёмчике с размером  $l \sim \lambda_D$ ,

$$t \sim \frac{\lambda_D}{v_{Te}} \sim \sqrt{\frac{m_e}{4\pi n e^2}},$$

получается делением  $\lambda_D = \sqrt{T/4\pi n e^2}$  на  $v_{Te} \sim \sqrt{T/m_e}$ . За это время тепловое движение «замажет» возникшую флуктуацию.

Если флуктуация плотности возникла в объёмчике с размером  $l \gg \lambda_D$ , возникают чисто *потенциальные колебания* с длиной волны  $\lambda = l$ , в которых магнитное поле отсутствует. Они сопровождаются периодическим изменением плотности электронов вокруг среднего значения, равного плотности ионов.





Выделим плоский однородный слой электронов и пренебрежём тепловым разбросом скоростей (так как  $\lambda \gg \lambda_D$ ). Ионы неподвижны из-за их бóльшей массы.

При сдвиге слоя на  $dx = x - x_0$  от начального положения  $x_0$ , возникнет избыточный заряд  $\sigma = +en(x - x_0)$  слева (на единицу площади) и  $-\sigma$  справа. В плоском конденсаторе поле

$$E_x = 4\pi\sigma$$

стремится вернуть электроны в исходное положение:

$$m_e \ddot{x} = -eE_x = -4\pi e^2 n (x - x_0). \quad (9)$$

Около  $x = x_0$  возникают колебания с *ленгмюровской частотой*:

$$\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m_e}. \quad (10)$$



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы**
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара



В практических вычислениях удобной единицей измерения температуры  $T$  является электронвольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6022 \times 10^{-12} \text{ эрг} = 11\,604^\circ \text{ К.}$$

Плотность плазмы  $n$  обычно выражают в числе частиц того или иного сорта на кубический сантиметр ( $\text{см}^{-3}$ ), длину  $l, L, \lambda$  — в сантиметрах (см), время  $t$  — в секундах (сек), круговую частоту  $\omega$  в радианах на секунду ( $\text{сек}^{-1}$ ), а линейную частоту  $\nu = \omega/2\pi$  — в Герцах (Гц). Для вычисления удобны «практические» формулы, где коэффициенты из мировых констант преобразованы в числа:

$$\begin{aligned}\omega_p &= 5,64 \times 10^4 n^{1/2}, \\ \lambda_D &= 7,43 \times 10^2 T^{1/2} / n^{1/2}.\end{aligned}$$



# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе**
- 8 Задачи для семинара



Нередко можно слышать, что **99,9%** вещества во Вселенной находится в состоянии плазмы. Вероятно, эта оценка сильно завышена, так как недавние исследования убедили астрофизиков в существовании «тёмной массы», природа которой в настоящее время не ясна.

Для ионизации вещества его температура, как можно предположить, должна приближаться к энергии ионизации отдельного атома ( $\sim 10 \text{ эВ} \sim 100\,000^\circ \text{K}$ ). Позднее мы узнаем, что чем меньше плотность вещества, тем ниже температура, требуемая для ионизации, но всё равно условия существования плазмы несовместимы с биологической жизнью. В повседневной жизни наши встречи с плазмой ограничиваются редкими примерами (вспышка молнии, свечение полярного сияния, неоновая лампа, сварочная дуга).





Иногда плазму подразделяют на *низкотемпературную* ( $T < 10$  эВ) и *высокотемпературную* ( $T > 10$  эВ). Такое деление до некоторой степени условно. Оно всего лишь отражает тот факт, что в лабораторных условиях высокотемпературная водородная плазма полностью ионизована, тогда как в низкотемпературной плазме обычно велика доля нейтральных атомов. Однако межзвёздная плазма полностью ионизована уже при температуре  $1$  эВ.



Table 1: Параметры лабораторной и космической плазмы

	$n, \text{ см}^{-3}$	$T, \text{ эВ}$
Газовый разряд	$10^6 \div 10^{14}$	1
Ионосфера Земли	$10^2 \div 10^6$	0,1
Солнечный ветер	5	$10 \div 50$
Солнечная корона	$10^9$	$10^2$
Солнечное ядро	$10^{26}$	1400
Межзвёздный газ	1	1
Газовая туманность	$10^3$	1
Магнитный УТС	$10^{12} \div 10^{15}$	$10^3 \div 10^4$
Инерциальный УТС	$10^{20} \div 10^{24}$	$10^2 \div 10^3$

# Далее...

- 1 Плазма как состояние вещества
- 2 Квазинейтральность
- 3 Определение плазмы
- 4 Дебаевское экранирование
- 5 Ленгмюровские колебания
- 6 Практические формулы
- 7 Плазма в природе
- 8 Задачи для семинара**



## Задачи для семинара

- Оценить величину дебаевского радиуса для разных видов плазмы из числа представленных в таблице 1.
- Получить формулу для дебаевского радиуса в лоренцевой плазме с  $Z \gg 1$ . (Задача 1.2)
- Задача о колебаниях плоского слоя электронов в холодной плазме. (Задача 1.3)
- Частота колебаний на границе плазмы. (Задача 1.6)
- Равновесие заряженной (чисто электронной) плазмы в магнитном поле. (Задача 1.8)

Номера задач указаны по книге «Лекции по физике плазмы».



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

13 сентября 2017 г.

## Лекция 02

# Дебаевское экранирование

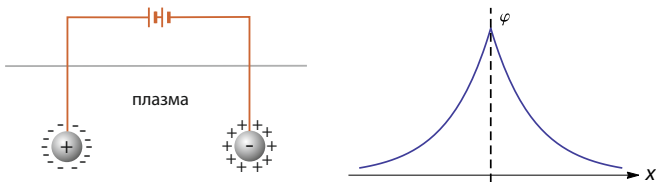
- Экранирование пробного заряда
- Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- Плазменный параметр
- Классификация плазмы



# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- 3 Плазменный параметр
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы
- 5 Классическая и вырожденная плазмы
- 6 Классификация плазмы
- 7 Задачи для семинара





**Figure 1:** Слева: экранирование пробных зарядов в плазме. Справа: потенциал дебаевского слоя в плазме вблизи заряженной сетки.

В плазме отрицательно заряженный шар будет окружён облаком ионов, а положительно заряженный — облаком электронов. В холодной плазме облако покрывает шарик тонким слоем, полностью экранируя его электрический заряд, так что вне облака  $\vec{E} = 0$ . Тепловое движение размывает экранирующий слой, увеличивая его толщину. Внутри слоя квазинейтральность отсутствует.



Эффект *электростатического экранирования* был описан Дебаем (Peter Debye) и Хюккелем (Erich Hückel) в 1923 году на примере электролита. В наше время его называют *дебаевским экранированием*, а экранирующий слой — *дебаевским слоем*.

Пусть в плазму помещён *пробный* точечный заряд  $q$ . Найдём распределение потенциала  $\varphi$  вблизи него. В потенциальном поле частицы плазмы распределены по закону Больцмана,

$$n_s = n_{s0} \exp\left(-\frac{e_s \varphi}{T_s}\right), \quad (1)$$

где  $s = e$  для электронов и  $s = i$  для ионов, а  $n_{s0}$  — плотность вдали от пробного заряда, где  $\varphi = 0$  и плазма квазинейтральна, т.е.

$$\sum_s e_s n_{s0} = e_e n_{e0} + e_i n_{i0} = 0.$$



Если предположить, что  $|e_s \varphi| \ll T_s$ , то приближённо

$$\exp\left(-\frac{e_s \varphi}{T_s}\right) \approx 1 - \frac{e_s \varphi}{T_s},$$
$$\rho_\varepsilon = \sum_s e_s n_s \approx \sum_s e_s n_{s0} \times \left(1 - \frac{e_s \varphi}{T_s}\right) = - \sum_s \frac{e_s^2 n_{s0}}{T_s} \varphi,$$

так как  $\sum_s e_s n_{s0} = 0$ . Тогда уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_\varepsilon,$$

принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}, \quad (2)$$

где *дебаевская длина*  $\lambda_D$  вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_s \frac{4\pi e_s^2 n_{s0}}{T_s} \approx \sum_s \frac{4\pi e_s^2 n_s}{T_s}. \quad (3)$$



Обозначение  $\lambda_D = \sqrt{T/4\pi e^2 n}$  из предыдущей лекции относилось к одному сорту частиц (электронам). Складываются обратные квадраты *парциальных* дебаевских длин:

$$\lambda_{Ds} = \sqrt{\frac{T_s}{4\pi e_s^2 n_s}}, \quad \frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_s \frac{1}{\lambda_{Ds}^2}. \quad (4)$$

В изотермической плазме с однозарядными ионами, где  $T_i = T_e = T$ ,  $e_i = |e_e| = e$  и  $n_e = n_i = n$ ,

$$\lambda_{Di} = \lambda_{De} = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n}}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n}} = \frac{\lambda_{De}}{\sqrt{2}}.$$



Найдём сферически симметричное решение  $\varphi = \varphi(r)$  уравнения (2):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}.$$

Решение, обращающееся в нуль при  $r \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\varphi = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

Константу  $A$  находим из условия, что  $\varphi \rightarrow q/r$  при  $r \rightarrow 0$ :

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (5)$$

*Дебаевский потенциал* (5) при  $r \gtrsim \lambda_D$  убывает быстрее, чем кулоновский потенциал  $q/r$ . Он складывается из потенциала заряда  $q/r$  и потенциала экранирующего облака  $\varphi_p$ :

$$\varphi \equiv \frac{q}{r} + \varphi_p, \quad \varphi_p = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - \frac{q}{r}. \quad (6)$$



# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме**
- 3 Плазменный параметр
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы
- 5 Классическая и вырожденная плазмы
- 6 Классификация плазмы
- 7 Задачи для семинара



Потенциал экранирующего облака на пробном заряде

$$\varphi_p(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - \frac{q}{r} \right] = -\frac{q}{\lambda_D}.$$

Энергия взаимодействия пробного заряда  $q$  с плазмой:

$$q\varphi_p(0) = -\frac{q^2}{\lambda_D}. \quad (7)$$

Всё сказанное верно и в отношении зарядов плазмы. Чтобы найти энергию взаимодействия зарядов плазмы друг с другом, необходимо взять сумму энергий (7) по всем частицам плазмы и результат разделить на 2, так как каждая частица в сумме учтена дважды. В расчёте на единицу объёма

$$w = -\frac{1}{2\lambda_D} \sum_s e_s^2 n_s. \quad (8)$$



$$w = -\frac{1}{2\lambda_D} \sum_s e_s^2 n_s. \quad (8)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

Энергия кулоновского взаимодействия частиц плазмы обратилась бы в нуль, если все частицы были равномерно распределены в пространстве независимо друг от друга. Ненулевые поправки к внутренней энергии плазмы (по сравнению с идеальным газом) возникают при учёте корреляций между положениями различных частиц, как это видно из вывода формулы (8). Поэтому величину (8) называют *корреляционной поправкой* к внутренней энергии плазмы.

Далее считаем, что  $n = n_e = n_i$ ,  $T = T_e = T_i$ . Тогда

$$w = -\frac{2ne^2}{2\lambda_D}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n}}.$$



Суммарная плотность ионов и электронов равна  $2n$ , поэтому на одну частицу приходится энергия

$$W = \frac{w}{2n} = -\frac{e^2}{2\lambda_D}. \quad (9)$$

Это не совпадает с оценкой

$$W' \sim -\frac{e^2}{a} \sim -e^2 n^{1/3}, \quad (10)$$

которую можно получить, считая, что искомая энергия равна произведению зарядов пары соседних частиц  $e^2$ , делённой на среднее расстояние  $a \sim n^{-1/3}$  между ними.

Какая же формула верна?





# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- 3 Плазменный параметр**
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы
- 5 Классическая и вырожденная плазмы
- 6 Классификация плазмы
- 7 Задачи для семинара



Число частиц в дебаевской сфере (*плазменный параметр*):

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 \times 2n = \frac{8}{3}\pi\lambda_D^3 n \sim (\lambda_D/a)^3. \quad (11)$$

Сравнивая формулы  $W = -e^2/2\lambda_D$  и  $W' \sim -e^2/a$ , видим, что

$$W \sim W' \times \frac{a}{\lambda_D} \sim \frac{W'}{N_D^{1/3}}.$$

Парадоксальным образом, из двух формул (9) и (10) верна та, которая даёт меньшее (по абсолютной величине) значение, т.е.

$$W = -\frac{e^2}{2\lambda_D} \propto \frac{n^{1/2}}{T^{1/2}}, \quad \text{если} \quad N_D \gg 1; \quad (9)$$

$$W' \sim -e^2 n^{1/3}, \quad \text{если} \quad N_D \ll 1. \quad (10)$$



# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- 3 Плазменный параметр
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы**
- 5 Классическая и вырожденная плазмы
- 6 Классификация плазмы
- 7 Задачи для семинара



$$W = -\frac{e^2}{2\lambda_D} \times \frac{\frac{8\pi}{3}\lambda_D^2 n}{\frac{8\pi}{3}\lambda_D^2 n} = -\frac{\frac{1}{3}T}{2N_D} = -\frac{T}{6N_D}, \quad K = \frac{3}{2}T.$$

$$|W| \ll K, \quad \text{если} \quad N_D \gtrsim 1.$$

В этом случае говорят об *идеальной* плазме. Её свойства мало отличаются от свойств идеального газа. Например, внутренняя энергия вычисляется по формуле

$$U = 2n(K + W) = 3nT \left[ 1 - \frac{1}{9N_D} \right] \approx 3nT. \quad (12)$$

В случае  $N_D \ll 1$ , когда

$$|W'| \gtrsim K, \quad (13)$$

плазму называют *неидеальной*; в ней образуются периодические структуры (кристаллическая решётка).



# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- 3 Плазменный параметр
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы
- 5 Классическая и вырожденная плазмы**
- 6 Классификация плазмы
- 7 Задачи для семинара



Выясним условия, когда квантовые эффекты несущественны.

Согласно *принципу неопределённости*, имеется неустранимая неопределённость при одновременном измерении импульса  $p$  и координаты  $x$  (некоммутирующих наблюдаемых). Погрешности  $\Delta p$  и  $\Delta x$  обусловлены волновой природой частицы и связаны *соотношением неопределённостей* Гейзенберга (Werner Heisenberg, 1927)

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

где  $\hbar = 6,58 \times 10^{-16}$  эВ·сек — *приведённая постоянная Планка* (Max Planck, 1900).

$$\Delta p \leq p \quad \Rightarrow \quad \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \geq \frac{\hbar}{p},$$
$$p = \sqrt{2m\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \lambda_B = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\varepsilon}} \propto \frac{1}{m^{1/2}}$$

— длина волны де Бройля (Louis de Broglie, 1924).



Если

$$\lambda_B \ll a \sim n^{-1/3},$$

из волн де Бройля можно составить пакет, размер которого будет мал по сравнению с  $a$ . В классической физике этот пакет отождествляют с частицей. При понижении температуры  $T$  условие  $\lambda_B \ll n^{-1/3}$  сначала нарушается для электронов, а уж затем для ионов. Поэтому, говоря о квантовых эффектах в плазме, подразумевают электроны. Плазма описывается классической физикой, если *длина волны электрона*

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e \varepsilon}} \quad (14)$$

мала по сравнению с расстоянием между частицами, т.е.

$$\lambda_e \ll n^{-1/3}. \quad (15)$$



$$\lambda_e = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e \varepsilon}} \ll n^{-1/3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \gg \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_e}.$$

Так как  $\varepsilon \sim T$  это условие можно записать в виде

$$T \gg \varepsilon_F, \quad (16)$$

где величину

$$\varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_e} \quad (17)$$

называют *энергией Ферми* (Enrico Fermi, 1926). По определению, она равна энергии самого высшего квантового состояния, в котором может находиться *фермион* (частица с полуцелым спином) при  $T = 0$ . Для ионов условие, аналогичное (16), фактически всегда выполняется, поэтому вплоть до экстремально низких температур ионы описываются классической физикой. В металлах  $n_e \approx 10^{21} \div 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $\varepsilon_F \approx 1 \div 3 \text{ эВ}$ .





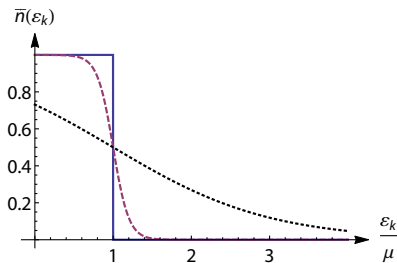


Figure 2: Распределение Ферми  $\bar{n}(\varepsilon_k) = 1 / [\exp(\varepsilon_k/T - \mu/T) + 1]$  — среднее число частиц с полуцелым спином в квантовом состоянии с энергией  $\varepsilon_k$ :  $T/\mu = 0$  (сплошная линия),  $T/\mu = 0,1$  (штриховая) и  $T/\mu = 1$  (точки);  $\mu$  — химический потенциал, такой что  $\sum_k f(\varepsilon_k) = N$ ; в пределе  $T \rightarrow 0$  с вероятностью 1 заняты низшие состояния с  $\varepsilon \leq \mu = \varepsilon_F$ ; при  $\exp(\varepsilon/T - \mu/T) \gg 1$  функция  $\bar{n}(\varepsilon_k)$  переходит в распределение Максвелла.

В *вырожденной плазме*, характеризуемой условием

$$T \lesssim \varepsilon_F, \quad (18)$$

средняя кинетическая энергия электронов

$$K' = \frac{3}{5} \varepsilon_F \quad (19)$$

не зависит от температуры. Происхождение термина *вырожденная плазма* связано с тем, что при низкой температуре квантовые состояния электронов вырождены по энергии (на каждом энергетическом уровне находятся по два электрона). В квантовом случае

$$\lambda_D \approx \lambda_{Di} = \sqrt{T/4\pi e_i^2 n_i},$$

так как

$$\lambda_{Di} \ll \lambda_{De} \sim \sqrt{\varepsilon_F/4\pi n_e e^2}.$$



$$W = -\frac{e^2}{2\lambda_D},$$

если  $N_D \gg 1$ .

..... ↑ это было ранее ↑ .....

Новым эффектом в вырожденной плазме является *обменное взаимодействие*, не имеющее аналога в классической физике.

$$W' \sim -e^2 n^{-1/3}, \quad \text{если} \quad \varepsilon_F \gg T;$$

$$W'' \sim -e^2 \lambda_e^2 n, \quad \text{если} \quad T \gg \varepsilon_F.$$

В классическом пределе существует область параметров, где энергия обменного взаимодействия  $W''$  превышает корреляционную поправку  $W'$  к энергии кулоновского взаимодействия.



# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- 3 Плазменный параметр
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы
- 5 Классическая и вырожденная плазмы
- 6 Классификация плазмы**
- 7 Задачи для семинара

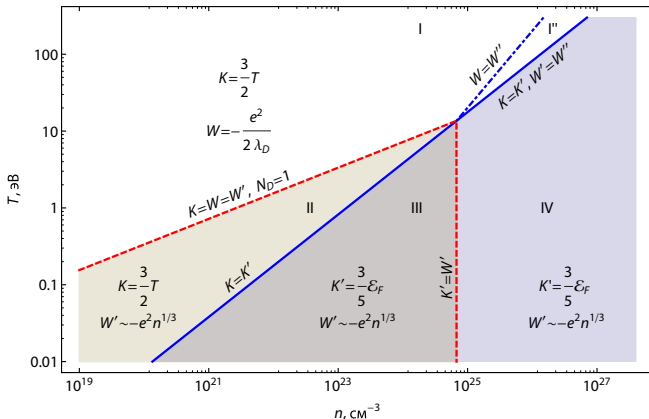


В плоскости параметров  $n$  и  $T$  линии, соответствующие равенству энергий  $K$ ,  $K'$ ,  $|W|$ ,  $|W'|$  и  $|W''|$  попарно в различных сочетаниях, разделяют различные виды плазмы. Из пяти перечисленных величин можно составить десять независимых равенств. Однако некоторые из них по существу приводят к одинаковой зависимости  $T$  от  $n$ . А другие, если и выполняются, то за пределами применимости соответствующих формул. В итоге остаются всего 3 значимых равенства:

$$K = K', \quad K = |W|, \quad K' = |W'|.$$

На рис. соответствующие им линии разделяют четыре области, отвечающих классической идеальной (I), классической неидеальной (II), вырожденной неидеальной (III) и вырожденной идеальной (IV) плазме.





**Figure 3:** Классификация плазмы: I — классическая идеальная ( $K > |W|$ ), I'' — классическая идеальная ( $K > |W''|$ ), II — классическая неидеальная ( $K < |W'|$ ), III — вырожденная неидеальная ( $K' < |W'|$ ), IV — вырожденная идеальная ( $K' > |W'|$ ).

# Далее...

- 1 Экранирование пробного заряда
- 2 Энергия кулоновского взаимодействия в плазме
- 3 Плазменный параметр
- 4 Идеальная и неидеальная плазмы
- 5 Классическая и вырожденная плазмы
- 6 Классификация плазмы
- 7 Задачи для семинара**



## Задачи для семинара

- Найти критерий идеальности плазмы при  $Z \gg 1$ .
- Оценить плотность плазмы при комнатной температуре, при которой становятся существенными квантовые эффекты.
- Объяснить, почему можно разлагать  $\exp(-\varphi/T)$  при выводе уравнения для потенциала.
- Вычислить энергию Ферми для газа свободных электронов при  $T = 0$ , оценить её величину в центре Солнца и сравнить с температурой.
- Вычислить дебаевскую длину при  $T = 0$ .
- Оценить плотность, при которой плазма становится релятивистской при  $T = 0$ .





# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

20 сентября 2017 г.

## Лекция 03

# Ионизационное равновесие

- Уравнение Саха
- Степень ионизации плазмы
- Ограниченность теории Саха
- Приложение: Планетарная модель атома



Как велика доля ионизованных атомов в газе (в плазме) при заданной температуре и плотности?

Универсальный ответ можно дать в том случае, когда ионизованный газ находится в состоянии *термодинамического равновесия*. На языке статистической физики *ионизация* и обратный ей процесс *рекомбинации* являются конкурирующими химическими реакциями.

В состоянии равновесия прямая и обратная химические реакции идут с равной скоростью, что соответствует минимуму *термодинамического потенциала*. Для отыскания равновесной степени ионизации можно было бы минимизировать термодинамический потенциал, но мы воспользуемся более наглядным, хотя и менее строгим подходом.



Рассмотрим *ионизацию* атомарного водорода



и обратную ей *рекомбинацию* продуктов ионизации



Чтобы выполнить законы сохранения энергии и импульса, необходим ещё, как минимум, один реагент, например, фотон, как в реакции *фотоионизации* (*фоторекомбинации*),



или электрон, как в реакции *ударной ионизации* (*тройной рекомбинации*),



В состоянии термодинамического равновесия скорости прямой и обратной реакций в каждом канале ионизации/рекомбинации попарно равны (*принцип детального равновесия*).



# Далее...

- 1 Уравнение Саха
- 2 Степень ионизации плазмы
- 3 Ограниченность теории Саха
- 4 Приложение: Планетарная модель атома
- 5 Задачи для семинара



Пусть первоначально в объёме  $V$  было  $N_0$  атомов водорода. В результате однократной ионизации возникнет  $N_i$  ионов,  $N_e = N_i$  электронов и  $N_a = N_0 - N_i$  атомов.

Если рядом с протоном находится связанный электрон, то они образуют атом, иначе протон следует считать ионом. В термодинамическом равновесии с заданной температурой  $T$  вероятность обнаружить электрон в квантовом состоянии, которое характеризуется набором квантовых чисел  $ks$  и энергией  $\varepsilon_k$ , убывает с увеличением энергии по экспоненциальному закону:

$$w_{ks} = \frac{1}{\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right). \quad (3)$$

Нормировочная константа  $\mathbb{Z}$  определяется из условия

$$\sum_k \sum_s w_{ks} = 1. \quad (4)$$



Энергия электрона в поле протона.

Связанный электрон:

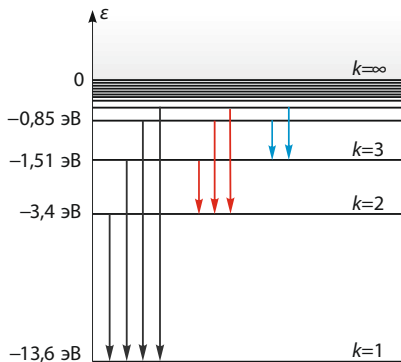
$$\varepsilon_k = -\frac{J}{k^2} < 0,$$

$k = 1, 2, \dots$  (главное квантовое число),

$J = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13,6 \text{ эВ}$  — энергия ионизации атома водорода.

Свободный электрон:

$$\varepsilon_k = \frac{p^2}{2m_e} > 0, \quad p = \frac{2\pi\hbar}{L} k.$$



Вычислим нормировочную константу из уравнения

$$\sum_k \sum_s w_{ks} = 1, \quad w_{ks} = \frac{1}{\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right).$$

В полученном выражении выделим сумму по связанным и свободным состояниям электрона:

$$\mathbb{Z} = \sum_{\varepsilon_k < 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) + \sum_{\varepsilon_k > 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T). \quad (5)$$





В сумме по связанным состояниям электрона с  $\varepsilon_k < 0$  учтём только самый нижний уровень энергии в атоме,  $k = 1$ , полагая, что в связанном состоянии электрон с подавляющей вероятностью находится на основном уровне с энергией  $\varepsilon_1 = -J$ ; точность такого приближения будет установлена позднее. Тогда

$$\sum_{\varepsilon_k < 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) \approx \sum_s \exp(-\varepsilon_1/T) = g_a \exp(J/T),$$

где  $g_a = \sum_s$  — статистический вес атома, т. е. число различных квантовых состояний атома с минимальной энергией  $\varepsilon_1 = -J$ . Для водорода  $g_a = 2 \times 2 = 4$ .

*Статистический вес*, или статвес, как таковой выражает наличие внутренних степеней свободы у частицы или системы частиц, которые в рамках используемого приближения не изменяют энергию системы.



Состояния с  $\varepsilon_k > 0$  образуют непрерывный спектр, поэтому

$$\sum_{\varepsilon_k > 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) \Rightarrow g_e g_i \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \exp(-p^2/2m_e T),$$

где множители  $g_e = 2$ ,  $g_i = 2$  добавлены, дабы учесть наличие нескольких квантовых состояний, отвечающих одной и той же энергии  $\varepsilon_k = p^2/2m_e$  пары электрон-ион.

$$\begin{aligned} g_e g_i \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2m_e T} &= \frac{g_e g_i}{(2\pi\hbar)^3} \times \int d^3x \times \int_0^\infty 4\pi p^2 dp e^{-p^2/2m_e T} \\ &= \frac{g_e g_i}{(2\pi\hbar)^3} \times \frac{V}{N_e} \times (2\pi m_e T)^{3/2} \\ &= \frac{g_e g_i}{(2\pi\hbar^2/m_e T)^{3/2} n_e} \equiv \frac{g_e g_i}{\lambda_{Te}^3 n_e}, \end{aligned}$$

где  $\lambda_{Te} = \sqrt{2\pi\hbar^2/m_e T}$  обозначает длину волны электрона  
 $\lambda_e = \hbar/\sqrt{2m_e \varepsilon}$  с энергией  $\varepsilon = T/4\pi$ .



Таким образом,

$$\mathbb{Z} = g_a e^{J/T} + g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e.$$

Вероятность  $w_a$  того, что рассматриваемый протон является ядром нейтрального атома, равна сумме вероятностей по состояниям с отрицательной энергией и фактически уже была вычислена:

$$w_a = \frac{1}{\mathbb{Z}} \sum_{\varepsilon_k < 0} \sum_s \exp(-\varepsilon_k/T) = \frac{g_a e^{J/T}}{g_a e^{J/T} + g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e}.$$

Все остальные квантовые состояния соответствуют ионизованному атому. Их суммарная вероятность равна

$$w_i = 1 - w_a = \frac{g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e}{g_a e^{J/T} + g_e g_i / \lambda_{Te}^3 n_e}.$$



Отношение двух вероятностей определяет отношение плотностей ионов и атомов в плазме:

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{w_i}{w_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3 n_e}.$$

После умножения на  $n_e$  отсюда получается *уравнение Саха* (Meghnad Saha, 1920):

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3} \equiv K(T). \quad (6)$$

Функция температуры  $K(T)$  в правой части уравнения называется *константой равновесия*.



# Далее...

- 1 Уравнение Саха
- 2 Степень ионизации плазмы**
- 3 Ограниченность теории Саха
- 4 Приложение: Планетарная модель атома
- 5 Задачи для семинара



$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3}, \quad \lambda_{Te} = \sqrt{2\pi\hbar^2/m_e T}. \quad (6)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

*Степень ионизации* плазмы характеризует отношение

$$\zeta = n_i/n_0,$$

где  $n_0 = n_a + n_i$ . Уравнение для степени ионизации:

$$n_e = n_i = \zeta n_0, \quad n_a = (1 - \zeta) n_0;$$

$$\frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = \frac{g_i g_e / g_a}{\lambda_{Te}^3 n_0} e^{-J/T} \equiv G(T) e^{-J/T}. \quad (7)$$

Безразмерная функция  $G(T)$  в классической плазме огромна:

$$G(T) = \frac{g_i g_e / g_a}{\lambda_{Te}^3 n_0} \simeq \left( \frac{T}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \gg 1, \quad T \gg \varepsilon_F \simeq \frac{\hbar^2 n_0^{2/3}}{2m_e}.$$



$$\frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = \frac{g_i g_e / g_a}{\lambda_{Te}^3 n_0} e^{-J/T} \equiv G(T) e^{-J/T}. \quad (7)$$

.....

Огромная величина  $G(T)$  обусловлена тем фактом, что свободному электрону доступен практически весь объём плазмы в отличие от связанного электрона, который привязан к ядру атома. Поэтому вероятность обнаружить электрон в свободном состоянии существенно больше, чем можно было бы ожидать, сравнивая экспоненциально убывающие с ростом энергии вероятности (3) квантовых состояний. Можно также сказать, что в непрерывном спектре велика плотность квантовых состояний, а  $G(T)$  есть эффективный статистический вес состояния с заданной энергией в непрерывном спектре.



$$\frac{\zeta^2}{1 - \zeta} = G(T) e^{-J/T}. \quad (7)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

При малых температурах  $\zeta \rightarrow 0$ , при больших —  $\zeta \rightarrow 1$ . Условно приняв за точку перехода в ионизованное состояние значение  $\zeta = \frac{1}{2}$ , из (7) получим уравнение

$$T_* = \frac{J}{\ln[2G(T_*)]} \simeq \frac{J}{\ln[2G(J)]} \quad (8)$$

для определения температуры перехода  $T_*$ .

В широком диапазоне плотностей температура  $T_* \ll J$ , так как  $G(T) \gg 1$ .



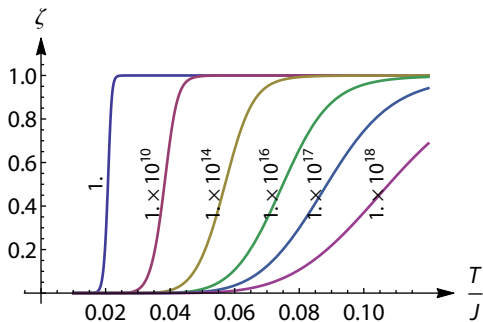


Например,  $G = 1,5 \times 10^8$  в плазме с плотностью  $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и температурой  $T = J = 13,6$  эВ. При этом доля ионизованных атомов  $\zeta$  уже очень близка к единице:

$$1 - \zeta = 1,8 \times 10^{-8}.$$

При указанной плотности  $T_* = 0,065 J = 0,88$  эВ.





Степень ионизации термодинамически равновесной водородной плазмы при различных значениях плотности, которые указаны на рисунке в единицах  $\text{см}^{-3}$ .



# Далее...

- 1 Уравнение Саха
- 2 Степень ионизации плазмы
- 3 Ограниченность теории Саха́**
- 4 Приложение: Планетарная модель атома
- 5 Задачи для семинара



Насколько большую ошибку мы сделали, исключив из суммы по связанным состояниям *возбуждённые состояния* атома водорода  $k = 2, 3 \dots$ ?

Поскольку заметная ионизация происходит при  $T \sim T_* \ll J$ , а расстояние от основного ( $k = 1, \varepsilon_1 = -J$ ) до первого возбуждённого уровня ( $k = 2, \varepsilon_2 = -\frac{1}{4}J$ ) равно  $\frac{3}{4}J$ , то вероятность электрону перейти в первое возбуждённое состояние из основного, пропорциональная

$$w_2/w_1 \propto \exp[-\varepsilon_2/T] / \exp[-\varepsilon_1/T] = \exp\left[-\frac{3}{4}J/T\right],$$

очень мала. Другими словами, электрон «предпочитает» перейти в непрерывный спектр, вместо того чтобы «сесть» на следующий уровень.

Мы видим, что в термодинамическом равновесии доля атомов в возбуждённых состояниях мала.



Применимость уравнения Саха к расчёту ионизационного состояния газа может быть ограничена по причинам, более фундаментальным, нежели величина членов, отброшенных при её выводе. Уравнение Саха неприменимо, если плазма не является замкнутой системой, например, если из неё свободно выходит излучение, которое сопровождает процесс рекомбинации. В этом случае степень ионизации находят, сравнивая скорости реакций ионизации и рекомбинации.

Уравнение Саха заведомо неправильно предсказывает степень ионизации в центре Солнца. *Почему?*

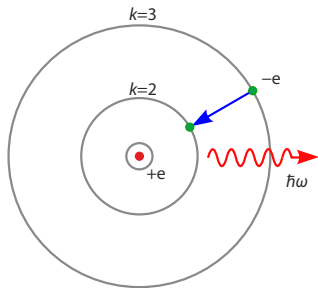


# Далее...

- 1 Уравнение Саха
- 2 Степень ионизации плазмы
- 3 Ограниченность теории Саха́
- 4 Приложение: Планетарная модель атома**
- 5 Задачи для семинара



Найдём энергию связанного электрона в атоме водорода, используя планетарную модель атома.



Модель Бора атома водорода: Электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите. Переход с одной орбиты на другую сопровождается излучением или поглощением кванта электромагнитной энергии  $\hbar\omega$ . Изображённый переход  $3 \rightarrow 2$  излучает фотон с длиной волны  $656$  нм в первую линию серии Бальмера (Balmer).

$$\varepsilon_k = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{r}.$$

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}.$$

$$\varepsilon_k = -\frac{m_e v^2}{2} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Согласно *постулату Бора* (Niels Bohr, 1913), электрон в атоме водорода может находиться только на стационарных орбитах, на которых орбитальный момент  $m_e v r$  кратен приведённой постоянной Планка  $\hbar = h/2\pi$ , т. е.

$$m_e v r = \hbar k,$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  — главное квантовое число. Отсюда находим

$$v_k = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{c}{k}, \quad r_k = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} k^2, \quad \varepsilon_k = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{k^2}.$$





Отношение

$$\frac{v_1}{c} = \frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \simeq \frac{1}{137}$$

скорости электрона  $v_1$  на основном уровне к скорости света известно в квантовой физике под названием *постоянной тонкой структуры*. На более высоких уровнях

$$v_k = \frac{\alpha c}{k}.$$



Радиус орбиты первого (основного) уровня

$$a_B = r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,5 \times 10^{-8} \text{ см}$$

называют *боровским радиусом*. Радиусы орбит возбуждённых состояний с  $k > 1$  увеличивается пропорционально квадрату их номера  $k$ ,

$$r_k = a_B k^2.$$

Правило квантования орбитального момента по Бору означает, что на окружности орбиты  $2\pi r_k$  укладывается целое число длин де Бройля  $\lambda_e = 2\pi\hbar/m_e v_k$ , но это стало ясно только после открытия волнового дуализма электрона Луи де Бройлем (Louis de Broglie, 1924).



Минимальная энергия, которую необходимо передать атомарному электрону на низшем энергетическом уровне, чтобы ионизовать атом, равна (со знаком минус) энергии основного состояния:

$$J = -\varepsilon_1 = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ.}$$

$$J = \frac{e^2}{2r_1} = \frac{m_e v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2.$$

Энергия более высоких (возбуждённых) атомарных уровней

$$\varepsilon_k = -\frac{J}{k^2}$$

с увеличением их номера  $k$  сгущается к нулевой величине. Для ионизации возбуждённого атома нужно меньше энергии.



# Далее...

- 1 Уравнение Саха
- 2 Степень ионизации плазмы
- 3 Ограниченность теории Саха́
- 4 Приложение: Планетарная модель атома
- 5 Задачи для семинара**



## Задачи для семинара

- Почему при столкновении иона и электрона не может произойти рекомбинация, если в столкновении не участвует ещё одна частица или не излучается фотон?
- Используя табличные данные, оценить степень ионизации межзвёздного газа и плазмы в установках магнитного УТС.
- Почему степень ионизации падает при росте плотности.
- Водород с плотностью  $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$  нагрет до температуры 0,3 эВ. Чтобы увеличить проводимость плазмы, в неё добавляют калий. Какова должна быть доля примесных атомов, чтобы число свободных электронов увеличилось в 2 раза? Энергия ионизации калия равна  $J_K = 4,339 \text{ эВ}$ , а его основное состояние двукратно вырождено.
- Получить уравнение ионизационной адиабаты, связывающее плотность и температуру ионизованного газа при сжатии газа без подвода тепла.



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

27 сентября 2017 г.

## Лекция 04

# Движение заряженных частиц

- Движение в однородном магнитном поле
- Электрический дрейф
- Ведущий центр ларморовской орбиты
- Дрейф под действием малой силы
- Гравитационный дрейф



В лабораторных условиях для удержания плазмы используют магнитное поле. Оно обеспечивает *термоизоляцию плазмы*. Найти точное решение уравнений движения удаётся только в исключительных случаях. Однако часто магнитное поле почти однородно и почти постоянно. Тогда движение частицы можно разложить на быстрое *циклотронное (ларморовское) вращение* и медленное движение воображаемого центра ларморовской окружности — *магнитный дрейф*.

Последовательный вывод уравнений дрейфового движения весьма громоздок, поэтому мы ограничимся менее строгим, но не менее поучительным эвристическим обсуждением. Однако и такое «укороченное» повествование займёт две лекции.

Сначала напомним известные факты о движении заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле. Потом добавим электрическое поле.





# Далее...

- 1 Движение в однородном магнитном поле
- 2 Электрический дрейф
- 3 Дрейф под действием малой силы
- 4 Гравитационный дрейф
- 5 Задачи для семинара



Уравнения движения:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (1a)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{mc} [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1b)$$

Энергия частицы  $mv^2/2$  сохраняется:

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \cdot \frac{e}{mc} [\vec{v} \times \vec{B}]$$
$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = 0.$$

Продольная скорость частицы  $v_{\parallel} = (\vec{B} \cdot \vec{v})/B$  сохраняется:

$$\frac{\vec{B}}{B} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{B}}{B} \cdot \frac{e}{mc} [\vec{v} \times \vec{B}]$$
$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0.$$



В однородном магнитном поле

$$v = \text{const}, \quad v_{\parallel} = \text{const}, \quad v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2} = \text{const}.$$

Введём обозначения

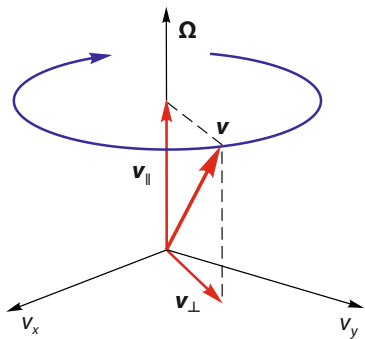
$$\vec{\Omega} = \frac{e\vec{B}}{mc}, \quad \Omega = \frac{eB}{mc}, \quad B = |\vec{B}|,$$

и перепишем уравнения движения  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{mc}[\vec{v} \times \vec{B}]$  в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{v} \times \vec{\Omega}]. \quad (2)$$

Так как  $v = \text{const}$  и  $v_{\parallel} = \text{const}$ , уравнение (2) описывает вращение вектора  $\vec{v}$  вокруг направления  $\vec{\Omega}$ .





Направление вращения вектора скорости заряженной частицы в магнитном поле составляет *левый винт* с направлением вектора  $\vec{\Omega} = e\vec{B}/mc$ , определённого с учётом знака заряда  $e$ , т.е. вращение ионов составляет левый винт с направлением  $\vec{B}$ , а электронов — правый винт с направлением  $\vec{B}$ .

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{v} \times \vec{\Omega}]$$

Распишем уравнение движения по компонентам ( $\vec{B} = B\hat{z}$ ):

$$\dot{v}_x = \Omega v_y, \quad (3a)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x, \quad (3b)$$

$$\dot{v}_z = 0. \quad (3c)$$

(3a)+i(3b):

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\Omega (v_x + iv_y).$$

Решаем:

$$\begin{aligned}(v_x + iv_y) &= (v_x + iv_y)_0 \exp(-i\Omega t) \\ &= (v_{\perp} \cos \psi_0 + iv_{\perp} \sin \psi_0) \exp(-i\Omega t) \\ &= v_{\perp} \exp(i\psi_0) \exp(-i\Omega t).\end{aligned}$$



$$(v_x + iv_y) = v_{\perp} \exp(i\psi_0 - i\Omega t).$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

Интегрируем ещё раз:

$$(x + iy) = (X + iY) + \frac{v_{\perp}}{-i\Omega} \exp(i\psi_0 - i\Omega t).$$

Отделяем вещественную часть:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos(\psi_0 - \Omega t), & x &= X - \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin(\psi_0 - \Omega t), \\ v_y &= v_{\perp} \sin(\psi_0 - \Omega t), & y &= Y + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos(\psi_0 - \Omega t). \end{aligned}$$



$$v_x = v_{\perp} \cos(\psi_0 - \Omega t), \quad x = X - \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin(\psi_0 - \Omega t),$$

$$v_y = v_{\perp} \sin(\psi_0 - \Omega t), \quad y = Y + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos(\psi_0 - \Omega t).$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

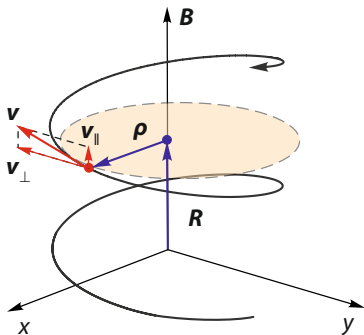
Эти формулы описывают *циклотронное вращение* по окружности с *ларморовским радиусом*

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{\Omega}$$

вокруг точки  $(X, Y)$  в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ .  
 На это вращение накладывается движение с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль  $\vec{B}$ .

$$v_z = v_{\parallel}, \quad z = Z(t) = z_0 + v_{\parallel} t.$$





Орбита частицы в однородном магнитном поле образует спираль. В центре ларморовской окружности (пунктир) находится воображаемый *ведущий* (или *ларморовский*) центр частицы. Он перемещается по прямой  $X = \text{const}$ ,  $Y = \text{const}$ ,  $Z = z_0 + v_{\parallel} t$ , совпадающей с магнитной силовой линией.

Положение ведущего центра в произвольный момент времени характеризует вектор

$$\vec{R} = \{X, Y, Z\} = \vec{r} - \vec{\rho}, \quad \text{где} \quad \vec{\rho} = -\frac{1}{\Omega} [\vec{v} \times \vec{h}], \quad \vec{h} = \frac{\vec{B}}{B}.$$



Концепция ведущего центра ларморовской орбиты частицы даёт ключ к анализу движения заряженной частицы в электромагнитном поле, слабо неоднородном в пространстве и медленно меняющемся во времени.

Можно ожидать, что при достаточно слабой неоднородности и достаточно медленном изменении поля траектория движения приближённо остаётся спиралью, а ведущий центр движется почти вдоль магнитной силовой линии. Если при этом отвлечься от быстрого циклотронного вращения частицы вокруг ведущего центра, то для описания её движения достаточно проследить лишь за движением ведущего центра.



# Далее...

- 1 Движение в однородном магнитном поле
- 2 Электрический дрейф
- 3 Дрейф под действием малой силы
- 4 Гравитационный дрейф
- 5 Задачи для семинара



Добавим в уравнения движения электрическое поле:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{\Omega}], \quad (4b)$$

Теперь, вообще говоря,

$$v \neq \text{const}, \quad v_{\parallel} \neq \text{const}, \quad v_{\perp} \neq \text{const}.$$

Например,

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v} + m\vec{v} \cdot \frac{e}{mc} [\vec{v} \times \vec{B}]$$
$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = e\vec{E} \cdot \vec{v}.$$



Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью

$$\vec{v}_E = c \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2}, \quad (5)$$

сделав замену

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_E, \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_E t$$

в уравнениях движения. Из первого уравнения

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}' + \vec{v}_E t) = \vec{v}' + \vec{v}_E \quad (4a)$$

получим

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}'. \quad (6)$$



Во втором уравнении

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{v}_E) = \frac{e}{m} \vec{E} + [(\vec{v}' + \vec{v}_E) \times \vec{\Omega}] \quad (4b)$$

учтём, что

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} \vec{E} + [\vec{v}_E \times \vec{\Omega}] &= \frac{e}{m} \vec{E} + c \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2} \times \frac{e\vec{B}}{mc} = \\ &= \frac{e}{m} \left( \vec{E} + \underbrace{\left[ \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B} \right] \times \frac{\vec{B}}{B}}_{=-\vec{E}_\perp} \right) = \frac{e}{m} (\vec{E} - \vec{E}_\perp) = \frac{e}{m} \vec{E}_\parallel. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E}_\parallel + [\vec{v}' \times \vec{\Omega}]. \quad (7)$$



Другой способ:

$$\left[ \vec{a} \times \left[ \vec{b} \times \vec{c} \right] \right] = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= \left[ \vec{B} \times \left[ \vec{E} \times \vec{B} \right] \right] / B^2 \\ &= \vec{E} (\vec{B} \cdot \vec{B}) / B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B} / B^2 \\ &= \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}_{\parallel} &= (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B} / B^2. \end{aligned}$$



Распишем полученное уравнение

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E}_{\parallel} + [\vec{v}' \times \vec{\Omega}],$$

в проекциях на оси координат:

$$\dot{v}'_x = \Omega v'_y, \quad (8a)$$

$$\dot{v}'_y = -\Omega v'_x, \quad (8b)$$

$$\dot{v}'_z = \frac{e}{m} E_{\parallel}. \quad (8c)$$

Уравнение (8c) описывает равноускоренное движение вдоль поля  $\vec{B}$ :

$$v'_z = v_{\parallel 0} + \frac{e}{m} E_{\parallel} t, \quad z' = z'_0 + v_{\parallel 0} t + \frac{e}{2m} E_{\parallel} t^2. \quad (9)$$



Другие два уравнения (8) описывают движение со скоростью

$$v'_\perp = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \text{const}$$

по окружности радиуса

$$\rho' = \frac{v'_\perp}{\Omega} = \text{const},$$

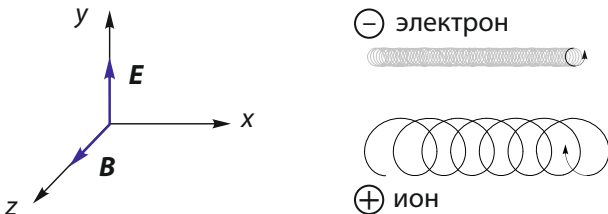
замкнутой в плоскости  $(x', y')$ , т.е. в движущейся системе отсчёта; их решение получается из формул для случая  $\vec{E} = 0$  при помощи очевидных переобозначений. Ускорение под действием электрического поля  $E_\parallel$  вдоль оси  $z'$  «разматывает» эту окружность в спираль с постепенно увеличивающимся шагом.





В исходной системе отсчёта центр спирали (*ведущий центр*) смещается со скоростью поперёк магнитной силовой линии.

$$\vec{v}_E = c \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2} = \left\{ c \frac{E_y}{B}, -c \frac{E_x}{B}, 0 \right\}.$$



**Figure 1:** Дрейф частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Скорость электрического дрейфа  $\vec{v}_E$  не зависит от параметров частицы (почему?). В квазинейтральной плазме электрический дрейф не создаёт электрический ток.

Так как ведущий центр — воображаемый, а не реальный объект, в научной литературе встречаются разные определения  $\vec{R}$ .

В исходной системе отсчёта мы использовали определение

$$\vec{\rho} = -\frac{1}{\Omega} [\vec{v} \times \vec{h}], \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho}. \quad (10)$$

Если же привязать ларморовский радиус к скорости частицы в движущейся системе отсчёта, получим

$$\vec{\rho}' = -\frac{1}{\Omega} [\vec{v}' \times \vec{h}], \quad \vec{R}' = \vec{r} - \vec{\rho}'. \quad (11)$$

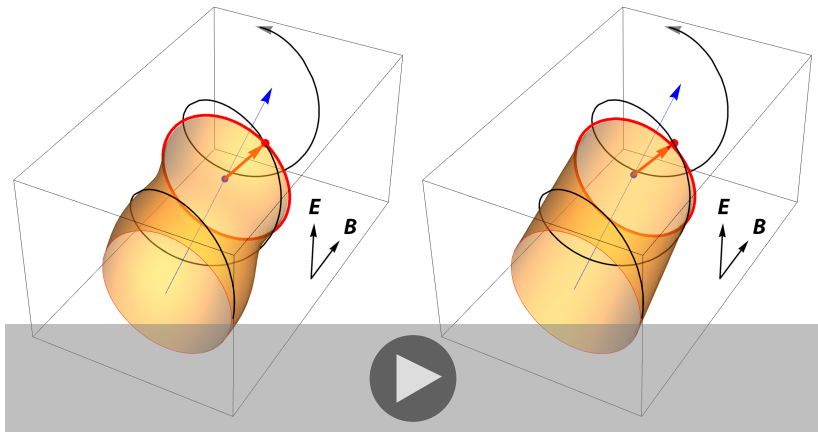
Существенно, что

$$\rho' = \text{const}, \quad \rho \neq \text{const}.$$

Так как  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_E$ , имеем

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}' - \frac{1}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{v}_E], \quad \vec{R} = \vec{R}' + \frac{1}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{v}_E].$$





**Figure 2:** В скрещенных электрическом и магнитном полях заряженная частица (красная точка) движется по ларморовской спирали, а ведущий центр (синяя точка) равномерно смещается в направлении вектора  $[\vec{E} \times \vec{B}]$ . В зависимости от способа определения ведущего центра мгновенный радиус  $\rho$  (красная стрелка) ларморовской окружности

(красная окружность) в один и тот же момент времени может иметь разную длину. На рисунке слева ларморовский радиус осциллирует с циклотронной частотой, а ларморовская окружность описывает гофрированную поверхность. На рисунке справа  $\rho' = \text{const}$  и ларморовская окружность замечает прямой цилиндр. Слева использовано определение ведущего центра  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho}$ , «естественное» для лабораторной системы отсчёта, а справа — определение  $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{\rho}'$ , «естественное» для сопутствующей системы отсчёта.

Далее мы выбираем вариант  $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{\rho}'$ , но опускаем штрих «'».



# Далее...

- 1 Движение в однородном магнитном поле
- 2 Электрический дрейф
- 3 Дрейф под действием малой силы**
- 4 Гравитационный дрейф
- 5 Задачи для семинара



Сделав замену  $\vec{E} \rightarrow \vec{F}/e$ , найдём скорость дрейфа, вызванного силой  $\vec{F}$  иного происхождения:

$$\vec{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\vec{F} \times \vec{B}]}{B^2}. \quad (12)$$

Эту формулу вывел шведский учёный Ханнес Альфвен (Hannes Alfvén, 1940). Если поле силы  $\vec{F}$  неоднородно, она получается путём усреднения точного уравнения движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$$

по периоду циклотронного вращения вдоль траектории частицы.



Пусть  $\vec{F} \perp \vec{B}$ , тогда

$$\left\langle m \frac{d\vec{v}}{dt} \right\rangle = \langle \vec{F} \rangle + \left\langle \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\rangle, \quad \langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_F + \vec{v}' \rangle = \vec{v}_F,$$

$$0 = \langle \vec{F} \rangle + \frac{e}{c} [\vec{v}_F \times \vec{B}].$$

После векторного умножения на  $(c/e)\vec{B}/B^2$ ,

$$- \left[ \vec{v}_F \times \frac{\vec{B}}{B} \right] \times \frac{\vec{B}}{B} = \frac{c}{e} \frac{[\langle \vec{F} \rangle \times \vec{B}]}{B^2},$$

отсюда получается формула Альфвена

$$\vec{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\langle \vec{F} \rangle \times \vec{B}]}{B^2}, \quad (13)$$

где  $\langle \vec{F} \rangle$  обозначает среднюю за период циклотронного вращения силу  $\langle \vec{F} \rangle_{\perp}$ , действующую на частицу в направлении, перпендикулярном магнитному полю.



Проекция силы  $\vec{F}_{\parallel}$ , которая действует вдоль направления магнитного поля, даёт нулевой вклад в скорость дрейфа. Однако эта проекция вызывает постоянное продольное ускорение, приводя к изменению скорости движения  $v_{\parallel}$  вдоль магнитной силовой линии, как при наличии продольного электрического поля  $\vec{E}_{\parallel}$ .





Если  $|\vec{F}| \ll |(e/c)[\vec{v} \times \vec{B}]|$ , нетривиальную задачу усреднения  $\vec{F}$  по истинной траектории движения можно приближённо заменить усреднением по невозмущённой траектории, по которой частица двигалась бы в однородном магнитном поле при  $\vec{F} = 0$ . Это наблюдение даёт простой рецепт вычисления скорости дрейфа, который в дальнейшем будет неоднократно использован.

$$\vec{F}(\vec{R} + \vec{\rho}) = \vec{F}(\vec{R}) + (\vec{\rho} \cdot \nabla)\vec{F}(\vec{R}) + \dots,$$

$$\langle \vec{F}(\vec{r}) \rangle = \vec{F}(\vec{R}).$$

Это же правило усреднения применимо к электрическому полю  $\vec{E}$  и вообще к любой функции координат частицы.



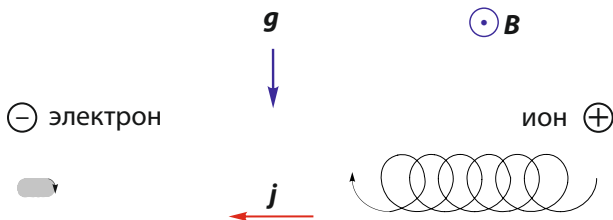
# Далее...

- 1 Движение в однородном магнитном поле
- 2 Электрический дрейф
- 3 Дрейф под действием малой силы
- 4 Гравитационный дрейф**
- 5 Задачи для семинара



Дрейф в поле силы тяжести  $m\vec{g}$ :

$$\vec{v}_g = \frac{mc}{e} \frac{[\vec{g} \times \vec{B}]}{B^2}. \quad (14)$$



**Figure 3:** В поле силы тяжести электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны, создавая электрический ток  $\vec{j}$  в направлении вектора  $[\vec{g} \times \vec{B}]$ . Ток электронов мал по сравнению с током ионов.

# Далее...

- 1 Движение в однородном магнитном поле
- 2 Электрический дрейф
- 3 Дрейф под действием малой силы
- 4 Гравитационный дрейф
- 5 Задачи для семинара**



- Оценить скорость гравитационного дрейфа иона в магнитном поле 1 Гс (поле Земли 0.3-0.5 Гс).
- 4.4 (4.4 н.н.) При каких условиях скорость электрического дрейфа мала по сравнению с тепловой скоростью частиц плазмы? Для оценки принять, что плазма имеет форму цилиндра с радиусом  $a$  и заряжена до потенциала порядка температуры плазмы,  $\varphi \sim T/e$ .
- 4.8 (4.6 н.н.) Найти скорость дрейфа заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле и однородном, медленно меняющемся электрическом поле, выполнив приближённое интегрирование уравнений движения.
- 4.14 (4.7 н.н.) Найти магнитное поле системы коаксиальных катушек по заданному полю  $B_0(z)$  на оси системы. Найти форму силовой линии.
- 4.15 (4.8 н.н.) Вычислить скалярный потенциал магнитного поля с прямой осью.

Номера задач указаны по книге «Лекции по физике плазмы».



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

4 октября 2017 г.

## Лекция 05

# Магнитные дрейфы

- Градиентный дрейф
- Центробежный дрейф
- Поляризационный дрейф
- Скорость движения ведущего центра



Продолжая анализ движения заряженных частиц в электромагнитном поле, обратимся теперь к реальной ситуации, когда магнитное поле слабо неоднородно и медленно меняется во времени. Малость параметров

$$\rho/\ell \ll 1$$

(где  $\ell$  — характерная длина, на которой изменяется поле) и

$$2\pi/\Omega\tau \ll 1$$

(где  $\tau$  — характерное время, за которое изменяется поле) позволяет выделить медленное дрейфовое движение частицы на фоне быстрого циклотронного вращения и вычислить скорость дрейфового движения. Ввиду всё той же малости различные виды дрейфов, вызванные разными видами неоднородности или нестационарности магнитного и электрического полей, можно анализировать по отдельности, полагая, что суммарный эффект подчиняется приближённому принципу суперпозиции.

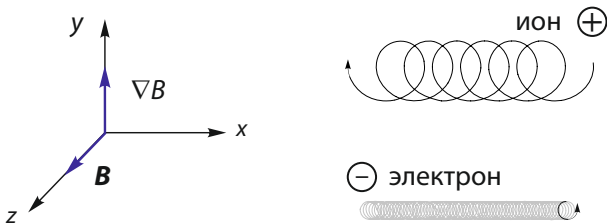




# Далее...

- 1 Градиентный дрейф
- 2 Центробежный дрейф
- 3 Поляризационный дрейф
- 4 Скорость движения ведущего центра
- 5 Задачи для семинара





**Figure 1:** Градиентный дрейф частиц в неоднородном магнитном поле. Электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны, создавая электрический ток в направлении вектора  $[\vec{B} \times \nabla B]$ ; при заданной энергии частиц величина тока не зависит от их массы.

$$v_{\nabla B} \sim v_{\perp} \times \frac{\rho}{\ell} \sim v_{\perp} \rho \underbrace{\frac{|\nabla B|}{B}}_{1/\ell}$$

Пусть

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} = B(y)\hat{e}_z.$$

Вычислим скорость градиентного дрейфа, усреднив силу Лоренца

$$\vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$$

по траектории частицы и подставив результат усреднения  $\langle \vec{F} \rangle$  в формулу Альфвена

$$\vec{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\langle \vec{F} \rangle \times \vec{B}]}{B^2}.$$



$$\begin{aligned}
 v_x &= v_{\perp} \cos(\Omega t), & x &= X + \rho \sin(\Omega t), \\
 v_y &= -v_{\perp} \sin(\Omega t), & y &= Y + \rho \cos(\Omega t).
 \end{aligned}$$

$$B(y) \approx B(Y) + (y - Y) \frac{\partial}{\partial Y} B(Y),$$

$$F_x = \frac{e}{c} v_y B(y) \approx -\frac{e}{c} v_{\perp} \sin(\Omega t) \left[ B(Y) + \rho \cos(\Omega t) \frac{\partial B}{\partial Y} \right],$$

$$\langle F_x \rangle = 0.$$

$$F_y = -\frac{e}{c} v_x B(y) \approx -\frac{e}{c} v_{\perp} \cos(\Omega t) \left[ B(Y) + \rho \cos(\Omega t) \frac{\partial B}{\partial Y} \right]$$

$$\langle F_y \rangle = -\frac{e}{2c} v_{\perp} \rho \frac{\partial B}{\partial Y}.$$



Похожее выражение получилось бы для  $\langle F_x \rangle$  при наличии градиента  $B$  вдоль оси  $x$ . Следовательно,

$$\langle \vec{F} \rangle_{\perp} = -\frac{e}{2c} v_{\perp} \rho \nabla_{\perp} B = -\frac{e}{2c} \frac{v_{\perp}^2}{\Omega} \nabla_{\perp} B. \quad (1)$$

Подставляя эту силу в формулу

$$\vec{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\langle \vec{F} \rangle \times \vec{B}]}{B^2} = \frac{c}{e} \frac{[\langle \vec{F} \rangle_{\perp} \times \vec{B}]}{B^2} = -\frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \frac{[\nabla_{\perp} B \times \vec{B}]}{B^2},$$

получим *скорость градиентного дрейфа*:

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (2)$$

Здесь и далее все величины, зависящие от координат, вычисляются в точке ведущего центра,  $\Omega = eB/mc$ , а  $\vec{h} = \vec{B}/B$  обозначает единичный вектор в направлении магнитного поля.



$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (3)$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

Эту формулу получил Х. Альфвен (Hannes Alfvén) в 1940 году. Так как знак циклотронной частоты  $\Omega = eB/mc$  определяется знаком заряда, электроны и ионы в неоднородном магнитном поле дрейфуют в противоположных направлениях. Поскольку отношение

$$\frac{v_{\perp}^2}{\Omega} = \frac{2\varepsilon_{\perp}/m}{eB/mc}$$

не зависит от массы частицы при заданной энергии  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$ , скорости дрейфа электрона и иона примерно равны по абсолютной величине, если примерно равны их энергии.



# Далее...

- 1 Градиентный дрейф
- 2 Центробежный дрейф**
- 3 Поляризационный дрейф
- 4 Скорость движения ведущего центра
- 5 Задачи для семинара



Учтём теперь, что линии магнитного поля могут быть изогнуты и что магнитное и электрическое поля могут изменяться во времени. Все эти эффекты можно учесть единым способом, если перейти в систему отсчёта, *сопутствующую* вращающемуся центру. В *нулевом порядке дрейфовой теории* она движется относительно неподвижной системы отсчёта со скоростью

$$\vec{u} = v_{\parallel} \vec{h} + \vec{v}_E. \quad (4)$$

В системе отсчёта, движущейся ускоренно, на частицу действует сила инерции

$$\vec{F} = -m \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (5)$$

которая инициирует дрейфовое движение со скоростью

$$\vec{v}_{\text{in}} = \frac{c}{e} \frac{[\vec{F} \times \vec{B}]}{B^2} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right] \quad (6)$$

( $\Omega = eB/mc$ ). Это поправка к скорости вращающегося центра в *первом порядке дрейфовой теории*.





$$\vec{v}_{\text{in}} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right], \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}.$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

Первое слагаемое связывают со скоростью *поляризационного дрейфа*:

$$\vec{v}_{\text{pol}} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]. \quad (7)$$

Второе слагаемое отвечает за *центробежный дрейф*:

$$\vec{v}_{\text{cf}} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right]. \quad (8)$$

Сосредоточимся на анализе этого слагаемого.



$$\vec{v}_{\text{cf}} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right], \quad \vec{u} = v_{\parallel} \vec{h} + \vec{v}_E.$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

$$\left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \left( (v_{\parallel} \vec{h} \cdot \nabla) v_{\parallel} \vec{h} + (\vec{v}_E \cdot \nabla) v_{\parallel} \vec{h} + (v_{\parallel} \vec{h} \cdot \nabla) \vec{v}_E + (\vec{v}_E \cdot \nabla) \vec{v}_E \right) \right].$$

В случае  $v_E \ll v$  достаточно оставить только первое слагаемое. Оно также упрощается:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times (v_{\parallel} \vec{h} \cdot \nabla) v_{\parallel} \vec{h} \right] &= \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \left[ \vec{h} \times (\vec{h} \cdot \nabla) v_{\parallel} \vec{h} \right] \\ &= \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \left[ \underbrace{\vec{h} \times \vec{h}}_{=0} (\vec{h} \cdot \nabla) v_{\parallel} \right] + \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \left[ \vec{h} \times v_{\parallel} (\vec{h} \cdot \nabla) \vec{h} \right] = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} \left[ \vec{h} \times \underbrace{(\vec{h} \cdot \nabla) \vec{h}}_{\equiv \vec{\kappa}} \right]. \end{aligned}$$



В результате получаем формулу

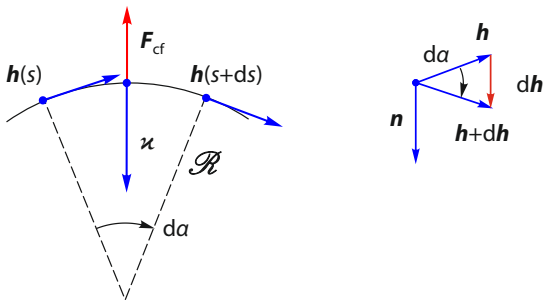
$$\vec{v}_{\text{cf}} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{\kappa}], \quad (9)$$

где введено обозначение

$$\vec{\kappa} = (\vec{h} \cdot \nabla) \vec{h} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial s} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}} \quad (10)$$

для *вектора кривизны* магнитной силовой линии.





**Figure 2:** На заряженную частицу,двигающуюся вдоль искривлённой магнитной силовой линии, действует центробежная сила  $\vec{F}_{cf}$ . Она направлена против вектора кривизны  $\vec{\kappa} = \partial \vec{h} / \partial s$ , где  $\vec{h}$  — вектор, касательный силовой линии в каждой её точке, а  $s$  — координата вдоль силовой линии, отмеряющая её длину. Справа: результат параллельного переноса векторов  $\vec{h} = \vec{h}(s)$  и  $\vec{h} + d\vec{h} = \vec{h}(s + ds)$  в одну точку.

Рассмотрим элемент окружности радиуса  $\mathcal{R}$ , опирающийся на малый угол  $d\alpha$ . Изменение  $d\vec{h}$  перпендикулярно  $\vec{h}$ , поскольку

$$|\vec{h}| = |\vec{h} + d\vec{h}| = 1,$$

$$|\vec{h} + d\vec{h}| = \sqrt{(\vec{h} + d\vec{h})^2} \approx \sqrt{h^2 + 2(\vec{h} \cdot d\vec{h})} \approx 1 + (\vec{h} \cdot d\vec{h})$$

и, следовательно,  $(\vec{h} \cdot d\vec{h}) = 0$ .

С той же точностью

$$|d\vec{h}| \approx |\vec{h}| d\alpha = d\alpha,$$

$$ds = \mathcal{R} d\alpha,$$

т. е.

$$|\partial\vec{h}/\partial s| = 1/\mathcal{R}.$$



Своим происхождением центробежный дрейф обязан одноимённой силе

$$\vec{F}_{\text{cf}} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{\mathcal{R}} \vec{n}. \quad (11)$$

В свою очередь, центробежная сила есть частный случай силы инерции

$$\vec{F} = -m \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Соответственно, скорость

$$\vec{v}_{\text{in}} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right]$$

можно было бы назвать скоростью *инерционного дрейфа*. Однако это название не является общепринятым. Только упрощённую формулу (9) без сомнения соотносят со скоростью центробежного дрейфа.



# Далее...

- 1 Градиентный дрейф
- 2 Центробежный дрейф
- 3 Поляризационный дрейф**
- 4 Скорость движения ведущего центра
- 5 Задачи для семинара



$$\vec{v}_{\text{pol}} = \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \vec{u} = v_{\parallel} \vec{h} + \vec{v}_E,$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

$$\vec{v}_{\text{pol}} = \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial v_{\parallel} \vec{h}}{\partial t} \right] + \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}_E}{\partial t} \right]. \quad (12)$$

Первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial}{\partial t} v_{\parallel} \vec{h} \right] &= \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial}{\partial t} \frac{v_{\parallel}}{B} \vec{B} \right] = \underbrace{\left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \vec{B} \right]}_{=0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{v_{\parallel}}{B} + \frac{v_{\parallel}}{B} \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{v_{\parallel}}{B} \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{v_{\parallel} c}{\Omega B} \left[ \vec{h} \times \text{rot } \vec{E} \right]. \end{aligned}$$

Это слагаемое равно нулю, если  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . Но и в вихревом поле это слагаемое мало (третьего порядка малости). Так или иначе, при рассмотрении поляризованного дрейфа этим слагаемым обычно пренебрегают по сравнению со вторым.





$$\vec{v}_{\text{pol}} = \underbrace{\left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial v_{\parallel} \vec{h}}{\partial t} \right]}_{\text{пренебрегаем}} + \left[ \frac{\vec{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}_E}{\partial t} \right].$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

При вычислении производной во втором слагаемом можно дифференцировать только электрическое поле  $\vec{E}$ , так как дифференцирование магнитного поля даст члены, квадратичные по малому отношению  $E/B$ :

$$\frac{\partial \vec{v}_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} c \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2} = \frac{\partial}{\partial t} c \frac{[\vec{E} \times \vec{h}]}{B} \approx \frac{c}{B} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{h} \right].$$

В результате получаем упрощённую формулу:

$$\vec{v}_{\text{pol}} = \frac{c}{\Omega B} \left[ \vec{h} \times \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{h} \right] \right] = \frac{c}{\Omega B} \frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t}. \quad (13)$$



$$\vec{v}_{\text{pol}} = \frac{c}{\Omega B} \left[ \vec{h} \times \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{h} \right] \right] = \frac{c}{\Omega B} \frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t}.$$

..... ↑ это уже было ↑ .....

В медленно меняющемся поле  $v_{\text{pol}} \ll v_E$ , но  $v_{\text{pol}} \ll v_E$  (в отличие от  $v_E$ ) зависит от массы и заряда частицы. Поэтому в переменном электрическом поле ионы и электроны дрейфуют с разной скоростью.

В отличие от диэлектриков, в плазме нельзя создать постоянную поляризацию, так как плазма является проводником и поляризационные заряды за конечное время релаксируют. Однако в переменном электрическом поле  $\vec{E}$  возникает переменный поляризационный ток, преимущественно вызванный инерцией ионов, который вызывает реальную поляризацию плазмы.



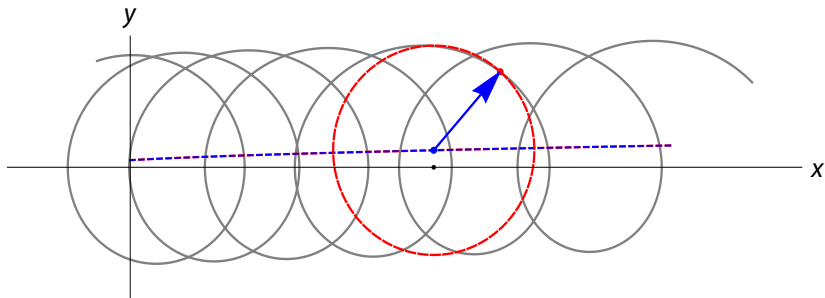


Figure 3: Электрический и поляризационный дрейфы:  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ ,  $\vec{E} = (1 + t/\tau)E_0\hat{e}_y$ . Ведущие центры иона (синий кружок) и электрона (чёрная точка) дрейфуют с одинаковой скоростью  $v_E = cE_y/B_z$  вдоль оси  $x$ , но с разной скоростью вдоль оси  $y$ . Ларморовский радиус электрона при одинаковой энергии электрона и иона неразличим в масштабе рисунка.

# Далее...

- 1 Градиентный дрейф
- 2 Центробежный дрейф
- 3 Поляризационный дрейф
- 4 Скорость движения ведущего центра**
- 5 Задачи для семинара



Скорость движения ведущего центра магнитного поля есть сумма скоростей всех рассмотренных дрейфов:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = v_{\parallel} \vec{h} + \vec{v}_E + \vec{v}_{\nabla B} + \vec{v}_{cf} + \vec{v}_{pol}. \quad (14)$$

Общее выражение заметно упрощается в практически важном случае, когда и магнитное, и электрическое поля стационарны (не зависят от времени). Тогда

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = v_{\parallel} \vec{h} + \frac{c}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{x}]. \quad (15)$$

Искривленное магнитное поле почти всегда оказывается неоднородным, поэтому к центробежному дрейфу (последнее слагаемое) всегда примешивается градиентный дрейф (предпоследнее слагаемое). Покажем, что в потенциальном магнитном поле направления этих дрейфов совпадают.



Пусть магнитное поле потенциально (*вакуумное поле*), т.е.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = 0.$$

Используем равенства

$$[\vec{h} \times \operatorname{rot} \vec{h}] = \underbrace{\nabla \frac{h^2}{2}}_{=0} - (\vec{h} \cdot \nabla) \vec{h} = -\vec{\kappa},$$

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{B} = \frac{1}{B} \operatorname{rot} \vec{B} + \left[ \nabla \frac{1}{B} \times \vec{B} \right] = - \left[ \frac{\nabla B}{B} \times \vec{h} \right],$$

ПОЭТОМУ

$$\vec{\kappa} = -[\vec{h} \times \operatorname{rot} \vec{h}] = \left[ \vec{h} \times \left[ \frac{\nabla B}{B} \times \vec{h} \right] \right] = \frac{\nabla B}{B} - \vec{h} \left( \vec{h} \cdot \frac{\nabla B}{B} \right).$$

Следовательно,

$$[\vec{h} \times \vec{\kappa}] = \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right].$$



В итоге градиентный и центробежный дрейфы объединяются в единый блок:

$$\vec{v}_{\nabla B} + \vec{v}_{cf} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{x}] = \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (16)$$

Вероятно, первым эту формулу получил Г. И. Будкер в 1951 году. Она часто используется при расчёте траекторий движения заряженных частиц в установках для магнитного удержания плазмы.



# Далее...

- 1 Градиентный дрейф
- 2 Центробежный дрейф
- 3 Поляризационный дрейф
- 4 Скорость движения ведущего центра
- 5 Задачи для семинара**





## Задачи для семинара I

- 5.1 Найти скорость градиентного и центробежного дрейфов релятивистской частицы.
- 5.3 За какое время протон с энергией 5 кэВ совершит полный оборот вокруг Земли, если он стартует из экваториальной плоскости, его скорость вдоль магнитного поля равна нулю, а расстояние до центра Земли составляет 20 000 км. Считать, что магнитное поле создаётся диполем с величиной  $7,8 \times 10^{19}$  Гс  $\times$  м<sup>3</sup>, который расположен в центре Земли.
- 5.7–5.9\* Исследовать форму дрейфовых траекторий в токамаке.
- 5.4\* Найти силу, действующую на заряженную частицу в системе отсчёта ведущего центра.



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

11 октября 2017 г.

## Лекция 06

# Адиабатические инварианты

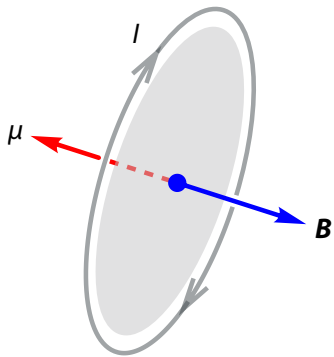
- Магнитный момент
- Первый адиабатический инвариант
- Система уравнений ведущего центра
- Траектории частиц в пробкотроне
- Иерархия адиабатических инвариантов



# Далее...

- 1 **Магнитный момент**
- 2 Первый адиабатический инвариант
- 3 Система уравнений ведущего центра
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками
- 5 Второй адиабатический инвариант
- 6 Третий адиабатический инвариант
- 7 Задачи для семинара





Ларморовская окружность образует замкнутый виток с током в системе отсчёта ведущего центра. Такой виток обладает магнитным моментом

$$\vec{\mu} = -\frac{SI}{c} \frac{\vec{B}}{B},$$

$$I = \frac{e\Omega}{2\pi}, \quad S = \pi\rho^2 = \pi \frac{v_{\perp}^2}{\Omega^2}, \quad \Omega = \frac{eB}{mc}.$$

$$\vec{\mu} = -\mu \vec{h}, \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}. \quad \vec{h} = \frac{\vec{B}}{B}. \quad (1)$$

$$\vec{\mu} = -\mu \vec{h}, \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}.$$

.....  
Длину вектора магнитного момента  $\mu$  (а не вектор  $\vec{\mu}$ ) чаще всего называют орбитальным *магнитным моментом* заряженной частицы в магнитном поле.

В релятивистском случае

$$\mu_{\gamma} = \gamma\mu.$$

Учёт релятивистских эффектов в лабораторной плазме, как правило, избыточен. Однако он поможет нам уточнить физический смысл первого адиабатического инварианта.



# Далее...

- 1 Магнитный момент
- 2 Первый адиабатический инвариант**
- 3 Система уравнений ведущего центра
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками
- 5 Второй адиабатический инвариант
- 6 Третий адиабатический инвариант
- 7 Задачи для семинара



$$\Phi = \pi \rho^2 B \quad (2)$$

через площадь ларморовской окружности в сопутствующей системе отсчёта ведущего центра является *адиабатическим инвариантом*.

Сохранение  $\Phi$  следует из закона электромагнитной индукции Фарадея и закона Ома.

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$
$$\mathcal{E} = RI.$$

Движение заряженной частицы по замкнутой ларморовской окружности под действием одной только силы Лоренца означает  $R = 0$  (нулевое сопротивление). Следовательно,

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.$$



Адиабатическими инвариантами вообще являются интегралы

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (3)$$

взятые по периоду изменения *циклической* координаты  $q_i$ , которой в невозмущённой системе соответствует *периодическое движение*. Существует общая теорема механики, которая утверждает, что величина  $J_i$  будет приближённым интегралом движения при наличии малых возмущений, если  $p_i$  есть импульс, канонически сопряжённый циклической координате  $q_i$ . Невозмущённую систему в данном случае образует однородные и постоянные поля  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ , а периодическим (циклическим) является движение заряженной частицы в системе отсчёта ведущего центра, которая движется со скоростью  $\vec{u} = v_{\parallel} \vec{h} + \vec{v}_E$  относительно исходной системы отсчёта.



Следовательно, адиабатическим инвариантом является интеграл

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint \left( \vec{P}_{\perp} \cdot d\vec{r}_{\perp} \right), \quad \vec{P}_{\perp} = \gamma m \vec{v}_{\perp} + \frac{e}{c} \vec{A}_{\perp}, \quad (4)$$

взятый по периоду движения в системе отсчёта ведущего центра частицы, где частица вращается в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

$$\begin{aligned} J_{\perp} &= \frac{1}{2\pi} \oint \gamma m (\vec{v}_{\perp} \cdot d\vec{r}_{\perp}) + \frac{e}{2\pi c} \oint (\vec{A} \cdot d\vec{r}_{\perp}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi\gamma/|\Omega|} \gamma m v_{\perp}^2 dt + \frac{e}{2\pi c} \int_{S=\pi(\gamma v_{\perp}/\Omega)^2} (\text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}) \\ &= \frac{m(\gamma v_{\perp})^2}{|\Omega|} + \frac{e\vec{B}}{2\pi c} \cdot \pi \left( \frac{\gamma v_{\perp}}{\Omega} \right)^2 \left( -\frac{\vec{\Omega}}{|\Omega|} \right) \\ &= \frac{m(\gamma v_{\perp})^2}{2|\Omega|}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 J_{\perp} &= \frac{m(\gamma v_{\perp})^2}{2|\Omega|} = \left( \frac{\gamma v_{\perp}}{|\Omega|} \right)^2 \frac{m|\Omega|}{2} = \frac{|e|\hbar}{2\pi c} \Phi \\
 &= \frac{\gamma^2 m v_{\perp}^2}{2|e|B/mc} = \frac{mc}{|e|\hbar} \gamma^2 \mu \\
 &= \frac{(\gamma m v_{\perp})^2}{2m|\Omega|} = \frac{c}{2|e|\hbar} \frac{p_{\perp}^2}{B}.
 \end{aligned}$$

Величины

$$\Phi, \quad \gamma^2 \mu, \quad p_{\perp}^2/B$$

являются адиабатическими инвариантами. Строго говоря, ни  $\mu$ , ни  $\mu_{\gamma} = \gamma\mu$  не являются адиабатическими инвариантами.

Тем не менее говорят, что магнитный момент является адиабатическим инвариантом, подразумевая нерелятивистский предел.



# Далее...

- 1 Магнитный момент
- 2 Первый адиабатический инвариант
- 3 Система уравнений ведущего центра**
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками
- 5 Второй адиабатический инвариант
- 6 Третий адиабатический инвариант
- 7 Задачи для семинара



В нерелятивистском приближении в стационарном поле ведущий центр движется со скоростью

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = v_{\parallel} \vec{h} + \frac{c}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{\kappa}]. \quad (5)$$

Помимо этого уравнения замкнутая система уравнений должна содержать ещё рецепт вычисления  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$ .



Уравнение для поперечной скорости  $v_{\perp}$ .

В дрейфовом приближении при нерелятивистских скоростях  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$  является интегралом движения, т. е.

$$\frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что  $v_{\perp}$  однозначно выражается через величину магнитного поля:

$$v_{\perp} = \sqrt{2\mu B/m}. \quad (7)$$



Продольную скорость  $v_{\parallel}$  проще всего найти из уравнения для кинетической энергии частицы

$$\frac{dK}{dt} = e \left( \vec{E} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \right) + \mu \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (8)$$

где кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \quad (9)$$

складывается из энергии ведущего центра  $\frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_E^2)$  и энергии ларморовского вращения  $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$ .

Уравнение (8) можно вывести путём усреднения  $(\vec{v} \cdot \vec{E})$  по ларморовской орбите, но результат почти очевиден: первое слагаемое в (8) описывает работу электрического поля над ведущим центром частицы, а второе слагаемое отвечает работе вихревого электрического поля по замкнутой ларморовской окружности.



Уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_E^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = e \left( \vec{E} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \right) + \mu \frac{\partial B}{\partial t} \quad (8)$$

можно переписать в ином виде, выделив из кинетической энергии последнее слагаемое  $\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \mu B$ . Так как

$$\frac{d}{dt} \mu B = \mu \frac{dB}{dt} = \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \cdot \nabla B \right)$$

уравнение (8) эквивалентно

$$\frac{d}{dt} \frac{m v_{\parallel}^2 + m v_E^2}{2} = \left( e \vec{E} - \mu \nabla B \right) \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}.$$





В стационарном поле  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\mu \nabla B \cdot d\vec{R}/dt = d(\mu B)/dt$  и

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_{\parallel}^2 + mv_E^2}{2} = (e \vec{E} - \mu \nabla B) \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (-e\varphi - \mu B).$$

Следовательно, полная энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \mu B + e\varphi \quad (10)$$

сохраняется, т. е.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (11)$$

Второе слагаемое  $\frac{1}{2}mv_E^2$  в правой части (10) мало по сравнению тремя другими, если  $\rho \ll a$ ; им часто пренебрегают.



# Далее...

- 1 Магнитный момент
- 2 Первый адиабатический инвариант
- 3 Система уравнений ведущего центра
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками**
- 5 Второй адиабатический инвариант
- 6 Третий адиабатический инвариант
- 7 Задачи для семинара



В неоднородном магнитном поле на магнитный момент действует сила

$$\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Так как  $\vec{\mu} = -\mu\vec{h}$  и  $(\vec{h} \cdot \vec{B}) = B$ , а  $\mu = \text{const}$ ,

$$\vec{F} = -\mu \nabla B. \quad (12)$$

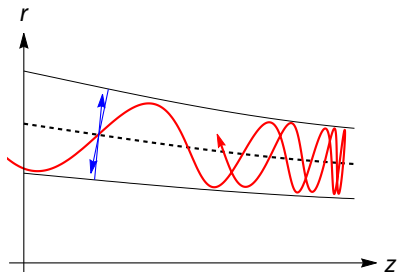
$$\vec{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\vec{F} \times \vec{B}]}{B^2} \Rightarrow \vec{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right].$$

Такой способ вычисления  $\vec{v}_{\nabla B}$  указал Альфвен (Hannes Alfvén). Он же объяснил, что продольная составляющая этой силы

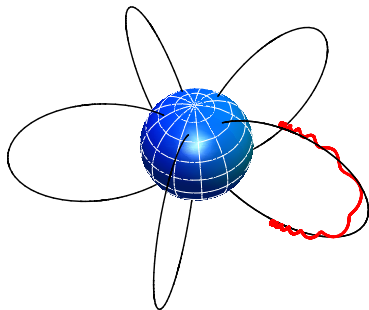
$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (13)$$

тормозит частицу при движении в направлении более сильного поля, как показано на следующем слайде.



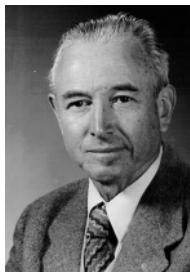
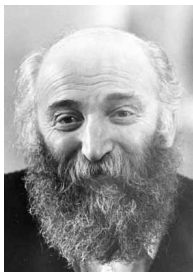


**Рис. 1:** Сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы в каждой точке её траектории (красная кривая), но в неоднородном магнитном поле имеет проекцию  $F_{\parallel} = -\mu \partial B / \partial z$  на направление движения ведущего центра (штриховая линия).



**Рис. 2:** Типичная траектория заряженной частицы, захваченной в магнитное поле Земли (толстая красная кривая). Частица вращается вокруг магнитной силовой линии (тонкие линии), попеременно отражаясь от северного и южного магнитного полюсов.

Альфвен применял свою теорию к анализу движения заряженных частиц в дипольном магнитном поле Земли. Он предположил, что частицы должны отражаться от областей сильного магнитного поля вблизи магнитных полюсов.



На том же эффекте основан предложенный независимо Г. И. Будкером и Р. Постом (Richard Post) способ удержания плазмы в *адиабатической ловушке* с «магнитными пробками». Простейший вариант такой ловушки называют *пробкотроном*.

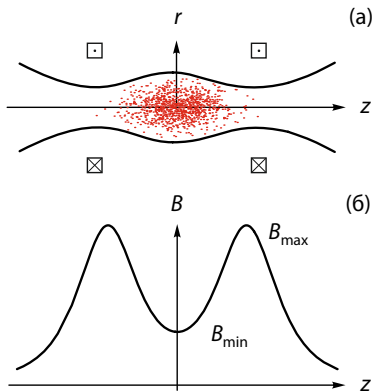


Рис. 3: Схема *пробкотрона* (mirror trap). Заряженные частицы удерживаются магнитным полем от разлёта поперёк силовых линий. Разлёту плазмы вдоль магнитного поля препятствуют *магнитные пробки* (magnetic mirrors), где силовые линии сгущаются. Форма силовых линий (на верхнем рисунке) напоминает бутылку с двумя горлышками. Она может быть найдена из условия сохранения магнитного потока через сечение бутылки  $\pi r^2 B(z) = \text{const}$ , где  $B(z)$  — поле на оси ловушки (на нижнем рисунке).

Рассмотрим движение ведущего центра частицы, пренебрегая дрейфом (нулевой порядок дрейфовой теории и  $\vec{E} = 0$ ):

$$\dot{\vec{R}} = v_{\parallel} \vec{h}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{const}, \quad \mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2}{m} \mu B}, \quad v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - \mu B)}, \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \varepsilon} = \text{const}.$$

В точках остановки, где  $v_{\parallel} = 0$ , имеем

$$\varepsilon = \mu B, \quad B = B_* \equiv \varepsilon / \mu.$$

Пусть в экваториальной плоскости пробкотрона, где  $B = B_{\min}$ ,

$$v_{\perp} = v_{\perp 0} \equiv v \sin \theta_0, \quad v_{\parallel} = v_{\parallel 0} \equiv v \cos \theta_0.$$

При каких  $v$  и  $\theta_0$  частица удерживается в пробкотроне?



На магнитной силовой линии, по которой движется частица,

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_{\min}} = \frac{mv^2}{2B_{\min}} \sin^2 \theta_0.$$

Следовательно, в точке остановки

$$B_* = \varepsilon/\mu = \frac{mv^2}{2} / \frac{mv^2 \sin^2 \theta_0}{2B_{\min}} = B_{\min}/\sin^2 \theta_0.$$

Параметр  $\theta_0$  называют *питч-углом*. Если  $B_* > B_{\max}$ , частица беспрепятственно вылетает из ловушки. В ловушке удерживаются частицы с питч-углом, таким что

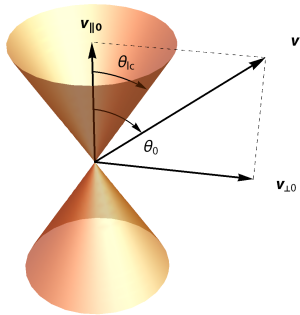
$$\sin^2 \theta_0 > B_{\min}/B_{\max} \equiv \sin^2 \theta_{lc},$$

то есть

$$\theta_0 > \theta_{lc} \equiv \arcsin \sqrt{B_{\min}/B_{\max}}. \quad (14)$$







**Рис. 4:** Конус потерь в пространстве скоростей. В ловушке с магнитными пробками удерживаются частицы с  $\theta_0 > \theta_{lc}$ . Частицы, каким-либо образом попавшие в конус потерь, быстро вылетают из ловушки.

*Пробочное отношение:*  $B_{\max}/B_{\min}$  определяет область удержания заряженных частиц в пространстве скоростей.

*Конус потерь* (loss cone):  $\theta_0 < \theta_{lc}$ .

*Область удержания* (trapped particles):  $\theta_0 > \theta_{lc}$ .

Взаимные столкновения частиц приводят к изменению их питч-угла. Частицы, первоначально находившиеся вне конуса потерь, в результате столкновений всё-таки туда попадают и уходят из пробкотрона.

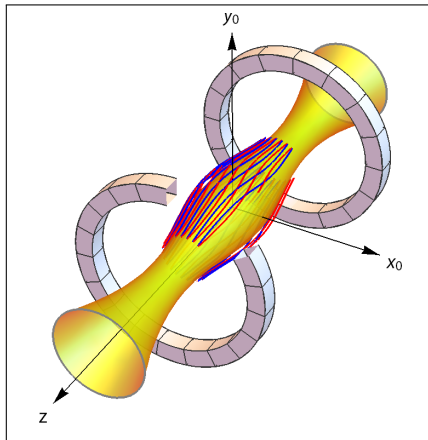
Из-за меньшей массы электроны более подвижны, чаще испытывают столкновения и быстрее попадают в конус потерь, чем более тяжёлые ионы. В итоге, плазма в адиабатических ловушках приобретает положительный потенциал  $\phi \sim T_e/e$ , который препятствует уходу электронов, уравнивая скорость потерь электронов и ионов. Этот потенциал называют *амбиполярным*. Он служит инструментом поддержания квазинейтральности плазмы. Положительный амбиполярный потенциал изменяет форму конуса потерь, сужая его для электронов и расширяя для ионов. (задача для семинара)



# Далее...

- 1 Магнитный момент
- 2 Первый адиабатический инвариант
- 3 Система уравнений ведущего центра
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками
- 5 Второй адиабатический инвариант**
- 6 Третий адиабатический инвариант
- 7 Задачи для семинара





**Рис. 5:** В аксиально-симметричном пробкотроне заряженная частица дрейфует по азимуту. Траектория, доходящая до магнитных пробок, описывает петлю наподобие восьмёрки, в среднем смещаясь в ту сторону, куда дрейфует частица, запертая вблизи экватора.

Сделаем следующий шаг по параметру  $\rho/\ell$  и учтём дрейф:

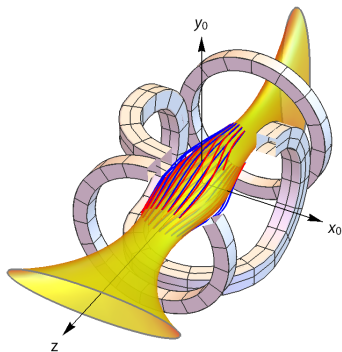
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = v_{\parallel} \vec{h} + \frac{c}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[ \vec{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\vec{h} \times \vec{x}]. \quad (15)$$

Траектория ведущего центра покрывает *дрейфовую оболочку*, которая в осесимметричном пробкотроне представляет собой поверхность вращения.

В более сложной геометрии, не обязательно решать дрейфовые уравнения движения, так как дрейфовая оболочка однозначно характеризуется постоянными значениями энергии  $\varepsilon$ , магнитного момента  $\mu$  и *продольного адиабатического инварианта*

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &= \frac{1}{2\pi} \oint P_{\parallel} ds = \frac{1}{2\pi} \oint m v_{\parallel} ds + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\oint \frac{e}{c} A_{\parallel} ds}_{=0} \\ &= \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2m \left( \varepsilon - e\varphi - \mu B - \frac{1}{2} m v_E^2 \right)} ds \end{aligned}$$





**Рис. 6:** Квадрупольное поле создаётся катушкой типа «baseball», размещённой между круглыми катушками. Поверхность, составленная из магнитных линий, выпущенных из окружности в экваториальной плоскости ловушки, вблизи магнитных пробок приобретает форму «рыбьих хвостов».

$J_{\parallel}$  сохраняется, если характерное время изменения  $\tau_{\text{dr}}$  магнитного или электрического поля, вызванного переходом частицы на другие силовые линии, велико по сравнению с периодом продольных колебаний  $\ell/v_{\parallel}$ :

$$\tau_{\text{dr}} \gg \ell/v_{\parallel}. \quad (16)$$



Пусть  $x_0, y_0$  — координаты пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью ловушки, а  $s$  — координата вдоль силовой линии. Тогда можно записать, что

$$\varphi = \varphi(x_0, y_0, s), \quad B = B(x_0, y_0, s).$$

Следовательно, уравнение

$$J_{\parallel} = J_{\parallel}(\varepsilon, \mu, x_0, y_0) = \text{const},$$

даёт зависимость  $y_0$  от  $x_0$  для частицы с заданными  $\varepsilon$  и  $\mu$ , т. е. линию пересечения дрейфовой поверхности с выбранной плоскостью  $(x_0, y_0)$ . Дрейфовая поверхность состоит из силовых линий, выпущенных из всех точек этой линии пересечения.





# Далее...

- 1 Магнитный момент
- 2 Первый адиабатический инвариант
- 3 Система уравнений ведущего центра
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками
- 5 Второй адиабатический инвариант
- 6 Третий адиабатический инвариант**
- 7 Задачи для семинара



Представим, что в предыдущей задаче  $\varphi$  и  $B$  медленно меняются с характерным временем  $\tau \gg \ell/v_{\text{dr}}$ . Тогда энергия  $\varepsilon$  не сохраняется, но сохраняется магнитный поток через сечение дрейфовой оболочки:

$$\Phi_{\text{dr}} = \int_{S_{\text{dr}}} (\vec{B} \cdot d\vec{S}).$$

$\Phi_{\text{dr}}$  есть  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и «номера» дрейфовой оболочки, которым служит величина продольного адиабатического инварианта  $J_{\parallel}$ :

$$\Phi_{\text{dr}} = \Phi_{\text{dr}}(\varepsilon, \mu, J_{\parallel}, t)$$

При медленном изменении полей адиабатические инварианты  $\mu$ ,  $J_{\parallel}$  и  $\Phi_{\text{dr}}$  сохраняются, а энергия частицы меняется. Зависимость энергии от времени  $\varepsilon(t)$  можно найти из совместного решения уравнений

$$J_{\parallel} = \text{const}, \quad \Phi_{\text{dr}} = \text{const}$$

при заданном начальном значении  $\mu$ .



# Далее...

- 1 Магнитный момент
- 2 Первый адиабатический инвариант
- 3 Система уравнений ведущего центра
- 4 Адиабатические ловушки с магнитными пробками
- 5 Второй адиабатический инвариант
- 6 Третий адиабатический инвариант
- 7 Задачи для семинара**



## Задачи для семинара I

- 5.4 (6-4 н.н.) Доказать, что отношение  $p_{\perp}^2/B$  является адиабатическим инвариантом, выполнив усреднение уравнений движения частицы в системе отсчёта ведущего центра.
- 5.7 (6-7 н.н.) Найти форму конуса потерь при наличии амбиполярного потенциала. Для простоты принять, что потенциал плазмы  $\varphi$  почти всюду равен  $\varphi_0 > 0$  и лишь непосредственно вблизи магнитных пробок скачком обращается в нуль. Отдельно рассмотреть удержание электронов и положительно заряженных ионов.
- 5.8 (6-8 н.н.) Найти область абсолютного удержания в аксиально-симметричном пробкотроне.



## Задачи для семинара II

- 5.15 (6-15 н.н.) (Механизм Ферми ускорения космических лучей.) Протон захвачен в ловушку с пробочным отношением 5. В начальный момент энергия протона равна 1 кэВ, а питч-угол в минимуме магнитного поля составляет  $45^\circ$ . Магнитные пробки сближаются со скоростью 10 км/сек. До какой энергии разгонится протон, прежде чем покинет ловушку?
- 5-11 (6-11 н.н.) В пробочное магнитное поле захвачен пучок заряженных частиц с одинаковым питч-углом. Пучок отражается в точке, где  $B = B_*$ , а его плотность в минимуме поля  $B_0$  равна  $n_0$ . Найти распределение плотности пучка вдоль силовой линии, определив её зависимость от величины магнитного поля  $B$  при  $B_0 < B < B_*$ .

Номера задач указаны по книге «Лекции по физике плазмы».



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

18 октября 2017 г.

## Лекция 07

# Кулоновское рассеяние

- Сечение процесса
- Длина и частота столкновений
- Дифференциальное и транспортное сечение
- Рассеяние на кулоновском центре
- Приближение далёких пролётов
- Кулоновский логарифм

Все столкновения можно условно разделить на *упругие* и *неупругие*. В упругих столкновениях суммарная кинетическая энергия сталкивающихся частиц не изменяется.

В рамках классической физики представление об упругих столкновениях заряженных частиц следовало бы считать идеализацией реальных явлений, так как любая заряженная частица, испытывающая ускорение, обязана излучать, теряя энергию. Квантовая теория вносит существенные поправки в классическую картину мира, предсказывая, что излучение имеет вероятностный характер и что только малая доля столкновений сопровождается излучением фотона, который способен унести заметную долю кинетической энергии.

Упругие столкновения заряженных частиц называют *кулоновским рассеянием*.



# Далее...

- 1 Параметры столкновений
- 2 Дифференциальное сечение рассеяния
- 3 Транспортное сечение
- 4 Кулоновский логарифм
- 5 Приближение далёких пролётов
- 6 Задачи для семинара

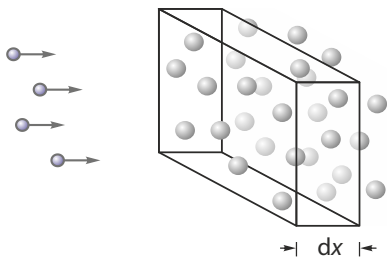


Рис. 1: Абсолютно неупругое поглощение частиц в мишени: пучок частиц с плотностью  $n_b$ , летящих со скоростью  $v$ , падает на полупространство  $x > 0$ , занятое массивными атомами с плотностью  $n_a$ ; попадая в атом, частицы «прилипают» к нему.

Изменение плотности пучка  $dn_b$  за счёт выбывания частиц, которые «прилипают» к атомам на дифференциально малом расстоянии  $dx$ , пропорционально  $n_a$ ,  $n_b$  и  $dx$ . Следовательно,

$$dn_b = -\sigma n_a n_b dx, \quad (1)$$

где  $\sigma$  называется *сечением процесса*. Знак минус отвечает убыли числа частиц.

Решение уравнения  $dn_b/dx = -\sigma n_a n_b$

$$n_b = n_{b0} \exp(-\sigma n_a x) \equiv n_{b0} \exp(-x/\lambda)$$

описывает экспоненциальное убывание частиц в пучке.

Расстояние

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_a} \quad (2)$$

называют *длиной свободного пробега*, а

$$\tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{n_a \sigma v} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{\tau} = n_a \sigma v \quad (3)$$

называют *временем свободного пробега* и *частотой столкновений*.

В столкновениях одного и того же набора частиц могут происходить разные явления. Каждому из возможных процессов сопоставляют своё сечение. Наиболее вероятный процесс имеет наибольшее сечение.

# Далее...

- 1 Параметры столкновений
- 2 Дифференциальное сечение рассеяния
- 3 Транспортное сечение
- 4 Кулоновский логарифм
- 5 Приближение далёких пролётов
- 6 Задачи для семинара

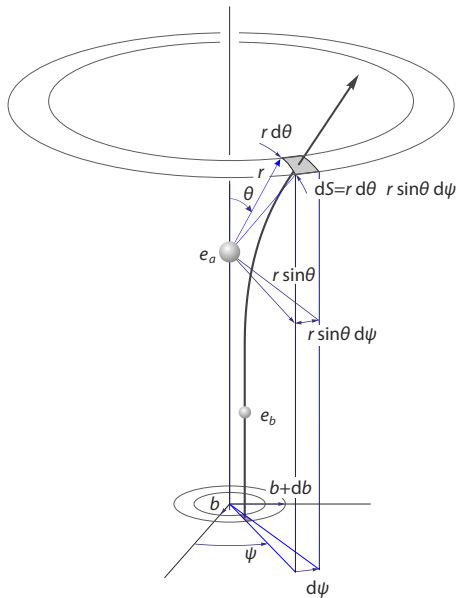


Рис. 2: Дифференциальное сечение рассеяния на неподвижном кулоновском центре. Частицы налетающего потока, пересекающие площадку  $d\sigma = db \times b d\psi$ , после рассеяния разлетаются в телесном угле  $d\omega = dS/r^2 = d\theta \times \sin\theta d\psi$ .

Пусть поток частиц с зарядом  $e_b$ , скоростью  $v$  и плотностью  $n_b$  налетает на неподвижный *кулоновский центр* с зарядом  $e_a$ . Пусть  $b$  обозначает *прицельный параметр* налетающей частицы (не путать с индексом  $b$  в обозначениях вида  $e_b$  и  $n_b$ ). Выделим в налетающем потоке пучок частиц, пролетающих через небольшой сегмент в виде сектора тонкого колечка с внутренним радиусом  $b$  и внешним радиусом  $b + db$ , опирающегося на азимутальный угол  $d\psi$ . Через площадь этого сегмента

$$d\sigma = db \times b d\psi \quad (4)$$

в единицу времени пролетает

$$n_b v d\sigma$$

частиц.

Каждая частица отклоняется на угол  $\theta$ , зависящий от  $b$  в соответствии с формулой Резерфорда (Ernest Rutherford, 1911):

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{e_a e_b}{m v^2 b} = \frac{b_*}{b}, \quad (5)$$

где параметр

$$b_* = \frac{e_a e_b}{m v^2} \quad (6)$$

называют *кулоновским радиусом*.

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{d\theta}{db} db, \\ dS &= r d\theta \times r \sin \theta d\psi, \\ do &= dS / r^2 = \sin \theta d\theta d\psi. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{b_*}{b}, \quad (5)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

*Дифференциальное сечение рассеяния:*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b \, db \, d\psi}{\sin \theta \, d\theta \, d\psi} \right| = \left| \frac{b \, db}{\sin \theta \, d\theta} \right|.$$

Дифференциальное сечение рассеяния кулоновского рассеяния:

$$b = b_* \operatorname{ctg}(\theta/2) = b_* \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{b_*/2}{\sin^2(\theta/2)};$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b_*^2 \cos(\theta/2)}{2 \sin^3(\theta/2) \sin \theta} = \frac{b_*^2}{4 \sin^4(\theta/2)}.$$



$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{b_*^2}{4 \sin^4(\theta/2)} = \frac{(e_a e_b / mv^2)^2}{4 \sin^4(\theta/2)}. \quad (7)$$

Дифференциальное сечение характеризует вероятность рассеяния в определённый интервал углов. Дифференциал  $d\sigma = (d\sigma/do) do$  отвечает рассеянию частиц на неподвижной мишени в интервал телесного угла  $do$  около направления  $o$ . Дифференциальным сечением называют как  $d\sigma/do$ , так и  $d\sigma$ .

Полное сечение рассеяния  $\sigma$  получается интегрированием  $d\sigma$  по всему телесному углу, однако в теории кулоновских столкновений более ясный смысл имеет не полное, а транспортное сечение.

# Далее...

- 1 Параметры столкновений
- 2 Дифференциальное сечение рассеяния
- 3 Транспортное сечение**
- 4 Кулоновский логарифм
- 5 Приближение далёких пролётов
- 6 Задачи для семинара

Вычислим силу, действующую на рассеивающий центр со стороны потока частиц. Так как рассеивающий центр неподвижен, кинетическая энергия налетающей частицы  $\frac{1}{2}mv^2$  вдалеке от него до и после рассеяния одинакова (почему?). Следовательно, абсолютная величина импульса  $mv$  также неизменна. Однако каждая частица, которая отклоняется на угол  $\theta$ , передаёт рассеивающему центру часть импульса в направлении своего первоначального движения

$$\Delta p_{\parallel} = mv (1 - \cos \theta).$$

Часть переданного импульса  $\Delta p_{\perp} = mv \sin \theta$ , перпендикулярная скорости налетающего потока, компенсируется вкладом других частиц, как показано на следующем слайде.

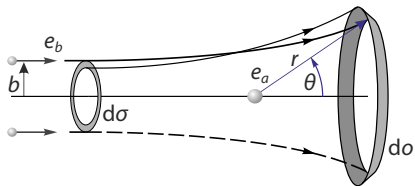


Рис. 3: Траектория частицы с зарядом  $e_b$  при рассеянии на неподвижном кулоновском центре с зарядом  $e_a$ . Разница между импульсом частицы после и до рассеяния передаётся рассеивающему центру. Часть переданного импульса  $\Delta p_{\perp} = mv \sin \theta$ , перпендикулярная скорости налетающего потока, компенсируется частицей, которая налетает на том же прицельном расстоянии  $b$  с противоположной стороны рассеивающего центра (её траектория показана штрихами).

Искомая сила  $\vec{F}$  направлена вдоль скорости налетающего потока частиц и равна импульсу, переданному рассеивающему центру в единицу времени. Так как в единицу времени площадку сечением  $d\sigma$  пересекают  $n_b v d\sigma$  частиц, имеем

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int \Delta\vec{p}_{\parallel} n_b v d\sigma = \int m\vec{v} (1 - \cos\theta) n_b v \frac{d\sigma}{d\sigma} d\sigma = \\ &= m\vec{v} n_b v \underbrace{\int (1 - \cos\theta) \frac{d\sigma}{d\sigma} d\sigma}_{=\sigma_t} = m\vec{v} n_b v \sigma_t.\end{aligned}$$

*Транспортное сечение*

$$\sigma_t = \int (1 - \cos\theta) \frac{d\sigma}{d\sigma} d\sigma \quad (8)$$

имеет смысл площади сечения, которое имел бы рассеивающий центр в виде твёрдого шарика, если бы тот полностью поглощал импульс падающих на него частиц.

# Далее...

- 1 Параметры столкновений
- 2 Дифференциальное сечение рассеяния
- 3 Транспортное сечение
- 4 Кулоновский логарифм**
- 5 Приближение далёких пролётов
- 6 Задачи для семинара

$$\sigma_t = \int (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(b_*/2)^2}{\sin^4(\theta/2)}, \quad d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta.$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

$$\begin{aligned} \sigma_t &= 2\pi (b_*/2)^2 \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin^4(\theta/2)} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi (b_*/2)^2 \int_0^\pi \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} 2 \sin(\theta/2) \underbrace{\cos(\theta/2) d\theta}_{=2d(\sin(\theta/2))} \\ &= 4\pi b_*^2 \int_0^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 4\pi b_*^2 \ln(1/0). \end{aligned}$$

Получившийся интеграл логарифмически расходится при малых значениях угла рассеяния  $\theta$ .

Заменим нуль в нижнем пределе на неопределённый пока параметр  $\sin(\theta_{\min}/2) \approx \theta_{\min}/2 \ll 1$ :

$$\sigma_t \approx 4\pi b_*^2 \int_{\theta_{\min}/2}^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 4\pi b_*^2 \ln \underbrace{\frac{2}{\theta_{\min}}}_{\equiv \Lambda} = 4\pi \Lambda b_*^2. \quad (9)$$

При  $\theta \rightarrow 0$

$$b = b_* \operatorname{ctg}(\theta/2) \approx 2b_*/\theta \rightarrow \infty.$$

При  $b > \lambda_D$  потенциал кулоновского центра экранируется и  $\varphi \propto \exp(-r/\lambda_D)/r$ , рассеяние отсутствует, поэтому

$$\lambda_D \approx 2b_*/\theta_{\min}, \quad \theta_{\min} = 2b_*/\lambda_D.$$

Параметр

$$\Lambda = \ln \frac{2}{\theta_{\min}} = \ln \frac{\lambda_D}{b_*} \quad (10)$$

называют *кулоновским логарифмом*.



$$\sigma_t = 4\pi\Lambda b_*^2 = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda}{m^2 v^4}. \quad (11)$$

..... ↑ это было ранее ↑ .....

Практическая формула:

$$\Lambda = 15, \quad \sigma_t [\text{см}^2] \simeq \frac{10^{-12}}{(\varepsilon [\text{эВ}])^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m v^2.$$

Кулоновские столкновения играют важную роль даже в слабо ионизованной плазме:

$$\sigma_{\text{ат}} \sim \pi a_{\text{В}}^2 \sim 10^{-16} \text{ см}^2 < \sigma_t \text{ при } \varepsilon < 10^2 \text{ эВ.}$$

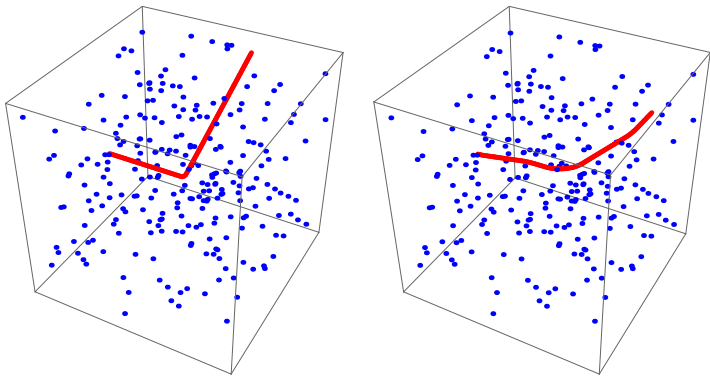
В идеальной плазме, характеризуемой большой величиной плазменного параметра  $N_D = (8\pi/3) n\lambda_D^3 \gg 1$ , отношение

$$\frac{\lambda_D}{b_*} = \frac{\lambda_D}{e^2/2T} \frac{8\pi n}{8\pi n} = 16\pi\lambda_D n \frac{T}{8\pi n e^2} = 16\pi n\lambda_D^3 = 6N_D$$

(для частиц с тепловой скоростью  $b_* = e^2/2T$ ) очень велико, и под знаком логарифма в формуле  $\Lambda = \ln(\lambda_D/b_*)$  его точное значение не очень существенно, что оправдывает процедуру «обрезания» интеграла (9).

# Далее...

- 1 Параметры столкновений
- 2 Дифференциальное сечение рассеяния
- 3 Транспортное сечение
- 4 Кулоновский логарифм
- 5 Приближение далёких пролётов**
- 6 Задачи для семинара



**Рис. 4:** Налетающая частица может рассеяться на значительный угол  $\theta \sim \pi/2$  либо в одном столкновении (рисунок слева), либо испытать многократные отклонения на малый угол (рисунок справа). Из-за дальнего действия кулоновской силы эффект далёких столкновений накапливается примерно в  $L$  раз быстрее.

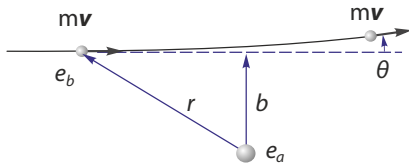


Рис. 5: В приближении далёких пролётов реальная траектория заменяется прямой линией, вдоль которой налетающая частица летит с постоянной скоростью. Расстояние от рассеивающего центра до частицы вычисляется по формуле  $r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$ ;  $t = 0$  в момент наибольшего сближения.

$$\begin{aligned} \Delta p_{\perp} &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{e_a e_b}{r^2}\right)}_{=F} \underbrace{\left(\frac{b}{r}\right)}_{=F_{\perp}/F} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_a e_b b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{e_a e_b b}{b^3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v dt / b}{(1 + v^2 t^2 / b^2)^{3/2}}}_{=2} \frac{b}{v} = \frac{2e_a e_b}{v b}. \end{aligned}$$

Угол рассеяния:

$$\underbrace{\operatorname{tg} \theta}_{\approx \theta} = \Delta p_{\perp} / mv \approx \frac{2e_a e_b}{v b} / mv = \frac{2b_*}{b}.$$

Этот результат совпадает с формулой Резерфорда (5) в пределе  $\theta \ll 1$ . Заменяя в

$$\sigma_t = 4\pi b_*^2 \int \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

$\sin(\theta/2)$  на  $\theta/2$ , получаем интеграл

$$\sigma_t = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2}{m^2 v^4} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta},$$

который логарифмически расходится как на нижнем, так и на верхнем пределе.

Его «обрезают» на обоих пределах:

$$\Lambda = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \quad (12)$$

где  $b_{\min} \approx b_*$ ,  $b_{\max} \approx \lambda_D$ , а также учтено, что  $d\theta / \theta = -db / b$ .

Если длина волны де Бройля  $\lambda_B = \hbar/mv > b_* = e_a e_b / mv^2$ , то надо брать  $b_{\min} = \lambda_B$ , так как, согласно постулатам квантовой физики, прицельное расстояние невозможно зафиксировать с точностью, превышающей  $\lambda_B$ . Если  $|e_a| = |e_b| = e$ , условие  $\lambda_B > b_*$  эквивалентно неравенству

$$v > \alpha c = v_1,$$

где  $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры, а  $c$  — скорость света. Иными словами,  $b_{\min} \approx \lambda_B$ , если  $\varepsilon > J = \alpha^2 m_e c^2 / 2 = 13,6$  эВ.

# Далее...

- 1 Параметры столкновений
- 2 Дифференциальное сечение рассеяния
- 3 Транспортное сечение
- 4 Кулоновский логарифм
- 5 Приближение далёких пролётов
- 6 Задачи для семинара**



## Задачи для семинара I

- Вычислить дифференциальное и транспортное сечения рассеяния твёрдых шариков,
- Вычислить вклад в транспортное сечение близких столкновений с рассеянием на угол  $\theta > \pi/2$ .
- Найти транспортное сечение рассеяния ультрарелятивистского электрона на неподвижном кулоновском центре.
- Полупространство  $x > 0$  занято однородной плазмой, которая удерживается магнитным полем. В плазму по нормали к её границе влетает быстрый нейтральный атом и сразу же ионизуется. Найти координату  $x$  иона после его полного торможения, если вначале ларморовский радиус иона был равен  $\rho_0$ .

(Можно заменить на задачу о дрейфе при наличии градиента плотности плазмы.)

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

25 октября 2017 г.

## Лекция 08

# Парные столкновения

- Кулоновские столкновения в плазме
- Торможение и остывание пробной частицы
- Поле Драйзера
- Иерархия времён

# Далее...

- 1 Кулоновские столкновения в плазме
- 2 Торможение пробной частицы
- 3 Убегающие электроны
- 4 Остывание пробной частицы
- 5 Иерархия времён
- 6 Задачи

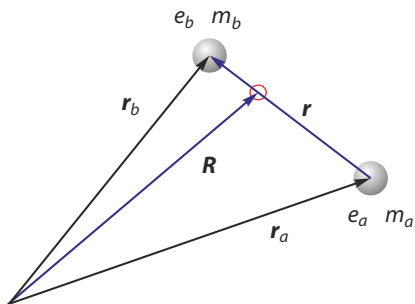


Рис. 1: Радиус-вектор  $\vec{R}$  системы центра масс и радиус-вектор приведённой частицы  $\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$  для двух заряженных частиц.

Избавимся от предположения, что рассеивающий кулоновский центр неподвижен, и рассмотрим движение двух заряженных частиц в общем кулоновском поле.

Сложив уравнение движения первой и второй частиц

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = e_a e_b \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3},$$
$$m_b \ddot{\vec{r}}_b = e_a e_b \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3},$$

получаем

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a + m_b \ddot{\vec{r}}_b = 0.$$

Следовательно, центр масс двух частиц с радиус-вектором

$$\vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b}$$

движется с постоянной скоростью

$$\vec{V} = \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a + m_b \dot{\vec{r}}_b}{m_a + m_b} = \frac{m_a \vec{v}_a + m_b \vec{v}_b}{m_a + m_b}; \quad \ddot{\vec{R}} = 0.$$

$$\vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b}, \quad \vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a.$$

---

$$\vec{r}_a = \vec{R} - \frac{m_b}{m_a + m_b} \vec{r}, \quad \vec{r}_b = \vec{R} + \frac{m_a}{m_a + m_b} \vec{r}.$$

$$m_b \ddot{\vec{r}}_b = e_a e_b \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} \Rightarrow \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \ddot{\vec{r}} = e_a e_b \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

(и такое же уравнение для частицы «а»)

Так как

$$m_b \ddot{\vec{r}}_b = -m_a \ddot{\vec{r}}_a = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \ddot{\vec{r}} = e_a e_b \frac{\vec{r}}{r^3},$$

.....  
движение реальных частиц  $a$  и  $b$  можно найти, решив задачу о движении воображаемой частицы с *приведённой массой*

$$m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} = m_{ba}$$

в поле кулоновского центра, расположенного в центре масс. Положение *приведённой частицы* задано вектором  $\vec{r}$ , а её скорость

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_b - \dot{\vec{r}}_a$$

равна скорости движения частицы  $b$  относительно частицы  $a$ . Начальная скорость такой частицы

$$\vec{u} = \vec{v}_b - \vec{v}_a.$$



Теперь ясно, что в формулах

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad \sigma_t = 4\pi \Lambda b_*^2 = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda}{m^2 v^4}$$

.....  
для дифференциального и транспортного сечений рассеяния на неподвижном кулоновском центре массы и скорость налетающей частицы нужно заменить соответственно на массу приведённой частицы  $m_{ab}$  и относительную скорость сталкивающихся частиц  $\vec{u} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$ :

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad \sigma_{ab} = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}^2 u^4} = \sigma_{ba}. \quad (1)$$

В дальнейшем нам не придётся пересчитывать угол  $\theta$  и сечение рассеяния в лабораторную систему координат, поскольку вычисления удобнее делать именно в системе центра масс.

# Далее...

- 1 Кулоновские столкновения в плазме
- 2 Торможение пробной частицы**
- 3 Убегающие электроны
- 4 Остывание пробной частицы
- 5 Иерархия времён
- 6 Задачи

Сила, действующая *на* кулоновский центр со стороны потока частиц с массой  $m$ , плотностью  $n_b$ , налетающих со скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{F} = m\vec{v} n_b v \sigma_t, \quad \sigma_t = 4\pi\Lambda e_a^2 e_b^2 / m^2 v^4.$$

.....  
 Перейдем к рассеянию реальных частиц:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}_b - \vec{v}_a, \\ m &\Rightarrow m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}, \\ \sigma_t &\Rightarrow \sigma_{ab} = \frac{4\pi\Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 |\vec{v}_b - \vec{v}_a|^4}. \end{aligned}$$

Сила, действующую *на* частицу  $a$  в потоке частиц сорта  $b$ :

$$\vec{F}_{ab} = m_{ab} (\vec{v}_b - \vec{v}_a) n_b \sigma_{ab} |\vec{v}_b - \vec{v}_a| = - \frac{4\pi\Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_b}{m_{ab} |\vec{v}_a - \vec{v}_b|^2} \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|}. \quad (2)$$

$$\vec{F}_{ab} = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2n_b}{m_{ab}|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^2} \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|} \quad (2)$$

.....  
 Для вычисления силы  $\vec{F}_{ba}$ , действующей на частицу  $b$  в потоке частиц сорта  $a$ , нужно переставить местами индексы  $a$  и  $b$ :

$$\vec{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2n_a}{m_{ba}|\vec{v}_b - \vec{v}_a|^2} \frac{\vec{v}_b - \vec{v}_a}{|\vec{v}_b - \vec{v}_a|} \quad (3)$$

Эти силы не удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{ab} \neq -\vec{F}_{ba},$$

однако

$$n_a\vec{F}_{ab} + n_b\vec{F}_{ba} = 0$$

(так как  $\Lambda_{ab} = \Lambda_{ba}$ ,  $m_{ba} = m_{ab}$ ).

Учтём тепловой разброс скоростей частиц. Выделим *пробную частицу* с зарядом  $e_b$  и скоростью  $\vec{v}_b = \vec{v}$ . Можно думать, что пробная частица влетает в плазму в составе пучка частиц столь малой плотности, что пучок не влияет на распределение частиц плазмы по скоростям. В таком контексте частицы плазмы называют *полевыми*.

Выберем группу полевых частиц, скорость которых находится в интервале  $d^3v'$  вблизи  $\vec{v}_a = \vec{v}'$ . Число таких частиц равно

$$dn_a = f_a(\vec{v}') d^3v',$$

где  $f_a(\vec{v}')$  обозначает функцию распределения, нормированную так, что

$$n_a = \int f_a(\vec{v}') d^3v'.$$

$$\vec{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2n_a}{m_{ba}|\vec{v}_b - \vec{v}_a|^2} \frac{\vec{v}_b - \vec{v}_a}{|\vec{v}_b - \vec{v}_a|}.$$

.....  
 Выбранная группа частиц действует на пробную частицу с силой

$$d\vec{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}|\vec{v} - \vec{v}'|^2} \frac{\vec{v} - \vec{v}'}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \underbrace{f_a(\vec{v}') d^3v'}_{=dn_a}.$$

Полная сила:

$$\vec{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}} \int \frac{\vec{v} - \vec{v}'}{|\vec{v} - \vec{v}'|^3} f_a(\vec{v}') d^3v'. \quad (4)$$

$$\vec{F}_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}} \int \frac{\vec{v} - \vec{v}'}{|\vec{v} - \vec{v}'|^3} f_a(\vec{v}') d^3v'. \quad (4)$$

.....  
 Если  $f_a(\vec{v}') = f_a(v')$ , для вычисления интеграла используем аналогию с задачей электростатики:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = \frac{\vec{r}}{r^3} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ba} &= -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}} \frac{\vec{v}}{v^3} \int_0^v f_a(v') 4\pi v'^2 dv' \\ &\equiv -\underbrace{\left( \frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}m_b v^3} \int_0^v f_a(v') 4\pi v'^2 dv' \right)}_{=v_{ba}^{(p)} > 0} \underbrace{m_b}_{=\vec{p}_b} \vec{v}. \end{aligned}$$

# Далее...

- 1 Кулоновские столкновения в плазме
- 2 Торможение пробной частицы
- 3 Убегающие электроны**
- 4 Остывание пробной частицы
- 5 Иерархия времён
- 6 Задачи



Сумма сил по всем сортам полевых частиц даёт скорость изменения *направленного* импульса  $\vec{p}_b = m_b \vec{v}$  пробной частицы:

$$\frac{d\vec{p}_b}{dt} = \sum_a \vec{F}_{ba} = - \left( \sum_a v_{ba}^{(p)} \right) \vec{p}_b. \quad (5)$$

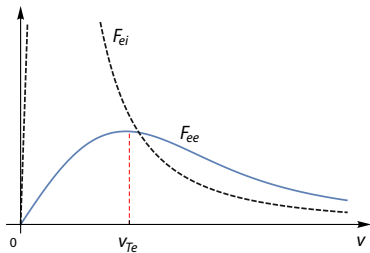


Рис. 2: Сила торможения  $F_{ee}$  пробного электрона на электронах плазмы (сплошная линия) и на ионах плазмы  $F_{ei}$  (штриховая линия) в зависимости от скорости электрона. Суммарная сила торможения  $F_{ee} + F_{ei}$  убывает с ростом скорости  $v$  за исключением интервала скоростей, малых по сравнению с  $v_{Ti}$ .

Сила торможения пробного электрона со стороны ионов плазмы:

$$\vec{F}_{ei}(v) = -\frac{4\pi\Lambda_{ei}e_e^2e_i^2}{m_{ei}} \frac{\vec{v}}{v^3} \int_0^v f_i(v') 4\pi v'^2 dv',$$

$$F_{ei} \propto v \quad \text{при} \quad v \ll v_{Ti},$$

$$F_{ei} \propto v^{-2} \quad \text{при} \quad v \gg v_{Ti}.$$

Если при данной скорости  $v$  на убывающей стороне графика суммы сил трения

$$E > |F_{ei}(v) + F_{ee}(v)|/e, \quad (6)$$

электрон будет неограниченно ускоряться, так как с увеличением  $v$  сила трения только уменьшается. При  $e_i = Ze$ ,  $e_e = -e$ ,  $n_i = n_e/Z$ ,  $\Lambda_{ei} = \Lambda_{ee} = \Lambda$ ,  $m_{ei} = m_e m_i / (m_e + m_i) \approx m_e$ ,  $m_{ee} = m_e/2$  и  $v \gg v_{Te}$  приближённо

$$F_{ei} \approx -\frac{4\pi\Lambda Z^2 e^4 n_i}{m_e v^2} = -\frac{4\pi\Lambda Z e^4 n_e}{m_e v^2}, \quad F_{ee} \approx -\frac{4\pi\Lambda e^4 n_e}{(m_e/2) v^2}.$$

Если

$$E > |F_{ei}(v_{Te}) + F_{ee}(v_{Te})|/e \equiv E_{Dr}, \quad (7)$$

почти половина электронов плазмы «убегает», т.е. переходит в режим неограниченного ускорения. Критическое поле

$$E_{Dr} \sim \frac{2\pi\Lambda(2+Z)e^3n_e}{T_e} = 2\pi\Lambda(2+Z)\frac{e}{\lambda_{De}^2} \quad (8)$$

называют полем *полем Драйсера* (Harry Dreicer, 1959).

Важно понимать, что в плазме имеются надтепловые электроны, скорость которых значительно превышает тепловую скорость,  $v \gg v_{Te}$ . При условии (6) эти электроны «убегают», даже если  $E \ll E_{Dr}$ .

# Далее...

- 1 Кулоновские столкновения в плазме
- 2 Торможение пробной частицы
- 3 Убегающие электроны
- 4 Остывание пробной частицы**
- 5 Иерархия времён
- 6 Задачи

Пробная «частица» — это на самом деле это ансамбль частиц. Торможение пробной частицы означает уменьшение среднего импульса  $\vec{p}_b = \langle m_b \vec{v} \rangle$  в направлении первоначального движения частиц пучка. Остывание пробной частицы означает уменьшение средней энергии частиц пучка  $\varepsilon_b = \langle m_b v^2 / 2 \rangle$ .

При торможении пучка возникает разброс импульсов

$$\delta \vec{p} = \delta \vec{p}_\perp + \delta \vec{p}_\parallel, \quad \langle \delta \vec{p} \rangle = 0$$

около среднего значения  $\langle \vec{p} \rangle = \vec{p}_b$ . Поэтому энергия пробной частицы оказывается больше энергии направленного движения  $p_b^2 / 2m_b$  пробной частицы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \langle (\vec{p}_b + \delta \vec{p})^2 \rangle / 2m_b \\ &= p_b^2 / 2m_b + \underbrace{(\vec{p}_b \cdot \langle \delta \vec{p} \rangle) / m_b}_{=0} + \langle \delta p^2 \rangle / 2m_b \\ &> p_b^2 / 2m_b. \end{aligned}$$

Учтём, что в системе центра масс обмен энергией между сталкивающимися частицами не происходит:

$$\dot{\vec{r}}_a = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{=0 \text{ в с.ц.м.}} - \frac{m_b \dot{\vec{r}}}{m_a + m_b}, \quad \dot{\vec{r}}_b = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{=0 \text{ в с.ц.м.}} + \frac{m_a \dot{\vec{r}}}{m_a + m_b},$$

$$|\dot{\vec{r}}| = |\dot{\vec{r}}_b - \dot{\vec{r}}_a| \rightarrow |\vec{v}_b - \vec{v}_a| \text{ при } t \rightarrow \pm\infty.$$

Система центра инерции движется со скоростью

$$\vec{V} = \frac{m_a \vec{v}_a + m_b \vec{v}_b}{m_a + m_b} = \vec{v}_b - \frac{m_a}{m_a + m_b} \underbrace{(\vec{v}_b - \vec{v}_a)}_{=\vec{u}} = \vec{v}_b - \frac{m_{ab}}{m_b} \vec{u}.$$

Возвращаясь в лабораторную систему, заключаем, что сила  $\vec{F}_{ba}$  в единицу времени совершает работу

$$A_{ba} = \vec{F}_{ba} \cdot \vec{V} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2n_a}{m_{ba}} \frac{\vec{u}}{u^3} \cdot \left( \vec{v}_b - \frac{m_{ba}}{m_b} \vec{u} \right).$$

Делая замены

$$\vec{v}_a \Rightarrow \vec{v}', \quad \vec{v}_b \Rightarrow \vec{v}, \quad \vec{u} \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}', \quad n_a \Rightarrow f_a(\vec{v}') d^3v',$$

получаем

$$A_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}} \left[ \vec{v} \cdot \int \frac{\vec{v} - \vec{v}'}{|\vec{v} - \vec{v}'|^3} f_a(\vec{v}') d^3v' - \frac{m_{ba}}{m_b} \int \frac{f_a(\vec{v}') d^3v'}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \right]. \quad (9)$$

Вычисленная работа идёт на увеличение энергии пробной частицы:

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = \sum_a A_{ba} = - \sum_a \underbrace{\left( -\frac{A_{ba}}{\varepsilon_b} \right)}_{=v_{ba}^{(\varepsilon)}} \varepsilon_b. \quad (10)$$

В отличие от  $v_{ba}^{(p)}$ , частота  $v_{ba}^{(\varepsilon)}$  может быть отрицательной. Замедляясь, пробная частица, может приобретать энергию от плазмы!

Такое было бы невозможно, будь пробная частица обычной частицей. Действительно, если  $\varepsilon = p^2/2m$ , а импульс  $p$  уменьшается, то должна уменьшаться и энергия  $\varepsilon$ . Однако «пробная частица» на самом деле представляет собой ансамбль частиц, например пучок частиц. Когда говорят об импульсе или энергии пробной частицы, то подразумевают средний (направленный) импульс или среднюю энергию частиц пучка.



Равенство  $\varepsilon_b = p_b^2/2m_b = m_b v^2/2$  верно в начальный момент, когда разброс по скоростям в пучке мал. Тогда

$$v_{ba}^{(\varepsilon)} = -\frac{A_{ba}}{\varepsilon_b} =$$

$$= \frac{8\pi\Lambda_{ba}e_b^2e_a^2}{m_{ba}m_bv^2} \left[ \vec{v} \cdot \int \frac{\vec{v} - \vec{v}'}{|\vec{v} - \vec{v}'|^3} f_a(\vec{v}') d^3v' - \frac{m_{ba}}{m_b} \int \frac{f_a(\vec{v}') d^3v'}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \right].$$

Пример: столкновения лёгких электронов с тяжёлыми ионами.

$$m_a \rightarrow \infty, \quad m_{ba} = \frac{m_b m_a}{m_b + m_a} \rightarrow m_b, \quad f_a(\vec{v}') = n_a \delta(\vec{v}'),$$

$$v_{ba}^{(\varepsilon)} = 0, \quad v_{ba}^{(p)} > 0.$$

Пробная частица тормозится, не теряя энергию. В реальной плазме обмен энергией между частицами с существенно различными массами замедлен.

# Далее...

- 1 Кулоновские столкновения в плазме
- 2 Торможение пробной частицы
- 3 Убегающие электроны
- 4 Остывание пробной частицы
- 5 Иерархия времён**
- 6 Задачи

Оценим частоты  $\nu_{ba}^{(p)}$ ,  $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$ , не прибегая к точным формулам.  
Учтём следующие факты:

$$m_{ei} = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \approx m_e, \quad m_{ee} = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}, \quad m_{ii} = \frac{m_i}{2},$$

$$e_i^2 = Z^2 e_e^2, \quad n_i = \frac{1}{Z} n_e, \quad v_{Ti} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{Te},$$

$$\sigma_{ee} \sim \frac{4\pi\Lambda e^4}{\varepsilon^2}, \quad \sigma_{ii} \sim Z^4 \sigma_{ee}, \quad \sigma_{ei} = \sigma_{ie} \sim Z^2 \sigma_{ee}.$$

Кроме того учтём, что при столкновении лёгкой частицы с тяжёлой в среднем передаётся только малая доля энергии порядка  $m_e/m_i$ , а тяжёлая частица передаёт лёгкой только малую долю своего импульса также порядка  $m_e/m_i$ .

Процессы торможения (выравнивание потоковых скоростей):

$$\begin{aligned}
 v_{ee}^{(p)} &\sim n_e \sigma_{ee} v_{Te} && \equiv v_{ee}, \\
 v_{ei}^{(p)} &\sim n_i \sigma_{ei} v_{Te} && \sim \frac{1}{Z} Z^2 v_{ee}, \\
 v_{ii}^{(p)} &\sim n_i \sigma_{ii} v_{Ti} && \sim \frac{1}{Z} Z^4 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{ee}, \\
 v_{ie}^{(p)} &\sim \frac{m_e}{m_i} n_e \sigma_{ie} v_{Te} && \sim \frac{m_e}{m_i} Z^2 v_{ee}.
 \end{aligned}$$

$$v_{ee}^{(p)} : v_{ei}^{(p)} : v_{ii}^{(p)} : v_{ie}^{(p)} = 1 : Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2.$$

Процессы обмена энергией (термализация и выравнивание температур):

$$\begin{aligned}
 v_{ee}^{(\varepsilon)} &\sim n_e \sigma_{ee} v_{Te} && \approx v_{ee}, \\
 v_{ei}^{(\varepsilon)} &\sim \frac{m_e}{m_i} n_i \sigma_{ei} v_{Te} && \sim \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{Z} Z^2 v_{ee}, \\
 v_{ii}^{(\varepsilon)} &\sim n_i \sigma_{ii} v_{Ti} && \sim \frac{1}{Z} Z^4 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{ee}, \\
 v_{ie}^{(\varepsilon)} &\sim \frac{m_e}{m_i} n_e \sigma_{ie} v_{Te} && \sim \frac{m_e}{m_i} Z^2 v_{ee}.
 \end{aligned}$$

$$v_{ee}^{(\varepsilon)} : v_{ei}^{(\varepsilon)} : v_{ii}^{(\varepsilon)} : v_{ie}^{(\varepsilon)} = 1 : \frac{m_e}{m_i} Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2. \quad (11)$$

## Выводы

Принципиальное отличие электрон-электронных столкновений от упругого рассеяния электронов на ионах состоит в том, что электроны пучка теряют энергию, передавая её электронам плазмы так же быстро, как теряют импульс в направлении первоначального движения.

Пропорции между частотами столкновений частиц разных сортов:

$$\nu_{ee}^{(p)} : \nu_{ei}^{(p)} : \nu_{ii}^{(p)} : \nu_{ie}^{(p)} = 1 : Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2.$$

$$\nu_{ee}^{(\varepsilon)} : \nu_{ei}^{(\varepsilon)} : \nu_{ii}^{(\varepsilon)} : \nu_{ie}^{(\varepsilon)} = 1 : \frac{m_e}{m_i} Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2.$$

# Далее...

- 1 Кулоновские столкновения в плазме
- 2 Торможение пробной частицы
- 3 Убегающие электроны
- 4 Остывание пробной частицы
- 5 Иерархия времён
- 6 Задачи**

# Задачи I

- Верно ли для пробной частицы равенство  $d\varepsilon = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ , связывающее приращение импульса и энергии частицы?
- Вычислить силу трения для пробной частицы в плазме с максвелловским распределением по скоростям.
- Вычислить скорость изменения энергии пробной частицы в плазме с максвелловским распределением по скоростям.
- Оценить угловой разброс пучка быстрых электронов, прошедших через тонкий слой плазмы.
- На примере пучка быстрых электронов и пучка быстрых ионов в плазме сравнить частоты столкновений  $\nu_{ee}^{(p)}$ ,  $\nu_{ei}^{(p)}$ ,  $\nu_{ie}^{(p)}$  и  $\nu_{ii}^{(p)}$ .
- На примере пучка быстрых электронов и пучка быстрых ионов в плазме сравнить частоты столкновений  $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$ ,  $\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$ ,  $\nu_{ie}^{(\varepsilon)}$  и  $\nu_{ii}^{(\varepsilon)}$ .



## Задачи II

- Оценить длину свободного пробега электронов с энергией 1 МэВ в плазме с плотностью  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Можно ли нагреть плазму релятивистским пучком в лабораторной установке за счёт кулоновских столкновений?
- Оценить поле Драйзера.

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

1 ноября 2017 г.

## Лекция 09

# Излучение плазмы

- Типы радиационных переходов
- Тормозное излучение
- Рекомбинационное излучение
- Длина пробега излучения
- Циклотронное излучение

# Далее...

- 1 Типы радиационных переходов
- 2 Тормозное излучение
- 3 Рекомбинационное излучение
- 4 Длина пробега излучения
- 5 Циклотронное излучение
- 6 Задачи для семинара

Излучение является одним из основных каналов потерь энергии из плазмы, существенным образом воздействуя на её энергетический баланс. Свойство плазмы излучать электромагнитные волны в различных диапазонах частот используется как в осветительных приборах, так и при спектроскопических измерениях различных объектов.

Спектр излучения слабоионизованной плазмы является *линейчатым*. Полностью ионизованная плазма излучает в *непрерывном спектре*.

Мы рассмотрим два основных типа излучения с непрерывным спектром: тормозное и рекомбинационное. Циклотронное излучение имеет линейчатый спектр при низких частотах и сплошной спектр при высоких частотах.

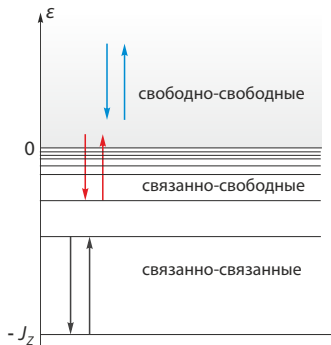


Схема излучательных переходов электрона в поле положительного иона. Свободно-свободные переходы с понижением (повышением) энергии электрона сопровождаются *тормозным* излучением (поглощением). Переход из свободного состояния в связанное вызывает *рекомбинационное* излучение. Переход из связанного состояния в свободное происходит при фотоионизации атома. Переходы между связанными состояниями дают линии излучения и поглощения в *дискретном* спектре.

# Далее...

- 1 Типы радиационных переходов
- 2 Тормозное излучение
- 3 Рекомбинационное излучение
- 4 Длина пробега излучения
- 5 Циклотронное излучение
- 6 Задачи для семинара

*Тормозное излучение* возникает преимущественно при неупругом рассеянии электрона на ионе. Этот процесс описывается *химическим уравнением*

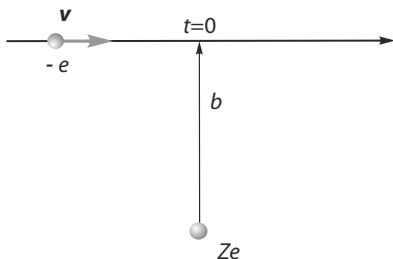


Так как  $m_i \gg m_e$ , излучение иона ничтожно мало. Поскольку  $v_{Te} \gg v_{Ti}$ , ионы можно считать неподвижными.

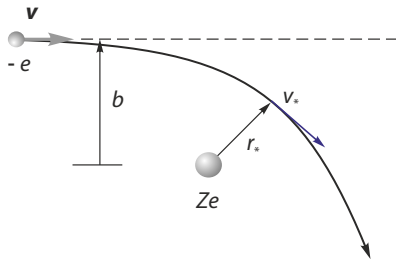
При электрон-электронных столкновениях дипольное излучение отсутствует (Почему?).

Считаем, что  $e_i = Ze$ ,  $e_e = -e$ .





При  $b \gg 2Ze^2/m_e v^2$  (далёкие пролёты) траектория электрона лишь незначительно отклоняется от прямой линии; его скорость приблизительно постоянна по величине и направлению.



При  $b \lesssim 2Ze^2/m_e v^2$  (близкие пролёты) траектория электрона сильно искривляется, однако результат вычисления мощности излучения от учёта искривления траектории изменяется незначительно.

Пусть

$$\frac{1}{2}m_e v^2 \gg \frac{Ze^2}{r} \quad \Rightarrow \quad b \gg Ze^2/m_e v^2.$$

Тогда электрон движется почти по прямой траектории, его ускорение равно

$$a = \frac{Ze^2/m_e}{r^2} = \frac{Ze^2/m_e}{b^2 + v^2 t^2}$$

и в единицу времени он излучает энергию (Joseph Larmor, 1897)

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}.$$

Полная энергия за время пролёта мимо иона

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} I dt = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2 t^2)^2} \frac{v b}{b} \\ &= \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3}$$

.....

Поток электронов  $n_e v$  на одном ионе в единицу времени излучает энергию

$$P_1 = \int_{0?}^{\infty?} \mathcal{E} n_e v 2\pi b db.$$

Мощность излучения из единицы объёма плазмы

$$P = n_i P_1 = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3} \int_{0?}^{\infty?} \frac{db}{b^2}. \quad (1)$$

Интеграл расходится на нижнем пределе. Формально  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$  при  $b \rightarrow 0$ , но  $\mathcal{E} < \frac{1}{2} m_e v^2 + J$ . Ещё более сильная расходимость возникает, если учесть искривление траектории электрона.

Причину возникших трудностей вскрывает квантовая теория.

Классическая картина движения электрона верна, если

$$m_e v b \gg \hbar,$$

то есть

$$b \gg \hbar/m_e v = \lambda_e$$

и орбитальное квантовое число должно быть велико:

$$l = b/\lambda_e \gg 1. \quad (2)$$

Приближение далёких пролётов верно, если

$$b \gg Ze^2/m_e v^2 \Rightarrow l \gg Ze^2/\hbar v. \quad (3)$$

Область применимости *квазиклассического приближения* целиком уместается в области далёких пролётов (3), если

$$Ze^2/\hbar v \ll 1. \quad (4)$$

В квантовой теории рассеяния условие

$$Ze^2/\hbar v \ll 1$$

характеризует *борновское приближение*. Оно эквивалентно требованию

$$\varepsilon \gg J_Z,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_e v^2, \quad J_Z = JZ^2 = \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2} Z^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Действительно,

$$\frac{J_Z}{\varepsilon} = \frac{m_e e^4 Z^2 / 2 \hbar^2}{m_e v^2 / 2} = \frac{Z^2 e^4}{\hbar^2 v^2}.$$

$$P = n_i P_1 = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3} \int_{\lambda_e}^{\infty} \frac{db}{b^2}. \quad (1)$$

.....  
 В таком случае правильный по порядку величины результат можно получить, «обрезав» интегрирование в формуле (1) на  $b_{\min} \sim \lambda_e$ :

$$P_{\text{т.и}} \sim \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 \lambda_e}. \quad (5)$$

Индекс «т.и» в обозначении *удельной мощности излучения*  $P_{\text{т.и}}$  происходит от слов *тормозное излучение*; используется также немецкое слово *Bremsstrahlung*, которое означает вообще любое излучение, сопряжённое с ускорением заряженной частицы.

Удельная мощность — мощность из единицы объёма.

Оценим частоту излучения. Электрон излучает импульс с длительностью  $\tau \sim b/v$ . Следовательно,

$$\omega \sim 1/\tau \sim v/b.$$

Подставляя  $b = l\lambda_e = l\hbar/m_e v$ , получаем

$$\hbar\omega \sim \varepsilon/l. \quad (6)$$

За одно столкновение с ионом электрон излучает

$$w_l = \mathcal{E}/\hbar\omega \quad (7)$$

фотонов. Так как

$$\mathcal{E} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v (\lambda_e l)^3} = \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha^3 Z^2}{l^3} \varepsilon, \quad (8)$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ , находим, что

$$w_l \sim \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha^3 Z^2}{l^2} \ll 1. \quad (9)$$

Эту величину лучше назвать *вероятностью излучения*.

Квантовая картина тормозного излучения существенно отличается от интуитивно ожидаемой: при столкновении с ионом электрон лишь в редких случаях испускает «жёсткий» фотон с «предписанной» энергией  $\hbar\omega \sim \varepsilon/l$ , а не сонм фотонов. Тем не менее ожидания не безосновательны, так как полное число фотонов, испущенных потоком электронов в единицу времени на неэкранированном ядре бесконечно. Введём дифференциальное сечение тормозного излучения:

$$d\sigma = 2\pi w_l b db \sim \frac{4\pi^2}{3} \frac{\alpha^3 Z^2}{l^2} \lambda_e^2 l dl = \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{dl}{l}.$$

Число фотонов, испущенных электронами на  $n_i$  ядрах,

$$N = n_i \int n_e v d\sigma \propto \int_1^\infty \frac{dl}{l},$$

логарифмически расходится при  $l \rightarrow \infty$  ( $b \rightarrow \infty$ ), «инфракрасная катастрофа»). В плазме расходимость устраняется обрезанием области интегрирования при  $b_{\max} = \lambda_D$ .



$$d\sigma \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{dl}{l}, \quad \hbar\omega \sim \frac{\varepsilon}{l}.$$

.....  
 Определим полное сечение тормозного излучения  $\sigma_{Т.И}$ , выразив через него удельную мощность излучения:

$$P_{Т.И} = n_i \int \hbar\omega n_e v d\sigma \sim \varepsilon n_i n_e v \underbrace{\int \frac{d\sigma}{l}}_{=\sigma_{Т.И}} \propto \int_1^\infty \frac{dl}{l^2}.$$

Отсюда получаем

$$\sigma_{Т.И} \simeq \int_1^\infty \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{dl}{l^2} = \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \sim w_1 \pi \lambda_e^2. \quad (10)$$

По порядку величины интегральное сечение тормозного излучения  $\sigma_{Т.И}$  равно произведению вероятности  $w_1$  испускания жёсткого фотона электроном с орбитальным моментом  $l = 1$  на видимую площадь сечения  $\pi \lambda_e^2$  области формирования излучения.

Выполнив в формуле

$$P_{\text{т.и}} \sim \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 \lambda_e}$$

усреднение по функции распределения электронов (что приблизительно соответствует замене  $v \rightarrow v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ ) в  $\lambda_e = \hbar/m_e v$ , можно оценить удельную мощность тормозного излучения из плазмы с заданной температурой электронов:

$$P_{\text{т.и}} \sim \frac{Z^2 e^6 n_e n_i T_e^{1/2}}{m_e^{3/2} c^3 \hbar} \propto Z^2 \sqrt{T_e}. \quad (11)$$

# Далее...

- 1 Типы радиационных переходов
- 2 Тормозное излучение
- 3 Рекомбинационное излучение**
- 4 Длина пробега излучения
- 5 Циклотронное излучение
- 6 Задачи для семинара

*Рекомбинационное излучение* возникает в процессе фотозахвата (фоторекомбинации), в результате которого при столкновении электрона с ионом его зарядовое число понижается на 1 (либо образуется нейтральный атом).

Акт фоторекомбинации с захватом электрона на основной ( $k = 1$ ) уровень атома:

$$A^+ + e \rightarrow A + \gamma, \quad \hbar\omega_1 = \frac{1}{2}m_e v^2 + J_Z.$$

Возможен также фотозахват с образованием возбуждённого атома:

$$A^+ + e \rightarrow A^* + \gamma, \quad \hbar\omega_k = \varepsilon + J_Z/k^2,$$

но затем испускается ещё один фотон (или ещё несколько фотонов) при переходе электрона на основной уровень.

В антиборновском приближении, при  $\varepsilon \ll J_Z$ , сечение фоторекомбинации примерно равно сечению тормозного излучения (10).

Квантовая теория в антиборновском приближении даёт следующее выражение для сечения фоторекомбинации в основное состояние водородоподобного атома:

$$\sigma_{\text{ф.р}} \sim \sigma_{\text{т.и}} \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2. \quad (12)$$

$$P_{\text{т.и}} \sim \frac{Z^2 e^6 n_e n_i T_e^{1/2}}{m_e^{3/2} c^3 \hbar} \propto Z^2 \sqrt{T_e}, \quad J_Z = J Z^2 = \frac{m_e e^4}{2 \hbar^2} Z^2.$$

.....  
 Далее в формуле

$$P_{\text{т.и}} = \varepsilon n_e v n_i \sigma_{\text{т.и}},$$

нужно заменить  $\sigma_{\text{т.и}} \rightarrow \sigma_{\text{ф.р}}$  и  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + J_Z$ :

$$P_{\text{ф.р}} = (\varepsilon + J_Z) n_e v n_i \sigma_{\text{ф.р}}.$$

Так как  $\sigma_{\text{ф.р}} \sim \sigma_{\text{т.и}}$  при  $\varepsilon \sim T_e \ll J_Z$ , оценку  $P_{\text{ф.р}}$  проще всего получить, умножив (11) на  $J_Z/T_e$ :

$$P_{\text{ф.р}} \sim \frac{Z^4 e^{10} n_e n_i}{m_e^{1/2} T_e^{1/2} c^3 \hbar^3} \propto Z^4 / \sqrt{T_e}. \quad (13)$$

Рекомбинационное излучение преобладает над тормозным, т.е.

$$P_{\text{ф.р}} > P_{\text{т.и}},$$

в низкотемпературной плазме, где

$$T_e < J_Z.$$

Вследствие сильной зависимости от  $Z$  рекомбинационное излучение значительно возрастает при загрязнении плазмы тяжёлыми ионами.

# Далее...

- 1 Типы радиационных переходов
- 2 Тормозное излучение
- 3 Рекомбинационное излучение
- 4 Длина пробега излучения**
- 5 Циклотронное излучение
- 6 Задачи для семинара



Прежде чем отождествлять вычисленную мощность излучения из единицы объёма плазмы с потерями энергии, надо проверить, что излучение не поглощается в плазме недалеко от места излучения. Рассмотрим *тормозное поглощение*:

$$A^+ + e + \gamma \rightarrow A^+ + e.$$

В поле э/м волны с амплитудой  $E_\omega$  и частотой  $\omega$  электроны осциллируют со скоростью

$$v_\omega = \frac{eE_\omega}{m_e\omega}.$$

Ей соответствует «осцилляторная» энергия в единице объёма

$$n_e \frac{m_e v_\omega^2}{2} = \frac{n_e e^2 E_\omega^2}{2m_e \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E_\omega^2}{8\pi}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}}. \quad (14)$$

За счёт столкновений с ионами направленное движение электронов изотропизуется, а «осцилляторная» энергия превращается в тепло. Темп диссипации энергии пропорционален  $2\nu_{ei}$  ( $\nu_{ei}^{(p)}$  или  $\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$ ?). Поток энергии в волне равен  $c E_{\omega}^2/8\pi$  и убывает за счёт диссипации. Выбирая ось  $x$  в направлении распространения волны, получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} c \frac{E_{\omega}^2}{8\pi} = -2\nu_{ei} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E_{\omega}^2}{8\pi}.$$

Его решением является экспоненциально убывающая функция

$$\frac{E_{\omega}^2}{8\pi} = \frac{E_{\omega 0}^2}{8\pi} e^{-2x/\ell},$$

где

$$\ell = \frac{c}{\nu_{ei}} \frac{\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Оценивая длину пробега излучения

$$\ell = \frac{c}{v_{ei}} \frac{\omega^2}{\omega_p^2},$$

нужно учесть, что  $\omega \sim T_e/\hbar$  и

$$v_{ei} = n_i \sigma_t v, \quad \sigma_t = 4\pi \underbrace{\Lambda}_{\Rightarrow 1} Z^2 e^4 / m_e^2 v^4 \Rightarrow 4\pi Z^2 e^4 / m_e^2 v^4,$$

так как обычная формула для  $\sigma_t$  (с  $\Lambda \gg 1$ ) относится к случаю далёких пролётов, а электрон излучает при близких пролётах.

$$\ell \sim \frac{cm_e^{3/2} T_e^{7/2}}{n_e n_i Z^2 e^6 \hbar^2}. \quad (15)$$

Лабораторная плазма обычно прозрачна для тормозного излучения. Непрозрачны ядра звёзд.

Пусть  $L$  — характерный линейный размер излучающего тела. Обозначим через  $S$  мощность излучения, отнесённую к единице поверхности и установим зависимость  $S$  от  $L$ . При  $L \ll \ell$  мощность  $S$  пропорциональна размеру тела  $L$ :

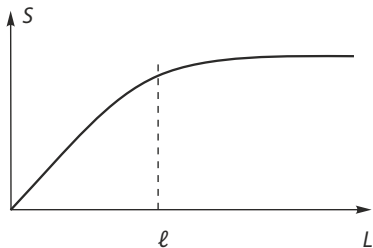
$$S \sim \frac{PL^3}{L^2} \sim PL.$$

При  $L \gg \ell$  излучение выходит только из поверхностного слоя толщины порядка  $\ell$ :

$$S \sim \frac{PL^2\ell}{L^2} \sim P\ell.$$

Подставив сюда мощность тормозного излучения, получим закон Стефана-Больцмана (Jožef Stefan, 1879; Ludwig Boltzmann, 1884):

$$S \sim \frac{T^4}{c^2 \hbar^3}.$$



Мощность излучения с единицы поверхности излучающего тела при заданной температуре и плотности плазмы увеличивается пропорционально линейным размерам тела  $L$ , пока они меньше длины пробега излучения  $\ell$ . При  $L > \ell$  мощность излучения с единицы поверхности определяется законом Стефана-Больцмана.

# Далее...

- 1 Типы радиационных переходов
- 2 Тормозное излучение
- 3 Рекомбинационное излучение
- 4 Длина пробега излучения
- 5 Циклотронное излучение**
- 6 Задачи для семинара

*Циклотронное излучение* (магнитотормозное, синхротронное) возникает, если в плазме имеется магнитное поле. Согласно постулатам квантовой механики, часть кинетической энергии электрона, отвечающая движению в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, может принимать только дискретные значения (*уровни Ландау*)

$$\frac{1}{2} m_e v_{\perp}^2 = \left( s + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{ce}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_{ce} = |\Omega_e| = \frac{eB}{m_e c}.$$

Переходы электронов между уровнями Ландау приводят к излучению или поглощению электромагнитных волн на частотах, кратных  $\omega_{ce}$ . Излучение на первой гармонике, т. е. на частоте  $\omega = \omega_{ce}$ , описывается в рамках дипольного приближения, а излучение на более высоких гармониках,  $\omega = 2\omega_{ce}$ ,  $\omega = 3\omega_{ce}$  и т. д., имеет релятивистское происхождение и возникает в следующих порядках мультипольного разложения.

Интенсивность излучения в дипольном приближении на первой гармонике:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 = \frac{2e^2}{3c^3} (\omega_{ce} v_{\perp})^2.$$

В соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt} \frac{m_e v_{\perp}^2}{2} = -I = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{2\omega_{ce}^2}{m_e} \frac{m_e v_{\perp}^2}{2} = -\underbrace{\frac{4e^4 B^2}{3m_e^3 c^5}}_{\equiv 1/\tau_c} \frac{m_e v_{\perp}^2}{2},$$

энергия электрона уменьшается в  $e = 2,71 \dots$  раз (не путать с зарядом  $e$ ) за время

$$\tau_c = \frac{3m_e^3 c^5}{4e^4 B^2}.$$

При  $B = 50$  кГс «время высвечивания» составляет  $0,1$  сек.



Удельная мощность циклотронного излучения:

$$P_{\text{ц.и}} = n_e \langle I \rangle = n_e \frac{2e^2}{3c^3} \omega_{ce}^2 \underbrace{\langle v_{\perp}^2 \rangle}_{=2T_e/m_e} = \frac{4}{3} \frac{e^4 B^2 T_e n_e}{m_e^3 c^5}. \quad (16)$$

Она может быть больше мощности, выделяемой в термоядерных реакциях. Однако в плотной плазме низшие гармоники сильно поглощаются и не выходят наружу. В результате излучаются преимущественно высшие гармоники, а их интенсивность при  $T_e \ll m_e c^2$  на порядки меньше, чем по нашей оценке. Кроме того, циклотронное излучение относительно длинноволновое. При  $B = 50$  кГс длина волны составляет  $\lambda = 2\pi c / \omega_{ce} = 2$  мм. Такое излучение (в отличие от тормозного) хорошо отражается металлическими стенками и может быть возвращено в плазму.

# Далее...

- 1 Типы радиационных переходов
- 2 Тормозное излучение
- 3 Рекомбинационное излучение
- 4 Длина пробега излучения
- 5 Циклотронное излучение
- 6 Задачи для семинара**

## Задачи для семинара

- Оценить мощность тормозного и рекомбинационного излучения в случае  $\frac{1}{2}m_e v^2 \ll J_Z$ , когда в процессе излучения доминируют близкие столкновения с заметным искривлением траектории электрона (антиборновское приближение).
- Определить зависимость сечения тормозного излучения от частоты.
- Найти спектр тормозного излучения в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям.
- Оценка времени высвечивания энергии для ГДЛ, ТЯ реактора, газового разряда + оценка времени выхода излучения из центра Солнца (меньше на 1,5 порядка по сравнению с википедией).

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

8 ноября 2017 г.

## Лекция 10

# Элементарные процессы в плазме

- Ионизация электронным ударом
- Тройная рекомбинация
- Ступенчатые процессы
- Резонансная перезарядка (семинар)

Как показано в лекции 3, степень ионизации термодинамически равновесной плазмы однозначно определяется её температурой  $T$  и плотностью  $n$  в соответствии с уравнением Саха:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{\lambda_{Te}^3} \equiv K(T), \quad (1)$$

где

$$J = \frac{e^2}{2a_B} = \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2}, \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (2)$$

$$\lambda_{Te} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_e T}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_e e^2 / 2a_B} \left(\frac{J}{T}\right)^{1/2}} = \left(\frac{4\pi J}{T}\right)^{1/2} a_B. \quad (3)$$

$$K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{a_B^3} \left(\frac{T}{4\pi J}\right)^{3/2}. \quad (4)$$

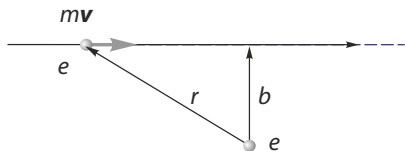
В неравновесной плазме необходимо анализировать *элементарные процессы*. К их числу относятся: *ионизация*, т. е. выбивание связанного электрона из нейтрального или частично ионизованного атома, *рекомбинация* — захват ионом свободного электрона, *перезарядка* — передача связанного электрона от атома к иону, *возбуждение* — переход связанного электрона в связанное состояние с большей энергией, *тушение (деактивация)* — переход связанного электрона в связанное состояние с меньшей энергией, *диссоциация* — распад молекулы на более простые молекулы, атомы или ионы, *ассоциация* — объединение атомов или ионов в молекулы или простых молекул в более сложные, и т.д.

Мы рассмотрим некоторые из таких процессов.

# Далее...

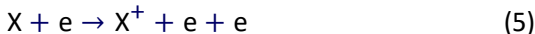
- 1 Ионизация электронным ударом
- 2 Тройная рекомбинация
- 3 Ступенчатая ионизация
- 4 Резонансная перезарядка
- 5 Задачи для семинара





Приближение далёких пролётов при вычислении сечения ионизации. Предполагается, что скорость атомарного электрона пренебрежимо мала по сравнению со скоростью налетающего электрона, который движется по прямой с постоянной скоростью.

Рассмотрим *ионизацию электронным ударом* (impact ionisation)



на примере атома водорода. Простейшая модель этого процесса предложена Дж. Томсоном (Joseph Thomson, 1912).

Пусть верно приближение далёких пролётов, т.е.

$$\varepsilon \gg J, \quad \varepsilon = \frac{m_e v^2}{2}, \quad J = \frac{e^2}{2a_B} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}.$$

Вычислим переданную энергию:

$$\mathcal{E} = \frac{p_{\perp}^2}{2m_e}, \quad p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2 b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2e^2}{vb}.$$

Отсюда

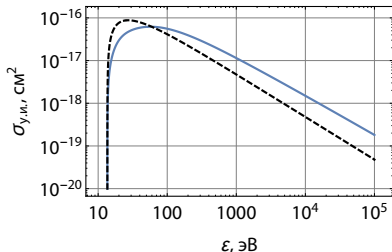
$$b^2 = \frac{e^4}{\varepsilon \mathcal{E}}, \quad \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} = \left| \pi \frac{db^2}{d\mathcal{E}} \right| = \frac{\pi e^4}{\varepsilon \mathcal{E}^2}. \quad (6)$$

Ионизация происходит, если  $\mathcal{E} > J$ . С другой стороны,  $\mathcal{E} < \varepsilon$ , поэтому

$$\sigma_{y.i} = \int_J^{\varepsilon} \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{J} - \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

Формула Дж. Томсона (Joseph Thomson, 1912):

$$\sigma_{y.и} = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{J} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = 4\pi a_B^2 \frac{(\varepsilon - J)J}{\varepsilon^2}, \quad a_B = \frac{e^2}{2J}. \quad (7)$$



Сечение ионизации атома водорода электронным ударом из основного состояния. Сплошная линия — экспериментальное сечение, штриховая — вычисленное по формуле Томсона.

Формула Томсона качественно верно отражает зависимость сечения ударной ионизации от энергии налетающего электрона. Она предсказывает, что максимальное сечение

$$\sigma_{\max} = \pi a_B^2 \approx 0,9 \times 10^{-16} \text{ см}^2$$

достигается при  $\varepsilon = 2J$ . Даже вблизи порога ионизации  $\varepsilon = J$ , где приближение далёких приближений нарушается, она правильно предсказывает, что сечение

$$\sigma_{\gamma,и} \approx 4\pi a_B^2 (\varepsilon - J) / J$$

пропорционально разности  $\varepsilon - J$ , но завышает его примерно в 4 раза.

Для количественных расчётов используют аппроксимирующие формулы, которые можно найти в базе данных Международного Агентства по Атомной Энергии (МАГАТЭ).

Сколько электронов появляется в единице объёма в единицу времени?

Один электрон со скоростью  $v$  в единицу времени производит  $n_a \sigma_{y,i} v$  пар ионов и электронов, если плотность атомов равна  $n_a$ . Величина  $n_a \langle \sigma_{y,i} v \rangle$ , усреднённая по распределению свободных электронов, имеет смысл *частоты ионизации*. Следовательно, темп нарастания плотности электронов описывается уравнением

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y,i} = \langle \sigma_{y,i} v \rangle n_a n_e = k_{y,i} n_a n_e, \quad (8)$$

где

$$k_{y,i} = \langle \sigma_{y,i} v \rangle,$$

называют *константой скорости* ударной ионизации; на самом деле константа зависит от температуры.

Вычисление по формуле Томсона даёт

$$k_{y,и}^{пр} = 8\sqrt{\pi} \alpha c a_B^2 \exp(-J/T_e) \begin{cases} (T_e/J)^{+1/2}, & \text{если } T_e \ll J; \\ (T_e/J)^{-1/2}, & \text{если } T_e \gg J. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ , а индекс «пр» напоминает, что предполагалась «прямая» ионизация из основного состояния за одно столкновения атома с электроном.

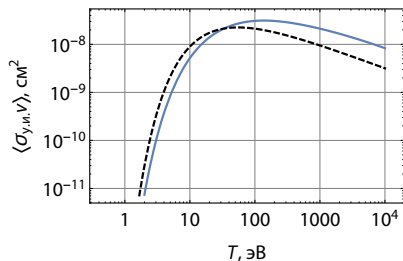


Рис. 1: Константа скорости ионизации атома водорода электронным ударом из основного состояния. Сплошная линия — экспериментальные данные, штриховая — расчёт по формуле Томсона.

Наряду с рассмотренным процессом «прямой» ионизации возможен и другой сценарий выбивания электрона из атома, при котором атом сначала переходит в возбуждённое состояние. При следующих столкновениях он ещё более возбуждается, а уж затем ионизируется. В этом сценарии атом проходит целую серию возбуждённых состояний, а соответствующий процесс называется *ступенчатой ионизацией* (stepwise ionization). В отличие от неё, ионизация в одну стадию называется *прямой* (direct ionization).

Константы прямой  $k_{y,i}^{пр}$  и ступенчатой  $k_{y,i}^{ст}$  ударной ионизации мы сравним позднее. Константа  $k_{y,i}$  в уравнении баланса должна учитывать как прямую, так и ступенчатую ионизацию.

# Далее...

- 1 Ионизация электронным ударом
- 2 Тройная рекомбинация
- 3 Ступенчатая ионизация
- 4 Резонансная перезарядка
- 5 Задачи для семинара



Пока электронов мало, уравнение

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y.u} = \underbrace{k_{y.u} n_a}_{1/\tau} n_e,$$

описывает нарастание их плотности по закону

$$n_e \propto \exp(t/\tau).$$

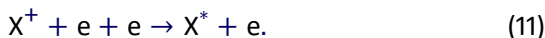
По мере увеличения плотности электронов в игру вступает обратный процесс *рекомбинации* (recombination), который ведёт к уменьшению числа электронов.

Рассмотрим *тройную рекомбинацию* (triple recombination, three-body recombination)



которая противоположна ионизации электронным ударом.

В процессе тройной рекомбинации при низких температурах,  $T_e \ll J$ , как правило, сначала образуется атом в возбуждённом состоянии:



Затем после нескольких столкновений с другими электронами атом переходит в основное состояние, т. е. весь процесс является ступенчатым, протекая в несколько стадий, причём

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y.p} = -k_{y.p} n_i n_e^2. \quad (12)$$

При  $T_e \ll J$  коэффициент рекомбинации  $k_{y.p}$  определяется самой первой стадией, когда свободный электрон впервые захватывается на возбуждённый атомарный уровень:

$$k_{y.p} \sim k_{y.p}^{CT} \sim k_{y.p}^*$$

Оценим константу ступенчатой тройной рекомбинации, предполагая, что  $k_{y.p}^{CT} \sim k_{y.p}^*$ . В соответствии с формулой

$$b^2 = \frac{e^4}{\varepsilon \mathcal{E}},$$

столкновение электронов, сопровождающееся передачей всей кинетической энергии  $\mathcal{E} \sim \varepsilon$ , происходит в том случае, когда  $b \sim e^2/\varepsilon$ . Так как  $\varepsilon \sim T_e$ , сечение такого процесса

$$\sigma_{ee} \sim \pi b^2 \sim \pi (e^2/T_e)^2.$$

Число таких столкновений электронов в единице объёма за единицу времени

$$\langle \sigma_{ee} v \rangle n_e^2 \sim \pi (e^2/T_e)^2 v_{Te} n_e^2, \quad v_{Te} \sim \sqrt{T_e/m_e}.$$

Рекомбинация происходит в том случае, когда на расстоянии  $b \lesssim e^2/T_e$ , находится ион. Число таких столкновений в

$$n_i b^3 \sim n_i (e^2/T_e)^3$$

раз меньше полного числа столкновений электронов с указанной передачей энергии:

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y.p} = -k_{y.p} n_e^2 n_i \sim -\langle \sigma_{ee} v \rangle n_e^2 n_i b^3,$$

$$k_{y.p}^{CT} \sim \langle \sigma_{ee} v \rangle b^3 \sim \pi (e^2/T_e)^5 \sqrt{T_e/m_e}.$$

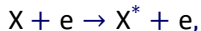
$$k_{y.p}^{CT} = A_{y.p}^{CT} \alpha c a_B^5 (T_e/J)^{-9/2}, \quad (13)$$

$$e^2 = 2J a_B, \quad m_e = 2J/(\alpha c)^2, \quad A_{y.p}^{CT} = 2^{9/2} \pi \approx 71.$$

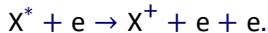
# Далее...

- 1 Ионизация электронным ударом
- 2 Тройная рекомбинация
- 3 Ступенчатая ионизация**
- 4 Резонансная перезарядка
- 5 Задачи для семинара

В низкотемпературной плазме (прямая) ударная ионизация атома из основного состояния за одно столкновение может происходить только за счёт надтепловых электронов с энергией  $\varepsilon \simeq J \gg T_e$ . Имеется альтернативный процесс *ступенчатой ионизации*, когда атом проходит целую серию возбуждённых состояний под воздействием соударений с электронами



а затем и ионизуется из возбуждённого состояния:



Вероятность ионизации из возбуждённого состояния заметно больше, чем из основного состояния. Соответствующее сечение получается из формулы Томсона при замене  $J \rightarrow J_k = J/k^2$ :

$$\sigma_{y.и}^* = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{J_k} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = 4\pi a_B^2 \frac{J_k}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{J_k}{\varepsilon} \right] \times k^4. \quad (14)$$

Для вычисления константы ступенчатой ионизации, исходя из динамики столкновений, следовало бы проанализировать всю цепочку превращений атома в ион из основного состояния через промежуточные возбуждённые состояния. Существующая теория не позволяет сделать это. Однако константу ступенчатой ионизации  $k_{y,i}^{CT}$  всё-таки можно найти, если считать, что плотность электронов в системе достаточно велика, так что все переходы между возбуждёнными состояниями осуществляются только в результате столкновений с электронами, а не за счёт излучения или поглощения фотонов. В этом случае процесс ступенчатой ионизации оказывается детально противоположным по отношению к процессу тройной рекомбинации. Иными словами, в ходе этих двух процессов атомы претерпевают одинаковую цепочку превращений, но в противоположных направлениях.



Воспользуемся *принципом детального равновесия*. Пусть электроны находятся в термодинамическом равновесии с атомами, причём образование заряженных частиц происходит за счёт ступенчатой ионизации, а их уничтожение — в результате ступенчатой тройной рекомбинации, так что уравнение баланса для плотности электронов имеет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{y.и}^{ст} n_e n_a - k_{y.p}^{ст} n_e^2 n_i.$$

В состоянии равновесия  $\partial n_e / \partial t = 0$ , т. е.

$$n_e n_i / n_a = k_{y.и}^{ст} / k_{y.p}^{ст}.$$

С другой стороны, в соответствии с уравнением Саха

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{a_B^3} \left( \frac{T}{4\pi J} \right)^{3/2}.$$

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{k_{y,i}^{CT}}{k_{y,p}^{CT}}, \quad \frac{n_e n_i}{n_a} = K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-J/T}}{a_B^3} \left( \frac{T}{4\pi J} \right)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$k_{y,i}^{CT} = k_{y,p}^{CT} K(T_e).$$

Подставляя сюда формулу

$$k_{y,p}^{CT} = A_{y,p}^{CT} \alpha c a_B^5 (T_e/J)^{-9/2}, \quad (13)$$

получаем

$$k_{y,i}^{CT} = A_{y,i}^{CT} \alpha c a_B^2 (T_e/J)^{-3} \exp(-J/T_e), \quad (15)$$

где  $A_{y,i}^{CT} \sim (g_e g_i / g_a) A_{y,p}^{CT} / (4\pi)^{3/2}$ .

При  $T_e \ll J$

$$k_{y,i}^{\text{ст}} \sim \alpha c a_B^2 (T_e/J)^{-3} \exp(-J/T_e),$$
$$k_{y,i}^{\text{пр}} \sim \alpha c a_B^2 (T_e/J)^{+1/2} \exp(-J/T_e).$$

.....

$$\frac{k_{y,i}^{\text{ст}}}{k_{y,i}^{\text{пр}}} \sim \left(\frac{T_e}{J}\right)^{-7/2} \gg 1.$$

В низкотемпературной плазме ступенчатая ударная ионизация доминирует над прямой ударной ионизацией.

# Далее...

- 1 Ионизация электронным ударом
- 2 Тройная рекомбинация
- 3 Ступенчатая ионизация
- 4 Резонансная перезарядка
- 5 Задачи для семинара

В процессе *перезарядки* атом в столкновении с ионом передаёт ему свой электрон:



При этом число заряженных частиц не меняется, т. е.

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{\text{сх}} = 0. \quad (17)$$

В резонансной перезарядке участвуют атомы и ионы одного сорта:



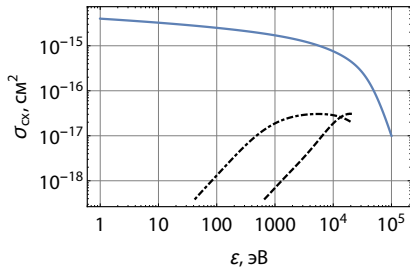
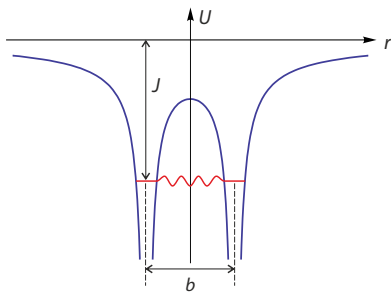


Рис. 2: Сечение резонансной перезарядки атома водорода на ионе водорода в зависимости от энергии налетающего атома (сплошная кривая). Сечение нерезонансной перезарядки из основного состояния  $1s$  в состояние  $2p$  (штрих-пунктирная кривая) и  $2s$  (штриховая линия) на несколько порядков меньше.

Оценим сечение резонансной перезарядки  $\sigma_{cx}$  на примере атома водорода при  $v \ll v_1 = \alpha c$ . Предположим, что атом и ион движутся классически и прямолинейно.



**Рис. 3:** Потенциальная энергия электрона в поле двух протонов. Связанный электрон, находящийся на атомарной уровне с энергией ионизации  $J$ , может перейти на такой же уровень соседнего иона под потенциальным барьером. При равенстве энергии двух уровней процесс носит резонансный характер.

Вследствие подбарьерного прохождения вероятность обнаружить атомарный электрон на расстоянии  $r \sim b$  от атома мала, но не равна нулю, даже если  $r \gg a_B$ . Вероятность подбарьерного просачивания на расстояние  $b$  оценивается как

$$w \sim \left| \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_e(\varepsilon - U)} dx \right) \right|^2 \\ \sim \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2Jm_e} b \right) = \exp \left( -\frac{2b}{a_B} \right).$$



$$w \sim \exp(-2b/a_B).$$

.....  
За время пролёта

$$\Delta t \sim b/v$$

связанный электрон, обращаясь вокруг ядра атома с периодом

$$\tau \sim a_B/v_1 \ll \Delta t,$$

успеет  $\Delta t/\tau$  раз оказаться на стороне иона и каждый раз с вероятностью  $w$  захватиться на его орбиту. Таким образом, вероятность перезарядки по порядку величины равна

$$w\Delta t/\tau \sim (bv_1/a_B v) \exp(-2b/a_B). \quad (19)$$

$$w\Delta t/\tau \sim (bv_1/a_B v) \exp(-2b/a_B).$$

.....  
Если формально  $w\Delta t/\tau > 1$ , электрон много раз за время сближения иона с атомом успеет поменять «прописку» и в итоге с вероятностью  $\frac{1}{2}$  остаться на орбите другого ядра. Полагая

$$w\Delta t/\tau = \frac{1}{2},$$

находим максимальное расстояние  $b_{сх}$ , на котором процесс обмена электроном между ядрами не задавлен потенциальным барьером:

$$\begin{aligned} \exp(2b/a_B) &\sim 2(bv_1/a_B v), \\ (2b/a_B) &\sim \ln(v_1/v) + \ln(2b/a_B) \approx \ln(v_1/v). \end{aligned}$$

$$(2b/a_B) \sim \ln(v_1/v).$$

.....  
Следовательно,

$$b_{CX} \sim a_B \ln(v_1/v),$$

$$\sigma_{CX} \sim \pi b_{CX}^2 \sim \pi a_B^2 \ln^2(v_1/v). \quad (20)$$

Более аккуратный анализ предсказывает, что в аргументе логарифма имеется дополнительный большой множитель порядка 100:

$$b_{CX} \sim a_B \ln(v_1/v),$$

$$\sigma_{CX} \sim \pi b_{CX}^2 \sim \pi a_B^2 \ln^2(100v_1/v). \quad (21)$$

# Далее...

- 1 Ионизация электронным ударом
- 2 Тройная рекомбинация
- 3 Ступенчатая ионизация
- 4 Резонансная перезарядка
- 5 Задачи для семинара**

## Задачи для семинара

- Вычислить  $k_{y.i}^{np} = \langle \sigma_{y.i} v \rangle$  при  $T_e \ll J$ , усреднив сечение ионизации (7) по максвелловской функции распределения электронов.  
То же для  $T_e \gg J$ .
- Вычислить константу скорости прямой тройной рекомбинации  $k_{y.p}^{np}$  непосредственно в основное состояние, минуя захват электрона на возбуждённые уровни.

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

15 ноября 2017 г.

## Лекция 11

# Радиационные процессы в плазме

- Фоторекомбинация и фотоионизация
- Корональное равновесие
- Отрицательные ионы
- Процессы образования отрицательных ионов

Продолжая изучение элементарных процессов в плазме, в начале очередной лекции рассмотрим процессы ионизации и рекомбинации с участием фотонов. На этом элементарные процессы, для которых существуют простые теоретические модели, заканчиваются. Современная физика газового разряда и низкотемпературной плазмы является по преимуществу экспериментальной наукой. Из множества явлений, которые она изучает, в заключение лекции обсудим образование и разрушение отрицательных ионов, которые играют ключевую роль в формировании оптической части спектра излучения Солнца.



# Далее...

- 1 Фоторекомбинация
- 2 Фотоионизация
- 3 Корональное равновесие
- 4 Отрицательные ионы
- 5 Процессы образования отрицательных ионов
- 6 Задачи для семинара

В процессе *фоторекомбинации* энергию, высвободившуюся при переходе свободного электрона в связанное состояние, уносит фотон:



Также используются термины фотозахват и радиационная рекомбинация (radiative recombination).

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{\text{ф.р}} = -k_{\text{ф.р}} n_i n_e. \quad (1)$$

Константа фоторекомбинации

$$k_{\text{ф.р}} = \langle \sigma_{\text{ф.р}} v \rangle,$$
$$\sigma_{\text{ф.р}} \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2,$$
$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}, \quad \lambda_e = \frac{\hbar}{m_e v}.$$

Константа фоторекомбинации на основной уровень (при  $T_e \ll J_Z = Z^2 J$ )

$$k_{\phi.p} = \langle \sigma_{\phi.p} v \rangle, \quad \sigma_{\phi.p} \sim \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \lambda_e = \frac{\hbar}{m_e v}.$$

---


$$v = \sqrt{\frac{2}{m_e} \varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{m_e} \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{J}} = \alpha c \sqrt{\frac{\varepsilon}{J}},$$

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e v} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \sqrt{\frac{m_e e^4 / 2 \hbar^2}{m_e v^2 / 2}} = a_B \sqrt{\frac{J}{\varepsilon}},$$

$$\varepsilon \sim T_e.$$

$$k_{\phi.p}^{(1)} = A_{\phi.p} \alpha^4 Z^2 c a_B^2 (J/T_e)^{1/2}, \quad A_{\phi.p} = \frac{4\pi^2}{3} \approx 13,1. \quad (2)$$

Константа фоторекомбинации (при  $T_e \ll J_Z$ )

$$k_{\text{ф.р}}^{(1)} = A_{\text{ф.р}} \alpha^4 3Z^2 \alpha c a_B^2 (J/T_e)^{1/2}, \quad A_{\text{ф.р}} = \frac{4\pi^2}{3} \approx 13,1. \quad (2)$$

.....  
Точный расчёт для фотозахвата на основной уровень даёт

$$A_{\text{ф.р}} = 2^9 \pi^{3/2} / 3 (2,71 \dots)^4 \approx 17,4.$$

На самом деле основной вклад даёт фотозахват на возбуждённые уровни  $k \sim \sqrt{J_Z/T_e}$ . Их учёт увеличивает константу фоторекомбинации примерно в  $\ln(J_Z/T_e)$  раз:

$$k_{\text{ф.р}} = \frac{32\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{J_Z}{T_e}} \ln\left(\frac{J_Z}{T_e}\right) \alpha^4 Z c a_B^2. \quad (3)$$

Константа фоторекомбинации для случая  $T_e \gtrsim J_Z$  в литературе по физике плазмы вычислена неправильно. Имеющиеся вычисления используют квазиклассические формулы Крамерса (полученные до открытия квантовой механики). Однако они не пригодны в случае  $\varepsilon \gtrsim J_Z$ .

# Далее...

- 1 Фоторекомбинация
- 2 Фотоионизация
- 3 Корональное равновесие
- 4 Отрицательные ионы
- 5 Процессы образования отрицательных ионов
- 6 Задачи для семинара

Процессом, обратным фоторекомбинации, является *фотоионизация (фотоэффект)*:



Скорость процесса пропорциональна плотности атомов и фотонов, но последнюю величину включают в константу процесса:

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{\text{ф.и}} = k_{\text{ф.и}} n_a. \quad (5)$$

Поэтому для  $k_{\text{ф.и}}$  нет универсальных формул.

Если излучение заперто в плазме и находится в термодинамическом равновесии с ней, число квантов в единице объёма есть функция температуры  $T$ . При этом можно установить связь между  $k_{\text{ф.и}}$  и  $k_{\text{ф.р}}$ , пользуясь принципом детального равновесия:

$$k_{\text{ф.и}} = k_{\text{ф.р}} K(T_e).$$

# Далее...

- 1 Фоторекомбинация
- 2 Фотоионизация
- 3 Корональное равновесие**
- 4 Отрицательные ионы
- 5 Процессы образования отрицательных ионов
- 6 Задачи для семинара



Уравнение баланса с учётом всех рассмотренных процессов:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{y.и} n_a n_e - \underbrace{k_{y.p} n_i n_e^2 + k_{ф.и} n_a - k_{ф.p} n_i n_e}_{\text{малы в редкой плазме}}. \quad (6)$$

В равновесии

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{y.и} n_a n_e - k_{ф.p} n_i n_e = 0. \quad (7)$$

Отсюда получаем формулу *формулой Эльверта* (G. Elwert, 1952)

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_{y.и}}{k_{ф.p}}. \quad (8)$$

Это так называемое *корональное равновесие*. Оно осуществляется в солнечной короне. Степень ионизации в корональном равновесии не зависит от плотности плазмы.

Солнечная корона состоит из разреженной плазмы:

$$n_e \sim 10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-3}, \quad T \sim 100 \div 200 \text{ эВ} \gg J.$$

Главные процессы — прямая ионизация из основного состояния

$$k_{y.i}^{\text{пр}} = 8\sqrt{\pi} \alpha c a_B^2 (J/T_e)^{1/2} \underbrace{\exp(-J/T_e)}_{\approx 1}$$

и прямая фоторекомбинация в основное состояние

$$k_{\text{ф.р}}^{\text{пр}} \simeq 110 \alpha^4 c a_B^2 (J/T_e)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_{y.i}^{\text{пр}}}{k_{\text{ф.р}}^{\text{пр}}} \sim \frac{0,1 T_e}{\alpha^3 J} \gg 1 \quad (9)$$

и почти все атомы (водорода) ионизованы.

# Далее...

- 1 Фоторекомбинация
- 2 Фотоионизация
- 3 Корональное равновесие
- 4 Отрицательные ионы**
- 5 Процессы образования отрицательных ионов
- 6 Задачи для семинара

Атомы и молекулы некоторых газов могут захватывать электроны при столкновениях с ними, образуя отрицательные ионы — анионы (anions). Такие газы называют *электроотрицательными*. С точки зрения квантовой теории, отрицательный ион — это слабосвязанное состояние, чаще всего одно. Энергия такого состояния  $\varepsilon_-$  отрицательна, как и у других связанных состояний электрона в атоме. Энергию связанного состояния, взятую со знаком минус,

$$EA = -\varepsilon_-,$$

вообще говоря, называют энергией связи, но в применении к лишнему электрону в отрицательном ионе её чаще называют *энергией сродства к электрону* или, ещё проще, *сродством к электрону*. Энергия сродства атомарных ионов в основном состоянии варьируется в интервале от долей эВ до 3,6 эВ.

Не все атомы и молекулы могут образовывать отрицательные ионы. Например, если к атому гелия (He) или азота (N) добавить лишний электрон, возникнет *автоионизационное состояние* с положительной энергией  $\varepsilon_{**} > 0$ . Автоионизационное состояние находится внутри сплошного спектра свободных электронов и имеет конечное время жизни.

Таблица 1: Энергия связи  $EA$  электрона в отрицательном ионе, эВ.

$\text{H}^-$	0,75	$\text{He}^-$	-0,30	$\text{N}^-$	-0,27	$\text{O}^-$	1,47
$\text{F}^-$	3,45	$\text{Cl}^-$	3,61	$\text{Cr}^-$	0,98	$\text{Br}^-$	3,36
$\text{I}^-$	3,06	$\text{CO}_2^-$	3,8	$\text{O}_2^-$	0,45	$\text{Br}_2^-$	2,60
$\text{SO}_2^-$	1.07	$\text{SF}_6^-$	1.03	$\text{UF}_6^-$	5.06	$\text{PtF}_6^-$	7.00

Наибольшим сродством к электрону обладают атомы кислорода (O) и галогенов (фтор F, хлор Cl, бром Br, иод I), а также молекулы, содержащие эти атомы. Наибольшим известным в настоящее время значением сродства к электрону обладает гексафторид платины  $\text{PtF}_6$  ( $EA = 7,00 \pm 0,35$  эВ).

Плазма, состоящая из положительных и отрицательных ионов, характеризуется малой электрической проводимостью по сравнению с плазмой, состоящей из положительных ионов и электронов. Это связано с низкой подвижностью отрицательных ионов по сравнению с электронами. Тем самым превращение электронов в отрицательные ионы в плазме существенно изменяет её свойства.

Этот факт используется в системах защиты высоковольтных электрических систем. Электрический пробой в таких системах начинается с образования свободных электронов, размножение которых в электрическом поле приводит к пробую. Чтобы избежать этого, в газ добавляют небольшую примесь электроотрицательных молекул, которые поглощают электроны, превращаясь в отрицательные ионы.

Отрицательные ионы принимают участие в различных процессах, протекающих в ионизованных газах.

Например, излучение Солнца в оптической области спектра определяется процессом радиационного прилипания электронов к атомами водорода с образованием отрицательных ионов водорода. Этот процесс осуществляется в узкой области солнечной атмосферы — фотосферы Солнца.

Отрицательные ионы являются носителями отрицательного заряда в нижних слоях атмосферы, вплоть до D-слоя ионосферы, расположенного на высоте 80-100 км над поверхностью Земли.

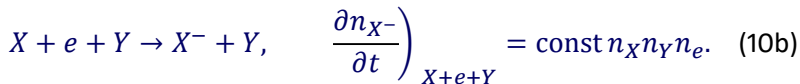
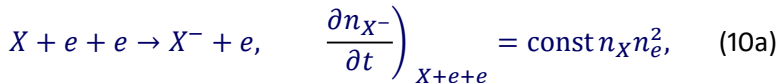
# Далее...

- 1 Фоторекомбинация
- 2 Фотоионизация
- 3 Корональное равновесие
- 4 Отрицательные ионы
- 5 Процессы образования отрицательных ионов**
- 6 Задачи для семинара



## Прилипание в тройных столкновениях

В плотном газе образование отрицательных ионов происходит в реакции *прилипания в тройных столкновениях* (electron attachment), причём третьей частицей может быть как электрон, так и другой атом:



Если степень ионизации газа мала, более высокую скорость реакции при равной плотности газа показывают тройные столкновения с участием двух атомов и электрона в процессе (10b).

## Столкновительный отрыв электрона

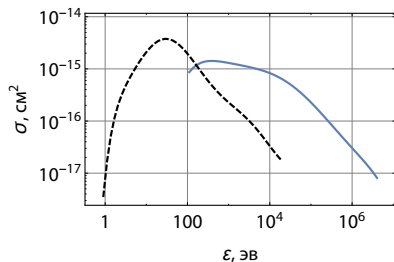
Обратные процессы *столкновительного отрыва электрона*  
(electron detachment)

$$X^- + e \rightarrow X + e + e, \quad \left. \frac{\partial n_{X^-}}{\partial t} \right)_{X^-+e} = -\text{const } n_{X^-} n_e, \quad (11a)$$

$$X^- + Y \rightarrow X + e + Y, \quad \left. \frac{\partial n_{X^-}}{\partial t} \right)_{X^-+Y} = -\text{const } n_{X^-} n_Y. \quad (11b)$$

ведут к нейтрализации отрицательных ионов. Скорости прямых реакций (10a) и (10b) пропорциональны  $n^3$  и при увеличении плотности растут быстрее, чем скорости обратных реакций (11a) и (11b), которые пропорциональны  $n^2$ . Отсюда следует, что доля отрицательных ионов тем выше, чем больше плотность газа.

# Столкновительный отрыв электрона



**Рис. 1:** Сечение отрыва электрона от отрицательного иона водорода при столкновениях с атомами водорода (11b) (сплошная линия) и электронами (11а) (штриховая линия) в зависимости от энергии налетающей частицы (атома или электрона).

## Радиационное захват и отрыв электрона

*Радиационное прилипание* (radiative attachment, photoattachment) происходит по схеме



В обратном процессе *радиационного отрыва* (radiative detachment, photodetachment)

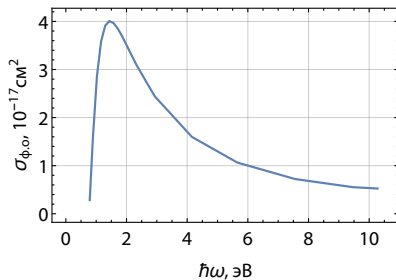


отрицательный ион поглощает фотон и превращается в нейтральный атом.

Сечение очень мало. Например, для атома водорода

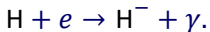
$$\sigma \lesssim 6 \cdot 10^{-23} \text{ см}^2.$$

Процесс фотозахвата важен только в разреженных газах.



**Рис. 2:** Сечение фотоотрыва отрицательного иона водорода в зависимости от энергии фотона (теоретический расчёт).

Излучение Солнца в оптическом диапазоне формируется в процессе фотоприлипания



Фотосфера Солнца излучает энергию, которая непрерывно восстанавливается за счёт потока излучения из более глубоких слоев.

Фотосфера Солнца — узкий слой атмосферы Солнца толщиной 300 км, расстояние от центра Солнца 700 тыс.км. Фотосфера представляет собой плотную слабоионизованную плазму:

$$T \simeq 6000 \text{ К}, \quad n_{\text{H}} \simeq 10^{17} \text{ см}^{-3}, \\ n_e \simeq 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}, \quad n_{\text{H}^-} \simeq 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

Хотя образование отрицательных ионов играет важную роль в излучении Солнца, их присутствие не отражается на свойствах плазмы в фотосфере Солнца.

# Далее...

- 1 Фоторекомбинация
- 2 Фотоионизация
- 3 Корональное равновесие
- 4 Отрицательные ионы
- 5 Процессы образования отрицательных ионов
- 6 Задачи для семинара**

## Задачи для семинара

- Оценить степень ионизации Солнечной короны ( $n = 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 100 \text{ эВ}$ ) и сравнение с формулой Саха.
- Найти потенциальную энергию взаимодействия электрона с нейтральным атомом на больших расстояниях ( $r \gg a_B$ ). (Поляризационный потенциал).
- Используя правило квантования Бора, рассчитать уровни энергии электрона в поляризационном потенциале  $U = -pe^2/2r^4$ , где  $p \sim a_B^3$ . Объяснить, почему имеется только один автоионизационный уровень.
- Оценить сечение фотоприлипания, рассмотрев процесс излучения электрона в поляризационном потенциале атома водорода  $U = -pe^2/2r^4$ , где  $p \sim a_B^3$ .
- Используя уравнение Саха, оценить долю отрицательных ионов в фотосфере Солнца.



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

22 ноября 2017 г.

## Лекция 12

# Термоядерные реакции

- Физика ядерных реакций
- Топливные циклы
- Кулоновский барьер
- Критерий Лоусона
- Управляемый термоядерный синтез

# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

В периодической системе Д. И. Менделеева химические элементы расположены в порядке возрастания числа *протонов*  $Z$  в ядрах атомов. Ядра атомов содержат также электрически нейтральные *нейтроны*. Ядра с одинаковым  $Z$ , но с разным числом нейтронов относят к разным *изотопам* химического элемента. Каждый изотоп характеризуется *атомным весом*  $A$ , т.е. числу *нуклонов* (протонов + нейтронов) в ядре.

Атомный вес почти не влияет на физические и химические свойства химического элемента. В ядрах атомов нуклоны удерживаются ядерными силами. Компенсируя кулоновское расталкивание протонов, ядерные силы обеспечивают стабильность ядер.

В химии атомный вес (атомная масса) есть отношение средней массы ядер химического элемента (с учётом распространённости в природе различных изотопов этого элемента) к  $1/12$  массы ядра изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ .

Масса ядра  $m$  с атомным номером  $Z$  и атомным весом  $A$  меньше суммы масс  $Z$  протонов и  $(A - Z)$  нейтронов на величину *дефекта массы*

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m.$$

*Энергия связи*  $\Delta m c^2$  варьируется от элемента к элементу и от изотопа к изотопу.

Если два лёгких ядра сливаются в одно ядро большего размера, дефект массы которого больше суммы дефектов масс прореагировавших ядер, соответствующая разность энергии связи высвобождается в виде кинетической энергии продуктов *реакций ядерного синтеза*, которые называют также *термоядерными реакциями*.

В *реакциях деления ядер* тяжёлое ядро расщепляется на более лёгкие осколки. Если суммарная энергия связи осколков превышает энергию связи исходного ядра, она выделяется в виде кинетической энергии осколков.

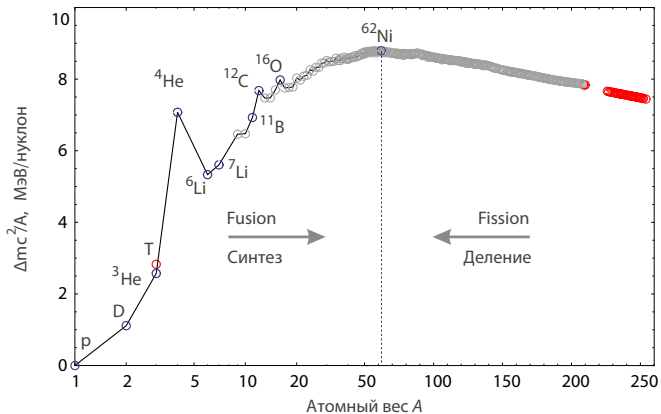


Рис. 1: Энергия связи ядер в расчёте на один нуклон в зависимости от атомного веса. В настоящее время известен **3181** изотоп, в том числе **256** стабильных изотопов и **47** изотопов с временем жизни более года.

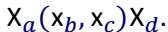
# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

В большинстве реакций ядерного синтеза два ядра ( $X_a$  и  $X_b$ ) сливаются, образуя более тяжёлое ядро ( $X_d$ ) и лёгкую частицу ( $X_c$ ). Такая реакция записывается в виде



или



Законы сохранения энергии и импульса запрещают слияние двух ядер с образованием только одного ядра без испускания второй частицы, но разрешают возникновение трёх частиц. Например:





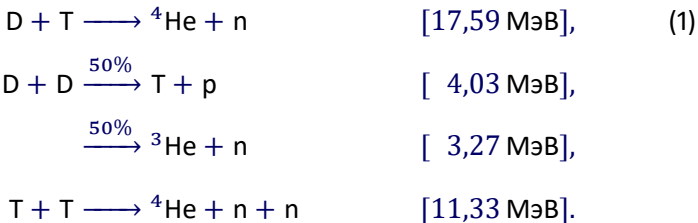
# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара



**Рис. 2:** Взрыв первого термоядерного устройства Айви Майк (Ivy Mike) 31 октября 1952 года на атолле Эниветок (Eniwetok) в Тихом океане.

В конце 1950 года А. Д. Сахаров и И. Е. Тамм сформулировали идею магнитного термоядерного реактора, работающего на смеси дейтерия и трития:

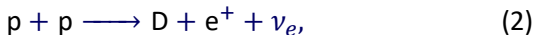


В тех реакциях, где образуются две частицы, суммарная энергия  $\mathcal{E}_{\text{fus}} = \Delta m c^2$  распределяется обратно пропорционально массе частиц. Например, в реакции  $T(d, n){}^4\text{He}$  нейтрон уносит энергию  $\mathcal{E}_n = 14,1 \text{ МэВ}$  ( $4/5$  от  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ), а  $\alpha$ -частица —  $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 3,5 \text{ МэВ}$  ( $1/5$  от  $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ). При большем числе продуктов, как в реакции  $T(t, nn){}^4\text{He}$ , можно указать диапазон энергий каждого продукта.

# Далее...

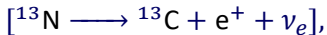
- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - **Астрофизические циклы**
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

Излучая свет миллиарды лет, Солнце и другие звёзды черпают энергию из термоядерных реакций, перерабатывая водород в гелий. Имеются две основные цепочки реакций, причём обе сопровождаются превращениями протонов в нейтроны с образованием позитрона  $e^+$  и нейтрино  $\nu_e$ . В Солнце доминирует водородный (pp) цикл:



Наличие нейтрино  $\nu_e$  и фотонов  $\gamma$  в продуктах реакций свидетельствует, что в синтез новых ядер вовлечено *электро-слабое взаимодействие*; поэтому сечения этих реакций чрезвычайно малы.

В более тяжёлых звёздах преобладает углеродный (CNO) цикл, в котором углерод  $^{12}\text{C}$  выступает в качестве катализатора (а не расходного материала):

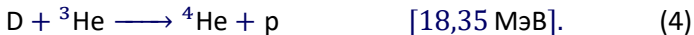


В квадратных скобках здесь указаны реакции бета-распада радиоактивных (нестабильных) изотопов.

# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 **Топливные циклы**
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - **Анейтронные циклы**
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

Нейтроны не возникают в реакции синтеза дейтерия с гелием-3:



Однако нейтроны образуются в цепочках реакций, начинающихся с  $D(d, p)T$  и  $D(d, n){}^3\text{He}$ .

Более «чистой» является смесь бора-11 и протия:



Реакции, в которых нейтроны уносят не более процента выделившейся энергии, называют *анейтронными* (aneutronic fusion) или *безнейтронными*. Для таких реакций требуется существенно более высокая температура, чем для реакции дейтерия с тритием, а реактор при существующих технологических ограничениях должен иметь существенно бóльшие размеры.



# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

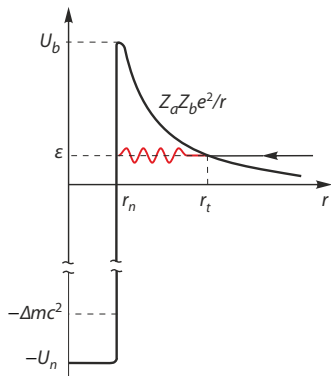
Чтобы соединить два ядра с атомным весом  $A_a$  и  $A_b$ , их нужно сблизить на расстояние приблизительно

$$r_n \simeq 1,44 \times 10^{-13} \left( A_a^{1/3} + A_b^{1/3} \right) \text{ [см]},$$

где начинают действовать ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу. На большем расстоянии сближению ядер препятствует сила кулоновского отталкивания положительно заряженных ядер, создавая *кулоновский барьер*:

$$U_b = \frac{Z_a Z_b e^2}{r_n} \simeq \frac{Z_a Z_b}{A_a^{1/3} + A_b^{1/3}} \text{ [МэВ]}.$$

В центре звёзд температура не превышает нескольких кЭВ, поэтому почти нет частиц, способных перепрыгнуть этот барьер.



Потенциальная энергия взаимодействия ядер в зависимости от расстояния  $r$  между ними. Отмечены кулоновский барьер  $U_b$ , потенциальная яма  $-U_n$ , классическая точка отражения  $r_t$  и радиус сильного взаимодействия  $r_n$ . Если энергия относительного движения меньше высоты кулоновского барьера,  $\varepsilon < U_b$ , ядра с некоторой вероятностью сливаются под потенциальным барьером благодаря эффекту туннелирования. Синтезированное ядро переходит на квантовый уровень с отрицательной энергией  $-\Delta m c^2$ ; избыточную энергию  $\varepsilon + \Delta m c^2$  уносят продукты реакции.

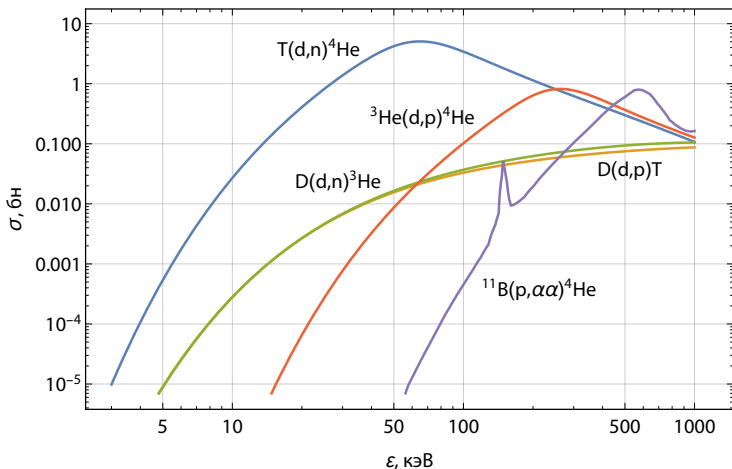
Синтез возможен при любой энергии сталкивающихся ядер из-за квантового эффекта туннельного перехода (George Gamow, 1928). Однако сечение реакции экспоненциально мало, если энергия относительного движения ядер  $\varepsilon$  в системе центра масс мала по сравнению с энергией Гамова  $G$ :

$$\sigma \sim \lambda_{ab}^2 \exp\left(-\sqrt{G/\varepsilon}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_{ab}u^2, \quad m_{ab} = \frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)}, \quad u = |\vec{v}_b - \vec{v}_a|,$$

$$\lambda_{ab} = \hbar/(m_{ab}u), \quad G = 2\pi^2 m_{ab} e_a^2 e_b^2 / \hbar^2.$$

Реакции pp цикла в звёздах идут за счёт слабого взаимодействия. Их сечения меньше на 20 с лишним порядков.



Сечения некоторых реакций ядерного синтеза в зависимости от энергии в системе центра масс; сечения ядерных реакция измеряют в барнах:  $1 \text{ бн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ .

# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

Число событий реакции синтеза  $X_a(x_b, x_c)X_d$  в единице объёма за единицу времени выражается через *константу скорости реакции*  $\langle \sigma_{ab}v \rangle$  так же, как в любом элементарном процессе, где участвуют два реагента,  $a$  и  $b$ :

$$\left. \frac{\partial n_c}{\partial t} \right)_{\text{fus}} = \left. \frac{\partial n_d}{\partial t} \right)_{\text{fus}} = \frac{\langle \sigma_{ab}v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b. \quad (6)$$

Если оба ядра принадлежат к одному сорту ( $a = b$ ), как в реакции  $D + D$ , произведение  $n_a n_b$  нужно поделить на 2, чтобы не подсчитывать дважды одну и ту же пару частиц (это сделано при помощи множителя  $1/(1 + \delta_{ab})$ ).

Удельная мощность термоядерной реакции (мощность энерговыделения в расчёте на единицу объёма):

$$P_{\text{fus}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b. \quad (7)$$

При заданной плотности ионов плазмы  $n = n_a + n_b$  удельная мощность максимальна при равной доле реагентов, когда

$$n_a = n_b = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ab})n.$$

Следовательно,

$$\max_n P_{\text{fus}} = \frac{1}{4} (1 + \delta_{ab}) \mathcal{E}_{\text{fus}} \langle \sigma_{ab} v \rangle n^2. \quad (8)$$

Задача: найти  $\max_p P_{\text{fus}}$  при заданном давлении плазмы  $p$  (если  $Z_a \neq Z_b$ , то в оптимуме  $n_a \neq n_b$ ).



# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона**
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

Пусть  $P_{\text{out}}$  обозначает мощность потерь из единицы объёма плазмы. В стационарном состоянии потери должны быть компенсированы за счёт нагрева плазмы внешним источником или продуктами термоядерной реакции.

На заре термоядерных исследований была поставлена промежуточная цель достигнуть

$$Q \equiv \frac{P_{\text{fus}}}{P_{\text{out}}} + 1 > 1$$

в реакции  $T(d, n)^4\text{He}$ .

Если время жизни отдельной частицы в плазме равно  $\tau$ , то

$$P_{\text{out}} = \frac{3T}{2\tau} \frac{(1 + Z_a)n_a + (1 + Z_b)n_b}{1 + \delta_{ab}}, \quad (9)$$

так как каждый ион и каждый электрон, покидающие плазму, выносят энергию  $\frac{3}{2}T$ , а на каждый ион сорта  $a$  или  $b$  приходится, соответственно,  $Z_a$  или  $Z_b$  электронов. Сравнение  $P_{\text{out}}$  и

$$P_{\text{fus}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b$$

показывает, что  $P_{\text{fus}} > P_{\text{out}}$ , если

$$\tau > \frac{3T}{2\mathcal{E}_{\text{fus}} \langle \sigma_{ab} v \rangle} \left[ \frac{1 + Z_a}{n_b} + \frac{1 + Z_b}{n_a} \right]. \quad \times n$$

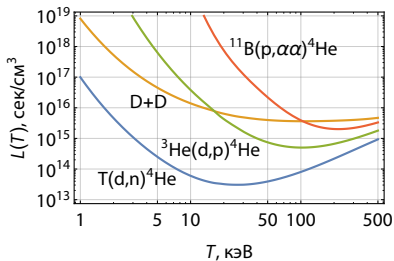
$$n\tau > \frac{3T}{2\mathcal{E}_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle} \left[ \frac{1+Z_a}{n_b/n} + \frac{1+Z_b}{n_a/n} \right].$$

.....  
 При заданной плотности ядер  $n = (n_a + n_b)/(1 + \delta_{ab})$  правая сторона этого неравенства минимальна, если

$$\frac{n_a}{n} = \frac{\sqrt{1+Z_b}(1+\delta_{ab})}{\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b}}, \quad \frac{n_b}{n} = \frac{\sqrt{1+Z_a}(1+\delta_{ab})}{\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b}},$$

т.е.

$$n\tau > \frac{3T}{2\mathcal{E}_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle} \frac{(\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b})^2}{1 + \delta_{ab}} \equiv L(T). \quad (10)$$



Выбор параметров управляемого термоядерного синтеза (УТС) по критерию Лоусона.

Минимум  $L_{\min} = 3 \times 10^{13}$  сек/см<sup>3</sup> функции  $L(T)$  для смеси DT достигается при  $T_{\min} = 26,5$  кэВ. На практике в качестве ориентира выбирают параметры

$$T = 10 \text{ кэВ}, \quad n\tau > 10^{14} \text{ сек/см}^3 \quad (11)$$

которые в совокупности называют *критерием Лоусона* (John Lawson, 1955). Современная версия этого критерия — *тройное произведение* — ищут минимум  $n\tau T$  при  $p = \text{const}$ .

# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции**
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара

Следующая цель — достигнуть зажигания термоядерной реакции в смеси D + T. Для этого нужно, чтобы

$$P_{\text{ch}} > P_{\text{out}},$$

где

$$P_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{ch}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b = \frac{\mathcal{E}_{\text{ch}}}{\mathcal{E}_{\text{fus}}} P_{\text{fus}}. \quad (12)$$

Критерий зажигания для смеси дейтерия и трития:

$$Q = \frac{P_{\text{fus}}}{P_{\text{out}}} > \frac{P_{\text{fus}}}{P_{\text{ch}}} = 5.$$

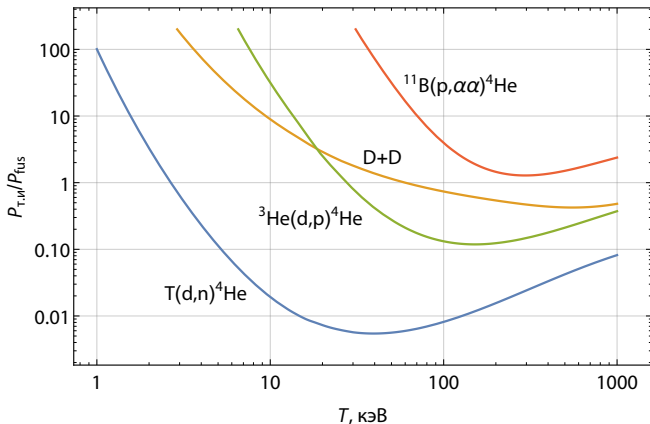
Вопрос: во сколько раз нужно увеличить  $n\tau$  по критерию Лоусона?

# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение**
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара



Пусть  $P_{\text{out}} = P_{\text{т.и}}$ . Так как  $P_{\text{fus}} \propto n^2$  и  $P_{\text{т.и}} \propto n^2$ ,  $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$  зависит только от температуры.



В реакции  $^{11}\text{B}(p,\alpha)^4\text{He}$  нужно научиться преобразовывать в электричество энергию рентгеновского излучения.

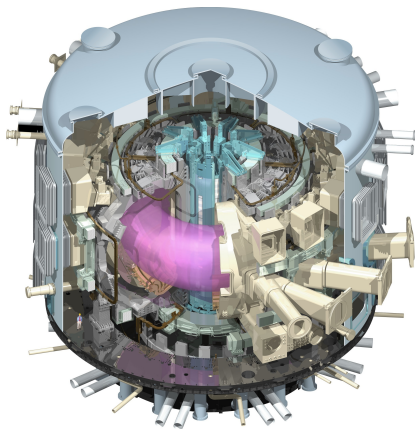
# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез**
- 9 Задачи для семинара

Теоретические основы термоядерного реактора, где плазма имела бы форму тора и удерживалась магнитным полем, были разработаны в 1951 г. И. Е. Таммом и А. Д. Сахаровым. Название *токамак* в 1957 г. придумал И. Н. Головин как сокращение от слов тороидальная камера с магнитной катушкой. Всего было предложено около десятка различных схем удержания и нагрева плазмы, но не исключено, что главное изобретение на этом пути всё ещё впереди. Лидирующим направлением в настоящее время является токамак. Первый токамак был построен в 1954 г., и долгое время токамаки существовали только в СССР. Лишь после 1968 г., когда на токамаке ТЗ в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова под руководством Л. А. Арцимовича была достигнута температура плазмы 10 млн. градусов, в мире начался настоящий бум токамаков.

31 октября 1999 г. на европейском токамаке JET в импульсном режиме в смеси дейтерия и трития достигнута мощность  $P_{\text{fus}} = 16$  МВт, что составило 65 % от мощности нагрева плазмы. В апреле следующего года на японском токамаке JT-60 в дейтериевой плазме достигнут режим, который в пересчёте на дейтерий-тритиевую плазму эквивалентен превышению критерия Лоусона на 25 %. Это означает, что достигнут положительный выход в управляемой термоядерной реакции.

В новом токамаке ITER может быть осуществлено зажигание термоядерной реакции в смеси дейтерия и трития. Однако для создания первого промышленного термоядерного реактора необходимо решить ещё множество технических проблем.



**Рис. 3:** Схема международного токамака ITER в исследовательском центре Кадараш (Cadarache) во Франции.

Физический запуск (получение плазмы) ITER перенесён с 2017 года на 2025 год, эксперименты с тритием — на 2035 год.

Помимо магнитного существуют другие варианты УТС.

Создание мощных лазеров в 1960-х годах открыло новое направление инерциального УТС. Идея лазерного синтеза проста. Нужно сфокусировать свет от множества мощных лазеров на маленькой мишени из смеси дейтерия и трития. Мгновенное испарение (абляция) внешнего слоя создаст реактивную силу, направленную к центру, что приведёт к сильному сжатию мишени и её разогреву до температуры зажигания термоядерной реакции. Реакция, начавшись в центре мишени, распространится наружу во внешние, более холодные слои намного раньше, чем весь сжатый материал разлетится в стороны.

Достижение  $Q > 1$  на установке NIF (США), которое планировалось на 2012 год, провалилось.

## Когда учёные сделают «термояд»?

Коммерческие перспективы термоядерного реактора на основе токамака туманны. Вероятно, он будет значительно дороже атомного реактора и вряд ли будет востребован в 21 веке.

	Удельная мощность, Вт/см <sup>3</sup>
Атомный реактор	$\approx 100$
ТЯ реактор, D+T, $B = 5$ Тл	$\approx 100$
ТЯ реактор, В+р, $B = 5$ Тл	$< 1$

Реактор на смеси D+T будет производить радиоактивные отходы, как и атомный реактор, но не будет взрываться, как реактор в Чернобыле. На пути к безнейтронному реактору нас ожидают гигантские трудности.

## Growth of Global Solar PhotoVoltaic

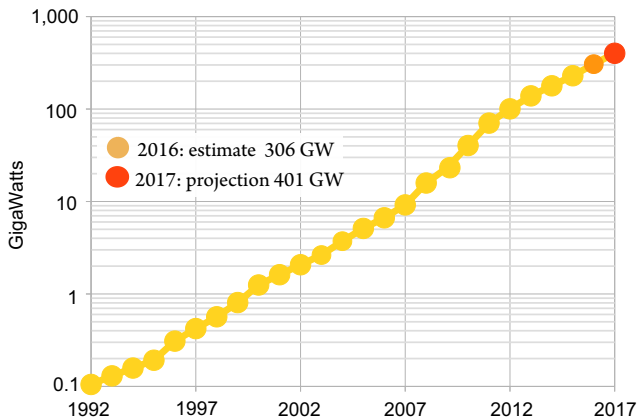


Рис. 4: Установленная мощность солнечных панелей в мире растёт по экспоненциальному закону более 25 лет подряд и почти сравнялась с этим показателем для атомных электростанций (412.7 ГВт). Источник: EES EAEC



Может быть, термоядерный реактор уже проиграл гонку за источник энергии для будущих поколений?

Может быть, термоядерный реактор уже проиграл гонку за источник энергии для будущих поколений?

Представим, что в конце концов термоядерная энергия будет производиться и производиться по разумной цене. Затем предположим, что к тому времени электроэнергия, вырабатываемая солнечными электростанциями будет, как правило, дешевле. Даже в этом случае всё ещё найдётся немало мест на земном шаре, где солнечного света будет недостаточно для того, чтобы производство солнечной энергии было целесообразно, тогда как термоядерную электростанцию можно построить в любом месте. Вероятно, человечеству всегда будет нужно разнообразие энергетических ресурсов.

Для цивилизации слишком рискованно делать ставку только на какой-то один способ поддержания её развития.

# Далее...

- 1 Физика ядерных реакций
- 2 Топливные циклы
  - DT цикл
  - Астрофизические циклы
  - Анейтронные циклы
- 3 Кулоновский барьер
- 4 Параметры термоядерных реакций
- 5 Критерий Лоусона
- 6 Зажигание термоядерной реакции
- 7 Потери на излучение
- 8 Управляемый термоядерный синтез
- 9 Задачи для семинара**

## Задачи для семинара I

- Во сколько раз энергия, которую можно извлечь из литра воды, если выделить весь дейтерий и «сжечь» его в термоядерном реакторе, больше теплотворной способности литра бензина?
- При какой плотности ионов каждого сорта удельная мощность реакции ядерного синтеза максимальна, если в реакции участвуют ядра с зарядами  $Z_a$  и  $Z_b$ , а давление плазмы не может превышать заданной величины? Считать, что температуры ионов и электронов одинаковы.
- При какой плотности ионов каждого сорта отношение мощности тормозного излучения к мощности реакции ядерного синтеза минимально, если в реакции участвуют ядра с зарядами  $Z_a$  и  $Z_b$ .
- Вычислить энергию Гамова.

## Задачи для семинара II

- Записать константу  $\langle \sigma_{ab} v \rangle$  реакции  $X_a(x_b, x_c)X_d$  ядерного синтеза в виде интеграла по энергии  $\varepsilon$  относительного движения сталкивающихся ядер. Считать, что их функции распределения являются максвелловскими с заданной температурой  $T$ .
- Вычислить константу реакции ядерного синтеза при температуре ниже энергии Гамова.

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

29 ноября 2017 г.

## Лекция 13

# Бесстолкновительное кинетическое уравнение

- Функция распределения
- Кинетическое уравнение Лиувилля
- Самосогласованное поле и уравнения Власова
- Потенциальные колебания электронов плазмы
- Правило обхода Ландау
- Затухание Ландау

# Далее...

- 1 **Функция распределения**
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы
- 5 Правило обхода Ландау
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара



В кинетической теории описание каждого сорта частиц плазмы осуществляется *функцией распределения*

$$f = f(\vec{P}, \vec{X}, t).$$

Она определена как плотность частиц в их *фазовом пространстве* и является, вообще говоря, функцией *обобщённых координат*  $\vec{X}$ , канонически сопряжённых им *обобщённых импульсов*  $\vec{P}$  и времени  $t$ . Произведение дифференциалов канонических координат и импульсов,

$$d^3X = dX_1 dX_2 dX_3 \quad \text{и} \quad d^3P = dP_1 dP_2 dP_3,$$

интерпретируют как элемент объёма фазового пространства и определяют  $f$  так, что  $dN = f d^3X d^3P$  даёт *среднее* число частиц в этом элементе.

$$N = \iint d^3P d^3X f(\vec{P}, \vec{X}, t). \quad (1)$$

Можно перейти от фазового к *конфигурационному* пространству с произвольным набором координат  $x$  и импульсов  $p$ :

$$f(\vec{p}, \vec{x}, t) \equiv f(\vec{P}(\vec{p}, \vec{x}, t), \vec{X}(\vec{p}, \vec{x}, t), t). \quad (2)$$

Так как

$$dN = f d^3P d^3X = f J d^3p d^3x, \quad J = \partial(\vec{P}, \vec{X})/\partial(\vec{p}, \vec{x}), \quad (3)$$

произведение

$$fJ \equiv \bar{f}$$

имеет смысл функции распределения в конфигурационном пространстве.

## Пример №1

В электромагнитном поле с векторным потенциалом  $\vec{A}(\vec{x}, t)$

$$\vec{P} = \vec{p} + (e/c)\vec{A}, \quad \vec{X} = \vec{x}, \quad J = 1, \quad d^3x d^3p = d^3X d^3P.$$

Отсюда следует, что функция распределения в фазовом пространстве  $f(\vec{P}, \vec{X}, t)$  одновременно будет функцией распределения  $\bar{f}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  и в конфигурационном пространстве координат  $\vec{x}$  и импульсов  $\vec{p}$ , выбранных указанным способом, т.е.

$$f(\vec{P}, \vec{X}, t) = \bar{f}(\vec{p}, \vec{x}, t).$$

Обычная плотность частиц  $n$  получается интегрированием функции распределения по всему пространству импульсов,

$$n(\vec{x}, t) = \int d^3p f(\vec{p}, \vec{x}, t), \quad (4)$$

если координаты определены так, что дифференциал  $d^3x$  равен элементу пространственного объёма  $dV$ .

## Пример №2

В нерелятивистском пределе вместо  $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$  часто используют функцию распределения  $\bar{f}(\vec{v}, \vec{x}, t)$ , выраженную через скорость частиц  $\vec{v} = \vec{p}/m$ . В этом случае

$$J = \frac{\partial(\vec{p}, \vec{x})}{\partial(\vec{v}, \vec{x})} = \frac{\partial(\vec{p})}{\partial(\vec{v})} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial p_x}{\partial v_x} & \frac{\partial p_x}{\partial v_y} & \frac{\partial p_x}{\partial v_z} \\ \frac{\partial p_y}{\partial v_x} & \frac{\partial p_y}{\partial v_y} & \frac{\partial p_y}{\partial v_z} \\ \frac{\partial p_z}{\partial v_x} & \frac{\partial p_z}{\partial v_y} & \frac{\partial p_z}{\partial v_z} \end{array} \right\| = m^3 = \text{const}$$

и функция  $\bar{f}(\vec{v}, \vec{x}, t) = m^3 f(\vec{p}, \vec{x}, t)$  с точностью до этой константы имеет смысл плотности частиц в фазовом пространстве, как и  $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$ . Далее для краткости мы опускаем черту над  $\bar{f}(\vec{v}, \vec{x}, t)$ .

# Далее...

- 1 Функция распределения
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы
- 5 Правило обхода Ландау
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара

Рассмотрим интеграл  $\int d^3X d^3P$  по некоторой области фазового пространства  $\Delta$ , каждая точка которой перемещается согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Он остаётся неизменным:

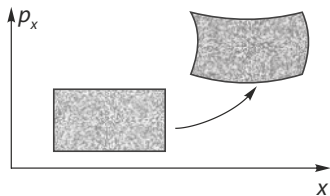
$$\int_{\Delta} d^3X d^3P = \text{const}$$

(теорема Лиувилля, Joseph Liouville, 1838). С другой стороны, число частиц внутри выделенного объёма также постоянно:

$$\int_{\Delta} d^3X d^3P f = \text{const.}$$

Взяв достаточно малый объём  $\Delta$ , отсюда заключаем, что функция распределения также постоянна вдоль фазовой траектории, т. е.

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (5)$$



**Рис. 1:** Фазовая плоскость, соответствующая одномерному движению. Площадь выделенного элемента и число частиц внутри него сохраняются при движении в самосогласованном электромагнитном поле. Отсюда следует, что функция распределения постоянна вдоль фазовой траектории.

Рассуждая подобным образом, мы неявно предполагаем, что частицы не перепрыгивают воображаемую границу выделенного элемента.

Так как

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[f(\vec{p} + d\vec{p}, \vec{x} + d\vec{x}, t + dt) - f(\vec{p}, \vec{x}, t)]}{dt} \\ &= \left[ d\vec{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + d\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + dt \frac{\partial f}{\partial t} \right] / dt \\ &= \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}$$

уравнение  $df/dt = 0$  буквально означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0. \quad (6)$$

Это *уравнение Лиувилля*. Здесь  $f$  определена как функция распределения в фазовом пространстве канонических переменных, но  $\vec{x}$  и  $\vec{p}$  не обязательно такие переменные.



По аналогии с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\dot{\vec{x}}n) = 0$$

для функции распределения  $\bar{f}$  в произвольном конфигурационном пространстве пишем *кинетическое уравнение в дивергентной форме*

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\dot{\vec{x}}\bar{f}) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (\dot{\vec{p}}\bar{f}) = 0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\dot{\vec{x}} \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (\dot{\vec{p}} \bar{f}) = 0. \quad (7)$$

.....  
 Уравнение (7) имеет простой смысл: изменение  $\bar{f}$  в данной точке конфигурационного пространства вызвано приходом в неё частиц из других точек и с другими импульсами. Действительно, поток частиц вдоль координатной линии  $x$  равен  $\dot{x} \bar{f}$ . Составляя разность потоков через границы выделенного объёма площадью  $dS_x = dy dz d^3p$  при  $x$  и  $x + dx$ , найдём соответствующее приращение числа частиц:

$$(\dot{x} \bar{f}) \Big|_x dS_x - (\dot{x} \bar{f}) \Big|_{x+dx} dS_x = \left[ -\frac{\partial(\dot{x} \bar{f})}{\partial x} dx \right] dS_x = -\frac{\partial(\dot{x} \bar{f})}{\partial x} d^3x d^3p.$$

Вклад потоков через другие грани 6-мерного объёма вычисляется аналогично. Приравнивая их сумму к  $(\partial \bar{f} / \partial t) d^3x d^3p$ , получаем уравнение (7).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\dot{\vec{x}} \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (\dot{\vec{p}} \bar{f}) = 0. \quad (7)$$

.....  
 При выборе канонических переменных эквивалентность двух форм кинетического уравнения является следствием уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}},$$

где  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  — функция Гамильтона (William Hamilton, 1833). Действительно, при переходе от (7) к уравнению (6), слагаемые

$$\bar{f} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} + \bar{f} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} = \bar{f} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} - \bar{f} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = 0$$

взаимно сокращаются и, кроме того,  $f = \bar{f}$ .

# Далее...

- 1 Функция распределения
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова**
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы
- 5 Правило обхода Ландау
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара

После подстановки формул

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{p}} = e \left( \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)] \right)$$

в уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0$$

получается *[бесстолкновительное] кинетическое уравнение с самосогласованным полем* (уравнение А.А. Власова, 1938):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0.$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \vec{x}} + e_b \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (b = e, i) \quad (8)$$

Его дополняют уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (9)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho_\varepsilon, \quad (10)$$

$$\rho_\varepsilon = \sum_b \int e_b f_b d^3p, \quad \vec{j} = \sum_b \int e_b \vec{v} f_b d^3p \quad (11)$$

Электромагнитное поле, найденное из этих уравнений называют *самосогласованным*.

*Почему бесстолкновительное? — Это уравнение сохраняет энтропию. Где мы потеряли столкновения?*

# Задача

Доказать, что уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

сохраняет энтропию

$$S = \iint [1 - \ln f] f \, d^3x \, d^3v.$$

# Далее...

- 1 Функция распределения
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы**
- 5 Правило обхода Ландау
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара



А.А. Власов попытался (не вполне успешно) применить свое кинетическое уравнение с самосогласованным полем к задаче о потенциальных колебаниях электронов плазмы. Эти колебания были открыты А. Дитмером (Arthur Dittmer) и Ф. Пеннингом (Frans Penning) в 1926 году, но они не смогли объяснить их происхождение. Простейшая гидродинамическая теория потенциальных электронных колебаний была изложена в статье Л. Тонкса (Lewi Tonks) и И. Ленгмюра (Irving Langmuir) 1929 года. Но лишь после предсказания в 1945-1946 году явления бесстолкновительного *затухания Ландау* теория ленгмюровских колебаний приобрела завершённый вид.

Повторим сначала вычисления Власова. Учтём, что в потенциальных колебаниях

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \vec{B} = 0.$$

Представим, что ионы образуют неподвижный однородный фон с плотностью  $n_i = \text{const}$ , и рассмотрим ленгмюровскую волну, распространяющуюся в направлении оси  $x$ , так что задача становится одномерной. В таком случае

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(-e)}{m} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left( \int_{-\infty}^{\infty} f \, dv - n_i \right), \quad (13)$$

где  $(-e)$  — заряд электрона,  $m$  — его масса.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(-e)}{m} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left( \int_{-\infty}^{\infty} f \, dv - n_i \right)$$

.....  
 Линеаризуем эти уравнения для колебаний с малой амплитудой:

$$f = f_0(v) + f_1(v, x, t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) \, dv = n_i, \quad f_1 \propto \varphi.$$

В линеаризованных уравнениях

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \, dv \quad (15)$$

коэффициенты при неизвестных  $f_1$  и  $\varphi$  не зависят от  $x$  и  $t$ ;  
 равновесная функция  $f_0(v)$  предполагается известной.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \, dv.$$

.....  
 Подставляя

$$\varphi(x, t) = \varphi_k(t) \exp(ikx), \quad f_1(v, x, t) = f_k(v, t) \exp(ikx), \quad (16)$$

получаем систему линейных *интегро-дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k + ik\varphi_k \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (17)$$

$$-k^2 \varphi_k = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_k \, dv \quad (18)$$

для Фурье-компонент  $\varphi_k(t)$  и  $f_k(v, t)$ , в которую  $k$  входит как внешний параметр.

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k + ik\varphi_k \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad -k^2 \varphi_k = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f_k dv$$

.....  
 Следуя Власову, попробуем отыскать решение в виде *собственных колебаний* с заданной частотой  $\omega$ . Поставив

$$f_k(v, t) = f_{k\omega}(v) \exp(-i\omega t), \quad \varphi_k(t) = \varphi_{k\omega} \exp(-i\omega t), \quad (19)$$

находим

$$f_{k\omega} = \frac{k}{\omega - kv} \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \varphi_{k\omega}, \quad (20)$$

$$0 = k^2 \underbrace{\left[ 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv \right]}_{\equiv \varepsilon(k, \omega)} \varphi_{k\omega} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, собственные колебания должны удовлетворять *дисперсионному уравнению*

$$\varepsilon(\omega, k) = 0,$$

где функцию

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv \quad (22)$$

называют *диэлектрической проницаемостью* плазмы.

Подынтегральное выражение в (22) имеет особенность при

$$kv = \omega, \quad (23)$$

поэтому интеграл не определён, пока не указано правило обращения с этой особенностью. Наличие особенности сигнализирует о наличии изъяна в методе расчёта.

В 1938 году Власов словно бы не заметил особенности. Он разложил знаменатель в ряд

$$\frac{1}{\omega - kv} \approx \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \frac{k^2 v^2}{\omega^3} + \frac{k^3 v^3}{\omega^4}$$

и вычислил частоту ленгмюровских колебаний с учётом первой поправки:

$$\omega = \omega_p \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_D^2 \right),$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n^2 e^2 / m}$ ,  $\lambda_D = \sqrt{T / 4\pi n e^2}$ .

Правильный метод указал Л. Д. Ландау (1946), указав, что нужно учесть начальные условия. Годом ранее Власов нашёл решение задачи с начальными условиями для лоренцевской функции распределения (1945). Однако эта работа осталась незамеченной, и открытое Власовым явление бесстолкновительного затухания ленгмюровских волн назвали *затуханием Ландау*.

Метод Ландау будет изложен в курсе «Коллективные явления в плазме». Мы ограничимся «правдоподобными» рассуждениями.

# Далее...

- 1 Функция распределения
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы
- 5 Правило обхода Ландау**
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара



$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv \quad (22)$$

.....

Чтобы придать интегралу смысл, будем вместо строго гармонического ( $\propto e^{-i\omega t}$ ) рассматривать поле, которое бесконечно медленно включается от времени  $t = -\infty$ . Такому описанию поля соответствует замена

$$\omega \rightarrow \omega + i\gamma,$$

где  $\gamma \rightarrow +0$ . Действительно, при этом

$$\varphi \propto e^{-i(\omega+i\gamma)t} = e^{-i\omega t} e^{\gamma t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty.$$

$$\varphi \propto e^{-i(\omega+i\gamma)t} = e^{-i\omega t} e^{\gamma t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty.$$

.....  
Вызываемое множителем  $e^{\gamma t}$  неограниченное возрастание поля при  $t \rightarrow +\infty$  несущественно, так как в силу принципа причинности не может оказать влияния на явления, рассматриваемые при конечных временах  $t$  (между тем как с  $\gamma < 0$  поле оказалось бы большим в прошлом, что нарушило бы применимость линейного по полю приближения).

Таким образом, правило обхода полюсов в интеграле (22) определяется заменой

$$\omega \rightarrow \omega + i0. \tag{24}$$

Оно было впервые установлено Л. Д. Ландау (*правило обхода Ландау*, 1946)

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega + i0 - kv} dv \quad (22)$$

.....  
 При интегрировании с правилом обхода Ландау (24) мы имеем дело с интегралами вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z) dz}{z - i\gamma}, \quad \gamma > 0.$$

В таком интеграле путь интегрирования в плоскости комплексной переменной  $z = kv$  проходит внизу под точкой  $z = i\gamma$ ; при  $\gamma \rightarrow 0$  это эквивалентно интегрированию вдоль вещественной оси с обходом полюса  $z = 0$  по бесконечно малой полуокружности снизу.

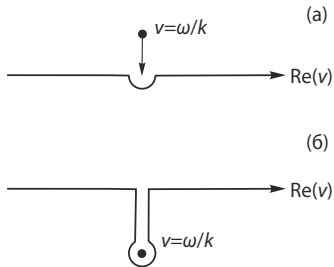


Рис. 2: Контур интегрирования в комплексной плоскости  $v$  при вычислении интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} [g(v)/(\omega - kv)] dv$ . В случае  $\text{Im}(\omega) > 0$  контур интегрирования проходит по вещественной оси  $\text{Re}(v) = 0$ . Если  $\text{Im}(\omega) \leq 0$ , контур интегрирования обходит особую точку  $v = \omega/k$  снизу, если  $k > 0$  (показано) или сверху, если  $k < 0$  (не показано).

Вклад в интеграл от этого обхода определяется полувычетом подынтегрального выражения, и в результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z) dz}{z - i0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{z} dz + i\pi g(0), \quad \gamma > 0.$$

где перечеркнутый знак интеграла означает, что интеграл берётся в смысле главного значения. Эту формулу можно записать в символическом виде

$$\frac{1}{z - i0} \rightarrow \mathcal{P} \frac{1}{z} + i\pi \delta(z),$$

где символ  $\mathcal{P}$  означает взятие (при дальнейших интегрированиях) главного значения, а  $\delta(z)$  обозначает дельта-функцию Дирака. В исходных переменных:

$$\frac{1}{\omega - kv} \rightarrow \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} - \pi i \delta(\omega - kv). \quad (25)$$

# Далее...

- 1 Функция распределения
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы
- 5 Правило обхода Ландау
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\omega - kv} \rightarrow \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} - \pi i \delta(\omega - kv). \quad (25)$$

.....  
 С учётом правила Ландау диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной даже при вещественных  $k$  и  $\omega$ :

$$\varepsilon(\omega, k) \equiv 1 + \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega/k}. \quad (26)$$

Отсюда следует, что дисперсионное уравнение  $\varepsilon(k, \omega) = 0$  не может иметь вещественных корней, если, конечно,  $\partial f_0 / \partial v \neq 0$ .  
 Решение Власова (1938 года) соответствует *волне ван Кампена*, в которой  $\partial f_0 / \partial v = 0$ .

Рассмотрим случай длинных волн ( $k \rightarrow 0$ ) в плазме с максвелловской функцией распределения электронов

$$f_0(v) = \frac{n}{\sqrt{\pi}v_T} e^{-v^2/v_T^2}, \quad v_T = \sqrt{2T/m}. \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv} dv &\approx \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \dots \right] \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \dots \right] dv = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{km} \frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) dv = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$$

обозначает ленгмюровскую частоту.



Решение полученного дисперсионного уравнения

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Bigg|_{v=\omega/k} = 0 \quad (28)$$

ищем в виде  $\omega = \omega'_k + i\omega''_k$ , где  $i\omega''_k$  — малая мнимая добавка. Пренебрегая последним слагаемым в дисперсионном уравнении, находим вещественное решение

$$\omega'_k = \omega_p, \quad (29)$$

(для определённости выбираем волну, которая при  $k > 0$  распространяется в положительном направлении оси  $x$ ).

Чтобы найти  $i\omega''_k$ , подставим  $\omega = \omega_p$  в последнее слагаемое в (28), а сумму двух первых слагаемых разложим относительно  $i\omega''_k = \omega - \omega_p$ :

$$\varepsilon = \frac{2i\omega''_k}{\omega_p} - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Bigg|_{v=\omega_p/k} = 0. \quad (30)$$

$$\varepsilon = \frac{2i\omega_k''}{\omega_p} - \frac{4\pi e^2}{km} \frac{\pi i}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega_p/k} = 0. \quad (30)$$

.....  
 Отсюда находим

$$\omega_k'' = \omega_p \frac{2\pi e^2}{km} \frac{\pi}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega_p/k} < 0. \quad (31)$$

В плазме с максвелловской функцией распределения мнимая поправка отрицательна и экспоненциально мала

$$\omega_k'' \propto \exp(-\omega_p^2/k^2 v_T^2). \quad (32)$$

При комплексном  $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$  множитель  $\exp(-i\omega_k t)$  в асимптотике

$$\varphi_k(t) \propto \exp(-i\omega_k t) = \exp(-i\omega'_k t) \exp(\omega''_k t). \quad (33)$$

распадается на осциллирующий  $\exp(-i\omega'_k t)$  и экспоненциальный  $\exp(\omega''_k t)$  множители.

Так как  $\omega''_k < 0$ , ленгмюровские колебания затухают, хотя мы ещё не учли столкновения частиц в плазме (*затухание Ландау*).

Затухание Ландау не связано со столкновениями и принципиально отличается от диссипации в обычных поглощающих средах: бесстолкновительная диссипация не сопровождается возрастанием энтропии и поэтому представляет собой термодинамически обратимый процесс.

Как видно из

$$\omega_k'' = \omega_p \frac{2\pi e^2}{km} \frac{\pi}{|k|} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega_k/k}, \quad (31)$$

диссипация возникает от электронов, скорость которых в направлении распространения электрической волны совпадает с фазовой скоростью волны ( $v = \omega/k$ ); о таких электронах говорят, что они движутся в фазе с волной. Их также называют резонансными, а условие ( $\omega = kv$ ) — *черенковским резонансом*.

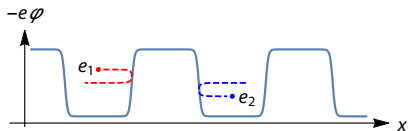


Рис. 3: Схема обмена энергией между резонансными электронами и волной.

По отношению к резонансным электронам поле стационарно и поэтому оно может производить над электронами работу, не обращаясь в ноль при усреднении по времени (как это имеет место для других электронов (по отношению к которым поле осциллирует)).

Те резонансные электроны, чья скорость чуть меньше фазовой скорости, ускоряются в поле волны — они поглощают энергию волны. Те электроны, чья скорость чуть больше фазовой скорости, тормозятся в поле волны и отдают ей свою энергию.

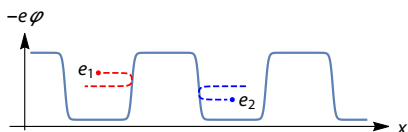


Рис. 4: Электрон  $e_1$ , опережающий волну, тормозится, а электрон  $e_2$ , отстающий от волны, ускоряется при отражении от горба потенциала.

Если функция распределения электронов убывает с ростом  $v$ , ускоряемых электронов больше, чем тормозимых, и волна затухает. Из подобных рассуждений ясно, что волна будет затухать, если вблизи резонанса  $v = \omega/k$  производная  $\partial f_0 / \partial v$  меньше нуля; это же следует из формулы (31).

# Далее...

- 1 Функция распределения
- 2 Кинетическое уравнение Лиувилля
- 3 Самосогласованное поле и уравнения Власова
- 4 Потенциальные колебания электронов плазмы
- 5 Правило обхода Ландау
- 6 Затухание Ландау
- 7 Задачи для семинара**

## Задачи для семинара

- Найти стационарное решение уравнения Власова в дрейфовом приближении.
- Используя результат предыдущей задачи, показать, что в дрейфовом приближении плотность и давление плазмы на фиксированной силовой линии зависят только от величины магнитного поля  $B$ .
- Найти радиус экранирования точечного заряда в плазме с изотропной, но не обязательно максвелловской функцией распределения.
- Проверить, что уравнение Власова сохраняет энтропию.
- Вычислить тепловую поправку к закону дисперсии ленгмюровских волн.
- \* Поучительно проследить за механизмом затухания Ландау более детально и вывести формулу (31) прямым способом, не прибегая к кинетическому уравнению.



# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

6 декабря 2017 г.

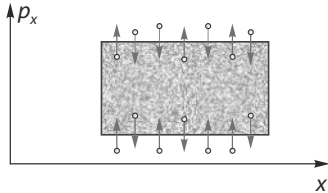
## Лекция 14

# Интеграл столкновений

- Уравнение Фоккера-Планка
- Интеграл столкновений Ландау

# Далее...

- 1 Уравнение Фоккера-Планка
- 2 Интеграл столкновений Ландау
- 3 Задачи для семинара



В столкновениях частиц их импульс изменяется на случайную величину за очень малое время. Анализируя динамику системы за более длительное время, можно считать, что частицы испытывают мгновенные случайные блуждания, которые приводят к изменению числа частиц внутри выделенного объёма в фазовом пространстве.

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a C_{ba}, \quad C_{ba} \equiv C[f_b, f_a]. \quad (1)$$

Интеграл столкновений  $C[f_b, f_a]$  имеет смысл числа частиц, которые появляются за единицу времени в единице шестимерного объёма фазового пространства.

Кулоновские столкновения — типичный пример кинетических процессов, в которых средние изменения величин (от которых зависит функция распределения) в каждом элементарном акте малы по сравнению с их характерными значениями.

Обозначим через  $w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) d^3q$  отнесённую к единице времени вероятность изменения импульса  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \vec{q}$  частицы сорта  $b$  при её столкновении с частицей сорта  $a$ . Тогда

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a \int \{w_{ba}(\vec{p} - \vec{q}, \vec{q}) f_b(\vec{p} - \vec{q}, \vec{x}, t) - w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) f_b(\vec{p}, \vec{x}, t)\} d^3q.$$

Здесь справа стоит разность между числом частиц, поступающих за 1 сек в единичный элемент фазового пространства и покидающих его за то же время. Для краткости несущественные аргументы  $\vec{x}, t$  далее опущены.

Подынтегральное выражение можно разложить в ряд Тейлора по малой величине  $\vec{q}$ .

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a \int \{w_{ba}(\vec{p} - \vec{q}, \vec{q}) f_b(\vec{p} - \vec{q}, \vec{x}, t) - w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) f_b(\vec{p}, \vec{x}, t)\} d^3q.$$

.....  
 Разложим подынтегральное выражение по малым  $\vec{q}$ :

$$w_{ba}(\vec{p} - \vec{q}, \vec{q}) f_b(\vec{p} - \vec{q}) - w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) f_b(\vec{p}) \approx -q_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) f_b(\vec{p}) + \frac{1}{2} q_\mu q_\nu \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) f_b(\vec{p}). \quad (2)$$

$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} (\langle q_\mu \rangle f_b) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} (\langle q_\mu q_\nu \rangle f_b), \quad (3)$$

$$F_\mu \equiv \langle q_\mu \rangle = \sum_a \int q_\mu w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) d^3q, \quad (4)$$

$$D_{\mu\nu} \equiv \langle q_\mu q_\nu \rangle = \sum_a \int q_\mu q_\nu w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) d^3q. \quad (5)$$

Полученное уравнение называют *уравнением Фоккера-Планка* (Adriaan Fokker, 1914; Max Planck, 1917). Оно имеет вид уравнения непрерывности в пространстве импульсов:

$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \underbrace{\left( F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right)}_{\equiv s_\mu} \equiv -\frac{\partial s_\mu}{\partial p_\mu}. \quad (6)$$

Вектор  $s_\mu$  определяет плотность потока частиц в фазовом пространстве. Коэффициенты

$$F_\mu = \langle q_\mu \rangle, \quad D_{\mu\nu} = \langle q_\mu q_\nu \rangle$$

называют соответственно *вектором динамической силы* и *тензором диффузии* в пространстве импульсов.

# Далее...

- 1 Уравнение Фоккера-Планка
- 2 Интеграл столкновений Ландау
- 3 Задачи для семинара



$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right), \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{matrix} F_\mu \\ D_{\mu\nu} \end{matrix} \right\} = \sum_a \int \left\{ \begin{matrix} q_\mu \\ q_\mu q_\nu \end{matrix} \right\} w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) d^3q, \quad (7)$$

.....  
 Чтобы вычислить коэффициенты уравнения Фоккера-Планка, заметим, что отдельный интеграл, например,

$$\int q_\mu w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) d^3q$$

есть не что иное как среднее приращение компоненты импульса  $p_\mu$  частицы сорта  $b$  за единицу времени в результате кулоновского рассеяния на частицах сорта  $a$ .

То же приращение можно выразить через сечение столкновений

$$d\sigma = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{d\sigma}{\sin^4(\theta/2)}, \quad d\sigma = 2\pi \sin \theta \, d\theta, \quad (8)$$

относительную скорость сталкивающихся частицы  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$  и функцию распределения частиц плазмы  $f_a(\vec{p}')$ :

$$\int q_\mu w_{ba}(\vec{p}, \vec{q}) \, d^3q = \iint q_\mu u \, d\sigma f_a(\vec{p}') \, d^3p'.$$

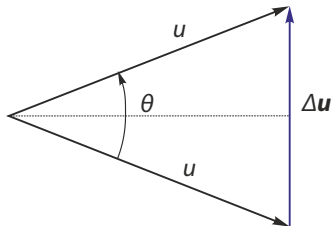
Таким образом, вычисление коэффициентов уравнения Фоккера-Планка включает двойное интегрирование по углам рассеяния и по распределению рассеивающих частиц:

$$\begin{Bmatrix} F_\mu \\ D_{\mu\nu} \end{Bmatrix} = \sum_a \iint \left( \begin{Bmatrix} q_\mu \\ q_\mu q_\nu \end{Bmatrix} u \, d\sigma \right) f_a(\vec{p}') \, d^3p'. \quad (9)$$

Вычислим интегралы

$$\int q_\mu u \, d\sigma, \quad \int q_\mu q_\nu u \, d\sigma, \quad (10)$$

приняв во внимание, что формула Резерфорда (8) относится к системе центра масс.



В системе центра масс столкновение двух заряженных частиц поворачивает вектор относительной скорости  $\vec{u} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$  на угол  $\theta$ , не меняя его длину;  $\Delta u = 2u \sin(\theta/2)$ .

В этой системе

$$\vec{q} = m_{ab}\Delta\vec{u}, \quad \Delta u = 2u \sin(\theta/2).$$

Из закона сохранения энергии в системе центра масс

$$\frac{1}{2}m_{ab}u^2 = \frac{1}{2}m_{ab}(\vec{u} + \Delta\vec{u})^2 = \frac{1}{2}m_{ab}u^2 + \underbrace{m_{ab}\Delta\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=\vec{q}} + \frac{1}{2}m_{ab}\Delta u^2$$

имеем

$$(\vec{q} \cdot \vec{u}) = -\frac{1}{2}m_{ab}\Delta u^2.$$

Поскольку направление относительной скорости  $\vec{u}$  в интегралах (10) составляет единственное выделенное направление, результат интегрирования можно выразить через компоненты вектора  $\vec{u}$  и инвариантные тензоры.

Следовательно,

$$\int q_\mu u \, d\sigma = \mathbb{A} \frac{u_\mu}{u},$$
$$\int q_\mu q_\nu u \, d\sigma = \mathbb{B} \delta_{\mu\nu} + \mathbb{C} \frac{u_\mu u_\nu}{u^2} + \mathbb{D} \epsilon_{\mu\nu\gamma} \frac{u_\gamma}{u},$$

где  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{D}$  — константы;  $\mathbb{D} = 0$ , так как  $q_\mu q_\nu$  не изменяется при замене  $\vec{u} \rightarrow -\vec{u}$ . Чтобы найти  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$ , составим свёртки

$$\frac{u_\mu}{u} \int q_\mu u \, d\sigma = \mathbb{A},$$
$$\delta_{\mu\nu} \int q_\mu q_\nu u \, d\sigma = 3\mathbb{B} + \mathbb{C},$$
$$\frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \int q_\mu q_\nu u \, d\sigma = \mathbb{B} + \mathbb{C}.$$

Левые части составленных уравнений найдём, вычислив свёртки под знаком интеграла. С учётом равенств

$$(\vec{q} \cdot \vec{u}) = -\frac{1}{2}m_{ab}\Delta u^2, \quad q = m_{ab}\Delta u$$

имеем

$$\frac{u_\mu}{u} \int q_\mu u \, d\sigma = \int (\vec{u} \cdot \vec{q}) \, d\sigma = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 \, d\sigma = \mathbb{A},$$

$$\delta_{\mu\nu} \int q_\mu q_\nu u \, d\sigma = \int (\vec{q} \cdot \vec{q}) u \, d\sigma = m_{ab}^2 u \int \Delta u^2 \, d\sigma = 3\mathbb{B} + \mathbb{C},$$

$$\frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \int q_\mu q_\nu u \, d\sigma = \int (\vec{q} \cdot \vec{u})^2 u^{-1} \, d\sigma = \frac{m_{ab}^2}{4u} \int \Delta u^4 \, d\sigma = \mathbb{B} + \mathbb{C}.$$

Следовательно, вычисление коэффициентов  $F_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$  в уравнении Фоккера-Планка сводится к вычислению средних значений  $\Delta u^2$  и  $\Delta u^4$ .

Используя формулы Резерфорда (8) и  $\Delta u = 2u \sin(\theta/2)$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int \Delta u^2 d\sigma &= \int [2u \sin(\theta/2)]^2 \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{d\sigma}{\sin^4(\theta/2)} \\ &= \frac{e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 u^2} \int \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 u^2} \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{4\pi \cos(\theta/2) d\theta}{\sin(\theta/2)} \\ &= \frac{8\pi e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 u^2} \int_{\sin(\theta_{\min}/2)}^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{8\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}^2 u^2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int \Delta u^2 d\sigma = \frac{8\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}^2 u^2} \equiv \frac{2c_{ab}}{m_{ab}^2 u^2}, \quad (11)$$

где  $\Lambda_{ab} = \ln[1/\sin(\theta_{\min}/2)] \approx \ln[2/\theta_{\min}]$  — кулоновский логарифм,

$$c_{ab} = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}. \quad (12)$$

При интегрировании  $\Delta u^4$  получается сходящийся интеграл, поэтому результат не содержит кулоновского логарифма  $\Lambda_{ab}$ . Поскольку теория кулоновских столкновений верна с точностью до поправок порядка  $\Lambda_{ab}^{-1} \ll 1$ , можно (и даже нужно!) считать, что  $\int \Delta u^4 d\sigma = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma, \\ 3\mathbb{B} + \mathbb{C} &= m_{ab}^2 u \int \Delta u^2 d\sigma, \\ \mathbb{B} + \mathbb{C} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\mathbb{A} = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma, \quad \mathbb{B} = -\mathbb{C} = \frac{m_{ab}^2 u}{2} \int \Delta u^2 d\sigma. \quad (13)$$



$$\int \Delta u^2 d\sigma = \frac{8\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}^2 u^2} \equiv \frac{2c_{ab}}{m_{ab}^2 u^2}, \quad (11)$$

$$\mathbb{A} = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma, \quad \mathbb{B} = -\mathbb{C} = \frac{m_{ab}^2 u}{2} \int \Delta u^2 d\sigma. \quad (13)$$

.....

$$\int q_\mu u d\sigma = \mathbb{A} \frac{u_\mu}{u} = \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \left( -\frac{u_\mu}{u^3} \right) = \dots,$$

$$\int q_\mu q_\nu u d\sigma = \mathbb{B} \delta_{\mu\nu} + \mathbb{C} \frac{u_\mu u_\nu}{u^2} = c_{ab} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) = \dots$$

(продолжим формулы на следующем слайде)

$$\int q_\mu u \, d\sigma = \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \left( -\frac{u_\mu}{u^3} \right) = \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{u},$$

$$\int q_\mu q_\nu u \, d\sigma = c_{ab} \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) = c_{ab} \frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} u.$$

.....

Последнее преобразование делаем с помощью легко проверяемых формул:

$$\frac{\partial u}{\partial u_\mu} = \frac{\partial \sqrt{u_\nu^2}}{\partial u_\mu} = \frac{\partial \sqrt{u_\nu^2}}{\partial u_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial u_\mu} = \frac{u_\nu}{\sqrt{u_\nu^2}} \delta_{\mu\nu} = \frac{u_\mu}{u},$$

$$-\frac{u_\mu}{u^3} = \frac{\partial u}{\partial u_\mu} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u} = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \frac{1}{u} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{u} \quad (\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'),$$

$$\left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \left( \frac{u_\nu}{u} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial u_\mu \partial u_\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu}$$

$$\left\{ \begin{matrix} F_\mu \\ D_{\mu\nu} \end{matrix} \right\} = \sum_a \int \left( \left\{ \begin{matrix} q_\mu \\ q_\mu q_\nu \end{matrix} \right\} u d\sigma \right) f_a(\vec{p}') d^3p'; \quad (9)$$

$$\int q_\mu u d\sigma = \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{u}, \quad \int q_\mu q_\nu u d\sigma = c_{ab} \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu}.$$

.....  
 В итоге находим коэффициенты в уравнении Фоккера-Планка:

$$F_\mu = \sum_a \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \underbrace{\int \frac{1}{u} f_a(\vec{p}') d^3p'}_{\equiv h_a},$$

$$D_{\mu\nu} = \sum_a c_{ab} \frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \underbrace{\int u f_a(\vec{p}') d^3p'}_{\equiv g_a}.$$

$h_a, g_a$  — потенциалы Розенблюта (Marshall Rosenbluth, 1957).

$$F_{\mu} = \sum_a \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial}{\partial v_{\mu}} \underbrace{\int \frac{1}{u} f_a(\vec{p}') d^3p'}_{\equiv h_a},$$

$$D_{\mu\nu} = \sum_a c_{ab} \frac{\partial^2}{\partial v_{\mu} \partial v_{\nu}} \underbrace{\int u f_a(\vec{p}') d^3p'}_{\equiv g_a}.$$

.....  
Заметим на будущее:

$$\frac{\partial^2 h_a}{\partial v_{\nu}^2} = \frac{\partial^2}{\partial v_{\nu}^2} \int \frac{f_a(\vec{v}')}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d^3v' = -4\pi f_a(\vec{v});$$

$$\frac{\partial^2 g_a}{\partial v_{\nu}^2} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial v_{\nu}^2} f_a(\vec{v}') d^3v' = \int \left( \frac{\delta_{\nu\nu}}{u} - \frac{u_{\nu} u_{\nu}}{u^3} \right) f_a(\vec{v}') d^3v' = 2h_a.$$

$$F_\mu = \sum_a \frac{c_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu}, \quad D_{\mu\nu} = \sum_a c_{ab} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu};$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{df_b}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right) = \\ &= -\frac{1}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( m_b F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right) \\ &= -\sum_a \frac{c_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_b}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} f_b \right). \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_b}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} f_b \right). \quad (14)$$

.....  
 Каноническая форма того же уравнения (Розенблют и др., 1957):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} f_b &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu v_\nu} \right) f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu}, \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu v_\nu} \right) f_b &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\nu^2} \right) f_b = -\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b, \\ \frac{m_b}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b &= \left( \frac{m_a + m_b}{m_a} - 1 \right) \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b = \frac{m_b}{m_a} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b. \end{aligned}$$

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_b}{m_a} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right). \quad (15)$$

Ещё раньше это уравнение вывел Л. Д. Ландау (1936). Он записал его в форме, явно подчёркивающей нелинейную зависимость интеграла столкновений от функций распределения взаимодействующих частиц  $f_b = f_b(\vec{v})$  и  $f'_a = f_a(\vec{v}')$ :

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{c_{ba}}{2m_b} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v'. \quad (16)$$

В статье Розенблюта работа Ландау не упоминается. В других публикациях того времени можно найти отголоски былых представлений, будто Ландау не учёл силу динамического трения в уравнении Фоккера-Планка, хотя доказательство эквивалентности уравнений (15) и (16) не составляет большого труда.

# Далее...

- 1 Уравнение Фоккера-Планка
- 2 Интеграл столкновений Ландау
- 3 Задачи для семинара



# Задачи для семинара I

- Доказать, что уравнение Фоккера-Планка сохраняет полное число частиц.
- Доказать, что кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау сохраняет суммарный импульс частиц плазмы.
- Доказать, что кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау сохраняет суммарную энергию частиц плазмы.
- Доказать, что интеграл столкновений Ландау равен нулю, если частицы всех сортов имеют максвелловское распределение с одинаковыми температурой и направленной скоростью.
- Доказать, что функция распределения, подчиняющаяся кинетическому уравнению с интегралом столкновений Ландау, неотрицательна.

## Задачи для семинара II

- \* Вычислить потенциалы Розенблюта для максвелловского распределения полевых частиц.
- \* Доказать эквивалентность интегралов столкновений в форме Розенблюта и Ландау.

# Основы Физики Плазмы

Игорь Александрович Котельников

Новосибирский Государственный Университет  
Кафедра физики плазмы

13 декабря 2017 г.

## Лекция 15

# Стандартные задачи кинетики плазмы

- Законы сохранения в столкновениях частиц
- H-теорема
- Нагрев электронов
- Упрощение интеграла столкновений

# Напоминание

Интеграл столкновений Ландау в форме Розенблюта:

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \underbrace{\frac{c_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \frac{m_b}{m_a} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\nu} f_b \right)}_{= \tilde{C}_{ba}}; \quad (1)$$

$$h_a(\vec{v}) = \int u^{-1} f_a(\vec{v}') d^3v', \quad g_a(\vec{v}) = \int u f_a(\vec{v}') d^3v'; \quad (2)$$

$$c_{ab} = c_{ba} = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}, \quad \vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'. \quad (3)$$

Интеграл столкновений Ландау:

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \underbrace{\frac{c_{ba}}{2m_b} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v'}_{= \tilde{C}_{ba}}. \quad (4)$$

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений с разной степенью точности позволило решить многие задачи кинетики плазмы.

Интеграл столкновений в форме Ландау используется преимущественно для получения фундаментальных результатов, таких как проверка законов сохранения или доказательство H-теоремы.

Интеграл столкновений в форме Розенблюта особенно полезен в прикладных задачах. В последней лекции курса мы решим несколько классических задач кинетики плазмы.

Следующий курс «Магнитной гидродинамики» начнём с изучения классического переноса в плазме на основе решения кинетического уравнения с интегралом столкновений в приближении слабонеоднородной плазмы.

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара

Интеграл столкновений обладает свойствами, очевидными из его физического смысла как числа частиц, появляющихся в единицу времени в единице объёма пространства импульсов. Поскольку полное число частиц при рассеянии сохраняется, то

$$\int d^3v C_{ba} = 0. \quad (5a)$$

Сохранение импульса и энергии сталкивающихся частиц означает, что

$$\int d^3v [m_a \vec{v} C_{ab} + m_b \vec{v} C_{ba}] = 0, \quad (5b)$$

$$\int d^3v \left[ \frac{1}{2} m_a v^2 C_{ab} + \frac{1}{2} m_b v^2 C_{ba} \right] = 0. \quad (5c)$$



Проверим равенство (5a). Так как

$$C_{ba} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{s}_{ba},$$

с помощью теоремы Остроградского-Гаусса получаем:

$$\int d^3v C_{ba} = -\int d^3v \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{s}_{ba} = -\oint (d\vec{S}_v \cdot \vec{s}_{ba}) = 0.$$

Проверка законов сохранения импульса (5b) и энергии (5c) представляет более трудоёмкое упражнение. Фактически же проверять нужно не сами законы сохранения, а тот факт, что конкретная форма интеграла столкновений удовлетворяет этим законам. Различные упрощённые формы интеграла столкновения зачастую этим законам не удовлетворяют.

Интеграл столкновений в форме Ландау выдерживает и другие проверки.

- Он обращается в нуль, если частицы всех сортов имеют максвелловское распределение с одной и той же температурой.
- Решение кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау не отрицательно.
- Энтропия системы не убывает (H-теорема).

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 Н-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара

Исходные динамические уравнения, использованные при выводе интеграла столкновений, обратимы по времени, однако кинетическое уравнение с интегралом столкновений не инвариантно относительно изменения знака  $t$ . Л. Больцман (Ludwig Boltzmann) доказал, что существует функционал  $H$  от функции распределения  $f$ , такой, что  $dH/dt \leq 0$  для любой функции  $f$ , удовлетворяющей кинетическому уравнения. От обозначения этого функционала происходит название H-теоремы (1872), которая в современной формулировке гласит, что энтропия замкнутой системы

$$S = - \sum_b \iint f_b (\ln f_b - 1) d^3v d^3x \quad (6)$$

не убывает со временем, т.е.

$$\frac{dS}{dt} = - \frac{dH}{dt} \geq 0.$$

Существует элегантное доказательство H-теоремы с помощью интеграла столкновений Ландау, однако мы применим интеграл столкновений Ландау для решения другой поучительной задачи (см. след. параграф).

Значение H-теоремы состоит в том, что она указывает направление релаксации произвольного начального состояния плазмы к состоянию термодинамического равновесия с максвелловским распределением частиц. Равенство нулю производной  $dS/dt$  достигается тогда и только тогда, когда функции распределения частиц всех сортов максвелловские с одинаковой температурой и средней скоростью, вследствие чего интеграл столкновений обращается в нуль; такие функции — единственное стационарное решение кинетического уравнения.

H-теорема наполняет содержанием утверждение, что уравнение Власова описывает бесстолкновительную плазму. Фактически она указывает количественный критерий, какие траектории частиц в далекодействующем кулоновском поле нужно считать столкновения, а какие —регулярным движением в самосогласованном поле. Так как уравнение Власова не содержит интеграла столкновений, самосогласованное поле, в том виде как оно определено в лекции 13, не приводит к возрастанию энтропии и не связано со столкновениями.

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара

Большая разница между массами электронов  $m_e$  и ионов  $m_i$  затрудняет обмен энергией между ними: при столкновении тяжёлой и лёгкой частиц энергия каждой из них почти не меняется. Поэтому установление равновесия между электронами самими по себе и ионами самими по себе происходит значительно быстрее, чем между электронами и ионами. В результате легко возникает ситуация, в которой электронная и ионная компоненты плазмы имеют каждая свое максвелловское распределение с различными температурами  $T_e$  и  $T_i$ . Разность температур электронов и ионов приводит к передаче энергии между обеими компонентами плазмы; определим эту передачу.



Изменение энергии ионов (за 1 сек в 1 см<sup>3</sup> плазмы) выражается интегралом

$$Q_{ie} = \int \frac{1}{2} m_i v^2 C_{ie} d^3v. \quad (7)$$

Подставляя сюда

$$C_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2m_i} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int \left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f_e'}{\partial v'_\nu} - \frac{f_e'}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v' \quad (8)$$

и интегрируя по частям по  $d^3v$ , получаем

$$Q_{ie} = \frac{c_{ie}}{2} \iint v_\mu \left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f_e'}{\partial v'_\nu} - \frac{f_e'}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'. \quad (9)$$

$$Q_{ie} = \frac{c_{ie}}{2} \iint v_{\mu} \left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f'_e}{\partial v'_{\nu}} - \frac{f'_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_{\nu}} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_{\mu} u_{\nu}}{u^3} d^3v d^3v'. \quad (9)$$

.....  
 Для максвелловских распределений с температурами  $T_e$  и  $T_i$

$$\left( \frac{f_i}{m_e} \frac{\partial f'_e}{\partial v'_{\nu}} - \frac{f'_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v_{\nu}} \right) = -f_i f'_e \left( \frac{v'_{\nu}}{T_e} - \frac{v_{\nu}}{T_i} \right).$$

Но вследствие тождества

$$\frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_{\mu} u_{\nu}}{u^3} \underbrace{(v_{\nu} - v'_{\nu})}_{=u_{\nu}} = 0$$

$v'_{\nu}$  можно заменить на  $v_{\nu}$ ; сделав эту замену, получим

$$Q_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \iint v_{\mu} v_{\nu} f_i f'_e \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_{\mu} u_{\nu}}{u^3} d^3v d^3v'. \quad (10)$$

$$Q_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \iint v_\mu v_\nu f_i f'_e \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3v d^3v'. \quad (10)$$

.....

Ввиду малости массы электронов их скорости в среднем велики по сравнению со скоростями ионов. Поэтому  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$  можно приближённо заменить на  $-\vec{v}'$ . После этого интегралы в формуле (10) разделяются, так что

$$Q_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \int v_\mu v_\nu f_i d^3v \int \frac{v'^2 \delta_{\mu\nu} - v'_\mu v'_\nu}{v'^3} f'_e d^3v'. \quad (11)$$

$$Q_{ie} = -\frac{c_{ie}}{2} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \int v_\mu v_\nu f_i d^3v \int \frac{v'^2 \delta_{\mu\nu} - v'_\mu v'_\nu}{v'^3} f'_e d^3v'. \quad (11)$$

.....

Поскольку

$$\int v_\mu v_\nu f_i d^3v = \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \int v^2 f_i d^3v = \delta_{\mu\nu} \frac{n_i T_i}{m_i},$$

$$\delta_{\mu\nu} (v'^2 \delta_{\mu\nu} - v'_\mu v'_\nu) / v'^3 = 2/v',$$

получаем

$$Q_{ie} = -c_{ie} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \frac{n_i T_i}{m_i} \int \frac{f'_e}{v'} d^3v'. \quad (12)$$

$$Q_{ie} = -c_{ie} \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \frac{n_i T_i}{m_i} \int \frac{f'_e}{v'} d^3 v'. \quad (12)$$

.....  
 Подставив сюда

$$c_{ie} = 4\pi e^4 Z^2 \Lambda, \quad \int \frac{f'_e}{v'} d^3 v' = n_e \sqrt{\frac{2m_e}{\pi T_e}},$$

получим

$$Q_{ie} = \frac{4\sqrt{2\pi m_e} e^4 Z^2 \Lambda n_i n_e}{m_i T_e^{3/2}} (T_e - T_i). \quad (13)$$

Это же выражение с противоположным знаком даёт убыль энергии электронной компоненты плазмы  $\frac{3}{2} n_e T_e$  в единице объёма, поэтому

$$\frac{3}{2} n_e \frac{dT_e}{dt} = -Q_{ie}.$$

$$\frac{3}{2}n_e \frac{dT_e}{dt} = -Q_{ie}, \quad Q_{ie} = \frac{4\sqrt{2\pi m_e} e^4 Z^2 \Lambda n_i n_e}{m_i T_e^{3/2}} (T_e - T_i). \quad (13)$$

.....  
 Отсюда находим темп изменения электронной температуры

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}}, \quad (14)$$

где величина

$$\tau_{ei} = \frac{3T_e^{3/2} m_i}{8(2\pi m_e)^{1/2} e^4 Z^2 \Lambda_{ei} n_i} \quad (15)$$

есть время установления электрон-ионного равновесия; по порядку величины  $\tau_{ei} \sim 1/\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$  (см. лекцию 8).

В зарубежной литературе авторство формулы (15) приписывают Л. Спицеру (Lyman Spitzer, 1940), однако Л. Ландау вывел её раньше (1936).

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений**
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара



Интеграл столкновений в форме Бхатнагара-Гросса-Крука (тау-приближение):

$$\frac{df_b}{dt} = -\frac{f_b - f_{mb}}{\tau}. \quad (16)$$

Оно описывает приближение распределения частиц к максвелловской функции  $f_{mb}$  с характерным временем  $\tau$ .

С помощью кинетического уравнения с интегралом столкновений БГК можно, например, предсказать эффект затухания Ландау как предел столкновительного затухания ленгмюровских волн при  $\tau \rightarrow \infty$ .

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений**
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма**
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара

Плазму, состоящую из электронов ( $e_e = -e$ ) и ионов ( $e_i = Ze$ ) с большим зарядовым числом  $Z \gg 1$ , называют *лоренцевой*. В лоренцевой плазме  $C_{ei} \gg C_{ee}$  и приближённо

$$\frac{df_e}{dt} = C_{ei} = -\frac{c_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( \underbrace{\frac{m_e}{m_i} \frac{\partial h_i}{\partial v_\mu} f_e}_{\approx 0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\nu} f_e \right).$$

$$g_i(v) = \int u f_i(\vec{v}') d^3v' = \int |\vec{v} - \vec{v}'| f_i(\vec{v}') d^3v' \approx v \int f_i(\vec{v}') d^3v' = n_i v;$$

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial v_\mu \partial v_\nu} = n_i \frac{\partial^2 v}{\partial v_\mu \partial v_\nu} = n_i \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{v_\nu}{v} = n_i \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{v} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^3} \right).$$

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{c_{ei}}{2m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{v} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_\nu}.$$

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{c_{ei}}{2m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{v} \underbrace{\left( \delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right)}_{=(\partial f_e / \partial \vec{v})_{\perp, \mu}} \frac{\partial f_e}{\partial v_\nu}$$

.....  
 В полученное уравнение входит вектор

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right)_{\perp} = \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} - \frac{\vec{v}}{v} \left( \frac{\vec{v}}{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right),$$

который перпендикулярен  $\vec{v}$ , так как

$$\vec{v} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right)_{\perp} = 0.$$

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{c_{ei}}{2m_e^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right)_{\perp},$$

---


$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{1}{v} \left( \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right)_{\perp} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right)_{\perp} - \frac{\vec{v}}{v^3} \cdot \left( \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right)_{\perp} = \frac{1}{v} \operatorname{div}_{\vec{v}} \nabla_{\vec{v}_{\perp}} f_e.$$

В сферической системе координат  $(v, \theta, \psi)$

$$\operatorname{div} \nabla f_e = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\partial f_e}{\partial v} + \frac{1}{v^2} \underbrace{\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)}_{\equiv \nabla_{\perp}^2} f_e,$$

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{c_{ei}}{2m_e^2 v^3} \nabla_{\perp}^2 f_e = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^3} \nabla_{\perp}^2 f_e. \quad (17)$$

Мы используем эту формулу в следующем семестре для вычисления проводимости плазмы.

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений**
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц**
- 5 Задачи для семинара

В модели пробных частиц в интеграле столкновений потенциалы Розенблюта зависят только от функции распределения полевых частиц. Её можно считать (1) известной, (2) изотропной и (3) максвелловской:

$$f_a(\vec{p}) = f_{Ma}(p).$$

В этом случае потенциалы Розенблюта также изотропны и могут быть вычислены аналитически.

Имеется, по крайней мере, два практически значимых применения модели пробных частиц.

Во-первых, пробными часто можно считать быстрые ионы, которые возникают при инъекции пучков быстрых нейтральных атомов с большой энергией в плазму с целью её нагрева. В результате перезарядки атомы превращаются в быстрые ионы и далее удерживаются в плазме магнитным полем, тогда как нейтральные атомы — быстрые инжектированные и медленные продукты перезарядки — свободно входят и выходят из неё. Быстрые ионы тормозятся в плазме, передавая энергию полевым частицам, одновременно испытывая рассеяние по углу.



Во-вторых, заряженные продукты ядерной реакции синтеза также можно считать пробными частицами, поскольку их плотность всё-таки существенно меньше плотности плазмы. При использовании ряда дополнительных, но вполне естественных упрощений функцию распределения быстрых ионов и продуктов термоядерной реакции удаётся найти в аналитическом виде, причём выясняется, что те и другие передают свою энергию преимущественно электронам плазмы .

# Далее...

- 1 Законы сохранения в столкновениях частиц
- 2 H-теорема
- 3 Передача энергии между электронами и ионами
- 4 Упрощение интеграла столкновений
  - Тау-приближение
  - Лоренцева плазма
  - Модель пробных частиц
- 5 Задачи для семинара

# Задачи для семинара I

- Используя интеграл столкновений ВГК, рассчитать затухание ленгмюровских волны и убедиться, что декремент затухания не стремится к нулю в пределе  $\tau \rightarrow \infty$ .
- Упростить кинетическое уравнение применительно к анализу торможения быстрых ионов, возникающих при инжекции в плазму пучков нейтральных атомов. Считать, что плотность быстрых ионов мала по сравнению с плотностью плазмы, а их скорость значительно больше тепловой скорости ионов, но меньше тепловой скорости электронов.
- Найти функцию распределения быстрых ионов — продуктов термоядерной реакции.

## Задачи для семинара II

- Найти функцию распределения плещущихся ионов, образующихся при стационарной инжекции быстрых нейтральных атомов в плазму. Считать, что угловой и энергетический разброс инжектированных атомов пренебрежимо малы.
- Найти время жизни плазмы в пробкотроне с большим пробочным отношениям (задача Будкера).