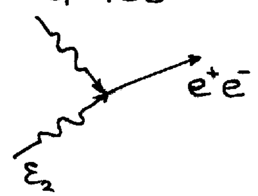
Контрольная работа по релятивистской механике
ФФ НГУ, 1 курс, 6 января 2009 года.

1. Найти пороговую энергию рождения электрон-позитронной пары при столкновении фотонов с разными энергиями, если они сталкиваются под прямым углом и энергия одного из них равна 1 эВ. **(1 балл)**



через 4-векторы: $P_m = P_1 + P_2$

$$P_m^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2$$

$mc^2 \approx 0.5$ МэВ

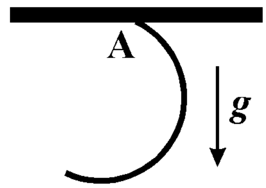
$$4m^2c^2 = 0 + 0 + 2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{2m^2c^4}{\varepsilon_1} \approx 0.5 \text{ ТэВ}$$

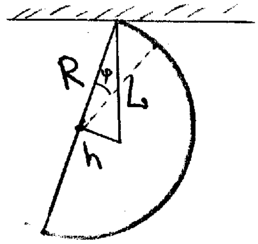
Через энергию-импульс: $\vec{p}$ - импульс e^+e^-

$$p_x = \frac{\varepsilon_2}{c}, \quad p_y = \frac{\varepsilon_1}{c}, \quad \Rightarrow \quad p_x^2 + p_y^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - (2m)^2c^2$$

$$\frac{\varepsilon_1^2}{c^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{c^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{c^2} + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2} - 4m^2c^2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{2m^2c^4}{\varepsilon_1} \approx 0.5 \text{ ТэВ}$$

2. Полуокружность радиуса R шарнирно закреплена в точке **A** и может совершать колебания в плоскости рисунка. Найти частоту малых колебаний. **(2 балла)**

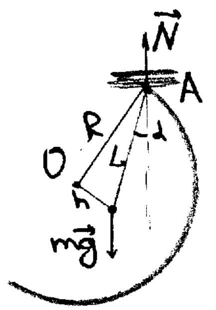




Положение центра масс:

$$h = \frac{\int_0^\pi \rho \cdot R\,d\varphi \cdot R\sin\varphi}{\pi R \rho} = \frac{2R}{\pi}$$

$$L^2 = R^2 + h^2$$



Через моменты относительно т. A (неподвижная):

$$I'\frac{d\omega}{dt} = -mgL\sin\alpha, \qquad I' = I_{цм} + mL^2 = \underbrace{I_0}_{\text{отн. т. O}} - mh^2 + mL^2$$

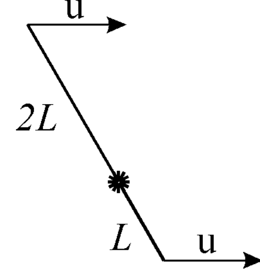
$$I'\ddot{\alpha} + mgL\alpha = 0, \qquad I' = mR^2 - mh^2 + mL^2 = 2mR^2$$

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I'} = \frac{gL}{2R^2} = \frac{g\sqrt{R^2 + 4R^2/\pi^2}}{2R^2} = \frac{g}{2R}\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$$

Через энергии: $T = \frac{mv_{цм}^2}{2} + \frac{I_{цм}\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\left(mL^2 + I_0 - mh^2\right) = mR^2\omega^2$

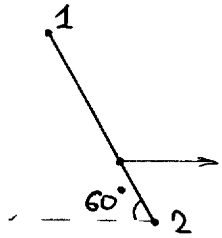
$$U = mg\Delta y = mgL\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \omega = \frac{mgL}{2mR^2} = \frac{g}{2R}\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$$

3. Стержень длины $3L$ движется так, что в собственной системе отсчета угол между направлением движения и стержнем равен $\pi/3$. На расстоянии L от переднего конца стержня происходит вспышка света. При какой скорости стержня свет дойдет до его концов одновременно в лабораторной системе отсчета? **(2 балла)**



В собств. с.о.: $x_1' = -L$, $t_1' = \frac{2L}{c}$

$x_2' = \frac{L}{2}$, $t_2' = \frac{L}{c}$

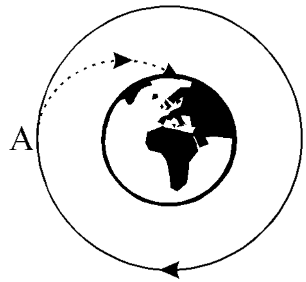


В л.с.о.: $t_1 = t_2$

$$\gamma\left(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1'\right) = \gamma\left(t_2' + \frac{u}{c^2}x_2'\right)$$

$$u = \frac{t_1' - t_2'}{x_2' - x_1'}c^2 = \frac{L}{L/2 + L}c = \frac{2}{3}c$$

4. Спутник летает по круговой орбите радиуса $2R$, где R — радиус Земли. Полюса Земли лежат в плоскости орбиты. Во сколько раз надо уменьшить скорость спутника в точке **A** над экватором, чтобы он приземлился на северный полюс? **(2 балла)**



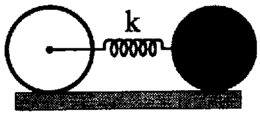
Скорость спутника (круговая): $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$, $r_1 = 2R$

У новой орбиты $p = R = \frac{m v_1^2 r_1^2}{GmM} \Rightarrow v_1^2 = \frac{GMR}{(2R)^2} = \frac{GM}{4R} = \frac{v_0^2}{2}$

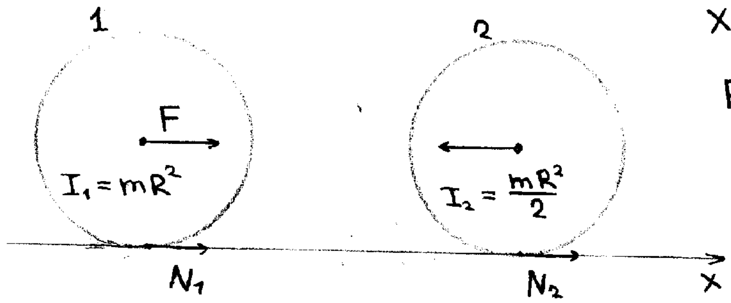
$\Downarrow$

Нужно уменьшить скорость в $\sqrt{2}$ раз

5. Тонкостенный и сплошной цилиндры массы m и радиуса R каждый соединены пружиной жесткости k и могут двигаться без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Найти частоту малых колебаний системы. Пружина соединяет оси цилиндров.



(4 балла)



x_1, x_2 - смещения цилиндров

$F = k(x_2 - x_1)$

$$ma_1 = m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + N_1$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + N_2$$

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = N_1 R\ ; \quad |\omega_1| = \frac{|\dot{x}_1|}{R} \Rightarrow N_1 = \frac{-I_1}{R^2}\ddot{x}_1 \quad (N_1 > 0 \text{ при } \ddot{x}_1 < 0)$$

$$\Downarrow \quad N_1 = -m\ddot{x}_1$$

$$N_2 = -\frac{I_2}{R^2}\ddot{x}_2 = -\frac{m}{2}\ddot{x}_2$$

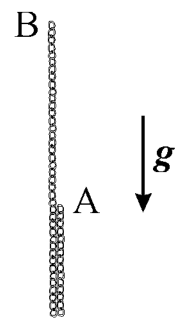
$$\Downarrow$$

$$k(x_2 - x_1) = 2m\ddot{x}_1 = -\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k(x_2 - x_1)\left(\frac{2}{3m} + \frac{1}{2m}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7k}{6m}$$

6. Конец цепи **A** закреплен. Другой конец **B** держат на высоте $L/2$ над **A**, где L — длина цепи. Цепь отпускают, и она начинает падать. Найти натяжение цепи в точке **A** в момент, когда цепь полностью выпрямится. Масса цепи M. **(4 балла)**



C - точка перегиба

Летящий кусок: $v = v_B = gt$, $\quad m_1 = \rho l = M\frac{l}{L}$

$$l = y_B - y_C = \frac{3L}{4} - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{4} = \frac{3L}{4} - \frac{gt^2}{4}$$

Он передаёт импульс неподвижному куску: $\frac{dp}{dt} = v\left|\frac{dm}{dt}\right|$

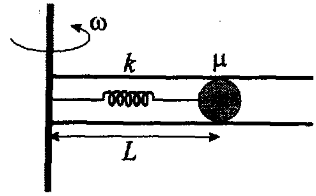
$$\frac{dp}{dt} = gt \cdot \frac{M}{L}\left|\frac{dl}{dt}\right| = gt \cdot \frac{M}{L} \cdot \frac{gt}{2}$$

Неподв. кусок: импульс $\equiv 0 \Rightarrow F = m_2 g + \frac{dp}{dt}$

$$F = \rho(L - l)g + \frac{M}{L}\frac{g^2t^2}{2} = \frac{M}{L}\left(\frac{L}{4} + \frac{gt^2}{4}\right)g + \frac{M}{L}\frac{g^2t^2}{2} = \frac{Mg}{4}\left(1 + \frac{3gt^2}{L}\right)$$

Цепь выпрямится $\Rightarrow l = 0,\ gt^2 = 3L,\quad F = \frac{5}{2}Mg$

7. Шарик массы m, прикрепленный к концу пружины жесткости k, покоился в горизонтальной трубке на расстоянии L от вертикальной оси. В момент времени $t = 0$ трубка начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega < \sqrt{k/m}$. Найти зависимость положения шарика в трубке от времени. Поля тяжести нет. Коэффициент трения между шариком и трубкой μ.



(5 баллов)

$$m\ddot{r} = \overbrace{-k(r-L)}^{\text{пружина}} + \overbrace{m\omega^2 r}^{\text{Центроб.}} - \overbrace{2\mu m\omega\dot{r}}^{\text{Кориолиса + трение}}; \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Новое полож. равновесия: $\omega_0^2(r-L) = \omega^2 r \Rightarrow r_0 = \dfrac{\omega_0^2 L}{\omega_0^2-\omega^2}$

Пусть $r = r_0 + x$:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(r_0+x-L) + \omega^2(r_0+x) - 2\mu\omega\dot{x}$$

$$\ddot{x} + (\omega_0^2-\omega^2)x + 2\mu\omega\dot{x} = 0$$

Осциллятор с трением: $\omega_* = \sqrt{\omega_0^2-\omega^2-\mu^2\omega^2}$, $\quad \gamma = \mu\omega$

Решение: $x = a e^{-\gamma t}\cos(\omega_* t + \varphi_0) = (a_0\cos\omega_* t + b_0\sin\omega_* t)e^{-\gamma t}$

$$\dot{x} = a e^{-\gamma t}\left(-\gamma\cos(\omega_* t+\varphi_0) - \omega_*\sin(\omega_* t+\varphi_0)\right) =$$

$$= e^{-\gamma t}\left[-\gamma(a_0\cos\omega_* t + b_0\sin\omega_* t) - \omega_* a_0\sin\omega_* t + \omega_* b_0\cos\omega_* t\right]$$

$t=0$: $x = L - r_0 = L\dfrac{\omega_0^2-\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} = -\dfrac{\omega^2 L}{\omega_0^2-\omega^2} \equiv x_0$

$\parallel$

$x = a\cos\varphi_0 = a_0$

$$\dot{x} = 0 = a(-\gamma\cos\varphi_0 - \omega_*\sin\varphi_0) = -\gamma a_0 + \omega_* b_0$$

$\Rightarrow a_0 = x_0, \quad b_0 = \dfrac{\gamma}{\omega_*}x_0;$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = -\frac{\gamma}{\omega_*}, \qquad a = \frac{x_0}{\cos\varphi_0} = x_0\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi_0} = x_0\cdot\sqrt{1+\gamma^2/\omega_*^2}$$

(если $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, то $a<0$)