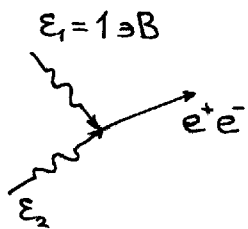


1. Найти пороговую энергию рождения электрон-позитронной пары при столкновении фотонов с разными энергиями, если они сталкиваются под прямым углом и энергия одного из них равна 1 эВ. (1 балл)



через 4-векторы: $P_m = P_1 + P_2$

$$P_m^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 P_2$$

$$4m^2c^2 = 0 + 0 + 2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{c^2} \Rightarrow \epsilon_2 = \frac{2m^2c^4}{\epsilon_1} \approx 0.5 \text{ ТэВ}$$

$$mc^2 \approx 0.5 \text{ МэВ}$$



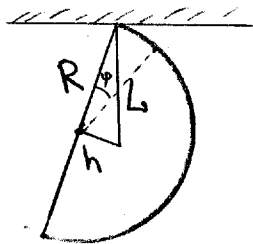
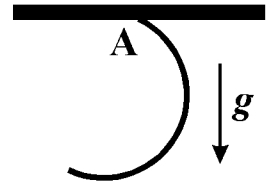
$$\approx 0.5 \text{ ТэВ}$$

Через энергию - импульс: \vec{p} - импульс e^+e^-

$$p_x = \frac{\epsilon_2}{c}, \Rightarrow p_x^2 + p_y^2 = \frac{\epsilon_2^2}{c^2} - (2m)^2c^2$$

$$p_y = \frac{\epsilon_1}{c}, \Rightarrow \frac{\epsilon_1^2}{c^2} + \frac{\epsilon_2^2}{c^2} = \frac{\epsilon_1^2}{c^2} + \frac{\epsilon_2^2}{c^2} + \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2}{c^2} - 4m^2c^2 \Rightarrow \epsilon_2 = \frac{2m^2c^4}{\epsilon_1} \approx 0.5 \text{ ТэВ}$$

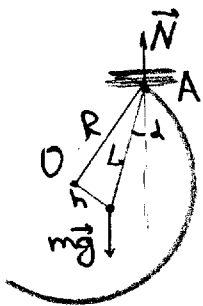
2. Полуокружность радиуса R шарнирно закреплена в точке A и может совершать колебания в плоскости рисунка. Найти частоту малых колебаний. (2 балла)



Положение центра масс:

$$h = \frac{\int_0^\pi \rho \cdot R d\varphi \cdot R \sin\varphi}{\pi R \rho} = \frac{2R}{\pi}$$

$$L^2 = R^2 + h^2$$



через моменты относительно т. А (неподвижная):

$$I' \frac{d\omega}{dt} = -mgL \sin\alpha, \quad I' = I_{\text{cm}} + mL^2 = I_0 - mh^2 + mL^2$$

$$I' \ddot{\alpha} + mgL \alpha = 0, \quad I' = mR^2 - mh^2 + mL^2 = 2mR^2$$

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I'} = \frac{gL}{2R^2} = \frac{g\sqrt{R^2 + 4R^2/\pi^2}}{2R^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$$

через энергии: $T = \frac{m v_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{I_{\text{cm}} \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} (mL^2 + I_0 - mh^2) = mR^2 \omega^2$

$$U = mg \Delta y = mgL \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \omega = \frac{mgL}{2mR^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$$

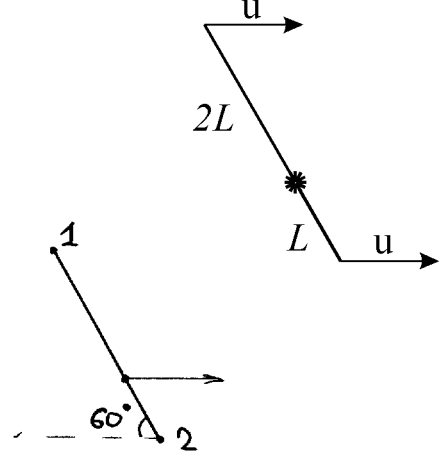
3. Стержень длины $3L$ движется так, что в собственной системе отсчета угол между направлением движения и стержнем равен $\pi/3$. На расстоянии L от переднего конца стержня происходит вспышка света. При какой скорости стержня свет дойдет до его концов одновременно в лабораторной системе отсчета? (2 балла)

В собств. с.о.: $x'_1 = -L, \quad t'_1 = \frac{2L}{c}$
 $x'_2 = \frac{L}{2}, \quad t'_2 = \frac{L}{c}$

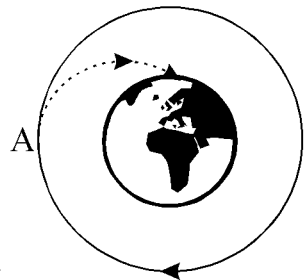
В л.с.о.: $t_1 = t_2$

$$\gamma(t'_1 + \frac{u}{c^2}x'_1) = \gamma(t'_2 + \frac{u}{c^2}x'_2)$$

$$u = \frac{t'_1 - t'_2}{x'_2 - x'_1} c^2 = \frac{L}{L/2 + L} c = \frac{2}{3} c$$



4. Спутник летает по круговой орбите радиуса $2R$, где R — радиус Земли. Полюса Земли лежат в плоскости орбиты. Во сколько раз надо уменьшить скорость спутника в точке А над экватором, чтобы он приземлился на северный полюс? (2 балла)



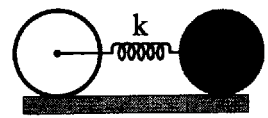
Скорость спутника (круговая): $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{2R}}, \quad r_1 = 2R$

У новой орбиты $p = R = \frac{mv_1^2 r_1}{GmM} \Rightarrow v_1^2 = \frac{GMR}{(2R)^2} = \frac{GM}{4R} = \frac{v_0^2}{2}$

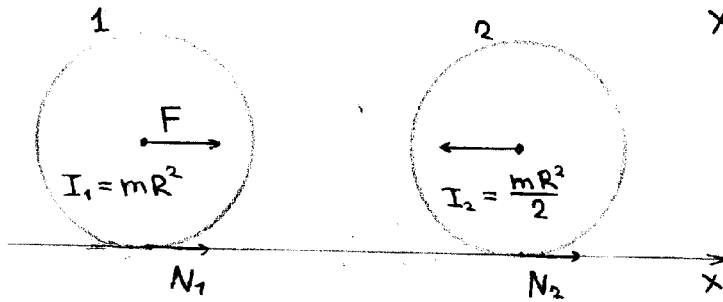
↓

Нужно уменьшить скорость в $\sqrt{2}$ раз

5. Тонкостенный и сплошной цилиндры массы m и радиуса R каждый соединены пружиной жесткости k и могут двигаться без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Найти частоту малых колебаний системы. Пружина соединяет оси цилиндров.



(4 балла)



x_1, x_2 - смещения цилиндров

$$F = k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_1 = m\dot{\omega}_1 R = k(x_2 - x_1) + N_1$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + N_2$$

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = N_1 R; |\omega_1| = \frac{|\dot{x}_1|}{R} \Rightarrow N_1 = -\frac{I_1}{R^2} \ddot{x}_1 \quad (N_1 > 0 \text{ при } \ddot{x}_1 < 0)$$

$$N_2 = -\frac{I_2}{R^2} \ddot{x}_2 = -\frac{m}{2} \ddot{x}_2 \Rightarrow N_1 = -m\ddot{x}_1$$

↓

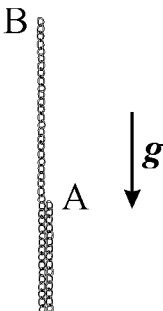
$$k(x_2 - x_1) = 2m\ddot{x}_1 = -\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k(x_2 - x_1) \left(\frac{2}{3m} + \frac{1}{2m} \right)$$

↓

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7k}{6m}$$

6. Конец цепи А закреплен. Другой конец В держат на высоте $L/2$ над А, где L — длина цепи. Цепь отпускают, и она начинает падать. Найти натяжение цепи в точке А в момент, когда цепь полностью выпрямится. Масса цепи M .

(4 балла)



С - точка перегиба

Летающий кусок: $v = v_B = gt, \quad m = \rho l = M \frac{l}{L}$

$$l = y_B - y_C = \frac{3L}{4} - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{4} = \frac{3L}{4} - \frac{gt^2}{4}$$

Он передаёт импульс неподвижному куску: $\frac{dp}{dt} = v \left| \frac{dm}{dt} \right|$

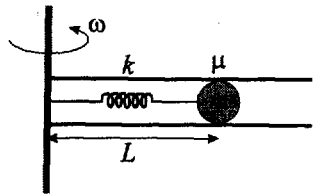
$$\frac{dp}{dt} = gt \cdot \frac{M}{L} \left| \frac{dl}{dt} \right| = gt \cdot \frac{M}{L} \cdot \frac{gt}{2}$$

Неподв. кусок: импульс $\equiv 0 \Rightarrow F = m_2 g + \frac{dp}{dt}$

$$F = \rho(L-l)g + \frac{M}{L} \frac{g^2 l^2}{2} = \frac{M}{L} \left(\frac{L}{4} + \frac{gt^2}{4} \right) g + \frac{M}{L} \frac{g^2 l^2}{2} = \frac{Mg}{4} \left(1 + \frac{3gt^2}{L} \right)$$

Цепь выпрямится $\Rightarrow l=0, \quad gt^2=3L, \quad F = \frac{5}{2} Mg$

7. Шарик массы m , прикрепленный к концу пружины жесткости k , покоился в горизонтальной трубке на расстоянии L от вертикальной оси. В момент времени $t = 0$ трубка начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega < \sqrt{k/m}$. Найти зависимость положения шарика в трубке от времени. Поля тяжести нет. Коэффициент трения между шариком и трубкой μ .



(5 баллов)

$$m\ddot{r} = \overset{\text{пружина}}{-k(r-L)} + \overset{\text{Центроб.}}{m\omega^2 r} - \overset{\text{Кориолиса + трение}}{2\mu m\omega \dot{r}}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Новое полож. равновесия: $\omega_0^2(r-L) = \omega^2 r \Rightarrow r_0 = \frac{\omega_0^2 L}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Пусть $r = r_0 + x$;

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(r_0 + x - L) + \omega^2(r_0 + x) - 2\mu\omega \dot{x}$$

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x + 2\mu\omega \dot{x} = 0$$

Осциллятор с трением: $\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 - \mu^2\omega^2}$, $\gamma = \mu\omega$

Решение: $x = a e^{-\gamma t} \cos(\omega_* t + \varphi_0) = (a_0 \cos \omega_* t + b_0 \sin \omega_* t) e^{-\gamma t}$

$$\dot{x} = a e^{-\gamma t} (-\gamma \cos(\omega_* t + \varphi_0) - \omega_* \sin(\omega_* t + \varphi_0)) =$$

$$= e^{-\gamma t} [-\gamma(a_0 \cos \omega_* t + b_0 \sin \omega_* t) - \omega_* a_0 \sin \omega_* t + \omega_* b_0 \cos \omega_* t]$$

$$t=0: x = L - r_0 = L \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{\omega^2 L}{\omega_0^2 - \omega^2} \equiv x_0$$

$$x = a \cos \varphi_0 = a_0$$

$$\dot{x} = 0 = a(-\gamma \cos \varphi_0 - \omega_* \sin \varphi_0) = -\gamma a_0 + \omega_* b_0$$

$$\Rightarrow a_0 = x_0, \quad b_0 = \frac{\gamma}{\omega_*} x_0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\gamma}{\omega_*}, \quad a = \frac{x_0}{\cos \varphi_0} = x_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0} = x_0 \sqrt{1 + \gamma^2 / \omega_*^2}$$

(если $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, то $a < 0$)