# Контрольная работа по механике
# ФФ НГУ, 1 курс, 2 октября 2009 года.

1. Солнечный зайчик бежит по некой поверхности по прямой со скоростью $2c$. С какой скоростью должен двигаться наблюдатель, чтобы в его системе отсчета направление движения зайчика изменилось на противоположное?

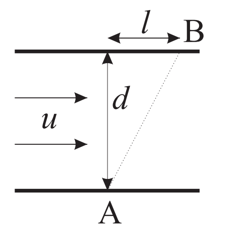
(**1.5 балла**)

2. Круглый стол вращается с угловой скоростью $\omega$. Тело начинает двигаться из центра стола радиально с постоянной относительно стола скоростью $V$. Найти радиус кривизны траектории тела в начальной точке.

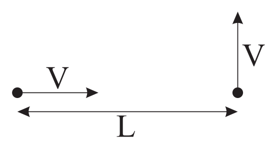
(**1.5 балла**)

3. Река с параллельными берегами имеет ширину $d$, скорость течения равна $u$. С какой наименьшей скоростью $v$ относительно воды и в каком направлении должна плыть лодка из точки **A**, чтобы попасть в точку **B**, находящуюся на другом берегу на расстоянии $l$ ниже по течению? Скорости не релятивистские.

(**2 балла**)




4. Из двух точек, разделенных расстоянием $L$, перпендикулярно друг другу одновременно с одинаковыми скоростями $V$ вылетают две нестабильные частицы (см. рисунок). Найти расстояние между точками распада этих частиц в лабораторной системе, если события распада одновременны как в системе первой частицы, так и в системе второй частицы.




(**3 балла**)

## Задача 1.

**Через интервал (раздел 2.8 лекций):**
Возьмем два события прохождения лучом двух точек на расстоянии $\Delta\vec{r}$. Время между ними $\Delta t = \Delta r/(2c)$. События одновременны при $\vec{V}\Delta\vec{r}/c^2 = \Delta t$, т.е. проекция скорости наблюдателя на линию движения зайчика $V_\parallel = c/2$. При большей проекции скорости зайчик побежит в другую сторону. При этом $V_\perp < c\sqrt{3}/2$, чтобы полная скорость была меньше $c$.

**Через сложение скоростей (раздел 2.11 лекций):**
При движении наблюдателя вдоль траектории зайчика скорость зайчика

$$v'_x = \frac{2c - V_\parallel}{1 - 2V_\parallel/c}$$

меняет знак при $V_\parallel = c/2$. Поперечная компонента скорости наблюдателя на направление движения зайчика не влияет.

## Задача 2.

**В полярных координатах:**

$$r = Vt, \qquad v_r = \frac{dr}{dt} = V, \qquad a_r = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\omega^2 r;$$
$$\varphi = \omega t, \qquad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = \omega V t, \qquad a_\varphi = \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 2\omega V.$$

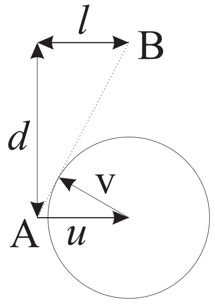
В начальный момент $v_\varphi = 0$, $a_r = 0$, $\vec{a} \perp \vec{v}$, и все ускорение является нормальным: $a = \dfrac{v^2}{R}$.
Отсюда $R = \dfrac{v^2}{2\omega V} = \dfrac{V}{2\omega}$.

**В декартовых координатах:**

$$x = Vt\cos(\omega t), \qquad v_x = V\cos(\omega t) - V\omega t\sin(\omega t), \qquad a_x = -2V\omega\sin(\omega t) - V\omega^2 t\cos(\omega t);$$
$$y = Vt\sin(\omega t), \qquad v_y = V\sin(\omega t) + V\omega t\cos(\omega t), \qquad a_y = 2V\omega\cos(\omega t) - V\omega^2 t\sin(\omega t).$$

В начальный момент $v_y = 0$, $a_x = 0$, $v_x = V$, $a_y = 2\omega V$. Далее аналогично.

## Задача 3.




**Решение геометрическое:**
Скорость лодки относительно берега, равная сумме векторов **v** и **u**, должна быть направлена в точку назначения. Из построения видно, что величина $v$ будет минимальной, когда вектор **v** перпендикулярен полной скорости. Далее из геометрии $v = ud/\sqrt{d^2 + l^2}$. Плыть надо, держась перпендикулярно нужному направлению (довольно необычно).

**Решение аналитическое:**
Обозначим компоненты скорости лодки относительно воды $v_x$ и $v_y$. Тогда компоненты скорости относительно берега будут $v_x + u$ и $v_y$. Связь между ними находится из заданного направления скорости

$$\frac{v_y}{v_x + u} = \frac{d}{l},$$

отсюда $v_y = (v_x + u)d/l$. Квадрат полной скорости

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2 \left(1 + \frac{d^2}{l^2}\right) + 2\frac{d^2}{l^2} u v_x + \frac{d^2}{l^2} u^2$$

должен быть минимален, что, после взятия производной, дает $v_x = -ud^2/(l^2 + d^2)$. Полная скорость будет $v = ud/\sqrt{d^2 + l^2}$, как и в прошлом случае. Куда надо плыть, правда, здесь сразу не видно.

## Задача 4.

В ЛСО распад не обязан быть одновременным. Пусть он произошел в $t_1$ и $t_2$. Координата точки распада зависит от того, куда направить ось $\vec{x}$: $x_1 = Vt_1$, $x_2 = L$ или $x_1 = 0$, $x_2 = Vt_2$. В с.о. "1"или "2"соответственно имеем

$$t_1' = \Gamma \left(t_1 - \frac{V}{c^2} V t_1\right) \quad = \quad t_2' = \Gamma \left(t_2 - \frac{V}{c^2} L\right),$$

$$t_1'' = \Gamma t_1 \quad = \quad t_2'' = \Gamma \left(t_2 - \frac{V}{c^2} V t_2\right).$$

Отсюда

$$t_1 = \Gamma^2 \left(t_2 - \frac{VL}{c^2}\right) = \frac{t_2}{\Gamma^2},$$

$$t_2 = \frac{VL}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - 1/\Gamma^4} = \frac{L}{V(2 - V^2/c^2)} = \frac{L\Gamma^2}{V(1 + \Gamma^2)}, \qquad t_1 = \frac{L}{V(1 + \Gamma^2)}.$$

Поскольку оказывается $L - Vt_1 = Vt_2$, то линия, соединяющая точки распада в ЛСО, составляет угол $45^\circ$ со скоростями частиц, и расстояние между точками распада

$$S = \sqrt{(Vt_1)^2 + (L - Vt_1)^2} = \frac{\sqrt{2}\Gamma^2 L}{1 + \Gamma^2}.$$