

Контрольная работа по механике
ФФ НГУ, 1 курс, 1 ноября 2009 года.

1. Неподвижный наблюдатель видит N звезд, равномерно распределенных по небосводу. Сколько звезд увеличит частоту своего излучения более, чем в два раза, если наблюдатель начнет двигаться со скоростью V ? (4 балла)

2. Фотон с энергией E_1 сталкивается со встречным фотоном неизвестной энергии и рождает нестабильную частицу, которая распадается на два фотона, один из которых имеет энергию E_2 и летит перпендикулярно линии движения исходных фотонов. Найти массу частицы. (5 баллов)

3. Нагретая сфера в собственной системе отсчета изотропно излучает мощность N_0 . Какая сила действует на сферу в лабораторной системе отсчета, если в момент времени t сфера движется в л.с.о. со скоростью V ? Найти изменение импульса и скорости сферы за время dt . (3+3 балла)

4. При лобовом столкновении ультрарелятивистских электрона и позитрона рождается тяжелая частица массы M . Определить скорость частицы, если до столкновения электрон и позитрон двигались в однородном магнитном поле по окружностям, радиусы которых отличаются в три раза. (5 баллов)

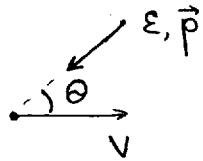
Не забудьте подписать работу:

Фамилия И.О., гр. 93??

1	2	3	4	Σ

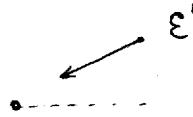
① (3.25)

В л.с.о.



$$p_x = -\frac{\epsilon}{c} \cos \theta$$

В с.о. наблюдателя:



$$\epsilon' = \Gamma (\epsilon - v p_x) = \Gamma \epsilon \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

Нужно $\epsilon' > 2\epsilon \Rightarrow \Gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) > 2$

$$\frac{v}{c} \cos \theta > \frac{2}{\Gamma} - 1 \Rightarrow \cos \theta > \frac{c(2-\Gamma)}{v\Gamma}$$

Этому углу соответствует телесный угол

$$\Omega = \int_0^\theta 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

В нём звёзд $N_o = N \frac{\Omega}{4\pi} = N \frac{1 - \cos \theta}{2} = \boxed{\frac{N}{2} \left(1 - \frac{c(2-\Gamma)}{v\Gamma} \right)}$

Чтобы такие звёзды были, нужно $\frac{c(2-\Gamma)}{v\Gamma} < 1$

$$\Gamma \frac{v}{c} > 2 - \Gamma$$

$$\left(1 + \frac{v}{c} \right) \Gamma = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} > 2 \Rightarrow \frac{v}{c} > \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5}$$

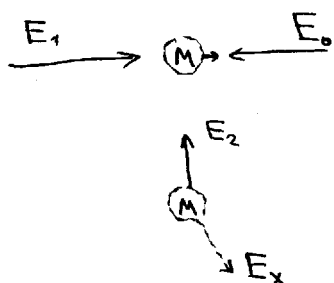
+ 1 балл за отсутствие арифметических ошибок

1 балл

1 балл

1 балл

② (4.59)



а) сначала без частицы, рассеяние фотонов, ищем \$E_0\$: $c=1$

$$P_x = P_0 + P_1 - P_2 \quad (4\text{-векторы})$$

$$\cancel{P_x^2} = \cancel{P_0^2} + \cancel{P_1^2} + \cancel{P_2^2} + 2P_0P_1 - 2P_2(P_0+P_1)$$

фотоны, $m=0$

2 балла

$$E_0 E_1 + \underline{E_0 E_1} = E_2 (E_0 + E_1) \Rightarrow E_0 = \frac{E_1 E_2}{2E_1 - E_2}$$

$$-\vec{p}_0 \vec{p}_1 = E_0 E_1 \cos \pi$$

б) сливание фотонов в частицу:

$$M^2 = p_0^2 + p_1^2 + 2p_0 p_1 = 2 \cdot 2E_0 E_1$$

$$M = 2 \sqrt{E_0 E_1} = 2E_1 \sqrt{\frac{E_2}{2E_1 - E_2}}$$

вспоминаем про "c":

$$M = \frac{2E_1}{c^2} \sqrt{\frac{E_2}{2E_1 - E_2}}$$

2 балла

+1 балл, если без арифм. ошибок

③ (5.38)

В с.о. сферы: $\vec{f}' = 0$ (результатирующая)

$$N' \equiv \vec{f}' \vec{v}' = 0 \quad (N_0 - \text{не мощность силы})$$

↓

$$\text{В л.с.о. } \boxed{\vec{f} = 0}$$

(3 балла)

В сопутствующей с.о. $\vec{v}' \equiv 0$ (одна и та же с.о. $\forall t$)

↓

$$\boxed{\vec{v} = \text{const}}$$

и в л.с.о. тоже

(1 балл)

↓

Изменение импульса $\Gamma M V$ происходит из-за изменения массы:

$$dt \text{ в л.с.о. } \Rightarrow dt' = \frac{dt}{\Gamma} \text{ в с.о. сферы}$$

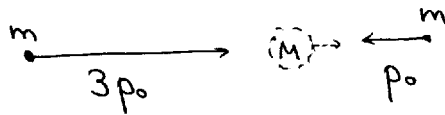
$$dM = \frac{dE}{c^2} = \frac{N_0 dt'}{c^2} = \frac{N_0 dt}{\Gamma c^2}$$

↓

$$dp = \Gamma V \cdot dM = \boxed{\frac{V N_0}{c^2} dt}$$

(2 балла)

④ (5.7)



(1 балл)

Скорость частицы = скорость с.о.ц.м. = $V = \frac{\sum p c^2}{\sum \varepsilon}$ (далее $c=1$)
(2 балла)

Ультррелятивистские $\Rightarrow \varepsilon_1 \approx 3p_0, \varepsilon_2 \approx p_0$

$$\Downarrow$$

$$V = \frac{3p_0 - p_0}{3p_0 + p_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{c}{2}} \quad (1 \text{ балл})$$

+1 балл, если без ошибок.

Точное решение:

$$V = \frac{2p_0}{\sqrt{m^2 + p_0^2} + \sqrt{m^2 + (3p_0)^2}}, \quad \text{нужно знать } p_0$$

$$M^2 = 2m^2 + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p_1 p_2) = 2m^2 + 2\sqrt{m^2 + p_0^2} \sqrt{m^2 + 9p_0^2} + 6p_0^2$$

$$4(m^2 + p_0^2)(m^2 + 9p_0^2) = (M^2 - 2m^2 - 6p_0^2)^2$$

$$4(\cancel{m^4} + 10m^2 p_0^2 + \cancel{9p_0^4}) = M^4 + \cancel{4m^4} + \cancel{36p_0^4} - 2M^2(2m^2 + 6p_0^2) + 24m^2 p_0^2$$

$$M^4 - 4m^2 M^2 - 12M^2 p_0^2 + 24m^2 p_0^2 - 40m^2 p_0^2 = 0$$

$$p_0^2 = \frac{M^4 - 4m^2 M^2}{12M^2 + 16m^2}$$

$$p_0^2 + m^2 = \frac{M^4 - 4m^2 M^2 + 12M^2 m^2 + 16m^4}{12M^2 + 16m^2} = \frac{M^4 + 8M^2 m^2 + 16m^4}{12M^2 + 16m^2} = \frac{(M^2 + 4m^2)^2}{12M^2 + 16m^2}$$

$$9p_0^2 + m^2 = \frac{9M^4 - 36m^2 M^2 + 12M^2 m^2 + 16m^4}{12M^2 + 16m^2} = \frac{9M^4 - 24m^2 M^2 + 16m^4}{12M^2 + 16m^2} =$$

$$= \frac{(3M^2 - 4m^2)^2}{4(3M^2 + 4m^2)}$$

$$V = \frac{2 \cdot M \cdot \sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^2 + 4m^2 + 3M^2 - 4m^2} = \frac{1}{2M} \sqrt{M^2 - 4m^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$$

$$V = \frac{c}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$$