1 лекция, 7.09

Механика – 2009

Лотов Константин Владимирович

Несколько слов об университете

- Поздравляю, вас тут будут сильно напрягать

Цель – научиться думать, а не выучить к-л. разделы физики или приобрести к-л. навыки

Научить нельзя, можно вынудить научиться

Попутно – квалиф. физика-исследователя

Инженер: выучить и применять известное

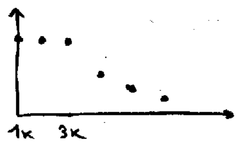
Исслед: генерить новые знания, делать неизвестное известным

т.е., творческая специальность (как у них; мастер-классы, <u>индив. работа</u>) главный козырь НГУ

Не упустите возможность войти в мировую научную элиту

- В универе учат взрослых людей. Не знаешь – виноват сам, не воспольз. возможностью получить знания. Включайте самодисциплину

- Нагрузка (учебная)



- Нельзя увеличить время на изуч. предмета, нужно увеличивать эффективность:

Лекции:

- посещать и учиться по ним, это – выжимка, по книгам не успеете, по конспектам – время в разы, т.к. там „что делается", но не „почему" и „почему это".
- работать, осознавать в реальном времени, спрашивать, писать!
- разбирать сразу, что недопоняли. Не успеваете ⇒ пропускайте сложные выкладки
- не заучивать лекции в семестре

Семинары:

- решать задачи самим, семинарист – чтобы „перелатывать" свои пробелы
- не переписывать
- не отслеж. чужие решения
- не стесняйтесь спрашивать

Задание:

- система баллов стимул. решать вовремя
- не успеваете ⇒ решайте коллективно или подсматривайте идеи
- не списывать тупо!

Программа рассчитана на самых подготовл., остальным – упрощения:

- см. выше + троечный минимум
- прогр. семинаров – не самоцель
- задания + tutorial

http://www.nsu.ru/phpBB/viewforum.php?f=5

- Кто вытирает доску

I Основные понятия

1.1 Предмет физики

(фисиз, природа, др.-греч.)

Наука, изучающая наиболее общие и фундаментальные закономерности, определяющие структуру и эволюцию материального мира. (Wiki)

Н. о природе, изучающая простейшие и вместе с тем наиб. общие св-ва материального мира (СЭС).

Н., изуч. простейшие и вместе с тем наиб. общие закономерности явлений природы, св-ва и строение материи и законы её движения (ФЭС)

<u>Цель</u> – нахожд. физических законов (общие и содержательные утверждения, верны всегда, но с какой-то точностью в какой-то области применимости)

Напр. механика Ньютона (1687), для <u>медленных</u> движ. макроскопич. тел

всегда по сравн. с чем-то, „c"

②

Физика работает со сложными явл.

⇓

нужно выделить важные факторы и отбросить второстепенные (в отл. от матем.)

При том – точная наука, т.к. даёт количественные предсказания.

⇓

Измерения: прямые и косвенные (сравнение с эталоном)

Наборы эталонов м.б. разными:

Системы единиц:

СИ (МКСА) + кельвин, моль, кандела – в технике и жизни, но избыток эталонов ⇒ E и B разной разм.

СГС (см-г-сек) – в физике

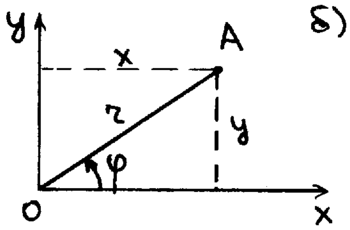
1.2 Основные системы координат

трёхмерный мир ⇒ 3 числа

плоскость ⇒ 2 числа

На плоск-ти: а) декартова (x, y)

б) полярная (r, φ)



$r \in [0, \infty)$

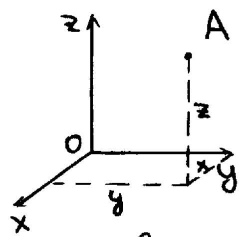
$\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \ldots \end{cases}$$

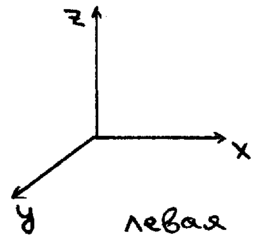
(м.б. $+\pi$ или $+2\pi$)

В пр-ве:

а) декартова: x, y, z (расст. до 3 плоск.)



правая (правило буравчика)

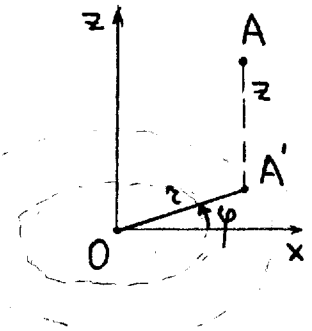


левая

$x = \text{const}$ – плоск-ть
$y = \text{const}$ – " –
$z = \text{const}$ – " –

} пересечение ⇓ т. A

б) цилиндрическая: r, φ, z



(задаём т. O, $\vec{z}$, $\vec{x}$)

(полярные r, φ + декартова z)

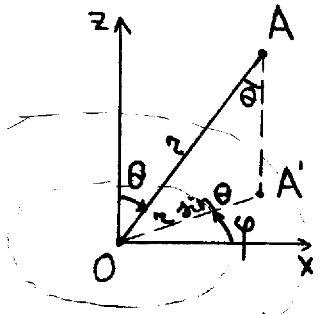
угол φ отсчитывается именно так (по y), иначе – левая система

$r = \text{const}$ – цилиндр

$\varphi = \text{const}$ – полуплоскость

$z = \text{const}$ – плоскость

в) сферическая: r, θ, φ



$r \in [0, \infty)$

$\theta \in [0, \pi]$ – азимутальный

$\varphi \in [0, 2\pi)$ – полярный

$r = \text{const}$ – сфера

$\theta = \text{const}$ – конус

$\varphi = \text{const}$ – полуплоскость

$$\begin{cases} x = \overbrace{r\sin\theta}^{OA'} \cdot \cos\varphi \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{OA'}{AA'} + \ldots = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} + \ldots \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \ldots \end{cases}$$

$+\pi$, если $z<0$

1.3 Кинематика материальной точки

М.Т. – есть только координаты и масса (идеализация)

кинематика – движение без вопросов о его причинах

Способы описания движения:

а) векторный: $\underbrace{\vec r(t)}_{\text{радиус-вектор}}$ – нужна т. О

б) координатный: $x(t), y(t), z(t)$,
или $r(t), \theta(t), \varphi(t)$, и т.п.
нужна сист. координат

в) естественный: $\underbrace{S(t)}_{\text{расст. вдоль траект.}}$ – нужно знать траекторию

Время – показание неподв. „часов", располож. около объекта.

„Часы" – периодич. процесс

Эталоны времени:

- солн. сутки, ↕ 50 сек
- звёздные сутки, 10^{-8}
- тропич. год, 10^{-8} (эталон до 1967г)
- атомные часы, 10^{-15}
- с 1967г эталон – цезий-133

Эталоны длины:

- фут, локоть, ...
- концевой / штриховой (1799-1960)
- криптон ($5\cdot 10^{-9}$) – до 1975г
- сейчас: цезий + скор. света

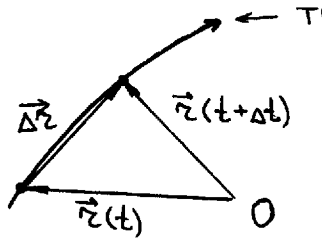
1 лекция

---

2 лекция, 11.09

Прямая задача кинематики

по $\vec r(t)$ найти $\vec v(t)$ и $\vec a(t)$



$\dfrac{\Delta \vec r}{\Delta t}$ – средняя скорость

$\Delta t \to 0$: мгновенная скорость, $\vec v(t)$

$$\vec v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt}$$

(при векторном описании)

Декарт. координаты: тоже элементарно

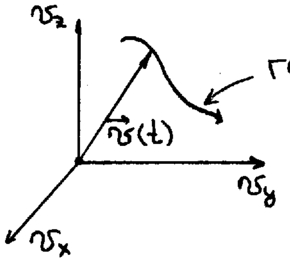
$$(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

в криволин. коорд. и при ест. способе – сложнее, см. далее

Аналогично: $\vec a(t) = \dfrac{d\vec v}{dt}$

Если $\vec v = const$: равномерное прямолинейное движение

$\vec a = const$: равноускоренное



годограф скорости (аналогично м.б. годограф ускорения и т.п.)

Обратная задача кинематики

($\vec v$ по $\vec a$, $\vec r$ по $\vec v$)

$$\vec r = \int \vec v(t')\,dt' + \vec C \quad \text{← из нач. условий}$$

$$\vec r(t) = \int_{t_0}^{t} \vec v(t')\,dt' + \vec r(t_0)$$

$$\vec v(t) = \int_{t_0}^{t} \vec a(t')\,dt' + \vec v(t_0)$$

↑↑↑ ф-лы верны при любом движении системы отсчёта

(кинематическая эквивалентность систем отсчёта)

1.4 Прямая задача кинематики в криволинейных координатах

(на примере полярных)

по $r(t)$ и $\varphi(t)$ ищем $v_r(t), v_\varphi(t)$, $a_r(t), a_\varphi(t)$

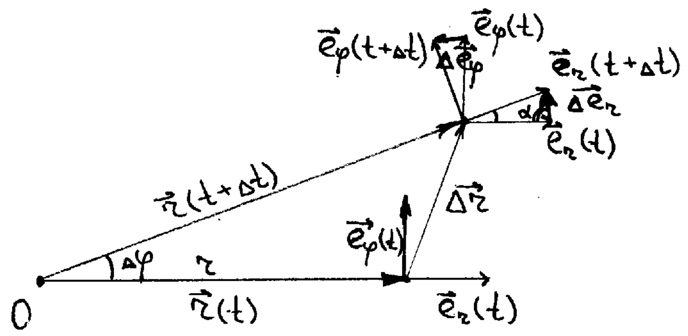
Перейдём к векторному описанию:

$\vec r(t) = r(t)\cdot \vec e_r(t)$

← зависит от r и φ

④

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$



при $\Delta t \to 0$: $\Delta\varphi \to 0 \Rightarrow \alpha \to \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Направл. $\Delta\vec{e}_r \longrightarrow \perp \vec{e}_r$, т.е. $\vec{e}_\varphi(t)$

$$|\Delta\vec{e}_r| = \underbrace{|\vec{e}_r|}_{=1}\cdot 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \longrightarrow \Delta\varphi$$

$\Downarrow$

$$\frac{\Delta\vec{e}_r}{\Delta t} \longrightarrow \frac{\Delta\varphi\cdot\vec{e}_\varphi}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{e}_\varphi$$

$\Downarrow$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r}\vec{e}_r + \underbrace{r\frac{d\varphi}{dt}}_{v_\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt}\vec{e}_r + v_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + $$
$$+ v_\varphi\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\Delta\vec{e}_\varphi = \Delta\varphi\cdot(-\vec{e}_r) \Rightarrow \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_r$$

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{dv_r}{dt} - v_\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)}_{a_r}\vec{e}_r + \underbrace{\left(\frac{dv_\varphi}{dt} + v_r\frac{d\varphi}{dt}\right)}_{a_\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2}{r}$$

$$a_\varphi = \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_r v_\varphi}{r}$$

3d координаты $\Rightarrow$ нужно знать $\frac{d\vec{e}_i}{dt}$

1.5 Тангенциальное и нормальное ускорение

Прямая задача кинематики при естеств. описании движения

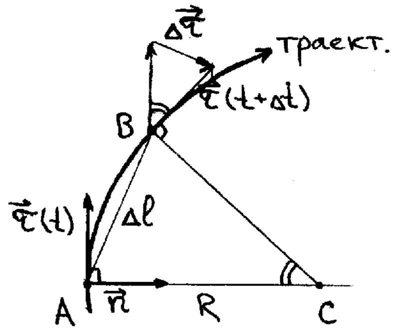
естеств. способ: $S(t)$

$$\left.\begin{aligned} &v(t) = \frac{dS}{dt} \\ &\text{Напр. } \vec{v} \parallel \text{напр. траектории, } \vec{\tau}\text{, известно} \end{aligned}\right\} \vec{v} \text{ знаем}$$

$\vec{\tau}$ – единичный вектор, $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\underline{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

выразим через радиус кривизны



При $\Delta t \to 0$:

$\Delta l \longrightarrow v(t)\Delta t$

$B \longrightarrow A$

$BC \to AC = R$

$\Delta ABC \to$ равноб.
$\Downarrow$
подобный

$$\Rightarrow \frac{\Delta l}{R} = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = |\Delta\vec{\tau}|$$

$$\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta t} \nearrow \frac{v}{R}, \quad \searrow \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \quad \Rightarrow \text{ равны}$$

Напр. $\Delta\vec{\tau} \longrightarrow \perp\vec{\tau}$, т.е. к $\vec{n}$

единичный вектор главной нормали к траектории ($\perp\vec{\tau}$, напр. в сторону загиба траект.)

$\Downarrow$

вектор кривизны, $\frac{\vec{n}}{R}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{R}\vec{n} = v\vec{\varkappa}$$

R – локальный радиус кривизны траектории

(по модулю)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{v}\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{1}{v}\left|\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{v}\right| \quad \text{– способ найти } R \text{ по } \vec{v}$$

⊛ в выводе есть нестрогие моменты, строгое док-во будет на мат.ане

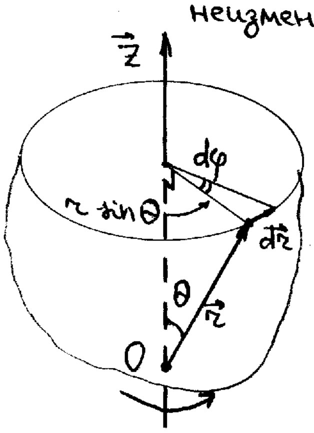
$$\vec a = \vec\tau \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{тангенциальное}} + \vec n \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\text{нормальное}} = a_\tau \vec\tau + a_n \vec n$$

Ещё способ найти R:

$$\frac{1}{R} = \frac{a_n}{v^2} = \frac{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}{v^2} = \frac{1}{v^2}\sqrt{\left(\frac{d\vec v}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

1.6 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Тв. тело: расст. между $\forall$ 2 точками неизменно



$d\varphi$ – беск. малый угол

$d\vec r$ – изм. положения точки:

$$|d\vec r| = r \sin\theta \, d\varphi$$

$d\vec r \perp \vec z$, $d\vec r \perp \vec r$ (иначе расст. до O изменится)

$\Downarrow$

Удобно ввести вектор беск. малого поворота $d\vec\varphi$:

$$\left.\begin{aligned} &|d\vec\varphi| = d\varphi \\ &d\vec\varphi \parallel \vec z \ \text{(ось вращ.)} \end{aligned}\right\} \quad d\vec r = [d\vec\varphi \times \vec r], \quad (1)$$

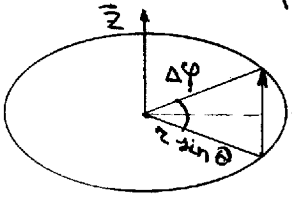
и этим он удобен

2 лекция

---

3 лекция, 14.09

Вводить по аналогии $\Delta\vec\varphi$, вектор конечного поворота, нет смысла, т.к.



$$\Delta r = r\sin\theta \cdot 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\Delta\vec r \neq [\Delta\vec\varphi \times \vec r]$$

Ещё полезные величины:

Вектор угл. скорости: $\vec\omega = \dfrac{d\vec\varphi}{dt}$

угл. ускорения: $\dfrac{d\vec\omega}{dt}$

Свяжем их с линейной скоростью и ускорением:

Из (1): $\vec v = \dfrac{d\vec r}{dt} = \dfrac{[d\vec\varphi \times \vec r]}{dt} = [\vec\omega \times \vec r]$

$$v = \omega r \sin\theta = \omega R$$

радиус окр-ти, по которой вращ. точка

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \underbrace{\left[\overbrace{\frac{d\vec\omega}{dt}}^{\parallel \vec z,\ \parallel\vec\omega} \times \vec r\right]}_{\parallel \vec v} + \underbrace{\left[\overbrace{\vec\omega}^{\perp\vec v} \times \overbrace{\frac{d\vec r}{dt}}^{\vec v}\right]}_{\perp\vec v}$$

$$a_\tau = \frac{d\omega}{dt} \cdot r\sin\theta = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_n = \omega v = \omega^2 R = \frac{v^2}{R},$$ центростремит. ускорение

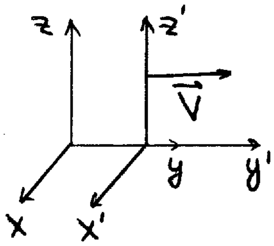
II Релятивистская кинематика

2.1 Принцип относительности Галилея

$\exists$ инерциальные с.о.: матер. точка движется с $\vec v = \text{const}$ при $\vec F = 0$.

Система, движущаяся относ. инерц. поступательно с $\vec V = \text{const}$, тоже инерциальна.

Все законы механики одинаковы в $\forall$ инерциальной с.о.
(принцип относит. Галилея)



$$\begin{cases} t = t' \\ \vec r = \vec r' + \vec V t' \end{cases}$$

(преобр. Галилея)

$\Downarrow$

$$\vec v = \vec v' + \vec V$$

2.2 Постулаты Эйнштейна

На постулатах Галилея наука благополучно покоилась до середины 19 в.

1856 – 1873: ур-я Максвелла, астрономич. наблюдения } $c = \text{const}$, не зависит от $\vec V$ источника

ОК, для электродинамич. явлений принципа относит. нет, есть эфир и выделенная с.о. (естественно, т.к. в то время свет – волна)

1881 г.: Майкельсон: эфир не найден, $c = const$, разброд и шатание

1905 г: „К электродинамике движущихся тел" (26 лет)

- Все физические явления протекают одинаково во всех и.с.о.
- $c = const$

Революция в сознании, т.к. знали:
- частицы (м. лететь в вакууме, $v \neq const$)
- волны ($v = const$, в среде)

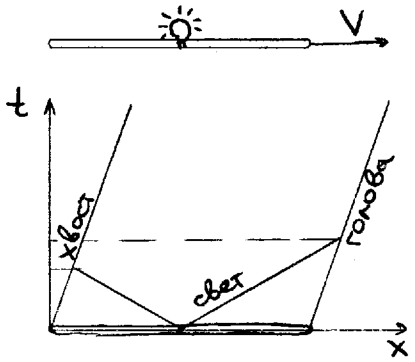
\+ свет: $c = const$, в вакууме

\+ удивительные следствия

Разметка с.о.: T и λ покоящ. атомов одинаковы, удалённые часы синхронизуем светом

2.3 Относительность одновременности

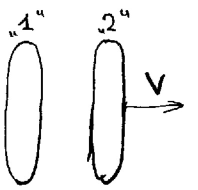
Одновр-ть $\underbrace{\text{событий}}_{\text{нечто в } \vec{r} \text{ и } t}$ зависит от с.о.



в с.о. „поезда" свет дойдёт до концов одновременно

в с.о. „земли" свет дойдёт до „хвоста" раньше

2.4 Инвариантность поперечного размера.



2 кольца, $R = 1$ м (в собств. с.о.)
одно покоится,
другое движется с $\vec{V}$,
плоск-ти колец $\perp \vec{V}$

сравним при „встрече":

Если у движ. кольца радиус меньше (прошло сквозь неподвижное)
$\Rightarrow$ при движении R уменьшается,
но в с.о. кольца „2" радиус „1" больше
$\Rightarrow$ при движении R увеличивается

противоречие $\Rightarrow R = const$

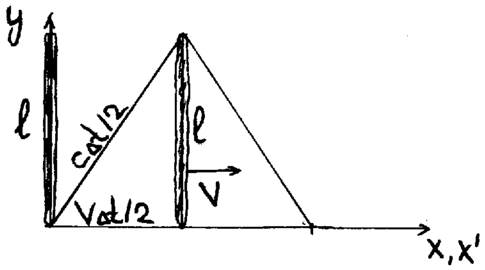
$\Downarrow$

Поперечные размеры тел не меняются при движении

2.5 Замедление времени

Д.б. для любых „часов" $\Rightarrow$ выберем самые удобные

Световые часы:



В с.о. эталона свет туда-сюда за $\Delta t_0 = 2l/c$

Движ. часы: $\Delta t \neq \Delta t_0$

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = l^2 + \frac{V^2 \Delta t^2}{4}$$

$$c^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t_0^2 + V^2 \Delta t^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > \Delta t_0$$

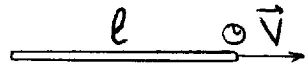
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$ – релятивистский фактор

Движущиеся часы идут в Γ раз медленнее (их период в Γ раз больше)

2.6 Сокращение длины

l_0 – длина эталона в собственной с.о. (собственная длина)

ЛСО:

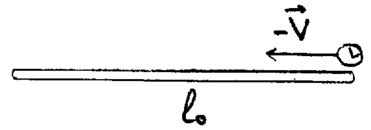


Длина в Л.С.О. – расст. между неподв. точками, в которых были начало и конец в некот. момент времени, измерим её с помощью часов

7 (по определению скорости)

$l = V\underbrace{\Delta t}$ отсчёт времени по неподв. часам (разность цифр, не зависит от с.о.)

С.о. эталона:



разность показаний:

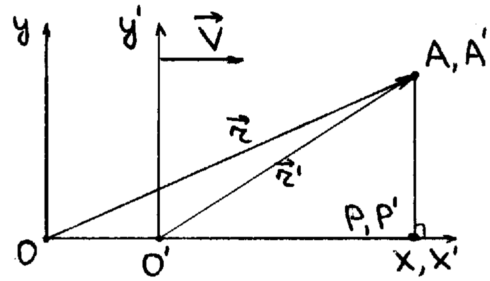
$$\Delta t = \underbrace{\frac{l_0}{V}}_{\text{столько летели часы}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\Gamma}}_{\text{они идут медленнее}} \Rightarrow \boxed{l = \frac{l_0}{\Gamma}}$$

Движ. объекты в Г раз короче (в напр. движения)

3 лекция

4 лекция, 18.09

2.7 Преобразования Лоренца



оси x и x' совпадают, $\vec V \parallel \vec x$

$t = t' = 0$ при совпадении т. O и O'

Пусть в $(\vec r, t)$ – событие, оно же в $(\vec r\,', t') = ?$

Инв. поперечного размера:

$\boxed{y' = y}$ $\boxed{z' = z}$

Отрезок O'P' (кусок оси x', движ. в ЛСО)

в штрих. системе: $O'P' = x'$ (проекция $\vec r\,'$ на $\vec x\,'$)

в л.с.о.: $O'P' = \frac{x'}{\Gamma}$ (он движется)

$$O'P' = x - \underline{Vt}$$

координаты т. P' и O' в момент события

$$\boxed{x' = \Gamma(x - Vt)}$$

Отрезок OP (неподв. в ЛСО):

$OP = x$ (в ЛСО)

$$\frac{x}{\Gamma} = \underbrace{x'}_{\text{т. P}} - \underbrace{(-V)t'}_{\text{т. O при } t'} \quad \text{(в штрих. с.о.)}$$

$\Downarrow$

$$t' = \frac{1}{V}\left(\frac{x}{\Gamma} - x'\right) = \frac{x}{\Gamma V} - \frac{\Gamma x}{V} + \Gamma t =$$

$$= \Gamma\left(t - \frac{x}{V}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\Gamma^2}\right)}_{V^2/c^2}\right) = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

$$\boxed{t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)}$$

Обратно: $x = \Gamma(x' + Vt')$, $V \to -V$

$t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$

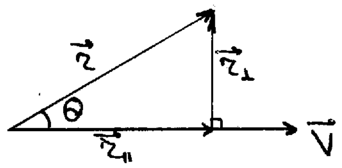
$V \ll c$: $\Gamma \to 1$, $c \to \infty$ $\Rightarrow$ $x = x' + Vt'$, $t = t'$ преобр. Галилея

В векторной форме

$\vec r = \vec r_\perp + \vec r_\parallel$ (по отношению к $\vec V$)

$$\vec r_\parallel = \underbrace{\frac{\vec V}{V}}_{}\left(\vec r\,\frac{\vec V}{V}\right)$$

един. вектор в напр. $\vec V$



$\left(\vec r\,\frac{\vec V}{V}\right) = r \cdot 1 \cdot \cos\theta = r_\parallel$

(превращается в $\vec r_\parallel$ умнож. на $\frac{\vec V}{V}$)

$$\vec r_\perp = \vec r - \vec r_\parallel = \underset{b}{\vec r}\overbrace{\left(\underset{a}{\frac{\vec V}{V}}\,\underset{c}{\frac{\vec V}{V}}\right)}^{=1} - \underset{c}{\frac{\vec V}{V}}\left(\underset{a}{\frac{\vec V}{V}}\,\underset{b}{\vec r}\right) =$$

$$= \left[\frac{\vec V}{V} \times \left[\vec r \times \frac{\vec V}{V}\right]\right]$$

$$\begin{cases} \vec r\,' = \vec r\,'_\parallel + \vec r\,'_\perp = \vec r_\perp + \Gamma(\vec r_\parallel - \vec V t) \\ \text{(рав-во верно, если } \vec x \parallel \vec V \Rightarrow \text{верно } \forall \text{ ориентации осей и даже без них)} \\ t' = \Gamma\left(t - \frac{\vec V \vec r}{c^2}\right) \end{cases}$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\frac{V}{c}\Gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4-вектор события

2.8 Интервал

Пусть между событиями $\Delta\vec{r}$ и Δt.
Введём интервал между ними ΔS:

$$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta\vec{r})^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ΔS^2 - инвариант преобр. Лоренца, т.к.

$$(\Delta S')^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2 = c^2\Gamma^2\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right)^2 -$$
$$- \Gamma^2(\Delta x - V\Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$
$$= \Gamma^2\left(c^2\Delta t^2 + \frac{V^2\Delta x^2}{c^2} - \cancel{2V\Delta x\Delta t} - \Delta x^2 - \right.$$
$$\left. - V^2\Delta t^2 + \cancel{2V\Delta x\Delta t}\right) - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$
$$= \cancel{\Gamma^2} c^2\Delta t^2 \cancel{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} - \cancel{\Gamma^2}\Delta x^2 \cancel{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} -$$
$$- \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta S^2$$

$\Delta S^2 < 0$: пространственноподобный
($\exists$ с.о., где $\Delta t' = 0$)

$\Delta S^2 > 0$: времениподобный
($\exists$ с.о., где $\Delta\vec{r}' = 0$)

$\Delta S^2 = 0$: нулевой (светоподобный)
($\forall$ с.о. $\Delta r' = c\Delta t'$)

Ищем эти с.о. для $(\vec{r}_1, t_1)$ и $(\vec{r}_2, t_2)$

а) $\Delta t' = 0 = t_2' - t_1' = \Gamma\left(t_2 - \frac{\vec{V}\vec{r}_2}{c^2}\right) -$
$- \Gamma\left(t_1 - \frac{\vec{V}\vec{r}_1}{c^2}\right) = \Gamma\left(\Delta t - \frac{\vec{V}\Delta\vec{r}}{c^2}\right)$

$$\frac{\vec{V}\Delta\vec{r}}{c^2} = \Delta t \Rightarrow \frac{V_\parallel}{c} = \frac{c\Delta t}{\Delta r}$$

продольная по отн. к $\Delta\vec{r}$

При $c\Delta t < \Delta r$ ($\Delta S^2 < 0$) таких систем много, т.к. $V_\perp$ м.б. разной.

б) $\Delta\vec{r}' = 0$, в общем виде искать сложно, найдём одну и докажем единственность.
ищем $\vec{V} \parallel \Delta\vec{r} \parallel \vec{e}_x$:

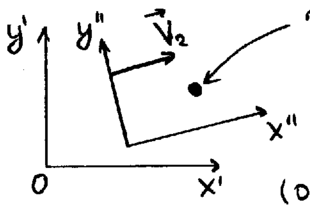
$\Delta y' = \Delta z' \equiv 0$

$\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V\Delta t) = 0$

$\Downarrow$

$V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, $\exists$ при $\Delta r < c\Delta t$

Такая с.о. единственна, т.к.
запустим относ. неё ещё систему с $\vec{V}_2$:

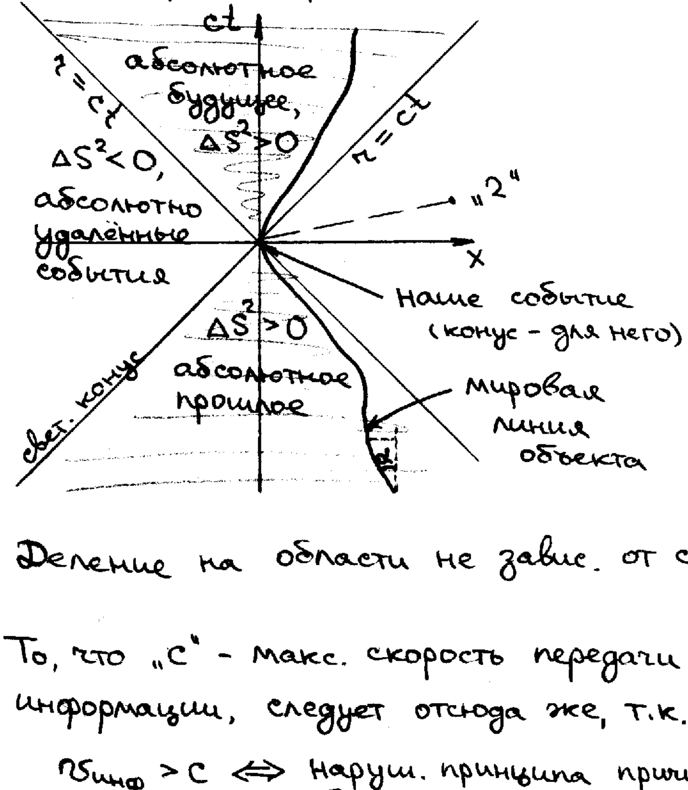


2 события, $\Delta\vec{r}' = 0$
$\Delta t' \neq 0$

$\Delta\vec{r}'' = -\Gamma_2\vec{V}_2\Delta t' \neq 0$
(одноместность теряется $\forall \vec{V}_2$)

2.9 Световой конус

(в 4-мерном пр-ве - времени)



Деление на области не завис. от с.о.

То, что „c" - макс. скорость передачи информации, следует отсюда же, т.к.

$v_{инф} > c \Leftrightarrow$ наруш. принципа причинн. (будущее влияет на прошл.)
т.к. $\exists$ с.о., где „2" - в прошлом

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{dr}{c\,dt} = \frac{v}{c} \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq 45^\circ$$

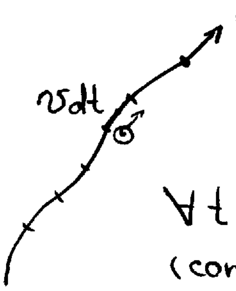
(„=" для света)

4 лекция

5 лекция, 21.09, последняя для геологов

2.10 Собственное время

(можно ввести и для ускоренного движения)



разобьём траекторию на маленькие отрезочки. На каждом – свои часы

$\forall t \ \exists$ и.с.о., где $\vec{v}\,'=0$

(сопутствующая с.о.)

Время пролёта отрезка:

в л.с.о.: dt

в с.с.о.: $\underbrace{dt'}_{\text{показ. часов, инвариант}} = \dfrac{dt}{\gamma} = \underbrace{dt\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}_{\text{тоже инвариант}} \equiv d\tau$

Кстати, $ds^2 = (c\,dt')^2 - \overbrace{(dr')^2}^{=0} = c^2 d\tau^2$

$$\tau = \int d\tau = \int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$ – тоже инвариант

(не зависит от с.о., из которой наблюдаем за объектом)

τ – собств. время

2.11 Сложение скоростей

л.с.о.: v_x, v_y, v_z

и.с.о. $(V,0,0)$: v_x', v_y', v_z'

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma(dx' + V dt')}{\Gamma(dt' + \frac{V}{c^2}dx')} =$$

$$= \frac{dx'/dt' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v_x' + V}{1 + V v_x'/c^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\Gamma(dt' + \frac{V}{c^2}dx')} =$$

$$= \frac{v_y'}{\Gamma(1 + V v_x'/c^2)}$$

$$v_z = \frac{v_z'}{\Gamma(1 + V v_x'/c^2)}$$

При $c \to \infty$: $v_x = v_x' + V$

$v_{y,z} = v_{y,z}'$

Убедимся, что $v < c$:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 =$$

$$= \frac{(v_x'+V)^2 + (v_y'^2 + v_z'^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 + V v_x'/c^2)^2} =$$

$$= c^2 + \frac{1}{(1+V v_x'/c^2)^2}\left[-c^2\left(1 + \frac{V^2 v_x'^2}{c^4} + \cancel{\frac{2V v_x'}{c^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + v_x'^2 + V^2 + \cancel{2v_x'V} + (v_y'^2 + v_z'^2)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] =$$

$$= c^2 + \frac{(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - c^2 + V^2}{(1 + V v_x'/c^2)^2} =$$

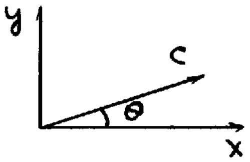
$$= c^2 + \frac{(v'^2 - c^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 + V v_x'/c^2)^2} < c^2$$

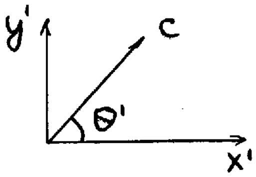
если $V<c$ и $v'<c$

2.12 Аберрация света

(лат: aberratio – уклонение)

ф-лы сложения скоростей верны $\forall$ объекта, в т.ч. солнечного зайчика ($v>c$) и света.





$$v_x = c\cos\theta = \frac{v_x' + V}{1 + V v_x'/c^2} = \frac{c\cos\theta' + V}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + V/c}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}$$

$$v_y = c\sin\theta = \frac{c\sin\theta'}{\Gamma(1 + \frac{V}{c}\cos\theta')}$$

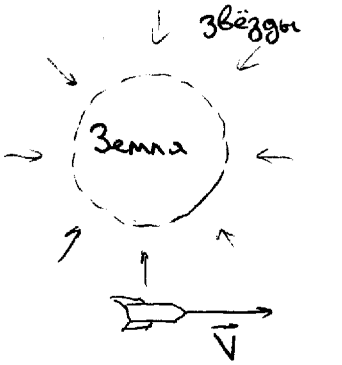
$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\Gamma(1 + \frac{V}{c}\cos\theta')}$$

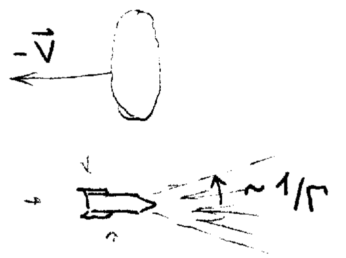
Эффект прожектора

в собств. с.о. светит изотропно

в л.с.о.: $\sin\theta = \frac{1}{\Gamma}$ (половина квантов летит в угле $\sim 1/\Gamma$)

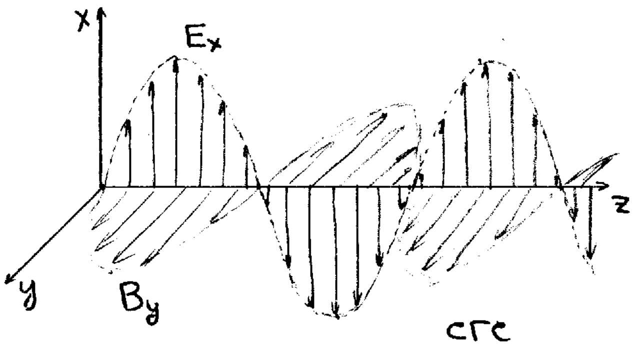
или





с.о. ракеты: половина звёзд видна в $\theta' \sim 1/\Gamma$

2.13 Плоская электромагнитная волна



$$E_x = E_0 \cos\overbrace{(kz-\omega t)}^{\text{фаза}} \overset{\text{СГС}}{=} B_y$$

- пример свободной плоской э/м волны в вакууме

ω – частота, $[\omega] = 1/\text{сек}$ (не путать с Гц, периодов в сек.)

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ – (временной) период

k – модуль волнового вектора,

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ – простр. период (длина волны)

$\vec{k}$ – волновой вектор, $\vec{k} \parallel$ напр. распростр. волны:

Наш пример:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Вообще:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \vec{E}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2 \perp \vec{k} \perp \vec{E}_1$$

(при удобном выборе $\vec{r}=0$ и $t=0$)

Фазовая скорость (точки постоянной фазы) $= c$

$\Downarrow$

$kz - \omega t = \text{const} \Rightarrow k\Delta z = \omega \Delta t$

$$v_{ф} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = c \Rightarrow \omega = kc$$

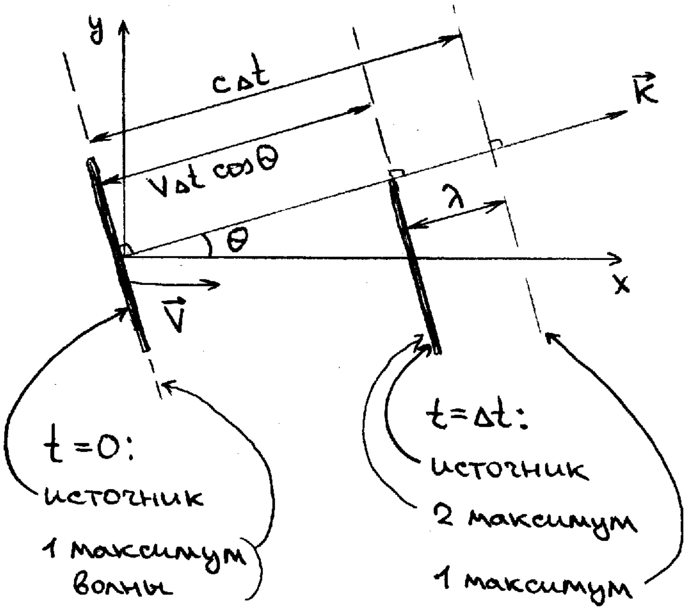
дисперсионное соотношение для э/м волны в вакууме

2.14 Эффект Доплера

В с.о. источника: $\omega_0, \vec{k}_0, \theta_0$

В л.с.о.: $\omega, \vec{k}, \theta$

(говорим про источник, т.к. с ним удобно выводить, но рез-т верен $\forall$ плоской волны)



$$\lambda = c\Delta t - V\Delta t\cos\theta = \underbrace{\Delta t}_{\substack{\text{период источника в л.с.о.,}\\ \ne \text{периоду волны } T,}} (c - V\cos\theta)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\Delta t = \Gamma \underbrace{\Delta t_0}_{\substack{\text{период ист.}\\ \text{в собств. с.о.}}} = \Gamma \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{\substack{\text{период волны}\\ \text{в собств. с.о.}}}$$

(11)

$$\omega_0 c = \omega\cdot\Gamma(c - V\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{k_x}{k} = \frac{k_x c}{\omega}$$

5 лекция

6 лекция, 21.09

$$\omega_0 = \Gamma(\omega - k_x V)$$

или (для экспер. проверки)

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V/c\cdot\cos\theta} \xrightarrow{\theta=0} \omega=\omega_0\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}$$

продольный эфф. Д.

$\Downarrow V\ll c$

$\omega\approx\omega_0/(1-V/c)$ (как для звука)

$\downarrow \theta=\pi/2$

$\omega=\omega_0/\Gamma$

поперечный э.Д. (релятивистский)

$$k_{0x} = k_0\cos\theta_0 = \frac{\omega_0}{c}\cos\theta_0 = \frac{\Gamma(\omega-\overset{\omega\cos\theta/c}{k_x}V)}{c}\,\frac{(\cos\theta - V/c)}{1-\frac{V}{c}\cos\theta} = \frac{\Gamma\omega}{c}\left(\cos\theta-\frac{V}{c}\right) = \Gamma\left(k_x - \frac{V\omega}{c^2}\right)$$

$$k_{0y} = \frac{\omega_0}{c}\sin\theta_0 = \frac{\Gamma\omega(1-V\cos\theta/c)\sin\theta}{c\cdot\Gamma(1-V\cos\theta/c)} = \frac{\omega}{c}\sin\theta = k_y$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\omega_0}{c}\\ k_{0x}\\ k_{0y}\\ k_{0z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma & -\frac{V}{c}\Gamma & 0 & 0\\ -\frac{V}{c}\Gamma & \Gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\omega}{c}\\ k_x\\ k_y\\ k_z\end{pmatrix}$$

2.15 4-векторы

$$A_\mu = (A_0, A_x, A_y, A_z) = (A_0, \vec A)$$

4-вектор, если при переходе между с.о.:

$$\begin{pmatrix}A_0'\\ A_x'\\ A_y'\\ A_z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma & -\Gamma\frac{V}{c} & 0 & 0\\ -\Gamma\frac{V}{c} & \Gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}$$

Произведение 4-векторов:

$$A_\mu B_\mu = A_0B_0 - A_xB_x - A_yB_y - A_zB_z = A_0B_0 - \vec A\vec B = inv, \text{ т.к.}$$

$$A'_\mu B'_\mu = \overbrace{\left(\Gamma A_0 - \Gamma\frac{V}{c}A_x\right)}^{A_0'}\overbrace{\left(\Gamma B_0 - \Gamma\frac{V}{c}B_x\right)}^{B_0'} - \overbrace{\left(-\Gamma\frac{V}{c}A_0 + \Gamma A_x\right)}^{A_x'}\overbrace{\left(-\Gamma\frac{V}{c}B_0 + \Gamma B_x\right)}^{B_x'} -$$

$$- A_yB_y - A_zB_z = A_0B_0\overbrace{\left(\Gamma^2 - \Gamma^2\frac{V^2}{c^2}\right)}^{=1} - A_xB_x\left(\Gamma^2 - \Gamma^2\frac{V^2}{c^2}\right) - A_yB_y - A_zB_z = A_\mu B_\mu$$

$\Delta A_\mu,\ dA_\mu,\ \frac{A_\mu}{inv},\ \frac{dA_\mu}{d(inv)}$ — тоже 4-векторы

Событие: $R_\mu = (ct, \vec r)$

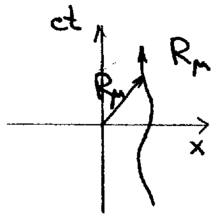
$$R_\mu R_\mu = c^2t^2 - (\vec r)^2 = \Delta S^2$$

Волновой 4-вектор: $K_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec k\right)$

$$K_\mu K_\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

$K_\mu R_\mu = \omega t - \vec k\vec r = inv$ (фаза э/м волны)

4-скорость: $U_\mu = \frac{dR_\mu(\tau)}{d\tau}$, где



$R_\mu(t)$ или $R_\mu(\tau)$ — мировая линия

"наше" время; собств. время

в разных с.о. компоненты 4-скорости будут разными (как и компоненты R_μ). какими?

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma},\ \Rightarrow\ \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$$

γ ← соотв. скорости объекта

$$U_\mu = \left(\gamma\frac{d}{dt}(ct),\ \gamma\frac{d}{dt}\vec r\right) = (\gamma c, \gamma\vec v)$$

$$U_\mu U_\mu = \gamma^2c^2 - \gamma^2v^2 = c^2$$

(12)

Преобр. скорости из преобр. U_μ:

$$U_0' = \Gamma U_0 - \Gamma \frac{V}{c} U_x$$

$$\gamma' c = \Gamma \gamma c - \Gamma \frac{V}{c} \gamma v_x$$

$$\boxed{\gamma' = \Gamma \gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)}$$ преобр. релятив. фактора.

очень полезная ф-ла:

$$U_x' = \gamma' v_x' = -\Gamma \frac{V}{c} \cdot c\gamma + \Gamma \cdot \gamma v_x$$

$$v_x' = \frac{\Gamma \gamma}{\gamma'} (v_x - V) = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}$$

$$U_y' = \gamma' v_y' = \gamma v_y = U_y$$

$$v_y' = \frac{\gamma v_y}{\gamma'} = \frac{v_y}{\Gamma(1 - V v_x / c^2)}$$

<u>4-ускорение</u>: $\frac{dU_\mu}{d\tau} = \left(\gamma \frac{d(\gamma c)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} \right)$

...

Альтернативное описание 4-векторов:

$$R_\mu = (\vec{r}, ict)$$

$$R_\mu R_\mu = r^2 + (ict)^2 = -\Delta S^2$$

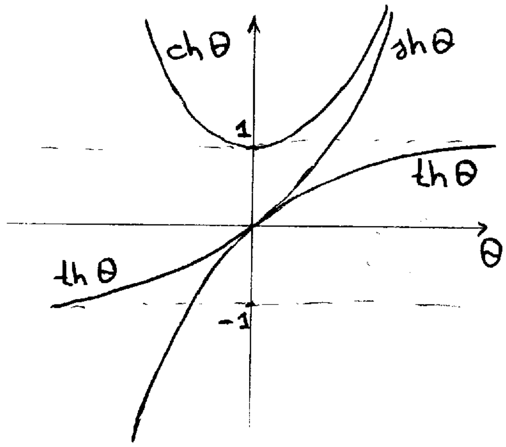
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & i\Gamma \frac{V}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\Gamma\frac{V}{c} & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

произведение - единообразно, зато матрица - с „i"

(2.16) Параметр скорости

(быстрота, rapidity)

$$\text{th}\,\theta = \frac{\text{sh}\,\theta}{\text{ch}\,\theta} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \cdot \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$$



$$\text{th}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\text{th}\,\theta_1 + \text{th}\,\theta_2}{1 + \text{th}\,\theta_1\, \text{th}\,\theta_2}$$ (легко проверить)

Введём $\theta, \theta', \theta_0$:

$$\text{th}\,\theta = \frac{v_x}{c}, \quad \text{th}\,\theta' = \frac{v_x'}{c}, \quad \text{th}\,\theta_0 = \frac{V}{c},$$

тогда $v_x = \frac{v_x' + V}{1 + V v_x'/c^2} \Longleftrightarrow \theta = \theta' + \theta_0$

параметры скор.

через быстроту т.ж. удобно выражаются эл-ты матр. Лоренца:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2\theta_0}} = \frac{\text{ch}\,\theta_0}{\sqrt{\text{ch}^2\theta_0 - \text{sh}^2\theta_0}} = \text{ch}\,\theta_0$$

$$\Gamma \frac{V}{c} = \text{ch}\,\theta_0 \cdot \text{th}\,\theta_0 = \text{sh}\,\theta_0$$

Матр. Лоренца, $(ct, \vec{r}) \longrightarrow (ct', \vec{r}')$:

$$\begin{pmatrix} \text{ch}\,\theta_0 & -\text{sh}\,\theta_0 & 0 & 0 \\ -\text{sh}\,\theta_0 & \text{ch}\,\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

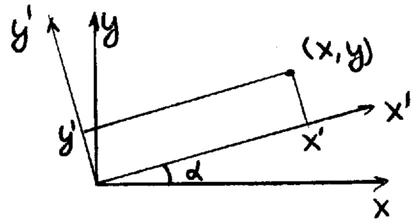
6 лекция

7 лекция, 28.09

или для $(\vec{r}, ict) \longrightarrow (\vec{r}', ict')$:

$$\begin{pmatrix} \text{ch}\,\theta_0 & 0 & 0 & i\,\text{sh}\,\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\,\text{sh}\,\theta_0 & 0 & 0 & \text{ch}\,\theta_0 \end{pmatrix}$$

похожа на матрицу 2d поворота:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \underset{\alpha = i\theta}{=} \frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2} = \operatorname{ch}\theta$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i} = i\operatorname{sh}\theta$$

$\Downarrow$

Преобр. Лоренца — поворот на мнимый угол в плоскости (x, ict)

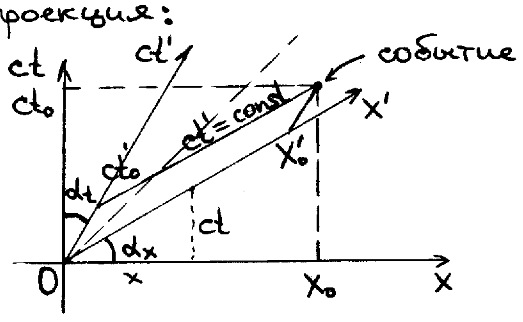
(2.17) Пространство Минковского

(= 4-мерное пр-во - время)

Его св-ва — св-ва пр-ва - времени, кот. можно сформулировать без привязки к с.о.

Чтобы не быть привязанным к с.о., научимся смотреть на явления одновременно из разных с.о.

2d проекция:



Оси для движ. системы:

ось x': $ct' = 0 \Rightarrow \Gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) = 0$

$$ct = \frac{V}{c}x \quad \text{(прямая)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_x = \frac{ct}{x}\Big|_{t'=0} = \frac{V}{c} < 1$$

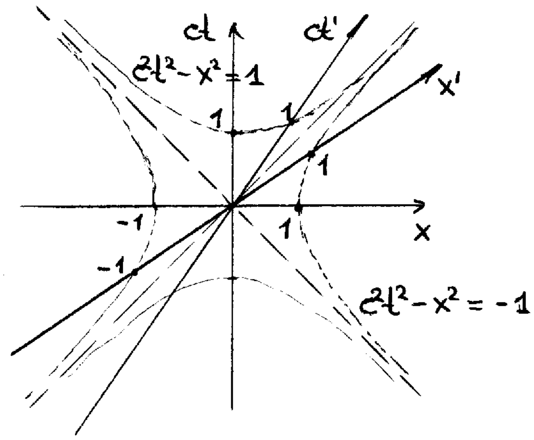
ось ct': $x' = 0 = \Gamma(x - Vt)$

$$ct = \frac{c}{V}x$$

$$\operatorname{tg}\alpha_t = \frac{x}{ct}\Big|_{x'=0} = \frac{V}{c} \Rightarrow \alpha_t = \alpha_x$$

Координаты события (ct_0', x') получаются с помощью линий $x' = \text{const}$ и $ct' = \text{const}$

Разметка осей: точка $x' = 1$, $ct' = 0$ на пересечении оси x' (где $ct' = 0$) и гиперболы $c^2t^2 - x^2 = -1$, т.к. на ней $c^2t'^2 - x'^2 = -1$



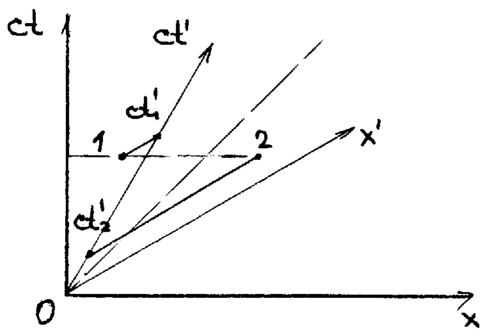
аналогично $c't' = 1$, $x' = 0$ из $c^2t^2 - x^2 = 1$

"Расстояние" между точками^2:

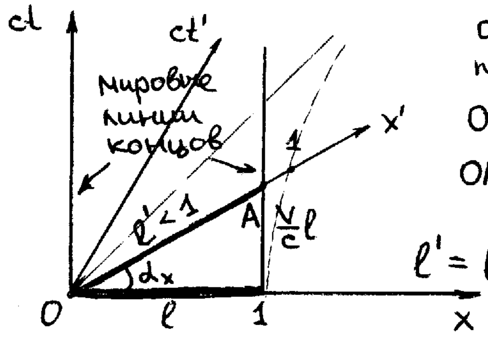
$$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$$

- не зависит от с.о.
- равноудал. точки (от нашей) — на гиперболах
- на образующих св. конуса $\Delta S = 0$ (выбором с.о. можно сделать сколь угодно близкими)

Относительность одновременности



Сокращение длины



отрезок покоится в л.с.о.

$OA^2 = -l'^2$

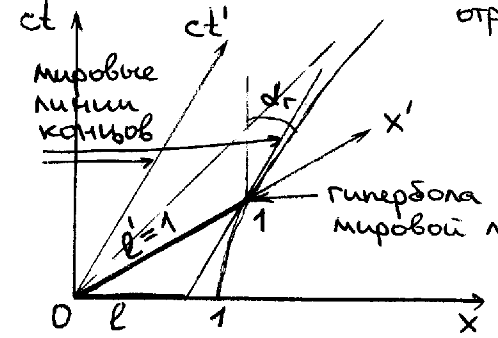
$OA^2 = \left(\frac{V}{c}l\right)^2 - l^2$

$\Downarrow$

$l' = l\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{l}{\Gamma}$

Если отрезок в л.с.о. меняет цвет, так что в л.с.о. $\forall t$ он одноцветный, то в и.с.о. — разноцветный $\forall t'$

движущийся отрезок:



гипербола касается мировой линии

$\Downarrow$ $l<1$

Док-во касания: $c^2t^2 - x^2 = -1 \Big\} \frac{d}{dt}$

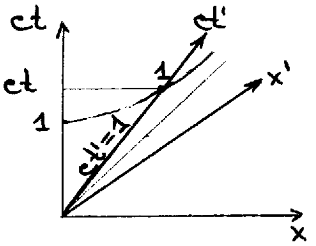
$2c^2t - 2x\frac{dx}{dt} = 0$

$\frac{dx}{c\,dt} = \frac{ct}{x} = \frac{V}{c}$

везде на гиперболе — на оси x'

$\operatorname{tg}\alpha_\Gamma = \frac{dx}{c\,dt} = \operatorname{tg}\alpha_t \Rightarrow \alpha_\Gamma = \alpha_t$

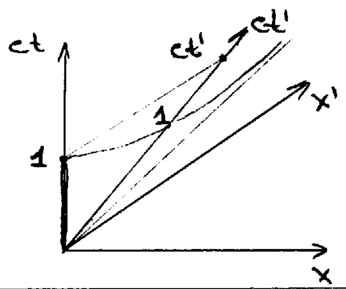
Замедление времени



движ. часы:

$t > t'$

(идут медленнее лабораторных)



покоящиеся часы:

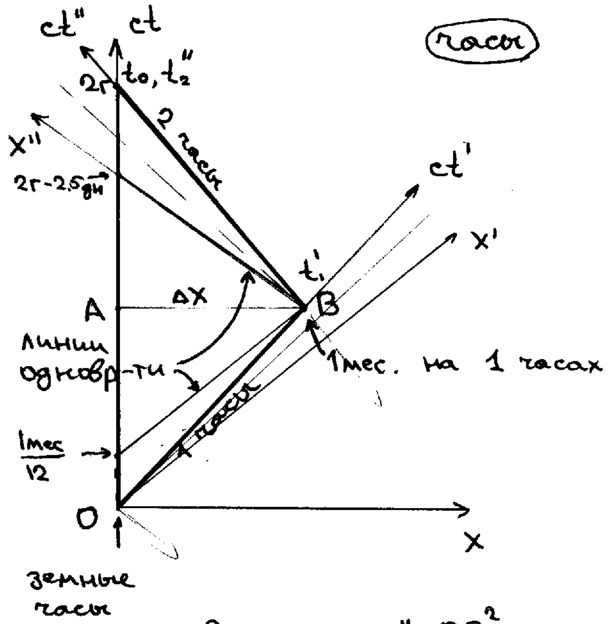
$t' > t$, т.е. с точки зрения движ. с.о. идут медленнее

7 лекция

8 лекция, 02.10, контрольная

9 лекция, 5.10

2.18 Парадокс близнецов



„Расстояние" OB^2:

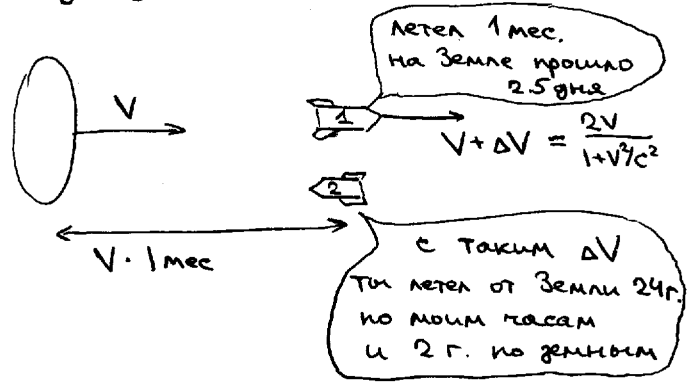
$$(ct_1')^2 = \left(\frac{ct_0}{2}\right)^2 - \Delta x^2$$

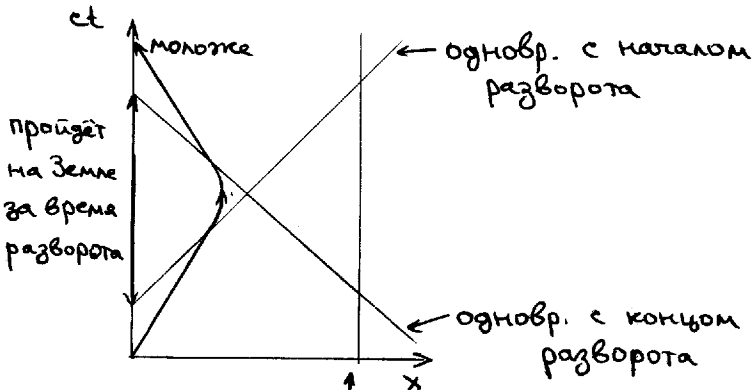
$\frac{t_0}{2} > t_1'$, $\quad t_0 > t_1' + t_2''$

Парадокс разрешают линии одновремен-ти

Пример: 2 г. в пути, $\Gamma = 12$

Взгляд из с.о. 2-х часов:





в этой точке во время разворота время „течёт" в другую сторону

III Релятивистская механика

3.1 Сила и масса

Механика (гр) – наука о машинах, искусство построения машин

ныне – наука о движ. тел и его причинах (бывает классич, квант., релят., спл. сред...)

Здесь – движ. материальных точек с $v \sim c$

Сила – мера воздействия со стороны других объектов, причина измен. скорости.

Масса – способность реагировать на силу, мера инертности тела.

Нерелят. механика: $\vec{F} = m\vec{a}$

Масса и сила – как яйцо и курица, одно определяется через другое

⇓

Нужна доп. возможность установить рав-во сил или масс — весы

⇓

масса – через эталон, сила через массу

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \underset{m=\mathrm{const}}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\overbrace{\vec{p}}^{\text{импульс}}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \iff \underbrace{\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt} = 0}$$

оказался более общим (но нужно расширять понятие импульса)

пример – эл-н в э/м волне

Нерелят. механика допускала дальнодействие

Дальнодействие противоречит принципу причинности:

л.с.о. и.с.о.

действ. ⇒ одновр. поехала и остановилась

один изм. скор. другой – ещё нет

⇓

только близкодействие:

тело испускает нечто

нечто летит до другого тела

действует на него (передаёт импульс)

Силы (фундамент. взаимод.):

- э/м (фотон)
- гравитац. (гравитон)
- сильное (глюон)
- слабое (W, Z - бозоны)

электрослабое взаимод.

3.2 Релятивистский импульс

(чтобы закон сохр. имп был ∀ с.о.)

Ищем $\vec{p} = f(v)\vec{v}$, т.к.

вообще $\vec{p} = \vec{p}(\cancel{\vec{r}}, \vec{v}, \cancel{t})$

однор. пр-ва

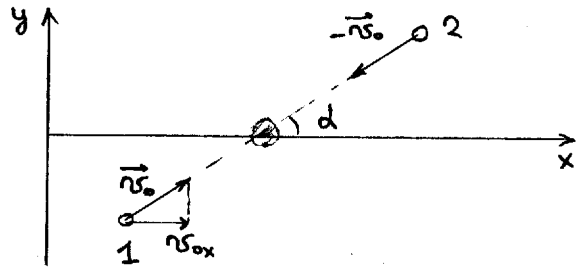
однор. времени

(других характ-к у мат. точки нет)

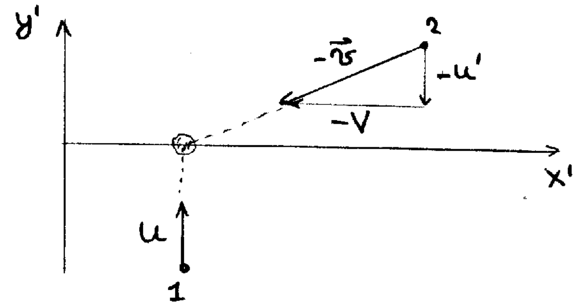
$\vec{p} \parallel \vec{v}$, т.к. изотропия пр-ва (других направлений нет)

Неупругое столкнов. одинак. частиц:

в л.с.о.:

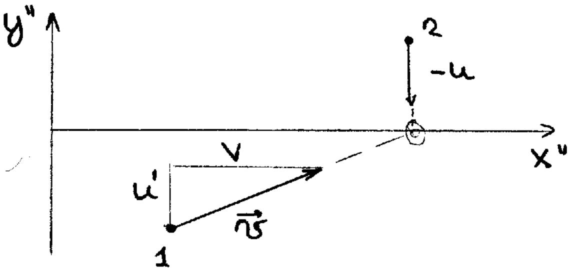


с.о. „1": v_{0x} относит. л.с.о.



с.о. „2": $-v_{0x}$ относ. л.с.о.

$-V$ относ. с.о. „1"



16

Переход из „1" в „2" для 1 частицы:

$$u' = \frac{u}{\Gamma(1-\frac{V}{c^2}\cdot 0)} = u\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

y-импульс в „2":

$$f_1(v)\cdot u' - f_2(u)u = 0$$

$$\frac{f_2(u)}{f_1(v)} = \frac{u'}{u} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

$\alpha \to 0$: $u \to 0$, $u' \to 0$, $V \to v$

$f_2(u) \to m$ ← масса при $u \to 0$ (д.б. переход к нерелятивизму)

$$f_1(v) \to \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m$$

$\Downarrow$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Σ сохраняется (постулат, опытный факт)

9 лекция

---

10 лекция, 9.10

3.3 Энергия

Тела провзаимодействовали:

$$\sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i = \sum_j \gamma_j M_j \vec{v}_j$$

← пусть в нач. и кон. состояниях полей нет

массы и скорости новых частиц

В движ. с.о.: $\sum_i \gamma_i' m_i \vec{v}_i' = \sum_j \gamma_j' M_j \vec{v}_j'$

Из 4-скорости $U_\mu = (\gamma c, \gamma\vec{v})$

$$\gamma' v_x' = \Gamma\gamma v_x - \Gamma\frac{V}{c}\gamma c = \Gamma\gamma(v_x - V)$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\sum_i \cancel{\Gamma}\gamma_i m_i (v_{ix}-V)}_{} = \underbrace{\sum_j \cancel{\Gamma}\gamma_j M_j (v_{jx}-V)}_{}$$

равны

$$\sum_i \gamma_i m_i = \sum_j \gamma_j M_j$$

Если $\mathcal{E}_i = \gamma_i m_i c^2$, то это - закон сохр. энергии

При $v \ll c$:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) =$$

$$= \underbrace{mc^2}_{\text{энергия покоя, } \mathcal{E}_0} + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\text{кинетическая энергия, } T}$$

Вообще $T = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (\gamma - 1)mc^2$

3.4 4-вектор энергии - импульса

$$p_\mu = mU_\mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right)$$

$$p_x' = \Gamma\left(p_x - \frac{V}{c}\cdot\frac{\mathcal{E}}{c}\right)$$

$$p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z,$$

$$\frac{\mathcal{E}'}{c} = \Gamma\left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \frac{V}{c}p_x\right) \Rightarrow \mathcal{E}' = \Gamma(\mathcal{E} - Vp_x)$$

$$p_\mu p_\mu = inv = \boxed{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2} = m^2 U_\mu U_\mu$$

$v \to c$, $\gamma \gg 1$: ультрарелятивистская ч-ца

$\mathcal{E} \approx pc$

(как будто массы нет)

3.5 Дефект масс

Система взаимод. тел:

$$\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_i + U$$

U ← энергия взаимодейств. (работа по сближ. частей = увеличение энергии поля)

$\mathcal{E}_i$ ← энергия отдельных частей (взятых с их полем, как если бы других частей не было)

$\vec{p} = 0$ ← выберем с.о. так (с.о. центра масс)

Масса системы: $M = \frac{\mathcal{E}}{c^2}$

$$M = \frac{\sum_i \mathcal{E}_i + U}{c^2} = \frac{\sum_i (m_i c^2 + T_i) + U}{c^2}$$

в т.ч. энергия поля — т.к. части двиг. отн. с.о.ц.м.

$\Downarrow$

$$M \neq \sum_i m_i$$

Дефект масс: $\Delta M = \sum_i m_i - M$

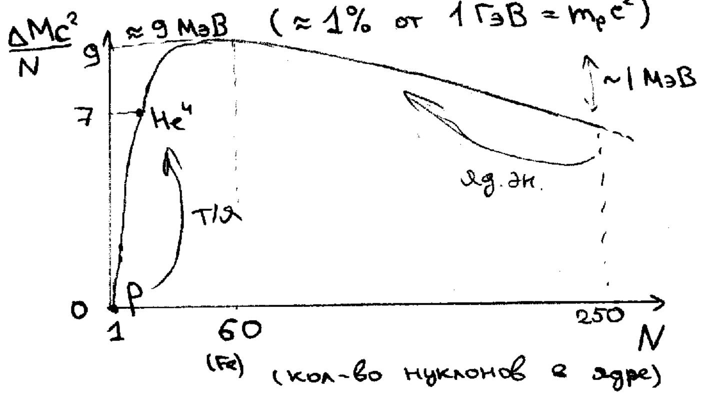
$$\Delta M = -\frac{\sum_i T_i + U}{c^2}$$

Если $\Delta M > 0 \Rightarrow$ сист. устойчива. (нужна энергия, чтобы разделить части) $(U<0,\ |U| > \sum T_i)$

$\Delta M < 0 \Rightarrow$ сист. может распасться

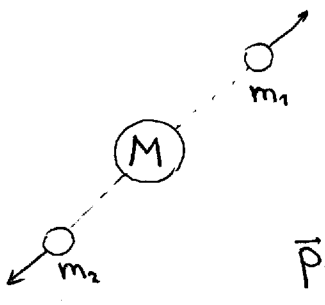
↑↑ Верно в т.ч. когда части далеко и (или) не взаимодействуют ($U=0$)

Энергия связи (binding energy):



3.6 Распад покоящейся частицы

Есть задачи, для решения кот. достаточно только законов сохранения



$$\begin{cases} Mc^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \\ 0 = \vec p_1 + \vec p_2 \end{cases}$$

$$\vec p_1 = -\vec p_2 \equiv \vec p$$

$$\mathcal{E}_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + p^2 c^2} \geq m_i c^2$$

$\Downarrow$

распад возможен при $M \geq m_1 + m_2$

(„=" при $\vec p = 0$, частицы не летят)

$$\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2 = (m_1^2 - m_2^2) c^4$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = Mc^2 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{c^2}{2}\left(M + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M}\right) = \frac{Mc^2}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2}\right)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Mc^2}{2}\left(1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2}\right)$$

Если $m_1 = m_2$, то $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{Mc^2}{2}$

Если $M = m_1 + m_2 + \overset{-\Delta M}{\delta M}$, то

$$T_1 = \mathcal{E}_1 - m_1 c^2 =$$

$$= \frac{c^2}{2M}\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2Mm_1\right) =$$

$$= \frac{c^2}{2M}\Big(\cancel{m_1^2} + \cancel{m_2^2} + \delta M^2 + \cancel{2m_1m_2} + \cancel{2m_1\delta M} +$$

$$+ 2m_2\delta M + \cancel{m_1^2} - \cancel{m_2^2} - \cancel{2m_1^2} - \cancel{2m_1m_2} -$$

$$- \cancel{2m_1\delta M}\Big) = \frac{c^2}{2M}\left(2m_2\delta M + \delta M^2\right)$$

$T_1 + T_2 = \delta M \cdot c^2$ (кстати)

при $\delta M \ll m_1, m_2$: $T_1 \approx \frac{m_2}{M} \cdot \delta M c^2$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

3.7 Распад двигавшейся частицы

В собств. с.о.:

$\mathcal{E}_{10}, \mathcal{E}_{20}$ (знаем)

$$p_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{10}^2}{c^2} - m_1^2 c^2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{20}^2}{c^2} - m_2^2 c^2}$$

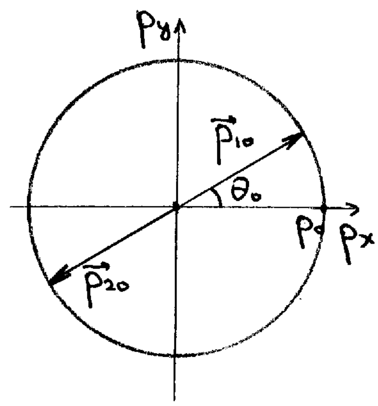


диаграмма импульсов – окр-ть
(мн-во точек, соотв. возм. распадам)
(вообще – сфера, но при $\vec{x} \parallel \vec{V}$,
$\vec{y} \in (\vec{p}_{10}, \vec{V})$ – окружность)

$$P_{1\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}_{10}}{c},\ p_0 \cos\Theta_0,\ p_0 \sin\Theta_0,\ 0 \right)$$

$$P_{2\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}_{20}}{c},\ -p_0 \cos\Theta_0,\ -p_0 \sin\Theta_0,\ 0 \right)$$

$$P_{1\mu} + P_{2\mu} = \left(Mc^2, 0, 0, 0 \right) = P_{0\mu}$$

10 лекция

11 лекция, 12.10

В л.с.о.:

$$p_{1x} = \Gamma \left(p_0 \cos\Theta_0 + \frac{V}{c} \cdot \frac{\mathcal{E}_{10}}{c} \right)$$

V – скорость с.о. (исх. частицы)

$$p_{1y} = p_0 \sin\Theta_0$$

Задают диагр. импульсов в параметрич. виде; избавимся от Θ_0:

$$\Bigg(\underbrace{\frac{p_{1x} - \frac{\Gamma V \mathcal{E}_{10}}{c^2}}{\Gamma p_0}}_{\cos\Theta_0} \Bigg)^2 + \Bigg(\underbrace{\frac{p_{1y}}{p_0}}_{\sin\Theta_0} \Bigg)^2 = 1$$

Ур-е эллипса: $\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

полуоси: $a = \Gamma p_0$, $b = p_0$

центр: $(x_0, 0)$, $x_0 = \frac{\Gamma V \mathcal{E}_{10}}{c^2} \equiv p_{1c}$

расст. до фокусов: $f = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$f = \sqrt{\Gamma^2 p_0^2 - p_0^2} = p_0 \sqrt{\frac{1 - 1 + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2}} = \Gamma p_0 \frac{V}{c}$$

эксцентриситет: $e = \frac{f}{a} = \frac{V}{c}$
(мера вытянутости)

Для 2 частицы: всё то же, но
$p_{2c} = \frac{\Gamma V \mathcal{E}_{20}}{c^2}$, причём

$$p_{1c} + p_{2c} = \frac{\Gamma V}{c^2} \underbrace{(\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20})}_{Mc^2} = \underbrace{\Gamma M V}_{\text{импульс исх. частицы}}$$

Построение диаграммы импульсов

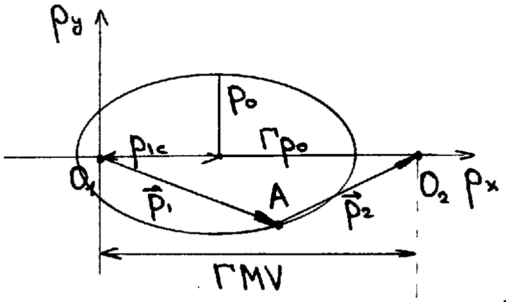
1. Знаем M, V, m_1, m_2. Находим:

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{Mc^2}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2} \right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{10}^2}{c^2} - m_1^2 c^2}$$

2. Эллипс: $a = \Gamma p_0$, $b = p_0$



3. Ось p_y и т. O_1 на $p_{1c} = \frac{\Gamma V \mathcal{E}_{10}}{c^2}$ левее центра
4. т. O_2 на $\Gamma M V$ правее т. O_1
5. $\forall$ т. A на эллипсе – возможный распад,
$\vec{p}_1 = \overrightarrow{O_1 A}$ (на эллипсе, удовл. ур-ю на $\vec{p}_1$)
$\vec{p}_2 = \overrightarrow{A O_2} = \Gamma M \vec{V} - \vec{p}_1$ (удовл. зак. сохр. имп.)

3.8 Излучение фотонов

Если „1" – фотон: $m_1 = 0$

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{Mc^2}{2} \left(1 - \frac{m_2^2}{M^2} \right) \leqslant \frac{Mc^2}{2}$$

$$p_0 = \frac{\mathcal{E}_{10}}{c}$$

$$p_{1c} = \frac{\Gamma V \mathcal{E}_{10}}{c^2} = \Gamma p_0 \cdot \frac{V}{c} = a \cdot e = f$$

$\Downarrow$
т. O_1 – в фокусе

Если при этом $m_2 = M$, то $\mathcal{E}_{10} = 0$

$\Downarrow$

распада нет

$\Downarrow$

частица сама по себе не может излучить фотон (запрещ. зак. сохранения)

атом - может, т.к. при этом уменьшает массу

В с.о. частицы:

$$\textcircled{M} \longleftarrow \textcircled{M} \longrightarrow$$

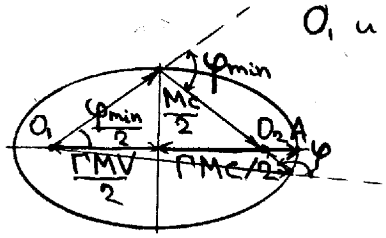
$\mathcal{E}_{20} > Mc^2$ (движется) $\quad Mc^2 \quad \mathcal{E}_{10} > 0$

$\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20} > Mc^2$ (не м.б.)

Если „2" - тоже фотон, то

$$\mathcal{E}_{10} = \mathcal{E}_{20} = \frac{Mc^2}{2}, \quad p_0 = \frac{Mc}{2}$$

O_1 и O_2 - фокусы



фотон летит в $\forall$ сторону, но

$\exists\ \varphi_{min}$ - мин. угол разлёта фотонов

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_{min}}{2} = \frac{Mc/2}{\Gamma M V/2} = \frac{c}{\Gamma V}$$

Св-во эллипса $\Leftrightarrow$ закон сохр. энергии

$$|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2| = 2a \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{c} + \frac{\mathcal{E}_2}{c} = \Gamma Mc$$

Макс. энергия фотона:

$$\mathcal{E}_{max} = c \cdot |\vec{p}_{1,max}| = c\,|O_1 A| = \frac{\Gamma Mc}{2}(V + c) = \frac{Mc^2}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}$$

$\mathcal{E}_{min}$ - аналогично

3.9 Рождение новой частицы

Было: $m_1, \vec{p}_1, \mathcal{E}_1$, $\quad m_2, \vec{p}_2, \mathcal{E}_2$,

Стало: $M, \vec{p}, \mathcal{E}$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

Обычно ищут мин. энергии для рожд. M или максимальную M при данных $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$

$$M^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = \frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} + \frac{\mathcal{E}_2^2}{c^2} + \frac{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2\left(\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - \vec{p}_1\vec{p}_2\right)$$

то же через 4-векторы:

$$M^2c^2 = P_\mu P_\mu = (P_{1\mu} + P_{2\mu})^2 = P_{1\mu}^2 + P_{2\mu}^2 + 2P_{1\mu}P_{2\mu} = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2\left(\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - \vec{p}_1\vec{p}_2\right)$$

Пример: рождение антипротона

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

„в лоб" не решится, т.к. много частиц

$\Rightarrow$ считаем продукты реакции одной системой массы $M \geq 4m_p$

„=" - если движ. вместе ($T_i = 0$), мин. энергия исх. частиц

а) покоящ. мишень: $\vec{p}_2 = 0$, $\mathcal{E}_2 = m_pc^2$

$$16 m_p^2c^2 = 2m_p^2c^2 + \frac{2\mathcal{E}_1 \cdot m_pc^2}{c^2}$$

$$\mathcal{E}_1 = 7m_pc^2 \Rightarrow T_1 = 6m_pc^2 \approx 6 \text{ ГэВ}$$

Нужен ускоритель на 6 ГэВ

б) встречные пучки: $\vec{p} = 0$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{Mc^2}{2}$

$$T_1 = \mathcal{E}_1 - m_pc^2 = m_pc^2$$

$\Downarrow$

достаточно ускорить на 1 ГэВ

(не нужно тратить энергию на движение продуктов реакции)

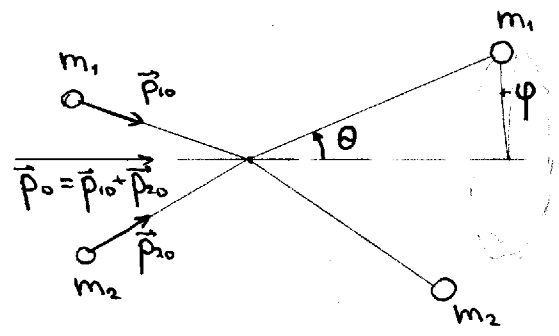
$\Downarrow$

Метод встречных пучков

11 лекция

12 лекция, 16.10

(3.10) Упругое рассеяние



Известны: $m_1, m_2, \vec p_{10}, \vec p_{20}$

Ищем: $\vec p_1, \vec p_2$ (6 величин)

Имеем: 4 зак. сохр. ($\mathcal{E}, p_x, p_y, p_z$)

⇓

2 своб. параметра (напр. 2 угла, θ и φ)

Законы сохр. в 4-векторной форме:

$$P_{10\mu}+P_{20\mu}=P_{1\mu}+P_{2\mu}$$

$$P_{10\mu}^2=P_{1\mu}^2=m_1^2c^2,\quad P_{20\mu}^2=P_{2\mu}^2=m_2^2c^2$$

$$P_{2\mu}=P_{10\mu}+P_{20\mu}-P_{1\mu}$$

$$\cancel{P_{2\mu}^2}=P_{10\mu}^2+\cancel{P_{20\mu}^2}+P_{1\mu}^2+2P_{10\mu}P_{20\mu}-2P_{10\mu}P_{1\mu}-2P_{20\mu}P_{1\mu}$$

$$2m_1^2c^2+2\left(\frac{\mathcal{E}_{10}\mathcal{E}_{20}}{c^2}-\vec p_{10}\vec p_{20}\right)=2\left(\frac{(\mathcal{E}_{10}+\mathcal{E}_{20})\mathcal{E}_1}{c^2}-\underbrace{(\vec p_{10}+\vec p_{20})}_{\vec p_0}\vec p_1\right)$$

$$\vec p_0\vec p_1=p_0p_1\cos\theta,\quad p_1=\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2}-m_1^2c^2}$$

$$m_1^2c^2+\frac{\mathcal{E}_{10}\mathcal{E}_{20}}{c^2}-\vec p_{10}\vec p_{20}=\frac{(\mathcal{E}_{10}+\mathcal{E}_{20})\mathcal{E}_1}{c^2}-p_0\cos\theta\cdot\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2}-m_1^2c^2} \qquad (3.10)$$

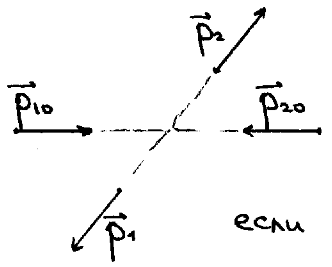
⇙ квадр. ур-е на $\mathcal{E}_1 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \Rightarrow p_1$

⇙ $\vec p_1$ через p_1, θ, φ

⇙ $\vec p_2$ (решать не будем)

В с.о. центра масс: $\vec p_{10}+\vec p_{20}=0$

$\vec p_1+\vec p_2=0$



⇓

$|\vec p_1|=|\vec p_{10}|$

если иначе, то $|\vec p_1|\gtrless|\vec p_{10}|$,

$$\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2=\sum_{i=1,2}\sqrt{p_i^2c^2+m_i^2c^4}\gtrless\mathcal{E}_{10}+\mathcal{E}_{20}$$

(противоречие)

(3.11) Комптоновское рассеяние

$m_1=0,\ p_1=\frac{\mathcal{E}_1}{c},\ p_{10}=\frac{\mathcal{E}_{10}}{c}$ (фотон)

$m_2\neq0,\ \vec p_{20}=0$ (покоящ. частица)

$\vec p_0=\vec p_{10},\ \theta=\angle(\vec p_{10},\vec p_1)$ — угол рассеяния фотона

Из (3.10):

$$\frac{\mathcal{E}_{10}\cdot m_2c^2}{c^2}=\frac{(\mathcal{E}_{10}+m_2c^2)\mathcal{E}_1}{c^2}-\frac{\mathcal{E}_{10}\mathcal{E}_1\cos\theta}{c^2}$$

$$\mathcal{E}_1=\frac{\mathcal{E}_{10}\cdot m_2c^2}{\mathcal{E}_{10}+m_2c^2-\mathcal{E}_{10}\cos\theta}$$

$\mathcal{E}_1=\hbar\omega_1,\quad \hbar=1.054\cdot10^{-27}$ эрг·с $=\frac{h}{2\pi}$

(постоянная Планка)

$$\omega=kc=\frac{2\pi c}{\lambda}\Rightarrow\mathcal{E}=\frac{hc}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda_1}{hc}=\frac{\mathcal{E}_{10}(1-\cos\theta)+m_2c^2}{\mathcal{E}_{10}\cdot m_2c^2}=\frac{1-\cos\theta}{m_2c^2}+\frac{\lambda_{10}}{hc}$$

$$\lambda_1=\lambda_{10}+\underbrace{\frac{h}{m_2c}}_{\lambda_c}(1-\cos\theta)\geq\lambda_{10}$$

λ_c, комптоновская длина

Эл-н: $\lambda_c\approx2.4\cdot10^{-10}$ см

Видимый свет: $\lambda=(4\div7.4)\cdot10^{-5}$ см

⇓

эффект заметен для рентг. и γ-излуч.

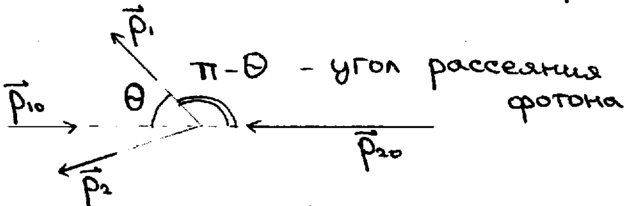
(эксперим. подтвержд. квант. природы света, 1922, Compton, США, (Arthur Holly)
если бы квантов не было, $h\to0$, $\lambda=\lambda_0$)

3.12 Обратное комптоновское рассеяние

(уменьшение λ при расс. на движ. частице)

$m_1 = 0, \quad \vec{p}_{10} \uparrow\downarrow \vec{p}_{20} \uparrow\uparrow \vec{p}_0$

(лобовое столкн., $p_{20} > p_{10}$)



$$(3.10): \quad \frac{\varepsilon_{10}\varepsilon_{20}}{c^2} + \overbrace{p_{10}}^{\varepsilon_{10}/c} p_{20} = \frac{(\varepsilon_{10}+\varepsilon_{20})\varepsilon_1}{c^2} - (p_{20}-p_{10})\frac{\varepsilon_1}{c}\cdot\cos\theta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{10}(\varepsilon_{20}+p_{20}c)}{\underbrace{\varepsilon_{10}+\varepsilon_{20}}_{\vee} - \underbrace{(p_{20}c-\varepsilon_{10})}_{\parallel}\cos\theta}, \quad \text{найдём, когда максим.}$$

$(p_{10}+p_{20})c > (p_{20}-p_{10})c \Rightarrow$ знамен. $\neq 0$

$\Downarrow$

ε_1 максимальна при $\cos\theta = 1$ (рассеяние назад):

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{10}(\varepsilon_{20}+p_{20}c)}{2\varepsilon_{10}+\varepsilon_{20}-p_{20}c}$$

Наиб. интересен случай $\varepsilon_{20} \gg \varepsilon_{10}, m_2c^2$ („нормальный" фотон на ультрарел. ч.)

$$p_{20}c = \sqrt{\varepsilon_{20}^2 - m_2^2c^4} \approx \varepsilon_{20}\left(1 - \frac{m_2^2c^4}{2\varepsilon_{20}^2}\right)$$

$$\varepsilon_1 \approx \frac{\varepsilon_{10}\cdot 2\varepsilon_{20}}{2\varepsilon_{10} + \frac{m_2^2c^4}{2\varepsilon_{20}}} = \frac{\varepsilon_{20}}{1 + \frac{m_2^2c^4}{4\varepsilon_{10}\varepsilon_{20}}}$$

Если $\varepsilon_{20} \gg \dfrac{m_2^2c^4}{4\varepsilon_{10}}$, то $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{20}$

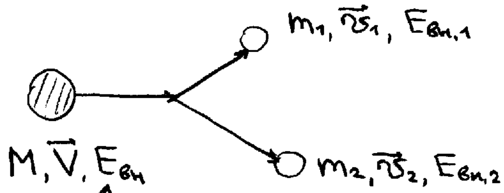
Пример: $\varepsilon_{20} = 46$ ГэВ (SLAC)

$m_2c^2 = 511$ кэВ (эл-ны)

$\varepsilon_{10} = 1.2$ эВ (неодим. ИК-лазер)

$\varepsilon_1 \approx 21$ ГэВ (1996)

3.13 Нерелятивистский распад.



внутр. энергия

= энергия покоя − эн. покоя частей

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{энергия распада}}}{E} = E_{вн} - E_{вн,1} - E_{вн,2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{нужно для распада}}}{\geqslant} 0$$

$$E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{MV^2}{2} \quad \forall \text{ с.о., т.к.}$$

эта сумма не зав. от с.о.; в другой с.о.:

$$\sum_{i=1,2}\frac{m_i(\vec{v}_i+\vec{v}_0)^2}{2} - \frac{M(\vec{V}+\vec{v}_0)^2}{2} =$$

$$= \sum\frac{m_iv_i^2}{2} - \frac{MV^2}{2} + \vec{v}_0\underbrace{\left(\sum m_i\vec{v}_i - M\vec{V}\right)}_{=0,\ \text{сохр. имп.}} + \frac{v_0^2}{2}\underbrace{\left(\sum m_i - M\right)}_{=0,\ \text{сохр. массы}}$$

В с.о.ц.м.: $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2', \quad |\vec{p}_i'| = p_0$

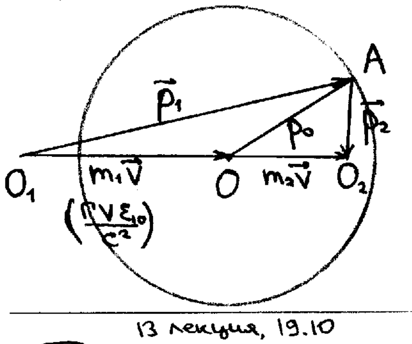
$$E = \frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2} = \frac{p_0^2}{2\mu}, \quad \text{где}$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \text{ – приведённая масса}$$

$\Downarrow$

$$p_0 = \sqrt{2\mu E} \Rightarrow v_i' = \frac{p_0}{m_i} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{p}_i = m_i\vec{V} + \vec{p}_i'$$



$\vec{O_1A} = \vec{O_1O} + \vec{OA}$

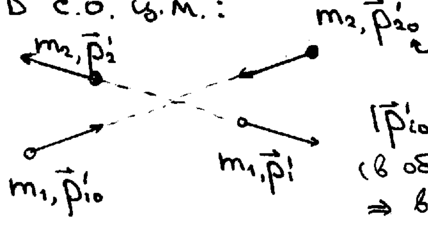
$\vec{AO_2} = \vec{OO_2} + \vec{AO}$

12 лекция

13 лекция, 19.10

3.14 Нерелятивистское упругое рассеяние

В с.о.ц.м.:



до взаимод.

$|\vec{p}_{i0}'| = |\vec{p}_i'| = p_0$

(в общем случае так, $\Rightarrow$ в частном тоже)

Искать возможные скорости в с.о.ц.м. легко. Чтобы найти их в л.с.о., нужна

Скорость с.о.ц.м.: $\vec V = \frac{m_1\vec v_{10} + m_2\vec v_{20}}{m_1+m_2}$,

получим её из релятивизма

в релятивизме $p'_x = 0 = \Gamma\left(p_x - \frac{V\mathcal{E}}{c^2}\right)$

$$V = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} \Rightarrow \vec V = \frac{\vec p c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\sum_i \gamma_i m_i \vec v_i}{\sum_i \gamma_i m_i}$$

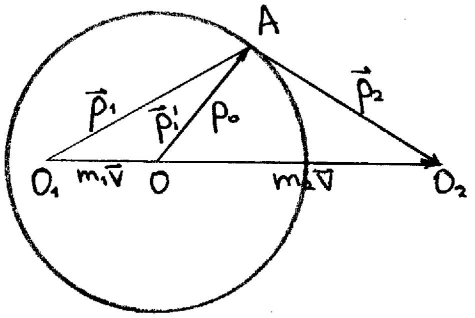
чтобы $p_y = p_z = 0$ д.б. $\vec p \parallel \vec V \parallel \vec x$

По $\vec v_{10}, \vec v_{20}$ ищем возможные $\vec v_1, \vec v_2$:
(есть 2 своб. параметра)

$$\vec v'_{10} = \vec v_{10} - \vec V = \frac{\vec v_{10}(m_1+m_2) - m_1\vec v_{10} - m_2\vec v_{20}}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_2(\vec v_{10} - \vec v_{20})}{m_1+m_2} \equiv \frac{m_2\Delta\vec v}{m_1+m_2}$$

$$p_0 = m_1|\vec v'_{10}| = \frac{m_1 m_2 \Delta v}{m_1+m_2} = \mu\Delta v$$



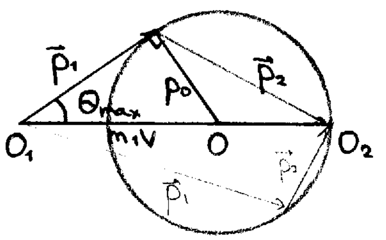
Всё так же, т.к. частицы до рассеяния м. считать системой с массой M и $\vec V$
⇒ как распад

Если „2" покоилась: $\vec V = \frac{m_1\vec v_{10}}{m_1+m_2}$

$\Delta\vec v = \vec v_{10}$, $OO_2 = m_2 V = \mu v_{10} = \mu\Delta v = p_0$

⇒ т. O_2 - на окр-ти:

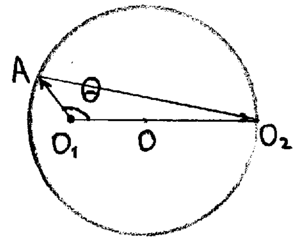
$m_1 > m_2$: $O_1O > p_0$



$\exists\,\theta_{max}$:

$$\sin\theta_{max} = \frac{p_0}{m_1 V} = \frac{m_2}{m_1}$$

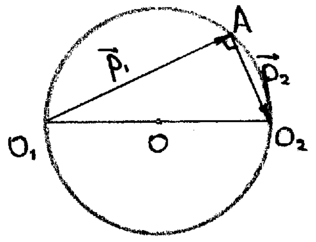
$m_1 < m_2$:



$\forall\theta$

$m_1 = m_2$:

$O_1O = OO_2$

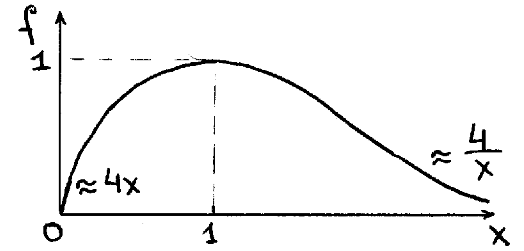


Переданная энергия:

$$T_{2,max} = \frac{p^2_{2,max}}{2m_2} = \frac{(2p_0)^2}{2m_2} = \frac{2\mu^2 v_{10}^2}{m_2} =$$

$$= \frac{2m_1^2 m_2 v_{10}^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2}\cdot\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} =$$

$$= T_{10}\cdot f(x), \quad f(x) = \frac{4x}{(1+x)^2}, \quad x = \frac{m_1}{m_2}$$



$T_{2,max} = T_{10}$ только при $m_1 = m_2$

Если $m_1 \gg m_2$ или $m_1 \ll m_2$, то $T_{2,max} \approx 4\frac{m_{min}}{m_{max}} T_{10}$

(3.15) 4-вектор силы

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau} = m\frac{du_\mu}{d\tau} = \left(\gamma\frac{d(\mathcal{E}/c)}{dt}, \gamma\frac{d\vec p}{dt}\right) =$$

$$= \left(\gamma mc\frac{d\gamma}{dt}, \gamma m\frac{d\gamma\vec v}{dt}\right)$$

по аналогии с нерелятивизмом введём

сила: $\vec f = \frac{d\vec p}{dt}$, мощность: $N = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$

они связаны так же, как в нерел. мех.:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2 \Rightarrow \frac{2\mathcal{E}}{c^2}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2\vec p\frac{d\vec p}{dt}$$

$$N = \frac{\vec p c^2}{\mathcal{E}}\frac{d\vec p}{dt} = \frac{\gamma m\vec v}{\gamma m}\vec f = \vec v\vec f$$

Работа силы:

$$\Delta\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int N\,dt = \int \vec f\vec v\,dt = \int \vec f\,d\vec r$$

вдоль траектории

$$F_\mu = \left(\frac{\gamma}{c}N,\ \gamma\vec{f}\right)$$

$$F_\mu F_\mu = \frac{\gamma^2}{c^2}N^2 - \gamma^2 f^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}(v f_\parallel)^2 - \gamma^2 f^2 =$$

$$= \gamma^2\left(\frac{v^2}{c^2}f_\parallel^2 - f_\parallel^2 - f_\perp^2\right) = -f_\parallel^2 - \gamma^2 f_\perp^2 = inv$$

В сопутств. с.о.: $\vec{v}=0,\ \gamma=1,\ F_\mu^2 = -f^2$

Если $\vec{f} \parallel \vec{v}$, то $f_\perp = 0,\ f_\parallel = f$ - inv

4-ускор: $\left(\frac{du_\mu}{d\tau}\right)^2 = \frac{F_\mu^2}{m^2} = -\frac{f^2}{m^2} = -a^2$

в сопутств. с.о.

3.16 Прямолинейное равноускоренное движение

Пусть в л.с.о. $\vec{f} = const$, $\vec{v} \parallel \vec{f}$

$\Rightarrow$ в сопутств. с.о. $\vec{f} = const$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{f}}{m} = const$$

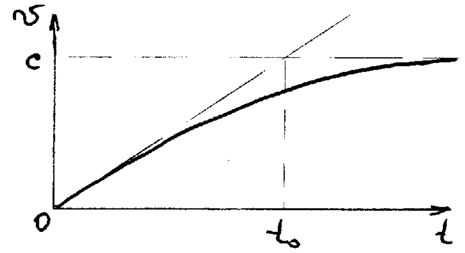
В л.с.о.: $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\vec{p} = \cancel{\vec{p}_0} + \vec{f}t = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

пусть $\vec{p}=0$ при $t=0$

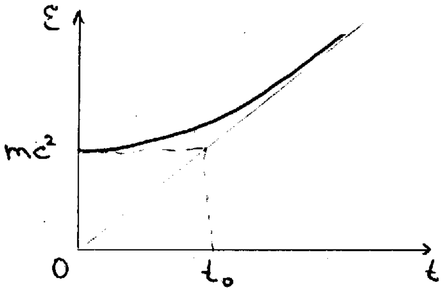
$$\left(\frac{ft}{mc}\right)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v^2}{c^2}, \qquad t_0 = \frac{mc}{f}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(t/t_0)^2}{1 + (t/t_0)^2}, \qquad \frac{v}{c} = \frac{t/t_0}{\sqrt{1 + t^2/t_0^2}}$$



$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 + t^2/t_0^2 - t^2/t_0^2}{1 + t^2/t_0^2}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + t^2/t_0^2} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \xrightarrow[t \gg t_0]{} \frac{t}{t_0}$$



$$a = \frac{dv}{dt} = c\left[\frac{1}{t_0\sqrt{1 + t^2/t_0^2}} - \frac{t/t_0 \cdot t/t_0^2}{(1 + t^2/t_0^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{c}{t_0} \cdot \frac{1 + t^2/t_0^2 - t^2/t_0^2}{(1 + t^2/t_0^2)^{3/2}} = \frac{c}{\gamma^3 t_0} = \frac{f}{\gamma^3 m} \neq const$$

$x(t)$: $\frac{dx}{dt} = v = \frac{ct/t_0}{\sqrt{1 + t^2/t_0^2}}$ $\qquad S = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$

$$x = \int_0^t \frac{ct/t_0 \cdot dt}{\sqrt{1 + t^2/t_0^2}} = ct_0 \int_0^t \frac{(t/t_0)\, d(t/t_0)}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}} =$$

$x=0$ при $t=0$

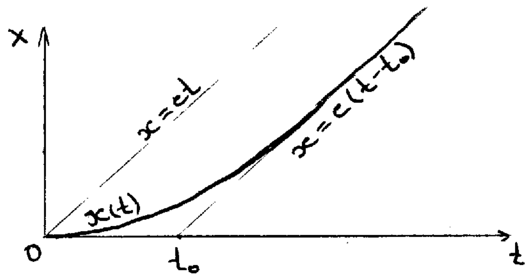
$$= ct_0 \int_0^{(t/t_0)^2} \frac{dS/2}{\sqrt{1+S}} = ct_0 \cdot \sqrt{1+S}\,\Big|_0^{(t/t_0)^2} =$$

$$= ct_0\left(\sqrt{1 + t^2/t_0^2} - 1\right)$$

$t \ll t_0$: $x \approx ct_0\left(1 + \frac{t^2}{2t_0^2} - 1\right) = \frac{ct^2}{2t_0} = \frac{ft^2}{2m}$

$t \gg t_0$: $x = ct\sqrt{1 + t_0^2/t^2} - ct_0 \approx$

$$\approx c(t - t_0) + \frac{ct_0^2}{2t}$$



свет, испущ. при $t \geq t_0$, не догонит

13 лекция

14 лекция, 23.10

Собств. время: $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

$$\tau = \int_0^\tau d\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2/t_0^2}} = t_0\, \mathrm{arcsh}\frac{t}{t_0}$$

$$t = t_0\, \mathrm{sh}\frac{\tau}{t_0}, \qquad \gamma = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{\tau}{t_0}} = \mathrm{ch}\frac{\tau}{t_0}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{t/t_0}{\gamma} = \mathrm{th}\frac{\tau}{t_0} = \mathrm{th}\,\theta \leftarrow \text{парам. скор.}$$

$\Theta = \frac{\tau}{t_0}$

$\frac{x}{ct_0} = \gamma - 1 = \operatorname{ch}\Theta - 1 = \operatorname{ch}\frac{\tau}{t_0} - 1$

Пример: $\frac{f}{m} = g, \Rightarrow t_0 = \frac{c}{g} \approx 1$ год

летим далеко: $x \gg ct_0$, $\frac{x}{ct_0} \approx \frac{e^{\tau/t_0}}{2}$

$\tau = t_0 \ln\frac{2x}{ct_0}$

самый далёкий видимый объект:

$\tau \approx t_0 \cdot \ln\frac{10^{10}\text{ св. лет}}{c\cdot t_0} \approx 23$ года

(3.17) Нерелятивистское движение с переменной массой

$\vec{x}$ dm за dt (знаем)

m, $\vec{v}$, u_0 (отн. ракеты), $\vec{F}$

Сохр. импульса: $\overbrace{F\,dt}^{\text{полное измен. импульса}} = \underbrace{m\,dv}_{\text{изм. имп. ракеты}} + \overbrace{dm\cdot u_0}^{\text{изм. импульса газа, } dp_r}$,

т.к. $dp_r = dm_r \cdot \Delta v_r = (-dm)\cdot(-u_0)$

⇓

$$F = m\frac{dv}{dt} + u_0\frac{dm}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} + (u_0 - v)\frac{dm}{dt}$$

$F=0$: $\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u_0}$, $\int_{\text{нач. сост.}}^{\text{конечн. состояние}}$

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{(v - \cancel{v_0}^{\,0})}{u_0}$$

$\boxed{m = m_0 e^{-v/u_0}}$ - ф-ла Циолковского

Если единовременно сбросить Δm:

$m_0 = m + \Delta m$ $\quad \Delta m(u_0 - v) = mv$

$u_0 - v$, Δm, m, v

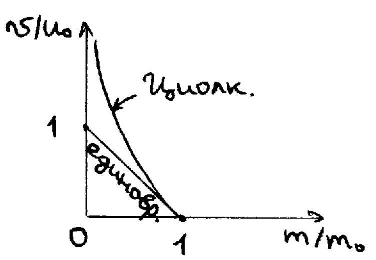
$(m_0 - m)(u_0 - v) = mv$

$u_0(m_0 - m) = m_0 v$

$v = u_0\left(1 - \frac{m}{m_0}\right)$

сравним:

$v = -u_0\ln\frac{m}{m_0}$



Пример: $u_0 \approx 4$ км/с (хим. топливо)

$v_1 \approx 11.2$ км/с (2 косм., Земля)

$v_2 \approx 2.4$ км/с (2 косм., Луна)

$\frac{m_0}{m} \approx 16$ $\qquad \frac{m_0}{m} \approx 2$

Земля - Луна - Земля: $\frac{m_0}{m} \sim 16\cdot 2\cdot 2\cdot 16 \approx 10^3$

$\frac{m_0}{m} \sim e^{\overline{\frac{v_1+v_2+v_2+v_1}{u_0}}}$ ← характеристическая скорость (≈ 28 км/с, З-Л-З)

(3.18) Релятивистская ракета

В сопутств. с.о.: u_0, dm_r, m, dv'

Сохр. имп: $m\,dv' = \gamma_r u_0\, dm_r$,

$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}$, у ракеты γ не пишем, т.к. $dv' \ll c$

Вместо сохр. массы:

Сохр. энергии: $\underline{d(\gamma mc^2)} + \gamma_r dm_r c^2 = 0$

$\gamma\big|_{v'=0} dm\cdot c^2 + \cancel{mc^2\cdot d\gamma}$ → малость 2 порядка,

⇓ т.к. $d\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(dv')^2}{c^2}}} - 1 \approx \frac{(dv')^2}{2c^2}$

$\gamma_r dm_r = -dm$

$-u_0\, dm = m\,dv' \overset{\text{малые } v' = c\,\mathrm{th}\,\Theta' \approx c\Theta'}{=} mc\,d\Theta' = mc\,d\Theta$

$\Theta = \Theta' + \Theta_{\text{с.о.}}$

⇓

$\frac{dm}{m} = -\frac{c\,d\Theta}{u_0}$

$m = m_0 e^{-c\Theta/u_0}$, т.е. в ф. Ц. заменили $v \to c\Theta = c\,\mathrm{arcth}\frac{v}{c}$

Пример: α-Центавра, 4.35 св. лет -

а) $a' = g$, $t_0 = 1$ год, равноуск.

$x = ct_0\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{t_0} - 1\right)$:

Ускоряемся: $\tau = t_0 \operatorname{arcch}\left(\frac{4.35\text{ св.л.}}{2ct_0} + 1\right) \approx$

≈ 1.82 г.

(25)

„Туда": $2\tau \approx 3.6$ г

На Земле: $t = 2t_0\,\mathrm{sh}\frac{\tau}{t_0} \approx 6$ лет

$\Theta_{max} = \frac{\tau}{t_0} \approx 1.82$,

$v_{max} = c\,\mathrm{th}\,\Theta_{max} \approx 0.95c$

хим. топливо: $\frac{m}{m_0} \sim e^{-\frac{c\cdot 2\cdot 1.82}{4\,км/с}} \sim e^{-2.7\cdot 10^5}$

б) т/я топливо + плазм. двигатель:

$$D + He^3 \longrightarrow \overbrace{He^4 + p}^{mc^2 \approx 5\,ГэВ} + 15.5\ МэВ$$

(выбираем, т.к. продукты реакции заряженные)

$$\gamma_г \approx 1 + \frac{15.5\ МэВ}{5\ ГэВ} \approx 1.0031 \approx 1 + \frac{u_0^2}{2c^2}$$

$\frac{u_0}{c} \approx 0.079$

$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{2\cdot 1.82}{0.079}} \sim e^{-46} \sim 8\cdot 10^{-21}$

$m = 1т \Rightarrow m_0 \sim \frac{M_З}{50}$

в) требуем $\frac{m}{m_0} = 10^{-3}$, т/я топливо

$\Theta_{max} = -\frac{u_0}{2c}\ln\frac{m}{m_0} = 0.272$

$\frac{v_{max}}{c} = \mathrm{th}\,\Theta_{max} \approx 0.265$

с уск. g достигаем за $\tau \sim t \sim 0.27$г

летим $\frac{4.35\ св.г}{0.265c} \approx 16.5$ лет

Итого 17 лет в один конец

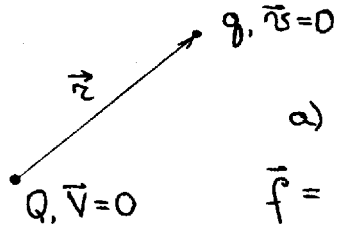
14 лекция

---

15 лекция, 26.10

(IV) Основы релятивистской электродинамики

(4.1) Поле движущегося заряда



Постулируем:

а) Сила на „q":

$$\vec f = \frac{qQ}{r^2}\frac{\vec r}{r}$$

содерж. часть (пока)

б) Нет дальнодействия $\Rightarrow \vec f = q\vec E$,

$\vec E = \frac{Q\vec r}{r^3}$; $[q] = [f\cdot r^2] = \sqrt{\frac{г\cdot см^3}{сек^2}}$

Заряд взаимод. не с Q, а с полем (из других постулатов)

Способность созд. поле и реагировать на него характериз. одной величиной (заряд)

Способ опр. эту величину через см, г, сек.

в) Если $\vec v \neq 0$, $\vec V = 0$

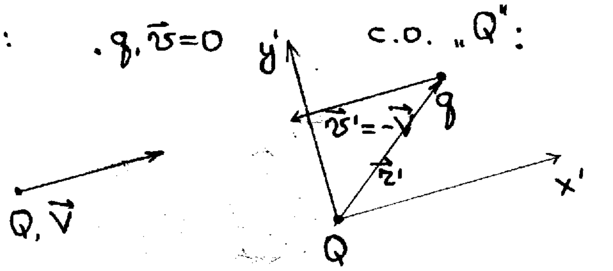
или $\vec v = 0$, $\vec V \neq 0$,

то $\vec f = q\vec E$ ← в месте располож. заряда „q"

г) При переходе между с.о. заряд не меняется.

Теперь $\vec V \neq 0$:

ЛСО: с.о. „Q":



$\vec f = q\vec E$ $\qquad$ $\vec f' = q\vec E' = \frac{qQ\vec r'}{(r')^3}$

Преобр. Лоренца для 4-силы:

$F_\mu = \left(\frac{\gamma}{c}(\vec v\vec f), \gamma\vec f\right)$

$\gamma f_x = \Gamma\left(\gamma' f'_x + \frac{V}{c}\cdot\frac{\gamma'}{c}(\vec v'\vec f')\right)$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1$

$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \Gamma$

$\vec v'\vec f' = -V f'_x$

$f_x = \Gamma^2\left(f'_x - \frac{V^2}{c^2}f'_x\right) = f'_x$

$\gamma f_{y,z} = \gamma' f'_{y,z} \Rightarrow f_{y,z} = \Gamma f'_{y,z}$

(26)

$$E_x = E'_x = \frac{Q x'}{(r')^3}$$

$$E_y = \Gamma E'_y = \frac{\Gamma Q y'}{(r')^3}$$

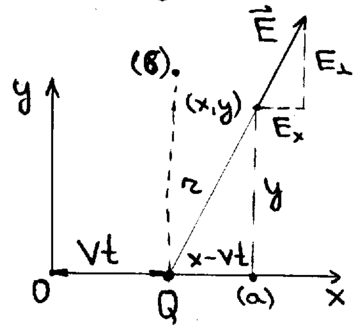
$$x' = \Gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

(тем самым зафиксир. начало отсчёта времени, $x=0$ при $t=0$)

$$r' = \sqrt{\frac{(x-Vt)^2}{(1-V^2/c^2)} + y^2 + z^2}$$

$$E_x = \frac{\Gamma Q (x - Vt)}{(r')^3}$$

$$\vec{E}_\perp = \frac{\Gamma Q \vec{r}_\perp}{(r')^3}, \qquad \vec{r}_\perp = (y, z)$$



Силовые линии – прямые из точки располож. заряда, т.к. $\dfrac{E_x}{E_\perp} = \dfrac{x - Vt}{r_\perp}$

а) На оси $\vec{x}$: $\vec{r}_\perp = 0$, $\vec{E}_\perp = 0$, $r' = \Gamma (x - Vt)$

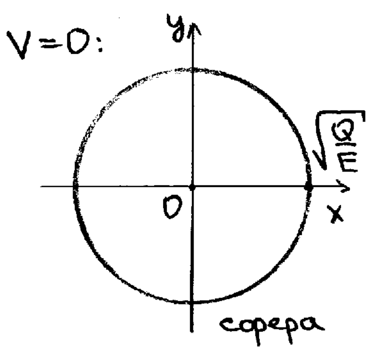
$$E_x = \frac{\Gamma Q (x-Vt)}{\Gamma^3 (x-Vt)^3} = \frac{Q}{\Gamma^2 r^2}$$

б) В плоск. заряда: $x - Vt = 0$, $r = r' = r_\perp$

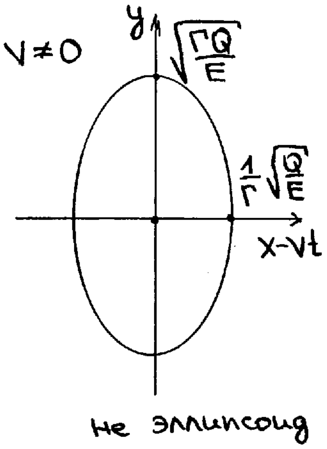
$$E_x = 0, \qquad E_\perp = \frac{\Gamma Q}{r^2}$$

Линии $|E| = \mathrm{const}$:

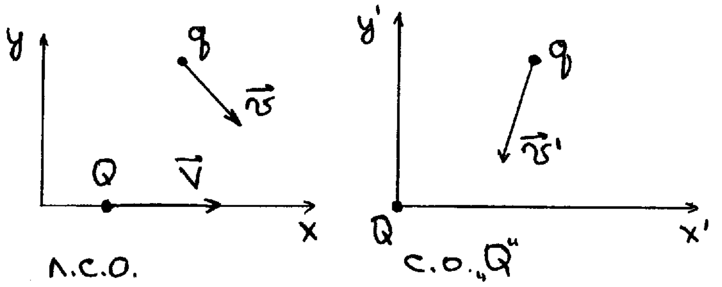
$V = 0$:



$V \neq 0$



(4.2) Сила Лоренца



$$\vec{f}' = q \vec{E}' = \frac{q Q \vec{r}'}{(r')^3}$$

Ищем $\vec{f}$:

$$\gamma f_x = \Gamma \left(\gamma' f'_x + \frac{V}{c} \frac{\gamma'}{c} (\vec{v}' \vec{f}') \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \underset{(2.15)}{=} \Gamma \gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)}, \qquad v'_{y,z} = \frac{v_{y,z}}{\Gamma \left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)}$$

$$f'_x = q E'_x = q E_x, \quad f'_{y,z} = q E'_{y,z} = \frac{q E_{y,z}}{\Gamma}$$

$$f_x = \frac{\Gamma \gamma'}{\gamma} \left[f'_x + \frac{V}{c^2} \left(f'_x \frac{(v_x - V)}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} + \frac{f'_y v_y + f'_z v_z}{\Gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} \right) \right] =$$

$$= \Gamma^2 \left[f'_x \left(1 - \frac{\cancel{v_x V}}{c^2}\right) + \frac{V}{c^2} f'_x (\cancel{v_x} - V) + \frac{V}{\Gamma c^2} (f'_y v_y + f'_z v_z) \right] =$$

$$= \Gamma^2 \cdot q E_x \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{\Gamma V}{c^2} \left(\frac{q E_y v_y}{\Gamma} + \frac{q E_z v_z}{\Gamma} \right) =$$

$$= q E_x + \frac{q V}{c^2} (E_y v_y + E_z v_z) =$$

$$= q E_x + \frac{q V}{c^2} (\vec{E} \vec{v}) - \frac{q V}{c^2} E_x v_x$$

$$\gamma f_y = \gamma' f'_y$$

$$f_y = \frac{\gamma' f_y'}{\gamma} = \Gamma\left(1-\frac{v_x V}{c^2}\right)\frac{qE_y}{\Gamma} =$$

$$= qE_y - \frac{qV}{c^2}E_y v_x$$

$$f_z = qE_z - \frac{qV}{c^2}E_z v_x$$

Произв. выбор осей:

$$\vec f = q\vec E - \frac{q(\overset{a}{\vec v}\overset{b}{\vec V})}{c^2}\overset{c}{\vec E} + \frac{q\overset{b}{\vec V}}{c^2}(\overset{c}{\vec E}\overset{a}{\vec v})$$

(верно при $\vec x \parallel \vec V$ $\Rightarrow$ верно $\forall$ осей)

$$\vec f = q\vec E + \frac{q}{c^2}\left[\vec v\times[\vec V\times\vec E]\right]$$

$\vec B = \left[\frac{\vec V}{c}\times\vec E\right]$ – магнитное поле равномерно движ. заряда

$$\boxed{\vec f = q\vec E + \frac{q}{c}[\vec v\times\vec B]}$$

Единицы:	СИ	СГС
[B]	Тл (Тесла)	$Гс = 10^{-4}$ Тл (Гаусс)
[H]	А/м	$Э = Гс = 4\pi\cdot10^{-3}$ А/м (Эрстед)
[E]	В/м	$(Гс) \approx 3\cdot10^{4}$ В/м
[U]	В	1 ед. СГС $\approx$ 300 В ↑ из c

$$3\cdot10^4\,\frac{В}{м\cdot Гс} \equiv 1$$

15 лекция

---

16 лекция, 30.10

4.3 Преобразование полей

В л.с.о. $\vec E, \vec B$; в движ. с.о.: $\vec E', \vec B'$.

Ищем по действию на частицу: $(m, q, \vec p, \mathcal{E})$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vec p}{dt} &= \vec f = q\vec E + \frac{q}{c}[\vec v\times\vec B]\\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \vec f\vec v = q\vec E\vec v\end{aligned}\right\}\ \text{верно } \forall \text{ с.о.}$$

За dt: $(dx, dy, dz) = (v_x dt, v_y dt, v_z dt)$

$$dp_x = \left(qE_x + \frac{q}{c}(v_y B_z - v_z B_y)\right)dt = qE_x dt + \frac{q}{c}(dy\cdot B_z - dz\cdot B_y)$$

$$dp_y = qE_y dt + \frac{q}{c}(dz\, B_x - dx\cdot B_z)$$

$$dp_z = qE_z dt + \frac{q}{c}(dx\, B_y - dy\cdot B_x)$$

$$d\mathcal{E} = q(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

В движ. с.о.:

$$dp_x' = \Gamma\left(dp_x - \frac{V}{c^2}d\mathcal{E}\right) = qE_x' dt' + \frac{q}{c}(B_z' dy' - B_y' dz')$$

$$\Gamma\left(E_x dt + \frac{dy}{c}B_z - \frac{dz}{c}B_y\right) - \frac{\Gamma V}{c^2}(E_x dx + E_y dy + E_z dz) = E_x'\cdot\Gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right) + \frac{dy}{c}B_z' - \frac{dz}{c}B_y'$$

$$\Gamma dt\,(E_x - E_x') + \frac{\Gamma V}{c^2}dx\,(E_x' - E_x) + \frac{dy}{c}\left(\Gamma B_z - \frac{\Gamma V}{c}E_y - B_z'\right) + \frac{dz}{c}\left(-\Gamma B_y - \Gamma\frac{V}{c}E_z + B_y'\right) = 0$$

Верно $\forall \vec v \Rightarrow \forall\, dt, dx, dy, dz$

$\Downarrow$ Аналогично:

$E_x' = E_x$ $\qquad$ $B_x' = B_x$

$B_y' = \Gamma\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)$ $\qquad$ $E_y' = \Gamma\left(E_y - \frac{V}{c}B_z\right)$

$B_z' = \Gamma\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)$ $\qquad$ $E_z' = \Gamma\left(E_z + \frac{V}{c}B_y\right)$

$$\vec E_\parallel' = \vec E_\parallel, \qquad \vec E_\perp' = \Gamma\left(\vec E_\perp + \frac{1}{c}[\vec V\times\vec B]\right)$$

$$\vec B_\parallel' = \vec B_\parallel, \qquad \vec B_\perp' = \Gamma\left(\vec B_\perp - \frac{1}{c}[\vec V\times\vec E]\right)$$

4.4 Движение в постоянном магнитном поле

$$\vec{E}=0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt}=0, \quad \mathcal{E}=\text{const}, \quad \gamma=\text{const}, \quad v=\text{const}.$$

$\vec{B}=\text{const}$:

$$\frac{d\,\gamma m\vec{v}}{dt}=\frac{q}{c}[\vec{v}\times\vec{B}] \xRightarrow{\parallel\vec{B}} \frac{dv_{\parallel}}{dt}=0$$

$\Downarrow \perp\vec{B}$

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\frac{q}{\gamma mc}[\vec{v}\times\vec{B}]\equiv[\vec{v}\times\vec{\omega}_B]$$

циклотронная (ларморовская) частота

$$\vec{\omega}_B=\frac{q\vec{B}}{\gamma mc}$$

Описывает вращение вокруг $\vec{B}$ с ω_B

Пусть $\vec{z}\parallel\vec{B} \Rightarrow \vec{\omega}_B=\vec{e}_z\cdot\omega_B$

$$\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=v_y\omega_B\\[2mm] \dfrac{dv_y}{dt}=-v_x\omega_B\end{cases} \Rightarrow \frac{d^2v_{x,y}}{dt^2}=-\omega_B^2 v_{x,y}$$

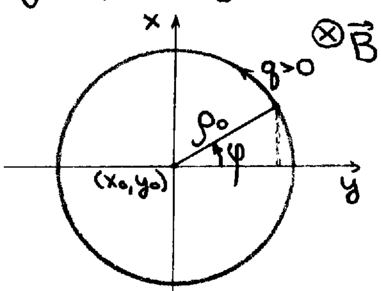
$$v_x=A_0\cos\omega_B t+B_0\sin\omega_B t = v_0\cos(\omega_B t+\varphi_0)$$

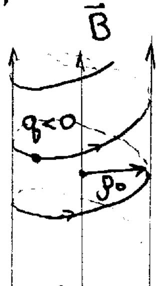
$$v_y=\frac{1}{\omega_B}\frac{dv_x}{dt}=-v_0\sin(\omega_B t+\varphi_0)$$

$$v_z=\text{const}$$

$$x=\int v_x\,dt = x_0+\frac{v_0}{\omega_B}\sin\overbrace{(\omega_B t+\varphi_0)}^{\varphi}$$

$$y=y_0+\frac{v_0}{\omega_B}\cos(\omega_B t+\varphi_0)$$





$q>0$: левая спираль при $v_{\parallel}>0$

$$\rho_0=\left|\frac{v_0}{\omega_B}\right|=\left|\frac{\gamma mcv_0}{qB}\right|=\left|\frac{p_{\perp}c}{qB}\right|$$

↑ ларморовский радиус

О контрольной:
пишут все
11 – 42: БФА, 51–61: 492, 62–72: 402
пользоваться литературой можно
будет рассаживание
выходить нельзя

16 лекция

(V) Одномерное движение

(5.1) Консервативные силы

(пункт относится к трёхмерному движению)

Сила на мат. точку (вообще):

$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i(t, \vec{r}, \underset{\text{произв. по времени}}{\dot{\vec{r}}}, q, m, \dots)$$

$\uparrow$ силы м.б. разной природы

Если $\vec{f} = -\dot{\vec{r}} \cdot K(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots)$, то диссипативная

Если $\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \dots)$, то

не зависит от движения

частица — в поле сил

„поле" - 2 смысла:

- материя, кот. оказывает силовое воздейств. (напр. магнитное поле)
- пр-во, где задана векторная величина (векторное поле, поле скоростей, сил...)

Если при этом $\vec{f} = \vec{f}(\cancel{t}, \vec{r}, \dots)$, то

стационарное поле сил

Если при этом $\oint\limits_C \vec{f}\, d\vec{l} = 0$

$\forall$ замкнутого контура C, то

консервативная (потенциальная)

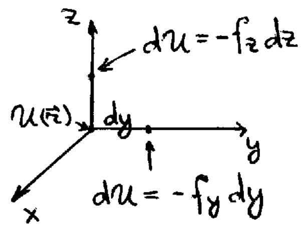
$\Downarrow$

$\exists$ потенциальная энергия:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}\, d\vec{l} = -(\text{работа силы при перемещ. м.т. из } \vec{r}_0 \text{ в } \vec{r} \text{ по } \forall \text{ пути})$$

определена с точн. до константы (выбора $\vec{r}_0$)

$\vec{f}$ через U:



$$\vec{f} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \nabla = \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

набла (род арфы)

В потенц. поле есть сохр. полной энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{f}\vec{v} = \vec{f}\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

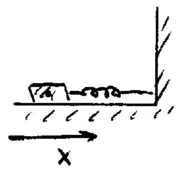
$\Downarrow$

$$\mathcal{E} + U = \text{const} \Rightarrow \underset{\text{кинет. энергия}}{T} + U = \text{const} = \mathcal{E}$$

$\mathcal{E}$ — энергия частицы (с энергией покоя); $\mathcal{E}$ справа — полная энергия частицы в потенц. поле (переобозначили букву $\mathcal{E}$)

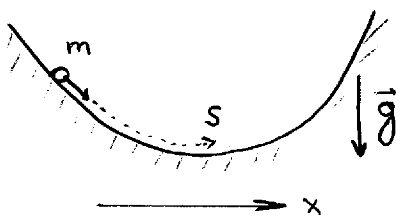
(5.2) Одномерное движение

полож. тела характериз. одним числом:



$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

не обязат. движ. по прямой

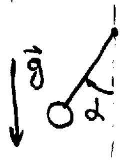


$$m\ddot{x} = f_x(x, \dot{x})$$

или

$$m\ddot{S} = f_s(S, \dot{S})$$

не обязат. число разм-ти координаты



$$\ddot{\alpha} = a(\alpha, \dot{\alpha})$$

В стац. поле сил $\exists$ интеграл движения:

$$m\ddot{x} = f(x)$$

считаем, что $v = \frac{dx}{dt} = v(x)$, тогда

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} = \frac{f(x)}{m}$$

Получили ур-е с разделяющ. переменными.

$$\frac{m}{2}\, dv^2 = f(x)\cdot dx$$

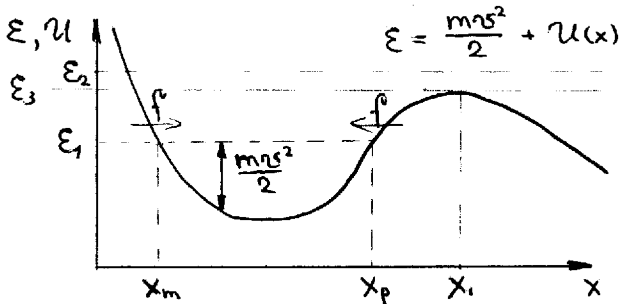
$$\frac{mv^2}{2} = \int f(x)\,dx + \text{const} = -U + \text{const}$$

(пишем U, т.к. одном. стац. поле сил всегда потенциально)

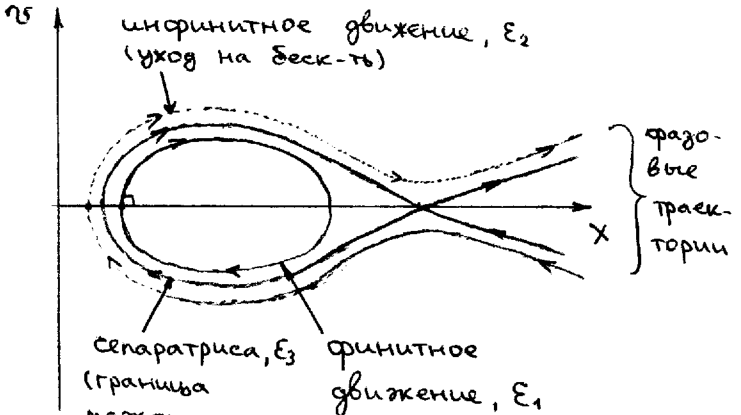
$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const}$$

Если x – координата, то это – энергия, иначе – просто интеграл движения

5.3 Фазовая плоскость



← точки остановки ($v=0$)



Вблизи x_m: $\frac{mv^2}{2} = E - U(x) \approx$

$$\approx \cancel{E - U(x_m)} - U'\Delta x - \overset{\text{мала}}{\cancel{\frac{U''}{2}\Delta x^2}} - \ldots \approx \underbrace{-U'}_{f(x_m)}\Delta x$$

$$v \approx \sqrt{\frac{2f(x_m)}{m}(x - x_m)} \sim \sqrt{\Delta x}$$

(случай общего положения)

Для сепаратрисы вблизи x_1:

$$\frac{mv^2}{2} \approx -\overset{0}{\cancel{U'}}\Delta x - U''\frac{\Delta x^2}{2} - U'''\frac{\Delta x^3}{6} - \ldots$$

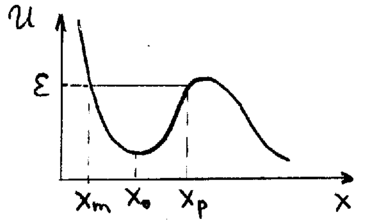
$\Downarrow$

$v \sim \Delta x$ $\quad (U'' \neq 0)$

$v \sim \Delta x^{3/2}$ $\quad (U'' = 0,\ U''' \neq 0)$

...

5.4 Период колебаний



По $U(x)$ и $E = \frac{mv^2}{2} + U$ ищем τ

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

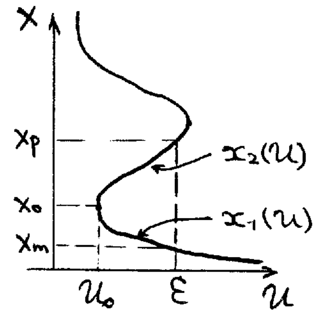
$$\tau = \underset{\text{туда-обратно}}{2}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_m}^{x_p}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

5.5 Определение потенциальной энергии по периоду колебаний.

По $\tau(E)$ ищем $U(x)$

Сначала – вспомогат. задача,

Ищем τ по $x(U) = \begin{cases} x_1(U), & x < x_0 \\ x_2(U), & x > x_0 \end{cases}$



$$dx = \frac{dx_i}{dU}dU$$

$$\tau = \sqrt{2m}\left[\int_E^{U_0}\frac{dx_1}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \int_{U_0}^{E}\frac{dx_2}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}}\right] =$$

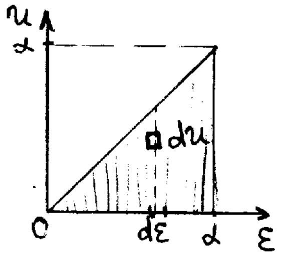
$$= \sqrt{2m}\int_{U_0}^{E}\left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right)\frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \tau(E)$$

17 лекция

18 лекция, 6.11

Пусть $U_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\alpha > 0$ – число (с разм. энергии)

$$\int_0^\alpha \frac{\tau(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{\alpha-\varepsilon}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\alpha-\varepsilon}}\cdot\int_0^\varepsilon \frac{dU}{\sqrt{\varepsilon-U}}\cdot\left(\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right) = A =$$



$$= \int_0^\alpha\int_0^\varepsilon f(\varepsilon,U)\cdot dU\,d\varepsilon = \int_0^\alpha dU\int_U^\alpha d\varepsilon\, f(\varepsilon,U) =$$

$$=\int_0^\alpha dU\cdot\int_U^\alpha d\varepsilon\, \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{(\alpha-\varepsilon)(\varepsilon-U)}}\left(\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right)=$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^\alpha dU\cdot\left(\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right)\underbrace{\int_U^\alpha \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\alpha-\varepsilon)(\varepsilon-U)}}}_{B}$$

Замена: $y(\varepsilon)$, $\quad y(U)=-1$, $\quad y(\alpha)=1$

$$y(\varepsilon)=\frac{\varepsilon-\frac{\alpha+U}{2}}{(\alpha-U)/2}$$

$$B=\int_{-1}^1 \frac{(\alpha-U)}{2}\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y)(y+1)}\cdot(\alpha-U)/2} =$$

$$= \int_{-1}^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y\Big|_{-1}^1=\pi$$

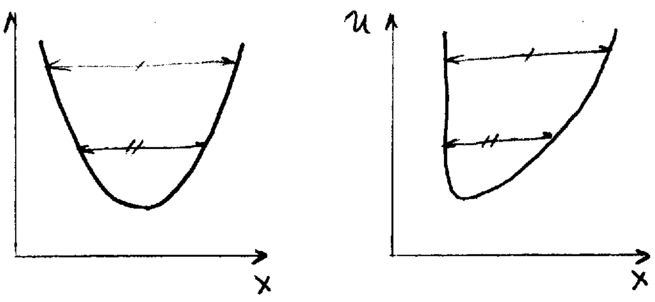
$x_0=0$

$$A=\pi\cdot\sqrt{2m}\left[x_2(\alpha)-\cancel{x_2(0)}-x_1(\alpha)+\cancel{x_1(0)}\right]$$

верно $\forall\alpha$, в т.ч. для $\alpha=U$

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{\tau(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{U-\varepsilon}}$$

Решение неоднозначно:



одинак. период колебаний

Симметр. потенциальная яма:

$$x_2(U)=-x_1(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{\tau(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{U-\varepsilon}}$$

5.6 Гармонические колебания

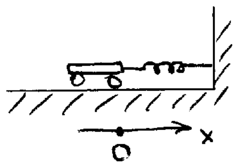
$\tau(\varepsilon)=\tau_0=\text{const}$, симметр. яма

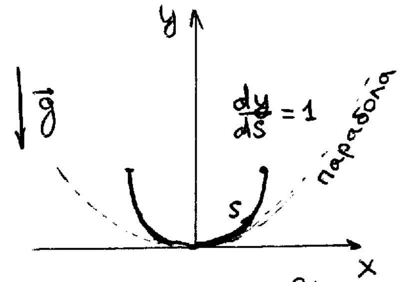
$$x_2(U)=\frac{\tau_0}{2\pi\sqrt{2m}}\underbrace{\int_0^U\frac{d\varepsilon}{\sqrt{U-\varepsilon}}}_{2\sqrt{U}}=\frac{\tau_0\sqrt{U}}{\pi\sqrt{2m}}$$

$$U(x)=\frac{2\pi^2 m}{\tau_0^2}x^2=\frac{kx^2}{2},\qquad k=\frac{4\pi^2m}{\tau_0^2}$$

индекс уже можно не писать

Например:





$f_x=-kx$

$U=\frac{kx^2}{2}$

$$m\ddot{s}=f_s=-\frac{\partial U}{\partial s}$$

$$U(s)=\frac{ks^2}{2}=mgy$$

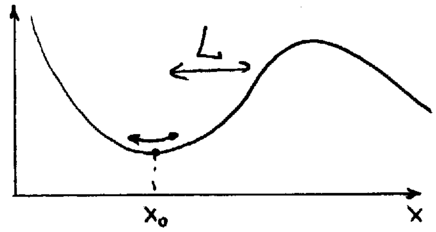
ур-е кривой: $\quad y(s)=\frac{ks^2}{2mg}\overset{y\ll x}{\approx}\frac{kx^2}{2mg}$

не парабола (циклоида) $\qquad$ парабола

т.к. $\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}>dx$

Д.б. $\quad\frac{dy}{ds}=\frac{ks}{mg}\le 1 \Rightarrow$ конец при $\frac{mg}{k}=s$

Малые колебания — гармонические:



$$U(x)\approx U(x_0)+\underbrace{\frac{\partial^2U}{\partial x^2}}_{k}\frac{(x-x_0)^2}{2}+\dots$$

$\Delta U=\frac{k\Delta x^2}{2}\Rightarrow$ период $\approx$ const

при $\Delta x\ll L$

(характ. масштаб изменения U)

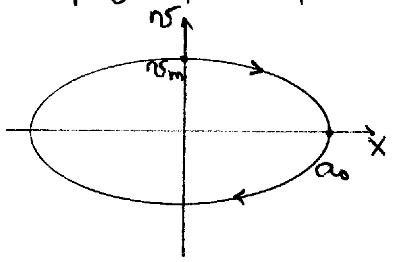
Ур-е малых (гармонич.) колебаний

(1): $\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{v^2}{v_m^2} + \frac{x^2}{a_0^2} = 1$

$v_m = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$ – макс. скорость (при $x=0$)

$a_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{k}}$ – амплитуда колебаний (при $v=0$)

фаз. траектория – эллипс.



$\frac{d(1)}{dt}$: $m\cancel{v}\frac{dv}{dt} + kx\cancel{\frac{dx}{dt}} = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau_0}\right)^2$

$v_m = a_0\omega_0$

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ ← ур-е гармонического осциллятора, каноническое ур-е гармонич. колебаний

Общее решение

$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t =$

$= a_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$

$= a_0(\cos\omega_0 t\cos\varphi_0 - \sin\omega_0 t\sin\varphi_0)$

$c_1 = a_0\cos\varphi_0 \qquad a_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

$c_2 = -a_0\sin\varphi_0 \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{c_2}{c_1}$

2 неопр. коэф-та ⇒ нужно 2 нач. усл.

$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$

(задача Коши)

Ещё форма записи решения:

$x(t) = \operatorname{Re} a_0 e^{i\omega_0 t + i\varphi_0} = \operatorname{Re} Z$

$Z = Ae^{i\omega_0 t}, \quad A = a_0 e^{i\varphi_0}$ ← комплексная амплитуда

удобна, т.к. $e^{i\omega_0 t}$ легко дифференцир. и „Re" коммутирует с „+", $\frac{d}{dt}$, „× const (Re)"

5.7 Затухающие колебания

пусть есть трение: сила трения не всегда такая, эта – простейшая

$m\ddot{x} = -kx - \varkappa\dot{x}$

канонич. вид: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \gamma = \frac{\varkappa}{2m}$

Ищем решение в виде

$x = \operatorname{Re} Z, \qquad Z = Ae^{i\omega t}$

(не угадываем, так решаются линейные дифуры с пост. коэф-тами)

$\operatorname{Re}\left(\ddot{Z} + 2\gamma\dot{Z} + \omega_0^2 Z\right) = 0$

далее „Re" – в уме

18 лекция

---

19 лекция, 9.11

$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\gamma(i\omega)Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0$

$\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$ ← характеристическое ур-е

$\omega = i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2}$

$Z = A_1 e^{i(i\gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t} + A_2 e^{i(i\gamma - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t}$

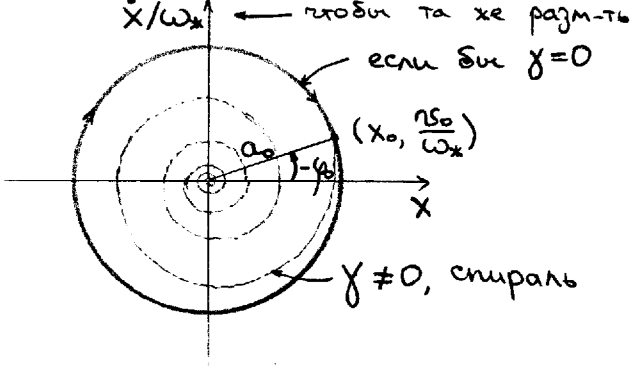
Если $\omega_0 > \gamma$ (трение мало):

$Z = e^{-\gamma t}\left[A_1\cos(\overbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}^{\omega_*}t) + iA_1\sin\omega_* t + A_2\cos\omega_* t - iA_2\sin\omega_* t\right]$

$$x = \mathrm{Re}\, Z = e^{-\gamma t}\left[c_1 \cos\omega_* t + c_2 \sin\omega_* t\right]$$

$$c_1 = \mathrm{Re}\,(A_1 + A_2), \qquad c_2 = \mathrm{Im}\,(A_2 - A_1)$$

$$x = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_* t + \varphi_0)$$



„Время жизни" колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{\approx \tau_0}\cdot\frac{\omega_0}{2\pi\gamma} \overset{\gamma \ll \omega_0}{\approx} \tau_0 \frac{\omega_0}{2\pi\gamma} = \tau_0\frac{Q}{\pi}$$

декремент $\quad \approx \tau_0$ - период колебаний

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \text{ — добротность}$$

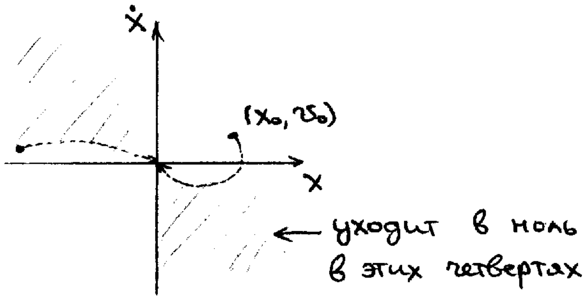
Если $\gamma > \omega_0$: апериодическое движение

$$Z = A_1 e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} + A_2 e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t}$$

(обе экспоненты - затухающие)

$$x = e^{-\gamma t}\left[c_1 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\, t} + c_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t}\right]$$

$$c_1 = \mathrm{Re}\, A_1, \qquad c_2 = \mathrm{Re}\, A_2$$



Если $\gamma = \omega_0$: $Z = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t}$
(проверяется подстановкой)

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}$$

5.8 Вынужденные колебания

ещё усложним систему:

$$m\ddot x = -kx - \varkappa \dot x + \underset{\uparrow\text{внешняя сила}}{f(t)}$$

$$\ddot x + 2\gamma \dot x + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$$

Пусть $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ (Re - в уме)

Не потеряли общности, т.к.

Вообще $\forall\, f(t) = \sum_\omega f_\omega e^{i\omega t}$

или $f(t) = \int f_\omega(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$

$\Downarrow$

$x(t) = \sum_\omega$ решений для $f_\omega e^{i\omega t}$

(или $\int d\omega \ldots$)

Общее решение для $f_0 e^{i\omega t}$:

$x(t) = \underbrace{\text{частное реш. неоднор. ур-я}} + \underbrace{\text{общее реш. однородного ур-я (при } f=0)}$

ищем в виде: $x(t) = \mathrm{Re}\,\underbrace{Ae^{i\omega t}}_{Z}$

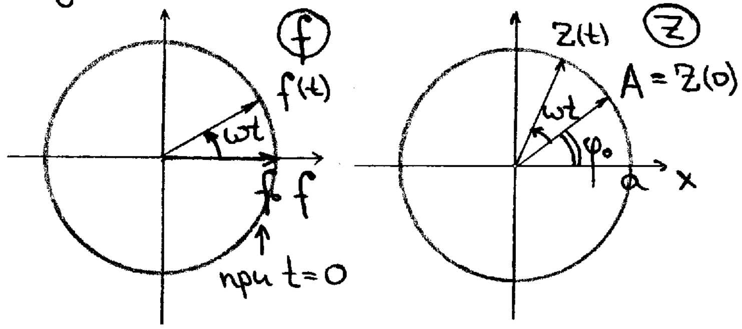
(5.7), затухает при $t \to \infty$

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\gamma \cdot i\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)}$$

$$t \to \infty: \quad x(t) = \mathrm{Re}\,\frac{f_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)}$$

(установившиеся колебания)



$|A| = a$ - ампл. колебаний

$\mathrm{Arg}\, A = \varphi_0$ - разность фаз между $f(t)$ и $x(t)$

Амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{AA^*} =$$

$$= \sqrt{\frac{f_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega)} \cdot \frac{f_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega)}} =$$

$$= \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Исследуем зависимость от ω:

статическое отклонение: $a_0 = \frac{f_0}{m\omega_0^2} = \frac{f_0}{k}$

отношение частот: $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + 4\gamma^2\nu^2/\omega_0^2}} =$$

$$= \frac{a_0}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+\nu^2/Q^2}}, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

$\omega \to 0$: $a \to a_0$

$\omega \to \infty$: $a \approx \frac{a_0}{\nu^2} \to 0$

$\omega = \omega_0$: $\nu = 1$, $a = Qa_0$

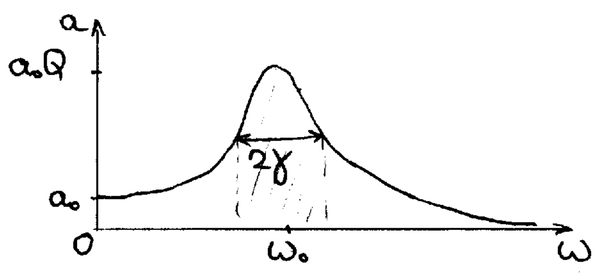
резонансное усиление колебаний при $Q \gg 1$

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$: $\nu = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$

$$1-\nu^2 = (1+\nu)(1-\nu) \approx -\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$a \approx \frac{a_0}{\sqrt{\frac{4\Delta\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{1}{Q^2}}}$$

$$a \approx \frac{a_{max}}{\sqrt{2}} \text{ при } \Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} = \gamma$$



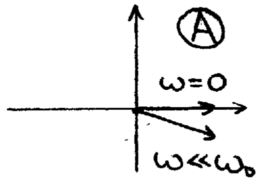
площадь $\sim 2\gamma \cdot a_0 Q = a_0\omega_0$
(не зависит от γ)

Фаза колебаний

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\operatorname{Im}A}{\operatorname{Re}A} = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$A = \frac{f_0(\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega)}{m\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right)}$$

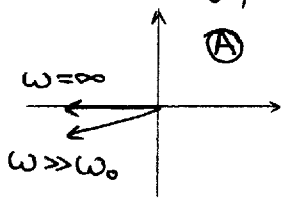
$\omega \ll \omega_0$: $\operatorname{tg}\varphi_0 \approx -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2} \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$



$\operatorname{Re}A > 0$

$\varphi_0 \approx -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2}$

$\omega \gg \omega_0$: $\operatorname{tg}\varphi_0 \approx \frac{2\gamma}{\omega} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$

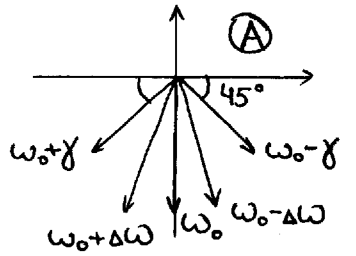


$\operatorname{Re}A < 0$

$\varphi \approx \pi + \frac{2\gamma}{\omega}$

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$:

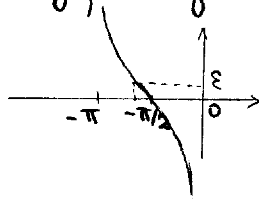
$$\operatorname{tg}\varphi_0 \approx \frac{-2\gamma\omega_0}{2\omega_0(-\Delta\omega)} = \frac{\gamma}{\Delta\omega} \xrightarrow[\Delta\omega\to 0]{} \infty$$



$\operatorname{Im}A < 0$

$\varphi_0 \approx -\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\omega}{\gamma}$, т.к.

$\operatorname{ctg}\varphi_0 \approx \frac{\Delta\omega}{\gamma}$



Итого: $\varphi_0 \in (-\pi, 0)$

смещение отстаёт по фазе от силы $\forall\,\omega$

19 лекция

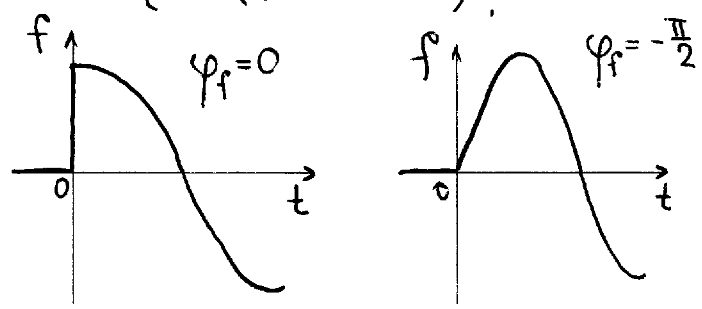
 20 лекция, 11.11

5.9 Переходный процесс

тот же осциллятор, но $t \not\to \infty$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \mathrm{Re}\left(f_0 e^{i\omega t + i\varphi_f}\right), & t \geq 0 \end{cases}$$



т.к. $e^{-i\pi/2} = -i$ (объясняем, почему $-\pi/2$)

$$e^{i\omega t - i\pi/2} = -i\left(\cos\omega t + \underbrace{i\sin\omega t}_{\mathrm{Re}}\right)$$

Пусть $Q \gg 1$ (иначе – неинтересно)

Решение

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \overbrace{A_1 e^{-\gamma t + i\omega_* t} + A_2 e^{-\gamma t - i\omega_* t}}^{\text{общее реш. одн. ур, (5.7)}} + \underbrace{A_f e^{i\omega t}}_{\text{частное реш. неоднор. ур, (5.8)}} \right\}$$

$$\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$A_f = \frac{f_0 e^{i\varphi_f}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} = a e^{i\varphi_0 + i\varphi_f}$$

Пусть $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (Re – в уме)

$$\begin{cases} x(0) = A_1 + A_2 + A_f = 0 \\ \dot{x}(0) = (-\gamma + i\omega_*)A_1 + (-\gamma - i\omega_*)A_2 + i\omega A_f = 0 \end{cases}$$

$(1)\cdot(-\gamma \pm i\omega_*) - (2)$:

$$A_2(-\gamma + i\omega_* + \gamma + i\omega_*) + A_f(-\gamma + i\omega_* - i\omega) = 0$$

$$A_2 = A_f \frac{\gamma - i\omega_* + i\omega}{2i\omega_*} = A_f \frac{\omega - \omega_* - i\gamma}{2\omega_*}$$

$$A_1 = A_f \frac{\omega + \omega_* - i\gamma}{(-2\omega_*)}$$ (отличается знаком у ω_*)

$$x(t) = A_f \left\{ e^{-\gamma t}\left[-\frac{\omega + \omega_* - i\gamma}{2\omega_*} e^{i\omega_* t} + \frac{\omega - \omega_* - i\gamma}{2\omega_*} e^{-i\omega_* t} \right] + e^{i\omega t} \right\} =$$

$$= A_f \left\{ e^{-\gamma t}\left[-\cos\omega_* t - \frac{\omega - i\gamma}{\omega_*} i\sin\omega_* t \right] + \cos\omega t + i\sin\omega t \right\}$$

Вспоминаем про Re

$$x(t) = \mathrm{Re}\, A_f \left\{ \overbrace{\cos\omega t - e^{-\gamma t}\cos\omega_* t - \overbrace{e^{-\gamma t}\frac{\gamma}{\omega_*}\sin\omega_* t}^{\text{мало при } Q \gg 1}}^{\alpha(t)} \right\} - \mathrm{Im}\, A_f \underbrace{\left\{ \sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_*} e^{-\gamma t} \sin\omega_* t \right\}}_{\beta(t)}$$

а) $x \propto \alpha(t)$ при $\mathrm{Im}\, A_f = 0$, $\varphi_0 + \varphi_f = \pi n$,

например, $\varphi_f = 0$ и $\left[\begin{matrix} \omega \gg \omega_0 \\ \omega \ll \omega_0 \end{matrix}\right.$, $\varphi_0 = \left[\begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix}\right.$

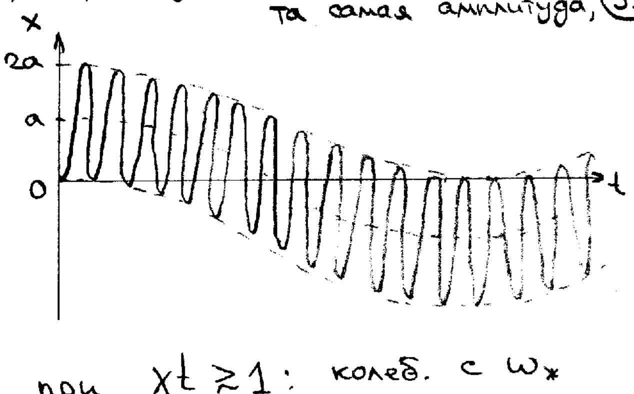
или $\varphi_f = \frac{\pi}{2}$ и $\omega \approx \omega_0$, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$

б) $x \propto \beta(t)$ при $\mathrm{Re}\, A_f = 0$, $\varphi_0 + \varphi_f = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (когда наоборот)

Если $\omega \gg \omega_0$ или $\omega \ll \omega_0$:

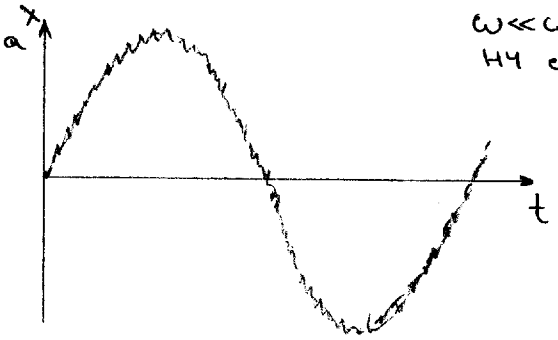
а) при $\gamma t \ll 1$: $x = \pm a(\cos\omega t - \cos\omega_* t)$

a – та самая амплитуда, (5.8)



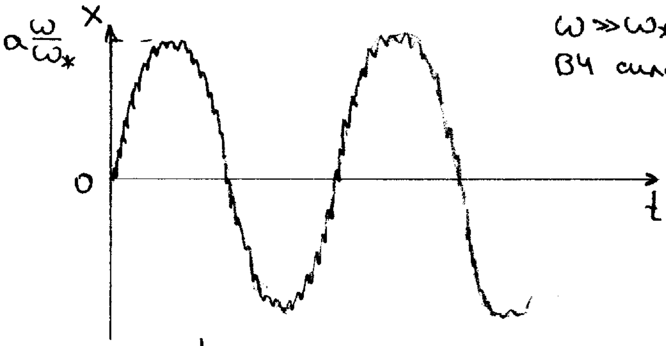
при $\gamma t \gtrsim 1$: колеб. с ω_* затухают б) при $\gamma t \ll 1$: $x = \pm a\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_*}\sin\omega_* t\right)$

$\omega \ll \omega_*$
НЧ сила



$\gamma t \gtrsim 1 \Rightarrow$ „дребезг" затухает

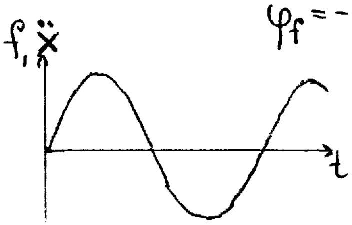
$\omega \gg \omega_*$
ВЧ сила

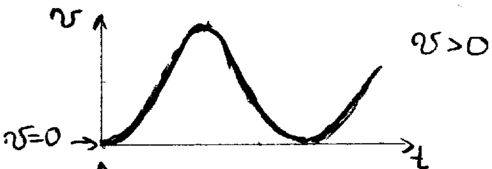


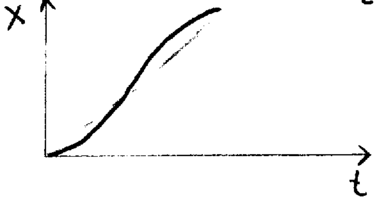
$\gamma t \gtrsim 1$ НЧ колеб. затухают

Почему большая амплитуда при „мягком" включении силы?

$\varphi_f = -\frac{\pi}{2}$





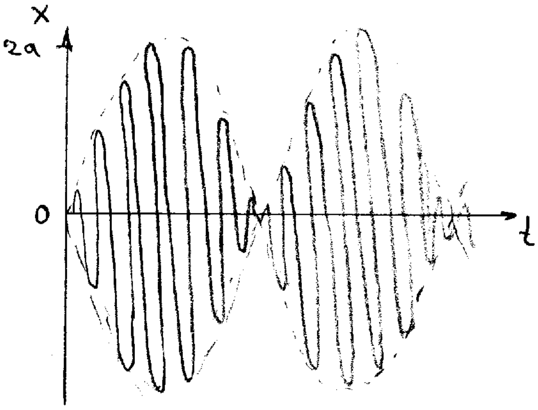


<u>Если</u> $\omega = \omega_* + \Delta\omega$, $\omega_* \gg \Delta\omega \gg \gamma$:

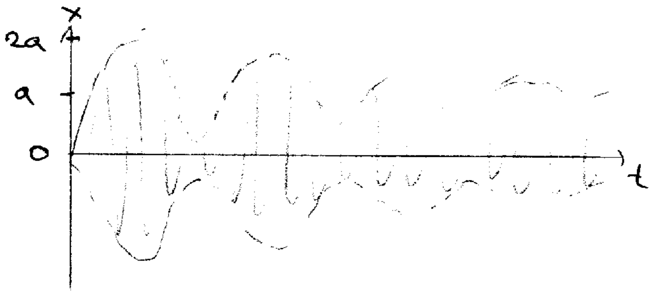
при $\gamma t \ll 1$:

$$\alpha(t) \backsim \cos\omega t - \cos\omega_* t = -2\sin\frac{\omega+\omega_*}{2}t\,\sin\frac{\Delta\omega t}{2}$$

$$\beta(t) \backsim \sin\omega t - \sin\omega_* t = 2\cos\frac{\omega+\omega_*}{2}t\cdot\underbrace{\sin\frac{\Delta\omega t}{2}}_{\text{биения}}$$



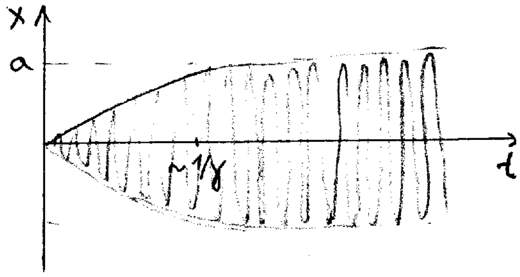
при $\gamma t \gtrsim 1$ биения затухают



<u>Если</u> $\omega = \omega_*$ (или $\Delta\omega \ll \gamma$)

$$\alpha(t) = \cos\omega t\,(1 - e^{-\gamma t})$$

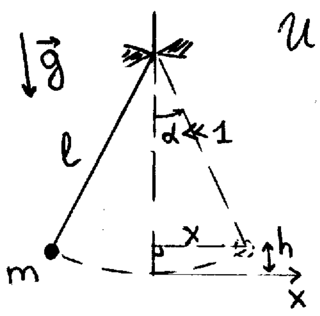
$$\beta(t) = \sin\omega t\,(1 - e^{-\gamma t})$$



(5.10) <u>Адиабатический инвариант</u>

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad \omega^2(t) = \frac{\overbrace{K(t)}^{\text{медл. меняется}}}{\underbrace{m}_{\text{const}}}$$

Пример: математич. маятник с $l(t)$



$$U = mgh = mg(l - l\cos\alpha) \approx mgl\frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{mgl}{2}\sin^2\alpha = \frac{mgl}{2}\cdot\frac{x^2}{l^2} = \underbrace{\left(\frac{mg}{l}\right)}_{k}\frac{x^2}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{l}$$

Изменение энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\overset{m\omega^2(t)}{\overset{\downarrow}{k}}x^2}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{m\dot{x}\ddot{x} + m\omega^2 x\dot{x}}_{=0} + m\omega\dot{\omega}x^2$$

Среднее по Δt: (вообще) $\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\mathcal{E}(t)\,dt$,

здесь $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ (по периоду):

$$\frac{d\langle\mathcal{E}\rangle}{dt} = \langle m\omega\dot{\omega}x^2\rangle \approx m\omega\dot{\omega}\langle x^2\rangle =$$

$\omega\dot{\omega} \approx const$ на периоде

$$= m\omega\dot{\omega}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} x_m^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)\,dt =$$

$$= m\omega\dot{\omega}\frac{x_m^2}{2} = m\omega\dot{\omega}\frac{U_{max}}{k} \approx$$

$$\approx m\omega\dot{\omega}\frac{\langle\mathcal{E}\rangle}{m\omega^2} = \frac{\langle\mathcal{E}\rangle}{\omega}\frac{d\omega}{dt}$$

далее $\langle\ldots\rangle$ опускаем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow \ln\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \ln\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Downarrow$$

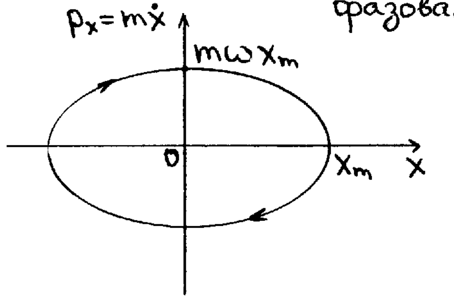
$$\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0} = \boxed{\frac{\mathcal{E}}{\omega} = const}$$

20 лекция

---

21 лекция, 13.11

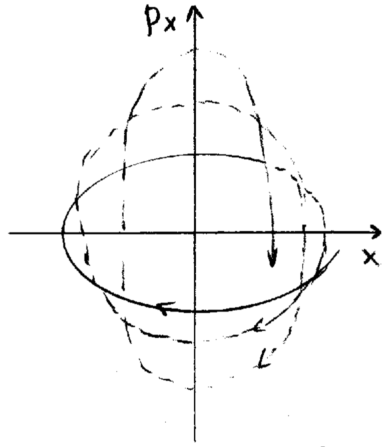
фазовая траектория



Площадь эллипса:

$$\pi x_m\cdot m\omega x_m = \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{m\omega^2 x_m^2}{2} = 2\pi\frac{\mathcal{E}}{\omega}$$

сохраняется



Вообще:

площадь внутри фазовой траект. $= \overset{\text{адиабатич. инвариант}}{\overset{\downarrow}{\oint p_x\,dx}} = const$

при медл. изменении параметров системы. (без док-ва)

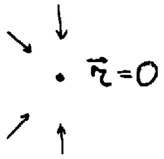
(в т.ч. для негармонич. колебаний)

VI Движение в центральном поле

6.1 Центральные силы

Поле сил:

$$\vec{f} = \vec{e}_r f(r),$$

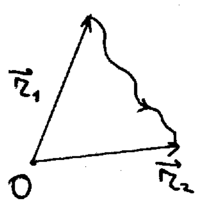


например

$$\vec{f} = \vec{e}_r\frac{qQ}{r^2}, \qquad \vec{f} = -\vec{e}_r\cdot G\frac{mM}{r^2}$$

$G = 6.67\cdot 10^{-8}\,\frac{см^3}{г\cdot с^2}$ – гравитац. постоянная

Центр. сила – консервативна, т.к.



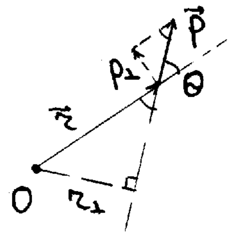
$$A = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{f}\,d\vec{r} = \int\limits_{r_1}^{r_2} f\,dr =$$

= (разность первообразных) =

$= U(r_1) - U(r_2)$, где

$U(r) = -\int\limits_{r_0}^{r} f(r)\,dr$ – потенц. энергия

Введём $\vec M = [\vec r \times \vec p]$ – момент имп. мат. точки



$\odot \vec M$

$|\vec M| = rp\sin\theta = r_\perp p = r p_\perp$

Аналогично $\vec \tau = [\vec r \times \vec f]$ – момент силы

Центр. сила: $\vec f \parallel \vec r \Rightarrow \vec\tau = 0$

$$\frac{d\vec M}{dt} = \left[\frac{d\vec r}{dt}\times \vec p\right] + \left[\vec r \times \frac{d\vec p}{dt}\right] =$$

$$= [\vec v \times \vec p] + [\vec r \times \vec f] = 0$$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{В } \forall \text{ центр. поле момент импульса материальной точки сохраняется}}$

(6.2) Система материальных точек

$$\frac{d\vec p_i}{dt} = \vec f_i = \sum_j \vec f_{ij} + \vec F_i$$

сила на „i"

внешняя сила

сила на „i" со стороны „j"

движ. медленное по сравн. со скоростью переноса взаимод.

Импульс системы: $\vec P = \sum_i \vec p_i$

$$\frac{d\vec P}{dt} = \sum_i \frac{d\vec p_i}{dt} = \underbrace{\cancel{\sum_{i,j} \vec f_{ij}}}_{0} + \sum_i \vec F_i = \vec F$$

т.к. $\vec f_{ij} = -\vec f_{ji}$, $\vec f_{ii} = 0$

замкнутая система, $\vec F = 0$: $\frac{d\vec P}{dt} = 0$

Энергия: $T = \sum_i T_i$

$$dT = \sum_i dT_i = \sum_i \vec f_i \, d\vec r_i =$$

$$= \sum_{i,j} \vec f_{ij}\, d\vec r_i + \overbrace{\sum_i \vec F_i \, d\vec r_i}^{dA,\ \text{работа внешних сил}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(\vec f_{ij}\, d\vec r_i + \underbrace{\vec f_{ji}\, d\vec r_j}_{\text{поменяли } i \text{ и } j}\Big) + dA =$$

$$\overset{\vec f_{ij} = -\vec f_{ji}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j} \vec f_{ij}\,(d\vec r_i - d\vec r_j) + dA =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \vec f_{ij}\cdot d\underbrace{(\vec r_i - \vec r_j)}_{\vec r_{ij}} + dA$$

Если $\vec f_{ij} = -\dfrac{\partial U_{ij}(\vec r_{ij})}{\partial \vec r_{ij}}$,

например $U_{ij} = \dfrac{q_i q_j}{r_{ij}}$, $\vec f_{ij} = \dfrac{q_i q_j}{r_{ij}^2}\dfrac{\vec r_{ij}}{r_{ij}}$,

то $\vec f_{ij}\, d\vec r_{ij} = -dU_{ij}(\vec r_{ij})$

$\Downarrow$

м. ввести U_i – потенц. энергия „i" в поле остальных тел,

$$dU_i = \sum_j dU_{ij}$$

$U = \frac{1}{2}\sum_i U_i$ – полная потенциальная энергия системы

$dT = -dU + dA$, $d(T+U) = dA$

(стационарность не требуется)

Если $\vec F_i = 0$, то $T + U = \text{const} = \mathcal{E}$

Момент импульса: $\vec M = \sum_i \vec M_i = \sum_i [\vec r_i \times \vec p_i]$

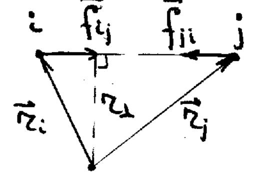
$$\frac{d\vec M}{dt} = \sum_i\left(\underbrace{\cancel{\left[\frac{d\vec r_i}{dt}\times \vec p_i\right]}}_{0} + \left[\vec r_i \times \frac{d\vec p_i}{dt}\right]\right) =$$

$$= \sum_i [\vec r_i \times \vec f_i] = \sum_i \vec\tau_i =$$

$$= \sum_{i,j}\underbrace{[\vec r_i \times \vec f_{ij}]}_{\vec\tau_{ij}} + \sum_i [\vec r_i \times \vec F_i]$$

Центр. сила:

$\vec\tau_{ij} = -\vec\tau_{ji}$



$\Downarrow$

$$\frac{d\vec M}{dt} = \sum_i [\vec r_i \times \vec F_i]$$

$\vec F_i \equiv 0 \Rightarrow \vec M = \text{const}$

6.3 Центр масс

$\vec{R} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ – радиус-вектор ц.м.

$M = \sum_i m_i$ – масса системы

$\dot{\vec{R}} = \vec{V} = \dfrac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$ – скорость ц.м.

$\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{M} \Rightarrow \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{1}{M}\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{\vec{F}}{M}$

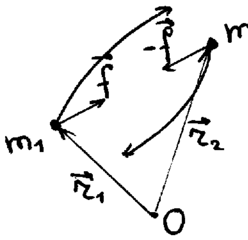
↑↑ нерелят. механика

релятивизм: $\vec{V} = \dfrac{\sum_i \vec{p}_i c^2}{\sum_i \mathcal{E}_i}$ – скорость с.о.ц.м. (где $\vec{p}\,' = 0$)

но вводить $\vec{R} = \dfrac{\sum_i \mathcal{E}_i \vec{r}_i}{\sum_i \mathcal{E}_i}$ нет смысла,

т.к. в общем случае $\dfrac{d\vec{R}}{dt} \neq \vec{V}$

6.4 Задача двух тел



$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f} = \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{f} \end{cases}$$

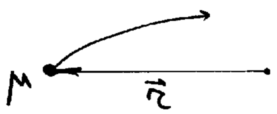
$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \longrightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$\vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$$\begin{cases} \ddot{\vec{R}} = \dfrac{\vec{f} - \vec{f}}{m_1 + m_2} = 0 \\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \dfrac{\vec{f}}{m_1} + \dfrac{\vec{f}}{m_2} = \dfrac{(m_1+m_2)\vec{f}}{m_1 m_2} = \dfrac{\vec{f}}{\mu} \end{cases}$$

приведённая масса

эквивалентная задача:



← неподв. силовой центр

Алгоритм решения:

знаем $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ при $t = 0$

⇓

$\vec{r}, \vec{R}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}$ при $t = 0$

⇓ ← движ. μ в стацион. силовом поле

⇓

$\vec{r}(t)$, $\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \dot{\vec{R}}(0) \cdot t$

$\Downarrow$ $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2$

$\vec{R}(m_1 + m_2) = m_1(\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2 \vec{r}_2$

$\vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$, $\quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}$

$\vec{v}_2 = \vec{V} - \dfrac{m_1 \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}$, $\quad \vec{v}_1 = \vec{V} + \dfrac{m_2 \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}$

Если $\vec{V} = 0$,

$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \mu \dot{\vec{r}} = -\vec{p}_2$

(в эквив. задаче – тот же импульс)

$T_i = \dfrac{p_i^2}{2m_i} = \dfrac{\mu^2 (\dot{\vec{r}})^2}{2m_i}$

$T_1 + T_2 + U(\vec{r}) = \dfrac{\mu^2 (\dot{\vec{r}})^2}{2}\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right) + U(\vec{r}) = \dfrac{\mu (\dot{\vec{r}})^2}{2} + U(r)$

(полная и суммарная кинетич. энергии те же)

21 лекция

---

22 лекция, 16.11

6.5 Законы Кеплера

1) ∀ планета движ. по эллипсу, в фокусе которого – Солнце (1609)

2) радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади (1609)

3) период обращения $\tau \sim a^{3/2}$ (1619)

↑ большая полуось

Док-во (2):

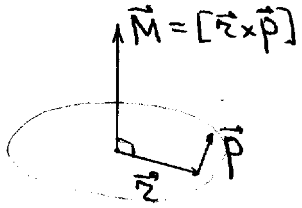
Планеты – мат. точки в поле Солнца

$\Downarrow$ $(m_c / m_{юп} \sim 1000)$

$\vec{M} = \text{const}$

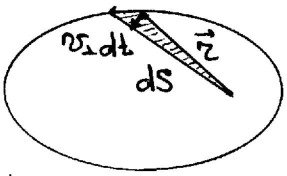
$\Downarrow$

движение плоское:



$|\vec{M}| = r p_\perp = \text{const}$

$v_\perp = \dfrac{p_\perp}{m} = \dfrac{\text{const}}{r}$



за dt: $dS = \dfrac{r \cdot v_\perp dt}{2}$,

$dS = \text{const} \cdot dt$

Из (3) следует закон тяготения:

пусть траектория – окружность,

$\tau = \dfrac{2\pi r}{v} = \alpha r^{3/2} \Rightarrow v \propto r^{-1/2}$

находится из астрон. наблюдений

$f_r = -\dfrac{m v^2}{r} = -\dfrac{Am}{r^2}$

Сила д.б. симметричной: $f = -\dfrac{GMm}{r^2}$

Чтобы разделить G и M, нужен свинцовый шар

6.6 Движение материальной точки в центральном поле

Уже знаем: $\vec{M} = \text{const}$, $T + U = \text{const}$

движ. плоское, $\vec{f} = \vec{f}(r) \Rightarrow$ удобны (r, φ)

Движ. по r можно рассм. независимо

$|\vec{M}| \equiv M = r p_\perp = m r v_\varphi \Rightarrow v_\varphi = \dfrac{M}{mr}$

$T = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mv_r^2}{2} + \dfrac{M^2}{2mr^2}$

$$\varepsilon = \frac{mv_r^2}{2} + \underbrace{\overbrace{\frac{M^2}{2mr^2}}^{U_c,\ \text{центробежный пот.}} + U(r)}_{U_\text{эфф},\ \text{эффективный потенциал}} = \text{const} \quad \Big\} \frac{d}{dt}$$

$$m \cancel{\dot{r}} \ddot{r} + \frac{dU_\text{эфф}}{dr} \frac{\cancel{dr}}{\cancel{dt}} = 0$$

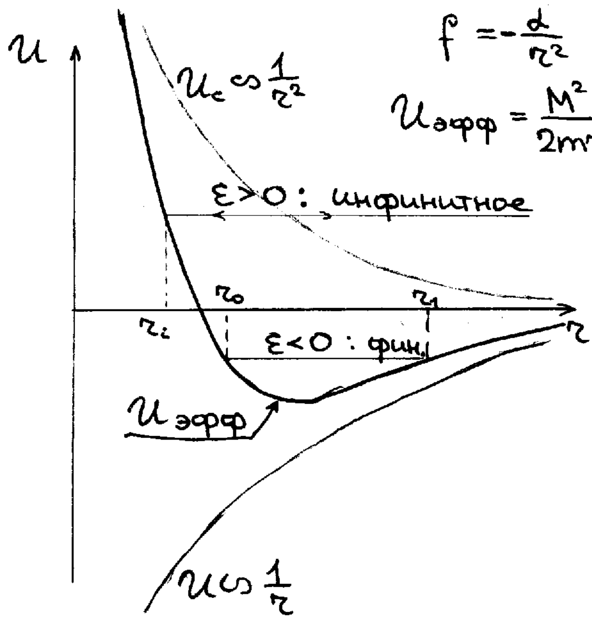
$$m\ddot{r} = f_\text{эфф} = -\frac{dU_\text{эфф}}{dr}$$

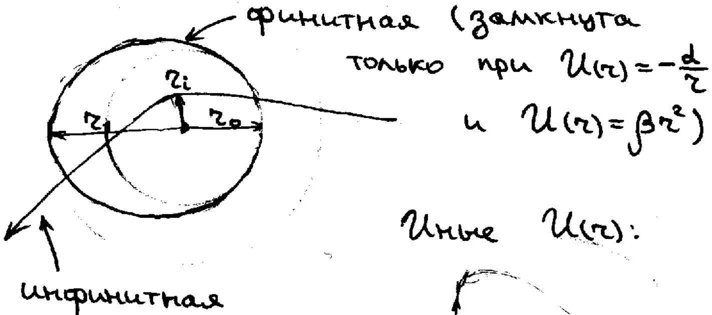
По r – одномерное движение в потенциале $U_\text{эфф}(r)$, проанализируем его:

Кулоновское (гравит.) поле: $U = -\dfrac{\alpha}{r}$

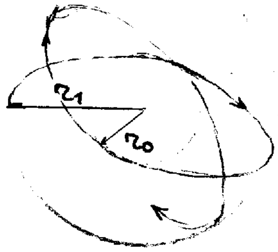
$f = -\dfrac{\alpha}{r^2}$

$U_\text{эфф} = \dfrac{M^2}{2mr^2} - \dfrac{\alpha}{r}$





Иные $U(r)$:



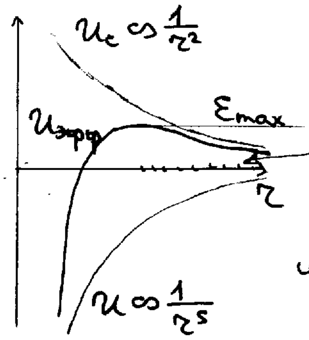
Если $U(r) \propto r^{-s}$ (другие поля притяжения)

$0 < s < 2$: как в кул. поле

$$U_\text{эфф} = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^s}$$

доминирует: малые r, большие r

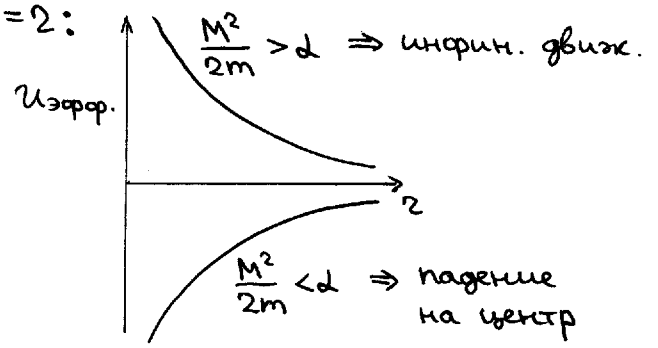
$s > 2$:



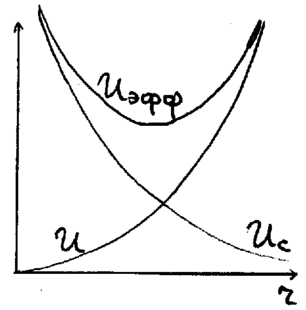
$\varepsilon < \varepsilon_{max}$ и точка здесь ⇓ отражение, инф. движ.

иначе – падение на центр

$S=2$:



$S<0$: $U(r) = \alpha r^{|s|}$



финитное $\forall \mathcal{E}$

<u>Для $\forall\ U(r)$:</u>

$v_\varphi = \frac{M}{mr} \neq 0 \Rightarrow$ Напр. вращения не меняется

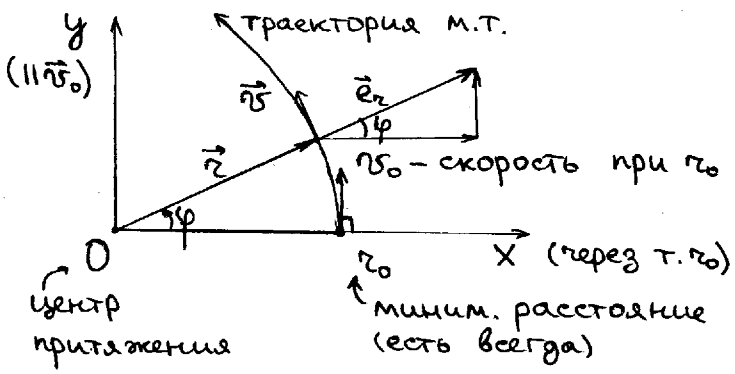
$v_\varphi \to 0$ при $r \to \infty \Rightarrow$ на беск-ти летит по r (если $v_r \neq 0$)

(6.7) Годограф скорости орбитального движения

Гравитационное поле:

$$f = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad U = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = G m_1 m_2$$

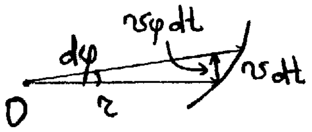
Ищем $\vec{v}(\varphi)$:



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r =$$

$$= -\frac{\alpha}{r^2}\left(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_\varphi}{r} = \frac{M}{mr^2}$$



$$d\varphi = \frac{v_\varphi dt}{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{M}\left(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi\right)$$

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{M}\left(\vec{e}_x \sin\varphi - \vec{e}_y \cos\varphi\right) + \Delta\vec{v}_0$$

$\Delta\vec{v}_0$ – пост. интегрирования

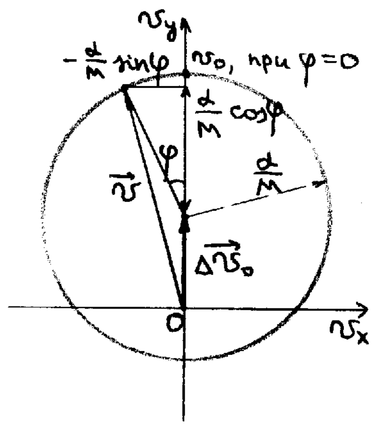
$$\varphi = 0: \quad \vec{v} = \frac{\alpha}{M}\vec{e}_y + \Delta\vec{v}_0 = \vec{e}_y \cdot v_0$$

$$\Delta\vec{v}_0 = \left(v_0 - \frac{\alpha}{M}\right)\vec{e}_y$$

$$\Downarrow$$

Годограф скорости – окр-ть радиуса $\frac{\alpha}{M}$, с центром $\Delta\vec{v}_0$:

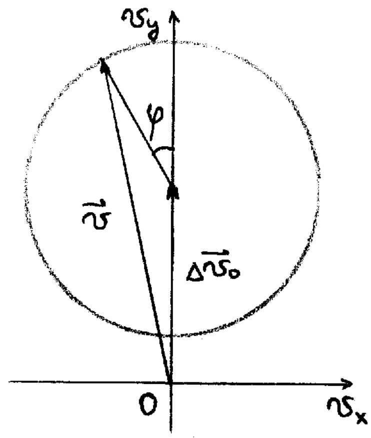
$v_0 - \frac{\alpha}{M} < \frac{\alpha}{M}$:



v_y меняет знак

финитное

$v_0 - \frac{\alpha}{M} > \frac{\alpha}{M}$:



$v_y > 0 \quad \forall\varphi$

инфинитное

22 лекция

---

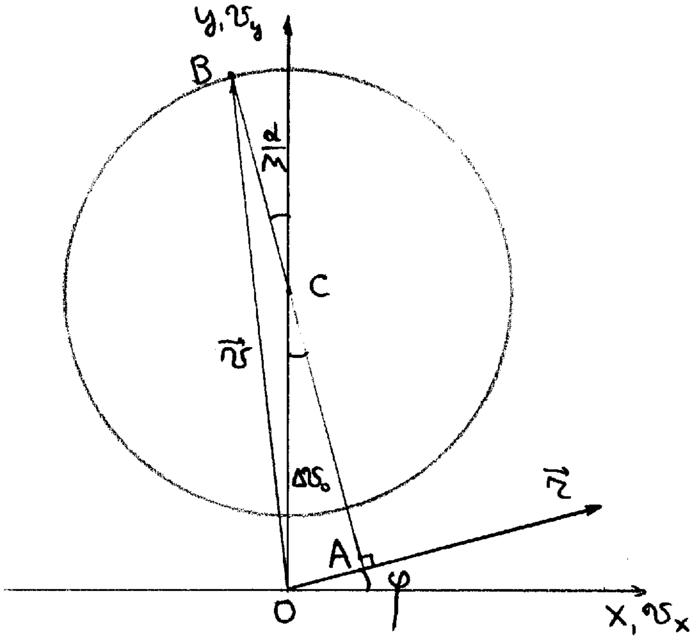
23 лекция, 20.11

Граница: $v_0 - \frac{\alpha}{M} = \frac{\alpha}{M}$

$$v_0 = \frac{2\alpha}{M} = \frac{2\alpha}{m v_0 r_0} \Rightarrow \frac{m v_0^2}{2} = \frac{\alpha}{r_0}; \quad \mathcal{E} = 0$$

6.8 Уравнение орбиты

Ищем $r(\varphi)$



$$AB = v_\perp = v_\varphi = BC + AC$$

$$\frac{M}{mr} = \frac{\alpha}{M} + \Delta v_0 \cos\varphi$$

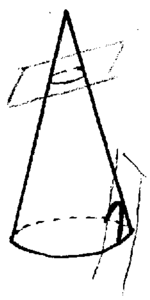
$$r = \frac{M/m}{\frac{\alpha}{M} + \left(v_0 - \frac{\alpha}{M}\right)\cos\varphi} = \underbrace{\frac{M^2}{m\alpha}}_{p} \cdot \frac{1}{1 + \Big(\underbrace{\frac{M v_0}{\alpha}}_{p/r_0} - 1\Big)\cos\varphi}$$

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} = \frac{M v_0 r_0}{\alpha} = \frac{m v_0^2 r_0^2}{\alpha} = \frac{2T(r_0)}{|U(r_0)|}\cdot r_0$$ — параметр орбиты

$$\frac{p}{r_0} - 1 = e$$ — эксцентриситет

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}$$

(ур-е конического сечения)

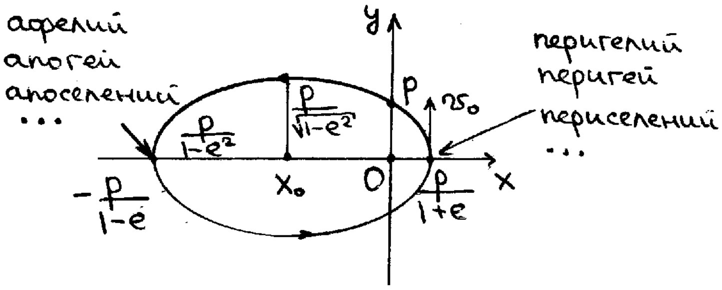


$e<1$: $r \neq \infty$, финитная (эллипс)

$$r(0) = \frac{p}{1+e} = r_0$$

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = p$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1-e}$$ — самая дальняя точка



центр: $x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} - \frac{p}{1-e}\right) = -\frac{pe}{1-e^2} = -f$

расст. до фокуса

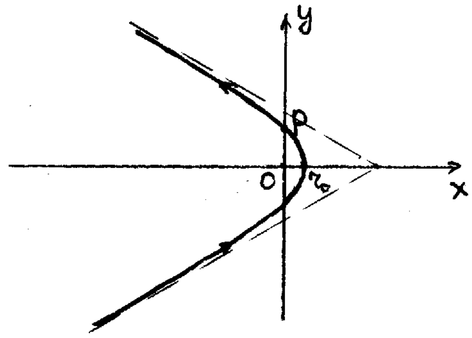
полуоси: $a = f/e = \frac{p}{1-e^2}$

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$e>1$: $r = \infty$ при $\cos\varphi_\infty = -\frac{1}{e} < 0 \Downarrow \varphi_\infty > \frac{\pi}{2}$

инфинитная (гипербола)



канонич. ур-е то же (почти):

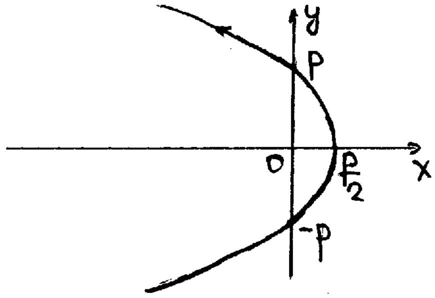
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = \frac{p}{e^2-1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}, \quad x_0 = \frac{pe}{e^2-1} > 0$$

$\underline{e=1}$: $r=\infty$ при $\varphi=\pi$

парабола

$$r_0=\frac{p}{1+e}=\frac{p}{2}$$



$$x=\frac{(y-p)(y+p)}{(-2p)}=\frac{p^2-y^2}{2p}$$

Доказали 1 закон Кеплера, сложно, но без интегралов.

<u>Другой</u> (прямой) способ найти $r(\varphi)$:

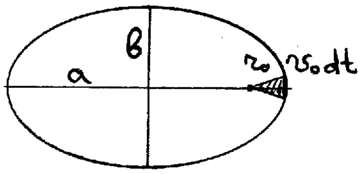
$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=v_r=\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\mathcal{E}-U_{\text{эфф}}(r)\right)}\\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{v_\varphi}{r}=\dfrac{M}{mr^2}\end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{mr^2}{M}\cdot\sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E}-U_{\text{эфф}}\right)}$$

$$\varphi=\int\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E}-\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}\right)}}+\text{const}$$

(рез-т тот же)

6.9 <u>Период обращения</u>



$$a=\frac{p}{1-e^2}$$

$$b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=a\sqrt{1-e^2}$$

$$S=\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

Секторная скорость:

$$\sigma=\frac{dS}{dt}\underset{\uparrow}{=}\text{const}=\frac{r_0v_0}{2}$$

2 зак. Кеплера

Период: $$\tau=\frac{S}{\sigma}=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\underbrace{r_0v_0}_{M/m}}=$$

$$=\frac{2\pi a^{3/2}\cdot\sqrt{p}}{\sqrt{p\alpha/m}}=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{Gm_1m_2}}$$

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$\tau^2=\frac{4\pi^2a^3}{G(m_c+\underbrace{m_{\text{пл}}}_{\text{мала}})}$$

6.10 <u>Теорема вириала</u>

Система многих тел:

$$2T=\sum_i m_iv_i^2=\sum_i\vec{p}_i\vec{v}_i=\sum_i\vec{p}_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}=$$

$$=\sum_i\left(\frac{d}{dt}(\vec{p}_i\vec{r}_i)-\vec{r}_i\underbrace{\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\vec{f}_i}\right)$$

Среднее по $\Delta t\to\infty$:

$$2\langle T\rangle=\underbrace{\sum_i\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\frac{d(\vec{p}_i\vec{r}_i)}{dt}dt}-\sum_i\langle\vec{r}_i\vec{f}_i\rangle$$

финитное: $$\frac{\vec{p}_i\vec{r}_i(t+\Delta t)-\vec{p}_i\vec{r}_i(t)}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t\to\infty]{}0$$

$\Downarrow$

$$2\langle T\rangle=-\sum_i\langle\vec{r}_i\vec{f}_i\rangle$$

Если $\vec{f}_i=-\dfrac{\partial U(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n)}{\partial\vec{r}_i}$,

т.е. $\exists$ потенц. энергия, 6.2

то $$2\langle T\rangle=\sum_i\left\langle\vec{r}_i\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i}\right\rangle.$$

Если $U(\lambda\vec{r}_1,\dots,\lambda\vec{r}_n)=\lambda^k U(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n)$.

(U – однородная ф-я порядка k)

(Увеличили все расст. в λ, потенц. энергия изменилась в λ^k)

то $\dfrac{\partial U(\lambda\vec r_1,\dots,\lambda\vec r_n)}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial\lambda^k}{\partial\lambda}\cdot U(\vec r_1,\dots,\vec r_n)$

$$\parallel$$

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial(\lambda\vec r_i)}\cdot\frac{\partial(\lambda\vec r_i)}{\partial\lambda}$$

$$\parallel$$

$$\sum_i \frac{\partial U(\lambda\vec r_1,\dots,\lambda\vec r_n)}{\partial(\lambda\vec r_i)}\cdot\vec r_i = k\lambda^{k-1}\cdot U(\vec r_1\dots\vec r_n)$$

$\lambda=1$: $\displaystyle\sum_i \frac{\partial U}{\partial\vec r_i}\vec r_i = kU$

$$\boxed{2\langle T\rangle = k\langle U\rangle}$$

$\mathcal{E} = T+U$:

$$\langle\mathcal{E}\rangle = \langle T\rangle\left(1+\frac{2}{k}\right) = \langle U\rangle\left(1+\frac{k}{2}\right)$$

$$\langle T\rangle = \frac{k\mathcal{E}}{k+2},\qquad \langle U\rangle = \frac{2\mathcal{E}}{k+2}$$

т.к. $\langle\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E} = \mathrm{const}$

Примеры:

а) гармонич. осциллятор, $U \propto x^2$, $k=2$

$$\langle T\rangle = \langle U\rangle = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

б) гравитац. поле: $U\propto\frac{1}{r}$, $k=-1$

$$\langle T\rangle = -\mathcal{E},\qquad \langle U\rangle = 2\mathcal{E}$$

для финитного движ. $\mathcal{E}<0$

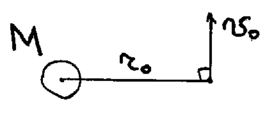
спутник „тормозится":

$\mathcal{E}\downarrow$, $|\mathcal{E}|\uparrow$, $\langle T\rangle\uparrow$, $|\langle U\rangle|\uparrow$, $\langle r\rangle\downarrow$

23 лекция

24 лекция, 27.11, с комп. демонстрацией

6.11 Космические скорости



Круг. орбита:

$$m\frac{v_к^2}{r_0} = \frac{GmM}{r_0^2}$$

$v_к = \sqrt{\dfrac{GM}{r_0}}$ – круговая скорость

Параболич. орбита: $\mathcal{E}=0$

$$\frac{mv_п^2}{2} = \frac{GmM}{r_0} \Rightarrow v_п = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{2}\,v_к$$

Земля: $r_0 \approx R_З \approx 6400$ км

(атмосферой, ~ 200км, пренебр.)

$\Downarrow$

$v_к \approx 8$ км/с (1 космич, v_1)

$v_п \approx 11$ км/с (2 космич, v_2)

Солнце: $r_0 = 1$ а.е.

$v_к \approx 30$ км/с (скорость Земли)

$v_п \approx 42$ км/с (3 космич.)

для косм. корабля: нужно

на выходе из гравит. поля Земли:

$v_x = v_п - v_к \approx 12$ км/с

на выходе из атмосферы: v_3

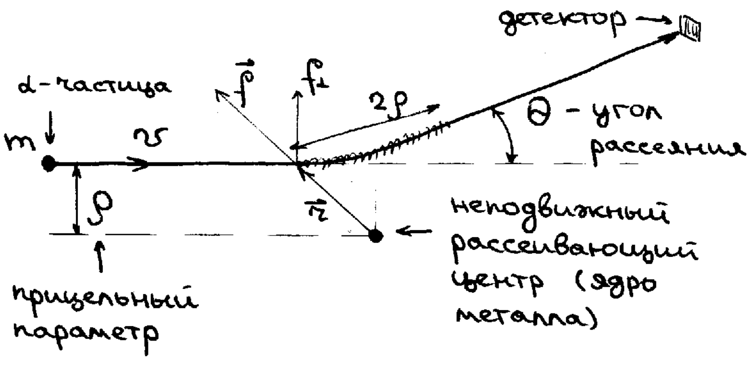
$$\frac{mv_3^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \underbrace{\frac{mv_2^2}{2}}_{\text{для ухода из грав. поля, } U(\infty)-U(R_З)} \Rightarrow v_3 \approx 17 \text{ км/с (тоже 3 космич.)}$$

Демонстрация:

$\begin{bmatrix}300 & 8\\ 300 & 0\end{bmatrix} 10^8 \quad \begin{bmatrix}300 & 300\\ 100 & 0\end{bmatrix} 10^2 \quad \begin{bmatrix}300 & -740\\ 480 & 0\end{bmatrix} 10^6$

- долго, несколько манёвров
- 737: 2 манёвра и гибель
- 734: цветочек
- 738:

6.12 Опыт Резерфорда



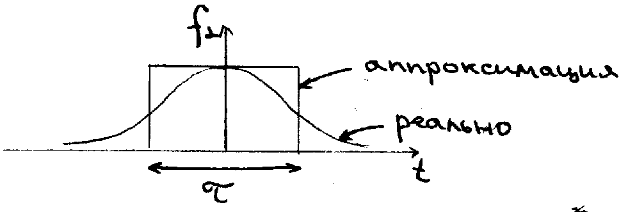
Предположим $f = \dfrac{\alpha}{r^k}$, $\theta \ll 1$

Оценим число зарегистрир. частиц.

$$\theta \approx \frac{\Delta p_\perp}{mv} \sim \frac{2\alpha}{mv^2}\cdot\frac{1}{\rho^{k-1}}$$

$$\Delta p_\perp \sim f\tau \sim \frac{\alpha}{\rho^k}\cdot\frac{2\rho}{v}$$

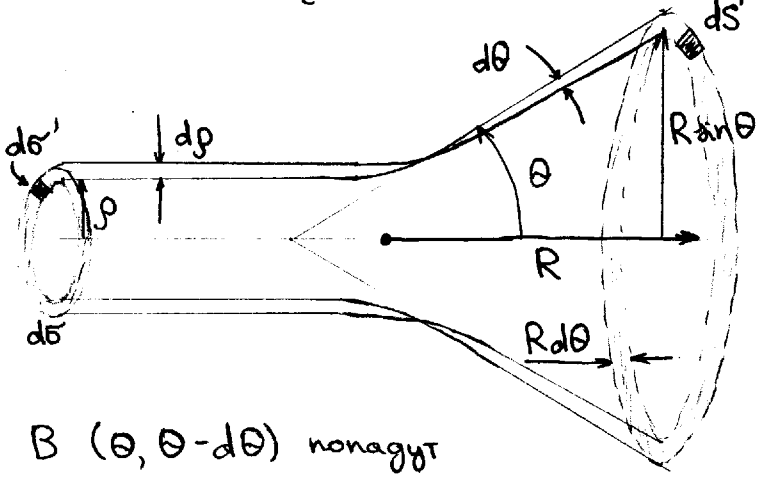
└ время пролёта мимо ядра



$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \left(\frac{2\alpha}{m v^2}\right)^2 \cdot \Theta^{-4}$$

оказывается, коэф-т $=1$

дифференциальное сечение рассеяния (связь $d\sigma'$ и $d\Omega'$)



В $(\Theta, \Theta - d\Theta)$ попадут частицы из кольца площади

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\rho \left|\frac{d\rho}{d\Theta}\right| d\Theta$$

т.к. м.б. $\rho\uparrow$ при $\Theta\downarrow$

$$\rho(\Theta) \sim \left(\frac{2\alpha}{m v^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \Theta^{-\frac{1}{k-1}}$$

$$\left|\frac{d\rho}{d\Theta}\right| \sim \left(\frac{2\alpha}{m v^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{1}{|k-1|}\, \Theta^{-\frac{1}{k-1}-1}$$

$$d\sigma \sim \frac{2\pi}{|k-1|}\left(\frac{2\alpha}{m v^2}\right)^{\frac{2}{k-1}} \Theta^{-\frac{2}{k-1}-1}\, d\Theta$$

Детектор: телесный угол $d\Omega' = \dfrac{dS'}{R^2}$,

попадёт часть кольца: $\dfrac{dS'}{2\pi R\sin\Theta \cdot R\,d\Theta}$

из $d\sigma' = d\sigma \cdot \dfrac{d\Omega'}{2\pi \sin\Theta\, d\Theta}$

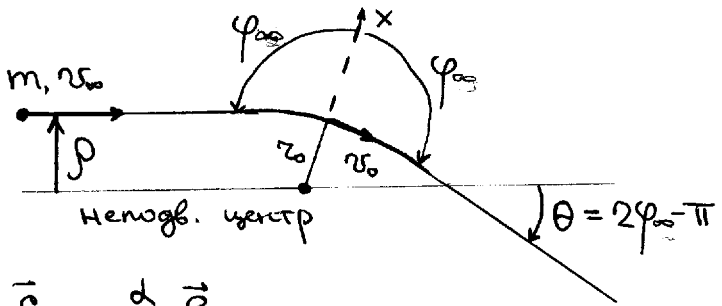
$$d\sigma' \sim \frac{1}{|k-1|}\left(\frac{2\alpha}{m v^2}\right)^{\frac{2}{k-1}} \Theta^{-\frac{2}{k-1}-2}\, d\Omega'$$

Число зарегистр. частиц $\sim d\sigma'$, т.е. $\sim \Theta^{-\frac{2}{k-1}-2}$

Эксп-т: $\sim \Theta^{-4} \Rightarrow k=2$

$$f = \frac{\alpha}{r^2}$$

6.13 Отклонение частиц в кулоновском поле



$$\vec{f} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$$

$\alpha = -q_1 q_2$, м.б. $\alpha < 0$

Если $\alpha > 0 \Rightarrow$ как ур-е орбиты

$$r = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\cos\varphi}, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}$$

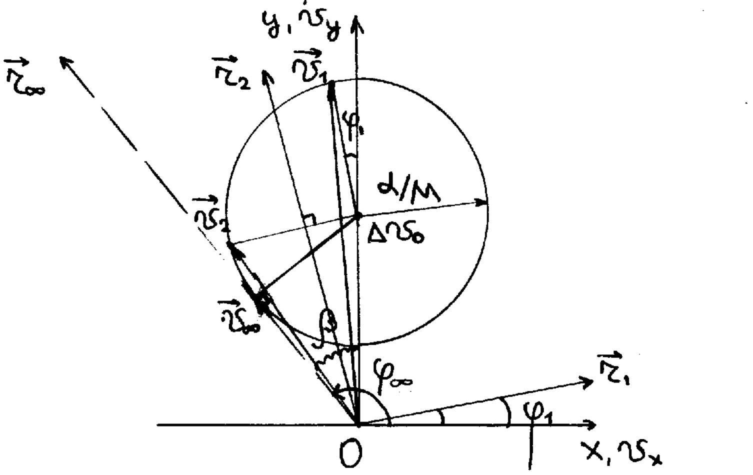
$$r = \infty \text{ при } \cos\varphi_\infty = -\frac{1}{\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)}$$

сложно выразить через ρ и v_∞

24 лекция

25 лекция, 30.11

Поэтому ищем φ_0 через годограф $\vec{v}$:



Касательная: $\vec{v} \parallel \vec{r} \Rightarrow v_\perp = 0$, $r = \dfrac{M}{m v_\perp} = \infty$

$\Downarrow$

φ_∞ соотв. касательной

$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} + \beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha/M}{v_\infty} = \frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}$$

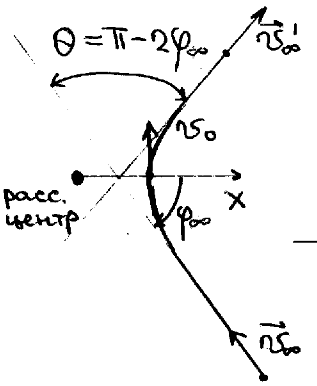
$$\Theta = \pi + 2\beta - \pi \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}$$

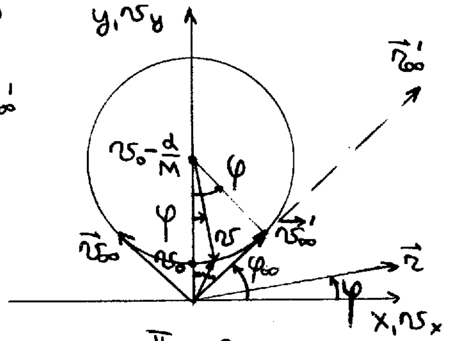
$$\boxed{\rho = \frac{|\alpha|}{m v_\infty^2}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}}\text{, т.к.}$$

при $\alpha < 0$: всё то же (см. вывод годографа),

но $\frac{\alpha}{M} < 0 \Longleftrightarrow$ угол φ откладываем от $(-\vec{e}_y)$:

(рад. окр-ти)

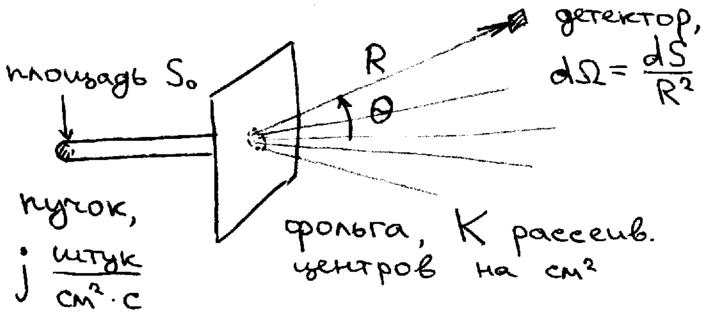




$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\Theta = 2\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{|\alpha|}{M v_\infty}$$

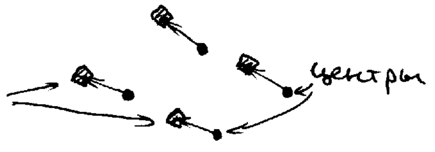
(6.14) Формула Резерфорда



Регистрируем в ед. времени:

рассеется около одного центра

$$dN = \underbrace{d\sigma}_{\text{в эту площадку нужно попасть}} \cdot j \cdot \underbrace{KS_0}_{\text{столько центров}}$$



$$dN = jKS_0 \cdot \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\substack{\text{дифференциальное сечение}\\ \text{рассеяния, ищем его}}} d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{|d\Theta|}\cdot\frac{|d\Theta|}{d\Omega} =$$

$$= \frac{2\pi\rho\, d\rho}{|d\Theta|}\cdot\frac{|d\Theta|}{2\pi \sin\Theta |d\Theta|} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\cdot\frac{1/2}{\sin^2\Theta/2}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}} =$$

$$= \boxed{\left(\frac{\alpha}{2m v_\infty^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^4\Theta/2} = \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

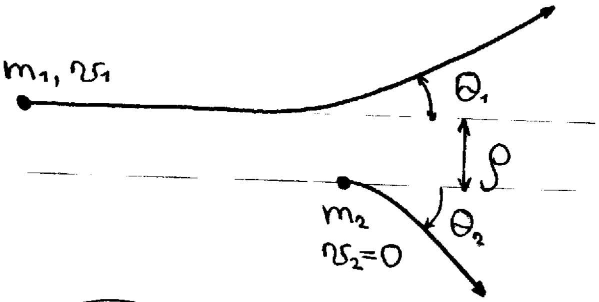
ф-ла Резерфорда

$$\Theta \ll 1: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \Theta^{-4}$$

Кроме $f \propto \frac{1}{r^2}$ опыт показал:

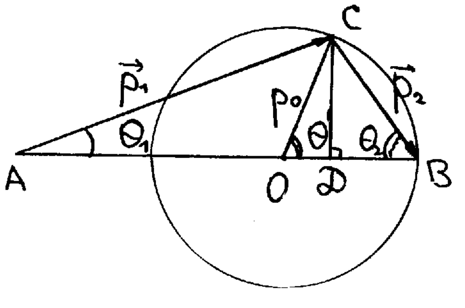
- размер ядра (откл. от ф-лы при $\rho \sim 10^{-13}$ см)
- заряд ядра $\approx Ze$, Z - номер хим. эл-та

(6.15) Рассеяние на подвижных центрах



см. (3.14) - нерелят. упругое рассеяние

(6.4) - задача двух тел



$$p_0 = \mu v_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1$$ - импульс частиц в с.о.ц.м.

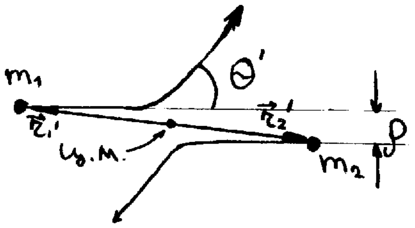
(47)

$\vec{AO} = m_1\vec{V}, \quad \vec{OB} = m_2\vec{V}$

$\vec{V} = \dfrac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}$ – скорость ц.м.

т.к. „2" покоилась, т. B – на окр-ти

В с.о.ц.м.:



Экви. задача:

$\vec{r} = \vec{r}_1' - \vec{r}_2'$

$\vec{r}_1' = \vec{r}\,\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$

⇓

траектории подобны, $\Theta' = \Theta$

умеем выражать через ρ

COB – равноб. $\Rightarrow \Theta_2 = \dfrac{\pi-\Theta}{2}, \quad \Theta = \pi - 2\Theta_2$

$$tg\,\Theta_1 = \frac{CD}{AO+OD} = \frac{p_0 \sin\Theta}{m_1V + p_0\cos\Theta} =$$

$$= \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + m_1\dfrac{m_1v_1}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2v_1}} = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + \dfrac{m_1}{m_2}}$$

Выбитые частицы: $dN = jKS_0\dfrac{d\sigma}{d\Omega_2}d\Omega_2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{|d\Theta|}\cdot\left|\frac{d\Theta}{d\Theta_2}\right|\cdot\frac{|d\Theta_2|}{d\Omega_2} =$$

куда должна попасть „1", чтобы „2" полетела в $d\Omega_2$

$$= 2\pi\left(\frac{\alpha}{\mu v_1^2}\right)^2 \frac{ctg\,\Theta/2}{2\sin^2\Theta/2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2\pi\sin\Theta_2} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\mu v_1^2}\right)^2 \frac{\cos\Theta/2}{\sin^3\Theta/2}\cdot\frac{1}{\sin\Theta_2} =$$

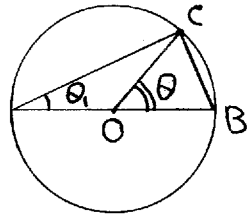
$$= \left(\frac{\alpha}{\mu v_1^2}\right)^2 \frac{1}{\cos^3\Theta_2}$$

Отклонённые частицы:

в общем случае $\dfrac{d\Theta}{d\Theta_1}$ громоздко

$m_1 \ll m_2: \quad \Theta \approx \Theta_1, \ \mu \approx m_1 \Rightarrow$ ф-ла Резерфорда

$m_1 = m_2$:



тоже на окр-ти

$\Theta_1 = \dfrac{\Theta}{2}$

$\mu = \dfrac{m}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \left(\frac{\alpha}{\mu v_1^2}\right)^2 \frac{\cos\Theta_1}{\sin^4\Theta_1} \quad \text{(аналогично)}$$

тождественные частицы:

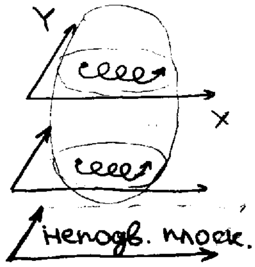
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\alpha}{mv_1^2}\right)^2 \cos\Theta\left(\frac{1}{\sin^4\Theta} + \frac{1}{\cos^4\Theta}\right)$$

25 лекция

далее конспект - 2008

(VII) Движение твёрдого тела

(7.1) Плоское движение



∀ точка движется в плоск-ти, ∥ некот. неподвижной пл-ти.

⇓

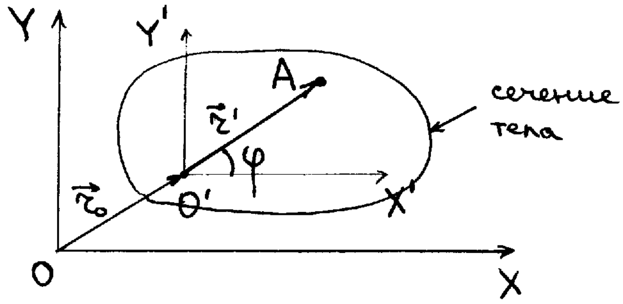
движ. тела

⇕ определяется

движ. сечения

⇕ определяется

двумерный вектор $\vec{r}_0(t)$ + $\varphi(t)$



Найдём закон движения точек сечения:

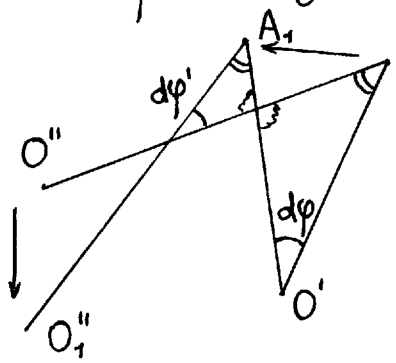
Смещение т. A: $d\vec r = \underbrace{d\vec r_0}_{\text{смещ. т. } O'} + \underbrace{[\overbrace{d\vec\varphi}^{\parallel \vec r'} \times \vec r']}_{\text{поворот относ. т. } O'}$

⇓

$\vec v = \vec v_0 + [\vec\omega \times \vec r']$, $\quad \vec\omega = \frac{d\vec\varphi}{dt}$

зависят от выбора т. O',

$\vec\omega$ и $d\vec\varphi$ – не зависят, т.к.



$\Delta O'AO'' = \Delta O'A_1O''_1$

⇓

$d\varphi' = d\varphi$

$\forall t \ \exists$ точка, где $\vec v = 0$

(может не принад. сечению, но быть с ним жёстко связанной)

найдём её:

$$-[\vec\omega \times \vec v_0] = [\overset{a}{\vec\omega} \times [\overset{b}{\vec\omega} \times \overset{c}{\vec r'}]] =$$

$$= \underbrace{\cancel{\vec\omega(\vec\omega\vec r')}}_{\vec\omega \perp \vec r'}{}^{0} - \vec r'\omega^2$$

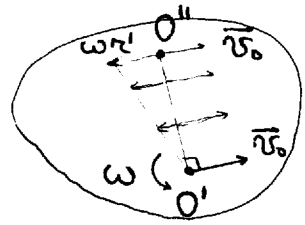
$\vec r' = \frac{1}{\omega^2}[\vec\omega \times \vec v_0]$,

относит. этой точки (O''): $\vec v = [\vec\omega \times \vec r'']$

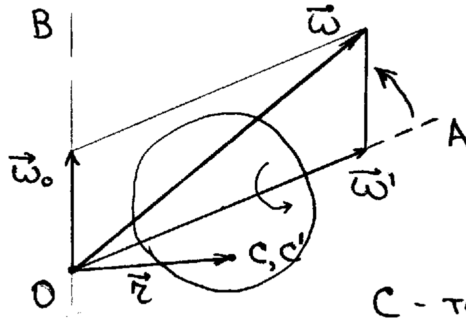
⇓

$\forall t$ плоское движ. ⇔ вращение с $\vec\omega(t)$ относит. некот. оси (через O''), (мгновенная ось вращения)

где она?



7.2 Теорема о сложении вращений



2 вращения ⇕ вращение с $\vec\omega = \vec\omega_0 + \vec\omega'$

O ↑ неподвижна, жёстко связана с телом

C – точка тела

C' – вспомогат. точка, неподв. относ. AOB, при t совпад. с C.

Смещение т. C за dt: (шпиндель)

$$d\vec r = \underbrace{d\vec r_0}_{\text{смещ. т. } C'} + \underbrace{d\vec r'}_{\text{смещ. т. } C \text{ относ. т. } C'} =$$

$$= [d\vec\varphi_0 \times \vec r] + [d\vec\varphi' \times \vec r] =$$

$$= [(\vec\omega_0 + \vec\omega') \times \vec r]\, dt$$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = [\vec\omega \times \vec r]$$

Но: полож. оси ($\vec\omega$) меняется со временем

7.3 Произвольное движение твёрдого тела.

полож. тв. тела ⇔ полож. 3 точек (треугольник)

9 координат – 3 связи = 6 параметров (сторона треуг. = const)

⇓

6 степеней свободы

Например: 3 коорд. точки тела, $\vec{r}_0$

3 угла, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, ориентация

$\frac{d\vec{r}_0}{dt} \to$ поступат. движение сист. коорд., относ. которой считаем углы

$\frac{d\varphi_i}{dt} \to$ вращение вокруг 3 осей

$\Downarrow$ (есть неподв. точка, $\vec{r}_0$)

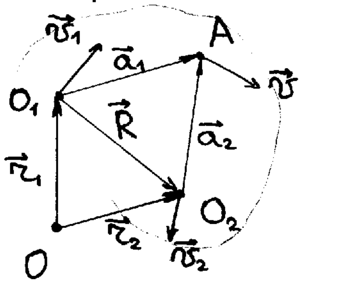
вращ. вокруг одной оси

$\Downarrow$

$\forall$ движение тела = вращение в некот. сист. координат, которая движ. поступательно в л.с.о.

(разделение не единственно, зависит от $\vec{r}_0$)

$\vec{\omega}$ вращения не зависит от $\vec{r}_0$:



нач. коорд. л.с.о.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + [\vec{\omega}_1 \times \vec{a}_1] = \vec{v}_2 + [\vec{\omega}_2 \times \vec{a}_2] = \overbrace{\vec{v}_1 + [\vec{\omega}_1 \times \vec{R}]} + [\vec{\omega}_2 \times \vec{a}_2]$$

$$[\vec{\omega}_1 \times \underbrace{(\vec{a}_1 - \vec{R})}_{\vec{a}_2}] = [\vec{\omega}_2 \times \vec{a}_2] \quad \forall \vec{a}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$$

Демонстрации:

- мгнов. ось вращения (поступ + вращ., диск с точками)
- сложение вращений (фильм)

7.4 Кинетическая энергия твёрдого тела

(только кинетическая, т.к. другие виды энергии (кот. есть) — не предмет механики)

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right)^2 =$$

разбили тело на кусочки; скорость ц. масс; рад.-вектор из ц.м.

$$= \frac{V^2}{2}\sum m + \vec{V} \cdot [\vec{\omega} \times \overset{\text{по опр. ц.м.} \ \to 0}{\cancel{\sum m\vec{r}}}] +$$

$$+ \sum \frac{m}{2}[\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 = \frac{MV^2}{2} + T_{rot}$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 = \omega^2 r^2 \sin^2\theta = \omega^2 r^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum m\left(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2\right) =$$

---

29 лекция, 5.12, с демо

$$= \frac{1}{2}\sum m\Big[(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) r^2 - (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\Big]$$

Отделим характеристики тела и движения; можно сделать, если хар-ка тела будет матрицей:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

I_{ij}, тензор (моментов) инерции

Тензор $\Rightarrow$ не просто матрица, а с дополн. св-вами, о которых расскажут потом; найдём её

$$I_{ij} = \sum m \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{\text{коэф-т перед } \omega_x^2} \qquad\qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -yx & -zx \\ -xy & r^2 - y^2 & -zy \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Короткая запись:

$$T_{rot} = \frac{I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j}{2}$$

(вид одного слагаемого, суммирование подразумевается)

7.5 Главные моменты инерции

$\exists$ ориентация осей (относ. тела), при которой I_{ij} диагонален: (см. алгебру)

Главные оси:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \qquad I_x = \sum m\overbrace{(y^2 + z^2)}^{(\text{расст. до оси})^2}$$

$$I_y = \sum m(x^2 + z^2)$$

$$I_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

главные моменты инерции

В главных осях:

$$T_{rot} = \frac{I_x\omega_x^2}{2} + \frac{I_y\omega_y^2}{2} + \frac{I_z\omega_z^2}{2}$$

обычно из симметрии ясно, где они.

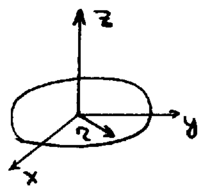
Диагон. эл-т не м.б. больше суммы двух других:

$$I_x + I_y = \sum m\left(y^2+z^2+x^2+z^2\right) \geq$$

$$\geq \sum m\left(x^2+y^2\right) = I_z$$

"=" при $z=0$ (плоское тело)

Пример: плоский диск, $M=\rho\cdot\pi R^2$



(из симметрии гл. оси будут такими)

$z\equiv0$: $I_x+I_y=I_z$

симметр: $I_x=I_y=\dfrac{I_z}{2}$

$$I_z = \int \rho\, ds\cdot\left(x^2+y^2\right) = \rho\int_0^R 2\pi r\, dr\cdot r^2 =$$

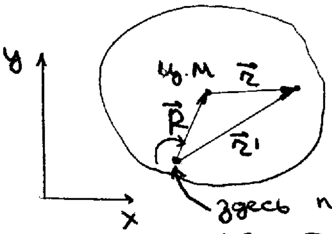
разбиваем на эл-ты с одинаковым r

$$= 2\pi\rho\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

7.6 Теорема Гюйгенса - Штейнера

Тензор инерции м. считать относительно $\forall$ точки.

Энергия через него не выразится, а для ур-й движения пригодится



здесь прибили гвоздём, момент инерции отн. этой точки:

$$I'_{zz} = \sum m\left(x'^2+y'^2\right) =$$

$$= \sum m\left[\left(R_x+x\right)^2+\left(R_y+y\right)^2\right] =$$

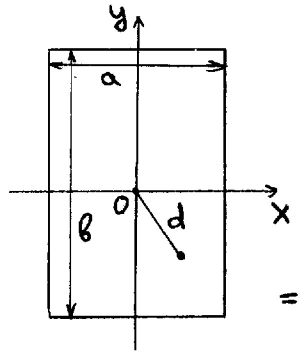
$$= \sum m\left(x^2+y^2\right) + \left(R_x^2+R_y^2\right)\sum m +$$

$$+ 2R_x\cancel{\sum mx}^{\,0} + 2R_y\cancel{\sum my}^{\,0} =$$

$$= I_{zz} + M\cdot\underbrace{\left(R_x^2+R_y^2\right)}_{}$$

(расст. от оси до ц.м.)^2

Пример: прямоуг. пластина (или брусок)



$$I_z = \int\rho\, ds\cdot\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= \rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\cdot\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= \rho\left[b\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 + a\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \rho ab\cdot\frac{a^2+b^2}{12} = \frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$$

или (по теор. Гюйгенса - Штейн., 4 куска)

$$I_z = 4\overbrace{\left(\frac{M}{4}\cdot d^2 + \underbrace{\frac{I_z}{16}}_{}\right)}^{\text{для четвертинки относ. т. O}}$$

подобие: $\frac{1}{4}$ от массы, $\frac{1}{4}$ от $\left(x^2+y^2\right)$

$$\frac{3}{16}I_z = \frac{M}{4}\left[\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2\right] \Rightarrow I_z = \frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$$

$b\to0$: стержень, $I_z = \dfrac{Ma^2}{12}$

7.7 Уравнения движение твёрдого тела

Для системы мат. точек, 6.2 для тв. тела тоже верны

импульс системы

$$\frac{d\vec P}{dt} = \sum_i \vec F_i = \vec F$$

момент имп. системы

$$\frac{d\vec M}{dt} = \sum_i\left[\vec r_i\times\vec F_i\right] = \vec K$$

момент сил

6 ур-й на 6 параметров $\Rightarrow$ достаточно

перепишем их через скорости:

$\vec P = M\vec V$

масса тела

$$\vec M = \sum\left[\vec r\times\vec p\right] = \sum m\left[\vec r\times\vec v\right] =$$

по кусочкам тела

$$= \sum m\left[\overset{a}{\vec r}\times\left(\vec v_0 + \left[\overset{b}{\vec \omega}\times\overset{c}{\vec r}\right]\right)\right] =$$

скорость точки $\vec r=0$, не обязат. ц.м.

$$= \left[\cancel{\sum m\vec{r}} \times \vec{v}_0\right] + \sum m\left(\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})\right)$$

0, если:

$\vec{r}$ – относит. ц.м. ($\sum m\vec{r} = 0$)

$\vec{r}$ – относ. неподв. точки ($\vec{v}_0 = 0$)

$\vec{R} \parallel \vec{v}_0$ ($[\vec{R}\times\vec{v}_0] = 0$)

тогда

$$M_x = \sum m\left(\omega_x r^2 - x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\right)$$

$$M_y = \sum m\left(\omega_y r^2 - y(\vec{\omega}\vec{r})\right)$$

$$M_z = \sum m\left(\omega_z r^2 - z(\vec{\omega}\vec{r})\right)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_y \end{pmatrix} = \sum m \begin{pmatrix} r^2-x^2 & -yx & -zx \\ -xy & r^2-y^2 & -zy \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$M_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

Ур-я движения:

$$\begin{cases} M\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\sum_j I_{ij}\omega_j\right) = K_i, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

в общем случае выносить за $\frac{d}{dt}$ нельзя, т.к. известен в осях, связанных с телом, а их положение может меняться.

Плоское движ.: $\vec{v}\perp\vec{e}_z$, $\vec{\omega}\parallel\vec{e}_z$, $\vec{K}\parallel\vec{e}_z$ (иначе движ. перестанет быть плоским)

$$I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} = K_z$$

Демонстрации:

2 скатывающ. цилиндра

неполн. круг с грузиком на накл. плоск.

маятник Максвелла

крутящ. табуретка

шарик на вертик. спирали

7.8 Равновесие тела

(когда в некот. с.о. $\vec{V} = 0$, $\vec{\omega} = 0$)

$\Downarrow$

$\vec{F} = 0, \quad \vec{K} = 0$

Поиск равновесия:

а) баланс сил и моментов

б) метод виртуальных перемещений:

сместим тело, $\vec{dr}$, $\vec{d\varphi}$

$$\vec{dr} \Rightarrow dA = -\sum_i \vec{F}_i\vec{dr} = -\vec{F}\vec{dr}$$

наша работа по перемещ. тела

$$\vec{d\varphi} \Rightarrow dA = -\sum_i \vec{F}_i\,\overbrace{[\vec{d\varphi}\times\vec{r}_i]}^{\text{перемещ. точки прилож. силы}} \underset{\text{циклич. перестан.}}{=}$$

$$= -\vec{d\varphi}\cdot\sum_i[\vec{r}_i\times\vec{F}_i] = -\vec{d\varphi}\cdot\vec{K}$$

Равновесие $\Rightarrow dA = 0$

Если $\vec{F}_i$ – потенциальны:

$$dA = dU(\vec{r}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

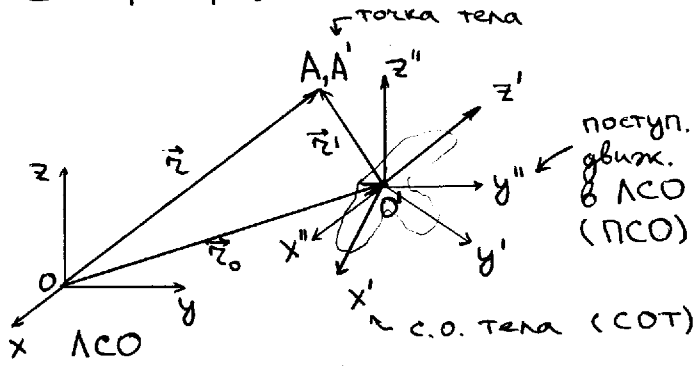
$\Downarrow$

в равновесии $\dfrac{\partial U}{\partial\vec{r}} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial\varphi_i} = 0$

(производные по всем степеням свободы $= 0$)

VIII Неинерциальные системы отсчёта

8.1 Преобразование ускорений



Движение тела задано: $\vec{r}_0(t)$, $\vec{\omega}(t)$

В СОТ движется точка A:

знаем $r_i'(t)$, $v_i' = \dfrac{dr_i'}{dt}$, $a_i' = \dfrac{dv_i'}{dt}$,

$i = x, y, z$

? движ. точки в ЛСО.

$\boxed{\vec r = \vec r_0 + \vec r'}$, но $\vec r_0$ и $\vec r'$ заданы в разных базисах

⇓

$$r_i = r_{0i} + \sum_k \overbrace{T_{ik}(t)}^{\text{матр. поворота}} r'_k$$

$$\vec v = \vec v_0 + \frac{d\vec r'}{dt}, \text{ где}$$

$$\frac{d\vec r'}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i r'_i \vec e'_i = \underbrace{\sum_i \frac{dr'_i}{dt}\vec e'_i}_{\vec v'} + \underbrace{\sum_i r'_i \frac{d\vec e'_i}{dt}}_{??}$$

чтобы найти, делаем трюк:
(разложим сложное движ. на простые)

$$d\vec r = \underbrace{\vec v_0\, dt}_{\substack{\text{сдвиг ПСО}\\ \text{относ. ЛСО}\\ \text{(O' относ. O)}}} + \underbrace{[\vec\omega\, dt \times \vec r']}_{\substack{\text{поворот СОТ}\\ \text{относ. ПСО}\\ \text{(A' относ. O')}}} + \underbrace{\vec v'\, dt}_{\substack{\text{сдвиг точки}\\ \text{относ. СОТ}\\ \text{(A отн. A')}}}$$

$$\boxed{\vec v = \vec v_0 + \underset{??}{[\vec\omega\times\vec r']} + \vec v'}$$ (помним, что в каком базисе)

⇙

$$\sum_i r'_i \frac{d\vec e_i}{dt} = [\vec\omega\times\vec r'],$$ математич. тождество

⇙ (верно ∀ вектора)

$$\sum_i v_i \frac{d\vec e_i}{dt} = [\vec\omega\times\vec v']$$

$$\frac{d\vec v'}{dt} = \vec a' + [\vec\omega\times\vec v']$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec v_0}{dt} + \frac{d}{dt}[\vec\omega\times\vec r'] + \frac{d\vec v'}{dt} =$$

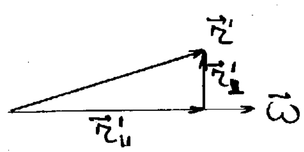
$$= \vec a_0 + \left[\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r'\right] + \left[\overset{a}{\vec\omega}\times\left(\overset{b}{\vec v'} + [\overset{c}{\vec\omega}\times\vec r']\right)\right] +$$

$$+ \vec a' + [\vec\omega\times\vec v'] = \vec a_0 + \vec a' + \left[\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r'\right] +$$

$$+ \underbrace{2[\vec\omega\times\vec v']}_{\substack{\text{Кориолисово}\\ \text{ускорение}}} + \underbrace{\vec\omega(\vec\omega\vec r') - \vec r'\omega^2}_{\substack{\text{Осестремительное}\\ \text{ускорение, т.к.}}}$$

$$\vec\omega(\vec\omega\vec r') - \omega^2\vec r' = -\omega^2\left(\vec r' - \frac{\vec\omega}{\omega}\left(\vec r'\frac{\vec\omega}{\omega}\right)\right) =$$

$$= -\omega^2\vec r'_\perp$$



8.2 Инерциальные силы

$$\overbrace{\frac{\vec F}{m} = \vec a}^{\text{В инерц. с.о.:}} \ne \underbrace{\vec a' = \frac{\vec F + \vec F_{ин}}{m}}_{\text{в неинерц. с.о.}}$$

$$\vec F_{ин} = m(\vec a' - \vec a) =$$

$$= \underbrace{-m\frac{d\vec v_0}{dt}}_{\substack{\text{поступательная}\\ \text{сила инерции}}} + \underbrace{m\left[\vec r'\times\frac{d\vec\omega}{dt}\right]}_{\substack{\text{сила из-за}\\ \text{неравном. вращения}}} +$$

$$+ \underbrace{2m[\vec v'\times\vec\omega]}_{\text{сила Кориолиса}} + \underbrace{m\omega^2\vec r'_\perp}_{\substack{\text{центробежная}\\ \text{сила}}}$$

8.3 Приливы

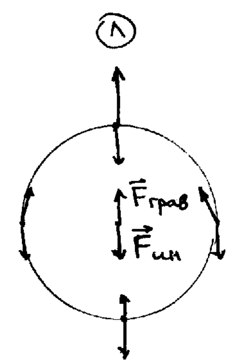
Земля — не инерц. с.о.:

поступ. силы инерц. (прилив):
- вращ. вокруг ц. масс „З-Л"
  $r \approx R_{ЗЛ}\cdot\frac{M_Л}{M_Л+M_З} \approx 4700$ км
- вокруг Солнца

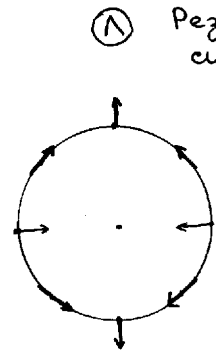
Кориол. центроб.:
- вокруг оси

$$\vec F_{ин} = -m\frac{d\vec v_0}{dt} = const$$ для всей Земли

$$\vec F_{грав.} = -\frac{GmM_Л}{r^2}\frac{\vec r}{r}$$



Результ. сила:



Вынужд. сила с $\Omega = \frac{2\pi}{T/2}$

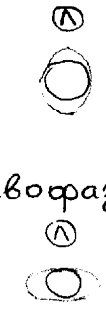
лунные сутки, 24 ч 50 мин

⇒ колеб. уровня моря (см. 5.8):

$\omega_{моря} \approx \Omega \Rightarrow$ резонанс (до 20 м)

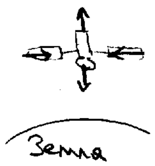
$\omega_{моря} \gg \Omega \Rightarrow$ в фазе:

$\omega_{моря} \ll \Omega \Rightarrow$ в противофазе
(океан, ~ 1м)



Солнце: результ. сила меньше ($\sim \frac{1}{5}$)
$T = 24$ч
⇓
биения

Спутник: тоже испыт. приливные силы:



⇒ устойч. равновесие, когда наиб. главный момент инерции по $\vec{R}$

Демонстрация:
- катящаяся цепочка
- ориентация вращ. предметов

---

31 лекция, 15.12.

8.4 Элементы общей теории относительности

В основе ОТО – сложная математика, поэтому здесь – только путь основных идей.

Эксп. факт: $\vec{g}$ не зависит от массы
⇓
инертная масса = гравит. масса
(принцип эквивалентности, точн. 10^{-12})

как для инерц. сил
⇓ ← можно предположить

гравитационное поле ⇔ неинерц. с.о.
(локально)
(тоже принцип эквивалентности)

Гравит. поле определ. грав. массой
действует на грав. массу

Инертная масса ⇔ энергия тела

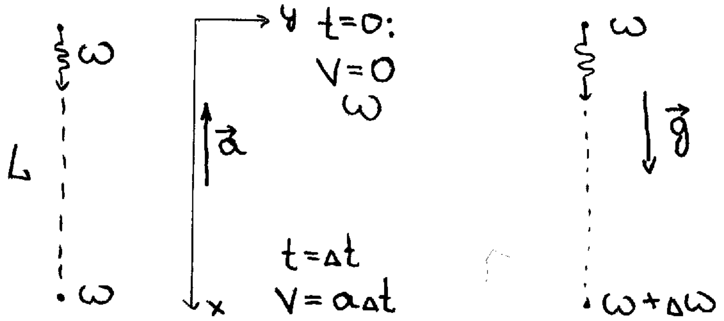
⇓

Гравит. поле опр. энергией тел
и действует на энергию, в т.ч. на фотон

⇓

Гравитац. смещение частоты фотона:

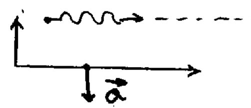
ИСО: то же из ускоренной с.о.: ⇔ гравитац. поле:

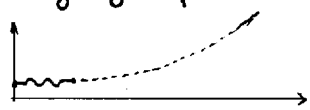


$\omega=\omega+\Delta\omega$
(эфф. Доплера)

Отклонение светового луча:

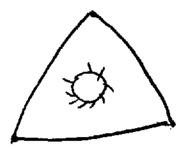
ИСО: Из ускор. с.о.:





то же при $\uparrow\vec{g}$

Но: луч света ⇔ „прямая"
⇓
пр-во искривлено
Σ углов треуг. $\neq 180°$
парал. прямые пересек.
⇓ ← СТО



гравитация влияет на ход времени

Ранние подтверждения:
- прецессия орбиты Меркурия
- отклонение (замедл.) э/м лучей Солнцем
- гравит. смещение частоты γ-квантов (эффект Мёсбауэра, Паунд и Ребке, 1960)

Сейчас: рутинно работающая теория
GPS: 24 спутника, ат. часы, 10^{-14}, 1нс/сутки
($\times c$ = 30 см точность)

СТО: 7.2 мкс/день (замедл. по сравн. с Землёй)
ОТО: 46 мкс/день (быстрее) ⇒ точн. 1/50 000

Всё! Успехов на экзамене!

http://www.inp.nsk.su/~lotov/mech08.pdf
minimum08.doc

K.V.Lotov@inp.nsk.su (курсовые и т.п.)

5 и 7 конс., 6 – письм, 8 и 9 – устный
не надейтесь на автоматы