à la constante $-\infty$, donc $g(z) \equiv 0$ (et le théorème est démontré dans ce cas); ou bien $u(z) \not\equiv -\infty$. Plaçons-nous désormais dans cette dernière hypothèse.

L'ensemble E des infinis de $u(z)$ est alors de *capacité nulle*, d'après un théorème classique. De plus, d'après un théorème de LEBESGUE (voir par ex. BRELOT, J. de Math. **19**, 319–337 (1940); voir théorème D, p. 334), chaque point z_0 de E est centre de circonférences de rayons arbitrairement petits, qui ne rencontrent pas E. Considérons la distribution μ de masses *positives* qui, d'après la théorie de F. RIESZ, est attachée à la fonction sous-harmonique u; dans le langage des distributions de SCHWARTZ, la »distribution« μ n'est autre que le laplacien de $\frac{1}{2\pi}\,u$:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\Delta u\,. \tag{2}$$

Les masses de μ sont *portées par* E, puisque u est harmonique en dehors de E. Si une courbe régulière fermée Γ ne rencontre pas E, le total des masses de μ qui sont situées à l'intérieur de Γ est égal à l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,. \tag{3}$$

Comme ici $u(z) = \log|g(z)|$, cette intégrale est égale au quotient par 2π de la variation de l'argument de $g(z)$ le long de Γ, donc est *égale à un nombre entier*. Appliquons ce résultat à des circonférences de rayons de plus en plus petits, centrées en un point quelconque z_0; on voit que, sauf éventuellement une masse ponctuelle (entière) portée par le point z_0, la distribution μ ne comporte aucune masse dans un cercle assez petit de centre z_0. Ainsi μ se compose de masses ponctuelles, placées en des points isolés; et E est l'ensemble de ces points isolés. Puisque la fonction g est holomorphe en dehors de ces points, et bornée au voisinage de chacun d'eux, g est aussi holomorphe aux points de E, ce qui démontre notre théorème. On notera que si un point z_0 porte une masse égale à l'entier k, z_0 est un zéro d'ordre k de la fonction holomorphe g.

(Eingegangen am 31. Dezember 1951.)

41.

Variétés analytiques complexes et cohomologie

Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 41–55 (1953)

La théorie globale des idéaux de fonctions analytiques, due à K. Oka [**10**] et H. Cartan [**2**, **3**, **4**], vaut non seulement pour les domaines d'holomorphie, mais pour une classe plus vaste de variétés analytiques complexes introduite par K. Stein [**11**], et qui comprend notamment toutes les sous-variétés analytiques sans singularité, de dimension quelconque p, de l'espace numérique complexe de dimension quelconque $n > p$.

Les théorèmes fondamentaux de cette théorie se formulent bien dans le langage de la cohomologie, qui suggère des généralisations et fournit un outil commode en vue de l'exploitation des résultats. Dans cette conférence, nous exposerons d'abord les notions de base : celle de *faisceau*, et celle de *cohomologie* à coefficients dans un faisceau. Puis nous énoncerons les théorèmes fondamentaux. Enfin, nous ferons des applications à des problèmes globaux concernant les variétés de Stein; d'autres applications seront données dans la conférence de J.-P. Serre.

1. Faisceaux sur un espace topologique (1)

Soit X un espace topologique. Un *faisceau de groupes abéliens* sur X, ou simplement *faisceau*, est défini par la donnée :

(1) La notion de *faisceau* a été introduite par J. Leray à l'occasion de l'étude des propriétés homologiques d'une application continue. Voir J. LERAY, *Journ. de Math. pures et appliquées*, **29**, 1950, pp. 1-139; c'est dans cet ouvrage que l'on trouve (bas de la page 75) une définition de la cohomologie à coefficients dans un faisceau, limitée à vrai dire au cas d'un espace X localement compact (et il s'agissait de la cohomologie « à supports compacts »). La définition des faisceaux adoptée ici est un peu différente; elle est due à Lazard et a été exposée dans mon *Séminaire polycopié* de l'E. N. S. 1950-1951, où la théorie de la cohomologie à coefficients dans un faisceau a été développée (exposés XIV à XX).

1° D'une fonction $x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ qui, à chaque point $x \in X$, associe un groupe abélien $\mathcal{F}_x$ (qu'on notera additivement);

2° D'une topologie (non nécessairement séparée) dans la réunion $\mathcal{F}$ des ensembles $\mathcal{F}_x$.

Avant de formuler les axiomes auxquels ces données sont astreintes, notons p l'application de $\mathcal{F}$ sur X qui, à chaque $\alpha \in \mathcal{F}$, associe le point x tel que $\alpha \in \mathcal{F}_x$. On pose les deux axiomes :

(F_I) l'application $\alpha \longrightarrow -\alpha$ qui, à chaque $\alpha \in \mathcal{F}$, associe l'opposé de α dans le groupe $\mathcal{F}_{p(\alpha)}$, est une application continue de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. L'application $(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha + \beta$, définie sur l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (α, β) tels que $p(\alpha) = p(\beta)$, et qui associe à un tel couple la somme $\alpha + \beta$ dans le groupe $\mathcal{F}_{p(\alpha)}$, est une application continue de la partie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

(F_{II}) l'application p est un *homéomorphisme local*, i.e.: tout élément $\alpha \in \mathcal{F}$ possède un voisinage ouvert V tel que la restriction de p à V soit un homéomorphisme de V sur un ouvert de X.

Si U est une partie de X, la collection des $\mathcal{F}_x$ pour $x \in U$, munie de la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$, est évidemment un faisceau sur U ; on le notera $\mathcal{F}(U)$, et on l'appellera le faisceau *induit* par $\mathcal{F}$ sur U.

Exemple. — Soit G un groupe abélien. Soit $\mathcal{F}$ le produit $G \times X$, muni de la topologie-produit (G étant muni de la topologie discrète). Le sous-ensemble $\mathcal{F}_x$ des couples (g, x), où g parcourt G, est évidemment muni d'une structure de groupe abélien (isomorphe à G). On vérifie aussitôt les axiomes (F_I) et (F_{II}). Ce faisceau s'appelle le « faisceau constant » défini par G, et se note aussi G.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quelconque sur X. On appelle *section* de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$ une application *continue* $s : U \longrightarrow \mathcal{F}$ telle que $p \circ s$ soit l'identité ; s est alors un homéomorphisme de U sur son image $s(U)$. L'axiome (F_{II}) implique ceci : si deux sections sont égales en un point $x \in U$, elles sont égales en tous points d'un voisinage de x. L'application s qui, à chaque $x \in U$, associe l'élément neutre $0_x \in \mathcal{F}_x$, est une section [en vertu de (F_I)]; on l'appelle la section nulle. L'ensemble $\Gamma(U, \mathcal{F})$ des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U est muni d'une structure de groupe abélien, grâce à (F_I), et la section nulle est l'élément neutre de ce groupe.

Si U et V sont deux ouverts tels que $V \subset U$, toute section au-dessus de U induit une section au-dessus de V. Le groupe $\mathcal{F}_x$ est la limite inductive des groupes $\Gamma(U, \mathcal{F})$ relatifs aux voisinages ouverts U de x.

Dans la pratique, un faisceau sur X est souvent défini de la manière suivante : on se donne des groupes abéliens $\mathcal{F}_U$ attachés à certains ouverts $U \subset X$, formant un système fondamental d'ouverts de la topologie de X ; et, pour tout couple (U, V) tel que $V \subset U$, on se donne un homomorphisme $f_{VU} : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_V$, de manière que, pour $W \subset V \subset U$, on ait $f_{WU} = f_{WV} \circ f_{VU}$. On prend alors pour $\mathcal{F}_x$ la limite inductive des $\mathcal{F}_U$ pour les ouverts U contenant x ; et, sur la réunion $\mathcal{F}$ des $\mathcal{F}_x$, on définit la topologie $\mathfrak{T}$ que voici : pour tout ouvert U et tout $\alpha \in \mathcal{F}_U$, soit $[\alpha]$ l'ensemble des images de α dans les $\mathcal{F}_x$ associés aux points $x \in U$; par définition, les sous-ensembles $[\alpha]$ de $\mathcal{F}$ constituent un système fondamental d'ouverts de la topologie $\mathfrak{T}$. Les axiomes (F_I) et (F_{II}) sont satisfaits. On a un homomorphisme évident : $\mathcal{F}_U \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$, mais ce n'est pas nécessairement un isomorphisme. Deux modes de définition distincts peuvent ainsi définir un même faisceau. Pour que l'homomorphisme $\mathcal{F}_U \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ soit un *isomorphisme*, il faut et il suffit que, pour tout système d'ouverts U_i de réunion U, et tout système d'éléments $\alpha_i \in \mathcal{F}_{U_i}$ tels que α_i et α_j aient même image dans $\mathcal{F}_{U_i \cap U_j}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{F}_U$ et un seul, tel que $f_{U_i U}(\alpha) = \alpha_i$ pour tout i.

Exemple. — Soit $\mathcal{F}_U$ le groupe additif des fonctions numériques réelles (resp. complexes) définies et continues dans U. Si $V \subset U$, l'homomorphisme $\mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_V$ sera celui qui associe à une fonction définie sur U sa restriction à V. Alors $\mathcal{F}_x$ est le groupe additif des *germes de fonctions continues* au point x ; et $\mathcal{F}$ s'appelle le faisceau des germes de fonctions continues réelles (resp. complexes). $\mathcal{F}_U$ est isomorphe au groupe des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U.

Remarque. — On a défini des faisceaux de groupes abéliens; mais il est clair que des définitions analogues peuvent être données pour n'importe quelle structure algébrique.

2. Sous-faisceau, homomorphisme, faisceau-quotient

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$, tel que, pour tout $x \in X$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ soit un *sous-groupe* de $\mathcal{F}_x$. Pour que $\mathcal{G}$, pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$, soit un faisceau, il faut et il suffit que $\mathcal{G}$ soit *ouvert* dans $\mathcal{F}$ [voir la condition (F_{II})]. On dit alors que $\mathcal{G}$ est un *sous-faisceau* de $\mathcal{F}$.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux sur un même espace X. On appelle homomorphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ une application *continue* f de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ telle que la restriction f_x de f à $\mathcal{F}_x$ soit un homomorphisme du groupe $\mathcal{F}_x$ dans le groupe $\mathcal{F}'_x$. L'image réciproque de la section nulle de $\mathcal{F}'$ (section qui est un ouvert de $\mathcal{F}'$) est un sous-faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, appelé *noyau* de l'homomorphisme f ; pour chaque $x \in X$, $\mathcal{G}_x$ est le noyau de f_x. D'autre part, f est une application ouverte ; donc l'image de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ est un sous-faisceau $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$, appelé l'*image* de l'homomorphisme f ; $\mathcal{G}_x'$ est l'image de f_x.

Il est clair que tout homomorphisme $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ définit, pour chaque ouvert $U \subset X$, un homomorphisme des groupes de sections $\Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}')$.

Soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau d'un faisceau $\mathcal{F}$. Définissons un *faisceau-quotient* comme suit : soit $\mathcal{H}_x$ le groupe quotient $\mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$. Si $\mathcal{H}$ désigne la réunion des $\mathcal{H}_x$, les applications $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$ définissent une application de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{H}$, qui identifie $\mathcal{H}$ à un quotient de $\mathcal{F}$. On munit $\mathcal{H}$ de la topologie quotient, ce qui définit $\mathcal{H}$ comme faisceau. Ce faisceau est noté $\mathcal{F}/\mathcal{G}$. L'application $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{G}$ est un homomorphisme, dont le noyau est le faisceau $\mathcal{G}$. Cherchons les sections du faisceau-quotient $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ au-dessus de X : si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$, tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que la section induite par s dans U soit l'image d'un élément de $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Ainsi X peut être recouvert par des ouverts U_i, et dans chaque U_i on a un élément $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ de manière que, dans $U_i \cap U_j$, $s_i - s_j$ soit une section du sous-faisceau $\mathcal{G}$. En général, une section de $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ au-dessus de X n'est l'image d'aucune section de $\mathcal{F}$ au-dessus de X. Ainsi, la suite de groupes et d'homomorphismes

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$$

est évidemment une *suite exacte* (i.e.: l'image de chaque homomorphisme est le noyau de l'homomorphisme suivant), mais l'homomorphisme φ n'est pas un épimorphisme [2], en général.

3. Cohomologie à coefficients dans un faisceau

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique X. On va définir, pour tout entier $q \geqslant 0$, un groupe de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$. Pour tout recouvrement $\mathcal{R}$ de X par des ouverts

[2] Un homomorphisme $\varphi : A \longrightarrow B$ de groupes abéliens (ou plus généralement de modules) s'appelle un *épimorphisme* si φ *applique* A *sur* B. Rappelons aussi la définition du *conoyau* de φ : c'est le quotient de B par l'image $\varphi(A)$. Définitions analogues pour les homomorphismes de faisceaux.

U_i, considérons ce qui suit : pour tout entier $q \geqslant 0$, nous posons $q+1 = p$, et nous associons à chaque suite de p indices $i_1, \ldots, i_p$ un élément $f_{i_1 \ldots i_p} \in \Gamma(U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}, \mathcal{F})$, zéro si $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ est vide ; et l'on suppose que $f_{i_1 \ldots i_p}$ est une fonction *alternée* des indices (en particulier, est nulle si les indices ne sont pas tous distincts). On obtient ainsi le groupe additif des « cochaînes alternées » du recouvrement $\mathcal{R}$, de degré $q = p - 1$, relatives au faisceau $\mathcal{F}$. On définit dans ce groupe un opérateur « cobord » à la manière habituelle ; il augmente le degré de 1. D'où un groupe de cohomologie $H^q(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Si un recouvrement $\mathcal{R}'$ est plus fin que $\mathcal{R}$, on a un homomorphisme naturel, unique, de $H^q(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ dans $H^q(\mathcal{R}', \mathcal{F})$. On peut donc considérer la limite inductive des $H^q(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ relatifs à tous les recouvrements ouverts $\mathcal{R}$; c'est par définition, le groupe $H^q(X, \mathcal{F})$. On notera que $H^0(X, \mathcal{F})$ s'identifie canoniquement au groupe des sections $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Tout homomorphisme de faisceaux $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ définit évidemment des homomorphismes $H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}')$. De plus, soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau de $\mathcal{F}$; on peut définir des homomorphismes naturels

$$\delta^q : H^q(X, \mathcal{F}/\mathcal{G}) \longrightarrow H^{q+1}(H, \mathcal{G}),$$

tout au moins lorsque X est paracompact.

Donnons par exemple la définition de δ^0 : on a vu (§ 2) qu'un élément $\alpha \in H^0(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$ peut être défini par des sections $s_i \in H^0(U_i, \mathcal{F})$ au-dessus des ouverts U_i d'un recouvrement convenable $\mathcal{R}$ de X ; et que $s_i - s_j \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{G})$. Posons alors $s_i - s_j = f_{ij}$. Les f_{ij} définissent un cocycle (alterné) de degré 1, donc un élément de $H^1(\mathcal{R}, \mathcal{G})$, donc un élément $\beta \in H^1(X, \mathcal{G})$. On vérifie facilement que cet élément β est univoquement déterminé par α, c'est-à-dire est indépendant du choix du recouvrement $\mathcal{R}$ et des sections s_i. Par définition, $\delta^0(\alpha) = \beta$. Pour $q > 0$, la définition de δ^q est analogue, mais un peu plus compliquée.

La propriété fondamentale de la cohomologie est la suivante [3] : l'espace X étant supposé paracompact, si $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau d'un faisceau $\mathcal{F}$, *la suite illimitée de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}/\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{G}) \to \ldots$$

$$\to H^q(X, \mathcal{G}) \to H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F}/\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathcal{G}) \to \ldots$$

est une suite exacte.

[3] Voir mon *Séminaire* 1950-1951 cité en note 1, où la propriété de « suite exacte » était posée comme l'un des axiomes d'une théorie axiomatique de la cohomologie à coefficients dans un faisceau.

Le début de cette suite coïncide avec la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$$

considérée à la fin du § 2. Il en résulte ceci : pour que $\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$ soit un épimorphisme (²), il suffit que $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$.

4. Variétés analytiques complexes ; problème additif de Cousin

La définition bien connue d'une variété analytique-complexe de dimension (complexe) n, (donc de dimension réelle $2n$), peut se formuler en termes de faisceaux, comme suit : sur l'espace X, supposé séparé, on se donne un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau $\mathcal{F}$ des germes de fonctions continues complexes (§ 1), et on lui impose l'axiome suivant :

(VA) pour chaque point $x \in X$, il existe un ouvert U contenant x, et n sections f_i de $\mathcal{O}$ au-dessus de U, nulles au points x, telles que : 1° les f_i définissent un homéomorphisme de U sur un ouvert de l'espace numérique complexe C^n, de dimension (complexe) n ; 2° les éléments de $\mathcal{O}_x$ soient exactement les fonctions composées $F(f_1, \ldots, f_n)$, où F est holomorphe à l'origine (dans C^n).

Les systèmes de n sections f_i jouissant de ces propriétés s'appellent systèmes de *coordonnées locales* au point x. Le faisceau $\mathcal{O}$ s'appelle le faisceau des *germes de fonctions holomorphes* ; les sections de $\mathcal{O}$ au-dessus d'un ouvert U sont les *fonctions holomorphes* dans U. On note $\mathcal{O}(U)$ le faisceau induit sur un ouvert U. On observe que $\mathcal{O}_x$ est un anneau d'intégrité.

Sur une variété analytique-complexe X, définissons le faisceau $\mathcal{M}$ des *germes de fonctions méromorphes* : $\mathcal{M}_x$ est défini comme le corps des fractions de l'anneau d'intégrité $\mathcal{O}_x$; sur la réunion $\mathcal{M}$ des $\mathcal{M}_x$, on définit la topologie suivante : pour tout couple de fonctions holomorphes f, g dans un ouvert U, tel que g n'induise la constante 0 dans aucun sous-ensemble ouvert non vide de U, soit $[f, g]$ l'ensemble des $f_x/g_x \in \mathcal{M}_x$ pour $x \in U$ (en notant f_x, resp. g_x, l'image de f, resp. g, dans $\mathcal{O}_x$) ; les ensembles $[f, g]$ constituent, par définition, une famille fondamentale d'ouverts de la topologie de $\mathcal{M}$. Une « fonction méromorphe » dans un ouvert U est, par définition, une section de $\mathcal{M}$ au-dessus de U.

Il est clair que $\mathcal{O}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{M}$. Interprétons le faisceau-quotient $\mathcal{M}/\mathcal{O}$: si $m \in \mathcal{M}_x$, la classe de m dans $\mathcal{M}_x/\mathcal{O}_x$ s'appelle la *partie principale* de m. Une section de

$\mathcal{M}/\mathcal{O}$ s'appelle un *système de parties principales*. Considérons l'homomorphisme $\varphi : \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}/\mathcal{O})$; à chaque fonction méromorphe dans X, φ associe un système de parties principales. Le classique *problème additif de Cousin* (ou premier problème de Cousin) (⁴) consiste à caractériser, parmi les systèmes de parties principales dans X, ceux qui proviennent d'une fonction méromorphe dans X ; autrement dit, à caractériser l'image de l'homomorphisme φ. Dire que le problème de Cousin est toujours résoluble, c'est dire que φ est un épimorphisme.

En vertu de la suite exacte de cohomologie (§ 3), la condition $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ est *suffisante* pour que le problème additif de Cousin soit toujours résoluble. Nous verrons qu'il en est notamment ainsi lorsque X est une « variété de Stein » (§ 7, théorème B). Avant d'énoncer des théorèmes généraux, affirmant que certains groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ sont nuls dans certaines conditions, il nous faut définir une nouvelle notion : celle de « faisceau analytique cohérent ».

5. Faisceaux analytiques cohérents

Soit X une variété analytique-complexe. Un *faisceau analytique* est un faisceau $\mathcal{F}$ tel que, pour chaque point x, $\mathcal{F}_x$ soit muni d'une structure de *module* sur l'anneau $\mathcal{O}_x$ (anneau des germes de fonctions holomorphes au point x), et cela de manière que l'application $(f, \alpha) \longrightarrow f\alpha$, définie sur l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (f, α) tels qu'il existe $x \in X$ avec $f \in \mathcal{O}_x$ et $\alpha \in \mathcal{F}_x$, soit une application *continue* de $\mathcal{G} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

Exemple. — Soit $\mathcal{O}^p$ la somme directe de p exemplaires du faisceau $\mathcal{O}$; un élément de $\mathcal{O}_x^p$ est une suite $(f_1, \ldots, f_p)$ de p germes de fonctions holomorphes au point x. Faisons opérer $\mathcal{O}_x$ dans $\mathcal{O}_x^p$ par la formule

$$f \cdot (f_1, \ldots, f_p) = (ff_1, \ldots, ff_p) ;$$

ceci définit $\mathcal{O}^p$ comme faisceau analytique.

Autre exemple. — Soit un sous-faisceau $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}$ tel que, pour chaque point x, $\mathcal{J}_x$ soit un *idéal* de l'anneau $\mathcal{O}_x$; alors $\mathcal{J}$ est un faisceau analytique.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux analytiques sur X. Un homomorphisme de faisceaux $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ est dit *analytique* si, pour chaque point x, l'homomorphisme $f_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}'_x$ est

(⁴) Cf. [7]. Les problèmes de Cousin ont donné lieu à une abondante littérature; bornons-nous à renvoyer à [9].

compatible avec les opérations de $\mathcal{O}_x$. Le noyau, l'image et le conoyau de f sont alors des faisceaux analytiques.

Définition. — On dit qu'un faisceau analytique $\mathcal{F}$ sur X est *cohérent* (5) si chaque $x \in$ X possède un voisinage ouvert U tel que le faisceau analytique induit $\mathcal{F}$(U) soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme analytique $f : \mathcal{O}^p(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathcal{O}^q(\mathrm{U})$ (p et q entiers).

En particulier, nous dirons qu'un faisceau analytique est *localement libre* si chaque $x \in$ X possède un voisinage ouvert U tel que le faisceau induit $\mathcal{F}$(U) soit isomorphe à $\mathcal{O}^q(\mathrm{U})$ pour un entier q convenable. Alors, tout faisceau localement libre est cohérent.

On démontre ceci : *soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux analytiques cohérents, et f un homomorphisme analytique de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$. Alors le noyau, l'image et le conoyau de f sont des faisceaux cohérents.* La démonstration repose essentiellement sur le théorème d'Oka (6), qui affirme ceci : pour tout homomorphisme analytique $f : \mathcal{O}^p(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathcal{O}^q(\mathrm{X})$, chaque point $x \in$ X possède un voisinage ouvert U tel que le noyau de l'homomorphisme induit $\mathcal{O}^p(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathcal{O}^q(\mathrm{U})$ soit l'image d'un homomorphisme analytique $\mathcal{O}^r(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathcal{O}^p(\mathrm{U})$.

On notera une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-faisceau analytique $\mathcal{G}$ d'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ soit cohérent : c'est que, pour chaque $x \in$ X, il existe un voisinage ouvert U de x et un nombre fini de sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U, telles que, pour tout $y \in$ U, $\mathcal{G}_y$ soit le sous-$\mathcal{O}_y$-module de $\mathcal{F}_y$ engendré par ces sections. Ce critère s'applique notamment lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}^q$, et plus particulièrement lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}$; dans ce dernier cas, $\mathcal{G}_x$ est un idéal de $\mathcal{O}_x$, et l'on a un *faisceau cohérent d'idéaux*.

Exemple de faisceau cohérent d'idéaux. — Soit **X** une variété analytique-complexe. On appelle *sous-variété analytique* de X tout sous-ensemble fermé V de X tel que, pour chaque $x \in$ V, il existe un voisinage ouvert U de x et un nombre fini de f_i holomorphes dans U, telles que $y \in \mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ soit équivalent à « $y \in$ U et $f_i(y) = 0$ ». Un point $x \in$ V est dit *régulier* s'il existe au voisinage de x, dans la variété ambiante X, un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ nulles au point x, et telles que V soit localement définie (au voisinage

(5) Cette définition est plus générale que celle donnée dans [3] et [4]; dans les cas plus particuliers envisagés dans [3] et [4], les définitions coïncident.

(6) Voir [10], pp. 18 et suiv.; voir aussi [4], p. 37, théorème 1; et [5], exposé XV, pp. 5-10.

de x) par l'annulation de certaines de ces coordonnées. Quand **tous les points de** V sont réguliers, on dit que V est ***régulièrement plongée*** dans X. Ces définitions étant posées, soit V une **sous-variété analytique** de X ; elle définit un faisceau d'idéaux **sur X comme suit** : en un point $x \in$ V, on prend l'idéal $\mathcal{J}_x$ **de $\mathcal{O}_x$ formé des germes** qui s'annulent identiquement sur V **au voisinage de x**, et en un point $x \notin$ V, on prend $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x$. **On démontre** (7) que ce faisceau $\mathcal{J}$ (appelé le faisceau de la sous-variété V) est *cohérent* ; c'est évident lorsque V est régulièrement plongée, mais c'est vrai dans tous les cas.

6. Variétés de Stein

Une variété de Stein est, en gros, une variété analytique-complexe sur laquelle il y a suffisamment de fonctions holomorphes. D'une façon précise, c'est une variété analytique-complexe X (connexe ou non), réunion dénombrable de compacts, qui satisfait aux trois conditions suivantes :

(a) Si $x \in$ X, $y \in$ X et $x \neq y$, il existe une fonction f holomorphe dans X, telle que $f(x) \neq f(y)$;

(b) Pour tout $x \in$ X, il existe n fonctions holomorphes dans X qui induisent, dans l'anneau $\mathcal{O}_x$, un système de coordonnées locales au point x (n désigne la dimension complexe de X);

(c) L'*enveloppe* $\widehat{\mathrm{K}}$ de tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ est compacte.

Rappelons la définition de l'enveloppe d'un compact K : c'est l'ensemble $\widehat{\mathrm{K}}$ des points $x \in$ X tels que

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in \mathrm{K}} |f(y)|$$

pour toute f holomorphe dans X.

On montre (en utilisant le théorème de Baire) que la condition (c) équivaut à la suivante :

(c') Pour toute suite infinie S de points de X, sans point adhérent dans X, il existe une fonction holomorphe dans X et *non bornée* sur S.

Exemples

1. La condition (a) montre qu'une variété *compacte* X de dimension $n > 0$ n'est jamais une variété de Stein.

2. Pour $n = 1$, toute « surface de Riemann » connexe,

(7) Voir [4], théorème 2; et [5], exposé XVI.

non compacte, est une variété de Stein : cela résulte d'un mémoire de Behnke et Stein [**1**].

3. Soit X un ouvert de l'espace numérique complexe C^n. Les conditions (*a*) et (*b*) sont trivialement vérifiées; la condition (*c*) exprime que X est un *domaine d'holomorphie* (cf. [**6**]).

4. Soit X un « domaine étalé » dans C^n, c'est-à-dire une variété munie d'une application φ dans C^n, φ étant un homéomorphisme local. La condition (*b*) est trivialement vérifiée; les conditions (*a*) et (*c*) entraînent que X est un domaine d'holomorphie. Réciproquement, tout domaine d'holomorphie (étalé dans C^n) est-il une variété de Stein ? La réponse est affirmative ([8]) lorsque X est « de type fini » (i.e.: s'il est impossible de trouver dans C^n un disque ouvert A et, dans X, une infinité d'ouverts que φ applique homéomorphiquement sur A). La question reste ouverte dans le cas général.

5. Le produit $X \times Y$ de deux variétés de Stein est évidemment une variété de Stein.

6. Soient X une variété de Stein, et V une sous-variété analytique régulièrement plongée dans X (cf. § 5). Alors V est une variété de Stein : cela résulte aussitôt des définitions. Ainsi, toute sous-variété analytique régulièrement plongée dans C^n est une variété de Stein ; plus particulièrement, toute variété algébrique affine est une variété de Stein.

7. Soient X une variété de Stein, et g une fonction holomorphe dans X, non identiquement nulle. L'ensemble Y des points $x \in X$ tels que $g(x) \neq 0$ est une variété de Stein : pour vérifier que Y satisfait à la condition (*c*), on observe que $1/g$ est holomorphe dans Y ([9]). Par exemple, la variété du groupe linéaire complexe à r variables est une variété de Stein; donc la variété de tout sous-groupe fermé du groupe linéaire complexe est une variété de Stein.

([8]) Cf. [**6**], et aussi [**5**], exposé IX.

([9]) On a un résultat plus général : si d'une variété de Stein on enlève un « diviseur » D (c'est-à-dire une sous-variété analytique de X qui, au voisinage de chaque point $x \in D$, peut être définie par une seule équation $g_x = 0$, g_x étant holomorphe au point x et $\not\equiv 0$), *la variété restante* X — D *est une variété de Stein*. Tout revient à prouver ceci : pour tout $x \in D$ il existe une fonction méromorphe f dans X, holomorphe dans X — D, et telle que $g_x f$ soit holomorphe et $\neq 0$ au point x. L'existence d'une telle f résulte du théorème A (§ 7 ci-dessous), appliqué au sous-faisceau $\mathcal{F}$ du faisceau $\mathcal{M}$ des germes de fonctions méromorphes, défini comme suit : $\mathcal{F}_x = \mathcal{O}_x$ si $x \notin D$; si $x \in D$, $\mathcal{F}_x$ se compose des $\varphi \in \mathcal{M}_x$ telles que $g_x\varphi$ soit holomorphe. Ce faisceau est cohérent. La démonstration qui vient d'être esquissée est due à J.-P. Serre.

7. Énoncé des théorèmes fondamentaux

Théorème A. — *Soient* X *une variété de Stein, et* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X. *Alors, pour tout point* $x \in X$, *l'image de* $H^0(X, \mathcal{F})$ *dans* $\mathcal{F}_x$ *engendre* $\mathcal{F}_x$ *pour sa structure de* $\mathcal{O}_x$*-module.*

Théorème B. — *Soient* X *une variété de Stein, et* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X. *Alors, pour tout entier* $q > 0$, *les groupes de cohomologie* $H^q(X, \mathcal{F})$ *sont nuls.*

La démonstration est trop longue et délicate pour pouvoir être donnée ici ([10]). La démonstration du théorème A, et celle du théorème B pour le cas $q = 1$, constituaient en fait l'objectif essentiel du mémoire [**4**], au moins dans le cas où X est un domaine d'holomorphie de type fini, et $\mathcal{F}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^q(X)$. Les raisonnements se transposent sans difficulté au cas général d'une variété de Stein. La formulation cohomologique du théorème B, et l'idée d'étudier non seulement le cas $q = 1$, mais le cas $q > 0$ quelconque, sont dues à J.-P. Serre.

8. Applications

Théorème 1 ([11]). — *Sur une variété de Stein* X, *le problème additif de Cousin est toujours résoluble.*

En effet, d'après le théorème B, on a $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

Théorème 2. — *Soient* X *une variété de Stein,* V *une sous-variété analytique de* X, $\mathcal{I}$ *le faisceau d'idéaux défini par* V (§ 5). *Alors les fonctions holomorphes dans* X *qui s'annulent en tout point de* V, *engendrent, en chaque point* $x \in X$, *l'idéal* $\mathcal{I}_x$.

En effet, $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent, auquel on applique le théorème A.

Corollaire. — Si $x \notin V$, il existe une fonction f holomorphe dans X, nulle sur V, et telle que $f(x) \neq 0$. Autrement dit : la sous-variété V peut être globalement définie par des équations (obtenues en égalant à 0 des fonctions holomorphes dans X). De plus : pour tout ouvert U de X, relativement com-

([10]) Une démonstration complète a été donnée dans [**5**], exposé XIX.

([11]) Démontré pour la première fois par Oka [**9**] dans le cas où X est un domaine d'holomorphie univalent.

pact, il existe un nombre *fini* de f_i holomorphes dans X, **nulles** sur V, et n'ayant pas, dans U, d'autre zéro commun **que les** points de $V \in U$.

Théorème 3. — *Soient* X *une variété de Stein, et* V *une sous-variété analytique régulièrement plongée dans* X. *Alors toute fonction holomorphe sur la variété analytique-complexe* V *est induite par une fonction holomorphe sur* X.

En effet, soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux défini par V. D'après le théorème B, on a $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$, donc

$$H^0(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}/\mathcal{J}) \tag{1}$$

est un *épimorphisme*. Or $\mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x$ est nul si $x \notin V$; si $x \in X$, $\mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x$ s'identifie à l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur V au point x, parce que le point x est régulier pour V. Donc $H^0(X, \mathcal{O}/\mathcal{J})$ s'identifie à l'anneau des fonctions holomorphes sur V, et (1) est l'homomorphisme qui, à chaque fonction holomorphe sur X, associe la fonction qu'elle induit sur V. D'où le théorème.

Considérons le cas particulier où V est un sous-ensemble infini discret de X : si X est une variété de Stein, le théorème 3 montre qu'il existe une f holomorphe sur X et *prenant des valeurs arbitrairement données aux points de* V. Cette propriété renforce évidemment les conditions (a) et (c') des variétés de Stein. Plus généralement :

A chaque point x d'un ensemble discret A, associons un entier $r(x)$. Pour $x \in A$, soit $\mathcal{J}_x$ l'idéal de $\mathcal{O}_x$ formé des germes dont le développement de Taylor, au point x, n'a pas de terme de degré $\leqslant r(x)$; pour $x \subset A$, prenons $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x$. Il est immédiat que le faisceau $\mathcal{J}$ des $\mathcal{J}_x$ est cohérent. Si $x \notin A$, un élément de $\mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x$ est un « développement limité d'ordre $r(x)$ ». On peut alors énoncer :

Théorème 4. — *Si* X *est une variété de Stein, il existe une fonction holomorphe dans* X *et admettant, en chaque point* $x \in A$, *un développement limité arbitrairement donné* (et d'ordre $r(x)$ arbitraire).

En effet, se donner un tel système de développements limités, c'est se donner un élément de $H^0(X, \mathcal{O}/\mathcal{J})$. Or l'homomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}/\mathcal{J})$$

est un épimorphisme, puisque $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$ en vertu du théorème B.

Le théorème 4, appliqué au cas où A possède un seul point, renforce la propriété (b) de la définition des variétés de Stein.

Remarque (due à J.-P. Serre). — Pour qu'une variété analytique-complexe X, réunion dénombrable de compacts, soit une variété de Stein, il faut et il suffit que X satisfasse à la condition :

(S) pour tout faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}$, on a $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$.

La condition est nécessaire, d'après le théorème B. Elle est suffisante, car (S) entraîne la validité de la conclusion du théorème 4, et ceci entraîne que X satisfait aux conditions (a), (b) et (c').

Théorème 5. — *Soient* X *une variété de Stein, et* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent. Si des sections* $u_i \in H^0(X, \mathcal{F})$ *en nombre fini sont telles que, pour tout* $x \in X$, *le* $\mathcal{O}_x$*-module* $\mathcal{F}_x$ *soit engendré par les images des* u_i *dans* $\mathcal{F}_x$, *alors les* u_i *engendrent* $H^0(X, \mathcal{F})$ *pour sa structure de module sur l'anneau* $H^0(X, \mathcal{O})$ *des fonctions holomorphes sur* X.

En effet, soit p le nombre des u_i ; les u_i définissent un homomorphisme analytique de faisceaux : $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F}$. Par hypothèse, c'est un épimorphisme. Or son noyau est un faisceau cohérent; donc, d'après le théorème B, $H^0(X, \mathcal{O}^p) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F})$ est un épimorphisme, et ceci démontre le théorème.

Exemple. — Prenons $\mathcal{F} = \mathcal{O}$. Dire que l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par les $u_i \in H^0(X, \mathcal{O})$ est $\mathcal{O}_x$, c'est dire que les fonctions holomorphes u_i n'ont aucun zéro commun dans X. Le théorème 5 affirme alors qu'il existe une identité de la forme

$$1 = \Sigma c_i u_i \tag{2}$$

à coefficients c_i holomorphes dans X [12]. Ce résultat vaut notamment quand X est un ouvert de C^n et est domaine d'holomorphie. Montrons qu'il est en défaut quand X, ouvert de C^n, *n'est pas* un domaine d'holomorphie : il existe alors un point a de la frontière de X, tel que toute fonction holomorphe dans X se prolonge en une fonction holomorphe dans un ouvert $Y \supset X$ tel que $a \in Y$. Prenons $u_i = x_i - a_i$ (x_i : coordonnées complexes d'un point de C^n ; a_i : coordonnées du point a). Les u_i n'ont pas de zéro commun dans X, mais il n'y a pas d'identité telle que (2), car les c_i, étant holomorphes dans X, le seraient au point a ; or la relation (2) ne peut être vérifiée au point a.

9. Extensions diverses ; problèmes non résolus

Le problème additif de Cousin peut être résoluble sans que X soit nécessairement une variété de Stein. Par exemple,

[12] Cf. [3], p. 189, pour le cas où X est un domaine d'holomorphie.

il est résoluble pour l'*espace projectif complexe* P, de dimension quelconque n ; en effet, *on a* $H^q(P, \mathcal{O}) = 0$ *pour tout* $q > 0$. La démonstration de ce résultat est toute différente de celle du théorème B : il résulte d'un théorème de Dolbeault [13] que si X est une variété kählérienne compacte, l'espace vectoriel (complexe) $H^q(X, \mathcal{O})$ est isomorphe à l'espace des formes harmoniques de type $(0, q)$; or, dans le cas où X est l'espace projectif P, toute forme harmonique non identiquement nulle est de degré pair $2p$ et de type (p, p), comme cela résulte de la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie de P à coefficients complexes.

D'autre part, les théorèmes A et B du § 7 peuvent s'étendre au cas suivant : soit Y un sous-ensemble fermé d'une variété analytique-complexe X; la notion de faisceau analytique cohérent se définit d'une manière évidente pour les faisceaux sur l'espace Y. On démontre : si Y possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est une variété de Stein, les théorèmes A et B valent pour Y (et pour tout faisceau cohérent sur Y). Par exemple, prenons $X = C^n$, $Y = R^n$ (espace numérique réel plongé dans l'espace numérique complexe) ; on voit sans difficulté que l'on se trouve dans les conditions précédentes. On en déduit une extension de la théorie aux *sous-variétés analytiques-réelles* de l'espace R^n ; les théorèmes concernent les faisceaux analytiques-réels et cohérents (on se ramène au cas des faisceaux analytiques-complexes par extension du corps de base). On obtient par exemple le résultat suivant : si V, analytique-réelle, est régulièrement plongée dans R^n, toute fonction analytique-réelle, définie sur V, est induite par une fonction analytique-réelle de R^n.

Problème. — Au lieu de nous borner aux sous-variétés analytiques-réelles régulièrement plongées dans R^n, considérons, en général, les « variétés de Stein réelles », c'est-à-dire les variétés analytiques-réelles (abstraites) qui satisfont aux conditions (*a*), (*b*) et (*c*) du § 7, à cela près qu'on y remplace partout le mot « holomorphe » par « analytique-réelle ». Y a-t-il, pour les variétés de Stein réelles, des théorèmes analogues aux théorèmes A et B ?

Autre problème. — Soit X une variété de Stein (complexe). Étant donné un ouvert $U \subset X$, à quelles conditions U est-il une variété de Stein ? Une condition *nécessaire* est que tout point adhérent à U possède dans X un voisinage ouvert V tel que $V \cap U$ soit une variété de Stein (à ce propos, on notera que si U et V sont des ouverts de Stein, $U \cap V$ est un ouvert de

([13]) [**8**], théorème 1.

Stein). *Cette condition nécessaire est-elle suffisante* ? Dans le cas particulier où X est un domaine d'holomorphie univalent de l'espace numérique C^n, la réponse est affirmative d'après un théorème de Oka [14], que celui-ci n'a du reste démontré que dans le cas $n = 2$.

Bibliographie

[1] BEHNKE, H. und STEIN, K., *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen* (*Math. Annalen*, **120**, 1948, pp. 430-461).

[2] CARTAN, H., *Sur les matrices holomorphes de* n *variables complexes* (*Journal de Math. pures et appl.*, **19**, 1940, pp. 1-26).

[3] CARTAN, H., *Idéaux de fonctions analytiques de* n *variables complexes* (*Ann. Ecole Normale Sup.*, **61**, 1944, pp. 149-197).

[4] CARTAN, H., *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes* (*Bull. Soc. Math. France*, **78**, 1950, pp. 28-64).

[5] CARTAN, H., *Séminaire E. N. S., 1951-1952* (polycopié).

[6] CARTAN, H. und THULLEN, P., *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen : Regularitäts- und Konvergenzbereiche* (*Math. Annalen*, **106**, 1932, pp. 617-647).

[7] COUSIN, P., *Sur les fonctions de* n *variables complexes* (*Acta math.*, **19**, 1895, pp. 1-62).

[8] DOLBEAULT, P., *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes* (*Comptes rendus, Paris*, **236**, 1953, pp. 175-177).

[9] OKA, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* II. *Domaines d'holomorphie* (*Journ. Sci. Hiroshima*, Ser. A, **7**, 1937, pp. 115-130).

[10] OKA, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VII. *Sur quelques notions arithmétiques* (*Bull. Soc. Math. France*, **78**, 1950, pp. 1-27).

[11] STEIN, K., *Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem* (*Math. Annalen*, **123**, 1951, pp. 201-222).

([14]) *Tohoku Math. Journal*, **49**, 1942, pp. 15-52.