

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

физический факультет
Ученые труды факультета

220, 1981

ГРУППА ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ $SO(10)$ И ОКТОНИОНЫ

З.К.Силагашвili

Успехи модели электрослабых взаимодействий / 1 / и квантовой хромодинамики / 2 / , естественно, поставили вопрос о возможности объединения всех фундаментальных взаимодействий на основе локальной простой калибровочной группы Ли. Как показали первые исследования / 3 / , возможно, что объединение электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий происходит при энергиях $10^{14} - 10^{15}$ ГэВ, что на несколько порядков меньше по сравнению с массой планкиона. Поэтому такое, т.н. великое объединение пока пренебрегает гравитацией.

Минимальная группа великого объединения, $SU(5) / 3 /$, не в состоянии собрать в один неприводимый мультиплет все фундаментальные фермионы даже одной генерации. Кроме того, несмотря на значительные успехи, для $SU(5)$ группы возникают и другие трудности / 4 / . Поэтому в последнее время стали рассматривать группы более высоких рангов, а именно $SO(10)$ и $E_6 / 5, 6, 7 /$.

В этой работе мы рассмотрим первую из них. $SO(10)$, как кандидат калибровочной группы великого объединения, имеет, по крайней мере два достоинства. Во-первых, на его

основе можно осуществить естественный синтез между идеями великого объединения и модели Лати-Салама (лептонное число как четвертый цвет) / 5 / . Во-вторых, фундаментальные фермионы имеют три различных рода степени свободы: цвет, аромат и генерация. Вполне возможно, что последняя из них не связана с локальной калибровочной инвариантностью, а имеет другую основу (скажем дискретную или глобальную симметрию). В этом случае, наиболее естественно произвести великое объединение внутри каждой генерации. Если нейтринно имеет ненулевую массу покоя, то для этой цели $SO(10)$ группа самая экономичная: все лестницацать степеней свободы цвета и аромата, составляющие генерацию, можно объединить в один неприводимый левый 16-плет этой группы.

Принимая во внимание, что $SO(10)$ есть подгруппа в E_6 , а эта последняя тесно связана с октонионами / 8, 9 / , мы считаем интересным рассмотреть $SO(10)$ с точки зрения октонионов. Как увидим ниже, алгебру Ли для $SO(10)$ ($\mathcal{O}_8$ по классификации Картана / 10 /) можно довольно естественно связать с октонионами.

Сначала вспомним некоторые факты из теории алгебр Ли и октонионов / 9, 10 / .

Будем рассматривать комплексную полупростую алгебру Ли $\mathcal{L}$. Пусть $x \in \mathcal{L}$. Присоединенный эндоморфизм ad_x определяется как линейное отображение алгебры $\mathcal{L}$ в себя, заданное так:

$$ad_x(y) = [x, y].$$

Подалгебра Картана $\mathcal{H}$ есть максимальная абелева подалгебра в $\mathcal{L}$, состоящая из полупростых элементов

(то есть, можно найти такой базис в $\mathfrak{Z}$, для которого все $ad\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \in \mathcal{H}$ операторы принимают диагональный вид). $\mathfrak{Z}$ может иметь несколько подалгебр Картана, но все они имеют одинаковую размерность, равную рангу алгебры $\mathfrak{Z}$.

Пусть $\mathcal{H}$ есть фиксированная подалгебра Картана и $\mathcal{H}^*$ - ее двойное пространство (векторное пространство комплекснозначных линейных форм на $\mathcal{H}$). Для всякого $\lambda \in \mathcal{H}^*$ через $\mathfrak{Z}^\lambda$ обозначим подпространство в $\mathfrak{Z}$, которое состоит из таких элементов $\mathfrak{X}$, что для всякого $\mathfrak{Y} \in \mathcal{H}$ имеем $[\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}] = \lambda(\mathfrak{Y})\mathfrak{X}$. Ненулевые элементы $\lambda \in \mathcal{H}^*$, такие, что $\mathfrak{Z}^\lambda \neq 0$, называются корнями алгебры $\mathfrak{Z}$ относительно подалгебры Картана $\mathcal{H}$. Количество различных корней конечно и если $\mathcal{R}$ есть система корней алгебры, то

$$\mathfrak{Z} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\lambda \in \mathcal{R}} \mathfrak{Z}^\lambda \quad (\text{Прямая сумма векторных пространств.}) \quad (I)$$

где каждое $\mathfrak{Z}^\lambda$ одномерно. Таким образом, $\dim \mathfrak{Z} = \text{ранг } \mathfrak{Z} + \text{число корней}$. Если выбрать базис $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ в $\mathcal{H}$ и добавить ненулевые векторы $E_\alpha \in \mathfrak{Z}^\alpha$, где $\alpha \in \mathcal{R}$, то получим базис Картана-Вейля для алгебры $\mathfrak{Z}$. В случае нормировки

$$tr(adK_i \cdot adK_j) = \delta_{ij}, \quad tr(adE_\alpha \cdot adE_{-\alpha}) = -1$$

коммутационные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} [K_i, E_\alpha] &= \lambda(K_i)E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= -\sum_i \lambda(K_i)K_i, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, \end{aligned} \quad (2)$$

отлично от нуля, только если $\alpha + \beta \neq 0$, а $N_{\alpha, \beta}$

$$\lambda + \mu \in \mathcal{R}.$$

Для каждого $\lambda \in \mathcal{H}^*$ существует однозначно определенный элемент $\lambda_\alpha \in \mathcal{H}$ такой, что для всех $\mathfrak{X} \in \mathcal{H}$ выполняются равенства

$$\lambda(\mathfrak{X}) = tr(ad\lambda_\alpha \cdot ad\mathfrak{X}). \quad (3)$$

Используя это, в $\mathcal{H}^*$ определяет скалярное произведение с помощью равенства

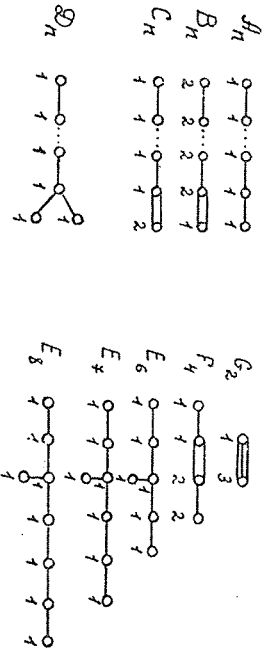
$$(\lambda, \mu) = tr(ad\lambda_\alpha \cdot ad\mu_\alpha). \quad (4)$$

Угол между корнями, следующий из этого скалярного произведения, может принимать только определенные значения, а именно, если φ есть угол между двумя непропорциональными корнями, то $4 \cos^2 \varphi = 0, 1, 2$ или 3 . Углы между корнями и отношения их длин однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют алгебру Ли. Эту информацию компактно передают диаграммы Динкина [11].

Пусть в $\mathcal{H}^*$ выбран базис. Говорят, что вектор из $\mathcal{H}^*$ положителен, если первая отличная от нуля его координата положительна. Положительный корень называется простым, если его нельзя представить в виде суммы двух положительных корней. Множество простых корней $\mathcal{S}$ образует базис в $\mathcal{H}^*$, скалярное произведение двух простых корней неположительно и произвольный корень $\lambda \in \mathcal{R}$ можно представить в виде $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} m_\alpha \alpha$, где m_α - целые числа одинакового знака. Вершины диаграммы Динкина соответствуют простым корням. Две различные вершины связаны отрезками прямой линии, число которых равно $4 \cos^2 \varphi$, где φ есть угол между

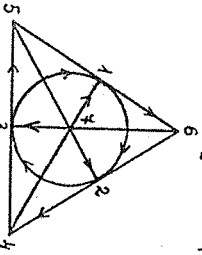
соответствующими простыми корнями. Около каждой вершины пишется число, пропорциональное квадрату длины соответствующего корня.

Классификация простых комплексных алгебр Ли такова / 10/ (индекс указывает на ранг алгебры):



Последние 5 алгебр называют исключительными.

Алгебра октонионов получается, если к единице $\ell_0 = 1$ добавить семь ℓ_i минимал единиц ($\ell_i^2 = -1$), таблица умножения которых задается при помощи диаграммы / 12/



(5)

Здесь направление стрелки определяет знак, например,

$$\ell_2 \cdot \ell_3 = \ell_1, \quad \ell_3 \cdot \ell_4 = -\ell_5, \quad \ell_4 \cdot \ell_6 = \ell_2, \quad \ell_1 \cdot \ell_7 = -\ell_4 \text{ и т.д.}$$

Если $\{\ell_i, \ell_j\}$ рассматривать как базис действительного или комплексного пространства, то получим алгебру действительных или комплексных октонионов, имеющих вид $q = q_0 + q_i \ell_i$, где q_0, q_i — скаляры и под ℓ_i подразумевается сум-

мирование.

Алгебра октонионов неассоциативна, она — альтернативна, т.е. ассоциатор $(q_1, q_2, q_3) = (q_1, q_2) \cdot q_3 - q_1 \cdot (q_2, q_3)$ является кососимметричной функцией своих аргументов и не равен тождественно нулю.

При использовании комплексных октонионов в физических целях, особенно удобен т.н. "расщепленный" базис Грассман — Гринейдина / 12 /:

$$u_0 = \frac{1}{2}(\ell_0 + i\ell_7), \quad u_i = \frac{1}{2}(\ell_i + i\ell_{i+7}), \\ u_0^* = \frac{1}{2}(\ell_0 - i\ell_7), \quad u_i^* = \frac{1}{2}(\ell_i - i\ell_{i+7}). \quad (6)$$

Таблица умножения в этом базисе имеет вид

$$\begin{aligned} u_i u_j &= \epsilon_{ijk} u_k^* & u_i u_0^* &= u_i & u_0 u_i^* &= 0 \\ u_i^* u_j^* &= \epsilon_{ijk} u_k & u_i^* u_0 &= u_i^* & u_0^* u_i^* &= u_i^* \\ u_i u_j^* &= -\delta_{ij} u_0 & u_i^* u_0^* &= 0 & u_0 u_0^* &= u_0 \\ u_i^* u_j &= -\delta_{ij} u_0^* & u_0^* u_i &= u_i & u_0^* u_0^* &= u_0^* \\ u_i u_0 &= 0 & u_0^* u_i^* &= 0 & u_0 u_0^* &= u_0^* u_0 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Если $\{u_\alpha, u_\alpha^*\}$ рассматривать как базис действительной алгебры, то получим алгебру расщепленных октонионов, которая своими свойствами отличается от алгебры действительных октонионов.

Физическая прикладность расщепленного базиса объясняется тем, что из линейных преобразований октонионов можно построить алгебру Ли $\mathcal{H}_2$, относительно которой u_i преобразуется как триплет, u_i^* — как антитриплет и u_0, u_0^* — синглеты.

$F_{a\delta} = -F_{\delta a}$ - линейные преобразования октонионов определяются так /9/:

$$F_{a\delta} q = \frac{1}{2} \epsilon_a \cdot q, \quad F_{0a} = -F_a, \quad F_{ab} q = \frac{1}{2} \epsilon_a \cdot (\epsilon_b \cdot q). \quad (8)$$

Используя равенство

$$\epsilon_a \cdot (\epsilon_b \cdot q) + \epsilon_b \cdot (\epsilon_a \cdot q) = -2\delta_{ab} q, \quad (9)$$

справедливое для любого октониона q , можно проверить следующие коммутационные и антикоммутационные соотношения

$$[F_{a\delta}, F_{cd}] = \delta_{ac} F_{bd} + \delta_{ad} F_{bc} - \delta_{ac} F_{bd} - \delta_{bd} F_{ac}, \quad (10)$$

$$\{F_{a0}, F_{b0}\} = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (11)$$

После этого краткого перечисления вспомогательных алгебраических результатов обратимся к нашей задаче и обсудим связь между $SO(10)$ и октонионами. Для этой цели рассмотрим 16-мерное комплексное пространство биоктонионов вида $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, где $q_{1,2}$ - комплексные октонионы. $F_{a\delta}$ преобразования можно распространить и на биоктонионы

$$F_{a\delta} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{a\delta} q_1 \\ F_{a\delta} q_2 \end{pmatrix}.$$

Действие на биоктонионы δ_i матриц Паули определяется так же естественно. Так как $F_{a\delta}$ действует внутри каждой октонионной компоненты, а для δ_i эти последние выступают как целые, бесструктурные объекты, то

$$[F_{a\delta}, \delta_i] = 0. \quad (12)$$

Возьмем следующие 2×45 операторов:

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \delta_k, \quad M_{\kappa, \delta+3} = -i \delta_{\kappa} F_{a0}, \quad (13)$$

$$M_{\delta+3, \delta+3} = -i F_{ab}, \quad M_{\delta+3, \kappa} = -M_{\kappa, \delta+3}.$$

Здесь $i, j, \kappa = 1 \div 3$ и $\delta, \delta = 1 \div 7$. Кроме того, индексы суммируются по *mod 10* (т.е. $3+7=0$).

При помощи (10), (11) и (12), можно проверить следующие коммутационные соотношения:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\tau\rho}] = -i (\delta_{\nu\tau} M_{\mu\rho} + \delta_{\mu\rho} M_{\nu\tau} - \delta_{\mu\tau} M_{\nu\rho} - \delta_{\nu\rho} M_{\mu\tau}). \quad (14)$$

Но это есть коммутационные соотношения для $SO(10)$ генераторов. Таким образом, $M_{\mu\nu}$ операторы, где $\mu, \nu = 0 \div 9$, порождают алгебру для $SO(10)$.

Из (14) видно, что $M_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0 \div 3$) и M_{mn} ($m, n = 4 \div 9$) подмножества операторов замкнуты относительно коммутации и коммутируют между собой. Они порождают $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ алгебры для групп $SO(4)$ и $SO(6)$. Сравнение соответствующих схем динамики показывает, что $\mathcal{D}_2 \approx \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{D}_3 \approx \mathcal{H}_3$. Поэтому

$SO(4)$ и $SO(6)$ группы локально изоморфны соответственно группам $SU(2) \times SU(2)$ и $SU(4)$. Таким образом, $SO(10)$ имеет $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$ подгруппу. Генераторы $SU(2)_L \times SU(2)_R$ подгруппы имеют вид

$$T_L^1 = \frac{1}{2} (M_{23} - M_{10}), \quad T_R^1 = \frac{1}{2} (M_{23} + M_{10}),$$

$$T_L^2 = \frac{1}{2} (M_{31} - M_{20}), \quad T_R^2 = \frac{1}{2} (M_{31} + M_{20}),$$

$$T_L^3 = \frac{1}{2} (M_{12} - M_{30}), \quad T_R^3 = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{30}). \quad (15)$$

Их можно переписать и так:

$$T_L^i = \frac{1}{2} \delta_i u_0, \quad T_R^i = \frac{1}{2} \delta_i u_0^* \quad (16)$$

При такой записи подразумевается, что, например,

$$T_L^i \left(q_2 \right) = \frac{1}{2} \delta_i \left(u_0 q_1 \right).$$

(17) показывает, что умножения на u_0 и u_0^* играют роль проекционных операторов. В частности, очевидно, что пространство биконнонов относительно $SU(2)_L$ разлагается на $\chi_+ u_\alpha^*$ синглеты и $\left[\chi_+ u_\alpha \right]$ дублеты. Здесь $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

и $\alpha = 0 \div 3$. Аналогично, относительно $SU(2)_R$ имеем

$$\left[\begin{matrix} \chi_+ u_\alpha^* \\ \chi_- u_\alpha^* \end{matrix} \right] \text{ дублеты и } \chi_\pm u_\alpha \text{ синглеты.}$$

Генераторы подгруппы $SU(4)$, соответствующие обобщенным матрицам Гелл-Манна, суть

$$\begin{aligned} G_1 &= M_{57} + M_{48} & G_6 &= M_{68} + M_{59} & G_{11} &= M_{49} - M_{67} \\ G_2 &= M_{45} + M_{78} & G_7 &= M_{56} + M_{89} & G_{12} &= M_{79} - M_{46} \\ G_3 &= M_{47} + M_{85} & G_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (M_{47} + M_{58} - 2M_{69}) & G_{13} &= M_{57} - M_{48} \\ G_4 &= M_{49} + M_{67} & G_9 &= M_{68} - M_{59} & G_{14} &= M_{45} - M_{78} \\ G_5 &= M_{79} + M_{46} & G_{10} &= M_{56} - M_{89} & G_{15} &= \sqrt{\frac{2}{3}} (M_{47} + M_{58} + M_{69}) \end{aligned} \quad (17)$$

Первые восемь из них замкнуты относительно коммутации и порождают $\mathcal{H}_2$ алгебру Ли группы $SU(3)$. Относительно ей u_i преобразуются как триплет, u_i^* - как антитриплет, u_0 и u_0^* - как синглеты $/12/$. Эту $SU(3)$ берут обычно в роли группы цвета.

Операторы сдвига $SU(4)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{12} &= \frac{1}{2} (G_1 + iG_2) & E_{34} &= \frac{1}{2} (G_4 - iG_5) & E_{03} &= \frac{1}{2} (G_3 + iG_{11}) \\ E_{13} &= \frac{1}{2} (G_1 + iG_5) & E_{32} &= \frac{1}{2} (G_6 - iG_7) & E_{10} &= \frac{1}{2} (G_9 - iG_{10}) \\ E_{23} &= \frac{1}{2} (G_6 + iG_7) & E_{04} &= \frac{1}{2} (G_9 + iG_{10}) & E_{20} &= \frac{1}{2} (G_{11} - iG_{12}) \\ E_{21} &= \frac{1}{2} (G_1 - iG_2) & E_{02} &= \frac{1}{2} (G_4 + iG_{12}) & E_{10} &= \frac{1}{2} (G_3 - iG_{11}) \end{aligned} \quad (18)$$

Используя (9), можно проверить, что эти операторы записываются так:

$$E_{ij} = -u_i \wedge u_j^*, \quad E_{0i} = -u_i \wedge u_0, \quad E_{i0} = u_i^* \wedge u_0^*. \quad (19)$$

В двух последних равенствах (i, j, k) есть циклическая перестановка из 1, 2, 3. Подразумеваем, что, например,

$$E_{ij} q = (-u_i \wedge u_j^*) q = -u_i \cdot (u_j^* q).$$

С помощью (19) проверим, что $E_{\alpha\beta}$ действительно операторы сдвига

$$E_{\alpha\beta} u_\gamma = \delta_{\beta\gamma} u_\alpha - E_{\alpha\beta} u_\gamma^* = -\delta_{\alpha\gamma} u_\beta^* \quad (20)$$

(20) показывает, что относительно $SU(4)$ u_α преобразуются как $\underline{4}$ и u_α^* - как $\underline{\bar{4}}$. Таким образом, $SU(4)$ объединяют цветные триплеты и синглеты. Поэтому ее можно принять за группу Пагги-Салама.

Ясно, что относительно $SU(4)$ пространство биконнонов разлагается на два $\chi_\pm u_\alpha$ 4-плета и два $\chi_\pm u_\alpha^*$ 4*-плета. Как видим, редукция представления $\underline{16}$ группы $SO(10)$ относительно $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$ подгруппы имеет вид:

$$\underline{16} = (2, 1, 4) + (1, 2, 4^*) \quad (21)$$

Рассмотрим следующий базис в алгебре Ли группы $SO(10)$:

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathcal{G}_3^*, K_2 = \mathcal{G}_8^*, K_3 = \mathcal{G}_{15}^*, K_4 = 2T_L^3, K_5 = 2T_R^3, \\ G_{ij} &= E_{ij}, G_i^* = E_{0i}, W_i^{\pm} = T_L^{\pm} \pm iT_L^3, W_R^{\pm} = T_R^{\pm} \pm iT_R^3, \\ X_{\kappa} &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+6,1} + M_{\kappa+3,2}) + \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,2} - M_{\kappa+3,1}), \\ X_{\kappa}^* &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+6,1} + M_{\kappa+3,2}) - \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,2} - M_{\kappa+3,1}), \\ Y_{\kappa} &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+6,3} + M_{\kappa+3,0}) + \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,0} - M_{\kappa+3,3}), \\ Y_{\kappa}^* &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+6,3} + M_{\kappa+3,0}) - \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,0} - M_{\kappa+3,3}), \\ X_{\kappa} &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+3,0} - M_{\kappa+6,3}) + \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,0} + M_{\kappa+3,3}), \\ X_{\kappa}^* &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+3,0} - M_{\kappa+6,3}) - \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,0} + M_{\kappa+3,3}), \\ Y_{\kappa} &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+3,2} - M_{\kappa+6,1}) + \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,2} + M_{\kappa+3,1}), \\ Y_{\kappa}^* &= \frac{1}{2} (M_{\kappa+3,2} - M_{\kappa+6,1}) - \frac{i}{2} (M_{\kappa+6,2} + M_{\kappa+3,1}). \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисления коммутаторы при помощи (14), увидим, что $ad K_m$ ($m=1 \div 5$) операторы диагональны в этом базисе. Поэтому (22) есть базис Картана-Вейля для $\mathcal{D}_5 = \mathcal{A} SO(10)$. Система корней такова:

$$\begin{aligned} \pm 2\lambda_1 & \quad \pm \lambda_1 \pm \sqrt{3}\lambda_2 & \quad \pm \left(\lambda_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3 \right) \pm \lambda_4 \pm \lambda_5 \\ \pm 2\lambda_4 & \quad \pm \lambda_4 \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3 \right) \pm \left(-\lambda_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3 \right) \pm \lambda_4 \pm \lambda_5 \\ \pm 2\lambda_5 & \quad \pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3 \right) \pm \left(-\frac{2}{3}\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3 \right) \pm \lambda_4 \pm \lambda_5 \end{aligned}$$

где допустимы все комбинации знаков, и $\{ \lambda_m \}$ есть базис,

длинный базису $\{ K_m \}$ (т.е. $\lambda_m(K_n) = \delta_{mn}$).
С помощью (3) и (4), можно установить, что

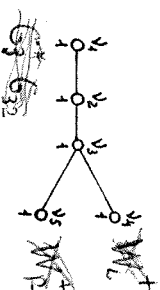
$$(\lambda_m, \lambda_n) = \frac{1}{32} \delta_{mn}.$$

Поэтому, если выделить простые корни:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3, & \nu_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5, \\ \nu_2 &= \lambda_1 - \sqrt{3}\lambda_2, & \nu_4 &= 2\lambda_4, \quad \nu_5 = 2\lambda_5, \end{aligned}$$

то ненулевые скалярные произведения между ними будут $(\nu_1, \nu_2) = (\nu_2, \nu_3) = (\nu_3, \nu_4) = (\nu_4, \nu_5) = -\frac{1}{16}$, $(\nu_m, \nu_m) = \frac{1}{8}$.
Соответствующая диаграмма Динкина, как и должно быть, имеет

вид $\mathcal{D}_5$:



Вид системы корней можно упростить, если перейти к новому $\{ \alpha_m \}$ базису, для которого

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4), \quad (23)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2), \quad 2\lambda_4 = \alpha_4 - \alpha_5, \quad 2\lambda_5 = \alpha_4 + \alpha_5.$$

Тогда корни принимают $\pm \alpha_m \pm \alpha_n$ вид и соответствие между корнями и элементами базиса (22) таково:

$$\begin{aligned} G_{ij} & \quad \alpha_j - \alpha_i & \quad 1 Y_i^* & \quad \alpha_j - \alpha_i & \quad 2 Y_i^* & \quad \alpha_4 + \alpha_5 \\ G_i & \quad \alpha_j + \alpha_k & \quad 1 Y_i^* & \quad -\alpha_j + \alpha_i & \quad W_L^+ & \quad \alpha_4 - \alpha_5 \\ G_i^* & \quad -\alpha_j - \alpha_k & \quad 2 X_i & \quad -\alpha_j + \alpha_i & \quad W_L^- & \quad -\alpha_4 + \alpha_5 \\ 1 X_i & \quad \alpha_4 - \alpha_i & \quad 2 X_i^* & \quad \alpha_5 + \alpha_i & \quad W_R^+ & \quad \alpha_4 + \alpha_5 \\ 1 X_i^* & \quad -\alpha_4 + \alpha_i & \quad 2 Y_i & \quad -\alpha_4 - \alpha_i & \quad W_R^- & \quad -\alpha_4 - \alpha_5 \end{aligned} \quad (24)$$

Из этого соответствия, с помощью (2), установим, что относительно действия присоединенных эндоморфизмов подгрупп $\mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$ пространство (22) разлагается на четыре инвариантных подпространства:

$$\begin{matrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 \\ G_i & G_i & G_i^* & W_L^{\pm} & W_R^{\pm} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ X_i & X_i^* & X_i & X_i & X_i^* \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ Y_i & Y_i^* & Y_i & Y_i & Y_i^* \end{matrix}$$

В первых трех из них индуцируется $(1,1,15) + (3,1,1) + (1,3,1)$ присоединенное представление подгруппы $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$. Четвертый относительно (4) разлагается на четыре 6-plets:

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i \\ 2 & Y_i^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & X_i \\ 1 & Y_i^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & Y_i \\ 2 & X_i^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & Y_i \\ 1 & X_i^* \end{bmatrix}$$

относительно $SU(2)_L$ на 12 дублетов:

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i \\ 2 & Y_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & X_i \\ 1 & Y_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & Y_i^* \\ 2 & X_i^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & Y_i^* \\ 1 & X_i^* \end{bmatrix} \quad i=1 \div 3$$

и относительно $SU(2)_R$ - тоже на 12 дублетов:

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i^* \\ 2 & Y_i^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & X_i^* \\ 1 & Y_i^* \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & Y_i \\ 2 & X_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & Y_i \\ 1 & X_i \end{bmatrix} \quad i=1 \div 3$$

Таким образом, редукция 45 присоединенного представления $SO(10)$ относительно $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$ такова:

$$45 = (1,1,15) + (3,1,1) + (1,3,1) + (2,2,6) \quad (25)$$

Можно осуществить дальнейшую редукцию относительно $SU(3)_c$. А именно, G_i, X_i, Y_i преобразуются как триплеты, а G_i^*, X_i^*, Y_i^* - как антитриплеты. Поэтому

$$45 = (1,1,8_c) + (1,1,3_c) + (1,1,3_c^*) + (2,2,3_c) + (2,2,3_c^*)$$

$$\begin{matrix} K_1 & K_2 & G_i & G_i^* & K_3 & X_i & X_i^* & Y_i & Y_i^* \\ K_1 & K_2 & G_i & G_i^* & K_3 & X_i & X_i^* & Y_i & Y_i^* \end{matrix} \quad (26)$$

Заметим, что корневые векторы из (22) можно переписать так

$$\begin{matrix} G_{ij} = -u_i \wedge u_j^* & X_i = \delta_+ u_i & Y_i^* = \delta_+ u_i^* \\ G_i = u_j^* \wedge u_k^* & X_i^* = -\delta_- u_i^* & W_L^{\pm} = \delta_{\pm} u_0 \\ G_i^* = -u_j \wedge u_k & Y_i = -\delta_- u_i & W_R^{\pm} = \delta_{\pm} u_0^* \end{matrix}$$

$$2X_i = -\frac{1}{2}\delta_3 u_i - \frac{1}{2}\delta_4 \wedge u_i = \begin{pmatrix} -u_0 \wedge u_i & 0 \\ 0 & u_0^* \wedge u_i \end{pmatrix},$$

$$2X_i^* = \frac{1}{2}\delta_3 u_i^* - \frac{1}{2}\delta_4 \wedge u_i^* = \begin{pmatrix} u_0^* \wedge u_i^* & 0 \\ 0 & -u_0 \wedge u_i^* \end{pmatrix},$$

$$Y_i = \frac{1}{2}\delta_3 u_i - \frac{1}{2}\delta_4 \wedge u_i = \begin{pmatrix} u_0^* \wedge u_i & 0 \\ 0 & -u_0 \wedge u_i \end{pmatrix},$$

$$Y_i^* = -\frac{1}{2}\delta_3 u_i^* - \frac{1}{2}\delta_4 \wedge u_i^* = \begin{pmatrix} -u_0 \wedge u_i^* & 0 \\ 0 & u_0^* \wedge u_i^* \end{pmatrix}.$$

Фундаментальное фермионное поле великого объединения $SO(10)$ для одной генерации можно выбрать так:

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} u_i + \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix} u_0^* + \begin{pmatrix} \bar{d}_i \\ \bar{u}_i \end{pmatrix} u_i^* \quad (27)$$

Тогда получим правильные значения зарядов, если оператор заряда выбрать в виде

$$Q = T_L^3 + T_R^3 - \frac{1}{\sqrt{6}} K_3 \quad (28)$$

Так как роль группы слабого изоспина играет $SU(2)_L$, то для симметричного значения угла Вейнберга имеем $\theta/3$:

Z. Stieglitz

GRAND UNIFICATION GROUP SO(10) AND OCTONIONS

Summary

The relation between the Lie algebra D_5 of the SO(10) group and octonions is studied. Namely, the realization of a 16-dimensional representation of D_5 is given in terms of linear transformations of octonions of $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ type. In such realization the fundamental singlet generation fermion field assumes the form $\psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} u_i + \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix} u_0^* + \begin{pmatrix} \bar{d}_i^+ \\ \bar{d}_i \end{pmatrix} u_i^*$ for SO(10) grand unification.