

Труды Томского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

математический факультет
физико-математический факультет

235, 1982

$SO(10) \supset E_6$ ВКЛЮЧЕНИЕ И ОКТАИОНЫ

З.К. Сягадзе

Группы $SO(10)$ и E_6 были использованы как группы калибровочной симметрии в некоторых моделях великого объединения /1,2/. Известно, что как $SO(10)$ /3/, так и E_6 /4/ можно реализовать с помощью октаинонов. Эти реализации интересны, поскольку были попытки /5/ использовать октаиноны и связанные с ними алгебраические и геометрические структуры для объяснения некоторых необычных свойств фундаментальных частиц, в частности конфайнмента цвета.

В этой работе мы представляем явные выражения для генераторов групп $SO(10)$ и E_6 через линейные преобразования йордановых алгебр M_2^8 и M_3^8 .

Для алгебры Ли группы $SO(10)$ можно реализовать линейными преобразованиями йордановой алгебры M_2^8 .

M_2^8 есть алгебра 2×2 октаинонных эрмитовых (относительно октаинонного сопряжения) матриц с законом композиции $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$, где X, Y обозначает обычное умножение матриц.

Элементы из M_2^8 имеют вид $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ \bar{a} & \beta \end{pmatrix}$, где α, β - действительные числа, а $a = \alpha_c e_c + \alpha_4 e_4$ есть октонион. Ясно, что мы можем представить его в виде $\alpha E_1 + \beta E_2 + F^a$, где

$$E_1 = \begin{pmatrix} e_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_c \end{pmatrix}, \quad F^a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Это представление однозначно. Таким образом, имеем разложение в прямую сумму $M_2^8 = RE_1 \oplus RE_2 \oplus F$ (разложение Пирса алгебры M_2^8 относительно взаимортогональных идемпотентов E_1, E_2 /6/).

Прямыми вычислениями можно получить следующую "таблицу умножения":

$$E_i \circ E_j = \delta_{ij} E_i, \quad E_i \circ F^a = \frac{1}{2} F^a, \quad (1)$$

$$F^a \circ F^b = (a, b) 1, \quad i, j = 1, 2,$$

где $(a, b) = (\bar{a}, b) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a})$ есть скалярное произведение октонионов, а $1 = E_1 + E_2$ является единицей алгебры M_2^8 .

Сперва изучим дифференцированную алгебру Йордана M_2^8 . Для этой цели нам понадобятся 2×2 октонионные антиэрмитовы матрицы с нулевыми диагональными элементами. Обозначим их множество через A_2^8 . Сразу видно, что если $A \in A_2^8$ и $X \in M_2^8$, то $[A, X] = AX - XA \in M_2^8$.

Для всякой $A = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} \\ -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \in A_2^8$ матрицы через $\hat{A}$ обозначим следующее линейное преобразование $M_2^8 : \hat{A}X = [A, X]$. Вычисления показывают, что

$$\hat{A}E_1 = -F^a, \quad \hat{A}E_2 = F^a, \quad \hat{A}F^b = 2(a, b)(E_1 - E_2). \quad (2)$$

Используя (1) и (2), можно проверить, что $\hat{A}$ есть дифференцирование, т.е. для всякого $X, Y \in M_2^8$, $\hat{A}(XY) = (\hat{A}X)Y + X(\hat{A}Y)$.

Пусть теперь $\delta \in \text{Der } M_2^8$ - некоторое дифференцирование и $\delta E_1 = \alpha_1 E_1 + \beta_1 E_2 + F^{a_1}$, $\delta E_2 = \alpha_2 E_1 + \beta_2 E_2 + F^{a_2}$. Если δ -ой подействуем на тождество $E_1 \circ E_1 = E_1$, получим,

что мы должны иметь $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$. Действие же δ на тождество $E_1 \circ E_2 = 0$ дает $a_1 = -a_2$. Таким образом, $\delta E_1 = -F^{a_2}$ и $\delta E_2 = F^{a_2}$. Поэтому $\delta - \hat{A}_2$ будет дифференцированием, которое аннулирует идемпотенты E_1 и E_2 .

Как видим, всякий $\delta \in \text{Der } M_2^8$ элемент можно записать так:

$$\delta = \Delta + \hat{A}, \quad (3)$$

где Δ дифференцирование аннулирует E_1 идемпотенты. Это представление однозначно: если $\delta = 0$, тогда $\hat{A} = -\Delta$ аннулирует E_1 и $\hat{A}E_1 = -F^a$ формула показывает, что $a = 0$.

Пусть $\Delta \in \text{Der } M_2^8$ и $\Delta E_i = 0$. Тогда, действуя Δ -ой на тождество $E_1 \circ F^a = \frac{1}{2} F^a$, получим $E_1 \circ \Delta F^a = \frac{1}{2} \Delta F^a$. Это показывает, что $\Delta F^a \in F$. Поэтому Δ индуцирует в пространстве октонионов линейное преобразование $\mathcal{D}$:

$$\Delta F^a = F^{\mathcal{D}(a)}. \quad (4)$$

Действие Δ на тождество $F^a F^b = (a, b) \eta$ дает, что $(\partial a, b) + (a, \partial b) = 0$, т.е. скалярное произведение (a, b) инвариантно относительно ∂ и поэтому $\partial \in \mathcal{D}_4 = \mathcal{X}SO(\delta)$.

Наоборот, если $\partial \in \mathcal{D}_4$, тогда $\Delta: M_2^g \rightarrow M_2^g$ - линейное отображение, определенное как $\Delta E_i = 0$, $\Delta F^a = F^a \partial(a)$, является дифференцированием. Если обозначим $\Delta = \hat{\partial}$, тогда общий элемент из $\mathcal{D} \cap M_2^g$ будет иметь вид $\delta = \hat{\partial} + \hat{\partial}$. Отсюда видно, что $\dim(\mathcal{D} \cap M_2^g) = 8 + 2\delta = 36$. Явным построением систем корней можно показать, что $\mathcal{D} \cap M_2^g = \mathcal{B}_4 = \mathcal{X}SO(\vartheta)$.

Действуя на базис E_i, F^a обеими сторонами равенства, проверим следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{\partial}_1, \hat{\partial}_2] = [\hat{\partial}_1, \hat{\partial}_2], [\hat{\partial}_1, \hat{\partial}] = \hat{\partial}_{a\ell}, [\hat{\partial}, \hat{\partial}] = \hat{\partial}(a), \quad (5)$$

где $\partial_{a\ell} \in \mathcal{D}_4$ определяется так: $\partial_{a\ell}(x) = 4(a, x)\delta - 4(b, x)\alpha$. Проверим, например, третье соотношение. Имеем: $[\hat{\partial}, \hat{\partial}]E_i = \hat{\partial}\hat{\partial}E_i = -F^a \partial(a)E_i, [\hat{\partial}, \hat{\partial}]E_i = \hat{\partial}\hat{\partial}E_i = F^a \partial(a)E_i, [\hat{\partial}, \hat{\partial}]F^a = -\hat{\partial}\hat{\partial}F^a = -2(a, \partial x)(E_i - E_2) = 2(\partial a, x)(E_i - E_2) = \hat{\partial}(a)F^a$.

Через SM_2^g обозначим множество элементов из M_2^g , которые имеют нулевой штур. Для всякой $T \in SM_2^g$ через $\hat{T}$ обозначим следующее линейное преобразование алгебры M_2^g : $\hat{T}X = T \circ X = X \circ T$.

Пусть $\delta \in \mathcal{D} \cap M_2^g$ и $\delta + \hat{T} = 0$. Пользуемся этим равенством на единицу алгебры M_2^g : $0 = (\delta + \hat{T})\eta = \hat{T}\eta = T$, т.е. $\delta = \hat{T} = 0$. Поэтому имеем прямую сумму векторных про-

странств:

$$L = \mathcal{D} \cap (M_2^g) \oplus SM_2^g, \quad \text{где } SM_2^g = \{\hat{T}: T \in SM_2^g\}$$

В L имеются $\delta \in \mathcal{D} \cap M_2^g, \hat{F}^a, \hat{E}$ (где $E = E_1 - E_2$) элементы и их линейные комбинации. Посмотрим, какие коммутационные соотношения имеются между ними. Для всякого $X \in M_2^g$ $[\delta, \hat{T}]X = \delta(T \circ X) - T \circ (\delta X) = (\delta T) \circ X$. Поэтому $[\delta, \hat{T}] = \delta(T)$. Непосредственными вычислениями получим $[\hat{F}^a, \hat{F}^b]E_i = 0, i = 1, 2$, и $[\hat{F}^a, \hat{F}^b]F^x = (b, x)F^a - (a, x)F^b$. Как видим, $[\hat{F}^a, \hat{F}^b] = -\frac{1}{4}\partial a \delta$. Аналогично $[\hat{E}, \hat{F}^a] = \frac{1}{2}\partial a$.

Таким образом, коммутационные соотношения таковы:

$$[\hat{F}^a, \hat{F}^b] = \frac{1}{4}\partial a \delta, [\hat{E}, \hat{F}^a] = \frac{1}{2}\partial a, [\delta, \hat{T}] = \delta(T) \quad (6)$$

Они показывают, что L замкнута относительно коммутирования и поэтому L есть подалгебра в алгебре L линейных преобразований пространства M_2^g .

Построим для L , как для комплексной алгебры L , систему корней. Для этой цели выберем следующий базис:

$$K_1 = i\hat{G}_{44}, K_2 = i\hat{G}_{52}, K_3 = i\hat{G}_{63}, K_4 = i\hat{G}_{70}, K_5 = \hat{E}, \\ g_{ij} = \hat{T}_{ij}, G_i = \hat{T}_{i0}, G_i^* = \hat{T}_{0i}, 2X_i = \hat{U}_i + 2\hat{F}^a u_i, \quad (7)$$

$$2X_i^* = -\hat{U}_i + 2\hat{F}^a u_i^*, 2X_i = \hat{R}_i, 2X_i^* = \hat{R}_i^*, Y_i = \hat{S}_i, \\ Y_i^* = \hat{S}_i^*, 2Y_i = -\hat{U}_i + 2\hat{F}^a u_i, 2Y_i^* = \hat{U}_i + 2\hat{F}^a u_i^*, \\ 2W_L^* = \hat{U}_0 + 2\hat{F}^a u_0^*, 2W_L = -\hat{U}_0 + 2\hat{F}^a u_0, 2W_R^* = \hat{U}_0 + 2\hat{F}^a u_0^*, \\ 2W_R = -\hat{U}_0 + 2\hat{F}^a u_0.$$

где $i, j = 1 \div 3$; $\alpha_\alpha, \alpha_\alpha^*$ есть "расщепленный" базис октонионов $\mathbb{O}/\mathbb{I}$; $\frac{1}{i} G_{AB}, A, B = 0 \div 7$ являются генераторами группы $SO(8)$ (базисными элементами $\mathcal{D}_4$ алгебры Ли), которые соответствуют инфинитесимальному повороту в плоскости (e_A, e_B) ; $G_{AB} e_A = e_B, G_{AB} e_B = -e_A$, а остальные преобразования определены так:

$$\begin{aligned} 2T_{12} &= i(G_{42} + G_{51}) - (G_{54} + G_{21}) & 2T_{21} &= i(G_{42} + G_{51}) + (G_{54} + G_{21}) \\ 2T_{13} &= i(G_{61} + G_{43}) - (G_{31} + G_{64}) & 2T_{31} &= i(G_{61} + G_{43}) + (G_{31} + G_{64}) \\ 2T_{23} &= i(G_{53} + G_{62}) - (G_{65} + G_{32}) & 2T_{32} &= i(G_{53} + G_{62}) + (G_{65} + G_{32}) \\ 2T_{14} &= i(G_{51} - G_{62}) - (G_{65} - G_{32}) & 2T_{02} &= i(G_{61} - G_{43}) + (G_{31} - G_{64}) \\ 2T_{20} &= i(G_{61} - G_{43}) - (G_{31} - G_{64}) & 2T_{03} &= i(G_{42} - G_{51}) + (G_{54} - G_{21}) \\ 2T_{30} &= i(G_{42} - G_{51}) - (G_{54} - G_{21}) & 2S_1^* &= i(G_{40} + G_{31}) - (G_{10} - G_{24}) \\ 2S_1 &= i(G_{40} + G_{31}) + (G_{10} - G_{24}) & 2S_2^* &= i(G_{50} + G_{22}) - (G_{20} - G_{25}) \\ 2S_2 &= i(G_{50} + G_{22}) + (G_{20} - G_{25}) & 2S_3^* &= i(G_{60} + G_{23}) - (G_{30} - G_{26}) \\ 2S_3 &= i(G_{60} + G_{23}) + (G_{30} - G_{26}) & 2R_1^* &= i(G_{40} - G_{31}) - (G_{10} + G_{24}) \\ 2R_1 &= i(G_{40} - G_{31}) + (G_{10} + G_{24}) & 2R_2^* &= i(G_{50} - G_{22}) - (G_{20} + G_{25}) \\ 2R_2 &= i(G_{50} - G_{22}) + (G_{20} + G_{25}) & 2R_3^* &= i(G_{60} - G_{23}) - (G_{30} + G_{26}) \\ 2R_3 &= i(G_{60} - G_{23}) + (G_{30} + G_{26}) & 2T_{32} &= i(G_{53} + G_{62}) + (G_{65} + G_{32}) \end{aligned} \quad (8)$$

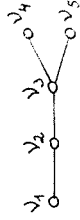
вычисляя коммутаторы, увидим, что (7) есть базис Картан-Вейля в L , K_m ($m = 1 \div 5$) порождают подалгебру Картана и корни имеют вид $\pm \alpha_m \pm \alpha_n$ ($m \neq n$). Кроме того, соотношения между корнями и базисными элементами Картана-Вейля таковы:

$$\begin{aligned} g_{ij} &\leftrightarrow \alpha_i - \alpha_j, \quad g_i^* \leftrightarrow -\alpha_i - \alpha_n, \quad g_i^* \leftrightarrow \alpha_j + \alpha_n, \quad X_i^* \leftrightarrow \alpha_j + \alpha_i, \\ X_i^* &\leftrightarrow -\alpha_j - \alpha_i, \quad X_i^* \leftrightarrow \alpha_j + \alpha_i, \quad X_i^* \leftrightarrow -\alpha_j - \alpha_i, \quad X_i^* \leftrightarrow -\alpha_j + \alpha_i, \\ X_i^* &\leftrightarrow \alpha_j - \alpha_i, \quad X_i^* \leftrightarrow -\alpha_j - \alpha_i, \quad X_i^* \leftrightarrow \alpha_j + \alpha_i, \quad W_i^* \leftrightarrow \alpha_j + \alpha_i, \\ W_i^* &\leftrightarrow -\alpha_j - \alpha_i, \quad W_i^* \leftrightarrow \alpha_j - \alpha_i, \quad W_i^* \leftrightarrow -\alpha_j + \alpha_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\{\alpha_m\}$ есть базис в пространстве корней, dual-ный к базису $\{K_m\}$, т.е. $\alpha_m(K_n) = \delta_{mn}$. Исходя из скалярного произведения корней $/8/$, можно показать, что $(\alpha_m, \alpha_n) = \frac{1}{16} \delta_{mn}$.

Вводя лексикографическое упорядочение относительно базиса $\{\alpha_m\}$, выделим простые корни: $\nu_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \nu_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \nu_3 = \alpha_3 - \alpha_4, \nu_4 = \alpha_4 - \alpha_5, \nu_5 = \alpha_4 + \alpha_5$.

Соответствующая диаграмма Динкина имеет вид:



Как видим, L является $\mathcal{D}_5 = \mathcal{A} SO(10)$ алгеброй Ли. Действие операторов (7) в 10-мерном комплексном векторном пространстве, которое стягивает базисные элементы алгебры $\mathcal{M}_2^8$, дает представление $\underline{10}$ алгебры Ли $\mathcal{D}_5$. Используя формулы (1), (2) и (4), получим, что эти операторы действуют на базисные элементы $\mathcal{M}_2^8$ (нулевые значения опущены) следующим образом:

$$\begin{aligned} K_i(F^{u_j}) &= \delta_{ij} F^{u_j}, \quad K_i(F^{u_j^*}) = -\delta_{ij} F^{u_j^*}, \quad K_4(F^{u_0}) = F^{u_0}, \quad K_4(F^{u_0^*}) = -F^{u_0^*}, \\ K_5(E_1) &= E_1, \quad K_5(E_2) = -E_2, \quad g_{ik}(F^{u_j}) = \delta_{ik} F^{u_j}, \\ g_{ik}(F^{u_j^*}) &= -\delta_{ij} F^{u_k^*}, \quad g_i(F^{u_j}) = \epsilon_{ijk} F^{u_k^*}, \quad g_i^*(F^{u_j^*}) = -\epsilon_{ijk} F^{u_k}, \\ X_i(E_2) &= F^{u_i}, \quad X_i(F^{u_j^*}) = \delta_{ij} E_1, \quad X_i(E_1) = F^{u_i^*}, \quad X_i^*(F^{u_j}) = \delta_{ij} E_2, \\ X_i(F^{u_0^*}) &= F^{u_i}, \quad X_i(F^{u_j^*}) = -\delta_{ij} F^{u_0}, \quad X_i^*(F^{u_j}) = -F^{u_i^*}, \quad X_i^*(F^{u_j^*}) = \delta_{ij} F^{u_0^*}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
{}_1 Y_i(F^{u_0}) &= F^{u_i}, \quad {}_1 Y_i(F^{u_1^*}) = -\delta_{ij} F^{u_0^*}, \quad {}_1 Y_i^*(F^{u_i}) = \delta_{ij} F^{u_0}, \quad {}_1 Y_i^*(F^{u_0^*}) = -F^{u_i^*}, \\
{}_2 Y_i(E_1) &= F^{u_i}, \quad {}_2 Y_i(F^{u_1^*}) = \delta_{ij} E_2, \quad {}_2 Y_i^*(E_2) = F^{u_i^*}, \quad {}_2 Y_i^*(F^{u_i}) = \delta_{ij} E_1, \\
W_L^*(E_2) &= F^{u_0}, \quad W_L^*(F^{u_0^*}) = E_1, \quad W_L^-(E_1) = F^{u_0^*}, \quad W_L^-(F^{u_0}) = E_2, \\
W_R^*(E_2) &= F^{u_0^*}, \quad W_R^*(F^{u_0}) = E_1, \quad W_R^-(E_1) = F^{u_0}, \quad W_R^-(F^{u_0^*}) = E_2.
\end{aligned}$$

Если M_2^g Йорданову алгебру расширим до M_3^g , то конструкция, которая давала $\mathcal{D}_5$, теперь даст E_8 алгебру Ли $/4/$.

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \beta & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{общий элемент из } M_3^g, \quad \text{можно}$$

однозначно представить в виде: $X = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + F_1^* + F_2^* + F_3^*$,

$$\text{где } E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$RE_i = \{\alpha E_i; \alpha \in R\}, \quad F_i = \{F_i^a; a \text{ есть октонион}\} \text{ являются}$$

компонентами Пирса алгебры M_3^g относительно $\{E_i\}$

системы взаимосоортонормальных идемпотентов. В частности, если

$$X \in M_3^g \quad \text{таков, что } E_j \circ X = E_K \circ X = \frac{1}{2} X, \quad \text{тогда } X \in F_i$$

"Таблица умножения" имеет вид:

$$E_i \circ E_j = \delta_{ij} E_i, \quad E_i \circ F_j^a = \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}) F_j^a, \quad F_i^a \circ F_j^b = (a, b) (E_j + E_K) \quad (II)$$

(суммирование нет!)

$$F_i^a \circ F_j^b = \frac{1}{2} F_K^{ab}$$

i, j, K есть циклическая перестановка из $1, 2, 3$.

Через A_3^g обозначим множество 3×3 октонионных антиэрмитовых матриц с нулевыми диагональными элементами. Если

$$A \in A_3^g \quad \text{и } X \in M_3^g, \quad \text{то } [AX] = AX - XA \in M_3^g. \quad \text{Поэтому}$$

можно рассмотреть $\hat{A}: M_3^g \rightarrow M_3^g$ линейное преобразование, определенное так: $\hat{A}X = [A, X]$.

$$\text{Для } A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & \bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & -\bar{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{матрицы обозначим } (a_1, a_2, a_3) = \hat{A}.$$

Прямыми вычислениями получим действие $\hat{A}$ на базисные элементы M_3^g :

$$\{a_1, a_2, a_3\} F_1^a = F_2^a \bar{a}_3 + F_3^a \bar{a}_2 + 2(a_1, a_2)(E_2 - E_3) \{a_1, a_2, a_3\} E_1 = -F_3^a - F_2^a$$

$$\{a_1, a_2, a_3\} F_2^a = F_3^a \bar{a}_1 + 2(a_1, a_2)(E_1 - E_3) \{a_1, a_2, a_3\} E_2 = F_3^a - F_1^a$$

$$\{a_1, a_2, a_3\} F_3^a = -F_1^a \bar{a}_2 - F_2^a \bar{a}_1 + 2(a_1, a_3)(E_1 - E_2) \{a_1, a_2, a_3\} E_3 = F_1^a + F_2^a$$

Можно показать, что когда $A \in A_3^g$, тогда $\hat{A}$ есть дифференцирование алгебры M_3^g .

Пусть $\delta \in \text{Der } M_3^g$ - некоторое дифференцирование. По-

действуем δ -ой на $E_i \circ E_i = E_i$. Получим $2E_i \circ \delta E_i = \delta E_i$, т.е.

$$\delta E_i \circ (\eta - 2E_i) = 0 \quad (13)$$

$$\text{Допустим } \delta E_i = \alpha^i E_i + \beta^i E_a + \gamma^i E_3 + F_1^i x_1^i + F_2^i x_2^i + F_3^i x_3^i.$$

С помощью (11) вычислим:

$$\delta E_1 \circ (\eta - 2E_1) = -\alpha^1 E_1 + \beta^1 E_2 + \gamma^1 E_3 + F_1^1 x_1^1,$$

$$\delta E_2 \circ (\eta - 2E_2) = \alpha^2 E_1 - \beta^2 E_2 + \gamma^2 E_3 + F_2^2 x_2^2,$$

$$\delta E_3 \circ (\eta - 2E_3) = \alpha^3 E_1 + \beta^3 E_2 - \gamma^3 E_3 + F_3^3 x_3^3.$$

Поэтому (13) выполняется, если $\alpha^i = \beta^i = \gamma^i = 0$, $x^i = x^i = x^i = 0$.
Далее, дифференцируя равенство $E_i \circ E_j = 0$ ($i \neq j$), получаем

$$\delta E_i \circ E_j + E_i \circ \delta E_j = 0.$$

Если здесь мы поставим $\delta E_i = F_j^i + F_k^i x_k^i$, то получим $x_k^i = -x_k^i$, т.е. $x_3^1 = -x_3^1$, $x_2^1 = -x_2^1$, $x_1^2 = -x_1^2$ и

$$\delta E_1 = -F_2^1 x_2^1 - F_3^1 x_3^1, \quad \delta E_2 = -F_1^2 x_1^2 + F_3^2 x_3^2, \quad (14)$$

$$\delta E_3 = F_1^3 x_1^3 + F_2^3 x_2^3.$$

Сравнивая (12) и (14), заключаем, что $\delta \{x_1^1, x_2^1, x_3^1\}$ дифференцирование аннулирует идемпотенты.

Таким образом, всякое $\delta \in \text{Der } M^8$ дифференцирование разлагается так:

$$\delta = \Delta + \hat{A}, \quad (15)$$

где $A \in A_3^8$, а Δ дифференцирование аннулирует идемпотенты.

Это представление однозначно. Действительно, допустим $\Delta + \hat{A} = 0$. Тогда $\hat{A} E_i = 0$, $i = 1 \div 3$ и (12) показывает, что $A = 0$.

Пусть $\Delta E_i = 0$. Тогда действуя Δ -ой на равенстве ($i \neq j$) $E_i \circ F_j^a = \frac{1}{2} F_j^a$, получим $E_i \circ \Delta F_j^a = \frac{1}{2} \Delta F_j^a$.

Это показывает, что F_i^i компоненты Ли-рассеивания относительно дифференцирования Δ ; $\Delta F_i^i = F_i^i$. Поэтому Δ индуцирует в пространстве октонионов Δ_i линейные преобразования:

$$\Delta F_i^a = F_i^{\Delta_i a} \quad (16)$$

Действие Δ на равенстве $F_i^a \circ F_i^b = (a, b)(E_j + E_k)$ дает $F_i^{\Delta_i a} \circ F_i^b + F_i^a \circ F_i^{\Delta_i b} = 0$, т.е.

$$(\Delta_i a, b) + (a, \Delta_i b) = 0. \quad (17)$$

Это означает, что (a, b) скалярное произведение инвариантно относительно Δ_i . Поэтому $\Delta_i \in \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_4 \cap \mathcal{O}_8$.

Аналогично, из равенства $F_1^a \circ F_2^b = \frac{1}{2} F_3^{\overline{ab}}$ получим:

$$F_1^{\Delta_1 a} \circ F_2^b + F_1^a \circ F_2^{\Delta_2 b} = \frac{1}{2} F_3^{\overline{\Delta_1 a \Delta_2 b}}, \quad \text{т.е.} \quad (18)$$

$$\Delta_3(\overline{ab}) = (\Delta_1 a) \Delta_2 b + a(\Delta_2 b).$$

Это показывает, что $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ составляют тройку триальности /4/. Заметим, что (18) остается верным, если мы циклически переставим $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Некоторые слова о принципе триальности. $SO(2n)$ группы имеет два 2^{n-1} -мерных спинорных и одно $2n$ -мерное векторное представление /9/. Для $SO(8)$ все они имеют одинаковые размерности и различие между спинорами и вектором есть дело соглашения /10/. Замечательно, что октонионы позволяют выразить это равноправие представлений в весьма элегантно виде. Соответствующее утверждение известно как принцип триальности и в наиболее удобном для нас виде формулируется следующим образом:

Для всякой $\Delta_i \in \mathcal{O}_4$ существуют однозначно определенные $\Delta_2, \Delta_3 \in \mathcal{O}_4$ такие, что для любых двух p, q октонионов выполняется равенство

$$\Delta_1(\overline{pq}) = (\Delta_2 p) q + p(\Delta_3 q),$$

которое остается верным при циклической перестановке Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 .

Если представление $\mathcal{Q}_4$, реализуемое Δ_1 операторами, назовем векторным, то $\Delta_1 \mapsto \Delta_2$ и $\Delta_1 \mapsto \Delta_3$ соответствия дадут ониорные представления.

Из Δ_1 можно определить Δ_2 и Δ_3 так:

$$\Delta_2 = \lambda(\Delta_1), \quad \Delta_3 = \lambda^2(\Delta_1), \quad (19)$$

где λ есть следующий автоморфизм $\mathcal{Q}_4$ алгебры Ли:

$$\lambda(G_{ij}) = F_{ij}, \quad \lambda(G_{ij}) = F_{ij}, \quad i, j = 1 \div 7, \quad (20)$$

а F_{ij} линейные преобразования октонионов имеют вид:

$$F_{10}(q) = \frac{1}{2}e_i q, \quad F_{0i} = -F_{i0}, \quad F_{ij}(q) = \frac{1}{2}e_j(e_i q). \quad (21)$$

Вернемся к дифференцированию M_3^8 . То Δ дифференцирование, которое аннулирует E_i идемпотенты и в F_i компонентах Пирса действует согласно (16), обозначим через $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$. Таким образом, общий элемент из $\mathcal{Dex} M_3^8$ имеет вид

$$\mathcal{O} = \{a_1, a_2, a_3\} + \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}.$$

Так как тройка триальности однозначно определяется своим одним членом, заключаем, что $\dim \mathcal{Dex} M_3^8 = 3 \cdot 8 + 28 = 59$.

Если построим систему корней, то увидим, что $\mathcal{Dex} M_3^8$ есть F_4 особая алгебра Ли.

Действуя обеими сторонами равенства на оазисные элементы M_3^8 , можно проверить коммутационные соотношения:

$$\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} \{\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3\} = \{\Delta_1, \Delta'_1\}, \{\Delta_2, \Delta'_2\}, \{\Delta_3, \Delta'_3\};$$

$$\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{\Delta_1, \alpha_1\}, \{\Delta_2, \alpha_2\}, \{\Delta_3, \alpha_3\}; \quad (22)$$

$$\{\{a, 0, 0\}, \{b, 0, 0\}\} = \{\Delta_{ae}, \Delta_{ae}, \Delta_{ae}\}; \quad \{\{a, 0, 0\}, \{0, e, 0\}\} = \{0, 0, \overline{ae}\};$$

$$\{\{0, a, 0\}, \{0, b, 0\}\} = \{\Delta_{ae}, \Delta_{ae}, \Delta_{ae}\}; \quad \{\{0, 0, a\}, \{0, 0, e\}\} = \{0, \overline{ae}, 0\};$$

$$\{\{0, 0, a\}, \{0, 0, e\}\} = \{\Delta_{ae}, \Delta_{ae}, \Delta_{ae}\}; \quad \{\{0, a, 0\}, \{0, 0, e\}\} = \{ae, 0, 0\}.$$

Здесь Δ_{ae} , Δ_{ae} , Δ_{ae} тройка определена так:

$$\Delta_{ae}(x) = 4(a, x)b - 4(e, x)a, \quad \Delta_{ae}(x) = \bar{e}(ax) - \bar{a}(ex),$$

$$\Delta_{ae}(x) = (xa)\bar{e} - (xe)\bar{a}.$$

В качестве иллюстрации покажем, что

$$\{[a, 0, 0], [0, b, 0]\} F_1^x = \{0, 0, \overline{ae}\} F_1^x.$$

Используя (12), получим

$$\{[a, 0, 0], [0, b, 0]\} F_1^x = F_1^x \Delta_{ae}(a, x)b - \bar{a}(xe)$$

далее, $\Delta_{ae}(a, x)b - \bar{a}(xe) = (\bar{a}, x, e) + (\bar{x}a)e$ где

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc) \quad \text{есть ассоциатор.}$$

Из альтернативности алгебры октонионов вытекает, что

$$(\bar{a}, x, b) = -(\bar{x}, a, b) \quad \text{Поэтому } (\bar{a}, x, e) + (\bar{x}a)e = \bar{x}(ae) \quad \text{и}$$

$$\{[a, 0, 0], [0, b, 0]\} F_1^x = F_1^x \bar{x}(ae) = \{0, 0, \overline{ae}\} F_1^x$$

Пусть SM_3^g будет обозначать множество элементов из M_3^g , имеющих нулевой штур. Для всякой $T \in SM_3^g$ через $\hat{T}$ обозначим линейное преобразование M_3^g , определенное так: $\hat{T}X = T \circ X$.

Пусть $\mathcal{D} \in \text{Der } M_3^g$, $T \in SM_3^g$ и $\mathcal{D} + \hat{T} = 0$. Действуя с этим равенством на единицу алгебры M_3^g , получим $0 = (\mathcal{D} + \hat{T})1 = \hat{T}1 = T$. Таким образом, мы имеем прямую сумму векторных пространств:

$$L = \text{Der}(M_3^g) \oplus \widehat{SM}_3^g;$$

коммутационные соотношения между элементами $\mathcal{D} \in \text{Der } M_3^g, \hat{T}^a, \hat{F}_i^a, \hat{F}_i^g$, $\hat{E}_{23}, \hat{E}_{13}$ (где $E_{23} = E_2 - E_3, E_{13} = E_1 - E_3$) можно получить с использованием свойств октокионов. Результаты таковы:

$$\begin{aligned} [\hat{F}_1^a, \hat{F}_1^g] &= -\frac{1}{4}[\Delta_{ae}, \Delta_{ae}, \Delta_{ae}], [\hat{E}_{13}, \hat{F}_1^a] = \frac{1}{4}(a, 0, 0); \\ [\hat{F}_2^a, \hat{F}_2^g] &= -\frac{1}{4}[\Delta_{ae}, \Delta_{ae}, \Delta_{ae}], [\hat{E}_{13}, \hat{F}_2^a] = \frac{1}{4}(0, a, 0); \\ [\hat{F}_3^a, \hat{F}_3^g] &= -\frac{1}{4}[\Delta_{ae}, \Delta_{ae}, \Delta_{ae}], [\hat{E}_{13}, \hat{F}_3^a] = \frac{1}{4}(0, 0, a); \\ [\hat{F}_1^a, \hat{F}_2^g] &= \frac{1}{4}(0, 0, \overline{a\bar{e}}), [\hat{E}_{23}, \hat{F}_1^a] = \frac{1}{2}(a, 0, 0); \\ [\hat{F}_3^a, \hat{F}_1^g] &= \frac{1}{4}(0, \overline{a\bar{e}}, 0), [\hat{E}_{23}, \hat{F}_2^a] = \frac{1}{4}(0, a, 0), [\hat{E}_{13}, \hat{F}_{13}] = 0; \\ [\hat{F}_2^a, \hat{F}_3^g] &= -\frac{1}{4}(\overline{a\bar{e}}, 0, 0), [\hat{E}_{23}, \hat{F}_3^a] = -\frac{1}{4}(0, 0, a), [\mathcal{D}, \hat{T}] = \mathcal{D}(\hat{T}) \end{aligned} \quad (23)$$

Как видим, L замкнута относительно коммутирования и поэтому является подалгеброй в алгебре Ли линейных преобразований M_3^g .

С целью построения системы корней, выберем следующий базис:

$$\begin{aligned} K_4 &= i(G_{41}, G_{41}^{\lambda^2}), K_5 = i(G_{52}, G_{52}^{\lambda^2}, G_{52}^{\lambda^3}), K_3 = i(G_{63}, G_{63}^{\lambda^2}, G_{63}^{\lambda^3}), \\ K_4 &= i(G_{40}, G_{40}^{\lambda^2}, G_{40}^{\lambda^3}), K_5 = \hat{E}_{23}, K_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\hat{E}_{13} - \hat{E}_{23}), g_{ij} = (T_{ij}, T_{ij}^{\lambda^2}, T_{ij}^{\lambda^3}), \\ G_i &= (T_{i0}, T_{i0}^{\lambda^2}, T_{i0}^{\lambda^3}), G_i^* = (T_{i0}^*, T_{i0}^{*\lambda^2}, T_{i0}^{*\lambda^3}), X_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, \\ X_i^* &= \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, X_i = \{R_i, R_i^{\lambda^2}, R_i^{\lambda^3}\}, X_i^* = \{R_i^*, R_i^{*\lambda^2}, R_i^{*\lambda^3}\}, \\ Y_i &= \{S_i, S_i^{\lambda^2}, S_i^{\lambda^3}\}, Y_i^* = \{S_i^*, S_i^{*\lambda^2}, S_i^{*\lambda^3}\}, Z_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, \\ Z_i^* &= \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, W_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, W_i^* = \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, \\ W_i &= \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, W_i^* = \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, X_i = -\frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, \\ X_i^* &= -\frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, Y_i = -\frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, Y_i^* = -\frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, \\ R_i &= \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, R_i^* = -\frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, Y_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, \\ Y_i^* &= -\frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, V_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, V_i^* = -\frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, \\ V_i &= -\frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, V_i^* = \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, V_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, \\ V_i^* &= -\frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, V_i = -\frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, V_i^* = \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, \\ V_i &= -\frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, V_i^* = \frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}, V_i = \frac{1}{2}(u_i, 0, 0) + \hat{F}_i^u, \\ V_i^* &= -\frac{1}{2}(u_i^*, 0, 0) + \hat{F}_i^{u*}. \end{aligned}$$

Чтобы найти корни, нужно вычислить результаты действия операторов $\text{ad } K_i, i=1 \div 6$, на элементы этого базиса (их собственные значения). Эти операторы определены так $\text{ad } K(X) = [K, X]$. Это можно сделать с помощью формул (22), (23) и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} G_{41}^{\lambda^2} &= \hat{F}_{41}^u, G_{41}^{\lambda^3} = \frac{1}{2}(-G_{40} + G_{41} - G_{52} - G_{63}), \\ G_{52}^{\lambda^2} &= \hat{F}_{52}^u, G_{52}^{\lambda^3} = \frac{1}{2}(-G_{40} - G_{41} + G_{52} - G_{63}), \\ G_{63}^{\lambda^2} &= \hat{F}_{63}^u, G_{63}^{\lambda^3} = \frac{1}{2}(-G_{40} - G_{41} - G_{52} + G_{63}), \\ G_{40}^{\lambda^2} &= -\hat{F}_{40}^u, G_{40}^{\lambda^3} = \frac{1}{2}(-G_{40} + G_{41} + G_{52} + G_{63}). \end{aligned} \quad (25)$$

Вычисления показывают, что (24) есть базис Каргана-Вейля

$$\pm \alpha_m \pm \alpha_n, \pm \lambda_\alpha \pm \frac{1}{2}(\alpha_5 + \sqrt{3}\alpha_6), \pm M_\alpha \pm \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6). \quad (26)$$

идею $m, n = 1 \div 5, \alpha = 1 \div 4$ и

$$M_i = M_4 - \alpha_j - \alpha_k \quad \lambda_i = \lambda_4 - \alpha_j - \alpha_k$$

$$M_4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$$

Соответствия (9) остаются в силе. Остальные элементы Картана-

Вейля соответствуют следующим корням:

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow \lambda_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 + \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow \lambda_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 + \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow \lambda_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 + \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \\ \lambda_i^* &\leftrightarrow M_i - \frac{1}{2}(\alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6) \end{aligned} \quad (27)$$

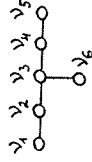
Из системы корней (26) выделим простые корни:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \sqrt{3}\alpha_6), \quad \lambda_2 = \alpha_4 + \alpha_5, \quad \lambda_3 = \alpha_1 - \alpha_4, \\ \lambda_4 &= \alpha_4 - \alpha_5, \quad \lambda_5 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \sqrt{3}\alpha_6), \\ \lambda_6 &= \alpha_2 - \alpha_3. \end{aligned}$$

Можно показать, что $\{\alpha_\mu\}$ базис в пространстве корней ортогонален и нормирован на одну и ту же величину:

$$(\alpha_\mu, \alpha_\nu) = \frac{1}{24} \delta_{\mu\nu}.$$

Используя это, получим диаграмму Динкина для системы корней (26):



Значит L есть E_6 особая алгебра Ли.

Действие операторов (24) в комплексной оболочке M_3^g дает 27-мерное представление алгебры E_6 . Явный вид этого действия таков (нулевые значения опущены):

$$\begin{aligned} K_1(F_1^{u_i}) &= \delta_{ij} F_1^{u_i}, \quad K_1(F_1^{u_j^*}) = -\delta_{ij} F_1^{u_j^*}, \quad K_1(F_2^{u_0}) = \frac{1}{2} F_2^{u_0}, \\ K_1(F_2^{u_i}) &= (\delta_{ij} - \frac{1}{2}) F_2^{u_i}, \quad K_1(F_2^{u_j^*}) = -\frac{1}{2} F_2^{u_j^*}, \quad K_1(F_3^{u_i}) = (\frac{1}{2} - \delta_{ij}) F_3^{u_i}, \\ K_1(F_3^{u_j^*}) &= -\frac{1}{2} F_3^{u_j^*}, \quad K_1(F_3^{u_i}) = (\delta_{ij} - \frac{1}{2}) F_3^{u_i}, \quad K_1(F_3^{u_j^*}) = \frac{1}{2} F_3^{u_j^*}, \\ K_1(F_4^{u_i}) &= (\frac{1}{2} - \delta_{ij}) F_4^{u_i}, \quad K_1(F_4^{u_j^*}) = F_4^{u_j^*}, \quad K_1(F_5^{u_0}) = -F_5^{u_0}, \\ K_1(F_5^{u_i}) &= \frac{1}{2} F_5^{u_i}, \quad K_1(F_5^{u_j^*}) = -\frac{1}{2} F_5^{u_j^*}, \quad K_1(E_2) = E_2, \\ K_5(E_3) &= -E_3, \quad K_5(F_2^{u_0}) = -\frac{1}{2} F_2^{u_0}, \quad K_5(F_2^{u_i}) = -\frac{1}{2} F_2^{u_i}, \\ K_5(F_2^{u_j^*}) &= \frac{1}{2} F_2^{u_j^*}, \quad K_5(F_3^{u_0}) = -\frac{1}{2} F_3^{u_0}, \quad K_5(F_3^{u_i}) = \frac{1}{2} F_3^{u_i}, \\ K_5(F_3^{u_j^*}) &= \frac{1}{2} F_3^{u_j^*}, \quad K_5(F_3^{u_i}) = \frac{1}{2} F_3^{u_i}, \quad K_5(F_3^{u_j^*}) = \frac{1}{2} F_3^{u_j^*}, \\ K_6(E_1) &= \frac{2}{\sqrt{3}} E_1, \quad K_6(E_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}} E_2, \quad K_6(E_3) = -\frac{1}{\sqrt{3}} E_3, \\ K_6(F_1^{u_0}) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} F_1^{u_0}, \quad K_6(F_1^{u_i}) = \frac{1}{\sqrt{3}} F_1^{u_i}, \quad K_6(F_1^{u_j^*}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_1^{u_j^*}, \\ K_6(F_2^{u_0}) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} F_2^{u_0}, \quad K_6(F_2^{u_i}) = \frac{1}{\sqrt{3}} F_2^{u_i}, \quad K_6(F_2^{u_j^*}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_2^{u_j^*}, \\ K_6(F_3^{u_0}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} F_3^{u_0}, \quad K_6(F_3^{u_i}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} F_3^{u_i}, \quad K_6(F_3^{u_j^*}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} F_3^{u_j^*}, \\ K_6(F_4^{u_0}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} F_4^{u_0}, \quad K_6(F_4^{u_i}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} F_4^{u_i}, \quad K_6(F_4^{u_j^*}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} F_4^{u_j^*}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_6(F_3^{u_j}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} F_3^{u_j}, & K_6(F_3^{u_0}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} F_3^{u_0}, & K_6(F_3^{u_j}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} F_3^{u_j}, \\
g_{iK}(F_1^{u_j}) &= \delta_{iK} F_1^{u_j}, & g_{iK}(F_1^{u_0}) &= -\delta_{iK} F_1^{u_0}, & g_{iK}(F_1^{u_j}) &= \delta_{iK} F_1^{u_j}, \\
g_{iK}(F_2^{u_j}) &= \delta_{iK} F_2^{u_j}, & g_{iK}(F_2^{u_0}) &= \delta_{iK} F_2^{u_0}, & g_{iK}(F_2^{u_j}) &= -\delta_{iK} F_2^{u_0}, \\
G_i(F_1^{u_j}) &= \varepsilon_{iJK} F_1^{u_j}, & G_i(F_1^{u_0}) &= F_1^{u_i}, & G_i(F_1^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, \\
G_i(F_3^{u_0}) &= -F_3^{u_i}, & G_i(F_3^{u_j}) &= \delta_{iJ} F_3^{u_0}, & G_i^*(F_3^{u_j}) &= -\varepsilon_{iJK} F_1^{u_K}, \\
G_i^*(F_2^{u_j}) &= \delta_{iJ} F_2^{u_0}, & G_i^*(F_2^{u_0}) &= -F_2^{u_i}, & G_i^*(F_3^{u_0}) &= F_3^{u_i}, \\
G_i^*(F_3^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_3^{u_0}, & X_i(E_3) &= F_1^{u_i}, & X_i(F_1^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_2, \\
X_i(F_2^{u_j}) &= -\varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & X_i(F_2^{u_0}) &= -F_3^{u_i}, & X_i(F_2^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_3^{u_0}, \\
X_i^*(E_2) &= F_1^{u_i}, & X_i^*(F_1^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_3, & X_i^*(F_1^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, \\
X_i^*(F_3^{u_0}) &= -F_2^{u_i}, & X_i^*(F_3^{u_j}) &= \varepsilon_{iJK} F_2^{u_K}, & X_i(F_1^{u_j}) &= F_1^{u_i}, \\
X_i(F_1^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_1^{u_0}, & X_i(F_2^{u_j}) &= -\varepsilon_{iJK} F_2^{u_K}, & X_i(F_2^{u_0}) &= -F_3^{u_i}, \\
X_i(F_3^{u_j}) &= \delta_{iJ} F_3^{u_0}, & X_i^*(F_1^{u_0}) &= -F_1^{u_i}, & X_i^*(F_2^{u_j}) &= \delta_{iJ} F_1^{u_0}, \\
X_i^*(F_2^{u_0}) &= \varepsilon_{iJK} F_2^{u_K}, & X_i^*(F_3^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_3^{u_0}, & X_i^*(F_3^{u_0}) &= F_3^{u_i}, \\
Y_i(F_1^{u_j}) &= F_1^{u_i}, & Y_i(F_1^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_1^{u_0}, & Y_i(F_2^{u_j}) &= -F_2^{u_i}, \\
Y_i(F_2^{u_0}) &= \delta_{iJ} F_2^{u_0}, & Y_i(F_3^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_3^{u_0}, & Y_i(F_3^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, \\
Y_i^*(F_1^{u_j}) &= -F_1^{u_i}, & Y_i^*(F_1^{u_0}) &= F_1^{u_i}, & Y_i^*(F_2^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_3, \\
Y_i^*(F_2^{u_0}) &= -\varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & Y_i(F_3^{u_j}) &= \varepsilon_{iJK} F_2^{u_K}, & Y_i(F_3^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, \\
Y_i^*(F_3^{u_j}) &= \delta_{iJ} F_3^{u_0}, & Y_i^*(F_3^{u_0}) &= \delta_{iJ} E_2, & Y_i^*(F_2^{u_0}) &= -F_2^{u_i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2Y_i^*(F_2^{u_j}) &= \delta_{iJ} F_3^{u_0}, & {}_2Y_i^*(F_2^{u_0}) &= -\varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & {}_2W_L^+(E_3) &= F_1^{u_0}, \\
{}_2W_L^+(F_1^{u_0}) &= E_2, & {}_2W_L^+(F_1^{u_j}) &= F_3^{u_0}, & {}_2W_L^+(F_2^{u_j}) &= -F_1^{u_j}, \\
{}_2W_L^-(E_2) &= F_1^{u_0}, & {}_2W_L^-(F_1^{u_0}) &= E_3, & {}_2W_L^-(F_2^{u_j}) &= -F_2^{u_j}, \\
{}_2W_L^-(F_3^{u_0}) &= F_2^{u_0}, & {}_2W_L^-(F_3^{u_j}) &= F_1^{u_0}, & {}_2W_R^+(F_1^{u_0}) &= E_2, \\
{}_2W_R^+(F_2^{u_0}) &= F_3^{u_0}, & {}_2W_R^+(F_2^{u_j}) &= -F_3^{u_j}, & {}_2W_R^-(E_2) &= F_1^{u_0}, \\
{}_2W_R^-(F_1^{u_0}) &= E_3, & {}_2W_R^-(F_1^{u_j}) &= F_2^{u_0}, & {}_2W_R^-(F_2^{u_j}) &= -F_2^{u_j}, \\
{}_2X_i(E_1) &= F_3^{u_i}, & {}_2X_i(F_2^{u_0}) &= -F_1^{u_i}, & {}_2X_i(F_2^{u_j}) &= \varepsilon_{iJK} F_1^{u_K}, \\
{}_2X_i(F_2^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_1^{u_0}, & {}_2X_i(F_3^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_2, & {}_2X_i^*(E_2) &= F_3^{u_i}, \\
{}_2X_i^*(F_1^{u_0}) &= -F_2^{u_i}, & {}_2X_i^*(F_1^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, & {}_2X_i^*(F_2^{u_j}) &= -\varepsilon_{iJK} F_2^{u_K}, \\
{}_2X_i^*(F_3^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_1, & {}_2Y_i(E_1) &= F_2^{u_j}, & {}_2Y_i(F_2^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_3, \\
{}_2Y_i(F_3^{u_0}) &= -\varepsilon_{iJK} F_1^{u_K}, & {}_2Y_i(F_3^{u_j}) &= -F_1^{u_i}, & {}_2Y_i(F_3^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_1^{u_0}, \\
{}_2Y_i^*(E_3) &= F_2^{u_i}, & {}_2Y_i^*(F_1^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_3^{u_0}, & {}_2Y_i^*(F_2^{u_j}) &= -F_3^{u_j}, \\
{}_2Y_i^*(F_2^{u_0}) &= \varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & {}_2Y_i^*(F_2^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_1, & {}_2V_L^+(F_2^{u_0}) &= E_1, \\
{}_2V_L^+(F_1^{u_j}) &= -F_3^{u_j}, & {}_2V_L^+(F_1^{u_0}) &= F_3^{u_0}, & {}_2V_L^+(F_2^{u_0}) &= F_1^{u_0}, \\
{}_2V_L^-(E_1) &= F_2^{u_0}, & {}_2V_L^-(F_2^{u_0}) &= E_3, & {}_2V_L^-(F_3^{u_0}) &= F_1^{u_0}, \\
{}_2V_L^-(F_3^{u_j}) &= -F_1^{u_j}, & {}_2V_L(E_2) &= F_2^{u_0}, & {}_2V_L(F_1^{u_0}) &= F_2^{u_0}, \\
{}_2V_L(F_1^{u_0}) &= E_1, & {}_2V_L^*(E_1) &= F_3^{u_0}, & {}_2V_L^*(F_2^{u_j}) &= -F_1^{u_j}, \\
{}_2V_L^*(F_3^{u_0}) &= E_2, & {}_2X_i(E_2) &= F_3^{u_i}, & {}_2X_i(F_1^{u_0}) &= -\varepsilon_{iJK} F_2^{u_K}, \\
{}_2X_i(F_1^{u_j}) &= -F_2^{u_j}, & {}_2X_i(F_1^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, & {}_2X_i^*(F_2^{u_j}) &= -F_2^{u_j}, \\
{}_2X_i^*(E_1) &= F_3^{u_i}, & {}_2X_i^*(F_2^{u_j}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, & {}_2X_i^*(F_3^{u_0}) &= -F_1^{u_i}, \\
{}_2X_i^*(F_3^{u_0}) &= \varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & {}_2X_i^*(F_3^{u_j}) &= \delta_{iJ} E_2, & {}_2Y_i(E_3) &= F_2^{u_i}, \\
{}_2Y_i(F_2^{u_0}) &= -F_2^{u_i}, & {}_2Y_i(F_2^{u_j}) &= \varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & {}_2Y_i(F_3^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0}, \\
{}_2Y_i(F_3^{u_0}) &= -F_2^{u_i}, & {}_2Y_i(F_3^{u_j}) &= \varepsilon_{iJK} F_3^{u_K}, & {}_2Y_i(F_3^{u_0}) &= -\delta_{iJ} F_2^{u_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_i(F_2^{u*}) &= \delta_{ij} E_1, & Y_i^*(F_2^{u*}) &= F_2^{u*}, & Y_i^*(F_2^{u*}) &= \delta_{ij} E_3, \\
 Y_i^*(F_3^{u*}) &= -F_1^{u*}, & Y_i^*(F_3^{u*}) &= -\delta_{ij} F_1^{u*}, & Y_i^*(F_3^{u*}) &= -\epsilon_{ijk} F_1^{u*}, \\
 V_R^+(E_1) &= F_3^{u*}, & V_R^+(F_2^{u*}) &= F_1^{u*}, & V_R^+(F_2^{u*}) &= -F_1^{u*}, \\
 V_R^+(F_3^{u*}) &= E_2, & V_R^-(E_2) &= F_3^{u*}, & & \\
 V_R^-(F_1^{u*}) &= F_2^{u*}, & V_R^-(F_1^{u*}) &= -F_2^{u*}, & V_R^-(F_3^{u*}) &= E_1, \\
 V_R(E_1) &= F_2^{u*}, & V_R(F_2^{u*}) &= E_3, & V_R(F_3^{u*}) &= F_1^{u*}, \\
 V_R(F_3^{u*}) &= -F_1^{u*}, & V_R^*(E_3) &= F_2^{u*}, & V_R^*(F_1^{u*}) &= F_3^{u*}, \\
 V_R^*(F_1^{u*}) &= -F_3^{u*}, & V_R^*(F_2^{u*}) &= E_1.
 \end{aligned}$$

Приведенные выше конструкции показывают близкое родство

между $\mathcal{D}_5$ и E_6 : эта последняя получается из $\mathcal{D}_5$ при

расширении M_2^8 йордановой алгебры до исключительной йор-

дановой алгебры M_3^8 . Таблица умножения (11) показывает,

что в M_3^8 имеются три M_2^8 подалгебры, составленные,

$$\text{соответственно, из элементов } \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому E_6 имеет три эквивалентные

$\mathcal{D}_5$ подалгебры. Интересно отметить, что соответствующие $SO(10)$

подгруппы в E_6 являются аналогами U^- , V^- и T^- опи-

новых $SU(2)$ подгрупп в $SU(3)$. Это станет ясным, если

обратим внимание на то, что при замене октационов действитель-

ными числами соответствующая $\mathcal{D}_5$ конструкция дает

$A_1 = \chi SU(2)$, а соответствующая E_6 конотструкция — $A_2 = \chi SU(3)$.

Через $\mathcal{D}_5^i$ обозначим ту $\mathcal{D}_5$ -подалгебру в E_6 , ко-
торая действует внутри M_2^8 алгебры, образованной из элемен-
тов F_i^a , E_j , E_k . $\mathcal{D}_5^i$ составляет $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$,

$$\hat{F}_i^a, \hat{E}_{jk}, \{\delta_{ij} a_1, \delta_{ij} a_2, \delta_{ij} a_3\} \text{ операторы}$$

и их (комплексные) линейные комбинации. Поэтому пе-

ресечение этих $\mathcal{D}_5^i$ подалгебр есть $\mathcal{D}_4$, составленный
из $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ троек триальности, а их объединение да-
ет всю E_6 алгебру.

Рассмотрим $\mathcal{M}: E_6 \rightarrow E_6$ эндоморфизм, порожденный цикли-
ческими перестановками:

$$\begin{aligned}
 &\{a_1, a_2, a_3\} \xrightarrow{\hat{F}_1^a} \{a_2, a_3, a_1\} \xrightarrow{\hat{F}_2^a} \{a_3, a_1, a_2\} \xrightarrow{\hat{F}_3^a} \{a_1, a_2, a_3\} \\
 &\hat{F}_1^a \xrightarrow{\hat{F}_2^a} \hat{F}_2^a \xrightarrow{\hat{F}_3^a} \hat{F}_3^a \xrightarrow{\hat{F}_1^a} \hat{F}_1^a
 \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
 &\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} \xrightarrow{\hat{E}_1} \{\Delta_2, \Delta_3, \Delta_1\} \xrightarrow{\hat{E}_2} \{\Delta_3, \Delta_1, \Delta_2\} \xrightarrow{\hat{E}_3} \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} \\
 &\hat{E}_1 \xrightarrow{\hat{E}_2} \hat{E}_2 \xrightarrow{\hat{E}_3} \hat{E}_3 \xrightarrow{\hat{E}_1} \hat{E}_1
 \end{aligned}$$

(29)

- F. Gursey, M. Serdaroglu, Lett. al Nuovo Cimento 21 (1978), 28;
- Y. Achiman, B. Stech, Phys. Lett. 77B (1978), 389;
- Q. Shafi, Phys. Lett. 79B (1978), 301;
- H. Ruegg, T. Schucker, Nucl. Phys. B161 (1979), 388.
3. F. Buccella, M. Falcioni, A. Pugliese Lett. al Nuovo Cimento 18 (1977), 441;
З.К.Силагидзе, Труды ТГУ, 220, 34, 1981.
4. Г.Фрейденталь, Математика, I (1957), II7;
P.Ramond, Preprint CALT-68-577(1976);
Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Academic Press, New York, 1966;
- K. McCrimmon, Bull. Amer. Math. Soc. 84(1978), 612.
5. M. Gunaydin, F. Gursey, Phys. Rev. D9 (1974), 3387;
F.Gursey, Preprint COO-3075-136 (1976);
R. Casalbuoni, Colored Quarks and Octonions, Preprint;
F. Gursey, Algebraic Methods and Quark Structure, Yale Preprint (1975);
F. Donokos, S. Kovesi-Domokos, Phys. Rev. D19 (1979), 2984;
6. Schafer, Loc.Cit.
К.А.Желваков, А.М.Слинько, И.П.Шестаков, А.И.Ширшов,
Кольца, близкие к ассоциативным, "Наука", М., 1978.
7. F. Gursey, M. Gunaydin, J. Math. Phys. 14 (1973), 1651.
8. Н.Джекобсон, Алгебры Ли, "Мир", 1969.
9. A. Pais, J. Math. Phys. 3(1962), 1135;
R. Slansky, Preprint LA-UR 3495 (1980);
Е.Б.Динкин, Труды Моск.Мат.Общ. I(1952), 39.
10. A. Gamba, J. Math. Phys. 8(1967), 775