

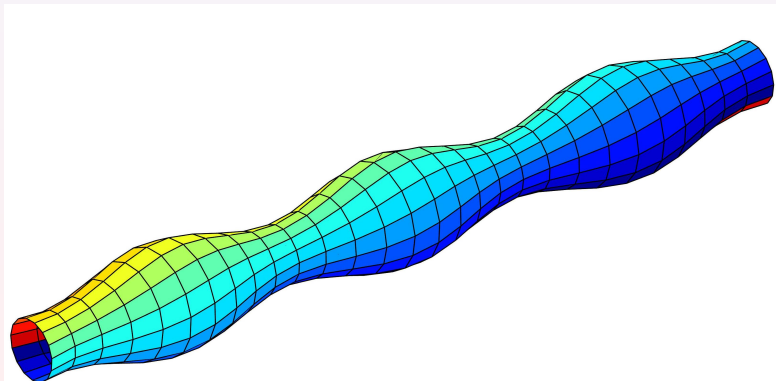
*Влияние шир магнитного поля на желобковую
устойчивость плазмы в ГОЛ-3*

Алексей Беклемишев

ИЯФ СО РАН, Новосибирск

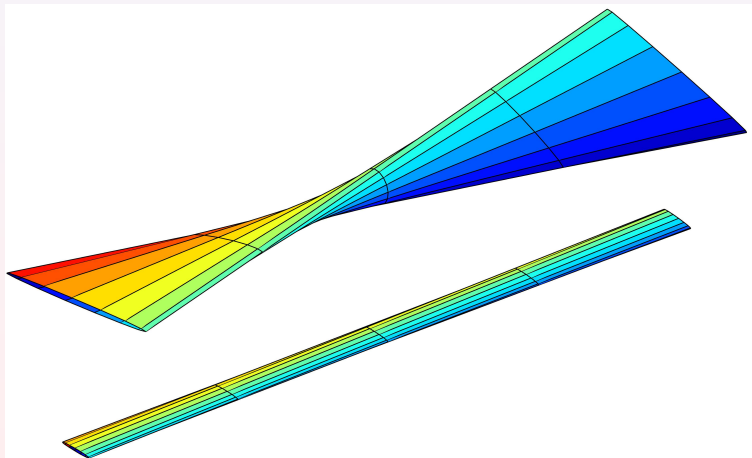
25 января 2005 г.

Структура поля в ГОЛ-3



Шир - мера пространственной скрещенности силовых линий на разных потоковых поверхностях при $j_{||} = j_{||}(\psi)$.

Качественный анализ



Желобок в поле с широм. Желобок типа Мерсье.

Соответствие мод условиям на торцах

“Изолированные” торцы -

$$\Delta_{\perp}(\mathbf{b}\nabla)\phi|_{\Gamma} = 0$$

порождают спектр вида $k_{zi} = k_{zi}(r)$, причём $k_{z0} \rightarrow k_{\parallel} = 0$
соответствует *чистым желобкам*.

Из-за зависимости $k_{zi}(r)$ при разных z имеем разную
зависимость от r , в пределе - сингулярную.

Соответствие мод условиям на торцах

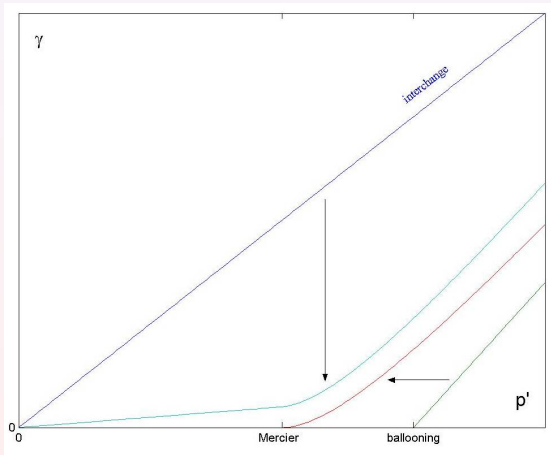
“Вмороженные” силовые линии -

$$\phi|_{\Gamma} = 0$$

порождают спектр k_{zi} не зависящий от r и соответствуют *баллонным модам*.

В пределе $L \rightarrow \infty$ снова получаются желобки, но, из-за того, что $k_{zi} = \text{const}$ каждое i даёт $k_{\parallel} = 0$ только при одном $r = r_i$ - *моды Мерсье*.

Скейлинг инкремента



Переход желобковых и баллонных мод к токамачному варианту при увеличении длины ловушки.

План

Введение

Исходные уравнения

Желобковые моды

Моды Мерсье

Баллонные эффекты

Заключение

Исходные уравнения

Представим возмущение магнитного поля в виде

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_{\parallel} \mathbf{b} + \nabla \times \chi \nabla \psi,$$

тогда

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \left(\dot{\mathbf{A}}_{\parallel} \mathbf{b} + \dot{\chi} \nabla \psi \right).$$

$$E_{\parallel} = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{A}}_{\parallel} = -c(\mathbf{b} \nabla \varphi).$$

Исходные уравнения

Скорость течения плазмы (из закона Ома идеальной МГД)

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{c}{B} \mathbf{E} \times \mathbf{b} = v_{\parallel} \mathbf{b} - \frac{c}{B} \nabla \varphi \times \mathbf{b} - \frac{1}{B} \dot{\chi} \nabla \psi \times \mathbf{b}$$

подставим в уравнения МГД, и разложим по малости кривизны, частоты,

$$\frac{\omega}{\omega_M} \sim k_{\parallel} a \sim \frac{a}{L_{\parallel}} \sim \sqrt{\kappa a} \sim \varepsilon \ll 1,$$

и поперечной мелкомасштабности

$$\nu = \frac{1}{k_{\perp} a} \ll 1.$$

Исходные уравнения

Получим уравнения для магнитного звука

$$\tilde{p} + \frac{B}{4\pi} (\nabla\psi \times \mathbf{b} \cdot \nabla) \chi = \tilde{p} + B\tilde{B}/4\pi = O(\nu^2 \varepsilon^2 \tilde{p}),$$

альфвеновских волн

$$(\mathbf{B}\nabla) \frac{1}{B} \Delta_{\perp} \frac{1}{B} (\mathbf{B}\nabla) \varphi - \frac{1}{c_A^2} \Delta_{\perp} \ddot{\varphi} = \frac{8\pi}{cB} \kappa \times \mathbf{b} \cdot \nabla \dot{\varphi},$$

и продольного звука

$$(\mathbf{B}\nabla) \frac{1}{B^2} (\mathbf{B}\nabla) \tilde{p} - (c_s^{-2} + c_A^{-2}) \ddot{p} = \frac{c\rho'_{\psi}}{c_s^2 B} (\nabla\psi \times \mathbf{b} \cdot \nabla) \dot{\varphi} + \rho c \nabla \dot{\varphi} \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{b}}{B}.$$

Устойчивость желобковых мод

Предположим, что φ и $\tilde{\rho}$ не меняются вдоль силовой линии, торцы изолированные. Усредним уравнения вдоль силовой линии:

$$\left\langle \frac{1}{B c_A^2} \nabla_{\perp}^2 \right\rangle \ddot{\varphi} = -\frac{8\pi}{c} \left\langle \frac{\kappa \times \mathbf{b}}{B^2} \cdot \nabla \right\rangle \dot{\rho},$$

и

$$\left\langle \frac{1}{c_s^2 B} + \frac{4\pi\rho}{B^3} \right\rangle \ddot{\rho} = -c \left\langle \left(\rho'_{\psi} \frac{\nabla\psi \times \mathbf{b}}{c_s^2 B^2} + \frac{\rho}{B} \nabla \times \frac{\mathbf{b}}{B} \right)_{\perp} \cdot \nabla \right\rangle \dot{\varphi}.$$

Здесь $\kappa = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{b}$ - кривизна силовой линии.

Усреднение производных

Исключим p :

$$\langle I \nabla_{\perp}^2 \rangle \ddot{\varphi} = \langle A \nabla \rangle \langle C \nabla \rangle \varphi$$

Проблема состоит в правильном усреднении производных! Для одной азимутальной гармоники желобка

$$\varphi = \varphi_m(r) \exp [im(\phi - \mu_l(r)z)]$$

имеем

$$\nabla_{\perp} \varphi \rightarrow \left(\varphi'_m - im\mu'_l z \varphi_m, \frac{im}{r} \varphi_m, 0 \right);$$

После этого уравнение легко решается, и получается критерий устойчивости $(\bar{A} \cdot \bar{C}) < 0$ и инкремент.

Формы критерия

Критерий устойчивости желобковых мод при конечном β :

$$Q = \left\langle \frac{\kappa \times \mathbf{b}}{rB^2} \right\rangle \cdot \left\langle p'_\psi \frac{\nabla \psi \times \mathbf{b}}{c_s^2 \rho r B^2} + \frac{1}{rB} \nabla \times \frac{\mathbf{b}}{B} \right\rangle < 0;$$

Из полученного выражения можно выделить критерий Кадомцева

$$Q = \frac{1}{\gamma_0} \left[\left\langle \frac{\kappa \times \mathbf{b}}{rB^2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{rB} \nabla \times \frac{\mathbf{b}}{B} \right\rangle \right] \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln U} + \gamma_0 \right).$$

Видно, что здесь магнитная яма притянута за уши, а на самом деле устойчивость определяется кривизной.

Формы критерия

Используя уравнение равновесия в виде

$$\frac{1}{rB} \nabla \frac{1}{B} \times \mathbf{b} = 4\pi p'_\psi \frac{\nabla \psi \times \mathbf{b}}{rB^4} - \frac{\kappa \times \mathbf{b}}{rB^2}.$$

можно исключить магнитную яму из критерия вообще:

$$Q = \mathbf{K} \cdot \mathbf{P} - 2K^2 < 0.$$

Здесь

$$\mathbf{P} \equiv \left\langle p'_\psi \frac{\nabla \psi \times \mathbf{b}}{rB^2} \left(\frac{1}{\gamma_0 \rho_0} + \frac{4\pi}{B^2} \right) \right\rangle, \quad \mathbf{K} = \left\langle \frac{\kappa \times \mathbf{b}}{rB^2} \right\rangle.$$

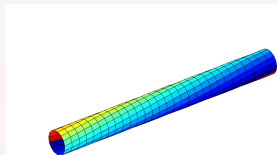
Инкремент

Используя усреднённую инерцию получим оценку инкремента желобковой неустойчивости в поле с широм:

$$\gamma_{\max}^2 \simeq 8\pi Q \left[\left\langle \frac{1}{c_s^2 B} + \frac{4\pi\rho}{B^3} \right\rangle \left\langle \frac{1 + \mu_I^2 r^2 z^2}{r^2 B c_A^2} \right\rangle \right]^{-1}.$$

Таким образом, и порог по градиенту давления, и квадрат инкремента желобковых мод пропорциональны средней кривизне силовых линий. Собственная магнитная яма плазмы почти ничего не меняет. При наличии шира инкремент падает линейно с длиной ловушки.

Устойчивость цилиндра с неоднородным током



Желобковый критерий имеет вид

$$Q = \mathbf{K}P - 2K^2 = -2 \frac{B_\phi^4}{r^3 B^8} \left(\frac{4\pi p' r}{B_\phi^2} \left[\frac{1}{\gamma_0 \beta} + \frac{1}{2} \right] + 1 \right) < 0.$$

Таким образом, имеем порог по давлению порядка β .

Определим вращательное преобразование на ед. длины и шир

$$\mu_I = \frac{B_\phi}{r B_z}, \quad S = -\frac{r\mu'}{\mu} = -\frac{r\mu'_I}{\mu_I}.$$

Разложение по модам

Из-за симметрии задачи можно представить возмущение в виде

$$\varphi(r, \phi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{-im\phi} \int \varphi_m(r, k, \omega) e^{ikz - i\omega t} dk d\omega.$$

Тогда продольная производная запишется как

$$(b\nabla) \rightarrow i \frac{B_z}{B} (k - \mu_l(r)m) = -im \frac{B_z}{B} \mu_l'(r - r_0).$$

Введём новую радиальную переменную (от резонанса)

$$x = m \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right),$$

тогда

$$(b\nabla) \rightarrow -i \frac{B_z}{B} \mu_l' r_0 x = i \frac{B_\phi}{r_0 B} S x.$$

Уравнения для мод Мерсье

$$S^2 x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) x \varphi + \gamma^2 \tau_\phi^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) \varphi = - \frac{\gamma^2 \tau_\phi^2 \hat{Q}}{S^2 x^2 + \gamma^2 \tau_\phi^2 \delta^2} \varphi,$$

здесь

$$\tau_\phi \equiv \frac{r_0 B}{c_A B_\phi}, \quad \delta^2 \equiv 1 + \frac{2}{\gamma_0 \beta}, \quad \alpha \equiv - \frac{8\pi p' r_0}{B_\phi^2}.$$

Кроме того,

$$\hat{Q} \equiv \frac{B_\phi^2}{B_z^2} (\alpha \delta^2 - 4).$$

Видно, что при малых инкрементах γ локализация моды по x должна усиливаться.

Устойчивость мод Мерсье

Введём новую нормировку

$$y = \frac{Sx}{\gamma\tau_\phi},$$

тогда

$$S^2 \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \gamma^2 \tau_\phi^2 (y^2 + 1) \varphi = -\frac{\hat{Q}\varphi}{y^2 + \delta^2}.$$

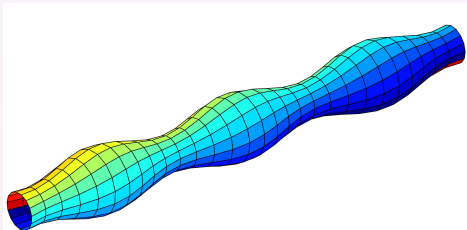
Это уравнение на пороге устойчивости сводится к уравнению Лежандра в двух предельных случаях, $\beta \ll 1$ и $\beta \gg 1$.

Получаются критерии устойчивости

$$\frac{S^2}{4} + \frac{8\pi p' r_0}{B_z^2} > 0, \quad \beta \ll 1,$$

$$S^2 + \frac{8\pi p' r_0}{B_z^2} + \frac{4B_\phi^2}{B_z^2} > 0, \quad \beta \gg 1.$$

Геометрия поля и координаты



Введём потоковую систему координат (a, ϕ, ζ) с прямыми силовыми линиями. g_{ik} - метрические коэффициенты. Магнитное поле имеет только две контравариантные компоненты, причём их отношение, μ_I , зависит только от a :

$$\mu_I(a) = \frac{B^\phi}{B^\zeta}.$$

Баллонные эффекты

- Мода может иметь конечную длину волны вдоль поля, если это требуется граничными условиями;
- Амплитуда моды может быть модулирована с ростом в области неблагоприятной кривизны;
- Моды типа Мерсье могут образовывать фазированный волновой пакет типа “желобка с крылышками”.

Баллонное преобразование

В стандартном Фурье-разложении положим

$$\varphi_m(a, k, \omega) = \varphi_m(a, x(k), \omega),$$

где $x = k - m\mu_l(a) \simeq -m\mu_l'(a - a_0(k))$ - “быстрая” потоковая переменная, отсчитываемая от резонансной поверхности, и сделаем Фурье-преобразование каждого коэффициента по x . Тогда, поскольку радиальные переменные отличаются лишь сдвигом $a_0(k)$, Фурье-образы каждой гармоники отличаются лишь фазовым множителем. В результате получим аналог баллонного преобразования для многопробочной ловушки:

$$\varphi(a, \phi, \zeta) = \sum_m \int e^{i(k\zeta - m\phi)} \int e^{-i(k - m\mu_l(a))(y - y_0)} \varphi_m(\epsilon a, y) dk dy.$$

Баллонное преобразование

При баллонном преобразовании периодические функции продольной координаты переходят в такие же функции y :

$$e^{i\lambda\zeta}\varphi \rightarrow e^{i\lambda(y-y_0)}\varphi_m(y),$$

продольные производные - в производные по y

$$(\mathbf{b}\nabla) \rightarrow i\frac{B^\zeta}{B} (k - m\mu_l(a)) \rightarrow \frac{B^\zeta}{B} \frac{\partial}{\partial y},$$

а радиальные производные - в линейные функции y :

$$\Delta_\perp \simeq \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{g_{11}}{g} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \rightarrow -m^2 \left(\frac{g_{22}}{g} \mu_l'^2 (y - y_0)^2 + \frac{g_{11}}{g} \right),$$

Обозначения

После преобразования оказывается удобным нормировать y и ввести обозначения

$$\xi = \gamma y / \bar{c}_A, \quad u(\xi) \equiv 1/R = B_{\min}/B \simeq g_{11}.$$

Теперь можно ввести

$$\bar{c}_A \equiv u c_A, \quad \tau_\phi \equiv 1/\mu_I \bar{c}_A, \quad L_s \equiv -\frac{1}{\mu'_I} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}, \quad S \equiv 1/\mu_I L_s.$$

Эти величины не меняются вдоль ловушки, и их определения соответствуют данным ранее для цилиндрической геометрии (при отсутствии модуляции поля).

Баллонное уравнение

Наконец, нормируем возмущение давления:

$$\hat{p} \equiv -i \frac{\gamma}{mc} \tilde{p},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left([\gamma^2 \tau_\phi^2 + S^2 (\xi - \xi_0)^2] \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) - u^2 (\gamma^2 \tau_\phi^2 + S^2 (\xi - \xi_0)^2) \varphi = \\ = \frac{\sqrt{g} B^2}{g_{11}} \frac{8\pi \kappa_a}{B^\zeta (B\phi)^2} \hat{p}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right) - u^3 \delta^2 \hat{p} = \frac{u^3 B}{\sqrt{g} (B^\zeta)^2} \left(p'_a \delta^2 - \frac{B^2}{2\pi} \kappa_a \right) \varphi.$$

Устойчивость при малом β

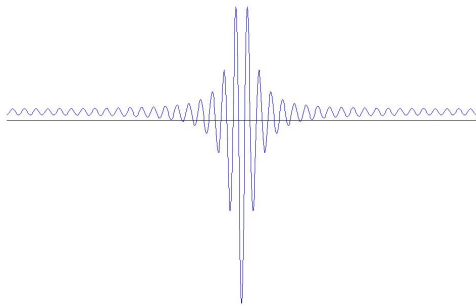
При малом давлении $\delta^2 \rightarrow \infty$ так что всё сводится к одному уравнению

$$\hat{\varphi}'' - W\hat{\varphi} = 0,$$

причём потенциал, в котором надо найти “связанные состояния” при нулевой “энергии”, имеет вид

$$W(\xi) = u^2(\xi) + \frac{\hat{Q}(\xi)}{\gamma^2\tau_\phi^2 + S^2(\xi - \xi_0)^2} + \frac{S^2\gamma^2\tau_\phi^2}{\left[\gamma^2\tau_\phi^2 + S^2(\xi - \xi_0)^2\right]^2}.$$

Вид потенциала



Устойчивость при малом β

Вблизи порога частота осцилляций потенциала увеличивается, так что порог определяется усреднёнными коэффициентами:

$$W(\xi) \simeq \langle u^2 \rangle + \frac{\langle \hat{Q} \rangle}{S^2(\xi - \xi_0)^2}.$$

Уравнение снова сводится к уравнению Лежандра, так что критерий устойчивости имеет вид:

$$\frac{S^2}{4} \mu_I^2 \left\langle \frac{B_{\min}^2}{B^2} \right\rangle - \frac{8\pi p'_a}{B_{\min}^{1/2}} \left\langle \frac{\kappa}{B^{3/2}} \right\rangle > 0.$$

Оценка для критического давления:

$$\beta_{crit} \sim \frac{\mu_I^2 r}{\bar{\kappa}} = \frac{1}{\bar{\kappa} r} \frac{B_J^2}{B_Z^2}.$$

Заключение

Влияние шири на неустойчивость определяется граничными условиями на торцах:

- при "изолированных" торцах - уменьшается инкремент за счёт возрастания инерции. В пределе сильного подавления происходит переход к модам Мерсье.
- при замороженных торцах - переход от "баллонных" мод к модам Мерсье при увеличении длины ловушки.
- Получены уравнения для желобковых и баллонных мод в открытой ловушке с широм при конечном бета порядка 1. Показано, что диамагнитная магнитная яма слабо влияет на устойчивость желобков, а всё определяется кривизной силовых линий.
- Для длинной многопробочной ловушки написан аналог баллонного преобразования и приближённо решена задача баллонной и желобковой устойчивости.