

Модель релаксации релятивистского  
электронного пучка в плазме  
в режиме захвата

*И.В. Тимофеев*

Научный руководитель:  
К.В. Лотов

## Традиционный подход к задаче о релаксации пучка

- Пучок релаксирует в кинетическом режиме  $k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \gg \Gamma$
- Возбуждается много волн  $\Delta v_b \gg \Delta v_{ph} \sim \Gamma/k$  со случайными фазами
- Накачка: колебания нарастают экспоненциально с инкрементом

$$\Gamma \simeq \frac{\omega_{pe}}{\gamma \Delta \theta^2} \frac{n_b}{n}$$

- Сток: насыщение энергии либо за счет выноса волн из области релаксации, либо за счет выхода колебаний из резонанса с пучком из-за различных нелинейных процессов (распады, рассеяния на частицах плазмы)

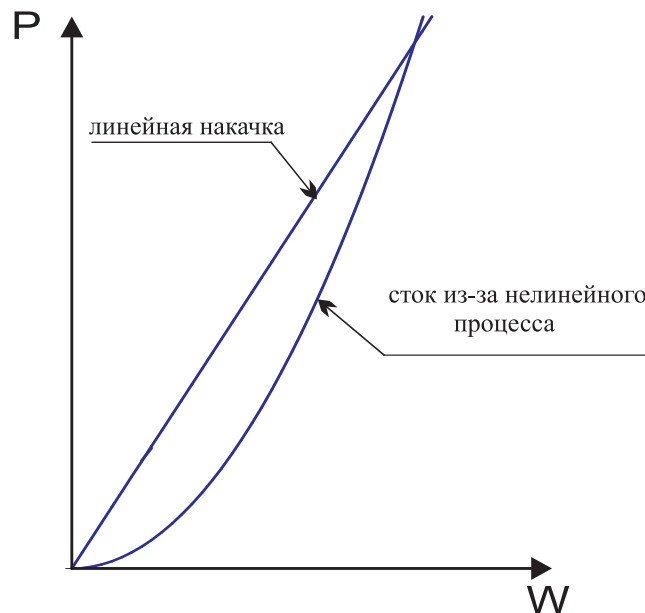


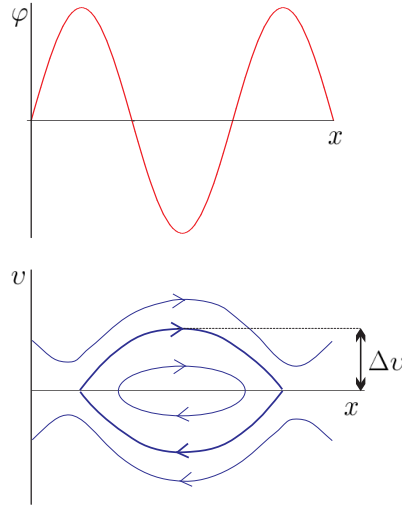
Рис. 1: Зависимость мощности от энергии

## Проблемы слаботурбулентного подхода

- В рамках слабой турбулентности не существует универсальной модели, претендующей на количественное описание эксперимента
- наиболее жесткое ограничение на применимость слабой турбулентности накладывает условие пренебрежения нелинейностью пучка (эффектами захвата). На установках ИЯФ оно не выполнено!

## Эффекты захвата

- Частицы, имеющие достаточно малую энергию в системе волны, захвачены в потенциальную яму  $\varphi = \varphi_0 \cos k(x - v_{ph}t)$



- Эти эффекты существенны, когда распределение пучка успевает сильно измениться за время нарастания волны  $1/\Gamma$ , то есть когда  $\Omega_{tr} \gtrsim \Gamma$ , где  $\Omega_{tr} \sim k\Delta v$  — частота колебаний захваченных частиц на дне потенциальной ямы, а  $\Delta v \sim \sqrt{e\varphi_0/\gamma^3 m}$  — ширина области захвата
- В численных экспериментах было показано, что при достаточно больших амплитудах нарастающих колебаний ( $\Omega_{tr} \sim \Gamma$ ) вместо волн со случайными фазами возбуждаются когерентные волновые пакеты с длиной  $l \sim v/\Omega_{tr}$  и шириной захвата  $\Delta v$
- Существенны ли эффекты захвата при параметрах, характерных для экспериментов на установке ГОЛ-М?

Условие  $\Omega_{tr} \ll \Gamma$  можно переписать в виде

$$n_b \gg n \frac{\Delta\theta^2}{\gamma^{1/2}} \left( \frac{W}{nmv^2} \right)^{1/4}$$

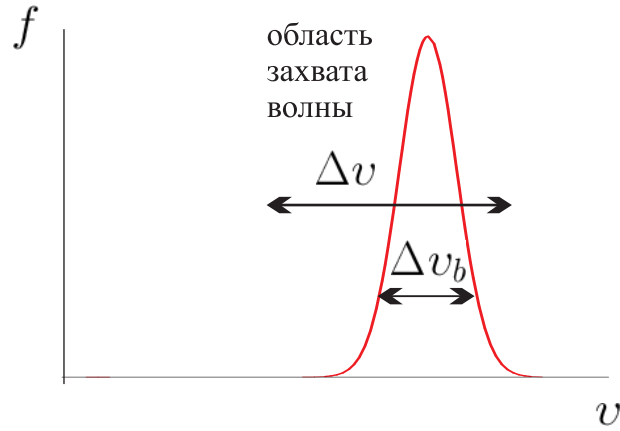
Для  $n = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $\Delta\theta \simeq 0.1$ ,  $\gamma = 2.2$ ,  $W/nT \simeq 0.16$ ,  $T \simeq 50 \text{ эВ}$  это дает  $n_b \gg 7.5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$  (в эксперименте  $n_b = 2.5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ).

Эффекты захвата существенны!

Кроме того,  $\Delta v_b < \Delta v$ . Возбуждается одна мода.

# Порог возникновения эффектов захвата

Одномодовый режим  $\Delta v_b < \Delta v$



Энергию волны, при которой возникают эффекты захвата, можно найти двумя способами:

- из условия  $\Omega_{tr} \sim \Gamma$ , где  $\Gamma \simeq (\omega_{pe}/\gamma)(n_b/n)^{1/3}$  — гидродинамический инкремент, и уравнения движения захваченных электронов в поле волны  $E$

$$\frac{dp}{dt} = -eE \quad m\gamma^3 \Delta v \Omega_{tr} \sim eE \quad \Delta v \sim \frac{1}{\gamma^{3/2}} \sqrt{\frac{eE}{mk}}$$

$$\Delta v \sim \frac{v}{\gamma} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/3} \quad W \sim \gamma^2 n_b m v^2 \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/3}$$

- из закона сохранения энергии

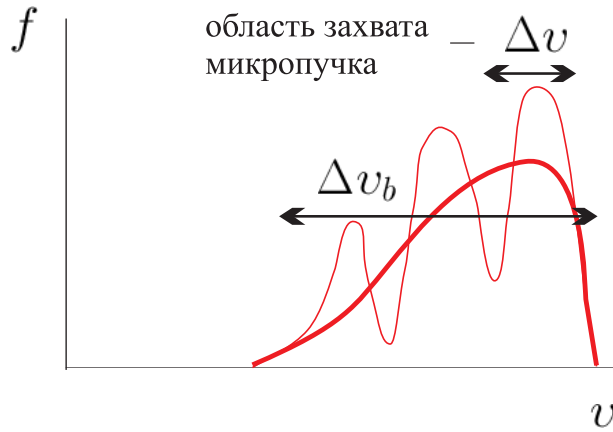
$$W = \frac{E^2}{4\pi} \sim \gamma^3 n_b m v \Delta v$$

Таким образом, эффекты захвата начинают проявляться при энергиях

$$W_0 = \alpha \gamma^2 n_b m v^2 \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/3} \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/3}$$

Коэффициент  $\alpha \sim 1$  учитывает оценочный характер полученных формул

Многомодовый режим  $\Delta v_b > \Delta v$



Плотность частиц в микропучке —  $\tilde{n}_b \simeq n \Delta v / \Delta v_b$

Каждый микропучок гидродинамически возбуждает свою волну с инкрементом  $\Gamma \simeq (\omega_{pe} / \gamma) (\tilde{n}_b / n)^{1/3}$

Ширина области захвата из условия  $\Gamma \sim k \Delta v$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{n_b \Delta v}{n \Delta v_b} \right)^{1/3} \quad \frac{\Delta v}{v} = \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{3/2} \left( \frac{n_b v}{n \Delta v_b} \right)^{1/2}$$

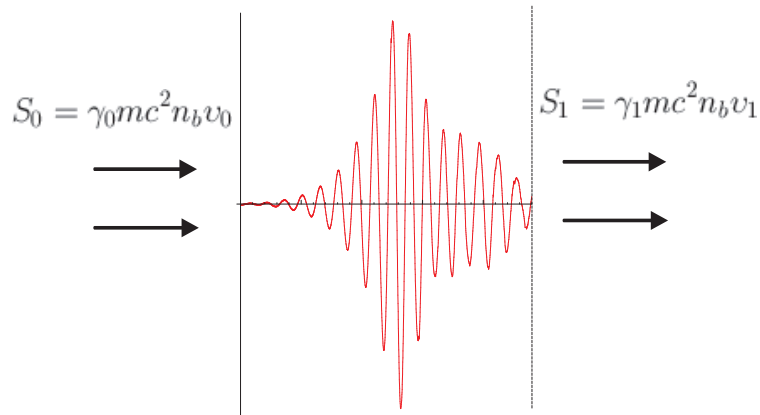
Энергия одной моды

$$W = \gamma^3 \tilde{n}_b m v \Delta v = \alpha^3 n_b m v^2 \left( \frac{n_b}{n} \right) \left( \frac{v}{\Delta v_b} \right)^2$$

## Влияние эффектов захвата на накачку резонансных ВОЛН

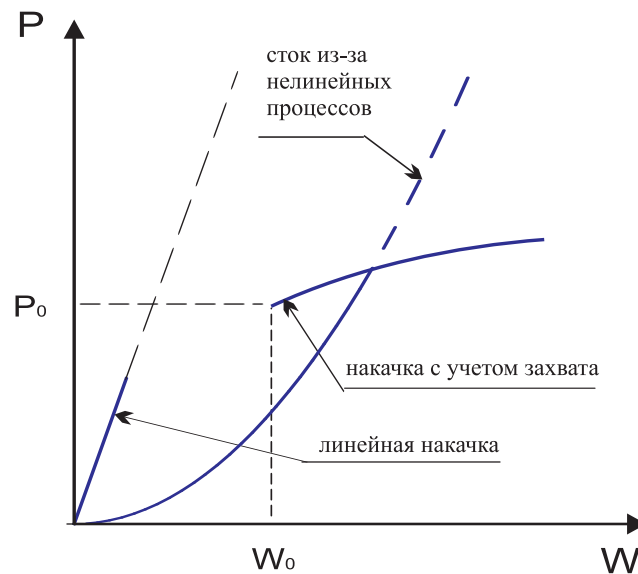
- С появлением эффектов захвата инкремент  $\Gamma$  теряет смысл. Частицы, которые первоначально раскачивали волну, за время  $\Delta t \sim 1/\Omega_{tr}$  переходят в ускоряющую фазу волны и начинают ее поглощать. Это приводит к формированию волновых пакетов с длиной  $l \sim v/\Omega_{tr}$
- Как растет энергия одного пакета?
  - Во временной задаче происходит насыщение энергии на уровне  $W \sim \gamma^2 n_b m v^2 (n_b/n)^{1/3}$

- В задаче о стационарной инжекции пучка в плазму энергия волны при  $W > W_0$  продолжает расти, но характер роста меняется с экспоненциального на степенной. При взаимодействии с пакетом длины  $l$  частицы замедляются на  $\Delta v$



$$P = \frac{dW}{dt} = -\text{div} \vec{S} \sim \frac{S_0 - S_1}{l} \sim \frac{\gamma^3 n_b m c^2 k \Delta v^2}{v} \propto W^{1/2}$$

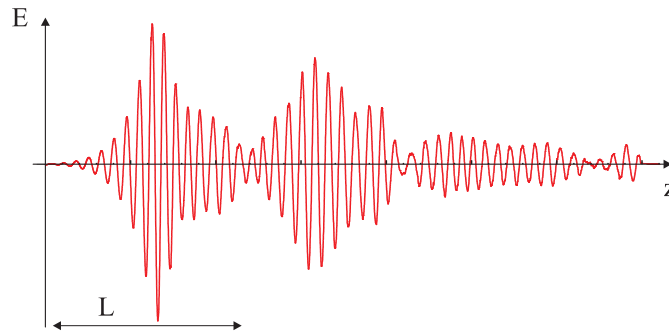
Таким образом, мощность накачки пакета слабо зависит от энергии



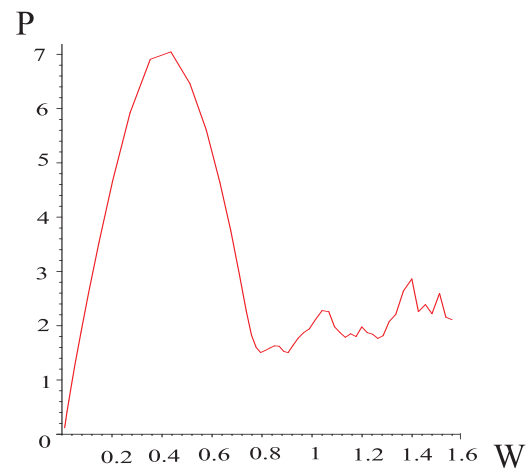
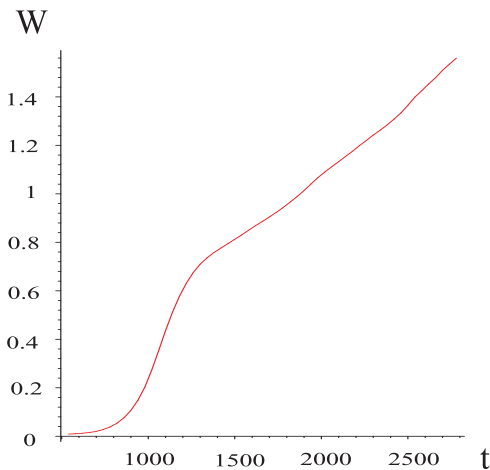
## Численное моделирование

- Цель — выяснить как меняется накачка волн с учетом нелинейности пучка

- Одномерная модель, пучок моделируется набором заряженных плоскостей, плазма рассматривается как сплошная среда в линейном приближении
- При инжекции моноэнергетического пучка со скоростью  $v$  преимущественно возбуждается мода с  $k \simeq \omega_{pe}/v$ . При достаточно больших энергиях формируются волновые пакеты с длиной  $l \simeq 2\pi\gamma/k (n/n_b)^{1/3}$



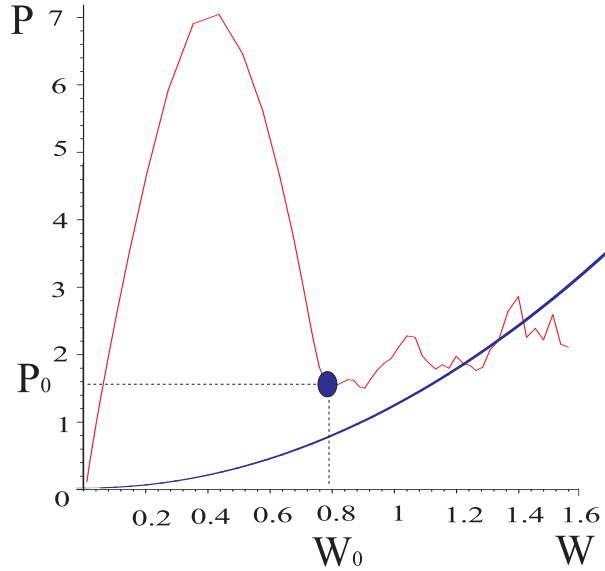
- Энергия, усредненная по промежутку  $L \simeq l$ , сначала нарастает экспоненциально с инкрементом  $\Gamma = 1.1(\omega_{pe}/\gamma)(n_b/n)^{1/3}$ , затем растет почти линейно



- Таким образом, моделирование подтверждает вывод о том, что мощность накачки пакета слабо зависит от энергии
- Это позволяет построить модель, которая не зависит от природы нелинейных процессов, обеспечивающих сток энергии в нерезонансные волны, поскольку мощность этого стока мало отличается от мощности накачки, при которой возникают эффекты захвата

## Модель релаксации пучка в режиме захвата

- Независимо от того, при какой энергии реально происходит стабилизация неустойчивости, мощность энергопотерь пучка такая же, как и в том случае, когда стабилизация наступает в точке  $(P_0, W_0)$



- Плотность энергии резонансных волн, измеренная на установке ГОЛ-М ( $W/nT \simeq 0.16$  при  $T = 50$  эВ), близка к порогу возникновения эффектов захвата  $W_0/nT \simeq 0.12$
- Длина волновых пакетов для ГОЛ-М составляет  $l \simeq 3$  см, а для ГОЛ-З  $l \simeq 5$  см
- На длине релаксации ( $\sim 1$  м) частицы пучка взаимодействуют с большим числом волновых пакетов, в каждом из которых они получают случайное приращение скорости, равное ширине области захвата пакета  $\Delta v$
- Коэффициент диффузии по энергии

$$D_\varepsilon \simeq \frac{\Delta\varepsilon^2}{\Delta t} \simeq \alpha^{7/2} \omega_{pe} m^{7/2} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{3/2} \frac{\gamma^6 v^7}{\Delta\varepsilon_b^{3/2}}$$

- Уравнение на энергоразброс пучка  $\Delta\varepsilon_b$

$$v \frac{d\Delta\varepsilon_b^2}{dz} = D_\varepsilon = \alpha^{7/2} \omega_{pe} m^{7/2} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{3/2} \frac{\gamma^6 v^7}{\Delta\varepsilon_b^{3/2}}$$

- Энергоразброс увеличивается по степенному закону

$$\Delta\varepsilon_b(z) = \Delta\varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{l}\right)^{2/7}$$

с характерной длиной

$$l = \frac{1}{\alpha^{7/2}} \frac{c}{\omega_{pe}} \frac{\gamma_{\parallel}^{7/2}}{(\gamma_{\parallel}^2 - 1)^3} \left(\frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_{\parallel}}\right)^{7/2} \left(\frac{n}{n_b}\right)^{3/2}$$

- В одномерной задаче под энергией понимаем величину

$$\varepsilon_{\parallel} = \gamma_{\parallel} m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v_{\parallel}^2/c^2}}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_{\parallel}} = (\gamma_{\parallel}^2 - 1) \frac{\Delta\theta_0^2}{2}$$

Средняя продольная энергия также рассматривается как функция начального углового разброса

$$\gamma_{\parallel} = \frac{1}{N} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \exp(-\theta^2/\Delta\theta_0^2) d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta (1 - 1/\gamma^2)}}, \quad N = \int_0^{\pi} \sin \theta \exp(-\theta^2/\Delta\theta_0^2) d\theta$$

- Зная закон изменения энергоразброса, можно определить зависимость средней энергии пучка от расстояния  $\bar{\varepsilon} = \gamma m c^2 - \Delta\varepsilon_b(z)/2$  и распределение мощности энерговыделения по длине установки

$$P(z) = -\frac{d}{dz} (v n_b \bar{\varepsilon}) = P_0 \left(1 + \frac{z}{l}\right)^{-5/7},$$

где

$$P_0 = \frac{\alpha^{7/2}}{7} \omega_{pe} n_b m c^2 \frac{(\gamma_{\parallel}^2 - 1)}{\gamma_{\parallel}^{7/2}} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{3/2} \left(\frac{2}{\Delta\theta_0^2}\right)^{5/2}.$$

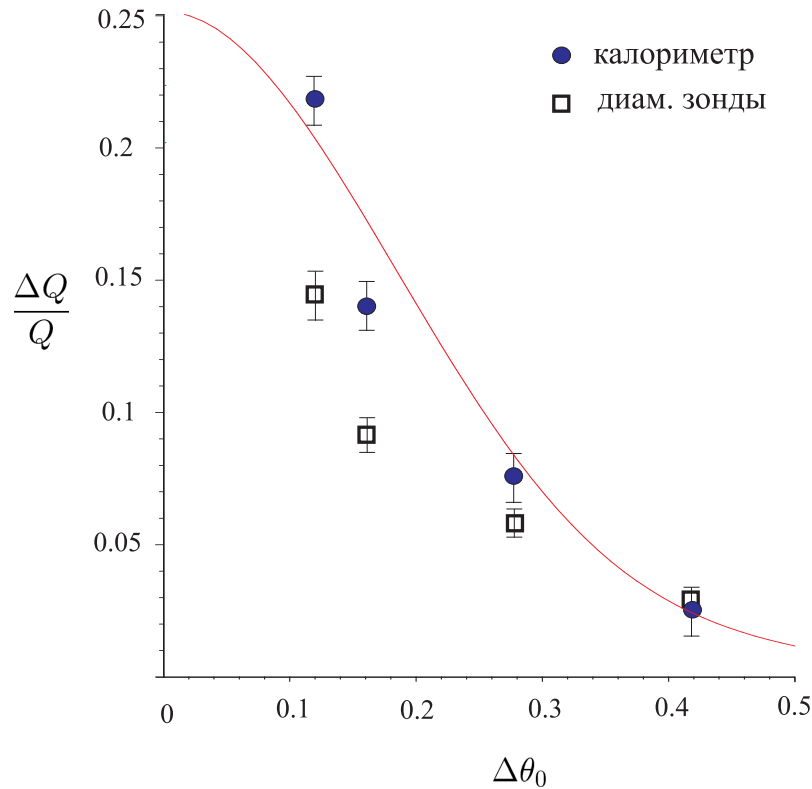
## Сравнение с экспериментом

- Модель предсказывает зависимости распределения энергопотерь пучка по длине установки от различных параметров ( $n$ ,  $n_b$ ,  $\Delta\theta_0$ )
- На установке ИНАР изучалось влияние начального углового разброса  $\Delta\theta_0$  на эффективность пучково-плазменного взаимодействия. Доля энергии, теряемая пучком в плазме, увеличивалась с уменьшением углового разброса. В модели такая зависимость имеет вид

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\int P(z) dz S \tau_b}{(\gamma - 1) m c^2 n_b S v_{\parallel} \tau_b} =$$

$$= \frac{\gamma_{\parallel} (\gamma_{\parallel}^2 - 1)}{2(\gamma - 1)} \frac{\Delta\theta_0^2}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^{7/2}}{\sqrt{\gamma_{\parallel}^2 - 1} \gamma_{\parallel}^{7/2}} \frac{L \omega_{pe}}{c} \left( \frac{n_b}{n} \right)^{3/2} \left( \frac{2}{\Delta\theta_0^2} \right)^{7/2} \right)^{2/7} - 1 \right]$$

Наилучшее согласие достигается при  $\alpha = 0.35$

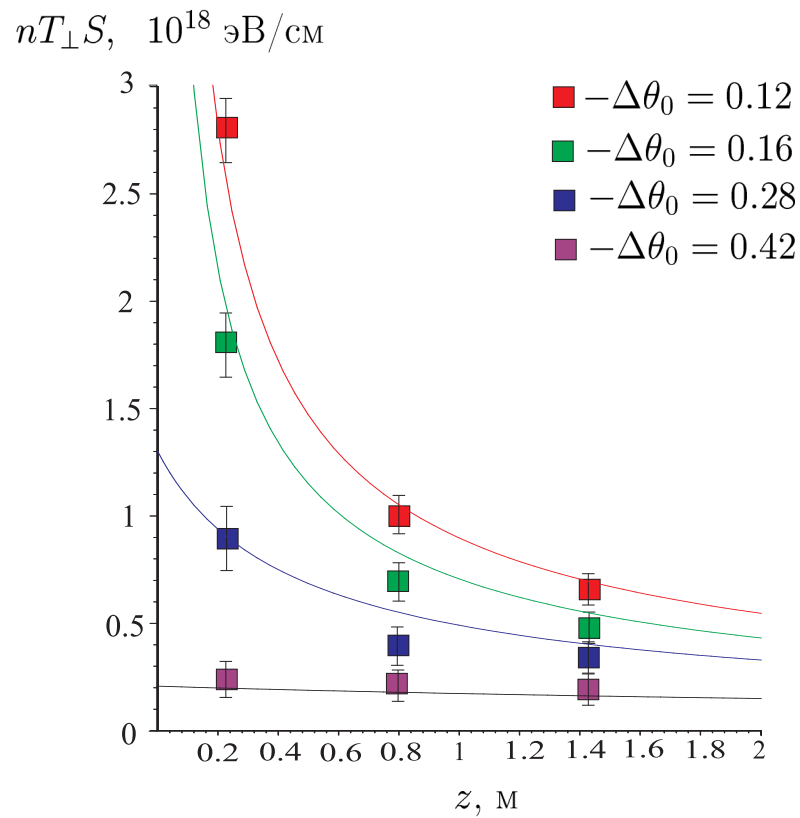


- Диаманитные измерения распределения давления плазмы по длине установки. Учитывая, что только часть  $\eta$  от полных энергопотерь пучка идет на нагрев

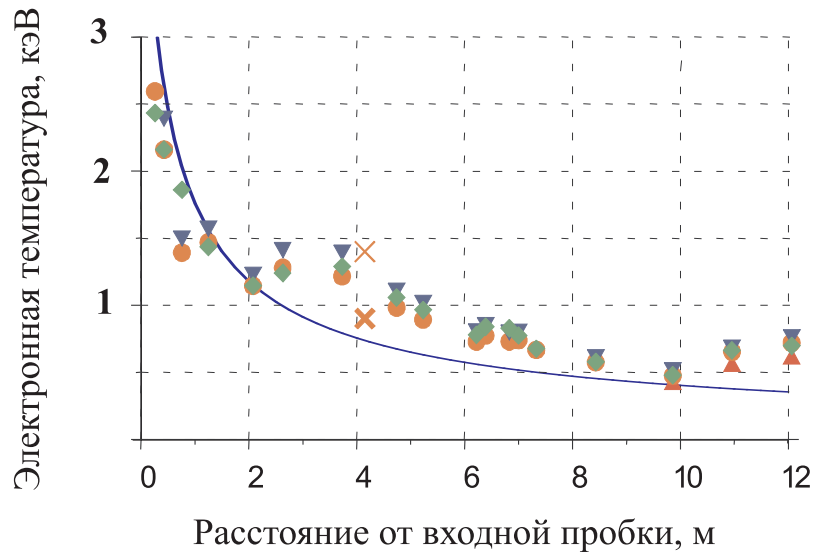
$$\frac{3}{2}n\frac{dT}{dt} = P\eta,$$

к моменту окончания инъекции  $\tau_b$  для профиля давления получаем

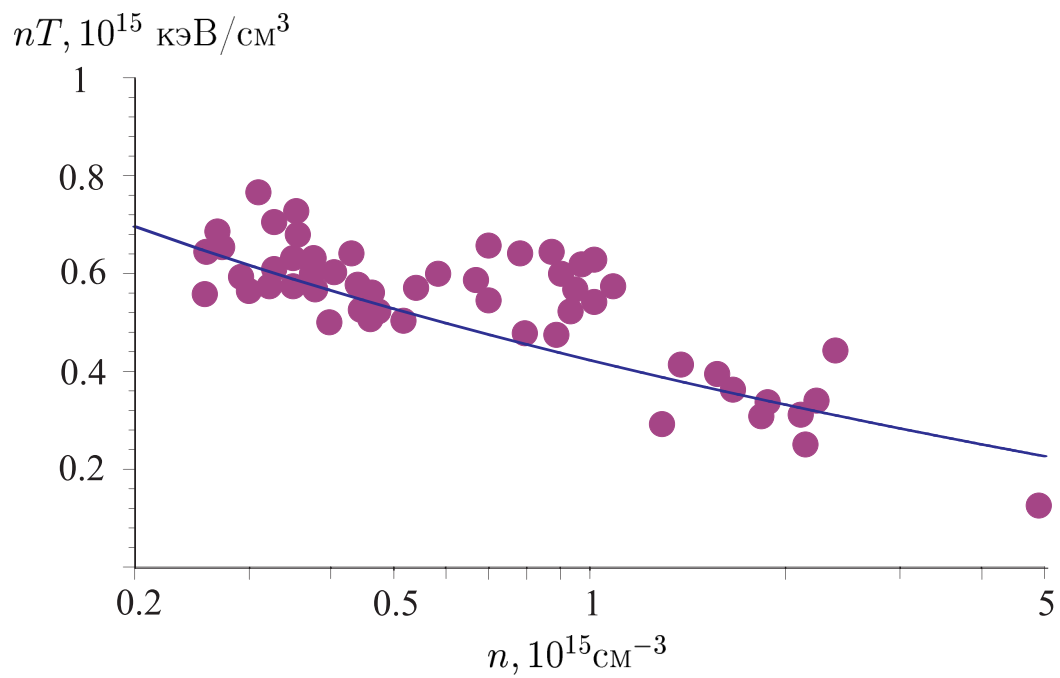
$$nT(z) = \frac{2}{3}\eta\tau_b P_0 \left(1 + \frac{z}{l}\right)^{-5/7}$$



- Та же зависимость при параметрах, характерных для ГОЛ-3  $\tau_b = 6 \cdot 10^{-6}$  сек,  $n = 8 \cdot 10^{14} \text{см}^{-3}$ ,  $n_b = 2 \cdot 10^{11} \text{см}^{-3}$ ,  $\Delta\theta_0 = 0.22$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\eta = 0.2$ , согласуется с измеренным профилем электронной температуры



- Зависимость давления от плотности плазмы в точке  $z = 623$  см



## Выводы

- Предложена модель, основанная на предположении о том, что стабилизация энергии резонансных волн происходит на уровне, превышающем порог возникновения эффектов захвата. В этом режиме влияние нелинейности пучка приводит к ограничению мощности энергопотерь. Это позволяет сделать вывод о независимости мощности, которую теряет пучок при взаимодействии с плазмой, от природы нелинейных процессов, обеспечивающих сток энергии в турбулентность.
- Модель правильно описывает профили энергопотерь пучка в плазме и зависимость этих профилей от различных параметров, влияющих на эффективность коллективного взаимодействия.

Трехмерность спектра возбуждаемых волн не меняет картину релаксации пучка. Для нашей модели существенно только то, чтобы поперечный импульс частиц пучка менялся гораздо медленнее, чем продольный. Частицы пучка меняют свою поперечную энергию только при возбуждении волн на циклотронном резонансе

$$\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_{Be}/\gamma$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{\parallel} + \Delta\varepsilon_{\perp}$$

Таким образом, изменение поперечной энергии пучка при взаимодействии с трехмерной потенциальной ямой мало по сравнению с изменением продольной энергии

$$\frac{\Delta\varepsilon_{\perp}}{\Delta\varepsilon} = \frac{\omega_{Be}}{\gamma\omega_{pe}} \ll 1$$

