

Эффекты КЛР и градиент электронной температуры в теории вихревого удержания

А. Д. Беклемишев, М. С. Чащин

ИЯФ СО РАН



Вихревое удержание

$$\phi(x, \varphi) = \text{const}$$



$$T(x, \varphi) = \text{const}$$



Плазма может удерживаться в застойной зоне вихревого течения.

Основное утверждение работы - что такое “вихревое удержание” может отвечать за улучшенное удержание в присутствии сдвиговых течений. Это не очень очевидно, так как в большинстве случаев вихри неустойчивы.

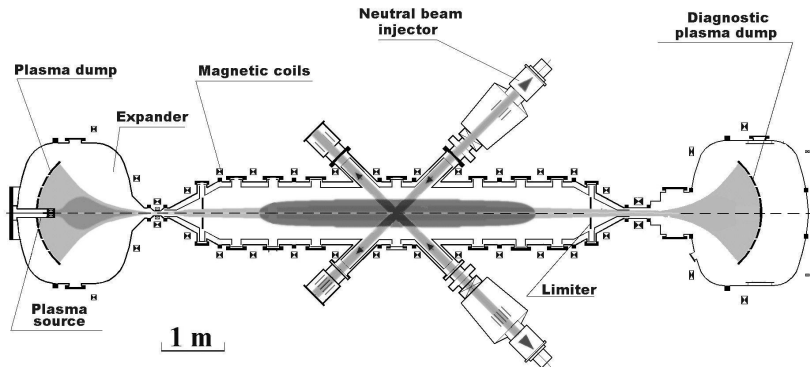
Возможно создание и поддержание такого “широкого” вихря, который охватывал бы всю сердцевину разряда. Этого можно добиться относительно просто и дёшево, если использовать торцевые электроды.



План

- Поддержание вихря потенциалами торцевых электродов;
- Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца “широкого” вихря (1P);
- Дрейфовая модификация КН (2P);
- Нелинейное насыщение желобковой неустойчивости;
- Вихревое удержание в дрейфовой МГД (2P);
- Температурно-градиентная неустойчивость;
- Выводы.





Параметры: $L \sim 7/12m$, $r \sim 15cm$, $k = B_{max}/B_{min} = 30$,
 $T_w \sim 180eV$, $T_{hi} \sim 15keV$, $n \sim 2 \cdot 10^{13}cm^{-3}$, $\beta \sim 60\%$.

С 2003г обычно работает в режиме со **средним магнитным бугром** на оси.



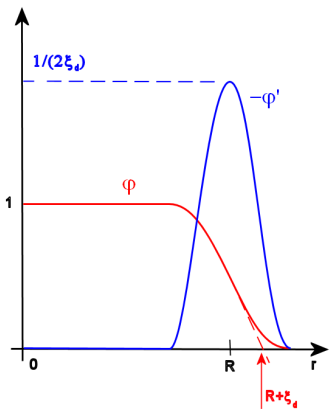
2D идеальный вихрь

- Предположим однородную плотность, температуру и поле;
- Квазинейтральность ($\text{div} \mathbf{j} = 0$) требует, чтобы дивергенция поляризованного тока занулялась, так что

$$\frac{d}{dt} \Delta \varphi = 0,$$

$$\text{where } \mathbf{v} = \frac{c}{B} \mathbf{b} \times \nabla \varphi.$$

- Рассматриваем специальные, осесимметричные начальные состояния типа широкого вихря (слева);
- Имеем дело с *двумя* точками перегиба на профиле скорости!



Differential layer width:
 $\xi_d \equiv 1/(2|\nabla \varphi|_{max})$



Нормализация

Удобно использовать безразмерные переменные φ/ϕ , r/R , t/τ , где ϕ - исходная амплитуда вихря, R - радиус вихревого слоя, и

$$\tau = \frac{BR^2}{c\phi} = \frac{R^2}{\rho_i v_{Ti}} \left(\frac{T}{e\phi} \right).$$

Тогда динамика вихря описывается

$$\partial_t \Delta \varphi + \{ \varphi, \Delta \varphi \} = 0,$$

где

$$\{ \varphi, A \} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Для ГДЛ, $\phi \sim T_e/e \sim 150V$, $\tau \sim 30 \mu s$.



Продольные токи и столкновительная вязкость

На открытых силовых линиях, оканчивающихся на проводнике, необходимо принять во внимание продольные токи, которые могут течь на торцевые пластины сквозь всевозможные препятствия типа магнитных пробок, амбиполярных барьеров и дебаевских слоёв. Используя эти токи, можно раскручивать вихрь. Диссипация (вязкая или в пристеночном слое) может помочь в его стабилизации.



Токи на торец

Условие квазинейтральности теперь $\text{div}j_p + \text{div}j_{\parallel} = 0$.

Интегрируя его вдоль силовой линии, получим ток на торец $j_{\parallel}(\text{wall}) = \int \text{div}j_p d\ell = J_{i0} (1 - \exp[e(\varphi - \varphi_{fl} - \varphi_{\text{wall}})/T_e])$.

В большинстве случаев отклонение от амбиполярного баланса невелико:

$$\partial_t \Delta\varphi + \{\varphi, \Delta\varphi\} = H \cdot (\varphi - \varphi_w(\mathbf{r})).$$

Здесь

$$H = J_{i0} \frac{e}{T_e} \frac{B^2}{\rho_i c^2 L} \tau R^2 = \frac{\tau}{\tau_{\parallel}} \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^2 = \frac{R^4}{\rho_i^3 L k} \left(\frac{T}{e\phi} \right),$$

where τ_{\parallel} - продольное время удержания частиц, k - эффективное пробочное отношение, $\varphi_w = \varphi_{fl} + \varphi_{\text{wall}}$ - равновесный потенциал плазмы.

Связь с торцом

Связь с торцом (или “line-tying”), H , сильно зависит от магнитного поля, но не зависит от плотности:

$$H \propto B^3 T^{-1/2}!$$

Для ГДЛ ($\tau_{\parallel} \approx 1ms$, $B = 0.25T$, и $[100eV \text{ at } 10cm] \div [50eV \text{ at } 14cm]$)

$$H \approx 3.5 \div 40.$$

Для GAMMA-10
($\tau_{\parallel} \approx 10ms$, $B = 0.4T$, и $750eV \text{ at } 12cm$)

$$H \sim 1.$$

В SOL токамака $H \sim 10^2 \div 10^4$. Не видно как этот параметр может стать малым даже в установках термоядерного класса.



Диссипация завихренности

Столкновительная вязкость ведёт к диффузии завихренности, однако есть и её прямые потери (с ионами):

$$\partial_t \Delta \varphi + \{\varphi, \Delta \varphi\} = H \cdot (\varphi - \varphi_w) + \nu_{\perp} \Delta^2 \varphi - \nu_{\parallel} \Delta \varphi.$$

Здесь

$$\nu_{\perp} = \frac{\nu_g \tau}{R^2} = \frac{\nu_g}{16 D_B} \left(\frac{T}{e\phi} \right), \quad \nu_{\parallel} = \frac{\tau}{\tau_{\parallel}} = H \left(\frac{\rho_i}{R} \right)^2.$$

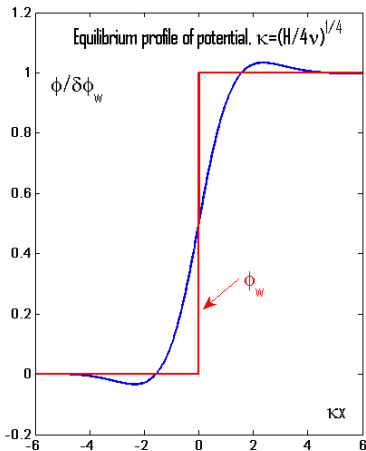
Столкновительная вязкость в обеих ловушках не слишком мала (из-за низкого магнитного поля): $\nu_{\perp ii} \sim 10^{-3}$, - примерно в 50 раз меньше Бомовского: $\nu_{\perp Bohm} \approx 0.055$.

Продольное удержание лучше в GAMMA-10: $\nu_{\parallel GDT} \approx 0.03$,
 $\nu_{\parallel GAMMA-10} \approx 10^{-3}$.



Влияние вязкости

- Появляется гладкий стационарный профиль $\varphi \rightarrow \varphi_s$ as $t \rightarrow \infty$, $\nu_{\perp} \Delta^2 \varphi_s = H(\varphi_w - \varphi_s)$;



Решение для плоского слоя:

$$\varphi_s = \begin{cases} 0.5e^{\kappa x} \cos(\kappa x), & x < 0 \\ 1 - 0.5e^{-\kappa x} \cos(\kappa x), & x > 0 \end{cases}$$

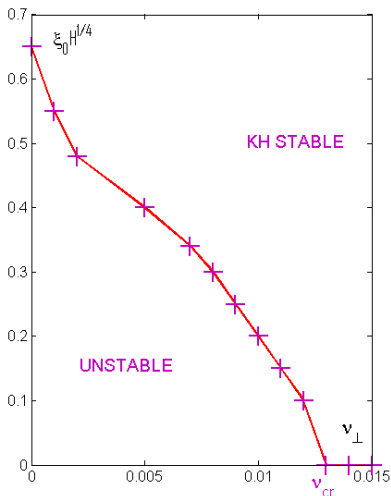
$$\kappa = (H/4\nu_{\perp})^{1/4}.$$

Из-за очень слабой зависимости от ν_{\perp} , стационарная ширина слоя $\xi_d = \kappa^{-1}$ не слишком мала:

$$\xi_{GDT} \approx 0.17.$$



Стабилизация неустойчивости КН



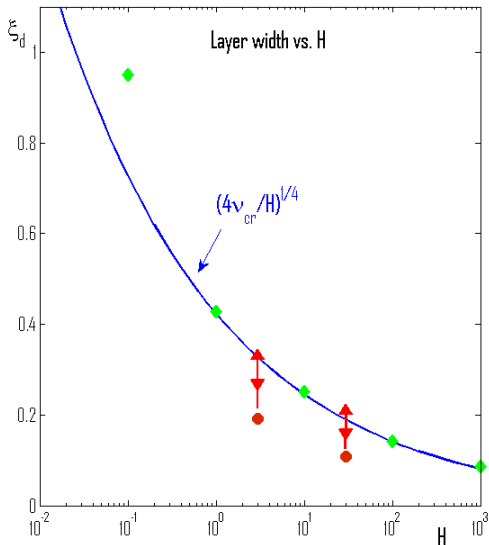
Граница устойчивости для различной ширины переходного слоя потенциала стенки, ξ_0 . $\nu_{\parallel} = 0$.

- КН Может быть стабилизирована и вязкостью, ν_{\perp} , и стенкой, H .
- Line-tying действует только на низкие моды, тогда как вязкость имеет ту же зависимость от k как и $\Gamma_{KH} \approx Ck^2$,

$$\Gamma_{eff} \approx Ck^2 - \nu_{\perp}k^2 - Hk^{-2}.$$

- Критическая вязкость, $\nu_{cr} \approx 0.013 \pm 0.001$, почти не зависит от H .

Турбулентное уширение профиля



Если вязкость ниже пороговой, турбулентность увеличивает ширину профиля так, как если бы она была пороговой!

Зелёные точки представляют стационарные профили при критической вязкости, красные - при $\nu_{\perp} \sim 0.1\nu_{cr}$.



Дрейфовая модификация КН

Типичные скорости $E \times V$ -дрейфа в ГДЛ меньше или порядка средней скорости диамагнитного дрейфа ионов, поэтому пренебречь дрейфовыми эффектами (КЛР) нельзя. Кроме модификации поляризационного тока, потребуется уравнение для эволюции давления.



Уравнения с дрейфовыми поправками

Уравнение для завихренности теперь зацеплено с уравнением переноса давления:

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta \varphi + \{\varphi, \Delta \varphi\} - U \nabla \cdot \{\nabla \varphi, P\} = \\ = H \cdot (\varphi - \varphi_w) + \nu_{\perp} \Delta^2 \varphi - \nu_{\parallel} \Delta \varphi - U \Delta S_p,\end{aligned}$$

$$\partial_t P + \{\varphi, P\} = \nu_{\perp}^p \Delta P - \nu_{\parallel}^p P + Q_p.$$

где давление ионов нормализовано на его значение на оси, P_0 ,

$$U \equiv P_0 / (en\phi); \quad S_p \equiv (\nu_{\perp}^p - \nu_{\perp}) \Delta P - (\nu_{\parallel}^p - \nu_{\parallel}) P + Q_p \approx Q_p(r)$$

определяется балансом нагрева и потерь, который зависит от модели равновесия; Q_p - источник нагрева.



Заметки о выводе

Влияние давления на динамику завихренности появляется (в частности) через дивергенцию поляризованного дрейфа. Один промежуточный результат в *Simakov & Catto, 2003* даёт

$$\nabla \cdot (en \mathbf{V}_{pi}) \approx -\frac{c}{B\Omega_i} \nabla \cdot (\partial_t + \mathbf{V}_E \cdot \nabla)(en \nabla \varphi + \nabla p),$$

Здесь $\nabla \cdot (en \nabla \varphi + \nabla p)$ пропорционально *полной* завихренности. Однако, исключая член $\partial_t \Delta p$ используя уравнение конвекции давления, можно получить уравнение для $E \times B$ -завихренности (“динамической”):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (en \mathbf{V}_{pi}) \approx & -\frac{c}{B\Omega_i} \left(\partial_t \nabla(en \nabla \varphi) + \frac{c}{B} \nabla \{ \varphi, en \nabla \varphi \} - \right. \\ & \left. -\frac{c}{B} \nabla \{ \nabla \varphi, p \} + \Delta(\nu_{\perp}^p \Delta p - \nu_{\parallel}^p p + q_p) \right). \end{aligned}$$



Дрейфовые (КЛР) эффекты в КН

Гировязкость (эффект КЛР) может стабилизировать все моды (кроме $m = 0$ и “жёсткой” $m = 1$, которых нет в КН), если она достаточно велика.

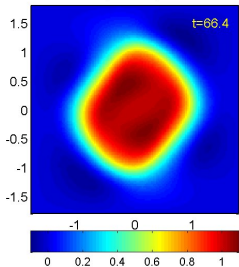
- И в ГДЛ и в GAMMA-10 гировязкость велика, $U_{GDT} \sim 5$, $U_{\text{GAMMA-10}} \sim 1$;
- но она не влияет на ширину равновесного слоя;
- поэтому, при реальных значениях столкновительной вязкости слой становится таким узким, что КН всё равно возбуждается.

Вывод: Если столкновительная вязкость мала, вместо стыков торцевых пластин нужно использовать стыки через диэлектрик.

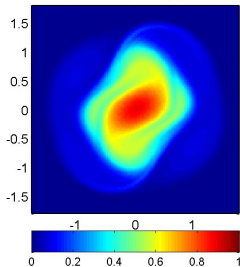


Дрейфовые (КЛР) эффекты в КН

Potential; $H=10$, $\nu=0.002$

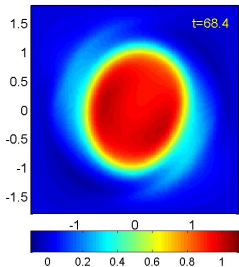


Temperature; $\kappa=0$, $\chi=0.002$

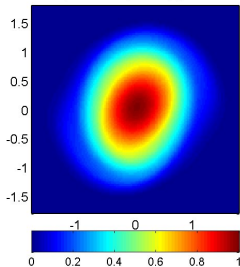


Without FLR, $U=0$

Potential; $H=10$, $\nu=0.002$



Temperature; $\kappa=0$, $\chi=0.002$

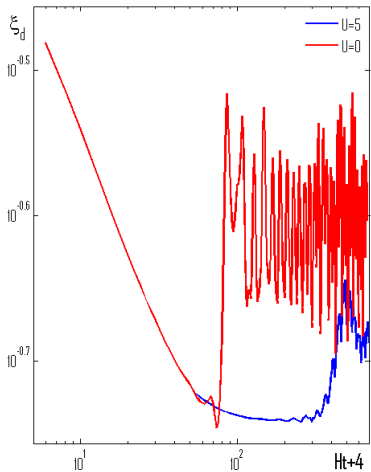


With FLR, $U=5$

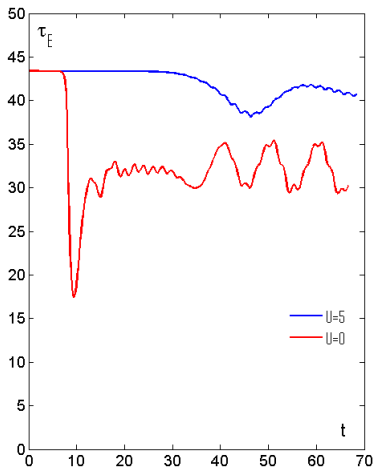
Эволюция потенциала и давления при $H = 10$, с или без дрейфовых эффектов.

Деградация удержания с КЛР значительно меньше.

Дрейфовые (КЛР) эффекты в КН



Ширина слоя от времени.



Время удержания от времени.

Желобковая неустойчивость

Осесимметричные магнитные ловушки имеют магнитный бугор на оси, и поэтому неустойчивы относительно желобков (если не применены стабилизаторы). Дизайн ГДЛ включает в себя расширители, а GAMMA-10 - квадрупольные ячейки min-B . Оказывается, эти устройства, заметно снижающие общую эффективность системы, можно заменить или дополнить драйвером вихря (так ГДЛ может работать без кривизны поля в расширителях.)



Уравнения

Дрейфово-желобковые моды можно описать той же системой, что и КН, надо только дополнить уравнение для вихря дивергенцией диамагнитного тока в неоднородном поле:

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta \varphi + \{\varphi, \Delta \varphi\} - U \nabla \cdot \{\nabla \varphi, P\} = \\ = H \cdot (\varphi - \varphi_w) + \nu_{\perp} \Delta^2 \varphi - \nu_{\parallel} \Delta \varphi - U \Delta S_p + \kappa \{P, r^2\},\end{aligned}$$

$$\partial_t P + \{\varphi, P\} = \nu_{\perp}^p \Delta P - \nu_{\parallel}^p P + Q_p.$$

Здесь κ описывает среднюю кривизну, $\kappa_{GDT} \approx 0 \dots 3$, r - радиус в среднем сечении (поточковая координата).



Усреднение вдоль силовой линии

Усреднение можно определить на основе $\varphi = \text{const}$ и $BR^2 = \text{const}$, и поэтому $\tau = \text{const}$ на каждой силовой линии. Источники завихренности при турбулентности в сильно неоднородном поле описаны Пастуховым в *Plasma Phys. Rep.* **31**, 577 (2005). Мы, однако, ими пренебрежём, так как связь со стеночными потенциалами гораздо сильнее.

Для параксиального равновесия с низким β

$$\frac{1}{B(r, z)} \approx \frac{1}{B(0, z)} + \alpha(z) r^2,$$

и ЕСЛИ предположить $p(r, z) = p(r)g(z)$, с $\langle g \rangle = 1$, то $P = p/p(0)$, $U = p(0)/en\phi$ как и раньше, а

$$\kappa = 2U\Omega_i R^2 \tau \langle B(z)\alpha(z)g(z) \rangle.$$



Линейная теория без течения и КЛР

Без КЛР

$$\omega^2 \Delta \varphi + i\omega (H + \nu \Delta^2) \varphi - 2\kappa r P'_0 m^2 \varphi = 0,$$

так что в “локальном” приближении для $m > 1$:

$$\omega^2 + 2i\omega A + \Gamma^2 = 0,$$

$$\Gamma^2 = -2\kappa r^3 P'_0 > 0, \quad 2A_m = Hr^2/m^2 + \nu m^2/r^2.$$

Неустойчивость всегда есть при $\kappa > 0$,

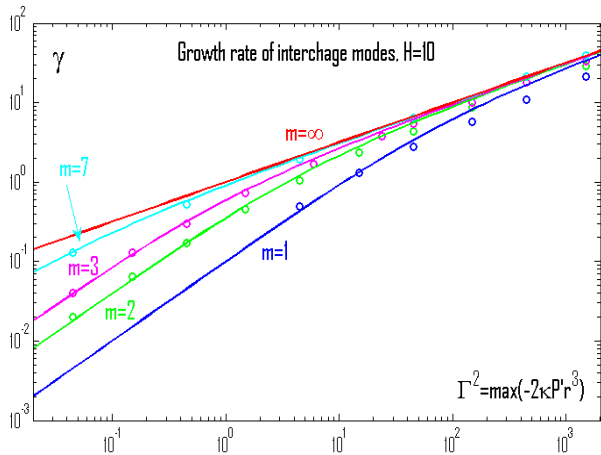
$$\gamma \leq \max_r \left(\sqrt{A_m^2 + \Gamma^2} - A_m \right) < \max_r \Gamma,$$

так как вязкость и line-tying только уменьшают инкремент.
Инкремент моды $m = 1$ равен

$$\gamma \leq \max_r (-2\kappa r P'_0 / H).$$



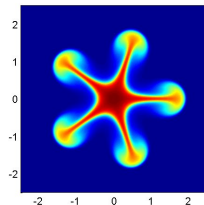
Режимы неустойчивости



Инкремент как функция кривизны. Если line-tying доминирует, $\gamma \propto \kappa m^2$, а с доминированием инерции - $\gamma \propto \sqrt{\kappa}$.

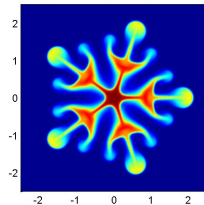
Нелинейная эволюция:

$P, H=10, \kappa=3, t=2.61$



Инерциальный режим

$P, H=300, \kappa=3, t=7.4$



Резистивный режим

Вихревое удержание

Предположим, что вихрь генерируется и КН - устойчив, а ширина течения много меньше радиуса. Если удержание действительно есть, то профиль давления должен быть гладким (без скачков).

Тогда, если радиальные смещения малы, $\xi_r \ll 1$, эволюция давления почти линейна, $\tilde{P} \approx -\xi_r P'_0$, а поэтому действие кривизны поля

$$f \cdot H \equiv \kappa \{P, r^2\} \approx -2\kappa P'_0 \partial_\theta \{\xi_r, r\}.$$

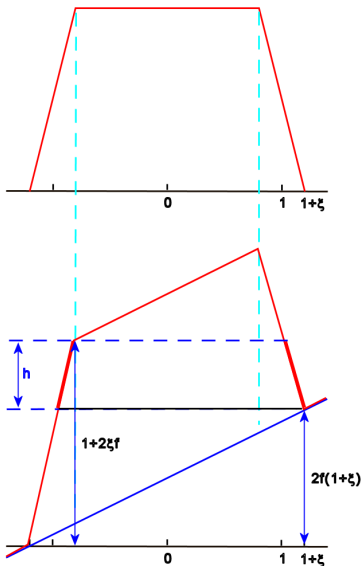
Оно может рассматриваться как “поперечный” ветер, сдувающий вихрь. Исследуем результирующее возмущение вихря с помощью уравнения для завихренности,

$$\partial_t \Delta \varphi + \{\varphi, \Delta \varphi\} = H \cdot (\varphi - \varphi_w(\mathbf{r}) + f(\theta)) + \dots,$$

и найдём ξ_r самосогласованно.



Вихревое удержание, $m = 1$



“Жёсткая” мода $m = 1$
генерирует квази-однородное поле,
 $f \cdot x$ (голубое), действующее на
вихрь (красный).

Линии тока в области $h > 0$
останутся замкнутыми (а плазма
удержится), если вихревой
потенциал превышает амплитуду
возмущения, $1 > 2f$.



Аналитические оценки

- При больших $H/f \gg 1$ и $\nu = 0$ в плоской геометрии есть стационарное решение:

$$\varphi_s = -f \cdot y + \begin{cases} (1/3)e^{2\lambda x}, & x < 0 \\ 1 - (2/3)e^{-\lambda x} \cos(\sqrt{3}\lambda x), & x > 0 \end{cases}$$

где

$$\lambda = (H/8f)^{1/3};$$

- At $f/\nu > (H/f)^{1/3}$, т.е., при

$$\nu < H^{-1/3} f^{4/3},$$

вязкой шириной можно пренебречь.



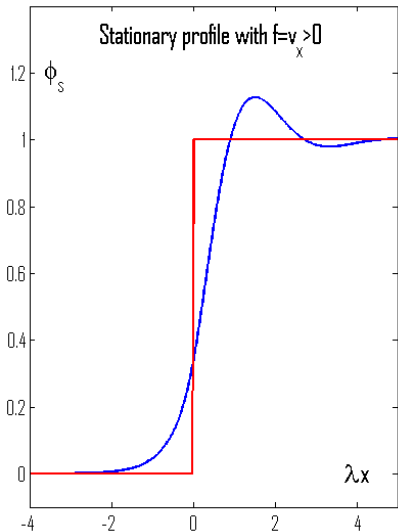
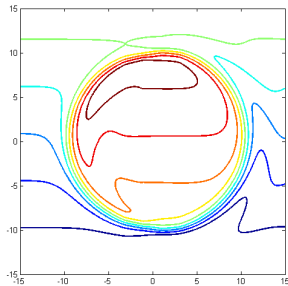
Стационарный профиль

Ширина слоя

$$\xi_d = \frac{\sqrt{3}}{4\lambda} e^{(\pi/6\sqrt{3})} \approx 1.17 \left(\frac{f}{H} \right)^{\frac{1}{3}},$$

а центр смещён из-за асимметрии на

$$\xi_r \approx \xi_d/3.$$



Оценки вихревого удержания

Критерий удержания

$$-\frac{2\kappa P'_0}{H} m \xi_r < 1.$$

Без эффектов КЛР наиболее неустойчива мода $m \approx 2\pi/\xi_w$, где $\xi_w \sim 3\xi_r$ - ширина слоя. Тогда условие существования “мёртвой зоны” течения -

$$\frac{\kappa}{H} < -\frac{1}{2P'_0 m \xi_r} \sim -\frac{3}{4\pi P'_0} \sim 0.2.$$

С эффектом КЛР только мода $m = 1$ неустойчива, так что

$$\frac{\kappa}{H} < -\frac{2H^{1/3}}{P'_0} \sim 2H^{1/3} \gg 0.2.$$

Оценки смещений

Для стационарной вращающейся структуры

$$\frac{d}{dt} \sim -i \left(\Omega - \frac{m}{\xi_w} \right) - f \frac{\partial}{\partial r},$$

так что $\Omega \approx m/\xi_w$ и

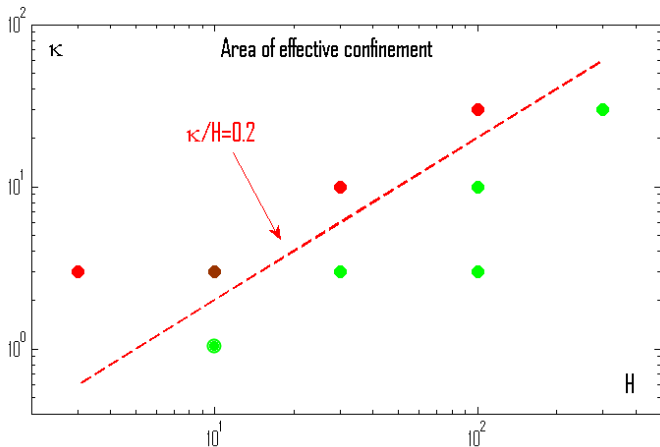
$$\xi_w^3 \sim \frac{f}{H} = -\frac{2\kappa P'_0}{H^2} m^2 \xi_r,$$

$$\xi_w \sim \left(-\frac{8\pi\kappa P'_0}{H^2} \right)^{1/4},$$

$$m \sim H^{1/2} \kappa^{-1/4}.$$



Область удержания (без КЛР)



$k = 3, H = 3$

$k = 3, H = 10$

$k = 3, H = 30$

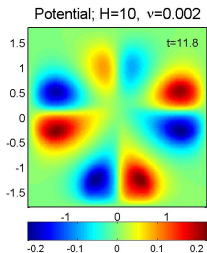
$k = 3, H = 100$

$k = 30, H = 300$

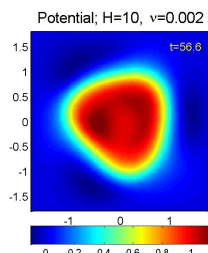
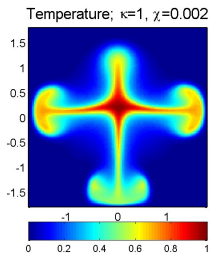
Зелёные точки - удержание, красные - большие потери. 2D-моделирование.



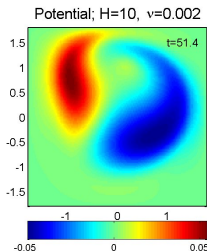
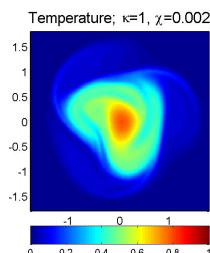
Моделирование при параметрах ГДЛ



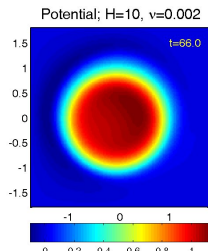
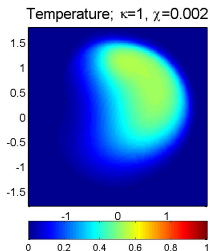
МГД



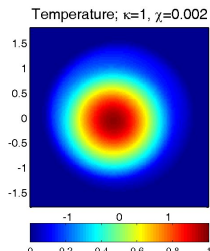
МГД с течением



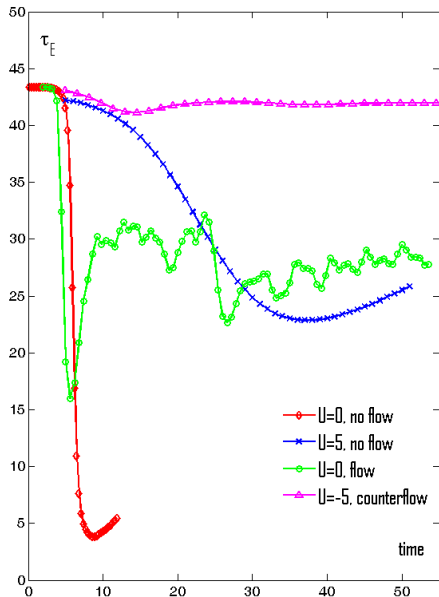
дрейфовая МГД ($U = 5$)



дрейфовая МГД ($U = -5$) с течением



Сравнение времени удержания



Энергетическое время для четырёх моделей удержания. $\tau_E = 50$ соответствует чисто продольным потерям в осесимметричном равновесии.

Вихревое удержание при сильном эффекте КЛР действительно эффективно и соответствует эксперименту.

Диамагнитное и $E \times B$ -вращение в разные стороны, как в эксперименте. Иначе потери выше из-за развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на $m = 2$.



Температурно-градиентная неустойчивость

Связь с торцом, которая до сих пор представлялась пассивной резистивностью, при наличии радиального градиента электронной температуры приобретает активную составляющую. Связь пассивна в системе отсчёта, которая вращается на $\omega_{H} \equiv c\varphi'_{H}/eBr$ медленнее плазмы. Отстающая волна оказывается неустойчивой.

Именно отставание по частоте является главным экспериментальным отличием температурно-градиентной неустойчивости от желобковой в условиях ГДЛ. Механизм раскачки, как и торцевая стабилизация, действует на низшие моды (кроме жёсткой моды $m = 1$).



Уравнения

Будем считать, что электронная температура неоднородна, а все нормировки сделаны на некоторую константу размерности температуры. Модель можно оставить двухпотенциальной, если считать, что второе уравнение описывает электронную температуру, а $P = NT_e$, где N - некоторая новая константа.

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \varphi + \{\varphi, \Delta \varphi\} - NU \nabla \cdot \{\nabla \varphi, T_e\} &= H \cdot (\varphi - \varphi_w - \varphi_{fl}(T_e)) + \\ &= +\nu_{\perp} \Delta^2 \varphi - \nu_{\parallel} \Delta \varphi - NU \Delta S_p + \kappa \{NT_e, r^2\}, \end{aligned}$$

$$\partial_t T_e + \{\varphi, T_e\} = \nu_{\perp}^p \Delta T_e - \nu_{\parallel}^p T_e + Q_p/N.$$



Линейная теория

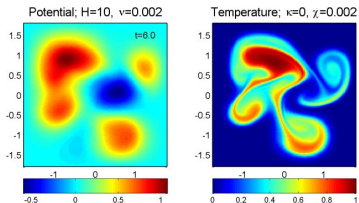
- Без учёта шири скорости вращения подробно изложена в диссертации Ю.Цидулко. В локальном приближении и без КЛР

$$(\omega - m\omega_E)^2 + iN(\omega - m\omega_E + m\omega_{Hf}) + \Lambda_g^2 = 0.$$

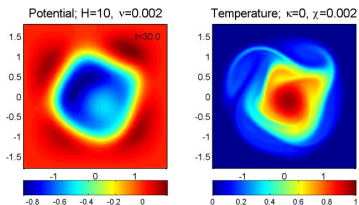
Из-за отставания по фазе тока со стенки от потенциала плазмы возникает неустойчивость. При большом N мода вращается на ω_{Hf} медленнее плазмы и желобковых и КН мод.



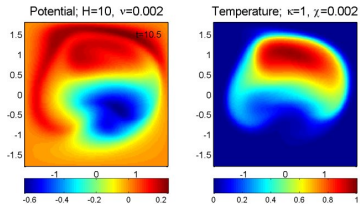
Температурная неустойчивость



МГД, $fl = 2$



МГД с течением, $fl = 0.5$



дрейфовая МГД $fl = 1, U = 5$



Выводы

- Создавая слой сдвигового течения в плазме, опирающейся на стык торцевых пластин, можно относительно просто и дёшево перейти в режим вихревого удержания. Если сдвиговой слой узкий, то он порождает неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и значительные конвективные потери. Увеличить ширину слоя можно профилированием потенциала стенки.
- Ионная гировязкость (эффект КЛР) является существенным элементом улучшенного вихревого удержания, наблюдаемого в ГДЛ. Гировязкость стабилизирует желобковые моды с $m > 1$, а мода $m = 1$ обладает относительно малой скоростью роста из-за хорошей связи с торцом. Кроме того, стабилизируется и неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, особенно в режиме с встречным вращением. Показано, что в таком режиме расчётное время удержания плазмы с горячими ионами определяется продольными потерями.



Выводы

- Температурно-градиентная неустойчивость оказалась довольно неприятной и требует дальнейших исследований. Для вихревого удержания требуется, чтобы перепад потенциала на торце превышал полный перепад амбиполярного потенциала.
- Возможно стоит делать торцы из изоляторов с тонкими кольцами электродов?

