Лабораторная работа 1.1

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Цель работы: исследование движения взвешенных в эмульсии броуновских частиц; определение коэффициента диффузии.

Оборудование: экспериментальная установка, включающая совмещенный с видеокамерой микроскоп и дисплей (телевизор), датчик временных интервалов, микрокювета с эмульсией (слабый водный раствор туши, гуаши, молока и т.п.) и объект-микрометр.

Содержание

1. Введение

Броуновское движение открыл в 1827 г. английский ботаник Роберт Броун (R. Brown). Изучая объекты под сильным микроскопом, он заметил, что мельчайшие частицы цветочной пыльцы пляшут в его поле зрения, как будто живые существа. Позднее было доказано, что мелкие частицы движутся под действием хаотических соударений окружающих молекул. Предсказать положение частицы через определенное время нельзя. Тем не менее, оказывается, можно найти некоторые усредненные характеристики движения, которые связывают движение частицы с молекулярной структурой вещества [1, 2]. Эту задачу впервые решили в 1905-1906 годах А. Эйнштейн и польский физик М. Смолуховский.

2. Теоретическая часть

2.1 Вывод выражения для описания броуновского движения

Найдем, насколько меняется положение частицы в жидкости за время, во много раз большее, чем промежуток времени между ударами. В результате неполной компенсации ударов молекул на броуновскую частицу действует результирующая сила F. Кроме того, на нее на нее действует сила трения $f_{тр}$, вызванная вязкостью среды и направленная против F. При малых скоростях υ сила трения $f_{тр} = \upsilon/\mu$, где μ — коэффициент подвижности частиц. Для сферических частиц радиуса a сила трения может быть выражена формулой Стокса $f_{тр} = 6\pi\eta a v$, где η –коэффициент вязкости жидкости (газа). Величину μ можно определить экспериментально. Например, мы можем изучить падение частицы под действием силы тяжести. Тогда известно, что сила равна mg, а μ — это окончательно установившаяся скорость падения, делённая на mg. Или можно поместить частицу в центрифугу, или приложить электрическое поле, если частица заряжена. Таким образом, μ — это измеряемая величина. Тогда уравнение движения под действием внешней силы выглядит так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - \frac{1}{\mu}\frac{dx}{dt}\,. \qquad (1)$$

Из соображений симметрии ясно, что среднее смещение будет равно нулю. Не будет, однако, равно нулю среднее значение квадрата смещения $\overline{x^2}$. Преобразуем уравнение (1) так, чтобы в него входила величина $\overline{x^2}$. Если умножить уравнение движения (1) на x, то получим

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = xF - \frac{x}{\mu}\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Используя очевидные тождества

$$x\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2\left(x^2\right)}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \quad \text{и} \qquad x\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2\left(x^2\right)}{dt^2}$$

выражение (2) приводится к виду:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2\left(x^2\right)}{dt^2} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = xF - \frac{1}{2\mu}\frac{d\left(x^2\right)}{dt} \tag{3}$$

Это выражение верно для любой частицы. Если произвести усреднение по большому числу частиц, то можно заметить, что $\overline{xF} = 0$, так как x и F одинаково часто принимают положительные и отрицательные значения. В результате получаем уравнение

$$\frac{m}{2}\frac{d^2\overline{x^2}}{dt^2} - m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -\frac{1}{2\mu}\frac{d\overline{x^2}}{dt} \tag{4}$$

Учтем также, что $m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = kT$, где k — постоянная Больцмана, T — температура. Введя обозначение $\frac{d\overline{x^2}}{dt} = Z$, получаем:

$$m\frac{dZ}{dt} - 2kT + \frac{Z}{\mu} = 0. \tag{5}$$

После разделения переменных уравнение (5) преобразуется к виду:

$$\frac{dZ}{Z - 2\mu kT} = -\frac{dt}{m\mu} \tag{6}$$

Отсюда

$$\frac{d\left(\overline{x^2}\right)}{dt} = 2\mu kT\left(1 - e^{-\frac{t}{m\mu}}\right). \tag{7}$$

За время $t >> \mu m$ второе слагаемое становится пренебрежимо малым, и мы получаем

$$\overline{\Delta x^2} = 2\mu kTt \tag{8}$$

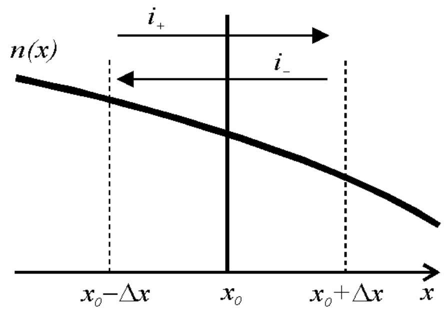
или

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{kT}{3\pi\eta a}\Delta t. \tag{9}$$

Таким образом, зная температуру, коэффициент вязкости и размер частиц можно найти постоянную Больцмана k. Почему так важно определить точное значение k? Потому что по закону $PV = RT$ для моля можно измерить R, которое равно произведению числа атомов в моле на k. Таким образом, одно из самых ранних определений числа атомов свелось к изучению движения мельчайших соринок в жидкости.

2.2. Связь броуновского движения с диффузией

Вывод закона Эйнштейна легко показать ещё и на примере диффузии — взаимного проникновения соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц вещества. Диффузия происходит в направлении уменьшения концентрации вещества и ведёт к его равномерному распределению по занимаемому объёму. Пусть в некотором объёме жидкости или газа находятся посторонние частицы и их плотность $n(x)$ меняется только в некотором направлении x (рис. 1). Пусть каждая частица за время τ между двумя



столкновениями смещается с равной вероятностью вправо или влево на расстояние Δx. Через плоскость $x = x_0$ в положительном направлении (слева направо) за время τ пройдёт половина тех частиц, которые испытают столкновения в слое от $x_0 - \Delta x$ до x_0, другая половина пойдёт после столкновений налево. Считая, что $n(x)$ мало меняется на расстоянии Δx, так что $n(x) = n(x_0) + (\partial n/\partial x)\cdot(x - x_0)$, получим, что односторонний поток слева равен

$$i_+ = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0} \frac{1}{\tau} n(x)dx = \frac{1}{2}\left[n(x_0) - \frac{\partial n}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\frac{\Delta x}{\tau}. \tag{10}$$

Аналогично получим односторонний поток справа:

$$i_- = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} \frac{1}{\tau} n(x)dx = \frac{1}{2}\left[n(x_0) + \frac{\partial n}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\frac{\Delta x}{\tau}. \tag{11}$$

Диффузионный поток возникает из-за отсутствия баланса левого и правого потоков $i = i_+ - i_-$; он равен

$$i = -\frac{(\Delta x)^2}{2\tau}\frac{\partial n}{\partial x}. \tag{12}$$

С другой стороны поток пропорционален градиенту концентрации и может быть записан как

$$i = -D\frac{\partial n}{\partial x} \tag{13}$$

Эта зависимость была открыта в 1855 году немецким учёным А. Фиком (A. Fick) и называется законом Фика. Сравнивая выражения (12) и (13) видим, что

$$\overline{\Delta x^2} = 2\,D\,\tau. \tag{14}$$

Сравнивая (14) с (8) находим связь между подвижностью μ и коэффициентом диффузии D:

$$D = \mu kT. \tag{15}$$

Экспериментальная проверка справедливости закона Эйнштейна (8) для описания броуновского движения является предметом настоящей работы.

3. Экспериментальная часть

3.1. Наблюдение броуновской частицы

Препарат для исследования представляет собой эмульсию со взвешенными броуновскими частицами размером в несколько микрон (слабый раствор красителя или молока в дистиллированной воде). На предметное стекло наносите каплю эмульсии, накрываете покровным стеклом, включаете телевизионную часть установки и настраиваете микроскоп. С помощью ручки грубой настройки микроскопа объектив опускается почти до соприкосновения с покровным стеклом. Эту операцию, чтобы не разбить стекло, следует делать осторожно. Затем с помощью микровинта тонкой настройки микроскопа поднимают объектив, наблюдая картину на экране телевизора. Поднятие осуществляется до тех пор, пока не исчезнет последнее четкое изображение. После этого медленно опускаем объектив с помощью микровинта до получения резкого изображения частиц и царапин на верхней поверхности покровного стекла. При продолжении опускания рисунок размывается и следующая резкая картинка будет соответствовать нижней поверхности покровного стекла и движущимся вплотную к ней броуновским частицам. Очевидно, для наблюдений следует выбрать частицы еще более глубоких слоев эмульсии, чтобы на их движение не влияли силы трения о поверхность стекла.

Добиваетесь того, чтобы на экране телевизора было отчетливо видно несколько подвижных частиц. Убеждаетесь, что броуновские частицы двигаются лишь под воздействием молекул воды, а не взаимодействуют друг с другом (в противном случае уменьшите плотность раствора). Необходимо внимательно рассмотреть движение частиц, убедиться в хаотичности их движения. Кроме хаотичного движения частиц обычно наблюдается их направленное движение, которое попытайтесь минимизировать.

Укрепляете на экране телевизора целлофановую пленку, которая удержится за счет статического заряда, и включаете счётчик интервалов времени. Отмечаете на пленке положение одной частицы через равные промежутки времени. Интервал времени выберите такой, чтобы успевать проставлять номера точек и чтобы частица за время 30 – 40 последовательных "шагов" не топталась на месте, но и не сместилась за пределы экрана. Зарисуйте контур броуновской частицы и определите ее размер.

Пленка с точками, отражающими положение броуновской частицы через интервалы времени в одну, или, если не успеваете, то две секунды или десять секунд, является основным экспериментальным материалом. Необходимо иметь не менее шести траекторий движения броуновских частиц как можно более близкого размера с достаточно большим количеством измерений положения (~ 30).

Также зарисуйте траекторий броуновских частиц, отличающихся в размере.

Для определения необходимого в дальнейшем увеличения системы микроскоп-телевизор поместите на предметном столике микроскопа стеклянную пластинку с нанесёнными через 0,01 мм параллельными рисками и измерьте расстояние между рисками на экране телевизора.

3.2. Обработка результатов

Для обработки результатов измерений удобно воспользоваться предлагаемой ниже таблицей (τ – временной интервал регистрации положения точек). Из начальной точки движения каждой частицы постройте декартовую прямоугольную систему координат.

Занесите во второй столбец таблицы данные о проекции положения частицы на выбранную ось, н-р, x. В третий столбец внесите значения смещений через промежуток времени τ, определяемый как разницу положений между соседними точками. В следующий столбец внесите вычисленные значения квадрата смещений. Определите $\overline{\Delta x}$ и $\overline{\Delta x^2}$ и запишите их внизу таблицы. Оцените точность их определения. Затем проделайте то же самое для промежутка времени 2τ, определяя значения Δx последовательно между точками 1-3, 2-4, 3-5, и т. д. Проделайте данную процедуру для нескольких времен (не менее десяти).

Траектория № 1. Координата x.									
№ точки	положение вдоль x	τ		2τ		3τ		и. т. д.	
		Δx	Δx^2						
1									
2									
3									
4									
5									
и т.д.									
Средние значения									

Если вы видите, что $\overline{\Delta x}$ всегда одного знака и линейно растет со временем, вероятно у вас присутствует направленный поток жидкости. Вам необходимо оценить скорость направленного потока и вновь заполнить скорректированную таблицу, прибавляя к смещению Δx (или отнимая) постоянную величину, равную произведению потоковой скорости на промежуток времени. На выбор значения потоковой скорости обратите особое внимание, поскольку неправильное предположение может привести к странному результату при определении среднего квадрата смещения частицы за большие промежутки времени.

Далее перейдите к заполнению таблицы для координаты y траектории № 1. Затем проделайте аналогичные вычисления с занесением в таблицу для других траекторий.

Как нетрудно понять, данные вычисления трудоемки. Чтобы облегчить вычисления постарайтесь их провести воспользовавшись, например, Microsoft Excel или Mathcad. Сделайте так, чтобы вам приходилось заносить в таблицу только данные о проекции положения частицы и оцененную вами потоковую скорость, а все вычисления и построение графика производились на компьютере.

4. Задания

- Постройте зависимости $\overline{\Delta x^2}$ и $\overline{\Delta y^2}$ от времени (τ, 2τ, 3τ, … ~ $0{,}8 \cdot N \cdot \tau$, где N – количество точек на траектории движения броуновской частицы). Используйте максимально возможный диапазон времени. Через полученные значения с учётом их точности проведите линии. Проверьте справедливость закона Эйнштейна описания движения броуновсих частиц. Определите коэффициент диффузии D, построив по экспериментальным точкам прямую методом наименьших квадратов.

- Измерьте размер наблюдаемой броуновской частицы. Сравните его со значением, полученным из следующих соображений. Диффузионное движение частицы в жидкости можно рассматривать как движение с трением. К нему применимо второе соотношение Эйнштейна: $D = \mu kT$, вывод которого мы уже проделали. Если частицы сферически симметричны, то подвижность $\mu = (6\pi\eta a)^{-1}$, где η — коэффициент вязкости жидкости (у воды при температуре 20°C η = 0,001 кг м$^{-1}$ с$^{-1}$ [3, стр. 458][1], a — радиус частицы. Определите радиус частицы и сравните с результатом прямого измерения.

- Убедитесь, что подвижность частиц μ обратно пропорциональна радиусу частиц.

5. Литература

1. И. К. Кикоин и А. К. Кикоин. Молекулярная физика, Наука, 1976.
2. Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Феймановские лекции по физике. М.: Мир, 1976. Том 4.
3. Х. Кухлинг. Справочник по физике: Пер. с нем. 2-е изд. М.: Мир, 1985.
4. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. акад. И. К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976.

[1] Учтите, что в [4, стр. 281] допущена опечатка в значении η.