

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

В. И. Тельнов

**МЕХАНИКА
И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Учебное пособие

Новосибирск
2015

УДК 530.12(075.8)
ББК 22.2 22.313
Т318

Рецензент:
д-р физ.-мат. наук, проф. В. Г. Сербо

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы, рекомендовано к изданию Ученым советом физического факультета НГУ.

Т318 Тельнов, В. И.

Механика и теория относительности: учеб. пособие / В. И. Тельнов; Новосибир. гас. ун-т. – Новосибирск, РИЦ НГУ, 2015. – 283 с.

ISBN 978-5-4437-0439-5

Учебное пособие соответствует курсу лекций, читаемых автором на физическом факультете Новосибирского Государственного университета. Книга содержит изложение физических основ как нерелятивистской, так и релятивистской механики в их современном понимании и предназначена тем, кто хочет в будущем заниматься научными исследованиями. Особое внимание уделяется природе основных законов физики, границ их применимости. После изложения базовых вопросов механики и теории относительности в книге рассмотрены традиционные разделы механики, элементы общей теории относительности и квантовой механики, завершается книга главой об устройстве Вселенной, строении вещества, темной материи и энергии.

Предназначено для преподавателей и студентов университетов, педагогических и технических вузов.

УДК 530.12(075.8)
ББК 22.2 22.313

ISBN 978-5-4437-0439-5

© Новосибирский государственный университет, 2015
© В. И. Тельнов, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ГЛАВА I ВВЕДЕНИЕ	8
§ 1. Задача физики. Механика, основные теории и области их применимости	8
§ 2. Сколько фундаментальных констант? Стандартная модель	9
§ 3. Загадки Вселенной	10
§ 4. Эталоны и системы единиц	12
ГЛАВА II НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА	15
§ 5. Пространство, время, системы координат	15
§ 6. Векторы	18
§ 7. Прямая задача кинематики, скорость и ускорение	20
§ 8. Обратная задача кинематики	24
§ 9. Ускорение при криволинейном движении	28
§ 10. Прямая задача кинематики в полярной системе координат	31
§ 11. Поворот твердого тела вокруг оси	32
§ 12. Инерциальные системы отсчета, принцип относительности	32
§ 13. Преобразование Галилея	33
ГЛАВА III РЕЛЯТИВИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА	35
§ 14. Максимальная скорость сигналов, постулаты Эйнштейна	35
§ 15. Одновременность, синхронизация часов, измерение расстояний	36
§ 16. Сохранение поперечных размеров, замедление хода движущихся часов	38
§ 17. Сокращение продольного размера движущегося тела	40
§ 18. Преобразование Лоренца	43
§ 19. Четырехмерный вектор события	46
§ 20. Интервал	47
§ 21. Преобразование Лоренца как вращение в 4-мерном пространстве	49
§ 22. Преобразование скоростей	51
§ 23. Аберрация	52
§ 24. Эффект Доплера	54
§ 25. Свойства 4-векторов, собственное время, 4-вектор скорости	58
ГЛАВА IV НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА	61
§ 26. Законы Ньютона	61
§ 27. Импульс	65
§ 28. Задача двух тел, приведенная масса	68
§ 29. Реактивное движение	70
§ 30. Работа и кинетическая энергия	72
§ 31. Консервативные (потенциальные) и неконсервативные силы	74
§ 32. Закон сохранения энергии	77
§ 33. Действие непотенциальных сил	81
§ 34. Электромагнитное и гравитационное взаимодействия, поле	83
§ 35. Классический радиус электрона, черные дыры	90
§ 36. Распады, упругие и неупругие столкновения частиц	92
§ 37. Упругие столкновения	94
§ 38. Закон сохранения момента импульса	97
§ 39. О происхождении законов сохранения энергии, импульса и момента импульса	98

ГЛАВА V	РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА.....	101
§ 40.	Релятивистский импульс	101
§ 41.	Релятивистская энергия	104
§ 42.	Четырехвектор энергии-импульса	109
§ 43.	Релятивистская сила	112
§ 44.	Релятивистская ракета	116
§ 45.	Упругие столкновения частиц	123
§ 46.	Распад частиц	126
§ 47.	Неупругие столкновения, пороги рождения частиц, встречные пучки	130
§ 48.	Магнитное поле.....	132
§ 49.	Сила Лоренца	136
§ 50.	Преобразование электрических и магнитных полей	137
§ 51.	Движение заряженной частицы в магнитном поле.....	138
§ 52.	Системы единиц электромагнитных величин	140
§ 53.	Мюонный коллайдер	142
ГЛАВА VI	ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ, КОЛЕБАНИЯ	143
§ 54.	Одномерное движение в потенциальном поле (нерелятивистское)	143
§ 55.	Малые, гармонические колебания	145
§ 56.	Решение уравнений с помощью комплексных чисел	150
§ 57.	Затухающие колебания.....	152
§ 58.	Вынужденные колебания	154
§ 59.	Параметрический резонанс	158
§ 60.	Адиабатический инвариант.....	159
ГЛАВА VII	ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ.....	163
§ 61.	Упругие среды.....	163
§ 62.	Волны в среде, модель с шариками.....	165
§ 63.	Скорость звука в упругой среде	165
§ 64.	Волновое уравнение.....	167
§ 65.	Волны в натянутой струне	169
§ 66.	Энергия в волне.....	170
§ 67.	Начальные условия	171
§ 68.	Столкновение стержней	171
§ 69.	Стоячие волны.....	173
ГЛАВА VIII	ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ	175
§ 70.	Общее решение для движения в центральном поле	175
§ 71.	Кеплерова задача.....	181
§ 72.	Полеты в космос.....	188
§ 73.	Средние потенциальные и кинетические энергии, теорема о вириале	193
§ 74.	Астрофизические следствия теоремы о вириале.....	195
§ 75.	Влияние солнечной радиации на движение малых тел	196
§ 76.	Модель расширяющейся Вселенной, критическая плотность	198
§ 77.	Рассеяние частиц.....	200
§ 78.	Рассеяние на сфере.....	201
§ 79.	Резерфордское рассеяние на малые углы.....	202
§ 80.	Формула Резерфорда	204
ГЛАВА IX	ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА	208
§ 81.	Твердое тело, система координат, угловая скорость, ось вращения	208
§ 82.	Кинетическая энергия и момент импульса вращающегося тела	210

§ 83. Главные оси вращения, главные моменты инерции тела	213
§ 84. Теорема Гюйгенса – Штейнера.....	215
§ 85. Уравнение движения твердого тела	217
§ 86. Примеры динамики вращательного движения.....	218
§ 87. Гироскопы.....	221
§ 88. Элементы статики	223
ГЛАВА X ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ .	228
§ 89. Гидростатика	228
§ 90. Стационарные течения, закон Бернулли.....	228
ГЛАВА XI ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.	233
§ 91. Неинерциальные системы отсчета. Неинерциальные силы	233
§ 92. Силы инерции во вращающейся системе отсчета.....	234
§ 93. Приливы.....	238
ГЛАВА XII ГРАВИТАЦИЯ, ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ	
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.....	242
§ 94. Введение	242
§ 95. Инертная и гравитационная масса, принцип эквивалентности	244
§ 96. Падение фотона в гравитационном поле	247
§ 97. Замедление времени в гравитационном поле	248
§ 98. Область применимости классических законов движения в гравитационных полях	249
ГЛАВА XIII ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	250
§ 99. Введение, волновые свойства частиц.....	250
§ 100. Размер атома.....	251
§ 101. Время падения вертикально стоящего карандаша.....	252
ГЛАВА XIV СОВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ВСЕЛЕННОЙ	254
§ 102. Введение	254
§ 103. Физика элементарных частиц	256
§ 104. Вселенная.....	268
§ 105. Заключительные замечания	282

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие соответствует программе курса «Механика и Теория относительности», читаемого на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Курс читается в первом семестре на первом курсе, что предъявляет к нему особые требования, обеспечивающие возможность усвоения достаточно сложного материала студентами с различным уровнем начальной школьной подготовки. Программа составлена так, что предполагается лишь знание элементарной математики, все остальное дается по ходу обучения.

Механика является базовым курсом физики, формирующим физическое мышление и обеспечивающим успешное усвоение последующих, более специальных, разделов физики. Преподавание на физическом факультете НГУ с самого начала было нацелено на подготовку научных кадров самого высокого уровня. Именно в Новосибирске в 1960-х гг. впервые были созданы ускорители со встречными электрон-позитронными пучками, что нашло отражение в программе курса механики, который с самого начала включал в себя специальную теорию относительности.

Курс состоит последовательно из следующих разделов: нерелятивистская кинематика, релятивистская кинематика, нерелятивистская динамика, релятивистская динамика, колебания и волны, движение в центральном поле, движение твердого тела, элементы гидродинамики идеальной жидкости, неинерциальные системы отсчета, элементы общей теории относительности и квантовой механики, современное представление о строении материи и вселенной.

Последние главы добавлены, чтобы после усвоения первого классического раздела физики студенты познакомились с передним краем науки. Благодаря работе физиков удалось многое узнать о мире, в котором мы живем, но еще больше остается непонятным и интригующим, требующим дальнейших исследований и новых идей. После данного экскурса у студентов не останется сомнений, что выбранная ими специальность является самой интересной и этому можно посвятить всю жизнь.

Для освоения физики нужно иметь в виду, что физика – это наука, которая пытается описать все многообразие явлений минимальным количеством постулатов (законов природы). Поэтому при ее изучении нужно выстраивать получаемые знания в логическую цепочку. Очень важно разобраться в происхождении и сути основных базовых законов

физики, их совсем немного, но именно их открытие и осмысление является основной задачей физики. Из этих законов вытекают очень интересные и нетривиальные следствия, представляющие целые разделы физики.

Следует также иметь в виду, что для освоения очередного раздела физики недостаточно прочесть то, что написано в учебнике. Наш мозг устроен так, что для того чтобы материал усвоился и активизировался, необходимо слушать лекции, читать учебники, решать задачи на семинарах и дома, делать все, чтобы не оставалось непонятных вопросов. Как и в любой специальности, будь то музыканта или токаря, нужна практика. Для того чтобы стать физиком, нужно не только усвоить определенный материал, а еще и развить способности видеть суть явлений, ставить новые задачи и получать новые знания.

В данном пособии нет задач, рассматриваются только примеры, необходимые для понимания материала. Рекомендуемый задачник: «Задачи по механике и теории относительности» под редакцией В. И. Тельнова (авторы Т. Д. Ахметов, А. В. Болеста, Ф. А. Еманов, А. С. Руденко, В. И. Тельнов, А. А. Шошин), соответствующий программе данного курса.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Задача физики. Механика, основные теории и области их применимости

Физика – это наука, целью которой является познание природы окружающего нас мира на самом глубоком уровне. Основные вопросы можно сформулировать так: как возникла и эволюционировала Вселенная; из чего она состоит, какие есть виды материи; как устроена материя, какие есть виды взаимодействия, каковы законы движения; почему так устроен мир? Эти вопросы волнуют любого человека (и даже, наверное, любое живое существо). Кроме чисто фундаментальных задач физики занимаются также применением знаний для нужд человечества. Мы живем в мире техники, которая придумана и создана в основном физиками.

Данный курс, «Механика и Теория относительности», посвящен рассмотрению законов движения. Он идет в программе самым первым, и можно считать, что является самым важным. Физика как наука началась с механики, с Галилея, Ньютона. В начале 20 в. работы Эйнштейна и других привели к созданию так называемой *специальной теории относительности*, которая является расширением ньютоновской механики на область больших скоростей. Была осознана связь пространства и времени, открыт путь к новым методам получения энергии в процессах слияния и деления ядер. Установленная связь между энергией и массой открыла путь к созданию ускорителей частиц, с помощью которых удастся рождать из чистой энергии новые элементарные частицы, новые виды материи, изучать их, открывать новые законы природы. Обо всем этом пойдет речь в данном курсе.

Мир устроен очень сложно. В конце 19 в. казалось все проще. Но в начале 20 в. появились *теория относительности*, *квантовая механика*. Оказалось, что механика Ньютона не работает при больших скоростях, ее пределы применимости $v \ll c$. А. Эйнштейн (1905 г.) расширил ее до любых скоростей ($v \leq c$).

Однако выяснилось, что и механика Ньютона – Эйнштейна имеет предел применимости, она не работает на малых расстояниях, точнее при $mvr < \hbar$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ (система СГС) – постоянная Планка. Устройство атома полностью определяется квантовой механикой. Час-

тицы обладают волновыми свойствами ($\lambda = 2\pi\hbar/p$ – длина волны Де Бройля) и испытывают дифракции. При пролете частицы через щель угол отклонения $\theta \sim \hbar/pd$, где p – импульс частицы, d – ширина щели. Для электрона ($m = 9 \cdot 10^{-28}$ г), пролетающего через щель шириной 1 см со скоростью 1 см/с, угол отклонения составляет порядка одного радиана, т. е. его движение нельзя описывать классической траекторией. Такие законы, как сохранение импульса и энергии, работают и на малых расстояниях. Квантовая механика позволила объяснить строение атомов и молекул.

§ 2. Сколько фундаментальных констант? Стандартная модель

У физиков есть мечта объяснить (описать) природу с помощью минимального количества постулатов и фундаментальных констант, таких как c , e , \hbar , G (скорость света, заряд электрона, постоянная Планка, гравитационная постоянная). Их уже достаточно, чтобы составить формулу с размерностями грамм, сантиметр, секунда, т. е. через них может быть выражена любая физическая величина. Однако величина массы, *масса Планка*, получаемая из этих констант, $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2 \cdot 10^{-5}$ г, что в 10^{19} раз больше массы протона. Совсем неочевидно, что это та масса, через которую должны выражаться массы элементарных частиц.

К настоящему времени открыты следующие фундаментальные частицы: 6 кварков, 6 лептонов, 5 бозонов (переносчиков взаимодействий), но мы не знаем, почему их столько, не умеем рассчитывать их массы и даже их отношения. Имеется теория, *Стандартная модель*, которая описывает взаимодействия и превращения всех известных частиц, однако она содержит около трех десятков дополнительных констант (с учетом масс частиц), которые найдены экспериментально. Нет сомнения, что когда-нибудь будет создана теория, которая позволит уменьшить их количество.

Стандартная модель элементарных частиц предполагает, что массы у частиц возникают за счет взаимодействия с неким полем, заполняющим всю Вселенную. Квантом такого поля является бозон Хиггса. Эта гипотеза возникла еще в 60-х гг. прошлого века. И что удивительно,

так и оказалось: хиггсовский бозон с нужными свойствами был найден в 2012 г. на Большом адронном коллайдере в Женеве.

Современные ускорители со встречными пучками, коллайдеры (от collide – сталкиваться), позволяют рождала частицы с массой в тысячу раз больше массы протона. Они являются своеобразными микроскопами и позволяют «разглядеть», что происходит на расстояниях до 10^{-18} см. Предельные энергии, соответствующие массе Планка, $E_p = M_p c^2$, в 10^{15} раз больше достигнутой на ускорителях, а соответствующие расстояния на 15 порядков меньше, чем можно разглядеть с помощью самого современного ускорителя. Планковские энергии никогда не будут достигнуты на ускорителях, но о том, что происходит при таких энергиях, можно узнать косвенно. Например, некоторые теории предсказывают, что за счет явлений при Планковских энергиях протон становится нестабильной частицей. Пока же экспериментально установлено, что время жизни протона больше, чем 10^{34} лет (в 10^{24} раз больше времени жизни Вселенной). Эти данные закрыли некоторые теории.

§ 3. Загадки Вселенной

Если обратить взгляд на большие расстояния, на всю Вселенную, то загадок еще больше. Из наблюдений следует, что Вселенная расширяется и это расширение началось примерно 13 млрд лет назад. Как это произошло, что было до этого – пока непонятно. Однако за последние 10–15 лет в космологии сделаны потрясающие открытия, поступающие данные настолько информативные, что есть надежда понять первые мгновения жизни Вселенной. Измерена средняя плотность Вселенной, она составляет 10^{-29} г/см³, отсюда следует, что все известные формы материи (протоны, электроны и т. д.) составляют всего около 5 %. Еще 25 % – это какая-то невидимая форма материи, *темная материя*, это какие-то частицы, способные концентрироваться там же, где и обычная материя. В галактиках темной материи в 5–6 раз больше, чем обычной. Большую часть плотности Вселенной, примерно 70 %, составляет вообще нечто непонятное, вызывающее антигравитацию на больших масштабах. За счет этого расширение Вселенной не замедляется, как ожидалось, а наоборот, ускоряется. Эту субстанцию называют *темной энергией*. Темная энергия ведет себя так, как будто это вакуум с ненулевой плотностью. Два тела, помещенные на достаточно большое расстояние, будут удаляться с ускорением за счет действия антигравитационных свойств темной энергии.

Как возникла Вселенная, что было до этого – пока не ясно, но дальнейшие детальные наблюдения могут помочь ответить на этот вопрос.

Другое непонятное явление – почти полное отсутствие антивещества (антиматерии) во Вселенной. Предполагается, что вначале материи и антиматерии было поровну, но сейчас осталась почему-то только одна материя (протоны, нейтроны, электроны). Не будь нарушения симметрии в природе между материей и антиматерией – все бы проанигилировало, остались бы одни фотоны. Вообще, если бы константы были немного другими, то не было бы ни атомов, ни нас с вами.

Еще один важный результат – оказывается, Вселенная плоская, т. е. два параллельных луча света никогда не пересекутся или сумма углов в треугольнике равна 180° . То, что на малых расстояниях это так, знали давно, но сейчас проверено, что это так до расстояний, сравнимых с размером видимой Вселенной. Этот размер составляет примерно скорость света, умноженную на время жизни Вселенной, т. е. около 10^{28} см. Определить геометрию Вселенной и найти ее среднюю плотность удалось путем изучения маленьких (10^{-5}) температурных неоднородностей в распределении реликтового излучения по небесной сфере.

Поведение Вселенной на больших масштабах определяется гравитационными силами. Если гравитационная потенциальная энергия тел мала по сравнению с mc^2 , то гравитационные взаимодействия можно описывать ньютоновским законом всемирного тяготения. В противном случае для нейтронных звезд, черных дыр и для описания расширения Вселенной используется *общая теория относительности* Эйнштейна (1916 г.).

Таким образом, современная физика изучает пространственные масштабы от 10^{-18} см до 10^{28} см, скорости от нуля до скорости света, гравитационные поля от слабых до сверхсильных. Для описания динамики явлений при соответствующих условиях используются ньютоновская механика, специальная теория относительности (которые мы будем изучать), а также квантовая механика и общая теория относительности. Можно, конечно, использовать квантовую механику для описания движения пушечного ядра, но это слишком сложно, при этих условиях прекрасно работает и ньютоновская механика.

Что еще важно для курса Механики из области Большой физики? Наш мир трехмерный, и его можно описывать евклидовой геометрией (что не работает вблизи плотных астрономических объектов). Мы так привыкли к этому, что даже не задумываемся. А могло бы быть и не так! Сейчас теоретики, пытающиеся построить общую теорию мироздания, оперируют с размерностями пространства более 10. В соответ-

ствие с их гипотезой мы не видим эти дополнительные размерности, поскольку максимальная длина в этих направлениях для света и других частиц очень маленькая, но предполагается, что гравитационные взаимодействия свободно распространяются в пространстве с размерностью больше, чем три. Это, конечно, пока только непроверенные гипотезы.

Даже первый закон Ньютона совершенно очевиден. Со времен Архимеда считалось, что тела движутся только тогда, когда к ним приложена сила, что логически возможно. Галилей доказал, что это не так: он сформулировал закон инерции, в соответствии с которым свободное тело в любой инерциальной системе движется прямолинейно с постоянной скоростью. Но и Галилей не совсем прав. Как было упомянуто выше, темная энергия заставляет двигаться ранее покоящиеся относительно друг друга тела. Тем не менее на масштабах меньше галактических эти эффекты малы и в земных условиях мы можем использовать механику Ньютона – Эйнштейна, предполагающую существование инерциальных систем отсчета.

§ 4. Эталоны и системы единиц

Для измерений физических величин используются линейки, часы, весы, вольтметры, амперметры и множество других приборов. Для калибровки приборов нужны *эталон*ы. Первичные эталоны должны быть максимально стабильными во времени. Необходимо также иметь способ сравнивать вторичные эталоны с первичными при высокой относительной точности.

Сколько всего нужно первичных эталонов? С точки зрения фундаментальной физики достаточно всего три эталона, например: расстояния (длины), времени и массы. Используя см, г, с, можно составить размерность любой другой величины. Именно такой подход используется в системе единиц СГС (Сантиметр-Грамм-Секунда).

Найдем, например, размерность электрического заряда. В системе СГС сила взаимодействия двух одинаковых зарядов $F = ma = \frac{e^2}{r^2}$. Размерность ускорения $[a] = \text{см}/\text{с}^2$, отсюда размерность заряда $[e] = \text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}$. Систему СГС, включающую электрические величины, называют СГСЭ.

Широко используется также система СИ (Система Интернациональная), которая принята в качестве основной большинством стран мира. Отличие СИ от СГСЭ состоит не только в том, что в первой ис-

пользуются килограммы и метры, а во второй граммы и сантиметры. Главное отличие состоит в том, что в системе СИ не три, а существенно больше эталонов. Это произошло впервые «историческим» причинам: некоторые эталоны, например единицу силы света *кандела* (до 1970 г. *свеча*), ввели потому, что в то время не представлялось возможным выразить силу света через более фундаментальные величины. Еще одна причина – это желание «упростить» формулы, используемые в технике. Это привело, в частности, к тому, что размерности электрического и магнитного поля в системе СИ различные, хотя это одно и то же электромагнитное поле. Одним словом, система СИ очень неудобная для физики, даже вредная. Тем не менее система СИ используется широко в технике и быту, а система СГСЭ – в физике (наряду с СИ) и особенно в теоретической физике.

В данном пособии, как и в большинстве университетских учебников, материал излагается в системе СГС и даются правила пересчета физических величин в систему СИ и обратно. К счастью, в механике все формулы выглядят одинаково в обеих системах единиц, разница появляется только при использовании законов электродинамики.

Итак, в СГС нужно всего 3 эталона. В течение истории эталоны многократно менялись. Выбор новых и более стабильных эталонов определялся уровнем развития техники. Современные эталоны представлены ниже.

Время

Одна секунда – это 9 192 631 770 периодов излучения цезия-133 (определенная линия излучения). Относительная точность 10^{-14} .

Длина

До недавнего времени один метр был равен расстоянию между двумя черточками на линейке из определенного сплава. Ввиду того, что скорость света одинакова во всех системах отсчета, в 1983 г. был введен новый эталон метра.

Один метр – это длина пути, проходимая светом за $1/299792458$ с. Поскольку скорость света вошла в определение эталона, то с данного момента считается, что она известна бесконечно точно, поэтому неопределенность длины такая же, как точность измерения времени.

Масса

С 1889 г. в качестве килограмма используется платиноиридиевый эталон. Однако атомы эталона теряются ($3 \cdot 10^{-8}$ массы за 100 лет), поэтому планируется сменить эталон массы на более стабильный. Это

может быть, например, некоторое количество атомов определенного сорта (атомы все одинаковы). Можно также привязать эталон массы к постоянной Планка. Действительно, mc^2 и $\hbar\omega$ имеют размерность энергии, для частоты есть эталон. Скорость света и постоянная Планка будут считаться точно известными (по определению), отсюда возникает эталон массы.

Как уже подчеркивалось, ко всем законам нужно относиться осторожно, они неточны при определенных условиях. Не исключено, что постоянная Планка и скорость света зависят от возраста Вселенной. Этот вопрос изучается, например, путем сравнения спектров атомов в лаборатории со спектром атомов от далеких звезд. До сих пор изменения фундаментальных констант во времени не обнаружено.

ГЛАВА II

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

§ 5. Пространство, время, системы координат

В этой главе мы будем рассматривать случай малых (нерелятивистских) скоростей, $v \ll c$. Классическая механика опирается на следующие представления, почерпнутые из эксперимента.

1. В мире существуют тела, движущиеся под действием сил. Задание сил и начальных условий определяет полностью поведение системы в любой последующий момент времени.

2. Все физические процессы происходят в пространстве и времени. Предполагаются следующие свойства пространства:

- равноправие всех точек пространства (однородность);
- равноправие всех направлений (изотропность);
- евклидовость (сумма углов в треугольнике равна π).

Предполагается, что во всем пространстве можно ввести единое время, текущее везде равномерно и одинаково. По умолчанию предполагается, что движение тел никак не влияет на свойства пространства и времени.

Тела состоят из материальных точек, т. е. тел, размерами которых при рассмотрении можно пренебречь. В природе существуют твердые тела, в которых относительное расположение точек остается приблизительно неизменным. Их этих твердых тел можно сделать линейки для измерения расстояния между точками, выбрав одну из них за единицу масштаба. Между двумя точками можно провести бесконечное число линий. Кратчайшая из них называется прямой, а ее длина – расстоянием.

Точки пространства сами по себе не могут быть помечены, они имеют смысл только по отношению к материальным телам. Для описания пространства нужно указать тело отсчета (или некоторое количество материальных точек, расстояние между которыми не изменяется). К этим телам можно прикрепить оси координат, а затем, используя жесткий масштаб (линейку), можно определить координаты любой точки. Координаты удаленных объектов можно найти также методом триангуляции, основанном на прямолинейном распространении света.

Совокупность тел, относительно которых определяется положение точек пространства, называется *системой координат*, а сами эти тела – *базисными*. Минимальное количество тел, равное количеству чисел, необходимых для однозначного задания положения точек в простран-

стве, называется *размерностью пространства*. Мы живем в трехмерном пространстве. Задание, например, расстояний до трех опорных точек задает координату в пространстве. Можно жестко за три точки закрепить декартову систему координат, тогда положение точки будет характеризоваться тремя числами (x, y, z) . Другие, наиболее популярные, системы отсчета – это цилиндрическая и сферическая системы координат.

Для описания движения тел в пространстве нужно к системе опорных тел (системе координат) добавить еще часы в каждой точке пространства. Часами может быть любой периодический процесс, слабо зависящий от внешних воздействий. В классической механике предполагается, что все часы в пространстве, независимо от движения, идут одинаково, однако это не так при больших скоростях. Система координат, снабженная часами, является *системой отсчета*.

Декартова (x, y) и полярная (r, φ) системы координат на плоскости изображены на рис. 1 и 2.

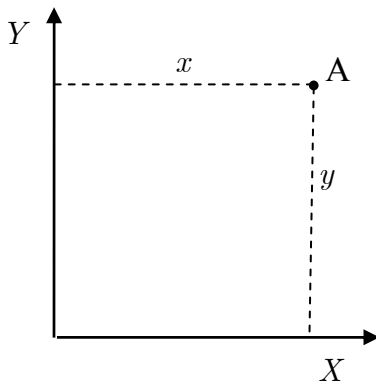


Рис. 1

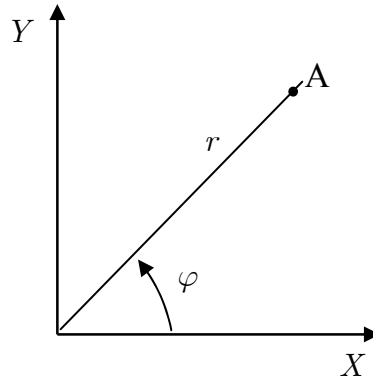


Рис. 2

Переход от декартовых координат к полярным и обратно дается формулами

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= r \sin \varphi & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Системы координат в пространстве, декартова (x, y, z) , цилиндрическая (r, φ, z) и сферическая (r, θ, φ) , показаны на рис. 3, 4 и 5.

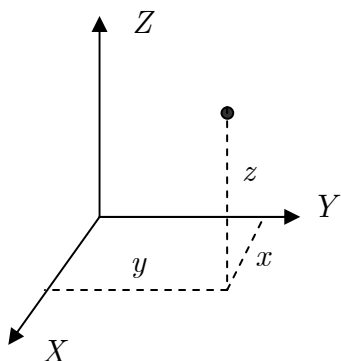


Рис. 3

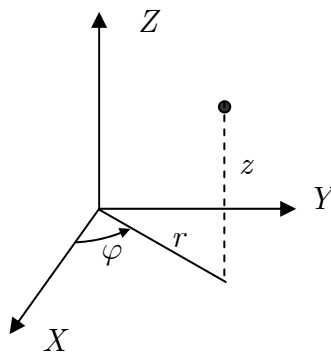


Рис. 4

Декартова система в пространстве бывает двух видов: правая и левая. В правой системе (рис. 3–5) направление оси Z находится по правилу буравчика (штопора): при вращении ручки штопора в плоскости XY от оси X к оси Y он будет вкручиваться в направлении оси Z .левой системе координат соответствует противоположное направление оси Z . Обычно используется правая система координат.

В сферической системе координат угол θ меняется от 0 до π , угол φ – от 0 до 2π . Справа от рис. 5 приведены формулы перехода сферических к декартовым координатам и обратно.

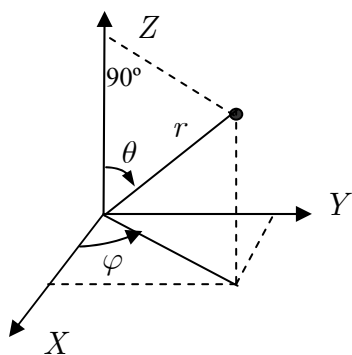


Рис. 5

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

§ 6. Векторы

Положение можно также задать *радиус-вектором* \vec{r} (или жирное \mathbf{r}) с началом в точке отсчета (O) и концом в рассматриваемой точке (A), рис. 6. Он имеет направление и длину $r = |\mathbf{r}|$.

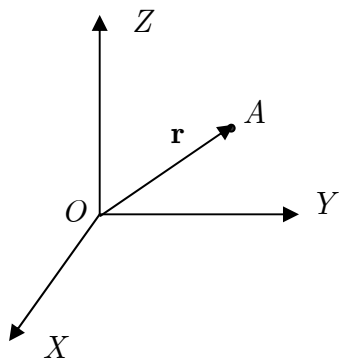


Рис. 6

В каждой системе координат имеется однозначная связь между радиус-вектором и координатами точки. При векторном описании координат нужна лишь точка отсчета.

Пример. Пусть точка имела координату \mathbf{r}_1 относительно точки O. Затем точка переместилась в точку \mathbf{r}_2 относительно исходного положения. Новый радиус-вектор относительно точки O будет $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$. Графическое построение (сложение векторов) показано на рис. 7.

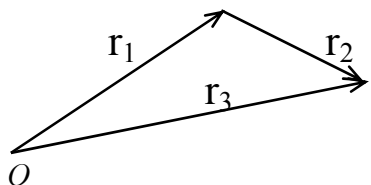


Рис. 7

Векторный характер имеет не только радиус-вектор, но и скорость, ускорение, сила, импульс и т. д. Многие законы

удобно записывать в векторном виде, получается более короткая запись, не нужно записывать уравнения по каждой проекции. Математически векторы могут быть представлены в виде строки с его компонентами в пространстве. Так, радиус-вектор

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad (6.1)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные вектора в направлении осей X, Y, Z . То же для вектора скорости

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \equiv \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z. \quad (6.2)$$

Пример. Пусть скорость одного тела равна \mathbf{v}_1 , второго – \mathbf{v}_2 . Чему равна их относительная скорость (рис. 8)?

По определению, относительная скорость

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1). \quad (6.3)$$

Видим, что операция вычитания вектора эквивалентна прибавлению

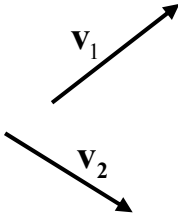


Рис. 8

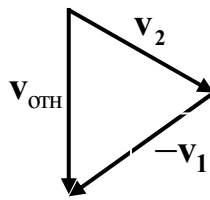


Рис. 9

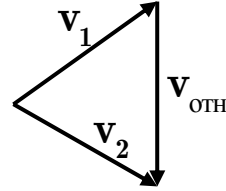


Рис. 10

вектора с противоположным направлением. Пристраивая вектор $(-v_1)$ к концу вектора v_2 (рис. 9), находим построением вектор $v_{отн}$.

Заметим, что относительную скорость можно найти более простым построением. Сведем начало векторов v_1 и v_2 в одну точку (рис. 10). Вектор, идущий от конца вектора v_1 к концу вектора v_2 , и будет вектор относительной скорости. Действительно, исходное выражение для относительной скорости $v_{отн} = v_2 - v_1$ — то же самое, что и $v_1 + v_{отн} = v_2$, соответствующее рис. 10.

Для векторов создана *векторная алгебра*:

- $\mathbf{b} = \gamma \mathbf{a}$ — умножение на число;
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ или $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$ — сложение;
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ или $c_x = a_x - b_x$, $c_y = a_y - b_y$ — вычитание;
- $c = (\mathbf{ab}) \equiv \mathbf{ab} = |a| |b| \cos \varphi$ — скалярное умножение (c — скаляр, т. е. число, φ — угол между векторами);
- $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}] \equiv [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — векторное умножение, $|c| = |a| |b| \sin \varphi$. Направление вектора \mathbf{c} перпендикулярно \mathbf{a} и \mathbf{b} и находится по правилу буравчика при повороте \mathbf{a} к \mathbf{b} по кратчайшему пути, поэтому $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Для скалярного и векторного произведений работает распределительный закон: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$.

Запишем скалярное и векторное произведение через компоненты векторов. Скалярное произведение двух векторов (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z)

$$c = (\mathbf{ab}) = (\mathbf{ia}_x + \mathbf{ja}_y + \mathbf{ka}_z)(\mathbf{ib}_x + \mathbf{jb}_y + \mathbf{kb}_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (6.4)$$

при этом учтено, что $(\mathbf{ii}) = (\mathbf{jj}) = (\mathbf{kk}) = 1$, а $(\mathbf{ij}) = (\mathbf{jk}) = (\mathbf{ik}) = 0$.

Убедимся, что получается формула $c = (\mathbf{ab}) = |a| |b| \cos \varphi$. Пусть $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\mathbf{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$ и $\varphi = \beta - \alpha$, тогда

$$\mathbf{ab} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha) = \cos \varphi - \text{все верно.}$$

Найдем теперь компоненты векторного произведения:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z) \times (\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z). \quad (6.5)$$

Учитывая, что

$$[\mathbf{ij}] = -[\mathbf{ji}] = \mathbf{k}, \quad [\mathbf{jk}] = -[\mathbf{kj}] = \mathbf{i}, \quad [\mathbf{ki}] = -[\mathbf{ik}] = \mathbf{j}$$

(используется правая система координат), получаем

$$\mathbf{c} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x). \quad (6.6)$$

В принципе можно придумать и другие операции векторами, но они не применяются, так как для них не работает распределительный закон.

В данном курсе нам понадобятся еще произведения трех векторов:

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = [\mathbf{ab}]\mathbf{c} = [\mathbf{ca}]\mathbf{b}, \quad (6.7)$$

в результате такого произведения получается скаляр, соответствующий объему параллелепипеда, построенного из этих векторов.

Еще одно произведение трех векторов – это двойное векторное произведение

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}). \quad (6.8)$$

Здесь в результате получается вектор. Это выражение можно получить прямой проверкой.

§ 7. Прямая задача кинематики, скорость и ускорение

Прямая задача кинематики заключается в нахождении скорости $\mathbf{v}(t)$ из известного $\mathbf{r}(t)$ и ускорения $\mathbf{a}(t)$ из $\mathbf{v}(t)$. Рассмотрим сначала одномерную задачу.

Мгновенная скорость $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ в момент времени

$t = t_0$ будет не что иное, как производная функции $x(t)$, равная тангенсу угла наклона между касательной к графику и положительным направлением оси t (рис. 11).

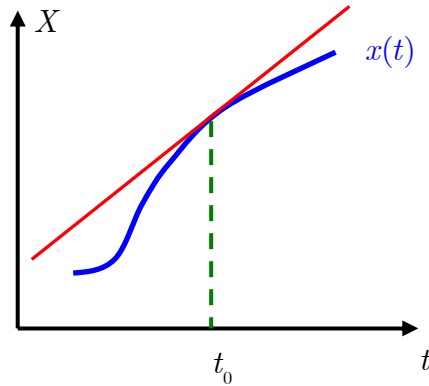


Рис. 11

Производная функции $x(t)$ в точке t_0

$$\frac{dx(t_0)}{dt} \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + dt) - x(t_0)}{dt}. \quad (7.1)$$

Рассмотрим простейший пример: $x(t) = at^2$, где $a = \text{const}$. Подставляя в (7.1), получаем

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a(t + dt)^2 - at^2}{dt} = \frac{2at dt + a(dt)^2}{dt} = 2at + a dt \underset{dt \rightarrow 0}{=} 2at. \quad (7.2)$$

Используются различные обозначения производной:

$\frac{dx(t)}{dt}$ – по Лейбницу;

$x'(t)$ – по Лагранжу;

\dot{x} – по Ньютону.

Все это мгновенная скорость $v(t)$.

Ускорение, по определению,

$$a(t) = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \equiv v'(t) \equiv \dot{v}(t). \quad (7.3)$$

Выразив $v(t)$ через $x(t)$, получаем

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \equiv x''(t) = \ddot{x}(t). \quad (7.4)$$

Выпишем производные от элементарных функций, часто встречающихся в физических задачах (подробности в курсе математического анализа):

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
const	0	e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$1/x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$

(7.5)

Дифференцирование произведения и дроби функций

Пусть $f(x) = u(x)v(x)$, тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} &= \frac{u(x+dx)v(x+dx) - u(x)v(x)}{dx} = \\
 &= \frac{(u(x) + u'(x)dx)(v(x) + v'(x)dx) - u(x)v(x)}{dx} = \\
 &\stackrel{dx \rightarrow 0}{=} u'(x)v(x) + u(x)v'(x).
 \end{aligned}
 \tag{7.6}$$

Аналогично находятся производные от любых произведений и дробей, в частности,

$$\begin{aligned}
 f(x) & & f'(x) \\
 u(x)v(x) & & u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 u(x)v(x)g(x) & & u'(x)v(x)g(x) + u(x)v'(x)g(x) + u(x)v(x)g'(x) \tag{7.7} \\
 \frac{u(x)}{v(x)} & & \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.
 \end{aligned}$$

Дифференцирование сложной функции

Пусть есть $f(u)$, где $u = g(x)$. Тогда
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}. \quad (7.8)$$

Например: $f(x) = \sin^2 x$. Здесь $f = u^2$, где $u = \sin x$. Находим $\frac{df}{du} = 2u$, $\frac{du}{dx} = \cos x$, следовательно $\frac{df}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

Используя эти довольно простые правила, можно найти производную от любой функции, являющейся комбинацией элементарных математических функций. Задача всегда имеет решение.

При движении в пространстве удобно использовать векторное описание, при этом мгновенная скорость (рис. 12)

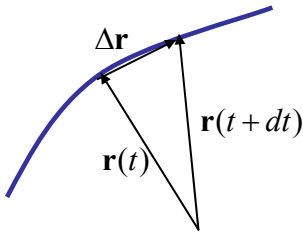


Рис. 12

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (7.9)$$

Аналогично
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (7.10)$$

В декартовых координатах

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (7.11)$$

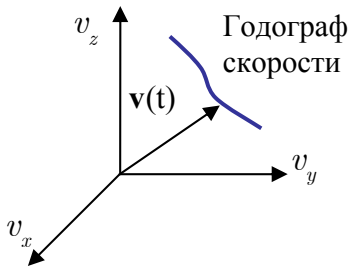


Рис. 13

Конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает траекторию в X, Y, Z -пространстве. По аналогии можно нарисовать то же для скорости (рис. 13). Такую кривую в пространстве скоростей называют *годографом* скорости. Он показывает значения скорости во время движения. Это понятие используется редко.

§ 8. Обратная задача кинематики

При движении под действием силы известно ускорение $\mathbf{a}(t)$ и необходимо найти $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$.

В одномерном случае перемещение – это площадь под кривой $v(t)$ (рис. 14), которая находится как сумма малых перемещений. При стремлении шага суммирования к нулю сумма переходит в *определенный интеграл*

$$x - x_0 = \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_0}^t v(t) dt. \quad (8.1)$$

Примечание. Следует различать «перемещение» и «пройденный телом путь». Перемещение в (одномерном случае) – это разница координат конечной и начальных точек

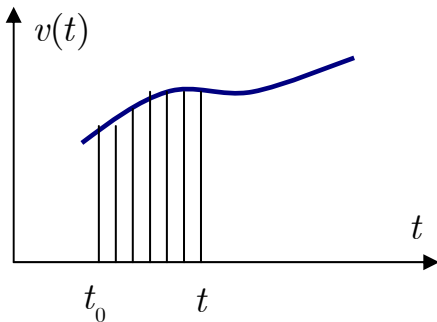


Рис. 14

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (8.2)$$

Путь пройденный телом – это

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt. \quad (8.3)$$

Например, автомобиль целый день ездил по городу и вернулся в гараж, тогда перемещение равно нулю, а путь равен изменению показаний одометра (счетчика пробега). Таким образом, путь и перемещение равны только при одномерном движении в одном направлении.

Итак, известна скорость $v(t)$, нужно найти путь $S(t)$. Как это сделать математически? Поскольку мы знаем, что $v(t) = S'(t)$, то задача сводится к нахождению такой функции $S(t)$, чтобы ее производная равнялась скорости $v(t)$. Эта задача, обратная нахождению производной, называется взятием *интеграла* от функции.

Интеграл от $f(x)$ записывается так:

$$\int f(x) dx = F(x) + \text{const}, \quad (8.4)$$

где функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$, ее называют *первообразной* функцией от $f(x)$. Константа в (8.4) отражает тот факт, что первообразная определена с точностью до константы, поскольку производная от константы равна нулю: $(F(x) + \text{const})' = F'(x)$. Поэтому такой интеграл называют *неопределенным интегралом*. Можно представить, что неопределенный интеграл – это площадь под кривой $f(x)$, где x меняется от некоего постоянного, но неопределенного значения до переменного значения x .

Для того, чтобы найти площадь S в области $a < x < b$, нужно от значения неопределенного интеграла в точке b отнять его значение в точке a , при этом константа выпадет и получается определенный интеграл, равный разности значений первообразной в точках b и a :

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (8.5)$$

Таким образом обратная задача кинематики сводится к взятию интегралов, т. е. нахождению первообразных.

Для некоторых функций интеграл находится сразу, например, поскольку $(\sin x)' = \cos x$, то $\int \cos x dx = \sin x + \text{const}$. В отличие от процедуры нахождения производной взятие интеграла является более сложной задачей. Не для всякой функции, состоящей из элементарных функций, можно найти первообразную, выражающуюся через элементарные функции.

Если функция сложная и интеграл не берется, то для физиков это не проблема, так как любой определенный интеграл можно быстро найти с помощью компьютера, разбив отрезок ab на малые отрезки Δx и просуммировав $f(x_i)\Delta x$. Однако лучше, когда ответ задачи можно выразить не числом, а формулой для произвольных a и b .

Техника нахождения интегралов излагается в курсе математического анализа. Ниже приведена таблица некоторых простейших интегралов:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (n - \text{действ. число, } n \neq -1) & \int \sin x dx &= -\cos x \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x|, \quad (x \neq 0) & \int \cos x dx &= \sin x \\ \int e^x dx &= e^x & \int \text{tg } x dx &= -\ln |\cos x|. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Пример. Пусть скорость $v = bt^2$ (b – число), найти перемещение за время от t_1 до t_2 .

Ответ находится путем взятия определенного интеграла

$$x = \int_{t_1}^{t_2} bt^2 dt = \frac{b}{3} t^3 \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{b}{3} (t_2^3 - t_1^3). \quad (8.7)$$

Эту же задачу можно сформулировать несколько иначе: *пусть скорость $v = bt^2$, найти, как путь (перемещение) зависит от времени, если $x = x_0$ в момент t_0 .* В этом случае берется неопределенный интеграл, а константа находится из начальных условий:

$$x = \int bt^2 dt = \frac{b}{3} t^3 + \text{const}. \quad (8.8)$$

Подставляя сюда $x = x_0$, $t = t_0$, находим $\text{const} = x_0 - \frac{b}{3} t_0^3$. Окончательный ответ:

$$x = x_0 + \frac{b}{3} (t^3 - t_0^3). \quad (8.9)$$

Мы рассмотрели прямую и обратную задачу кинематики в декартовой системе координат. Она сводится к простому дифференцированию и интегрированию по каждой из проекций.

В векторной форме

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{r}(t_0), \quad \mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt + \mathbf{v}(t_0). \quad (8.10)$$

Здесь каждое векторное уравнение является удобной записью трех уравнений для движения по каждой проекции.

Еще немного математики

В физике часто требуется упростить формулы, содержащие малые величины, сохранив при этом главные члены, содержащие эти малые величины. Приведем некоторые полезные математические приемы.

1. $f(x) = \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, где $x \ll 1$. (8.11)

Это нетрудно проверить, возведя обе части в квадрат, получается слева $1 + x$, справа $1 + x + x^2/4$. Последним членом можно пренебречь, так как он следующего порядка малости по сравнению со вторым членом, содержащим x .

$$2. \quad f(x) = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta}, \text{ где } \alpha, \beta \ll 1.$$

Домножая числитель и знаменатель на $(1 - \beta)$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$f(x) = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} = \frac{(1 + \alpha)(1 - \beta)}{(1 + \beta)(1 - \beta)} = \frac{1 + \alpha - \beta - \alpha\beta}{1 - \beta^2} \approx 1 + \alpha - \beta. \quad (8.12)$$

Ряд Тейлора

Любую гладкую функцию вблизи точки a можно разложить в ряд Тейлора

$$f(a + x) = f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2!}f''(a)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^n(a)x^n. \quad (8.13)$$

Действительно, продифференцировав выражение один раз (учитывая, что $(x^n)' = nx^{n-1}$), получаем $f'(a + x) = f'(a)$ плюс члены, содержащие малый параметр x . Продифференцировав дважды, получаем $f''(a + x) = f''(a)$ + малые члены и т. д. Тем самым мы проверили, что при малых x производные всех порядков у функций слева и справа равны. Такое может быть только в том случае, если равны сами функции. Разложение в ряд некоторых функций, которые нам понадобятся в дальнейшем ($x \ll 1$),

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots, \quad (8.14)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} \dots, \quad (8.15)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}, \quad (8.16)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (8.17)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}. \quad (8.18)$$

§ 9. Ускорение при криволинейном движении

Движение по окружности

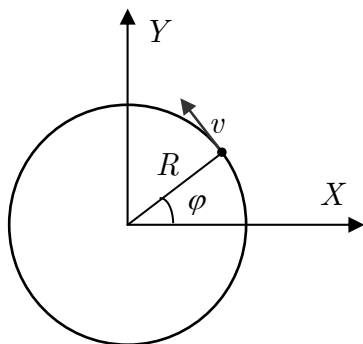


Рис. 15

Сначала рассмотрим равномерное движение по окружности в декартовых координатах (рис. 15). Пусть точка движется по окружности радиуса R . Радиус-вектор точки составляет угол $\varphi = \omega t$ относительно оси X , где ω – угловая скорость. За период обращения $T = 2\pi R/v$ приращение угла поворота равно $\omega T = 2\pi$, отсюда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}. \quad (9.1)$$

Учитывая, что $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega t & \dot{x} &= -R\omega \sin \omega t & \ddot{x} &= -R\omega^2 \cos \omega t \\ y &= R \sin \omega t & \dot{y} &= R\omega \cos \omega t & \ddot{y} &= -R\omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (9.2)$$

откуда

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y \quad (9.3)$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r} = -\frac{v^2}{R} \left(\frac{\mathbf{r}}{R} \right), \quad (9.4)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ – радиус-вектор точки, $|\mathbf{r}| \equiv R$. Получается, что ускорение направлено к центру окружности.

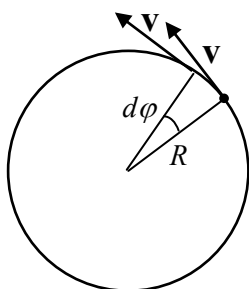


Рис. 16

Рассмотрим то же самое в полярной системе координат (рис. 16). При смещении точки на угол $d\varphi$ вектор \mathbf{v} поворачивается на этот же угол. Изменение вектора скорости находим, совместив начала начального и конечного векторов скорости. Тогда векторы начальной, конечной скорости и изменения скорости образуют равнобедренный треугольник с углом при вершине $d\varphi$. Изменение скорости по модулю равно

$$dv = 2v \sin(d\varphi/2) \approx v d\varphi, \quad (9.5)$$

а вектор изменения скорости направлен к центру окружности

$$d\mathbf{v} = -\mathbf{e}_r v d\varphi, \quad (9.6)$$

где \mathbf{e}_r – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора точки.

Отсюда ускорение –

$$\mathbf{a}_n = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{e}_r v \frac{d\varphi}{dt} = -\mathbf{e}_r v \omega = -\mathbf{e}_r \frac{v^2}{R}. \quad (9.7)$$

При равномерном движении по окружности точка имеет центростремительное ускорение \mathbf{a}_n , перпендикулярное скорости («нормальное» ускорение). Этот результат эквивалентен формуле (9.4).

Если меняется абсолютное значение скорости, то кроме центростремительного ускорения добавляется тангенциальное ускорение \mathbf{a}_τ , направленное по касательной к окружности (вдоль направления скорости) и равное

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{e}_\varphi \frac{dv}{dt}, \quad (9.8)$$

где \mathbf{e}_φ – единичный вектор в направлении скорости, v – модуль скорости (скаляр). Полное ускорение при движении по окружности –

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau = -\mathbf{e}_r \frac{v^2}{R} + \mathbf{e}_\varphi \frac{dv}{dt}. \quad (9.9)$$

Тангенциальное и нормальное ускорение при произвольном движении

Рассмотрим случай произвольного движения. Известно, что через любые три точки можно провести окружность. Выберем три ближайшие точки на траектории и проведем окружность. Как было показано выше, полное ускорение будет суммой тангенциального и нормального ускорений

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau = \mathbf{n} \frac{v^2}{R} + \boldsymbol{\tau} \frac{dv}{dt}. \quad (9.10)$$

Здесь $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ – единичный вектор в направлении центра окружности, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\varphi$ – единичный вектор в направлении скорости. Отсюда получаем способ нахождения R . Поскольку $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} перпендикулярны, то

$$\frac{1}{R} = \frac{a_n}{v^2} = \frac{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}{v^2} = \frac{\sqrt{\dot{\mathbf{v}}^2 - \dot{v}^2}}{v^2}. \quad (9.11)$$

Для равномерного движения $\dot{\mathbf{v}} = v \frac{d\varphi}{dt} = v\omega$, $\dot{v} = 0$, тогда $\frac{1}{R} = \frac{\omega}{v}$.

Другой способ нахождения радиуса кривизны:

$$\frac{1}{R} = \frac{a_n}{v^2}; \quad a_n = |\mathbf{a}_n| = |\mathbf{a} - \mathbf{a}_\tau| = \left| \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} \right|. \quad (9.12)$$

Здесь $(\mathbf{a}\mathbf{v})$ – скалярное произведение, модуль вектора – это $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Если известны декартовы компоненты скорости и ускорения, то по этой формуле легко найти радиус кривизны.

Рассмотрим еще один способ нахождения R , используя векторное произведение. Поскольку нормальная составляющая ускорения равна полному ускорению, умноженному на синус угла между ускорением и скоростью, то она может быть записана в виде

$$a_n = |\mathbf{a}_n| = \frac{|[\mathbf{a}\mathbf{v}]|}{|v|}. \quad (9.13)$$

Если ускорение и скорость лежат в плоскости X – Y , то единственная составляющая векторного произведения неравная нулю направлена по Z . Используя формулу (6.6) для векторного произведения, находим

$$|[\mathbf{a}\mathbf{v}]| = |\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}|, \quad (9.14)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{a_n}{v^2} = \frac{|[\mathbf{a}\mathbf{v}]|}{|v|^3} = \frac{|\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (9.15)$$

§ 10. Прямая задача кинематики в полярной системе координат

В некоторых случаях, например при описании движения планет, удобно пользоваться не декартовой, а полярной системой координат.

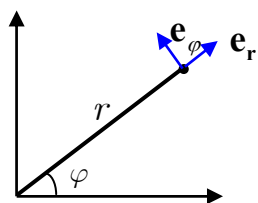


Рис. 17

Введем вектор e_r вдоль радиус-вектора, e_φ поперек радиус-вектора в направлении увеличения угла. Радиус-вектор произвольно движущейся точки –

$$\mathbf{r} = e_r r. \quad (10.1)$$

При движении меняется и длина r , и направление e_r . Нетрудно видеть, что

$$de_r = e_\varphi d\varphi, \quad de_\varphi = -e_r d\varphi \quad \text{или} \quad \dot{e}_r = e_\varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{e}_\varphi = -e_r \dot{\varphi}. \quad (10.2)$$

Отсюда

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (e_r r)' = e_r \dot{r} + e_\varphi r \dot{\varphi}. \quad (10.3)$$

Дифференцируя еще раз, используя правило дифференцирования

$$(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3', \quad (10.4)$$

находим ускорение

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (e_r \ddot{r} + e_\varphi \dot{r} \dot{\varphi}) + (-e_r r \dot{\varphi}^2 + e_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} + e_\varphi r \ddot{\varphi}) = \\ &= e_r (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + e_\varphi (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Таким образом, зная $r(t)$ и $\varphi(t)$, мы можем найти $\mathbf{a}(t)$.

Происхождение четырех слагаемых следующее:

- первый член – ускоренное движение по радиусу;
- второй член – центростремительное ускорение, которое имеет место при равномерном движении по окружности;
- третий член появляется при одновременном (даже равномерном) движении по радиусу и углу φ . Половина этого члена связана с поворотом e_r , вторая половина – с тем, что при увеличении радиуса, при постоянной $\dot{\varphi}$, боковая скорость должна увеличиваться;
- четвертый член – есть не что иное, как тангенциальное ускорение при движении по окружности.

§ 11. Поворот твердого тела вокруг оси

Пусть тело вращается вокруг оси с угловой скоростью ω , так что угол поворота $d\varphi = \omega dt$ (рис. 18). Введем вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, равный по величине ω и направленный вдоль оси вращения твердого тела по направлению движения буравчика. Выбранная точка тела движется по окружности радиуса $r \sin \theta$, перемещение точки

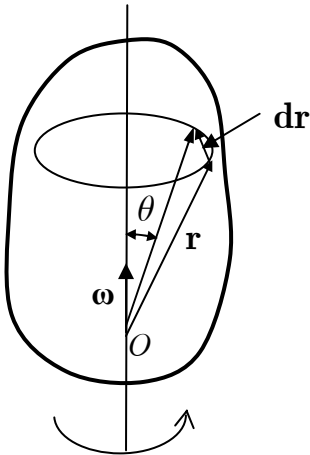


Рис. 18

$$|d\mathbf{r}| = r \sin \theta d\varphi = r\omega \sin \theta dt. \quad (11.1)$$

С учетом направления

$$d\mathbf{r} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] dt. \quad (11.2)$$

Скорость перемещения точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \quad (11.3)$$

По абсолютной величине скорость равна

$$v = \omega r \sin \theta = \omega R, \quad (11.4)$$

где R – расстояние от точки до оси. Вектор ускорения точки

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}]. \quad (11.5)$$

Здесь первый член – это тангенциальное ускорение, второй член – нормальное ускорение v^2/R .

§ 12. Инерциальные системы отсчета, принцип относительности

В качестве системы отсчета может быть выбрана любая совокупность тел, движущаяся по произвольным законам. Есть класс особо важных в механике систем.

Тело называется *свободным*, если влиянием других тел на его движение можно пренебречь. Система отсчета, связанная с набором покоящихся относительно друг друга свободных тел, называется *инерциальной системой* отсчета.

Обобщая экспериментальные данные, Галилей (1564–1642) сформулировал *закон инерции* (называется также первым законом Ньютона): *свободное тело в любой инерциальной системе движется равномерно и прямолинейно.*

Тела в выбранной инерциальной системе могут двигаться с разными скоростями, и с каждым из них можно связать другую инерциальную систему. Таким образом, существует бесконечное число инерциальных систем. Галилей также впервые высказал мысль, что *во всех инерциальных системах отсчета механические явления протекают одинаково*.

В дальнейшем было осознано, что вообще все законы физики в инерциальных системах отсчета имеют одинаковый вид. Это общее утверждение называют *принципом относительности* (Галилей, Пуанкаре, Эйнштейн).

Здесь может возникнуть сомнение, ведь траектория движения падающего вертикально вниз на Землю тела выглядит по-разному в неподвижной относительно Земли системе отсчета и системе, движущейся относительно нее с постоянной скоростью. Противоречия здесь нет: принцип относительности утверждает только то, что вид закона движения, записанный через собственные координаты систем отсчета, имеет один и тот же вид. В данном случае закон движения одинаков во всех системах

$$\ddot{z} = -g. \quad (12.1)$$

§ 13. Преобразование Галилея

Пусть инерциальная система S' движется поступательно со скоростью V относительно другой инерциальной системы S . Соответствующим сдвигом и поворотом осей координат (это никак не влияет на процессы, так как пространство однородно и изотропно) можно сделать так, чтобы оси были параллельны и движение происходило вдоль осей X, X' (рис. 19). Примем, что в момент $t = 0$ начала систем отсчета совпадали.

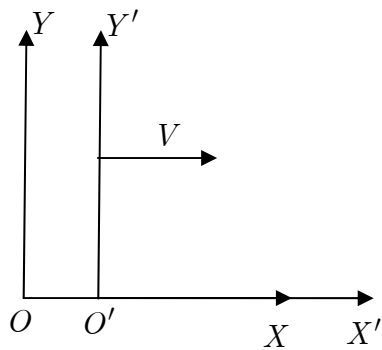


Рис. 19

Положение материальной точки в системе S характеризуется координатами x, y, z и временем t , а в системе $S' - x', y', z', t'$ соответственно. В классической механике предполагается, что время имеет абсолютный характер и одинаково во всех системах отсчета. Тогда связь координат в системе S и S' следует из простых геометрических со-

ображений, как и в случае, если бы эти системы были неподвижны относительно друг друга:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (13.1)$$

Или в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \quad t = t'. \quad (13.2)$$

Эти формулы перехода от одной инерциальной системы к другой называются *преобразованиями Галилея*. Используемые при выводе предположения кажутся очевидными, однако, как мы скоро увидим, это верно только при малых скоростях.

Дифференцируя (13.2) по t , имеем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \frac{dt'}{dt} + \mathbf{V}. \quad (13.3)$$

С учетом того, что $dt = dt'$, получаем классический закон сложения скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (13.4)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$. Аналогично для ускорений $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt'$ и из (13.4) получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (13.5)$$

Рассмотрим одно из важных следствий. Пусть в системе S' находится неподвижный предмет некоторой длины $l' = \sqrt{(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)^2}$. Естественно определить длину этого предмета в S системе как $l = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}$, где \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_1 взяты в один и тот же момент времени t . Тогда из формул (13.2) следует, что $l = l'$, т. е. длина предмета является инвариантом при преобразованиях Галилея. Этот предмет (линейка) может лежать вдоль направления движения или поперек, в обоих случаях его длина не меняется.

ГЛАВА III

РЕЛЯТИВИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

§ 14. Максимальная скорость сигналов, постулаты Эйнштейна

Постулат об абсолютности времени во всех системах отсчета в классической механике подразумевает бесконечную скорость распространения сигналов. Однако уже давно было известно, что даже свет имеет конечную скорость около $3 \cdot 10^{10}$ см/с (Ремер, 1676 – затмения спутников Юпитера; 1728 – звездная абберация; Физо, 1849 – измерения в земных условиях). Ремер заметил, что моменты затмения спутников Юпитера нерегулярные и за полгода набегают задержка около 20 мин. Он сообразил, что это связано с тем, что за счет вращения Земли вокруг Солнца расстояние до Юпитера меняется и эта задержка связана с конечностью скорости света.

В конце 19 в. были написаны уравнения электродинамики, но возникли проблемы, связанные с распространением света в пустоте. Пытались ввести понятие эфира. Эфир представлялся некой средой, относительно которой тела движутся с различной скоростью. Скорость света относительно эфира постоянна, так что скорость света относительно наблюдателя зависит от скорости наблюдателя, аналогично тому, как распространяется звук в воздухе или волны на воде. Введение эфира как среды – это введение выделенной системы отсчета, что нарушает принцип относительности, заключающийся в эквивалентности всех инерциальных систем отсчета. Гипотеза эфира не нашла подтверждения в опытах Майкельсона – Морли (1881) (схема эксперимента описана во многих учебниках).

Все это побудило пересмотреть основные представления о пространстве и времени. В результате в 1905 г. была создана специальная теория относительности (СТО), называемая также частной т. о., так как в ней рассматриваются только инерциальные системы отсчета. В ее разработку основной вклад внес А. Эйнштейн (1879–1955), а также Х. Лоренц (1853–1928), А. Пуанкаре (1854–1912) и Г. Минковский (1864–1909).

В основу теории относительности были положены два постулата.

- *Принцип относительности. Законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Никакими экспериментами нельзя установить, какая система движется, а какая покоится.*

- Существует предельная скорость передачи сигналов c . Из принципа относительности следует, что эта скорость одинакова во всех системах отсчета.

В настоящее время с высокой точностью установлено, что предельная скорость c совпадает со скоростью света в пустоте. Рассмотрим первые следствия этих постулатов.

§ 15. Одновременность, синхронизация часов, измерение расстояний

Из постоянства скорости c следует, что правило сложения скоростей Галилея неверно и в релятивистской теории нужно отказаться от идеи «всемирного» времени. Посмотрим, какие изменения необходимо внести для построения релятивистской теории, чтобы не прийти в противоречие с принципом относительности и конечностью максимальной скорости распространения сигналов c .

Рассмотрим снова две системы отсчета S и S' , движущиеся поступательно относительно друг друга со скоростью V . Направим оси OX и OX' систем отсчета S и S' параллельно скорости V движения S' относительно S . Как определить одновременность событий в системах S и S' ? Определение одновременности событий в одном и том же месте не вызывает затруднений: момент, когда событие происходит, определяется положением стрелок часов, находящихся тут же, т. е. судить о времени мы можем лишь локально. Чтобы установить порядок следования во времени событий, происходящих на некотором расстоянии друг от друга, необходимо каждое из этих событий сопроводить одновременными с ними сигналами, сообщаящими о локальном времени этих событий. Затем эти сигналы нужно принять в каком-то месте и составить суждение о временной последовательности удаленных друг от друга событий. При этом надо обязательно удостовериться, что часы, сопутствующие каждому из событий, установлены как следует и идут правильно. Последнюю процедуру называют *синхронизацией часов в выбранной системе отсчета*. Исключительное постоянство скорости c делает сигналы, распространяющиеся с такой скоростью, самыми подходящими и для синхронизации часов, и для определения расположения событий во времени.

События в точках A и B назовем одновременными, если сопровождающие их сигналы, распространяющиеся со скоростью c , приходят в точку, расположенную посередине между A и B одновременно. Похожим способом могут быть синхронизованы все часы, находящиеся в

одной системе отсчета. Пусть мы хотим синхронизовать часы в точке A с часами в начале координат O . Для этого в точке A устанавливаем отражающее зеркало, так что сигнал, испущенный из O , доходит до точки A и возвращается обратно за время Δt . После этого из точки O снова в момент t_0 посылается сигнал в A с просьбой в момент прихода сигнала установить на часах в точке A время $t_0 + \Delta t / 2$. Таким способом можно синхронизовать часы в каждой системе отсчета, где они взаимно покоятся. Когда мы говорим, что в системе событие произошло в момент времени t , — это значит, что часы, находящиеся в месте события в этот момент, показывали время t .

Рассмотрим поезд, движущийся мимо платформы. Пусть в середине поезда произошла вспышка. Свет достигнет начала и конца поезда одновременно в системе поезда. А будут ли эти два события одновременными в системе платформы? Нет, потому что к концу поезда свет движется с относительной скоростью $c + v$, а к началу поезда — с $c - v$. Отсюда следует, что события, одновременные в одной системе отсчета, могут быть неодновременными в другой системе, даже может поменяться их последовательность.

Рассмотрим снова наши системы S и S' . Будем полагать, что в начальный момент часы, установленные в началах систем отсчета (точки O и O'), показывали одинаковое время $t = t' = 0$. Обсудим теперь процедуру измерения размеров тел. Измерение длины неподвижного отрезка затруднений не вызывает. Надо взять метровую линейку и обычным способом, путем прикладывания к отрезку, измерить его длину. А как быть с движущимся отрезком? Здесь дело сложнее. Для измерения необходимо в некоторый момент времени одновременно отметить в своей системе отсчета положение правого и левого концов движущегося отрезка, а затем, прикладывая масштабную линейку, измерить расстояние между этими отметками. Для осуществления этой процедуры требуется, чтобы в каждой точке системы отсчета находился наблюдатель с часами и отмечал время, когда мимо него проходит конец. Часы этих наблюдателей должны быть одинаковыми и синхронизованными.

Есть еще один, эквивалентный, способ измерения длины движущейся линейки. Пусть линейка пролетает мимо покоящихся часов со скоростью V . Если разность показаний часов между прохождением начала и конца линейки τ , то длина движущейся линейки равна $l = V\tau$.

§ 16. Сохранение поперечных размеров, замедление хода движущихся часов

Пусть в системе S' (определение систем S и S' было дано ранее) имеется неподвижная линейка, расположенная вдоль оси Y' . Мы хотим измерить длину этой линейки в системе S . Поместим в системе S такую же линейку, ориентированную вдоль Y . Очевидно, что когда линейки будут проходить мимо друг друга, их оси совпадут одновременно как в системе S , так и системе S' . Поскольку наблюдатели, сидящие вдоль линеек, окажутся «нос к носу», то им нетрудно будет решить, чья линейка длиннее. Из симметрии картины ясно, что концы линеек совпадут. Отсюда следует вывод: *измеренные наблюдателями в разных системах отсчета поперечные размеры тел одинаковы и не зависят от движения систем отсчета.*

Еще более просто прийти к такому выводу, рассматривая два одинаковых соосных кольца, одно из которых покоится, а другое движется. Если бы при движении поперечные размеры изменялись, то одно из колец прошло бы внутри другого. Из симметрии задачи ясно, что кольца равноправны и такого не произойдет.

Рассмотрим теперь ход часов. В качестве часов может быть исполь-

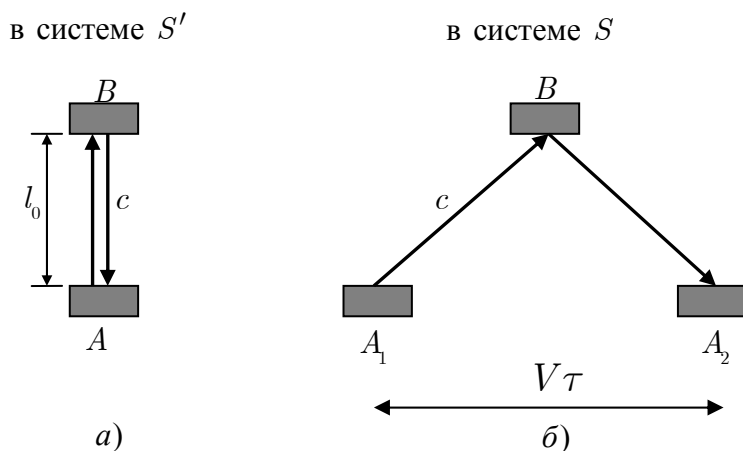


Рис. 20

зован любой периодический процесс. Пусть часы состоят из двух отражателей, расположенных на жестком стержне, и между ними движется короткий сигнал, распространяющийся со скоростью c , рис. 20, а. Пусть такими часами снабжены все наблюдатели в системе S . Одни из

таких часов расположим в системе S' вдоль оси Y' . Что скажут наблюдатели в системе S , присмотревшись к работе движущихся относительно них часов? В системе S' сигнал проходит путь туда и обратно за время

$$\tau_0 = 2l_0/c. \quad (16.1)$$

С точки зрения наблюдателей, находящихся в системе S , сигнал за один период проходит путь, изображенный на рис. 20, б. Пусть период движения света по часам в S равен τ . Поскольку поперечный размер при движении не меняется и скорость сигнала равна c , то из теоремы Пифагора следует

$$c\tau = 2\sqrt{l_0^2 + V^2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2}, \quad (16.2)$$

откуда

$$\tau = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (16.3)$$

Отсюда следует вывод: движущиеся часы идут медленнее, чем течет время в неподвижной системе, в $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} > 1$ раз. Это явление многократно наблюдали в экспериментах с быстро движущимися нестабильными частицами. Увеличение их времени жизни достигало тысяч раз в точном согласии с предсказанием.

В связи с этим явлением замедления времени часто возникает вопрос, сформулированный как «парадокс близнецов». Один из братьев близнецов улетел на ракете и, вернувшись домой, оказался моложе своего брата, оставшегося на Земле. Кажущийся парадокс заключается в том, что если задачу рассматривать в системе ракеты, то летал брат, оставшийся на Земле, тогда он должен быть моложе. Получается противоречие. Задача, на первый взгляд, кажется симметричной, поэтому братья должны постареть одинаково. На самом деле парадокса здесь нет. Обратите внимание, что при нашем рассмотрении в системе S' сигнал был испущен и принят в одной и той же точке A , в то время как в системе S эти события произошли в разных точках A_1 и A_2 . Симметрии нет. В парадоксе близнецов тоже нет симметрии. Близнец, оставшийся на Земле, все время находился в одной и той же инерциальной системе, летавший же на космическом корабле при развороте

назад перепрыгнул из одной инерциальной системы в другую. При таком переходе нужно синхронизовать заново все часы в системе космонавта. Поэтому считать, что космонавт покоился, а Земля летала от него и вернулась назад, просто некорректно. Правильный ответ соответствует рассмотрению в системе Земли, т. е. близнец-космонавт окажется моложе своего брата-близнеца, оставшегося на Земле.

В экспериментах на ускорителях рождаются различные нестабильные частицы. Они пробегают некоторый путь в детекторе и распадаются. В этих экспериментах с огромной точностью проверено, что их среднее время жизни дается формулой (16.3).

§ 17. Сокращение продольного размера движущегося тела

Посмотрим, что произойдет, если те же часы в системе S' положить вдоль оси X' . От этого их длина и скорость хода в системе покоя не изменятся. С точки зрения наблюдателей, находящихся в системе S , сигнал в движущихся относительно них часах за время τ_1 пробежит от левого конца до правого, а затем за время τ_2 возвращается обратно. Путь, проходимый сигналом при его распространении слева направо, равен длине часов плюс смещение правого конца за время t_1 , т. е.

$$c\tau_1 = l + V\tau_1. \quad (17.1)$$

Здесь l – пока неизвестная длина часов в системе S . При движении сигнала справа налево путь будет меньше l на смещение левого конца, т. е.

$$c\tau_2 = l - V\tau_2. \quad (17.2)$$

Период часов, лежащих на боку, естественно, не отличается от показаний часов, стоящих вертикально, отсюда, с учетом (16.3), (17.1), (17.2), получаем

$$\tau = \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{l}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{V}{c}} + \frac{1}{1 + \frac{V}{c}} \right) = \frac{2l}{c \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}. \quad (17.3)$$

Отсюда находим длину горизонтально лежащих часов l , которая, оказывается, не совпадает с l_0 :

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} = l_0/\gamma \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (17.4)$$

Итак, измеряемый размер тела вдоль направления движения сокращается!

Приведем еще один вывод данной формулы. Пусть в системе S расположены часы $Ч$, мимо которых пролетает стержень со скоростью V . Длина стержня в системе S' , где он покоится, равна l_0 . Пусть длина стержня в системе S равна l , тогда интервал времени между прохождением начала и конца стержня составит $\tau_0 = l/V$. Мы обозначили время индексом ноль, подчеркивая, что это *собственное время*, т. е. показания одних и тех же часов. Перейдем теперь в систему покоя стержня S' . Мимо него проносятся часы $Ч$ со скоростью V , разница времени между пролетом начала и конца стержня будет $\tau = l_0/V$.

Здесь разница времени берется между показаниями часов, установленных в начале и конце стержня. Но мы знаем, что движущиеся часы, показания которых сравниваются с различными неподвижными часами, идут медленнее в $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ раз, т. е. $\tau_0 = \tau\sqrt{1 - V^2/c^2}$. От-

сюда $\frac{l}{V} = \frac{l_0}{V}\sqrt{1 - V^2/c^2}$, и мы снова получаем формулу (17.4):

$l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$, т. е. продольные размеры движущегося предмета сокращаются. Это не кажется, это действительно так. Если бы сокращения длины стержня не было, то он пролетел бы мимо часов $Ч$ за время l_0/V , а мы только что показали, что это время меньше: $\frac{l_0}{V}\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Некоторые примеры сокращения длины

Мы установили, что если стержень движется, то в неподвижной системе его длина будет в γ раз меньше. Один пример. В ускорителе ВЭПП-4 (ИЯФ СО РАН) электроны имеют энергию до 5 ГэВ, что соответствует $\gamma \approx 10^4$. Длина пучка электронов (содержит порядка 10^{10} электронов) в ускорителе (в лабораторной системе отсчета) составляет около 1 см. В системе отсчета пучка его длина будет в γ раз больше, т. е. около 100 м! Это больше радиуса орбиты в ускорителе ($R = 45$ м). Если ускоритель представить квадратным, то в системе пучка сторона квадрата сократится в 10^4 раз и станет во много раз короче пучка. Это означает, что в сопутствующей системе пучок не вмещается

в размер стороны квадрата ускорителя, по которой он движется, часть пучка находится за углом.

Еще один пример: космический корабль, движущийся со скоростью V , летит до звезды, находящейся на расстоянии L . За какое время по часам на корабле он долетит до звезды?

Эту задачу можно решить в лабораторной системе, учитывая, что движущиеся часы идут медленнее в γ раз, отсюда $t = L/\gamma V$. В системе же ракеты нужно рассуждать по-другому: расстояние до звезды сократится в γ раз, отсюда получаем такой же ответ.

Рассуждая о сокращении длины линейки при ее движении, мы интуитивно подразумеваем, что если взять реальную линейку и разогнать, то ее длина уменьшится в γ раз. Так ли это? Рассмотрим два электрона, расположенные вдоль оси X на расстоянии l_0 . Теперь одновременно во всех точках лабораторной системы включим электрическое поле, направленное вдоль оси X . Электроны начнут ускоряться, пройденный ими путь за одно и то же время будет одинаковым, а это значит, что расстояние между ними останется прежним, никакого сокращения длины в лабораторной системе не произошло! Более того, в сопутствующей системе отсчета расстояние между ними увеличилось в γ раз. Детальное объяснение этому факту дано в конце следующего раздела (преобразования Лоренца).

Рассмотрим теперь те же два заряда, но скрепленных жесткой спицей. В системе покоя спицы ее длина не меняется, а в системе лабораторной сокращается. После разгона расстояние между зарядами уменьшилось с l_0 до l_0/γ , т. е. второй электрон приблизился к первому. Каким образом? Это могло произойти только за счет того, что в спице возникло натяжение, которое замедляло первый заряд и ускорило второй заряд. Именно благодаря внутреннему напряжению спице удается сохранять длину в сопутствующей системе отсчета. Если была бы не спица, а слабая резинка, то она растянулась бы в сопутствующей ей системе отсчета. Детальное объяснение механизма такого растяжения дано в конце следующего параграфа.

§ 18. Преобразование Лоренца

Пусть в системе S в точке с координатой x в момент времени t произошло некоторое событие. Найдем его координату x' и время t' в системе S' . Учитывая релятивистское сокращение продольного масштаба, можно утверждать, что если в S' событие произошло в точке x' от начала отсчета O' , то в неподвижной системе S оно произойдет на расстоянии $x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$ от точки O' , координата которой, в свою очередь, $x_0 = Vt$, следовательно

$$x = Vt + x'\sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (18.1)$$

Отсюда получаем

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (18.2)$$

Поскольку системы S и S' симметричны относительно друг друга и отличаются только знаком относительного движения, то после замены $x \rightarrow x'$, $x' \rightarrow x$, $t \rightarrow t'$, $V \rightarrow -V$ получаем

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (18.3)$$

Подстановка последнего выражения в (18.1) дает

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (18.4)$$

Обратное преобразование получается путем замены $V \rightarrow -V$:

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (18.5)$$

Учитывая, что поперечные размеры не меняются, в итоге получаем прямые и обратные преобразования Лоренца

$$\begin{array}{c} L \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - Vx/c^2) \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{c} L^{-1} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + Vx'/c^2), \end{array} \right. \end{array} \quad (18.6)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Эти формулы получены для частного случая, когда скорость направлена вдоль оси X . Нетрудно получить аналогичные формулы при произвольном угле между \mathbf{V} и осью X , представив вектор \mathbf{r} в виде двух составляющих: \mathbf{r}_{\parallel} – вдоль скорости и \mathbf{r}_{\perp} – в поперечном направлении:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{V} \frac{(\mathbf{V}\mathbf{r})}{V^2}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}, \quad (18.7)$$

тогда преобразования Лоренца можно записать в виде

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{V}t'), \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}'_{\perp}, \quad t = \gamma(t' + \frac{\mathbf{V}\mathbf{r}'_{\parallel}}{c^2}). \quad (18.8)$$

Здесь $\mathbf{V}\mathbf{r}'_{\parallel}$ – это скалярное произведение. Для случая параллельных осей, но с произвольно направленной относительной скоростью \mathbf{V} , эти формулы можно преобразовать к виду, впервые полученному Герглюцем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{1}{V^2}(\gamma - 1)(\mathbf{V}\mathbf{r}')\mathbf{V} + \gamma\mathbf{V}t', \quad t = \gamma(t' + \mathbf{V}\mathbf{r}'_{\parallel}/c^2) \quad (18.9)$$

Пример. Пусть два события произошли одновременно в системе S' в различных точках x'_1 и x'_2 . Из формул обратного преобразования Лоренца получаем временной интервал между событиями в системе S

$$t_2 - t_1 = \gamma \frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1) \neq 0. \quad (18.10)$$

Именно поэтому при измерении длины линейки, лежащей вдоль движения в системе S' , экспериментаторы из систем S и S' получают разные результаты.

Наконец, рассмотрим пример, позволяющий до конца понять, почему в приведенном в предыдущем разделе примере при одновременном ускорении в лабораторной системе двух зарядов расстояние в сопутствующей системе возрастает. Пусть эти два заряда, расположенные на расстоянии l_0 , одновременно (в лабораторной системе S) в результате удара получают скорость V . В сопутствующей системе расстояние между ними будет в γ раз больше. Как это могло произойти?

Рассмотрим, как произошли эти удары в системе отсчета S' , движущейся со скоростью V , в которой эти заряды после ударов будут покоиться. Во-первых, в этой системе удары произошли не одновременно. Действительно, в лабораторной системе $x_1 = 0, x_2 = l_0, t_1 = t_2 = 0$, тогда из преобразований Лоренца для времени (18.5), $t' = \gamma(t - Vx/c^2)$, находим, что в движущейся системе эти удары произошли не одновременно: первый заряд с координатой $x_2 = l_0$ начал движение раньше на $\Delta t' = \gamma V l_0 / c^2$. В течение этого времени второй заряд еще покоился в лабораторной системе, т. е. двигался назад в движущейся системе, и дополнительно отстал на расстояние $\Delta l = V \Delta t' = \gamma V^2 l_0 / c^2$. Исходное расстояние в системе S' между зарядами до ударов было $l = l_0 / \gamma$, а с учетом задержки между ударами оно стало

$$l' = l + \Delta l = l_0 / \gamma + \gamma V^2 l_0 / c^2 = \gamma l_0 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2} \right) = \gamma l_0, \quad (18.11)$$

это как раз то, что мы и хотели объяснить! Увеличение расстояния происходит из-за того, что в системе S' имеется задержка между ударами.

Формулы (18.6) получены в 1904 г. Х. Лоренцем как преобразования, при которых уравнения электродинамики сохраняют свой вид при переходе от одной инерциальной системы к другой. В 1905 г. А. Эйнштейн вывел их из постулатов о равноправии всех инерциальных систем и существовании максимальной скорости передачи сигналов. Хотя получились те же самые преобразования, но физическое содержание в них было совершено новым.

§ 19. Четырехмерный вектор события

Упорядоченную четверку чисел $R = (ct, x, y, z) \equiv R(ct, \mathbf{r})$ называют 4-вектором события. В отличие от обычного вектора, обозначаемого стрелкой или жирной буквой, 4-вектор пишут обычным шрифтом.

Переход от $R(ct, \mathbf{r})$ к $R'(ct', \mathbf{r}')$ в матричной форме

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad R' = LR, \quad (19.1)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, $\beta = V/c$. Такая форма записи означает, что

$$R'_i = \sum_k L_{ik} R_k. \quad (19.2)$$

Обычно знак суммирования опускают, подразумевая, что происходит суммирование по повторяющемуся индексу. Аналогично можно записать $R = L^{-1}R'$, где L^{-1} – матрица обратного преобразования, отличающаяся от L заменой β на $-\beta$.

Принято называть ct нулевой, x – первой, y – второй, z – третьей компонентой 4-вектора события. Любая четверка чисел $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, компоненты которой преобразуются как компоненты 4-вектора события, т. е.

$$a_0 = \gamma(a'_0 + \beta a'_1), \quad a_1 = \gamma(a'_1 + \beta a'_0), \quad a_2 = a'_2, \quad a_3 = a'_3, \quad (19.3)$$

называется 4-вектором. Зачем они нужны? Дело в том, что, если физический закон записан через 4-х вектора, значит, мы знаем его во всех инерциальных системах отсчета, так как известен закон преобразования входящих в него величин. О других свойствах 4-векторов будет сказано дальше.

§ 20. Интервал

В нерелятивистской механике при переходе из одной системы отсчета в другую сохраняющейся величиной является расстояние между двумя точками $l_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ (§ 13). В релятивистском случае это не верно, так как длины масштабов меняются. Оказывается, однако, что существует комбинация $(t_2 - t_1)$ и l_{12} , которая остается неизменной. Она называется интервал.

Любое событие определяется тремя пространственными координатами и временем. Для наглядности удобно вообразить четырехмерное пространство x, y, z, t , в котором точка совершает движение по некоторой траектории, мировой линии. Если в первой точке x_1, y_1, z_1, t_1 произошла вспышка света и достигла второй точки x_2, y_2, z_2, t_2 , то очевидно, что

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad (20.1)$$

Для тех же двух событий в системе S'

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0. \quad (20.2)$$

Назовем для любых двух событий *интервалом* величину

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}. \quad (20.3)$$

С формальной точки зрения интервал можно рассматривать как расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве с осями X, Y, Z, cT . Имеется, однако, различие с обычной геометрией: член, содержащий время, суммируется с другим знаком. Такую геометрию, в отличие от евклидовой, называют *псевдоевклидовой*. Она была введена в теорию относительности Г. Минковским, и данное пространство называют пространством Минковского

Выше мы видим, что если интервал равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и в любой другой системе отсчета. А как связаны между собой интервалы s и s' в общем случае? Оказывается, они всегда равны! В этом легко убедиться, выразив в (20.2) x', y', z', t' через x, y, z, t и используя преобразования Лоренца. Действительно,

поскольку поперечные координаты сохраняются, $y = y'$ и $z = z'$, то остается доказать, что

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2. \quad (20.4)$$

Из преобразований Лоренца (18.6) имеем

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x), \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - V \Delta t). \quad (20.5)$$

Подставляя (20.5) в правую часть (20.4), после небольших преобразований находим, что правая часть тождественно равна левой. Таким образом, мы убедились, что

$$s^2 = s'^2. \quad (20.6)$$

Это замечательный результат! В классической механике, где верны преобразования Галилея, инвариантом является длина отрезка

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = inv. \quad (20.7)$$

Для произвольных скоростей инвариантом является интервал

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = inv. \quad (20.8)$$

Инвариантность интервала при релятивистских скоростях можно доказать формально, не прибегая к преобразованиям Лоренца. Рассмотрим два близких события, имеющие интервал

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (20.9)$$

Выше было показано, что если $ds = 0$, то и $ds' = 0$. В общем случае для $ds \neq 0$ следует ожидать

$$ds^2 = a(V) ds'^2, \quad (20.10)$$

где коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы неравноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропии пространства.

Рассмотрим три системы отсчета S, S_1, S_2 , и пусть V_1 и V_2 – скорости движения систем S_1 и S_2 относительно S . Тогда имеем:

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2 \quad ds^2 = a(V_2)ds_2^2. \quad (20.11)$$

С тем же основанием можно написать

$$ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2, \quad (20.12)$$

где V_{12} – абсолютная величина скорости движения S_1 относительно S_2 . Сравнивая друг с другом эти соотношения, найдем, что должно быть

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (20.13)$$

Но V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов V_1 и V_2 , но и от угла между ними. Между тем угол вообще не входит в левую часть соотношения. Ясно поэтому, что это соотношение может быть справедливым лишь в том случае, если функция $a(V)$ сводится к постоянной величине, равной, как это следует из того же соотношения, единице. Таким образом,

$$ds_1^2 = ds_2^2. \quad (20.14)$$

Из равенства бесконечно малых следует, что и

$$s_1 = s_2. \quad (20.15)$$

§ 21. Преобразование Лоренца как вращение в 4-мерном пространстве

Ранее мы вывели преобразования Лоренца, пользуясь очень наглядной и физической картиной, основанной на постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета. Теперь рассмотрим другой, менее прозрачный, но более короткий вывод преобразования Лоренца. Преобразование координат и времени при переходе в другую систему отсчета должно быть таким, чтобы сохранялась неизменной величина интервала в четырехмерном пространстве. Такими переходами из одной инерциальной системы в другую являются параллельные переносы и вращения системы координат. Однако переносы системы координат не представляют интереса, так как сводятся к переносу начала отсчета координат и времени. Таким образом, искомое преобразование должно быть связано с поворотом осей координат.

Введем обозначение $T = ict$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда все 4 координаты становятся равноценными и можно пользоваться евклидовой геометрией. Рассмотрим поворот осей в плоскости T, x , при этом y и z не изменяются. Из геометрических соображений нетрудно получить, что при повороте осей на угол φ координаты точки преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= T' \cos \varphi - x' \sin \varphi \\ x &= x' \cos \varphi + T' \sin \varphi. \end{aligned} \quad (21.1)$$

При таком повороте $x^2 + T^2 = x'^2 + T'^2$ или $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$, т.е. интервал сохраняется. Остается определить угол φ , который зависит от скорости V системы S' относительно S . Для этого рассмотрим движение начала отсчета системы S' . При $x' = 0$ формулы (21.1)

принимают вид

$$\begin{aligned} x &= ict' \sin \varphi, \\ t &= t' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (21.2)$$

откуда находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{ict} = -i \frac{V}{c}. \quad (21.3)$$

При получении последнего равенства мы учли, что x/t – это скорость V системы S' .

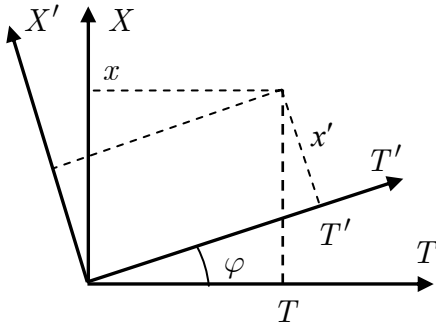


Рис. 21

Используя обычную тригонометрию, находим

$$\sin \varphi = \frac{-i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (21.4)$$

Пусть вас не удивляет, что $\operatorname{tg} \varphi$ – мнимое число, ведь это отношение двух «катетов», один из которых мнимый. Подставляя (21.4) в (21.1), получаем снова преобразования Лоренца:

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \quad (21.5)$$

§ 22. Преобразование скоростей

Пусть некоторое тело движется относительно системы отсчета S' со скоростью \mathbf{v}' . В свою очередь, S' движется относительно S со скоростью V вдоль оси OX . В кинематике Галилея скорость тела относительно S есть просто векторная сумма переносной скорости \mathbf{V} и относительной \mathbf{v}' , т. е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (22.1)$$

В релятивистской кинематике это правило сложения скоростей неверно. Для получения правильных формул продифференцируем преобразование Лоренца

$$dx = \gamma(dx' + Vdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx'). \quad (22.2)$$

Разделив dx, dy, dz на dt , получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y / \gamma}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z / \gamma}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (22.3)$$

Заменяя знак у V , получаем формулы преобразования скоростей из S в S'

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}; \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y / \gamma}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}; \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z / \gamma}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (22.4)$$

Легко убедиться, что при малых скоростях эти формулы переходят в правило Галилея для преобразования скоростей.

Пример. Если ракета летит со скоростью $V \approx c$ и выпускают вперед снаряд со скоростью $v'_x \approx c$ относительно ракеты, то согласно (22.3) скорость снаряда относительно неподвижного наблюдателя будет равна

$$v = (v'_x + V) / (1 + v'_x V / c^2) \approx c. \quad (22.5)$$

§ 23. Аберрация

Пусть в системе S' движется тело со скоростью v' под углом θ' к оси OX' . Найдем, под каким углом к оси X это тело движется в системе S (рис. 22).

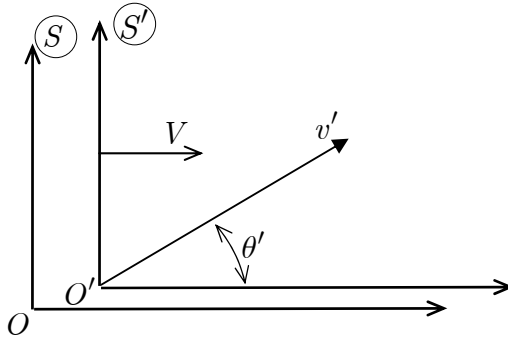


Рис. 22

Поскольку $v'_x = v' \cos \theta'$ и $v'_y = v' \sin \theta'$, то, применяя формулы преобразования скоростей (22.3), находим

$$v_x = \frac{V + v' \cos \theta'}{1 + \frac{Vv'}{c^2} \cos \theta'} \quad v_y = \frac{v' \sin \theta'}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'}{c^2} \cos \theta' \right)}. \quad (23.1)$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + V/v')}, \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - V/v)}. \quad (23.2)$$

В случае, если тело движется с предельной скоростью $v' = c$, например свет, можно легко получить выражения для $\sin \theta$ и $\cos \theta$, заметив, что и в системе S скорость света также равна c . Тогда

$$\sin \theta = \frac{v_y}{c} = \frac{\sin \theta'}{\gamma \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta' \right)}; \quad \cos \theta = \frac{v_x}{c} = \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}. \quad (23.3)$$

Этот случай ($v' = c$) называется световой аберрацией.

Обратный переход получается заменой $\theta \rightarrow \theta'$, $\theta' \rightarrow \theta$ и $V \rightarrow -V$:

$$\sin \theta' = \frac{v'_y}{c} = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)}; \quad \cos \theta' = \frac{v'_x}{c} = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (23.4)$$

Пример. Пусть в космическом корабле произошла вспышка света. Нетрудно получить направления лучей в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} \theta' = 0 &\Rightarrow \theta = 0 \\ \theta' = \pi/2 &\Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - V^2/c^2} = 1/\gamma. \\ \theta' = \pi &\Rightarrow \theta = \pi \end{aligned} \quad (23.5)$$

Видим, что свет, испущенный в системе корабля в переднюю полусферу, соберется в конус $\sin \theta = 1/\gamma$ вокруг направления движения корабля. Это явление называют «эффектом фары».

Явление аберрации искажает картину звездного неба. Рассмотрим, что увидят наблюдатели в космическом корабле. Воспользуемся формулами (23.4) и учтем, что свет от звезд падает на корабль, т. е. нужно заменить c на $-c$. Пусть в лабораторной системе луч света падает на корабль по углом θ к направлению движения. Тогда в системе корабля

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right)}. \quad (23.6)$$

Передняя полусфера неба соберется в системе отсчета корабля в угол

$$\sin \theta' = \sqrt{1 - V^2/c^2} = 1/\gamma. \quad (23.7)$$

Более того, в иллюминатор на носу корабля будут видны звезды из задней полусферы, которые не были видны, когда корабль покоился. В этом нет ничего удивительного: если дождь бьет вам на спину, то при движении вперед капли будет падать на вас спереди.

Явление звездной аберрации впервые наблюдал Брэдли в 1725 г. В результате орбитального движения Земли относительно Солнца угол, под которым видны звезды, меняется в течение года на величину $V/c \approx 10^{-4}$. Пример нерелятивистской аберрации – изменение направления падения капель дождя при движении наблюдателя.

§ 24. Эффект Доплера

При наблюдении звездного неба из кабины движущегося космического корабля меняется не только распределение звезд на небе, но и изменяется их цвет и яркость. Как известно, свет характеризуется частотой, длиной волны и скоростью распространения. Пусть волна возбуждается электронами, движущимися в плоскости XY (т. е. $z = 0$). Волна будет распространяться в направлении Z . Рассмотрим только электрическую компоненту поля. Пусть вблизи поверхности $z = 0$ $E = E_0(t)$. Тогда поле в точке с координатой z

$$E(t, z) = E_0(t - z/c), \quad (24.1)$$

т. е. равно полю у источника с задержкой z/c . Пусть $E_0 = A \cos \omega t$, тогда

$$E(t, z) = A \cos(\omega t - kz), \quad (24.2)$$

где $k = \omega/c$. В заданной точке пространства поле меняется с периодом (фаза, $\omega t - kz$, меняется на 2π)

$$T = 2\pi/\omega. \quad (24.3)$$

При фиксированном t поле имеет «гребни» и «впадины» с пространственным периодом ($k\Delta z = 2\pi$)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (24.4)$$

С другой стороны, $k = \omega/c$, откуда следуют тривиальные соотношения

$$\lambda = cT, \quad \omega\lambda = 2\pi c. \quad (24.5)$$

Пусть поле наблюдается в точке с радиус-вектором \mathbf{r} , тогда $z = r \cdot \cos \theta$ и можно записать

$$E(t, \mathbf{r}) = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (24.6)$$

Здесь \mathbf{k} – волновой вектор, направленный в сторону распространения волны, его модуль определен (24.4).

Переходим, наконец, к нашей задаче – преобразованию частоты и волнового вектора волны при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Здесь может возникнуть вопрос, зачем нужно знать преобразование вектора \mathbf{k} ? Во-первых, оказывается, между ω и \mathbf{k} имеется глубокая связь – они образуют 4-вектор; во-вторых, для квантов электромагнитного поля, фотонов, энергия и импульс равны $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ (это будет обсуждаться в разделе релятивистская динамика).

Итак, представим себе, что источник, неподвижный в системе S' , которая движется со скоростью V вдоль X , создает систему плоских электромагнитных волн, распространяющихся из начала координат O' под углом θ' с длиной волны $\lambda' = \lambda_0$ и периодом $T' = T_0 = \lambda_0/c$ (для простоты считаем, что происходят короткие вспышки через время T_0). В лабораторной системе S фронт волны движется под углом θ (рис. 23).

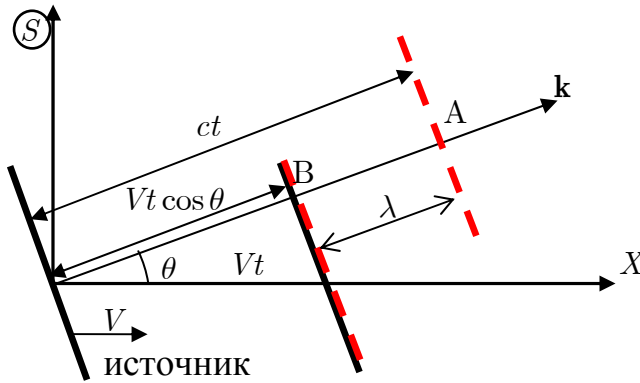


Рис. 23

Пусть первый фронт испустился при $x' = x = 0$. К моменту очередной вспышки он будет в точке А. Следующую волну в системе S источник создаст через время $t = \gamma T_0$ (фронт, проходящий через точку В), это следствие того, что в лабораторной системе время течет в γ раз медленнее, чем по часам движущегося источника волн. За это время в системе S источник сдвинется на расстояние Vt вдоль оси X . На рисунке вспышки обозначены пунктирными линиями. Длина волны, т. е. расстояние между фронтами, будет равна

$$cT = \lambda = AB = ct - Vt \cos \theta = c\gamma T_0 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right). \quad (24.7)$$

Отсюда находим
$$\frac{1}{T_0} = \frac{\gamma}{T} \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right) \quad (24.8)$$

или
$$\omega_0 \equiv \omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right) = \gamma(\omega - k_x V) = \gamma(\omega - \mathbf{kV}), \quad (24.9)$$

где k_x – проекция волнового вектора на ось X . Заменой $V \rightarrow -V$ получаем обратное преобразование

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta'\right) = \gamma(\omega' + k'_x V) = \gamma(\omega' + \mathbf{k}'\mathbf{V}). \quad (24.10)$$

Изменение частоты при движении источника называют эффектом Доплера. Формулы (24.9), (24.10) являются решением задачи в случае, когда движущийся источник испускает световую волну, перемещающуюся со скоростью c .

Из (24.9) получаем, что при $\theta = 0$

$$\omega_0 = \gamma \omega (1 - V/c) \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} = \gamma \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right). \quad (24.11)$$

В направлении, перпендикулярном движению источника ($\theta = \pi/2$),

$$\omega = \omega_0 / \gamma. \quad (24.12)$$

Заметим, что в первом случае (продольный эффект Доплера) изменение частоты $\sim V/c$, во втором (поперечный эффект) $\sim V^2/c^2$.

Эффект Доплера существует и в классике при малых скоростях источника (изменение звука сирены движущегося автомобиля). Их нельзя получить из вышеприведенных формул простой заменой скорости света на скорость звука, так как скорость звука, в отличие от света, привязана к среде и не является инвариантом при переходе из одной инерциальной системы в другую, как мы видели в начале этого параграфа.

Используя формулы (24.9) и (24.10), нетрудно получить формулы для преобразования вектора \mathbf{k} . Учитывая, что $|k| = \omega/c$, $|k'| = \omega'/c$, и формулы для аберрации света (23.4), имеем

$$k'_x = k' \cos \theta' = \frac{\omega'}{c} \cos \theta' = \gamma \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right) \frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} = \gamma \left(k_x - \beta \frac{\omega}{c}\right)$$

$$k'_y = k' \sin \theta' = \frac{\omega'}{c} \sin \theta' = \gamma \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right) \frac{\sin \theta}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right)} = \frac{\omega}{c} \sin \theta = k_y$$

$$k'_z = \dots = k_z. \quad (24.13)$$

Вспомяная определение 4-вектора (§ 19), мы видим, что четверка чисел $\left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\}$ есть 4-вектор, так как преобразуется так же, как и 4-вектор события $R\{ct, \mathbf{r}\}$, т. е. по формулам Лоренца.

Приведем еще один красивый вывод формул для преобразования ω и \mathbf{k} . В системе источника S' волна имеет вид $\cos(\omega't' - k'x')$. В неподвижной системе S поле пропорционально $\cos(\omega t - kx)$. Заметим теперь, что там, где поле равно нулю, оно равно нулю в любой системе. Отсюда следует, что фаза волны (то, что стоит в скобке) является инвариантом

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \omega't' - \mathbf{k}'\mathbf{r}' \quad (24.14)$$

или
$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega't' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'. \quad (24.15)$$

Подставляя x', y', z', t' из преобразований Лоренца и приравнявая его сомножители при t, x, y, z в левой и правой частях равенства, получаем

$$\omega = \gamma(\omega' + k'_x V), \quad k_x = \gamma(k'_x + \beta \frac{\omega'}{c}), \quad k_y = k'_y, \quad k_z = k'_z, \quad (24.16)$$

что и решает поставленную задачу.

Все эти формулы запоминать не надо. Достаточно помнить, что $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$ – это 4-вектор, который преобразуется так же, как $\{ct, \mathbf{r}\}$.

Заметим, что полученные формулы преобразования $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$ для света содержат сразу и эффект Доплера, и световую aberrацию. Действительно,

$$\sin \theta' = \frac{k'_y}{k'} = \frac{k'_y}{\omega'/c} = \frac{k_y}{\omega/c} = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right)}, \quad (24.17)$$

что совпадает с формулой (23.4).

При рассмотрении абберации был пример искажения картины звездного неба при его рассмотрении из кабины космического корабля. Было получено, что вся передняя полусфера соберется в угол $1/\gamma$. А как изменится цвет звезд? Это можно найти из формулы (24.9), только у скорости света нужно поменять знак, так как свет идет к кораблю. Иначе, знак нужно поменять, потому что для света, идущего в сторону корабля, $\cos \theta$ имеет противоположный знак по сравнению со случаем, когда свет идет от корабля. Для $\theta = 0$ получаем $\omega' = \gamma\omega(1 + V/c)$, а для звезды, находящейся в неподвижной системе под углом $\theta = \pi/2$, частота света в системе корабля $\omega' = \gamma\omega$. Таким образом, звезды соберутся в область малых углов относительно направления движения корабля и цвет их станет более коротковолновым.

§ 25. Свойства 4-векторов, собственное время, 4-вектор скорости

Ранее мы дали определение 4-вектору как четверке чисел, преобразующихся при переходе в другую инерциальную систему так же, как и 4-вектор события $R = \{ct, \mathbf{r}\}$, т. е. $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ – 4-вектор, если

$$a_0 = \gamma(a'_0 + \beta a'_1), \quad a_1 = \gamma(a'_1 + \beta a'_0), \quad a_2 = a'_2, \quad a_3 = a'_3. \quad (25.1)$$

Разница двух 4-векторов, очевидно, является тоже 4-вектором. Назовем скалярным произведением двух 4-векторов

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \quad \text{и} \quad B = \{b_0, b_1, b_2, b_3\} \quad (25.2)$$

величину

$$(AB) = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \equiv a_0 b_0 - (\mathbf{ab}). \quad (25.3)$$

Прямой подстановкой a_i, b_i , выраженных через их значения в S' системе, формула (25.1), нетрудно получить

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a'_0 b'_0 - a'_1 b'_1 - a'_2 b'_2 - a'_3 b'_3, \quad (25.4)$$

$$(AB) = (A'B') = \text{inv}, \quad (25.5)$$

т. е. скалярное произведение 4-векторов является инвариантом преобразований Лоренца. Отсюда следует, в частности, что

$$A^2 = \text{inv}, \quad (A - B)^2 = \text{inv}. \quad (25.6)$$

Пусть произошло два события $R_1 = \{ct_1, \mathbf{r}_1\}$ и $R_2 = \{ct_2, \mathbf{r}_2\}$. Квадратом разницы этих векторов является интервал между событиями

$$s^2 = (R_2 - R_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = \text{inv}. \quad (25.7)$$

Эта величина уже обсуждалась в § 20, где было показано из общих соображений, что она является инвариантом при переходе из одной инерциальной системы в другую.

Если $s^2 > 0$, то интервалы называется *времениподобными*, если $s^2 < 0$ – то *пространственноподобными*.

При $s^2 < 0$ можно найти систему отсчета, где события произошли одновременно. Действительно, если $t_2 = t_1$, то $s^2 = -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 < 0$.

При $s^2 > 0$ можно выбрать систему отсчета, где события произошли в одной точке. Действительно, если $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$, то $s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 > 0$. Для *причинно-связанных* событий, вызванных одним и тем же телом,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}(t_2 - t_1), \quad (25.8)$$

где v – скорость, с которой тело переместился из одной точки в другую. Тогда

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - v^2(t_2 - t_1)^2 > 0, \quad (25.9)$$

т. е. интервал времениподобный.

Пусть два события произошли рядом по координате и времени, тогда

$$ds^2 = c^2(dt')^2 - (d\mathbf{r}')^2 = \text{inv}. \quad (25.10)$$

Если $ds^2 > 0$, то можно найти систему, где $(d\mathbf{r}')^2 = 0$, т. е. события произошли в одном месте рядом с покоящимися там часами. Тогда

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2, \quad (25.11)$$

где τ – *собственное время*. Отсюда следует

$$c^2(dt)^2 - (dr)^2 = c^2(d\tau)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2 - v^2}{c^2} dt^2 = d\tau^2$$

$$\Rightarrow d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma. \quad (25.12)$$

Это мы уже получали ранее.

Понятие интервала и собственного времени оказывается очень полезным для конструирования других 4-векторов. Имея 4-вектор события R , можно построить 4-вектор скорости. Для этого его нужно продифференцировать по некоторой скалярной величине, имеющей размерность времени и инвариантной при преобразованиях Лоренца. Такой скаляр у нас есть – это собственное время. Определим 4-скорость соотношением

$$u_\mu = \frac{dR_\mu}{d\tau}. \quad (25.13)$$

Учитывая, что $d\tau = dt/\gamma$, находим компоненты u_μ

$$u_\mu = \{u_0, \mathbf{u}\} = \left\{ \frac{cdt}{dt/\gamma}, \frac{d\mathbf{r}}{dt/\gamma} \right\} = \left\{ \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\}. \quad (25.14)$$

Квадрат 4-скорости

$$u_\mu^2 = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = c^2 = \text{inv} \quad (25.15)$$

является инвариантом при преобразованиях Лоренца, как положено быть любому 4-вектору. 4-скорость нам понадобится для нахождения релятивистского импульса.

ГЛАВА IV

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

§ 26. Законы Ньютона

До сих пор мы рассматривали *кинматику*, раздел механики, изучающий движение тел, не вдаваясь в вызывающие его причины. Раздел механики, изучающий причины движения тел, называется *динамикой*. Существование в природе максимальной скорости движения коренным образом влияет на законы динамики. Однако вспомним сначала основные положения нерелятивистской динамики.

Еще в древности люди интересовались законами движения, однако их взгляды, основанные в основном на созерцании и философствовании, были далеки от действительности даже приближенно. Так, греческий философ Аристотель (~384 до н.э.) считал, что для всякого движения (даже с постоянной скоростью) нужно внешнее воздействие. Причину, по которой катится шар, Аристотель называл силой, которая передается шару из окружающей среды. Такие воззрения существовали очень долго. Только в начале 17 в. Галилей с помощью экспериментов ясно показал, что скорость свободного тела сохраняется сама по себе, а сила связана не со скоростью тела, а с его ускорением. Своими экспериментами он убедительно опроверг умозрительную метафизику Аристотеля и заложил фундамент классической механики. Основные же законы механики сформулировал в 1687 г. Исаак Ньютон (1642–1727).

По современным воззрениям, законы механики Ньютона верны в широкой области применимости. Однако при скоростях, близких к скорости света, нужно использовать механику Эйнштейна, а при малых размерах и скоростях ($mvr < \hbar$) – квантовую механику (см. Введение).

Выпишем, а затем рассмотрим законы Ньютона более детально.

Первый закон Ньютона

Существуют такие системы отсчета, относительно которых материальная точка (тело), при отсутствии внешних воздействий, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такое тело называется свободным, а его движение – свободным движением по инерции.

Второй закон Ньютона

В инерциальной системе отсчета ускорение, которое получает материальная точка, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально ее массе:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (26.1)$$

Третий закон Ньютона

Силы взаимодействия двух материальных точек i и j равны по модулю и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (26.2)$$

(F_{ij} – это сила, действующая на i -ую частицу со стороны j -ой частицы).

В дополнение к законам Ньютона в классической механике предполагается, что справедлив закон независимости действия сил, т. е. *взаимодействие двух материальных точек не зависит от присутствия вокруг других частиц*. Отсюда следует принцип суперпозиции сил – *резльтирующая сила, действующая на материальную точку, является векторной суммой сил взаимодействия с каждой из окружающих материальных точек*.

Может показаться, что первый закон Ньютона вытекает из второго. Действительно, если сила равна нулю, то ускорение тоже равно нулю и скорость постоянна. Однако эта точка зрения неверна. Первый закон постулирует существование инерциальных систем отсчета, привязанных к свободным телам. Исключить действие всех сил трудно, но если система отсчета привязана к свободному телу и при этом другие тела в этой системе покоятся или движутся равномерно, то такие системы отсчета можно считать инерциальными. Именно в таких системах справедлив второй закон Ньютона. В системе, связанной с вращающимся диском, тело будет ускоряться даже без приложенных к нему сил.

Рассмотрим теперь смысл второго закона Ньютона. Интуитивно ясно, что сообщить скорость пушинке легче, чем большому камню. Свойство тела «сопротивляться» попыткам изменить его скорость называется *инертностью* тела. Мера инертности – это *масса* тела. Степень воздействия одних тел на другие характеризуется *силой*. Требуется, конечно, дать точные количественные определения. Существует несколько подходов к формулировке законов динамики. Рассмотрим два из них.

Первый подход основан на законах Ньютона. В этом подходе предлагается ввести некоторый эталон силы. Это может быть, например, пружинка, растянутая на определенную длину. Указав направление силы, получим вектор эталонной силы. Складывая несколько пружинок, можно получить любую силу. Различные силы, приложенные к одному и тому же телу, сообщают ему различные ускорения, причем было замечено, что ускорение пропорционально силе

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{F}. \quad (26.3)$$

Утверждение о том, что *ускорение пропорционально действующей силе*, является содержанием второго закона Ньютона. Сила, как и ускорение, является векторной величиной. Если к материальной точке приложено несколько сил, то результирующая сила находится по правилу сложения векторов. Обозначив коэффициент пропорциональности через m , (26.3) можно записать как

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (26.4)$$

Это вовсе не очевидное утверждение, а экспериментальный факт, справедливый только при малых скоростях. Одновременно второй закон Ньютона несет в себе количественное определение массы тела. Опыт показывает, что масса является аддитивной величиной, т. е. масса равна сумме составляющих тело масс. (В релятивистском случае это неверно, поскольку при столкновениях кинетическая энергия может переходить в массу. Энергия связи также обладает массой. Так, атом водорода легче, чем сумма масс протона и электрона.)

Из третьего закона Ньютона сразу следует *закон сохранения импульса*:

$$m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2 \Rightarrow m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}. \quad (26.5)$$

Однако закон сохранения импульса и третий закон Ньютона – это не эквивалентные утверждения. Действительно, из закона сохранения импульса следует, что $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, но отсюда еще не следует, что эти силы действуют вдоль линии, соединяющей тела. Последнее утверждение, содержащееся в третьем законе Ньютона, следует из того факта, что в *замкнутой системе не только сумма сил равна нулю, но и сумма моментов сил равна нулю*. Тело не начинает само по себе вращаться. Здесь проявляется свойство изотропности пространства – если тело начнет вращаться, то в какую сторону? Из симметрии следует, что тело будет оставаться в покое.

Закон равенства действия и противодействия, очевидно, не выполняется, когда тела удалены, а скорость распространения сигнала конечна. Эту проблему можно обойти, представив, что рассматриваемые два тела обмениваются импульсами за счет перекидывания третьего тела (поля) и взаимодействие происходит только в момент локального взаимодействия третьего тела с первым.

Еще одно замечание, касающееся третьего закона Ньютона. Есть взаимодействия, когда сила направлена не вдоль линии, соединяющей точки. Например, это сила между двумя движущимися зарядами. Электрическая сила взаимодействия направлена вдоль линии между зарядами, однако магнитная компонента силы направлена иначе: перпендикулярно магнитному полю и скорости. Так что силы взаимодействия не равны друг другу и не направлены в противоположные стороны.

Следует заметить, что магнитные силы – это проявление релятивистских эффектов в электромагнитных взаимодействиях, т. е. они важны при больших скоростях, где законы Ньютона не работают в целом. При электромагнитном взаимодействии следует учитывать импульс и момент импульса электромагнитного поля. Два заряда действуют друг на друга не напрямую, а через третье «тело» – поле. Несмотря на кажущееся нарушение третьего закона Ньютона суммарный момент сил в изолированной системе оказывается равным нулю даже в релятивистском случае. Связанный с этим закон сохранения момента импульса является более общим законом, чем третий закон Ньютона: он связан с изотропностью пространства (эквивалентностью всех направлений). Это будет обсуждаться в дальнейшем подробно.

Единицы измерений

Длина

В системе СИ единицей длины является метр (м).

В системе СГСЭ единицей длины является сантиметр, $1 \text{ см} = 0.01 \text{ м}$.

Время

В обеих системах единицей времени является секунда (с).

Масса

В системе СИ единицей массы является килограмм (кг) – международный эталон.

В системе СГСЭ единицей массы является грамм, $1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$.

Сила

В системе СИ единицей силы является ньютон (Н) – это сила, сообщаящая телу с массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 , размерность $[\text{Н}] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2$.

В системе СГСЭ единицей силы является дина (обозначение: дин, дун от греч. «динамис» – сила) – это сила, сообщаящая телу с массой 1 г ускорение 1 см/с^2 , $[\text{дин}] = \text{г} \cdot \text{см/с}^2$. Отсюда

$$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин.}$$

§ 27. Импульс

Величина $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ называется в ньютоновской механике импульсом материальной точки. Покажем, что для замкнутой системы суммарный импульс сохраняется.

Закон сохранения импульса

Изменение суммарного импульса системы $\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i,k,i \neq k} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki}) = 0. \quad (27.1)$$

Смысл простой – материальные точки взаимодействуют попарно, сумма пары сил равна нулю по третьему закону Ньютона. Отсюда следует закон сохранения импульса:

$$\mathbf{P} = \sum_i m \mathbf{v}_i = \text{const.} \quad (27.2)$$

Если система незамкнутая, то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} = \sum_i \mathbf{F}_{i \text{ внеш}}, \quad (27.3)$$

т. е. скорость изменения импульса равна сумме внешних сил.

Центр масс

В нерелятивистской ньютоновской механике можно ввести понятие центра масс. Преобразуем выражение для импульса системы частиц

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right), \quad (27.4)$$

где $m = \sum m_i$. Радиус вектор

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (27.5)$$

определяет точку в системе, которая называется центром масс (ц. м.) системы. Тогда импульс системы записывается в виде

$$\mathbf{P} = m \frac{d\mathbf{R}}{dt} = m\mathbf{V}, \quad (27.6)$$

где \mathbf{V} – скорость центра масс. Ускорение центра масс

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{\text{внеш}}}{m}. \quad (27.7)$$

Таким образом, центр масс тела движется с таким же ускорением, как и материальная точка с массой, равной суммарной массе тела. Это означает также, что в нерелятивистской механике справедлив закон аддитивности масс – *масса тела равна сумме масс его частей*.

Пример. К карандашу массы m приложили силу F , перпендикулярную карандашу. Один раз сила приложена к центру карандаша, другой раз – к его концу. В каком случае ускорение центра карандаша будет больше?

Ответ. Из формулы (27.7) следует, что ускорение центра масс не зависит от того, к какой точке тела приложена сила, так что в обоих случаях ускорение ц. м. будет $a = F/m$ несмотря на то, что во втором случае наряду с поступательным движением карандаш будет еще и вращаться.

Сила как мера скорости изменения импульса

Рассмотрим альтернативный подход к определению массы и сил. Здесь первичным считается закон сохранения импульса, следующий из опытных фактов. Постулируется, что каждой частице можно приписать определенную массу m_i такую, что для замкнутой системы частиц

$$\sum \mathbf{p}_i = \text{const}, \quad \text{где } \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i \quad (27.8)$$

(в релятивистской механике также работает закон сохранения импульса, но выражение для импульса другое).

Приняв некоторую массу m_0 за эталонную, можно найти массы всех остальных частиц, исследуя их взаимодействие с эталонной частицей

$$m_i \mathbf{v}_i + m_0 \mathbf{v}_0 = m_i \mathbf{v}'_i + m_0 \mathbf{v}'_0 \Rightarrow m_i = m_0 \frac{|\mathbf{v}'_0 - \mathbf{v}_0|}{|\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i|}. \quad (27.9)$$

В этом подходе сила *определяется* как производная по времени от импульса частицы

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (27.10)$$

Соотношения (27.8), (27.10) эквивалентны второму закону Ньютона. Из опыта следует, что силы зависят от координат и скоростей. Если сила определена (известна), то (27.10) может рассматриваться как уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots). \quad (27.11)$$

Третий закон Ньютона следует из (27.8) только частично:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \equiv \mathbf{F}_{12} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (27.12)$$

Вывода о направленности сил вдоль линии, соединяющей тела, отсюда не следует. В рассматриваемом подходе, когда исходными являются не законы Ньютона, к первичным законам следует отнести, кроме закона сохранения импульса, еще закон сохранения момента импульса (о нем будет речь позже). Как было уже упомянуто, он связан с изотропностью пространства и справедлив даже в релятивистском случае.

Аддитивность масс

Обсудим еще раз одно, на первый взгляд очевидное утверждение об аддитивности масс, т. е. о том, что масса составного тела

$$m = m_1 + m_2. \quad (27.13)$$

В физике даже такие «очевидные» основополагающие утверждения нужно доказывать. Оказывается, это правило сложения масс справедливо только при малых скоростях. Посмотрим, откуда берется вывод об аддитивности масс в классической механике. Выше, при выводе уравнения движения центра масс, мы уже сделали такой вывод. Получим его другим способом: на основании закона сохранения импульса и принципа относительности.

На основании закона сохранения импульса в системе S можно записать

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m \mathbf{v}. \quad (27.14)$$

Перейдем теперь в систему отсчета S' , движущуюся прямолинейно и равномерно относительно S со скоростью \mathbf{V} . Согласно принципу относительности закон сохранения импульса справедлив и в S' системе:

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = m \mathbf{v}' . \quad (27.15)$$

В нерелятивистской механике скорости в системах S и S' связаны преобразованиями Галилея:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} . \quad (27.16)$$

Подстановка (4.12) в (4.11) дает

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) = m(\mathbf{v} - \mathbf{V}) . \quad (27.17)$$

Учитывая (27.14), получаем

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m\mathbf{V} . \quad (27.18)$$

Отсюда получаем закон аддитивности масс:

$$m = m_1 + m_2 . \quad (27.19)$$

Этот закон для химических реакций был открыт Ломоносовым и Лавуазье. В релятивистском случае это утверждение не верно.

§ 28. Задача двух тел, приведенная масса

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, сила взаимодействия которых зависит только от расстояния:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 . \quad (28.1)$$

Уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathbf{F}(\mathbf{r}), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (28.2)$$

можно упростить, введя новые переменные – радиус-вектор центра масс

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (28.3)$$

и радиус-вектор относительного расстояния

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 . \quad (28.4)$$

Внутренние силы не влияют на движение центра масс, поэтому центр масс движется с постоянной скоростью

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t. \quad (28.5)$$

Уравнение движение для относительного расстояния получается

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_2} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_1} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{\mu}, \quad (28.6)$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (28.7)$$

называют *приведенной массой*. Таким образом, задача двух тел свелась к задаче движения одного тела с массой μ под действием силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Предположим, что мы решили это уравнение и нашли $\mathbf{r}(t)$. Для нахождения координаты каждой точки нужно сначала выразить расстояние каждой частицы относительно центра тяжести через $\mathbf{r}(t)$. Расстояние частиц относительно центра масс \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 легко найти, перенеся начало отсчета в центр масс. Тогда

$$m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 = 0 \quad \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}, \quad (28.8)$$

где первое уравнение следует из (28.3), отсюда

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (28.9)$$

Полное решение

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_2 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (28.10)$$

Пример. Найти частоту колебаний двух тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружинкой с жесткостью k .

В соответствии с изложенным выше задача сводится к колебаниям тела массы $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ на пружинке жесткости k , у которой второй конец прицеплен к бесконечно тяжелой стенке.

Другой пример – это движение двух тел, связанных гравитацией (Солнце и Земля, например). Они будут оба двигаться вокруг общего центра масс. Эту задачу можно свести к вращению приведенной массы

$$\text{в силовом поле } \mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

§ 29. Реактивное движение

Любую задачу по механике можно решить, в принципе, используя законы Ньютона. Однако иногда задача решается проще, если использовать законы сохранения. Рассмотрим в качестве примера движение ракеты с реактивным двигателем.

Ускорение ракете сообщают выброшенные назад продукты горения. Пусть их скорость относительно ракеты равна u_0 . Перейдем в систему ракеты. Пусть ракета выбрасывает малую порцию газа. По закону сохранения импульса

$$m \Delta v = \Delta m_r u_0 = -\Delta m u_0, \quad (29.1)$$

где m – текущая масса ракеты, Δv – приращение скорости ракеты, Δm_r – масса порции выброшенного газа, равная убыли массы ракеты $-\Delta m$. Мы нашли приращение скорости Δv в системе ракеты, но в соответствии с преобразованиями Галилея изменение скорости будет точно таким же и в лабораторной системе отсчета. Переходя к бесконечно малым порциям газа, получаем уравнение

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u_0}. \quad (29.2)$$

В процессе ускорения масса ракеты меняется от m_0 до m , а скорость – от 0 до v . Интегрируя обе части уравнения в указанных пределах, получаем

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u_0} \int_0^v dv \Rightarrow \ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{u_0} \quad (29.3)$$

и окончательно

$$m = m_0 \exp(-v/u_0). \quad (29.4)$$

Это знаменитая формула Мещерского – Циолковского, дающая связь между оставшейся массой ракеты и набранной скоростью. В табл. 1 приведено отношение m_0/m в зависимости от скорости истечения газов при достижении ракетой первой космической скорости $v = 8$ км/с.

Таблица 1

Зависимость m_0/m от u_0 при скорости ракеты 8 км/с

u_0 , км/с	1	2	3	4
m_0/m	2980	54.6	14.5	7.4

Скорость истечения газов u_0 определяется жаропрочностью двигателя ($u_0 \sim \sqrt{T}$), при $T = 3000^{\circ}$ молекулы H_2O (кислородно-водородный двигатель) имеют скорость ~ 2 км/с. Видно, что для достижения высоких скоростей и уменьшения начальной массы ракеты нужно увеличивать скорость истечения газа. Метод сжигания газа достиг предела, дальнейшее продвижение связано с созданием ионных двигателей, где молекулы газа получают большую скорость за счет разгона в электрическом поле.

Из (29.3) легко найти зависимость скорости от времени. Если двигатель выбрасывает каждую секунду одинаковую массу газа $dm_r = -dm = a dt$, где $a = \text{const}$, то масса ракеты зависит от времени как $m = m_0 - at$. Подставляя эту массу в (29.4), получаем

$$v = u_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - at}. \quad (29.5)$$

§ 30. Работа и кинетическая энергия

Рассмотрим перемещение материальной точки (частицы) из точки 1 в 2 вдоль некоторого пути l под действием силы \mathbf{F} , которая в общем случае может зависеть от координаты, скорости и времени. На каждом участке силу можно разложить на продольную (тангенциальную) и перпендикулярную (нормальную) составляющую по отношению к линии движения. Нормальная составляющая силы вызывает ускорение, перпендикулярное траектории, которое меняет только направление скорости, а продольная сила вызывает изменение модуля скорости.

Назовем *работой* величину

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad (30.1)$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор малого перемещения, $\mathbf{F} d\mathbf{l} = F_{\parallel} dl = F \cos \alpha dl$, α – угол между силой и скоростью.

Подставляя в (30.1) $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$, получаем

$$dA = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} dt = m \frac{d(\mathbf{v}^2)}{2} = m \frac{d(v^2)}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (30.2)$$

Назовем *кинетической энергией* величину

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (30.3)$$

Тогда

$$dA = dK, \quad (30.4)$$

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (30.5)$$

т. е. *изменение кинетической энергии равно работе сил.*

Пример. Если трактор тянет сани, а они стоят на месте, то работа не совершается. Кинетическая энергия саней не меняется, никакой энергии (горючего) при этом не требуется. В этом случае трактор можно заменить натянутым канатом. Другое дело, если сани движутся, тогда совершается работа, тратится энергия.

Рассмотрим, как кинетическая энергия зависит от системы отсчета. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета имеются частицы с массами m_i , движущиеся со скоростями \mathbf{v}_i . В этой системе отсчета их кинетическая энергия равна сумме их кинетических энергий

$$K_0 = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (30.6)$$

импульс

$$\mathbf{P}_0 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (30.7)$$

Найдем теперь кинетическую энергию этих частиц в системе отсчета, в которой исходная система движется со скоростью \mathbf{V} . В этой системе скорость частицы равна $\mathbf{v}_i + \mathbf{V}$, откуда энергия всех частиц

$$K = \sum \frac{m_i (\mathbf{v}_i + \mathbf{V})^2}{2} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \mathbf{V} \sum m_i \mathbf{v}_i + \frac{\sum m_i}{2} V^2. \quad (30.8)$$

С учетом (30.6), (30.7)

$$K = K_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{V} + \frac{m V^2}{2}, \quad (30.9)$$

где $m = \sum_i m_i$. Если в исходной системе суммарный импульс частиц равен нулю (система ц. м.), то второй член в (30.9) равен нулю, потому

$$K = K_{\text{ц.м.}} + \frac{m V^2}{2}. \quad (30.10)$$

Таким образом, кинетическая энергия равна кинетической энергии в системе ц. м. плюс кинетической энергии системы как одного тела с суммарной массой.

Единицы измерений работы и энергии

В системе СИ единицей энергии является Джоуль (Дж) = Н·м.

В системе СГСЭ единицей энергии является эрг (эрг) = дин·см.

Единица энергии «Джоуль» названа так в честь английского физика, а «эрг» происходит от греческого *ergon* – работа.

Поскольку $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$, а $1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$, то

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}.$$

§ 31. Консервативные (потенциальные) и неконсервативные силы

Пусть в пространстве задана сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ такая, что работа $\int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{l}$ зависит не от траектории, а только от конечных координат. Такие силы называют *консервативными* (или *потенциальными*). Как нетрудно сообразить, в этом случае работа по замкнутому контуру равна нулю: $\oint \mathbf{F}d\mathbf{l} = 0$. Для таких сил удобно ввести понятие *потенциальной энергии*. Разность потенциальных энергий между точками 1 и 2 равна

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = -\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{l}, \quad (31.1)$$

т. е.

$$dU = -dA = -\mathbf{F}d\mathbf{l}. \quad (31.2)$$

Потенциальная энергия является скаляром (не имеет направления) и является функцией координат.

Поскольку

$$dU = U(x + dx, y + dy, z + dz) - U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (31.3)$$

и

$$dU = -dA = -\mathbf{F}d\mathbf{l} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz, \quad (31.4)$$

то отсюда
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (31.5)$$

или, поскольку по определению $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$, то

$$\mathbf{F} = -\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}U - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}U - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}U \equiv -\vec{\nabla}U \equiv -grad U \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (31.6)$$

где *оператор* (набла)

$$\vec{\nabla} = \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (31.7)$$

который, действуя на скалярную функцию, превращает ее в вектор.

В общем случае U является некоторой скалярной функцией координат x, y, z и для нахождения силы нужно использовать (31.6). Если же U зависит только от расстояния от начала координат, $U = U(r)$, то $\frac{dU}{d\mathbf{r}}$ можно привести к более простому выражению. В этом случае

$$\frac{dU(r)}{d\mathbf{r}} = \mathbf{i} \frac{\partial U(r)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U(r)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U(r)}{\partial z} = \frac{\partial U(r)}{\partial r} \left(\mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right). \quad (31.8)$$

Поскольку $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$. Отсюда

$$\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial U(r)}{\partial r} \left(\mathbf{i} \frac{x}{r} + \mathbf{j} \frac{y}{r} + \mathbf{k} \frac{z}{r} \right) = \frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (31.9)$$

Следовательно, потенциал $U(r)$ соответствует силе, направленной по радиусу, и для ее вычисления достаточно взять простую производную по радиусу.

Заметим, что поскольку потенциальная энергия является интегралом от силы, то она определена с точностью до константы. Для нахождения потенциальной энергии во всем пространстве нужно выбрать начало отсчета и задать в этой точке некоторую потенциальную энергию.

Рассмотрим несколько примеров консервативных (потенциальных) и неконсервативных (непотенциальных) сил.

Однородное поле тяжести

Выбираем направление: \mathbf{X} – вверх, \mathbf{g} – вниз, тогда сила тяжести

$$\mathbf{F}(x) = m\mathbf{g}, \quad (31.10)$$

работа и потенциальная энергия

$$dA = m\mathbf{g}d\mathbf{l} = -mg dx, \quad dU = -dA = mg dx, \quad (31.11)$$

$$U(x) - U(a) = mg(x - a), \quad (31.12)$$

где a – точка отсчета потенциальной энергии. Поскольку явным образом найдено выражение для потенциальной энергии как функции координаты, то поле потенциально.

Осциллятор (тело на пружинке)

$$\mathbf{F}(x) = -kx, \quad (31.13)$$

$$dA = -kx dx, \quad dU = -dA = kx dx,$$

$$U(x) - U(a) = \frac{1}{2}k(x^2 - a^2) \quad (31.14)$$

– поле потенциально.

Центральное поле

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (31.15)$$

$$dA = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{l} = F(r) dr, \quad dU = -dA = -F(r) dr,$$

здесь было учтено, что $\mathbf{r} d\mathbf{l} = r dr$,

$$U = - \int_{r_0}^r F(r) dr + U(r_0). \quad (31.16)$$

Поле потенциально, так как работа по замкнутому контуру

$$\oint dA = \oint F(r) dr = \int_{r \min}^{r \max} F(r) dr + \int_{r \max}^{r \min} F(r) dr = 0.$$

Кулоновское поле (частный случай центрального поля)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (31.17)$$

$$dA = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{l} = \alpha \frac{dr}{r^2}, \quad dU = -dA = -\alpha \frac{dr}{r^2},$$

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} + \text{const}, \quad (31.18)$$

поле потенциально. Обычно полагают $U(\infty) = 0$, т. е. $\text{const} = 0$. Если сила отталкивающая, то $\alpha > 0$ и $U(r) > 0$, а для сил притяжения $\alpha < 0$ и $U(r) < 0$.

Сила трения

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -a(v) \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (31.19)$$

где $a(v) > 0$, т. е. сила направлена против скорости. Работа сил по замкнутой траектории

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{F} \mathbf{v} dt = - \oint a(v) v dt < 0 \neq 0 \text{ – сила непотенциальная.}$$

§ 32. Закон сохранения энергии

Для тела в потенциальном поле

$$dU + dK = 0, \quad (32.1)$$

тогда *полная (механическая) энергия* материальной точки

$$E = K + U = \text{const}, \quad (32.2)$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \quad (32.3)$$

Рассмотрим теперь систему частиц, взаимодействующих посредством потенциальных сил. Кинетическая энергия системы равна

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (32.4)$$

Найдем потенциальную энергию. Сила взаимодействия частиц i и j

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (32.5)$$

Сила, действующая на i -ую частицу,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}, \quad (32.6)$$

тогда потенциальную энергию системы можно записать в виде

$$-dU = dA = \sum_i d\mathbf{r}_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_i d\mathbf{r}_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_j d\mathbf{r}_j \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ji} \right). \quad (32.7)$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ и $d\mathbf{r}_{ij} = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j$, получаем

$$dU = \sum_i dU_i = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j d\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij}. \quad (32.8)$$

Здесь i может равняться j , так как при этом $d\mathbf{r}_{ij} = 0$.

Пусть $\mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_{ij} \equiv -dU_{ij}$ по определению, назовем $U_i = \sum_{j \neq i} U_{ij}$ потенциальной энергией частицы i в поле остальных частиц, тогда в соответствии с (32.8) полная потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i U_i. \quad (32.9)$$

Здесь $\frac{1}{2}$ возникает, потому что при суммировании U_{ij} дважды учитываем взаимодействие частиц i и j . Таким образом, полная потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий пар частиц.

Рассмотрим, например, два заряда. Потенциальная энергия первого заряда в поле второго равна $U_1 = \frac{q_1 q_2}{r}$, потенциальная энергия второго заряда в поле первого равна $U_2 = U_1$, и общая потенциальная энергия –

$$U = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Для нахождения потенциальной энергии пары можно первую частицу закрепить, а вторую перемещать, так как $dU = -\mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 - \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2 = -\mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_{21}$, $d\mathbf{r}_{21} = d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1$. Итак,

$$dK + dU = 0, \quad (32.10)$$

$$E = K + U = \text{const}, \quad (32.11)$$

здесь E – полная механическая энергия частиц, K – это кинетическая энергия частиц в системе, U – потенциальная энергия частиц.

Примеры.

1. Тело, летящее в однородном гравитационном поле Земли:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}. \quad (32.12)$$

2. Равновесие качелей с массами m_1 и m_2 и плечами l_1 и l_2 .

Для равновесия качелей требуется, чтобы потенциальная энергия не изменялась при наклоне качелей (тогда не возникает движения). Поскольку потенциальная энергия

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \quad (32.13)$$

$$dU = m_1 g dh_1 + m_2 g dh_2 = g(m_1 l_1 - m_2 l_2) d\alpha = 0, \quad (32.14)$$

где $d\alpha$ – угол наклона качелей. Система находится в равновесии при

$$m_1 l_1 = m_2 l_2. \quad (32.15)$$

Получили правило рычага. В такой системе можно поднимать одно тело за счет опускания другого. Здесь кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия одного тела переходит в потенциальную энергию другого тела.

3. Упругое столкновение шариков.

Здесь, наоборот, потенциальная энергия равна нулю, но сохраняется кинетическая энергия.

4. Энергия тел, связанных кулоновской силой.

Рассмотрим сначала два тела. Здесь (рис. 24)

$$dU = -dA = -\sum \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad (32.16)$$

$$dA = F dr_1 + F dr_2 = F(dr_1 + dr_2) = F dr = -dU, \quad (32.17)$$

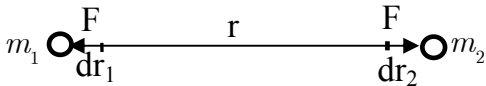


Рис. 24

т. е. изменение потенциальной энергии такое же, как если бы одна из масс была закреплена, о чем уже говорилось выше. Закон сохранения энергии для этого случая

$$K_1 + K_2 + U = const. \quad (32.18)$$

Для электростатического взаимодействия

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{r} = const. \quad (32.19)$$

В случае гравитационного притяжения

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = const. \quad (32.20)$$

Пример. Имеется 4 одинаковых частицы с зарядом q , массой m , расположенные в углах квадрата со стороной b . Частицы отпускают, какая будет скорость частиц на бесконечности?

Решение. Из симметрии ясно, что скорости всех частиц будут одинаковы. Найдем исходную потенциальную энергию системы частиц. Расстояние от первой частицы до остальных трех составляет $r_{12} = b$, $r_{13} = \sqrt{2b}$, $r_{14} = b$, ее потенциальная энергия в поле остальных трех частиц $U_1 = q^2 \left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{14}} \right) = \frac{q^2}{b} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Остальные частицы имеют такие же энергии. Полная энергия

$$U = \frac{1}{2} \times 4U_1 = 2U_1 = \frac{q^2}{b} (4 + \sqrt{2}). \quad (32.21)$$

Здесь фактор $1/2$ появляется потому, что при суммировании потенциальных энергий всех частиц каждая пара учитывается дважды.

Из закона сохранения энергии начальная энергия (*in-ital*) равна конечной (*f-inal*)

$$K_{in} + U_{in} = K_f + U_f. \quad (32.22)$$

Учитывая, что $K_{in} = 0$, $U_{in} = U$, $K_f = 4 \times \frac{mv_\infty^2}{2}$, $U_f = 0$, находим

$$v_\infty = q \sqrt{\frac{2 + 1/\sqrt{2}}{mb}}. \quad (32.23)$$

5. Внутренняя энергия тела.

Если тело не вращается как единое целое, то у него есть *внутренняя энергия тела* $E_{вн}$, которая состоит из кинетической (тепловой) и потенциальной энергии взаимодействующих частиц.

При столкновении макроскопических тел кинетическая энергия может переходить частично во внутреннюю энергию, но полная энергия все равно сохраняется.

$$E = K + U + E_{вн} = \text{const}. \quad (32.24)$$

Здесь $E_{вн}$ – это кинетическая и потенциальная энергия частиц внутри тел. В случае вращающихся тел добавляется еще энергия вращения (глава IX «Движение твердого тела»).

§ 33. Действие непотенциальных сил

Если в системе все силы потенциальны, то $E = K + U$ сохраняется. Если на систему действует некая непотенциальная сила, то полная энергия будет меняться.

Простейший пример – это сила трения. При движении тела по горизонтальному столу гравитационная потенциальная энергия постоянна, а изменение кинетической энергии за счет силы сухого трения

$$dK = -F_{\text{тр}} dl = -kPdl, \quad (33.1)$$

где k – коэффициент трения.

Рассмотрим теперь более сложный пример: торможение спутника, летающего вокруг Земли по круговой орбите. Сила торможения за счет остаточного газа направлена против скорости. Как будет меняться скорость спутника и радиус орбиты?

Решение. Радиус орбиты находится из условия, что притяжение Земли обеспечивает центростремительное ускорение, необходимое для движения по круговой орбите

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}. \quad (33.2)$$

Отсюда кинетическая энергия спутника

$$K = \frac{mv^2}{2} = G \frac{mM}{2r}. \quad (33.3)$$

Потенциальная энергия (притяжение)

$$U = -G \frac{mM}{r}. \quad (33.4)$$

Сравнивая (33.3), (33.4), мы видим, что при движении по круговой орбите

$$K = -\frac{U}{2}, \quad E = K + U = -K = \frac{U}{2}. \quad (33.5)$$

Поскольку сила трения направлена против скорости, то работа силы трения ведет к уменьшению полной энергии

$$dE = -F_{\text{тр}} dl = -F_{\text{тр}} v dt, \quad (33.6)$$

здесь $F_{\text{тр}} > 0$, следовательно (см. (33.5))

$$dK = -dE = F_{\text{тр}} v dt, \quad (33.7)$$

т. е. *кинетическая энергия увеличивается*. Странный результат: тело тормозится, но при этом ускоряется! Свободная частица всегда теряет скорость при действии сил трения. Разгадка странного поведения падающего спутника состоит в том, что в данной задаче происходит *подкачка кинетической энергии за счет уменьшения потенциальной энергии*. Изменение потенциальной энергии

$$dU = 2dE = -2F_{\text{тр}} v dt. \quad (33.8)$$

Поскольку U уменьшается, то из (33.4) следует, что *радиус орбиты уменьшается*. Мы еще будем подробно заниматься движением планет и спутников в центральном поле в дальнейшем.

Подведем некоторое резюме. При рассмотрении потенциальной и кинетической энергии мы взяли уравнение движения (второй закон Ньютона), умножили обе части на вектор перемещения и проинтегрировали. В результате *вместо уравнения второго порядка (содержащего вторую производную координаты, т. е. ускорение) получили уравнение первого порядка (содержит скорость), которое по физике эквивалентно исходному уравнению движения*. Однако введенные понятия, такие как работа, кинетическая энергия, закон сохранения механической энергии, оказываются очень плодотворными и помогают проще решать многие задачи.

Было установлено, что существует большой класс потенциальных сил (взаимодействий), работа которых зависит только от начальной и конечной точки, а не от конкретного пути, что позволяет ввести понятие потенциальной энергии. Потенциальная энергия определяется с точностью до константы, поэтому за ноль может быть принята любая удобная точка (например, бесконечность для убывающих сил). При движении под действием таких сил полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергии, сохраняется. Действие непотенциальной силы (такой как сила трения) приводит к изменению полной энергии.

Для нахождения суммарной потенциальной энергии в системе частиц, связанных потенциальными силами, нужно просто просуммировать потенциальные энергии всех пар частиц. Энергия каждой пары зависит только от расстояния между частицами. Для нахождения потенциальной энергии двух частиц нужно закрепить одну из частиц

(любую) и найти работу сил по перемещению второй частицы от места нахождения до места, откуда отсчитывается потенциальная энергия (или наоборот, но тогда с обратным знаком).

§ 34. Электромагнитное и гравитационное взаимодействие, поле

В природе встречаются различные проявления сил, но в их основе лежат всего четыре вида взаимодействий: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Первые два действуют только на очень малых расстояниях ($<10^{-13}-10^{-16}$ см), а два последних являются дальнедействующими. Электромагнитные силы определяют строение атомов и молекул, но и упругость пружинки и силы трения – это тоже проявление электрических сил. Гравитационные силы намного слабее электрических: так сила гравитационного притяжения электрона к протону в 10^{39} раз слабее, чем сила электрического притяжения. Однако в природе существует одинаковое количество положительных и отрицательных электрических зарядов, поэтому большие тела, как правило, электрически нейтральны. Гравитационные же силы пропорциональны массам, т. е. все гравитационные «заряды» имеют одинаковый знак, поэтому такой компенсации нет. Гравитационные силы являются доминирующими во многих практических случаях, определяют движение небесных тел, галактик и Вселенной в целом.

При электромагнитном, гравитационном (и всяком другом) взаимодействии частицы действуют друга на друга на расстоянии. Как это возможно? Это очень сложный вопрос, выходящий за рамки классической механики. Выражаясь языком квантовой теории поля, взаимодействия осуществляются путем обмена виртуальными частицами – переносчиками взаимодействий. В электромагнитных взаимодействиях таким переносчиком является фотон, в гравитационных – гравитон, в слабых – W и Z бозоны, в сильных – глюоны. Электромагнитное и гравитационное поле на больших расстояниях можно описывать на языке классической физики, в которой считается, что частицы создают вокруг себя некое (материальное) *поле*, которое оказывает воздействие на другую частицу с силой, пропорциональной *напряженности* поля в данном месте.

Понятие поля возникло и плодотворно используется в классической физике уже давно, давайте и мы рассмотрим некоторые свойства поля на примере электрического взаимодействия (выводы легко перенести на гравитационное взаимодействие). Детально электрические явления

изучаются в курсе электродинамики, здесь мы рассмотрим только некоторые механические аспекты.

Электрическое поле

Выше мы ввели понятия работы и энергии в общем случае, сейчас рассмотрим их более подробно на примере электрических и гравитационных сил, которые очень схожи в нерелятивистском случае.

Сила взаимодействия двух электрических зарядов в системе СГСЭ

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (34.1)$$

их потенциальная энергия:

$$U = - \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = \frac{q_1 q_2}{r} + \text{const}. \quad (34.2)$$

Считая, что $U(\infty) = 0$, получаем

$$U = \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (34.3)$$

Силу взаимодействия первого заряда на второй можно записать в виде

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} = q_2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{q_1}{r^3} \mathbf{r}, \quad (34.4)$$

где \mathbf{E} – электрическое поле, создаваемое первой частицей. В этом случае потенциальная энергия взаимодействия будет

$$U_{21} = q_2 \varphi, \quad (34.5)$$

где

$$\varphi = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{q_1}{r}. \quad (34.6)$$

Теорема Гаусса

Поля, спадающие с расстоянием как $1/r^2$, удобно изображать силовыми линиями, плотность которых пропорциональна напряженности поля. Нетрудно видеть, что *поток поля* через любую сферическую поверхность, охватывающую заряд, не зависит от расстояния этой поверхности от заряда. Действительно

$$\text{площадь сферы} \times E = 4\pi r^2 \frac{q}{r^2} = 4\pi q. \quad (34.7)$$

В общем случае определим поток как $\int_S \mathbf{E} ds$, где $ds = ds \mathbf{n}$, \mathbf{n} – единичный вектор, перпендикулярный к поверхности в каждой ее точке и направленный наружу из рассматриваемой замкнутой поверхности, тогда

$$\int_S \mathbf{E} ds = \int_S \frac{q}{r^3} \mathbf{r} ds = q \int \frac{ds_{\perp}}{r^2} = q \int d\Omega = 4\pi q. \quad (34.8)$$

Полученное соотношение называется *теоремой Гаусса*. Это основная теорема электродинамики, которая применяется для вычисления электрических полей и входит в систему уравнений Максвелла. Она выражает связь между потоком напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность и зарядом в объеме, ограниченном этой поверхностью. Эта теорема справедлива только для полей, спадающих с расстоянием как $1/r^2$.

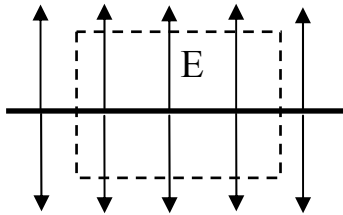


Рис. 25

Используя теорему Гаусса, легко найти электрические поля в простейших конфигурациях.

Поле от заряженной плоскости

Пусть плоскость имеет заряд с поверхностной плотностью $\sigma = Q/S$. Охватываем заряд поверхностью в виде цилиндра с единичной площадью дна (рис. 25), тогда из теоремы Гаусса (боковые поверхности не дают вклад в поток) находим $2E = 4\pi\sigma$, отсюда

$$E = 2\pi\sigma. \quad (34.9)$$

Примечание. Для обозначения величины заряда здесь используются буквы q или Q , первая для точечного заряда, вторая для заряда, распределенного в пространстве.

В плоском конденсаторе имеется две параллельные пластины с противоположными зарядами. Между пластинами поля складываются и суммарное поле $E = 4\pi\sigma$, а снаружи поля вычитаются и $E = 0$.

Поле заряженной нити

Пусть нить заряжена с линейной плотностью $\lambda = Q/l$. Охватывая нить цилиндром радиуса r и единичной длины и применяя теорему Гаусса, находим $2\pi r E = 4\pi\lambda$, отсюда

$$E = \frac{2\lambda}{r}. \quad (34.10)$$

Поле снаружи и внутри заряженной сферы

Из симметрии силовые линии поля, исходящие от заряженной сферы, представляют собой симметричный «ежик». Охватывая сферу с зарядом Q сферической поверхностью радиуса r , из теоремы Гаусса получаем $4\pi r^2 E = 4\pi Q$ и поле

$$E = \frac{Q}{r^2}, \quad (34.11)$$

такое же, как поле точечного заряда.

Внутри заряженной сферы если и есть какое-то поле, то из симметрии оно должно быть радиальным. Охватывая центр сферы поверхность с радиусом меньшим, чем радиус заряженной сферы, получаем, что охваченный поверхностью заряд равен нулю, а следовательно, и поле внутри заряженной сферы равно нулю.

Потенциал заряженной сферы

Раз поле от заряженной сферы такое же, как и от точечного заряда, то и потенциал на поверхности сферы будет таким же:

$$\varphi = \frac{Q}{R}, \quad (34.12)$$

где R – радиус сферы.

Потенциальная энергия заряженной сферы

Мы знаем, как находить потенциальную энергию для дискретных зарядов, здесь же заряд равномерно распределен по поверхности сферы. Рассмотрим несколько подходов к этой задаче.

Потенциальная энергия – это фактически работа поля, которую необходимо затратить, чтобы собрать на сферу заряды, находящиеся исходно на бесконечности. Пусть на сфере уже есть некий промежуточный заряд Q , тогда потенциал сферы $\varphi = Q/R$. Работа по переносу

очередной порции заряда dQ с бесконечности на поверхность сферы равна

$$dA = \varphi dQ = \frac{Q}{R} dQ. \quad (34.13)$$

Интегрируя заряд от нуля до Q_0 , получаем

$$U = \int_{\infty}^R dA = \int_0^{Q_0} \varphi dQ = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{R} dQ = \frac{Q_0^2}{2R}. \quad (34.14)$$

Следует заметить, что в (34.14) нет привычного знака минус перед интегралом от работы, поскольку в данном случае dA – это не работа, которую совершает поле над зарядами, а работа внешних сил по перемещению зарядов. Она имеет противоположный знак.

Потенциальная энергия заряженного шара

Пусть заряд Q_0 однородно распределен по объему шара радиуса R . Поле внутри шара на расстоянии r от центра создается только зарядами, которые находятся ближе к центру, тогда

$$E = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{r^2} = \frac{Q_0}{R^3} r. \quad (34.15)$$

Поле равно нулю в центре и линейно растёт от центра до поверхности шара, а далее спадает как поле от точечного заряда $E = \frac{Q_0}{r^2}$.

Для нахождения потенциальной энергии шара будем, как и в предыдущей задаче, добавлять заряд малыми порциями, при этом размер шара будет нарастать с нуля до R . Если шарик уже имеет размер r , то его потенциал

$$\varphi = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{r} = \frac{Q_0}{R^3} r^2. \quad (34.16)$$

Далее заметим, что приращение заряда связано с приращением радиуса как произведение плотности заряда на объем сферического слоя

$$dQ = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3Q_0}{R^3} r^2 dr. \quad (34.17)$$

Потенциальную энергию находим аналогично (34.14)

$$U = \int_0^{Q_0} \frac{Q_0}{R^3} r^2 dQ = \int_0^R \frac{Q_0}{R^3} r^2 \frac{3Q_0}{R^3} r^2 dr = \int_0^R \frac{3Q_0^2}{R^6} r^4 dr = \frac{3Q_0^2}{5R}. \quad (34.18)$$

Энергия поля

Выше мы нашли потенциальную энергию для сферы и шара. А где находится эта энергия? Найдем связь между плотностью потенциальной энергии и величиной поля.

Возьмем заряженную сферу. Ее энергия (34.14) $U = \frac{Q_0^2}{2R}$. Уменьшим радиус на dR (положительная величина), изменение потенциальной энергии будет (дифференцируем U и учитываем, что изменение радиуса равно $-dR$)

$$dU = \frac{Q_0^2}{2R^2} dR. \quad (34.19)$$

В чем состоит разница в конфигурации полей? Во втором случае добавилось поле в слое толщиной dR вблизи поверхности, где его величина составляла $E = \frac{Q_0}{R^2}$. Нетрудно заметить, что

$$dU = \left(\frac{Q_0}{R^2} \right)^2 \frac{4\pi R^2 dR}{8\pi} = \frac{E^2}{8\pi} dV, \quad (34.20)$$

следовательно *плотность энергии электрического поля*

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (34.21)$$

Это важный результат! *Поле – это не фиктивная конструкция, передающая взаимодействие, а материальная среда, обладающая плотностью энергии.*

Потенциальная энергия взаимодействия нескольких заряженных частиц – это энергия, сосредоточенная в поле, но не вся энергия поля, а только ее изменение, связанное с перекрывтием полей отдельных частиц.

Гравитационное взаимодействие

Практически все сказанное выше про электрическое поле справедливо для гравитационного взаимодействия. На самом деле, физическая природа этих взаимодействий совершенно разная, но пока мы рассмат-

риваем слабые гравитационные поля, малые скорости, а разница между ними только в том, что одноименные электрические заряды отталкиваются, а гравитационные силы – это силы притяжения.

$$\mathbf{F}_{\text{гп}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad G = 6,667 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1} \text{ г}^{-1} = 6,667 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1} \text{ кг}^{-1}. \quad (34.22)$$

Таблица 2

Соответствие между электрическим и гравитационным полями

	Электрическое взаимодействие	Гравитационное взаимодействие
F	$\frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$	$-G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$
φ	$\frac{q}{r}$	$-G \frac{m}{r}$
E	$\frac{q}{r^3} \mathbf{r}$	$-G \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$
u (пл. энергии)	$\frac{E^2}{8\pi}$	$-\frac{1}{G} \frac{E^2}{8\pi}$
U сферы	$\frac{q^2}{2R}$	$-G \frac{m^2}{2R}$
U шара	$\frac{3q^2}{5R}$	$-G \frac{3}{5} \frac{m^2}{R}$

Примечание. При сравнении формул для плотности энергии вы заметите разницу, которая связана с наличием константы гравитационного взаимодействия в гравитационной силе и отсутствием таковой в электрической силе. Это связано с тем, что в системе единиц СГСЭ единица электрического заряда определена так, что в формуле для силы константа равна единице (в системе СИ это не так). Можно было бы так же переопределить единицу массы, чтобы в гравитационном взаимодействии константа G равнялась единице, тогда была бы полная симметрия в формулах.

§ 35. Классический радиус электрона, черные дыры

Классический радиус электрона

Какой размер у электрона? Это один из самых интригующих вопросов, на который уже более 50 лет пытаются дать ответ. Пусть электрон имеет размер r_e , тогда он должен обладать электромагнитной энергией

$$E_{\text{эм}} \approx \frac{e^2}{r_e}. \quad (35.1)$$

В последующих главах будет показано, что полная энергия любого тела равна $E = mc^2$. Поскольку электромагнитная составляющая энергии не может быть больше полной энергии, то, казалось бы, радиус электрона должен быть больше, чем

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{9 \cdot 10^{-28} (3 \cdot 10^{10})} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (35.2)$$

Здесь все выражено в единицах СГСЭ. Этот размер называют *классическим радиусом электрона*.

Первая попытка измерить радиус электрона была предпринята в 1964–1965 гг. в Институте ядерной физики в Новосибирске и в Стэнфорде, США, на ускорителях со встречными электрон-электронными пучками. Было установлено, что радиус электрона меньше, чем 10^{-14} см. В дальнейшем, с ростом энергии ускорителей, эта граница была опущена до 10^{-17} см. Пока имеется только верхнее ограничение на размер электрона, но ясно, что он существенно меньше классического радиуса электрона. Как такое может быть?

Оценка для энергии электрического поля (35.1) написана для покоящегося электрона. Однако на малых расстояниях классическая механика неприменима, здесь нужно пользоваться квантовой механикой (глава XIII). Согласно квантовой механике частицу невозможно локализовать в области меньшей ее комптоновской длины волны

$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$. Для электрона этот размер в $\frac{\hbar c}{e^2} \approx 137$ раз больше его клас-

сического радиуса электрона. Ввиду квантового «дрожания» электрона его электрическое поле не успевает сконцентрироваться на малых расстояниях, вследствие этого с уменьшением радиуса энергия поля растет не как $1/r$, а существенно медленнее, логарифмически. Однако

расходимость энергии поля при стремлении радиуса к нулю остается. Теоретики научились в расчетах обходить эту проблему, оперируя только наблюдаемой массой электрона, но теории, описывающей механизм сокращения расходимостей, пока нет.

Интересно, чем ограничена точность, с которой измеряют размер электрона (и других частиц)? Для того, чтобы сблизить два электрона на расстояние, равное классическому радиусу электрона, достаточна энергия порядка $mc^2 \approx 1$ МэВ (мегаэлектронвольт). Однако более жесткое требование к энергии частиц связано с волновой природой частиц.

Длина волны частицы равна $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \approx \frac{2 \cdot 10^{-14}}{E[\text{ГэВ}]}$ см, и невозмож-

но почувствовать размер объекта, который существенно меньше длины волны частиц, сталкивающихся в ускорителе. Поэтому для исследования размеров порядка классического радиуса электрона потребовался ускоритель с энергией более 100 МэВ.

Черные дыры

Аналогично проблеме радиуса электрона для гравитационных взаимодействий есть проблема, заключающаяся в том, что при уменьшении радиуса тела его (отрицательная) гравитационная энергия сравнивается по модулю с полной энергией mc^2 . Радиус тела, соответствующий равенству (по модулю) энергии покоя тела и потенциальной гравитационной энергии

$$mc^2 \approx G \frac{m^2}{r_s} \quad \Rightarrow \quad r_s = \frac{Gm}{c^2}, \quad (35.3)$$

соответствует радиусу, при котором происходит гравитационный коллапс и образуется *черная дыра*. Из черных дыр не может вылететь даже свет, поэтому они «черные», зато черные дыры захватывают пролетающую мимо материю.

Первые представления о черных дырах относятся к концу 18 в., однако математически их удалось описать только с возникновением общей теории относительности Эйнштейна (1915–1916). Позднее были найдены условия, при которых образуются черные дыры. При массах звезд больше трех масс Солнца после выгорания термоядерного топлива никакие силы не могут предотвратить гравитационный коллапс. Для таких масс радиус r_s составляет примерно 10 км. Однако очень часто в конце выгорания ядерного топлива происходит сброс внешней оболочки и масса звезды становится недостаточной для коллапса. Дру-

гое место, где очень вероятно образование черных дыр, – это центры галактик. Так, в нашей Галактике в центре находится черная дыра с массой $M = 4,3 \cdot 10^6 M_{\odot}$ (M_{\odot} – масса Солнца). В центре многих галактик находятся черные дыры с массами до 10^{10} масс Солнца.

Для внешнего наблюдателя коллапсирующая материя сжимается до радиуса r_s и далее картинка как бы застывает (этот эффект замедления времени описывается общей теорией относительности), однако в системе падающей к центру материи все развивается быстро и плотность растет формально до бесконечности.

Интересно, если черная дыра имеет массу порядка солнечной (M_{\odot}), то ее плотность больше плотности ядерной материи (10^{15} г/см³), однако с ростом массы $r_s \propto m$, поэтому плотность падает: $\rho \sim \frac{m}{r_s^3} \sim \frac{c^6}{m^2 G^3}$.

Для черных дыр с массой $10^{10} M_{\odot}$ плотность будет $\sim 10^{-4}$ г/см³, т. е. на порядок меньше плотности воздуха. Наблюдатель, живущий недалеко от центра такой галактики, может не заметить, как со временем к центру галактики соберется столько материи, что он окажется живущим в черной дыре. Размер такой черной дыры пропорционален массе, т. е. для рассматриваемого случая будет $r_s \sim 10^{10}$ км, а время схлопывания порядка r_s/c , что составляет около одних суток.

§ 36. Распады, упругие и неупругие столкновения частиц

Столкновения частиц на ускорителях (коллайдерах, collide – сталкивать) являются основным способом изучения материи. В этой лекции рассматривается динамика столкновений и распадов в нерелятивистском случае.

Распады

Пусть частица массой m , двигавшаяся со скоростью v , распадается на две частицы с массами m_1 и m_2 с выделением энергии Q . Какие будут скорости частиц, если после распада первая частица полетела под углом θ относительно исходного направления?

В нерелятивистской механике суммарная масса частиц сохраняется, т. е. $m = m_1 + m_2$. Кинетическая энергия осколков Q в системе покоя исходной частицы возникает за счет, например, химической энергии

взрывчатки. Отсюда находим импульсы и скорости осколков в системе покоя исходной частицы

$$Q = \frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2}; \quad p_0 = \sqrt{\frac{2Qm_1m_2}{m_1 + m_2}}; \quad v_{10} = \frac{p_0}{m_1}. \quad (36.1)$$

Скорость первого осколка в лабораторной системе отсчета

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{10}. \quad (36.2)$$

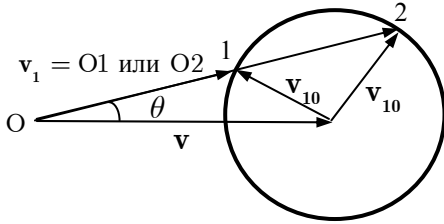


Рис. 26

Поскольку у нас задано направление первой частицы после столкновения, т. е. угол между \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 , то нужно переписать это соотношение в виде $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \mathbf{v}_{10}$, тогда после возведения в квадрат обеих частей получаем

$$v_1^2 - 2vv_1 \cos \theta + v^2 - v_{10}^2 = 0. \quad (36.3)$$

Отсюда

$$v_1 = v \cos \theta \pm \sqrt{v^2 \cos^2 \theta - v^2 + v_{10}^2} = v \cos \theta \pm \sqrt{v_{10}^2 - v^2 \sin^2 \theta}. \quad (36.4)$$

Происхождение двойного решения ясно из рис. 26.

При $v > v_{10}$ имеется максимальный угол $\sin \theta = \frac{v_{10}}{v}$, при этом вектор \mathbf{v}_1 является касательным к окружности на рис. 26.

При $v < v_{10}$ имеется всего одно решение, соответствующее знаку «+» в (36.4), иначе v_1 была бы отрицательна.

Неупругие столкновения (слипания)

Тело массы m_1 , летящее со скоростью v_1 , слипается с покоящимся телом массы m_2 . Какая будет конечная скорость и сколько энергии перейдет в тепло?

Из закона сохранения импульса конечная скорость равна

$$v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad (36.5)$$

тогда из закона сохранения энергии количество выделенного тепла равно

$$Q = K - K' = \frac{m_1 v_1^2}{2} - (m_1 + m_2) \frac{v'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (36.6)$$

§ 37. Упругие столкновения

Частица с массой m_1 , летящая со скоростью v_1 , упруго рассеивается

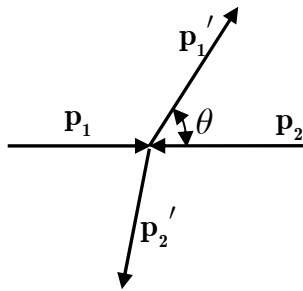


Рис. 27

на частице с массой m_2 , летящей навстречу со скоростью v_2 . Какая будет конечная скорость первой частицы, если она рассеялась на угол θ ?

В упругом столкновении, по определению, кинетическая энергия сохраняется, т. е. не переходит во внутреннюю энергию тел (тепло). Дополнительно мы предполагаем, что тела после удара не вращаются. В случае бильярдных шаров для этого необходимо, чтобы шары были абсолютно гладкими (нулевая сила трения), тогда при столкновении между шарами будут действовать только радиальные силы и вращения не возникнет. В этом случае для решения задачи достаточно воспользоваться законами сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad (37.1)$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}. \quad (37.2)$$

При рассеянии двух частиц начальные и конечные частицы лежат в одной плоскости, в этом случае векторное уравнение (37.1) представляет собой два уравнения: сохранение продольного и поперечного импульсов. Фактически есть три уравнения, заданы p_1 , p_2 , θ , нужно найти

p'_1 , p'_2 и угол второй частицы. Можно просто, путем подстановок, решить эту систему из трех уравнений. Однако мы сделаем это проще, воспользовавшись операциями с векторами. Данная техника нам понадобится для решения подобной задачи в релятивистском случае.

Для решения задачи возьмем из (37.1) $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1$ и подставим в (37.2). В результате остается одно уравнение

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1)^2}{2m_2}, \quad (37.3)$$

где неизвестным является p'_1 . Раскрывая и сокращая одинаковые члены, получаем

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_1^2}{2m_2} + \frac{p_1'^2}{2m_2} + \frac{2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{2m_2} - \frac{2\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1}{2m_2} - \frac{2\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_1}{2m_2}. \quad (37.4)$$

Учитывая, что $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = -p_1p_2$, $\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1 = p_1p'_1 \cos \theta$, $\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_1 = -p_2p'_1 \cos \theta$, получаем квадратное уравнение

$$p_1'^2 - 2p'_1 \frac{(p_1 - p_2)m_1 \cos \theta}{m_1 + m_2} - \frac{2p_1p_2m_1}{m_1 + m_2} - \frac{p_1^2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = 0, \quad (37.5)$$

откуда находим

$$p'_1 = \frac{(p_1 - p_2)m_1 \cos \theta}{m_1 + m_2} \pm \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)^2 m_1^2 \cos^2 \theta}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{2p_1p_2m_1}{m_1 + m_2} + \frac{p_1^2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}}. \quad (37.6)$$

Происхождение двойного решения такое же, как и при распаде частиц. В случае покоящейся второй частицы, $p_2 = 0$, формула упрощается:

$$p'_1 = p_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta \pm \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (37.7)$$

При $m_1 > m_2$ допустимы оба знака, при $m_2 > m_1$ — только знак «+».

При $m_1 > m_2$ максимальный угол рассеяния

$$\sin \theta_{\text{макс}} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (37.8)$$

При $\theta = 0$ и $m_1 > m_2$ имеем

$$p'_1 = p_1 \text{ или } p'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1, \quad p'_2 = p_1 - p'_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (37.9)$$

Первое решение – это пролет мимо (легкое касание), второе – лобовое столкновение, причем при равных массах налетающая частица останавливается.

В случае лобового столкновения при $m_1 < m_2$ налетающая частица полетит назад ($\theta = \pi$) с импульсом

$$p'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_1. \quad (37.10)$$

Из (37.9) следует, что при столкновении бесконечно тяжелой стенки с покоящейся частицей последняя приобретает скорость $v'_2 = 2v_1$. Этот результат можно легко получить, перейдя в систему стенки, где покоящаяся частица налетает на стенку со скоростью v_1 и отскакивает с той же скоростью. Переходя обратно в лабораторную систему, получаем $v'_2 = v_1 + v_1 = 2v_1$.

Столкновение в случае трения

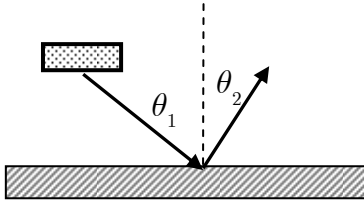


Рис. 28

Пусть брусок налетает под углом θ_1 на бесконечно тяжелую плоскость, коэффициент трения с которой k . Найдём угол отражения, считая соударение упругим.

Хотя здесь все деформации упругие, энергия может теряться за счет силы сухого трения. Сила трения может уменьшить горизонтальный импульс. Вертикальный же импульс при ударе сохраняется по величине, но меняет направление, отсюда

$$F_{\perp} \tau = 2p \cos \theta_1. \quad (37.11)$$

При проскальзывании сила трения равна kF_{\perp} , тогда конечный продольный импульс

$$p'_{\parallel} = p \sin \theta_1 - kF_{\perp} \tau = p \sin \theta_1 - 2kp \cos \theta_1. \quad (37.12)$$

Отсюда находим угол отскока:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{p'_{\parallel}}{p_{\perp}} = \frac{\sin \theta_1 - 2k \cos \theta_1}{\cos \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1 - 2k. \quad (37.13)$$

При получении этой формулы мы предположили, что имеет место проскальзывание в течение всего времени взаимодействия. Но проскальзывание прекращается, когда горизонтальная скорость становится равной нулю, отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \theta_2 = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \theta_1 < 2k. \quad (37.14)$$

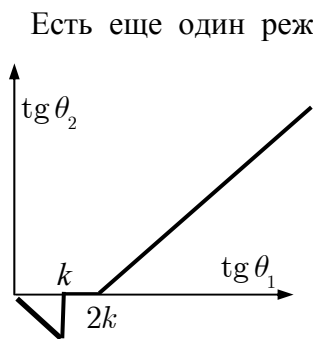


Рис. 29

Есть еще один режим, когда *проскальзывания нет* вообще. При этом сила будет действовать против полной скорости, что приведет к полной остановке тела, а затем силы деформации отбросят тело назад. Поскольку сила действует в направлении скорости, то условие непроскальзывания, «заклинивания», $F_{\parallel} < kF_{\perp}$, т. е. $F \sin \theta_1 < Fk \cos \theta_1$ или $\operatorname{tg} \theta_1 < k$. Именно при этих углах тросточка не будет проскальзывать, с какой бы силой на нее ни давили.

В итоге имеем следующие углы отскока при различных углах падения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_2 &= \operatorname{tg} \theta_1 - 2k & \text{при} & \operatorname{tg} \theta_1 > 2k \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= 0 & & k < \operatorname{tg} \theta_1 < 2k \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= -\operatorname{tg} \theta_1 & & \operatorname{tg} \theta_1 < k. \end{aligned} \quad (37.15)$$

§ 38. Закон сохранения момента импульса

До сих пор мы упоминали момент импульса только в связи с третьим законом Ньютона, не вдаваясь в детали. Третий закон Ньютона гласит: *силы взаимодействия двух материальных точек i и k равны по модулю и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки: $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$* . Этот постулат означает, что в любой замкнутой системе сохраняется момент импульса. Выясним, что это такое.

По определению, момент импульса системы частиц — это

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i]. \quad (38.1)$$

Для одной частицы $L = r_{\perp} p = r p_{\perp}$, где $r_{\perp} = r \sin \theta$, $p_{\perp} = p \sin \theta$, т. е. момент импульса материальной точки (частицы) относительно точки

начала отсчета равен импульсу тела, умноженному на длину перпендикуляра, опущенного из начала отсчета на траекторию частицы. Момент импульса направлен перпендикулярно плоскости, лежащей на векторах \mathbf{r} и \mathbf{p} .

Все взаимодействия в системе частиц можно рассматривать как сумму взаимодействий пар частиц. Для любой пары

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}_1 \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{p}}_1] + [\dot{\mathbf{r}}_2 \mathbf{p}_2] + [\mathbf{r}_2 \dot{\mathbf{p}}_2]. \quad (38.2)$$

Учитывая, что $\dot{\mathbf{p}}_1 = -\dot{\mathbf{p}}_2$, получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}_1 \mathbf{p}_1] + [\dot{\mathbf{r}}_2 \mathbf{p}_2] + [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \dot{\mathbf{p}}_2] = 0. \quad (38.3)$$

Здесь первые два члена равны нулю потому, что скорость и импульс частицы имеют одинаковое направление и их векторное произведение равно нулю. Третий член равен нулю вследствие третьего закона Ньютона (поскольку сила параллельна радиус-вектору, соединяющему частицы). Таким образом, в природе имеет место *закон сохранения момента импульса*.

Следствия этого закона рассматриваются далее в главах про движение твердого тела и движение в центральном поле.

§ 39. О происхождении законов сохранения энергии, импульса и момента импульса

Закон сохранения энергии

Энергия системы частиц

$$E = K + U = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + U(r_1, r_2, \dots, r_n, t), \quad (39.1)$$

ее изменение во времени

$$\frac{dE}{dt} = \sum m_i \mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \sum \frac{dU_i}{d\mathbf{r}_i} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (39.2)$$

$$= \sum \mathbf{v}_i (m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - \mathbf{F}_i) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (39.3)$$

Выражение в скобке равно нулю по второму закону Ньютона. Таким образом: *закон сохранения энергии работает, если потенциальная энергия явным образом не зависит от времени, а является функцией только координат.*

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени, что означает, что физические законы не зависят явным образом от времени.

Пример несохранения энергии: пусть мяч подбросили вверх с некоторой скоростью и, пока он летит вверх, ускорение свободного падения равно g_1 , а когда падает вниз, то g_2 . В этом случае мяч вернется на землю с другой скоростью, т. е. полная энергия не сохраняется. Для того чтобы поменялась g при неизменной массе и размерах Земли, нужно, чтобы изменилась фундаментальная константа G .

Закон сохранения импульса

Пусть имеется система частиц, в которой на i -ю частицу действуют сила \mathbf{F}_i со стороны остальных частиц. Прикладывая бесконечно малые внешние силы, сместим всю систему на $\delta\mathbf{R}$, не изменяя взаимного расположения частиц в системе. Суммарная работа всех сил равна нулю, поскольку пространство однородно и внутренняя энергия системы не зависит от места системы в пространстве, т. е.

$$\delta A = \delta\mathbf{R} \sum_i \mathbf{F}_i = 0. \quad (39.4)$$

Отсюда получаем, что $\sum_i \mathbf{F}_i$ – сумма сил в системе равна нулю и суммарный импульс системы сохраняется. Таким образом, *закон сохранения импульса обусловлен однородностью пространства.*

Например, если бы в пространстве были невидимые нам тела, действующие неизвестными нам силами на наблюдаемые тела, то мы заключили бы, что импульс не сохраняется.

Закон сохранения момента импульса

Используем ту же логику, что и при рассмотрении закона сохранения импульса, но не для сдвига, а для поворота системы в пространстве. Пусть имеется система частиц, в которой на i -тую частицу действуют силы \mathbf{F}_i со стороны остальных частиц. Прикладывая бесконечно малые силы, повернем всю систему на угол $\delta\phi$, не меняя при этом взаимного расположения частиц в системе. Суммарная работа всех сил

равна нулю, поскольку пространство изотропно и внутренняя энергия системы не зависит от ориентации системы в пространстве:

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_i] = \delta \boldsymbol{\varphi} \sum_i [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = \delta \boldsymbol{\varphi} \sum_i [\mathbf{r}_i \dot{\mathbf{p}}_i] = 0. \quad (39.5)$$

Величина $[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = [\mathbf{r}_i \dot{\mathbf{p}}_i]$ – это момент сил, действующий на частицу.

Это означает, что сумма моментов сил в изолированной системе равна нулю. Отсюда

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum [\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i] + \sum [\mathbf{r}_i \dot{\mathbf{p}}_i] = 0. \quad (39.6)$$

Здесь первая сумма равна нулю вследствие параллельности скорости и импульса, а вторая сумма равна нулю из-за равенства нулю момента сил.

ГЛАВА V РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

§ 40. Релятивистский импульс

Ясно, что в релятивистском случае закон сохранения импульса в виде

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const} \quad (40.1)$$

несправедлив, так как не содержит ограничения на максимальную скорость частиц. В нерелятивистском случае мы просто постулировали закон сохранения импульса при рассеянии частиц, взяв выражение для импульса в виде $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (при другом подходе закон сохранения импульса следует из уравнений Ньютона, которые также являются постулатами). Будет ли вообще аналог закона сохранения импульса в релятивистском случае, если не вводить дополнительных постулатов?

Рассмотрим такую конструкцию. Два тела с большими массами 1 и 2 выстреливают по легкому релятивистскому ядру, и, рассеявшись друг на друге, они застревают в массивных поглотителях 3 и 4 (рис. 30).

Если наблюдать только за большими телами, которые имеют нерелятивистские скорости, то для них можно записать равенство нулю суммарного импульса

$$(-\mathbf{p}_1) + (-\mathbf{p}_2) + \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0 \quad (40.2)$$

или

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (40.3)$$

Отсюда следует существование закона сохранения импульса для релятивистских частиц. В рассуждениях мы сделали только одно естественное предположение, что при выстреле покоящимся телом ядра импульс отдачи равен импульсу ядра.

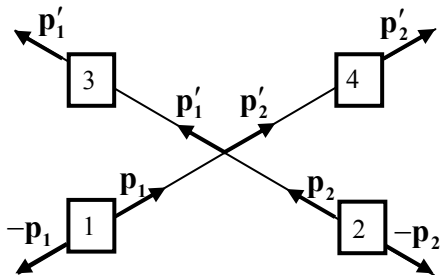


Рис. 30

Теперь осталось найти выражение для релятивистского импульса, при котором закон сохранения импульса, записанный в одной из систем отсчета, будет автоматически выполняться при переходе в любую другую инерциальную систему отсчета. Мы рассмотрим два подхода к этой задаче.

Первый способ основан на поиске выражения для релятивистского импульса путем рассмотрения частных случаев взаимодействия частиц и требования инвариантности явления при переходе в другую систему отсчета. Второй способ, более формальный, опирается на свойства 4-векторов.

Будем искать выражение для импульса в виде

$$\mathbf{p} = f(v)m\mathbf{v}, \quad (40.4)$$

где $f(v)$ – некоторая функция скорости, стремящаяся к единице при $v \rightarrow 0$. Рассмотрим два поезда, движущихся с равными скоростями навстречу друг другу (рис. 31).

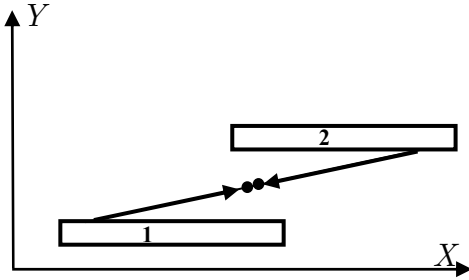


Рис. 31

С поездов навстречу друг другу стреляют ядрами, так что в сопутствующих поездам системах отсчета скорость выпущенных ядер перпендикулярна направлению движения и равна v_y , причем $v_y \ll c$. Ядра встречаются и слипаются.

Из симметрии ясно, что в неподвижной системе импульс образованного тела равен нулю. Тогда в системе поезда 1 это тело не движется в поперечном направлении и его поперечный импульс равен нулю. Отсюда суммарный поперечный импульс ядер до столкновения также равен нулю, т. е.

$$mv_y = m f(v')v'_y. \quad (40.5)$$

Здесь в левой части написан нерелятивистский импульс, поскольку ранее предположили, что $v_y \ll c$. Здесь v'_y и v' – соответственно вертикальная и полная скорость ядра, выпущенного с поезда 2, в системе поезда 1. Пусть относительная скорость поездов равна V , тогда из формул преобразования для Y -скоростей (22.4) с учетом, что v_x ядра в системе своего поезда 2 равна нулю, находим

$$v'_y = v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (40.6)$$

Из (40.6) и (40.5) следует

$$f(v')\sqrt{1 - V^2/c^2} = 1. \quad (40.7)$$

Устремим v_y к нулю, тогда $v' \rightarrow V$, следовательно

$$f(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (40.8)$$

В результате получаем искомое выражение для импульса при произвольных скоростях

$$p(\mathbf{v}) = f(v)m\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.9)$$

При этом закон сохранения импульса будет имеет вид

$$\sum \mathbf{p}_i \equiv \sum \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}. \quad (40.10)$$

Заметим, что

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (40.11)$$

где

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{— 4-скорость.} \quad (40.12)$$

Это выражение совпадает с формулой (40.9), полученной на частном примере. Закон сохранения импульса будет выглядеть как

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \sum_j \mathbf{p}_j, \text{ где } \mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.13)$$

§ 41. Релятивистская энергия

Рассмотрим распад тела с массой M на две части с массами m_1 и m_2 . В системе покоя исходного тела разлет происходит в противоположных направлениях (рис. 32).

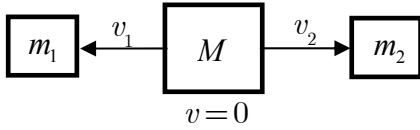


Рис. 32

Рассмотрим теперь этот же процесс распада в системе отсчета, имеющей поперечную к v_1 и v_2 скорость $w \ll c$ (рис. 33). Закон сохранения для вертикальной компоненты импульса имеет вид

$$Mw = \frac{m_1 w}{\sqrt{1 - v_1'^2/c^2}} + \frac{m_2 w}{\sqrt{1 - v_2'^2/c^2}}. \quad (41.1)$$

Устремим w к нулю, тогда $v_1' \rightarrow v_1$ и $v_2' \rightarrow v_2$. Сократив обе части (41.1) на w , получаем

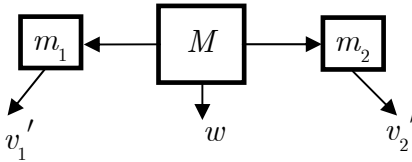


Рис. 33

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1'^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - v_2'^2/c^2}}. \quad (41.2)$$

т. е. исходная масса не равна сумме конечных масс и

$$M > m_1 + m_2. \quad (41.3)$$

Поскольку исходная масса могла бы распастись и на другие составляющие, то (41.2) можно переписать в виде

$$\sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_j \frac{m_j c^2}{\sqrt{1 - v_j^2/c^2}}. \quad (41.4)$$

Введем обозначение

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \quad (41.5)$$

и назовем эту величину *релятивистской энергией* частицы. К такому термину есть основания: при $v \rightarrow 0$

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad (41.6)$$

т. е. энергия отличается от энергии в покое на нерелятивистскую кинетическую энергию.

В этих терминах (41.4) можно записать в виде

$$\sum E_i = \sum E_j. \quad (41.7)$$

Это закон сохранения энергии в релятивистском случае. При малых скоростях он переходит в нерелятивистский закон сохранения кинетической энергии. Кинетической энергией в общем случае можно назвать величину

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (41.8)$$

Таким образом, мы получили *релятивистский закон сохранения энергии*. Этот закон вытекает автоматически из закона сохранения импульса и преобразований Лоренца.

Ввиду исключительной важности закона сохранения энергии выведем формулу (41.5) тем же способом, как ранее в § 27 был доказан закон сохранения массы в нерелятивистском случае. Для доказательства мы использовали нерелятивистский закон сохранения импульса и преобразования Галилея для скоростей.

Итак, рассмотрим снова распад тела с массой M на две части с массами m_1 и m_2 вдоль оси X . Исходим из закона сохранения импульса в релятивистском случае, записанного через 4-скорости,

$$Mu_x = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}. \quad (41.9)$$

Рассмотрим теперь тот же распад в системе отсчета, движущейся вдоль оси X со скоростью V . В движущейся системе отсчета закон сохранения импульса будет

$$Mu'_x = m_1 u'_{1x} + m_2 u'_{2x}. \quad (41.10)$$

Используя закон преобразования Лоренца X -компоненты 4-векторов $u'_x = \gamma(u_x - \beta u_0)$, где $\gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$, $\beta = V/c$, из (41.10) получаем

$$M\gamma(u_x - \beta u_0) = m_1\gamma(u_{1x} - \beta u_{10}) + m_2\gamma(u_{2x} - \beta u_{20}). \quad (41.11)$$

Производя сокращения с учетом (41.9), имеем

$$Mu_0 = m_1 u_{10} + m_2 u_{20} \quad (41.12)$$

и, используя выражения для нулевой компоненты 4-скорости частицы

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_{10} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad u_{20} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}, \quad (41.13)$$

получаем

$$\frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}, \quad (41.14)$$

что совпадает с формулой (41.2).

Назовем 4-импульсом величину $p_\mu = m u_\mu$, тогда закон сохранения релятивистского импульса и энергии можно записать вместе как закон сохранения 4-импульса

$$\sum P_\mu = \sum P'_\mu. \quad (41.15)$$

Рассмотрим некоторые фундаментальные и практические следствия релятивистского закона сохранения энергии.

1. При столкновении частиц с массами m_1 и m_2 может образоваться частица с массой $M \gg m_1 + m_2$.

2. Если в конечном состоянии сохраняются исходные частицы и рождаются новые, то можно сказать, что эти новые частицы образовались из «чистой» кинетической энергии. Пример такой реакции:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}. \quad (41.16)$$

В этой реакции на ускорителе в 1955 г. впервые наблюдали антипротон.

3. При распаде частицы выделяется кинетическая энергия

$$\Delta T = Mc^2 - \sum m_i c^2. \quad (41.17)$$

В пределе, при аннигиляции (или распаде) в фотоны, «высвобождается» кинетическая энергия $E = mc^2$. Пример таких реакций: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Эти фотоны можно поглотить и использовать их энергию, т. е. неподвижная частица обладает реальной энергией Mc^2 .

Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, при этом масса ядер меньше, чем суммарная масса свободных протонов и нейтронов:

$$M_{\text{я}} < Zm_p + Nm_n. \quad (41.18)$$

Разность масс

$$\Delta M = Zm_p + Nm_n - M_{\text{я}} \quad (41.19)$$

называется дефектом массы. Этот «дефект масс» обусловлен отрица-

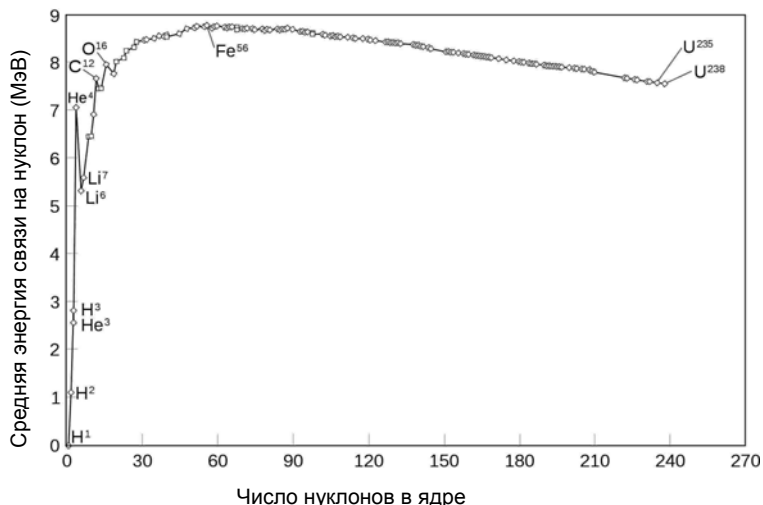
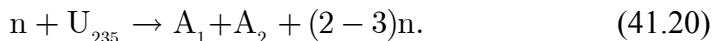


Рис. 34

тельной энергией связи, которая приводит к уменьшению массы ядер.

На рис. 34 приведена удельная энергия связи, т. е. энергия связи на один нуклон. Энергия связи отрицательная, но приводят ее везде по абсолютной величине. Наибольшая энергия связи у элементов в районе Fe. Она составляет почти один процент от массы ядра. Выделить эту энергию можно (частично) при слиянии легких ядер или распаде тяжелых ядер. Высвобождается (переходит в кинетическую) энергия, равная разности энергий связи.

Так, при поглощении нейтрона ядро U_{235} быстро разваливается на две части с испусканием нескольких нейтронов



При этом кинетическая энергия осколков

$$T = \Delta Mc^2 \approx (M_U - m_{A_1} - m_{A_2}) c^2 \approx 200 \text{ МэВ} \approx 0,001 \cdot Mc^2. \quad (41.21)$$

Еще большая энергия (до 0.4 % от Mc^2) выделяется в реакции синтеза легких ядер, например:



В одном килограмме вещества $E = mc^2 \approx 10^{17}$ Дж, в то время как энергия, выделяющаяся при сжигании 1 кг угля, составляет $\sim 1,5 \cdot 10^7$ Дж. Таким образом, даже при использовании 0,1 % mc^2 будет выделяться энергии в $5 \cdot 10^6$ раз больше, чем при сжигании угля.

Массы частиц, точнее mc^2 , принято измерять в *электронвольтах*. Электронвольт – это энергия, набираемая частицей с зарядом, равным заряду электрона, при прохождении разности потенциалов один Вольт:

$$1 \text{ эВ} = e\Delta U = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кул} \cdot 1\text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.} \quad (41.23)$$

Производные единицы –

1 кэВ $\equiv 10^3$ эВ, 1 МэВ $\equiv 10^6$ эВ, 1 ГэВ $\equiv 10^9$ эВ и т. д.

В табл. 3 приведена энергия покоя некоторых частиц.

Таблица 3

Энергия покоя некоторых частиц

частица	mc^2 , МэВ
фотон (γ)	$< 10^{-33}$
нейтрино (ν)	$< 10^{-6}$
электрон (e)	0,511
мюон (m)	105,7
пион нейтр. (π^0)	140
протон (p)	938,3
нейтрон (n)	939,6
Z-бозон	91200
t-кварк	171000

§ 42. Четырехвектор энергии-импульса

В предыдущих двух параграфах были найдены выражения для релятивистского импульса и энергии и сформулированы законы их сохранения. К этим вопросам можно подойти по-другому, используя язык теоретиков. Часто теоретические подходы делают картину более прозрачной, чем получение результата путем рассмотрения отдельных примеров.

Предположим, при соударении тел (упругом и неупругом) имеет место закон сохранения импульса

$$\sum \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{p}_j. \quad (42.1)$$

Этот закон должен быть справедлив в любой инерциальной системе, значит, при преобразованиях Лоренца обе части должны преобразовываться одинаковым образом. В этом случае говорят, что закон имеет ковариантный вид. При $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ такой ковариантности при релятивистских скоростях, очевидно, нет. Если бы импульс был 4-вектором, тогда ковариантность была бы гарантирована. А почему?

Возьмем сначала привычное трехмерное пространство, в котором некий закон записан в виде равенства двух векторов

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}. \quad (42.2)$$

Очевидно, что это равенство сохранится, если перейти к другой системе координат, отличающейся от исходных поворотом осей координат на некоторый угол. Компоненты векторов изменятся, но равенство сохранится. Преобразования Лоренца, как мы знаем, являются вращением в 4-мерном пространстве Минковского с координатами ict, x, y, z . Следовательно, если некий закон записан в виде равенства двух 4-векторов:

$$a_\mu = b_\mu, \quad \text{где } \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (42.3)$$

то это равенство сохранится при преобразованиях Лоренца. При этом 4-мерным может быть не только координатное пространство с осями ict, x, y, z , но и пространство 4-скоростей.

Введем 4-вектор импульса путем замены обычной скорости \mathbf{v} на 4-скорость u_μ

$$P_\mu = m \frac{dR}{d\tau} = m u_\mu = \{p_0, \mathbf{p}\}; \quad p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (42.4)$$

а закон сохранения импульса запишем как закон сохранения 4-импульса

$$\sum_i P_\mu = \sum_j P'_\mu, \quad \mu = 0 \dots 3. \quad (42.5)$$

В нерелятивистском случае уравнения для пространственных компонент 4-импульса переходят в обычный нерелятивистский закон сохранения импульса. Ранее мы искали выражение для релятивистского импульса в виде $\mathbf{p} = f(v)m\mathbf{v}$, где $f(v)$ – такая функция, что закон сохранения импульса ковариантен при преобразованиях Лоренца. Импульс, определенный (42.4), $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, удовлетворяет этим требованиям. Однако при этом выясняется, что дополнительно мы получаем еще один закон сохранения – *закон сохранения для нулевой компоненты 4-импульса*, который при нерелятивистских скоростях переходит в закон сохранения кинетической энергии.

Величину

$$E = p_0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42.6)$$

называют релятивистской энергией, а

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42.7)$$

– релятивистским импульсом. Некоторые следствия, вытекающие из релятивистских законов сохранения, мы уже обсудили ранее.

Заметим, что квадрат 4-импульса, как и положено, является инвариантом при преобразованиях Лоренца

$$P_\mu^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 = \text{inv}. \quad (42.8)$$

Также из (42.6), (42.7) следует соотношение

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}. \quad (42.9)$$

Поскольку P_μ – это, по определению, 4-вектор, то закон преобразования при переходе из системы S' , движущейся со скоростью V в направлении оси X , в неподвижную систему S и наоборот, известен:

$$E = \gamma(E' + \mathbf{V}\mathbf{p}'), \quad p_x = \gamma(p'_x + \frac{V}{c^2}E'), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z; \quad (42.10)$$

$$E' = \gamma(E - \mathbf{V}\mathbf{p}), \quad p'_x = \gamma(p_x - \frac{V}{c^2}E), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad (42.11)$$

где $\gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Вообще говоря, вывод о том, что энергия и импульс являются компонентами 4-вектора, можно было сделать и без формальных рассуждений о ковариантности. Достаточно было убедиться, что найденные выражения для импульса (40.9) и энергии (41.5) дают инвариант (42.8) при преобразованиях Лоренца.

Несколько следствий. Для фотона $m = 0$, тогда из (42.8) получаем

$$E_\gamma = p_\gamma c. \quad (42.12)$$

Электромагнитная волна состоит из фотонов с энергией (Эйнштейн)

$$E_\gamma = \hbar\omega. \quad (42.13)$$

С учетом (42.12) их импульс

$$p_\gamma = \hbar\omega/c. \quad (42.14)$$

Поскольку $\{E_\gamma/c, \mathbf{p}_\gamma\}$ – 4-вектор, то является 4-вектором и $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$, где $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Отсюда следуют все формулы (24.16) для эффекта Доплера, полученные ранее:

$$\omega' = \gamma(\omega - k_x V), \quad k'_x = \gamma(k_x - \beta \frac{\omega}{c}), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z. \quad (42.15)$$

С помощью импульсов легко получить формулы для абберации, также полученные ранее с использованием релятивистской кинематики:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p' \sin \vartheta'}{\gamma \left(p'_x + \frac{E'}{c^2} V \right)} = \frac{\sin \vartheta'}{\gamma \left(\frac{V}{v'} + \cos \vartheta' \right)}. \quad (42.16)$$

Отражение света от движущегося зеркала

В качестве примера рассмотрим, как меняется энергия фотона при отражении от движущегося зеркала. Пусть фотоны с энергией E_0 летят в направлении оси X , а навстречу им движется релятивистское зеркало со скоростью V . Найдем энергию отраженных фотонов.

Найдем сначала энергию фотонов в системе зеркала. Из (42.11) $E' = \gamma(E_0 - \mathbf{V}\mathbf{p}_0)$. Учитывая, что для фотонов $p_0 = E_0/c$ и направления движения фотона и зеркала противоположны, получаем

$$E' = \gamma E_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right). \quad (42.17)$$

После отражения фотоны в системе зеркала имеют ту же энергию, но летят уже в том же направлении, что и зеркало. Переходим обратно в лабораторную систему по формуле $E = \gamma(E' + \mathbf{V}\mathbf{p}')$. У нас $p' = E'/c$ и направления V и p' совпадают, отсюда получаем ответ:

$$E = \gamma E' \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \gamma^2 E_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right)^2. \quad (42.18)$$

§ 43. Релятивистская сила

Силу в релятивистской динамике естественно вводить на основе закона сохранения релятивистского импульса, этот подход мы рассматривали для нерелятивистской механики в качестве альтернативного законам Ньютона.

Определим трехмерную силу как

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (43.1)$$

Найдем, как энергия связана с работой сил. Дифференцируя $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$, получаем $E dE = c^2 \mathbf{p} d\mathbf{p}$, откуда с учетом (42.9) и (43.1) получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathbf{p} c^2}{E} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = (\mathbf{v}\mathbf{F}) \Rightarrow dE = \mathbf{v}\mathbf{F} dt = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (43.2)$$

Следовательно, как и в классике, изменение энергии равно работе сил.

Можно ввести 4-вектор силы, дифференцируя 4-импульс по инвариантному собственному времени,

$$f_{\mu} = \frac{dP_{\mu}}{d\tau} = \left\{ \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\} = \left\{ \frac{\gamma(\mathbf{F}\mathbf{v})}{c}, \gamma \mathbf{F} \right\}, \quad (43.3)$$

где $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, v – скорость частицы. При получении последнего равенства были использованы формулы (43.2), (43.1). Отсюда, в принципе, можно получить закон преобразования трехмерной силы, но это непросто, так как в 4-силе имеются множители, зависящие от скорости частицы.

Примечание: следует обратить внимание, что фактор γ используется в данном пособии (и вообще в научных книгах) в двух значениях. Он может относиться к скорости v рассматриваемой частицы, $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, как в предыдущей формуле, а может и к скорости V системы отсчета S' , если же речь идет о преобразовании какой-либо величины при переходе к другой системе отсчета, тогда $\gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2 / c^2}$. Обычно ясно, о чем идет речь, но там, где может возникнуть неоднозначность, будет сказано специально.

Наиболее просто закон преобразования сил при переходе из неподвижной системы S в систему S' , движущуюся со скоростью V в направлении оси X , получается из определения трехмерной силы

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma(dp_x - \frac{V}{c^2} dE)}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2} dx)} = \frac{F_x - \frac{V}{c^2}(\mathbf{F}\mathbf{v})}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad (43.4)$$

$$F'_{y,z} = \frac{dp'_{y,z}}{dt'} = \frac{dp_{y,z}}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2} dx)} = \frac{F_{y,z} \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad (43.5)$$

где $\gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2 / c^2}$, V – скорость системы S' .

Обратный закон преобразования получается заменой $V \rightarrow -V$

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{V}{c^2}(\mathbf{F}'\mathbf{v}')}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad (43.6)$$

$$F_{y,z} = \frac{F'_{y,z} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \quad (43.7)$$

Например, если тело покоится в S' системе, т. е. $v' = 0$, и на него действует сила \mathbf{F}' , то сила в неподвижной системе S есть

$$F_x = F'_x, \quad F_{y,z} = F'_{y,z} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (43.8)$$

Продольные силы одинаковы в обеих системах, а поперечные отличаются в γ раз.

Нетрудно найти связь между силой \mathbf{F} и ускорением $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ в релятивистском случае

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = m\gamma \mathbf{a} + m\gamma^3 \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2} = m\gamma \mathbf{a} + m\gamma^3 \beta(\beta \mathbf{a}), \quad (43.9)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\beta = \mathbf{v}/c$. При дифференцировании было учтено, что

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{v}\mathbf{v})}{dt} = 2(\mathbf{v}\mathbf{a}). \quad (43.10)$$

Умножая (43.9) на β , получаем

$$(\mathbf{a}\beta) = \frac{(\mathbf{F}\beta)}{m\gamma(1 + \gamma^2\beta^2)} = \frac{(\mathbf{F}\beta)}{m\gamma^3}. \quad (43.11)$$

Подставляем это выражение в правую часть (43.9), находим ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F}\beta)\beta}{\gamma m}. \quad (43.12)$$

Отсюда следует, что направление силы и ускорения не совпадают! Поэтому в релятивистском случае нельзя ввести понятия релятивистской массы как коэффициента пропорциональности между \mathbf{F} и \mathbf{a} . Во многих учебниках пишут $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где $m = \gamma m_0$. Это неверно. Фактор γ является независимым множителем в импульсе, а не относится к массе. У частицы есть только одна масса.

Пример 1. Пусть частица имеет импульс

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (43.13)$$

Если приложить силу F перпендикулярно направлению движения, то

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma m \mathbf{a}, \quad (43.14)$$

скорость не меняется по абсолютной величине, меняется только ее направление. Если сила параллельна скорости, то нужно дифференцировать и \mathbf{v} и v :

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{mv^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = m\gamma^3 \mathbf{a}. \quad (43.15)$$

Это можно было получить и из (43.9). Еще раз видим, что бессмысленно определять «массу движения» как F/a , она получилась разной для двух рассмотренных случаев.

Пример 2. Пусть частица с энергией E_0 , массой m и зарядом q пересекает под некоторым начальным углом плоский конденсатор с разностью потенциалов U . Чему равна энергия частицы на выходе из конденсатора?

Решение. Как и в нерелятивистском случае, $\frac{dE}{dt} = (\mathbf{v}\mathbf{F})$,
 $\int dE = \int \mathbf{F} d\mathbf{l} = U$, т. е. поле конденсатора потенциально, поэтому

изменение энергии не зависит от угла падения. В результате $E = E_0 + qU$ или

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + qU. \quad (43.16)$$

Пример 3. Частица с зарядом e со скоростью v летит вдоль оси X в электрическом поле напряженности \mathcal{E} , какая действует на частицу сила в системе покоя заряда?

Решение. В лабораторной системе $F_x = e\mathcal{E} \cos \theta$, $F_y = e\mathcal{E} \sin \theta$, где θ – угол между направлением поля и осью X . Учитывая, что $V \equiv v \equiv v_x$, из (43.4) и (43.5) получаем

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{V}{c^2}(\mathbf{F}\mathbf{v})}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} = e\mathcal{E} \cos \theta, \quad (43.17)$$

$$F'_y = \frac{F_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} = \frac{e\mathcal{E} \sin \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (43.18)$$

т. е. продольная сила та же, а поперечная – в γ раз больше.

§ 44. Релятивистская ракета

В предыдущих параграфах были рассмотрены физические основы Специальной теории относительности (СТО), имеющей дело с инерциальными системами отсчета. Далее мы рассмотрим несколько примеров использования СТО. Сначала совершим увлекательный полет на релятивистской ракете через всю Вселенную; затем рассмотрим столкновения и распады частиц – основной метод изучения материи; далее покажем, что вся электродинамика является следствием закона Кулона, СТО и инвариантности заряда.

Для разминки рассмотрим простую задачу. Ракета имеет скорость V , за какое космонавты долетят до звезды, находящейся на расстоянии L ?

Здесь можно рассуждать двумя способами:

а) время полета в лабораторной системе $t = L/V$, часы на ракете идут в $\gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ раз медленнее, значит, по часам на ракете пройдет время $\tau = t/\gamma = L/\gamma V$;

б) в системе ракеты расстояние Земля–звезда сокращается в γ раз, звезда летит навстречу со скоростью V , значит, по часам в ракете пройдет время $\tau = L/\gamma V$, т. е. столько же.

А теперь перейдем к основной задаче.

Релятивистская ракета, движущаяся равноускоренно в собственной системе отсчета

Кинематика

В качестве интересного упражнения по теории относительности рассмотрим движение космического корабля, имеющего постоянное ускорение в собственной системе отсчета, направленное вдоль скорости. Космонавты предпочитают лететь с комфортом, и их корабль имеет ускорение g .

В сопутствующей системе отсчета S' уравнение движения имеет вид

$$F'_x = ma'_x = mg. \quad (44.1)$$

Найдем уравнение движения в системе Земли (S), относительно которой корабль имеет мгновенную скорость $v = V$. Из формулы преобразования сил (43.6) видим, что поскольку v'_x корабля равна нулю, то $F_x = F'_x$. Отсюда получаем уравнение движения в неподвижной системе:

$$\frac{dp}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\gamma mv) = F_x = mg. \quad (44.2)$$

Полагая $m = \text{const}$ (к ракете приложена внешняя сила) и интегрируя уравнение с учетом того, что $v = 0$ при $t = 0$, находим $m\gamma v = mgt$ или

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = gt \Rightarrow v = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}. \quad (44.3)$$

Формула (44.3) справедлива и для случая переменной массы (реактивного движения), так как скорость в лабораторной системы зависит только от ускорения корабля в его сопутствующей системе отсчета. В

этом случае нужно учесть изменение импульса за счет уменьшения массы ракеты, тогда вместо (44.2) уравнение движения будет $(\gamma m v)' - \gamma v m' = mg$, откуда получаем $(\gamma v)' = g$ и решение (44.3).

Используя разложение $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2$ при $\alpha \ll 1$, получаем

$$\begin{aligned} v &\approx gt \left(1 - \frac{g^2 t^2}{2c^2} \right), & gt/c &\ll 1 \\ v &\approx c \left(1 - \frac{c^2}{2g^2 t^2} \right), & gt/c &\gg 1. \end{aligned} \quad (44.4)$$

Путь, пройденный кораблем в неподвижной системе,

$$x = \int_0^t \frac{gt dt}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2}} = \frac{c^2}{g} \int_0^{(gt/c)^2} \frac{dy}{2\sqrt{1+y}} = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (44.5)$$

$$\text{При } gt/c \ll 1 \quad x = \frac{gt^2}{2}, \quad (44.6)$$

при $gt/c \gg 1$

$$x \approx \frac{c^2}{g} \left(\frac{gt}{c} \sqrt{\frac{c^2}{g^2 t^2} + 1} - 1 \right) \approx ct + \frac{c^3}{2g^2 t} - \frac{c^2}{g} \approx ct - \frac{c^2}{g}. \quad (44.7)$$

Предположим, что через время T после старта ракеты вслед ей с Земли посылают световой сигнал. Пройденный им путь

$$x = c(t - T) = ct - cT. \quad (44.8)$$

Сравнивая с (44.7), видим, что при $T > c/g$ свет никогда не догонит ускоряющийся космический корабль! При земном ускорении свободного падения $g = 10^3 \text{ см/с}^2$ $T = c/g = 3 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 1 \text{ год}$. Космонавты все время будут видеть в свой телескоп изображение Земли, но движение на ней будет замедляться, и в пределе будет застывшая картинка Земли, «состарившейся» всего на 1 год. Кроме того, за счет эффекта Доплера изображение будет «краснеть», а также тускнеть.

Найдем теперь время τ , прошедшее по часам на корабле. В соответствии с (16.3) или (25.12)

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma. \quad (44.9)$$

Подставляя сюда γ из (44.3), получаем

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}} = \frac{c}{g} \operatorname{arcsch}\left(\frac{gt}{c}\right) \equiv \frac{c}{g} \ln\left(\frac{gt}{c} + \sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}\right). \quad (44.10)$$

И наоборот,

$$\frac{gt}{c} = \operatorname{sh}\left(\frac{g\tau}{c}\right). \quad (44.11)$$

Выше мы использовали гиперболические косинус и синус, имеющие следующие свойства:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1, \\ (\operatorname{ch}x)' &= \operatorname{sh}x, \quad (\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x. \end{aligned} \quad (44.12)$$

$$\text{При } gt/c \ll 1, \quad \tau \approx t, \quad (44.13)$$

$$gt/c \gg 1 \quad \tau \approx \frac{c}{g} \ln \frac{2gt}{c}. \quad (44.14)$$

Подставляя (44.11) в (44.3) и (44.5), находим скорость и путь по часам на корабле

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}} = c \operatorname{th} \frac{g\tau}{c}, \quad (44.15)$$

$$x = \frac{c^2}{g} \left(\operatorname{ch} \frac{g\tau}{c} - 1 \right). \quad (44.16)$$

$$\text{При } gt/c \gg 1 \quad x = \frac{c^2}{2g} \exp \frac{g\tau}{c}, \quad (44.17)$$

$$\tau = \frac{c}{g} \ln \frac{2gx}{c^2}. \quad (44.18)$$

Ниже приведена таблица движения для $g \approx 10^3 \text{ см/с}$ ($c/g \approx 1 \text{ год}$).

Таблица 4

Время, скорость и пройденный путь ракеты, движущейся с $a = g$

t	τ	v	x
1 год	0.88 года	0.7 с	0,41 св. года
10 лет	3 года	0,995с	9,5 св. года
10^{10} лет	23 года	$\approx c$	10^{10} св. лет

Последняя строка соответствует достижению видимого горизонта Вселенной (с более удаленных областей свет до Земли еще не дошел). Космонавтам на это путешествие понадобится всего 23 года!

Расход горючего

Найдем, сколько потребуется топлива космическому кораблю. Вспомним сначала эту задачу для нерелятивистского случая. Ускорение ракете сообщают выброшенные назад продукты горения. Пусть их скорость относительно ракеты равна u_0 . Перейдем в систему ракеты. Из закона сохранения импульса (нерелятивистский случай)

$$m dv = d m_r u_0, \tag{44.19}$$

где m – текущая масса ракеты, v – скорость ракеты, $d m_r$ – масса порции выброшенного газа, равная убыли массы ракеты $-dm$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u_0}, \tag{44.20}$$

$$m = m_0 \exp(-v/u_0). \tag{44.21}$$

Это формула Мещерского – Циолковского, дающая связь между оставшейся массой ракеты и набранной скоростью.

Найдем теперь решение этой задачи в релятивистском случае. Перейдем в систему ракеты (S'). Из закона сохранения импульса при выбросе очередной порции «газов»

$$m dv' = d m_r u_0 \gamma_r, \quad \gamma_r = 1/\sqrt{1 - u_0^2/c^2}. \tag{44.22}$$

Здесь считается, что скорость истечения газов может быть релятивистской, а изменение скорости ракеты в ее исходной системе

мало и можно пользоваться нерелятивистскими выражениями. Из закона сохранения энергии находим

$$-d(mc^2) = dm_r \gamma_r c^2 + m \frac{(dv')^2}{2}. \quad (44.23)$$

Опуская последний член второго порядка малости, получаем

$$dm_r \gamma_r = -dm. \quad (44.24)$$

Подставляя (44.24) в (44.22), находим уравнение движения в системе ракеты

$$mdv' = -u_0 dm. \quad (44.25)$$

Заметим, что в системе ракеты релятивистское и нерелятивистское уравнения движения (44.25) и (44.19) совпадают.

Найдем связь между dv' и приращением скорости ракеты в неподвижной системе Земли. Для этого воспользуемся формулой преобразования скоростей (22.3)

$$dv_x \approx \frac{V + dv'_x}{1 + dv'_x V / c^2} - V \approx dv'_x \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (44.26)$$

В нашем случае $v \equiv v_x \equiv V$, поэтому (44.26) можно переписать как

$$dv' = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (44.27)$$

Подставляя dv' в (44.25), получаем

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u_0(1 - v^2/c^2)}. \quad (44.28)$$

Интеграл в правой части легко берется, используя разложение

$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} \right)$. В результате получаем

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{c/2u_0}. \quad (44.29)$$

Это и есть решение задачи Циолковского в общем случае. При $v \ll c$ $m/m_0 = \exp(-v/u_0)$. Это получается из (44.29) ввиду $(1 - v/c)^{c/v} \rightarrow e$ при $v/c \rightarrow 0$.

Из полученной формулы видно, что самым экономичным является фотонный двигатель. При $u_0 = c$

$$\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (44.30)$$

Последнюю формулу можно вывести более коротким способом. Заметим, что импульс ракеты равен импульсу фотонов, который связан с изменением полной энергии ракеты

$$p = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{m_0 c^2 - E}{c}, \quad (44.31)$$

где E, p – энергия и импульс ракеты соответственно. Энергия и импульс ракеты связаны соотношением (42.8)

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (44.32)$$

Учитывая, что $p = \frac{E}{c^2} v$, уравнения (44.31) и (44.32) можно переписать в виде

$$E \left(1 + \frac{v}{c} \right) = m_0 c^2, \quad (44.33)$$

$$E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m^2 c^4. \quad (44.34)$$

Подставляя E из первого уравнения во второе, получаем искомое решение

$$\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (44.35)$$

совпадающее с ранее полученным выражением (44.30).

Вернемся снова к движению равноускоренной ракеты, в которой мы хотели долететь до «горизонта» вселенной. Пусть ракета имеет

фотонный двигатель. Конечную массу ракеты можно найти, подставив v из формулы (44.15) в (44.35), однако мы поступим иначе.

Импульс, уносимый порцией света в системе корабля,

$$dp'_\gamma = dE'_\gamma / c = -(dm)c, \quad (44.36)$$

где dm – убыль массы корабля. Такой же импульс приобретет корабль в сопутствующей системе. Действующая на корабль сила

$$F' = \frac{dp'}{d\tau} = mg = -\frac{(dm)c}{d\tau}, \quad (44.37)$$

откуда

$$m = m_0 \exp(-g\tau/c). \quad (44.38)$$

Для путешествия до горизонта Вселенной с ускорением g потребуется 23 года в системе корабля (табл. 4). Учитывая, что $c/g = 1$ год, получаем

$$\frac{m}{m_0} = e^{-23}. \quad (44.39)$$

Если вначале ракета имела размер Земли ($R = 6400$ км), то в конце путешествия останется астероид радиусом 3 км!

Конечно, превратить Землю в фотоны невозможно – для аннигиляции в фотоны нужно столько же антивещества, которого во вселенной практически нет. Но почему бы не помечтать. Физики не просто мечтают, а могут подробно объяснить, что можно, а что нельзя и почему.

§ 45. Упругие столкновения частиц

Все задачи на столкновения и распады решаются на основании закона сохранения 4-импульса.

В случае упругого столкновения двух частиц с массами m_1 и m_2 закон сохранения 4-импульса имеет вид

$$P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2, \quad (45.1)$$

здесь и далее большая буква $P = \{E/c, \mathbf{p}\}$ означает 4-импульс.

Уравнение, записанное в форме (45.1), является на самом деле четырьмя уравнениями. Однако часто удобнее оперировать с целыми 4-векторами. Для упрощения вычислений будем полагать $c = 1$. В конце вычислений всегда видно, где по размерности нужно добавить c .

Пусть две частицы летят навстречу друг другу с энергиями E_1 и E_2 и задан угол рассеяния первой частицы θ . Нужно найти энергию этой частицы. Параметры второй частицы после этого находятся простым вычитанием. В принципе, можно записать закон сохранения по-

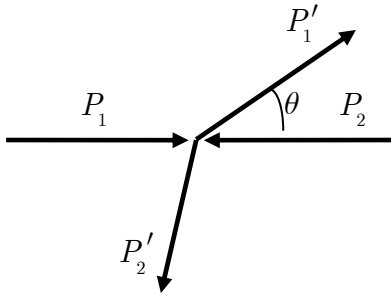


Рис. 35

компонентно. Получится 3 уравнения (одно уравнение для сохранения импульса в направлении, перпендикулярном плоскости разлета, выпадает). Имеется также три неизвестных $|p'_1|$, $|p'_2|$ и θ_2 , так что система однозначно разрешается. Однако эту задачу можно решить проще. Исключим одним шагом 2 неизвестные величины, относящиеся ко второй частице:

$$(P'_2)^2 = (P_1 + P_2 - P'_1)^2 = m_2^2 \quad (c = 1). \quad (45.2)$$

После этого остается одно уравнение с одной неизвестной $|p'_1|$, которое легко решить.

Рассмотрим, для примера, рассеяние фотона на летящем навстречу электроне (эффект Комптона), рис. 35. Вначале электрон (летит справа) и гамма квант (слева) имели 4-импульсы

$$P_\gamma = \{E_\gamma, p_\gamma, 0, 0\}, \quad P_e = \{E_e, -p_e, 0, 0\}, \quad (45.3)$$

при этом $p_e = \sqrt{E_e^2 - m^2}$, $p_\gamma = E_\gamma$.

В соответствии с (45.2)

$$(P_e + P_\gamma - P'_\gamma)^2 = m^2 \quad (45.4)$$

или

$$P_e^2 + P_\gamma^2 + P_\gamma'^2 + 2P_e P_\gamma - 2P_e P'_\gamma - 2P_\gamma P'_\gamma = m^2. \quad (45.5)$$

Учитывая, что $(AB) = a_0 b_0 - \mathbf{ab}$, имеем

$$P_e^2 = m^2, \quad P_\gamma^2 = P_\gamma'^2 = 0, \quad (45.6)$$

$$P_e P_\gamma = E_e E_\gamma + p_e p_\gamma = E_\gamma (E_e + p_e), \quad (45.7)$$

$$P_e P'_\gamma = E_e E'_\gamma + p_e E'_\gamma \cos \theta, \quad (45.8)$$

$$P_\gamma P'_\gamma = E_\gamma E'_\gamma - E_\gamma E'_\gamma \cos \theta. \quad (45.9)$$

Подставляя эти выражения в (45.5), получаем

$$E_\gamma (E_e + p_e) - E_e E'_\gamma - p_e E'_\gamma \cos \theta - E_\gamma E'_\gamma + E_\gamma E'_\gamma \cos \theta = 0. \quad (45.10)$$

Откуда (возвращаем «с») получаем энергию фотона после рассеяния

$$E'_\gamma = E_\gamma \frac{E_e + p_e c}{E_e + p_e c \cos \theta + E_\gamma - E_\gamma \cos \theta}. \quad (45.11)$$

Для покоящегося электрона

$$E'_\gamma = E_\gamma \frac{mc^2}{mc^2 + E_\gamma (1 - \cos \vartheta)}; \quad \lambda' = \lambda + \lambda_e (1 - \cos \vartheta), \quad (45.12)$$

где $\lambda_e = h/mc$ – комптоновская длина волны, где $h = 2\pi\hbar$.

Рассмотрим интересный случай – «обратное комптоновское рассеяние» света лазера на ультрарелятивистском электроне $E_e/mc^2 \gg 1$ вблизи $\theta = \pi$ (рассеяние лазерного фотона назад). В этом случае в числителе (45.11) можно положить $p_e c = E_e$, а в знаменателе сделаем

замену $p_e c = \sqrt{E_e^2 - m^2 c^4} \approx E_e - \frac{m^2 c^4}{2E_e}$, $\cos \theta \approx -1 + \frac{\alpha^2}{2}$, где

$\alpha = \pi - \theta$. Тогда ответ преобразуется к виду

$$E'_\gamma = E_e \frac{x}{x + 1 + \alpha^2 \gamma^2}, \quad \text{где} \quad x = \frac{4E_e E_\gamma}{m^2 c^4}. \quad (45.13)$$

Например: $E_e = 100$ ГэВ, $E_\gamma = 2,5$ эВ (видимый свет), тогда $x = 4$ и при $\alpha = 0$ получаем $E'_\gamma = 80$ ГэВ, т. е. рассеянные назад фотоны, летящие в направлении исходных электронов, унесут 80 % начальной энергии электрона. Этот метод получения высокоэнергичных фотонов лежит в основе будущих фотон-фотонных коллайдеров на энергию 100–1000 ГэВ.

Если параметр $x \ll 1$ и $\alpha = 0$, то $E'_\gamma = 4\gamma^2 E_\gamma$, что совпадает с формулой (42.18) для отражения света назад от движущегося зеркала.

§ 46. Распад частиц

1. Сначала рассмотрим распад покоящейся частицы с массой M на две частицы с массами m_1 и m_2 . Закон сохранения 4-импульса при таком распаде имеет вид

$$P = P_1 + P_2. \quad (46.1)$$

Из сохранения нулевой компоненты (энергии) следует, что распад возможен при (полагаем временно $c = 1$)

$$M = E_1 + E_2 > m_1 + m_2. \quad (46.2)$$

Найдем энергию первого осколка. Из (46.1) имеем

$$(P - P_1)^2 = P_2^2 = m_2^2. \quad (46.3)$$

Учитывая, что $P = \{M, \mathbf{0}\}$, $P_1 = \{E_1, \mathbf{p}_1\}$, получаем

$$M^2 - 2ME_1 + m_1^2 = m_2^2, \quad (46.4)$$

откуда (возвращаем « c »)

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2 \quad (46.5)$$

и из симметрии ($1 \leftrightarrow 2$)

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2. \quad (46.6)$$

Это есть решение в системе покоя распадающейся частицы.

2. Пусть теперь первичная частица движется со скоростью V и при распаде одна из конечных частиц с массой $m_1 \equiv m$ имеет в системе центра инерции (ц. и.) энергию $E_0 \equiv E_1$, импульс $p_0 = \sqrt{E_0^2 - m^2 c^4}$ (полученные выше) и скорость $v_0 = p_0 c / E_0$. Найдем зависимость энергии данной частицы E от угла θ .

Из преобразований 4-импульсов следует ($c = 1$)

$$E_0 = \gamma(E - pV \cos \vartheta), \text{ где } p = \sqrt{E^2 - m^2}. \quad (46.7)$$

Отсюда для E получается квадратное уравнение

$$E^2(1 - V^2 \cos^2 \theta) - 2EE_0 \sqrt{1 - V^2} + E_0^2(1 - V^2) + V^2 m^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (46.8)$$

Из геометрических соображений (так же, как и в случае нерелятивистского распада, рис. 26) ясно, что если $v_0 < V$, то одному углу соответствует два решения.

Написать ответ не представляет труда (писать не будем). Максимальный угол соответствует случаю равенства нулю дискриминанта уравнения. Но мы найдем максимальный угол другим способом. Если в системе ц. и. частица вылетает под углом θ_0 , то в соответствие с (42.16) в лабораторной системе

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_0 \sin \theta_0}{\gamma(p_0 \cos \theta_0 + E_0 V / c^2)} = \frac{\sin \theta_0}{\gamma(\cos \theta_0 + V/v_0)}. \quad (46.9)$$

Найдем $\max(\operatorname{tg} \vartheta)$, приравняв $(\operatorname{tg} \theta)' = 0$. Легко получить, что это происходит при $\cos \theta_0 = -v_0/V$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{v_0}{\gamma \sqrt{V^2 - v_0^2}} \Rightarrow \sin \theta_m = \frac{\gamma_0 v_0}{\gamma V}, \quad (46.10)$$

где $\gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$, $\gamma_0 = 1 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$.

3. В качестве примера рассмотрим распад π^0 -мезона на два γ -кванта.

Скорость π^0 -мезона V всегда меньше $v_0 = c$, т. е. решение однозначно и нет предельного угла. Из формулы преобразования энергии (42.11) в случае фотона

$$E_0 = \frac{E(1 - \frac{V}{c} \cos \theta)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_0 = m_\pi c^2 / 2 \quad (46.11)$$

получаем

$$E = \frac{E_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (46.12)$$

Отсюда находим максимальную и минимальную энергию фотонов (при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно)

$$E_{\max} = \frac{E_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{m_\pi c^2}{2} \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} = E_\pi \frac{1 + V/c}{2}, \quad (46.13)$$

$$E_{\min} = \frac{E_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c}} = \frac{m_\pi c^2}{2} \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} = E_\pi \frac{1 - V/c}{2}. \quad (46.14)$$

Найдем энергетический спектр фотонов в лабораторной системе. В системе покоя π^0 распределение по углу вылета фотона изотропно (для других частиц может быть и по-другому)

$$dP \text{ (вероятность)} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta_0 d\theta_0}{4\pi} = -\frac{1}{2} d(\cos \theta_0). \quad (46.15)$$

Здесь элемент телесного угла $d\Omega_0$ записан в сферической системе координат (рис. 5), где координаты задаются (R, θ, φ) . Возьмем сферу радиуса R и маленькую площадку на ней в интервале углов от θ до $\theta + d\theta$ и от φ до $\varphi + d\varphi$. Нетрудно сообразить, что она будет близка к квадратной с площадью $dS = R \sin \theta d\theta \cdot R d\varphi$. Телесный угол, по определению, $d\Omega = dS/R^2$, отсюда $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Поскольку угловое распределение в рассматриваемом распаде может зависеть только от θ , то можно проинтегрировать по φ , что дает $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, т. е. в качестве площадки на сфере мы берем кольцо от θ до $\theta + d\theta$. В знаменателе (46.15) 4π происходит от того, что полный телесный угол равен площади сферы $4\pi R^2$, деленной на R^2 , таким образом, полная вероятность рассеяться на любой угол равна единице (говорят, что такое распределение нормировано на единицу).

Из формулы

$$E = \gamma E_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta_0\right) \quad (46.16)$$

находим
$$\cos \theta_0 = \left(\frac{E}{\gamma E_0} - 1\right) \frac{c}{V}, \quad (46.17)$$

откуда

$$d(\cos \theta_0) = \frac{cdE}{V\gamma E_0}. \quad (46.18)$$

Подставляя (46.18) в (46.15), получаем энергетическое распределение фотонов в лабораторной системе отсчета

$$dP = -\frac{c}{2V} \cdot \frac{1}{\gamma E_0} \cdot dE, \quad (46.19)$$

т. е. спектр равномерный от E_{\min} до E_{\max} . Знак минус здесь можно заменить на плюс, он зависит от того, откуда отсчитывать энергию.

Найдем теперь угловое распределение в лабораторной системе отсчета. Исходным снова является угловое распределение фотонов в системе ц. и., в данном случае изотропное (46.15). Для фотонов (световой абберации (23.4))

$$\cos \theta_0 = \frac{P'_x}{E'} = \frac{\gamma(P \cos \theta - \frac{V}{c^2} E)}{\gamma(E - PV \cos \theta)} = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}, \quad (46.20)$$

откуда нетрудно получить

$$d(\cos \theta_0) = \frac{d(\cos \theta)}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^2}. \quad (46.21)$$

Подставляя в (46.15), получаем искомое угловое распределение

$$dp = -\frac{1}{2} \frac{d(\cos \theta)}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^2}. \quad (46.22)$$

В общем случае, зная угловое распределение в системе ц. м. и используя формулы преобразования углов, можно найти угловые распределения для любого распада.

§ 47. Неупругие столкновения, пороги рождения частиц, встречные пучки

1. Общий подход

При неупругом столкновении (слипании) двух частиц массами m_1 и m_2 с 4-импульсами (полагаем при вычислениях $c = 1$) $P_1 = \{E_1, \mathbf{p}_1\}$, $P_2 = \{E_2, \mathbf{p}_2\}$ образуется частица с массой

$$M^2 = P^2 = (P_1 + P_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2. \quad (47.1)$$

По другому: $M^2 = P^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

2. Столкновение движущейся частицы с покоящейся частицей.

В этом случае

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_1 + m_2, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1. \end{aligned} \quad (47.2)$$

Образовавшаяся частица движется со скоростью

$$v = \frac{c^2 p}{E} = \frac{p_1 c^2}{E_1 + m_2 c^2}, \quad (47.3)$$

ее масса в соответствие с (47.1)

$$M^2 = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2. \quad (47.4)$$

Отсюда, для рождения частицы с массой M при столкновении движущейся частицы с неподвижной необходима энергия (возвращаем в формулу скорость света)

$$E_1 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2) c^2}{2m_2}. \quad (47.5)$$

Пример. Антипротон был впервые наблюден в реакции

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (47.6)$$

при соударении протонов, выпущенных из ускорителя, с неподвижной мишенью. Найдем минимальную энергию протонов, при которой идет данная реакция.

Масса всех конечных частиц на пороге рождения $M = 4m_p$ (m_p – масса протона). Тогда из (47.5) находим

$$E_1 = 7m_p c^2 \approx 6.5 \text{ ГэВ}. \quad (47.7)$$

На такую энергию специально для этой задачи в Беркли, США, был построен ускоритель, на котором в 1955 г. был открыт антипротон.

При столкновении с неподвижной мишенью энергия налетающей частицы идет как на «создание» массы рождаемой частицы, так и на ее кинетическую энергию. При этом доля энергии, идущая на создание массы, падает с ростом энергии. Из (47.4) при $E_1 \gg m_1, m_2$ находим

$$\frac{Mc^2}{E_1} \sim \sqrt{\frac{2m_2 c^2}{E_1}}. \quad (47.8)$$

3. Встречные пучки.

При слипании навстречу летящих частиц с энергиями E_0 и нулевым суммарным импульсом образуется частица с массой

$$Mc^2 = 2E_0, \quad (47.9)$$

при этом вся энергия переходит в энергию покоя конечной частицы. Для рождения одной и той же частицы с массой M на ускорителе с неподвижной мишенью и на встречных пучках в первом случае потребуется существенно большая энергия. Из (47.5) и (47.9) находим

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{Mm_2}. \quad (47.10)$$

При $m_1 = m_2 = m$ и $M \gg m$

$$E_1/E_0 \approx M/m. \quad (47.11)$$

Подставляя (47.9) в (47.11), находим, что ускоритель со встречными пучками с энергией E_0 эквивалентен ускорителю с неподвижной мишенью с энергией

$$E_1 \approx \frac{2E_0}{mc^2} E_0. \quad (47.12)$$

Первый ускоритель со встречными электрон-электронными пучками, построенный в 1964 г. в Институте ядерной физики (ИЯФ) в Новосибирске, имел максимальную энергию $E_0 = 160$ МэВ и диаметр около 1 м. Для получения тех же эффектов при соударении с неподвижной мишенью необходим ускоритель с энергией

$$E_1 = 160 \frac{2 \cdot 160}{0.5} \approx 100000 \text{ МэВ} = 100 \text{ ГэВ}. \quad (47.13)$$

Размеры кольцевого электронного ускорителя с такой энергией составили бы несколько десятков километров. Почти одновременно с ИЯФ, в 1965 г. в Стэнфорде (США) проводились эксперименты на e^-e^- встречных пучках с энергией $2E_0 = 600$ МэВ. В этих экспериментах было установлено, что размер электрона по крайней мере на порядок меньше, чем классический радиус электрона (см. § 35). В 1966 г. в ИЯФ начались эксперименты на первом в мире ускорителе со встречными электрон-позитронными (e^+e^-) пучками, где электрон с позитроном при столкновении аннигилируют и при этом может родиться частица с массой до $2E_0$. С тех пор встречные пучки стали основным инструментом изучения материи, с помощью которого были сделаны важнейшие открытия.

Максимальная энергия в e^+e^- -столкновениях, достигнутая к настоящему времени, составляет $2E_0 = 209$ ГэВ (LEP, ЦЕРН), в $p\bar{p}$ -соударениях – $2E_0 = 2000$ ГэВ (Tevatron, США), в pp -столкновениях – $2E_0 = 14000$ ГэВ (LHC, ЦЕРН). Ускоритель LHC находится в том же тоннеле периметром 27 км вблизи Женевы, где до этого располагался LEP. Самые массивные из открытых частиц – Z^0 -бозон с массой $92 \text{ ГэВ}/c^2$, Хиггсовский бозон – $125 \text{ ГэВ}/c^2$ и t-кварк – $172 \text{ ГэВ}/c^2$.

§ 48. Магнитное поле

Инвариантность заряда. Плотность заряда и тока

Законы электромагнетизма были установлены экспериментально. В их формулировке наибольшая роль принадлежит ряду замечательных ученых: К. Гауссу (1777–1855), А. Амперу (1775–1836), М. Фарадею (1791–1867). Полное завершение теория электромагнитных явлений получила в 60-х гг. 19 в. в работах Д. Максвелла (1831–1879). Однако природа этих законов оставалась загадочной. Специальная теория относительности позволила объяснить все электромагнитные явления, опираясь только на два фундаментальных экспериментальных факта.

1. Закон Кулона. В природе существуют электрические заряды, и сила взаимодействия между неподвижными зарядами

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (48.1)$$

2. Величина электрического заряда не зависит от скорости.

Второй постулат вытекает из электрической нейтральности атомов. Заряд атома водорода, как следует из экспериментов, составляет менее $10^{-20} e$ (e – заряд электрона). Скорость электронов в атоме водорода $v/c \sim 10^{-2}$. Если бы заряд как-то менялся за счет эффектов теории относительности, то можно было бы ожидать $\Delta q/q \sim (v/c)^2 \sim 10^{-4}$.

Постулат об инвариантности электрического заряда можно сформулировать в другом, удобном для использования виде: *сила, действующая на пробный заряд в поле, создаваемом неподвижным зарядом, не зависит от его скорости*. Можно показать, что это утверждение согласуется с приведенным выше экспериментальным фактом.

Плотность зарядов зависит от системы отсчета. Действительно, пусть в покоящемся цилиндре длиной l_0 и сечением S_0 содержится заряд с объемной плотностью ρ_0 . При движении цилиндра со скоростью v , параллельной оси цилиндра, сечение остается неизменным $S = S_0$, а длина сокращается: $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Из условия сохранения заряда получаем

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.2)$$

Плотность тока (заряд, протекающий через см^2 в с)

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.3)$$

Нетрудно видеть, что $\{\rho c, \mathbf{j}\} = \{\rho_0 \gamma c, \rho_0 \gamma \mathbf{v}\} = \{\rho_0 u_0, \rho_0 \mathbf{u}\}$ является 4-вектором, а значит, преобразуется по правилу

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{j} \right), \quad j'_x = \gamma (j_x - \rho V), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z. \quad (48.4)$$

Обратное преобразование получается заменой V на $-V$.

Взаимодействие движущегося заряда с током

Известно, что на движущийся заряд действует магнитное поле, создаваемое током. Попытаемся понять природу такого взаимодействия.

Рассмотрим цилиндр, в котором положительные заряды с плотностью ρ движутся вправо со скоростью v , а отрицательные заряды с

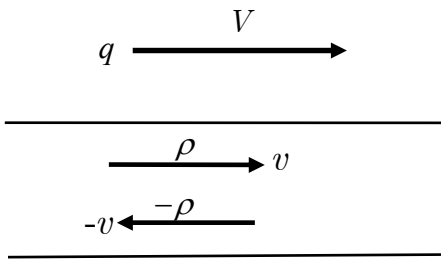


Рис. 36

плотностью $-\rho$ — налево с той же скоростью. Ясно, что в целом цилиндр является нейтральным и не действует на покоящиеся относительно него заряды.

Пусть параллельно оси цилиндра (проводника) движется заряд q со скоростью V . Будет ли на него действовать сила? Для ответа на этот вопрос перейдем в систему

движущегося заряда. В этой системе отсчета в соответствии с формулой (48.4) плотности зарядов будут

$$\rho'_+ = \gamma(\rho_+ - \frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{j}_+) = \gamma\rho(1 - \frac{vV}{c^2}), \quad (48.5)$$

$$\rho'_- = \gamma(\rho_- - \frac{\mathbf{V}}{c^2} \mathbf{j}_-) = -\gamma\rho(1 + \frac{vV}{c^2}). \quad (48.6)$$

Здесь $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ и было учтено, что

$$\rho_+ = \rho, \quad \rho_- = -\rho, \quad \mathbf{j}_+ \mathbf{V} = \rho_+ \mathbf{vV} = \rho vV, \quad \mathbf{j}_- \mathbf{V} = \rho_- (-\mathbf{v})\mathbf{V} = \rho vV. \quad (48.7)$$

Суммарная плотность зарядов будет

$$\delta\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = -\frac{2\gamma\rho vV}{c^2}. \quad (48.8)$$

Получается, что в системе отсчета, сопутствующей движущемуся заряду q , проводник имеет отличную от нуля плотность зарядов, а стало быть, создает электрическое поле и притягивает заряд q ! Этим и объясняется природа сил, действующих на движущиеся заряды.

Найдем эту силу в данном случае. Пусть расстояние от оси проводника до заряда q равно r . Оно не изменяется при переходе в

систему покоя заряда q (поперечный размер не меняется). Линейный проводник создает электрическое поле (34.10)

$$E = \frac{2\lambda}{r}, \quad (48.9)$$

где λ – линейная плотность зарядов. В нашем случае сила притяжения будет равна

$$F'_y = \frac{2\delta\rho'S}{r}q = -\frac{4\gamma\rho vVS}{rc^2}q. \quad (48.10)$$

Переведем эту силу в неподвижную относительно проводника систему отсчета, воспользовавшись формулой преобразования сил (43.7). Поскольку v'_x заряда q в его системе покоя равна нулю, то

$$F_y = F'_y/\gamma = -q\frac{4\rho vVS}{rc^2} = -q\frac{2IV}{rc^2}. \quad (48.11)$$

Здесь учтено, что полный ток в лабораторной системе равен

$$I = 2\rho vS. \quad (48.12)$$

Эту силу можно записать в виде

$$|F| = q\frac{V}{c}B, \quad B = \frac{2I}{rc}. \quad (48.13)$$

Величину B называют *магнитным полем*.

В проведенном выше рассмотрении был взят проводник, наполненный положительными и отрицательными зарядами (движущимися в противоположные стороны) для того, чтобы занулить электрическую силу в лабораторной системе. Если бы рассматривали только один тип зарядов, то в лабораторной системе было бы и электрическое, и магнитное поле, причем

$$|B| = |E|\frac{v}{c}. \quad (48.14)$$

Это видно из формулы (48.5), где первый член приводит к электрической силе, второй – магнитной.

Зачем понадобилось вводить магнитное поле, если это всего лишь проявление релятивистского эффекта (порядка Vv/c^2) в действии электрических сил? Просто, исторически, силу, действующую на неподвижный заряд, отнесли к электрическому полю, а составляющую силы, связанную с движением пробного заряда, – к магнитной силе.

Сила взаимодействия двух токов

Имея формулу (48.13) для силы, действующей на заряд, который движется параллельно току, можно найти силу взаимодействия двух токов. Пусть имеются два тонких проводника на расстоянии r с токами I_1 и I_2 . В соответствие с (48.13) сила, действующая со стороны первого тока на один электрон во втором проводнике, равна

$$F_1 = -e \frac{v_2}{c} B = -e \frac{v_2}{c} \frac{2I_1}{cr}. \quad (48.15)$$

Количество электронов на единицу длины второго проводника равно $N = I_2 / ev_2$. Это следует из определения силы тока как количества заряда, протекающего через сечение проводника за единицу времени. Умножая (48.15) на N , получаем искомую силу взаимодействия двух токов на единицу длины

$$F = -\frac{2I_1 I_2}{c^2 r}. \quad (48.16)$$

Это закон А. Ампера, установленный экспериментально в 1820 г. Токи, текущие в одном направлении, притягиваются; токи, текущие в противоположном направлении, отталкиваются.

Ниже будут приведены формулы для электромагнитных сил в общем виде.

§ 49. Сила Лоренца

Используя сформулированные в начале предыдущего параграфа постулаты и теорию относительности, можно рассчитать силу взаимодействия между двумя произвольно движущимися зарядами. Действительно, раз известна сила, действующая со стороны покоящегося заряда, то можно найти силу в любой движущейся системе отсчета. Оставим эти расчеты для курса электричества и приведем только конечный результат.

Сила, действующая на заряд, движущийся со скоростью \mathbf{V} , равна

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}), \quad (49.1)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} – это электрическое и магнитное поля, создаваемые источником полей. Эта сила называется *силой Лоренца*.

В случае, когда источником поля является электрический заряд, движущийся со скоростью v ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}. \quad (49.2)$$

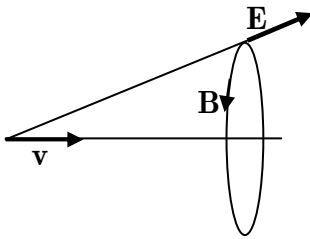


Рис. 37

Направление \mathbf{E} и \mathbf{B} показано на рис. 37. Магнитное поле, как и электрическое, можно изображать силовыми линиями.

Поскольку магнитная составляющая силы Лоренца (49.1) перпендикулярна скорости заряженной частицы (формула (49.1)), то работы она не совершает.

В случае линейного провода с током силовые линии имеют форму кольца, охватывающего проводник. Направление поля находится по правилу буравчика (штопора): если штопор вкручивать в направлении тока, то движение точек на ручке штопора указывает направление магнитного поля.

В общем случае электрические и магнитные поля могут создаваться множеством зарядов, это может быть чисто электрическое поле или только магнитное поле (поле проводника с током) – во всех случаях сила, действующая на заряд, дается силой Лоренца. Хендрик Лоренц нашел выражение для этой силы в 1892 г.

§ 50. Преобразование электрических и магнитных полей

Электрическое и магнитное поле – это проявление одного электромагнитного поля, они взаимосвязаны, и их соотношение зависит от системы отсчета. У нас есть все, чтобы вывести законы преобразования полей, но оставим это для курса электричества и приведем только конечные формулы:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} B'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} B'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (50.1)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (50.2)$$

Обратное преобразование получается заменой $V \rightarrow -V$.

Пример. Пусть в лабораторной системе есть магнитное поле B_z . Тогда в системе S' , движущейся вдоль оси X со скоростью V , имеется как электрическое, так и магнитное поля:

$$E'_y = -\gamma \frac{V}{c} B_z \quad B'_z = \gamma B_z. \quad (50.3)$$

Данные преобразования показывают, что электрические и магнитные поля не существуют отдельно друг от друга, а являются частями электромагнитного поля, проявляющегося в действии силы Лоренца на движущийся заряд.

§ 51. Движение заряженной частицы в магнитном поле

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Компонента силы Лоренца (49.1) вдоль поля равна нулю, поэтому вдоль поля импульс сохраняется. Закон изменения поперечного импульса

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{q[\mathbf{v}\mathbf{B}]}{c}. \quad (51.1)$$

Поскольку сила перпендикулярна скорости, магнитное поле не совершает работы, изменяется лишь направление движения, и в случае постоянного поля это будет движение по окружности. Таким образом, заряженная частица движется в однородном магнитном поле по спирали. Найдем радиус окружности. Дифференцируя (51.1) с учетом того,

что $v = \text{const}$ и $\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = -\mathbf{e}_R \frac{v_\perp^2}{R}$, $[\mathbf{v}\mathbf{B}] = -\mathbf{e}_R v_\perp B$, получаем

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{p_\perp v_\perp}{R} = \frac{q v_\perp B}{c}, \quad (51.2)$$

откуда радиус окружности

$$R = \frac{p_\perp c}{qB}. \quad (51.3)$$

Для $q = e$ (заряд электрона) уравнение (51.3) можно записать в удобном для расчетов виде

$$R \approx \frac{3333 p_\perp c [\text{ГэВ}]}{B[\text{кГс}]}, \text{ см.} \quad (51.4)$$

Здесь величина магнитного поля выражена в кГс = 1000 Гс (гаусс) (см. единицы измерения электромагнитных величин в следующем параграфе).

Найдем уравнение траектории. Пусть магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси Z , тогда продольная скорость (вдоль Z) постоянна и продольная координата равна

$$z = v_{\parallel} t + \text{const.} \quad (51.5)$$

Уравнение движения (51.1) для поперечного движения можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\omega}_B = \frac{q\mathbf{B}}{\gamma mc} = \mathbf{e}_z \omega_B, \quad (51.6)$$

где ω_B – циклотронная частота. Заряд движется по окружности со скоростью v_{\perp} с круговой частотой ω_B , отсюда получаются уравнения движения по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитному полю

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R \cos(\omega_B t + \varphi_0); \\ y &= y_0 + R \sin(\omega_B t + \varphi_0); \\ v_x &= -R\omega_B \sin(\omega_B t + \varphi_0); \\ v_y &= R\omega_B \cos(\omega_B t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (51.7)$$

где x_0, y_0 – положение центра окружности, φ_0 – начальная фаза и

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} = \frac{p_{\perp} c}{qB}. \quad (51.8)$$

Следует заметить, что ω_B , определенная в (51.6), пропорциональна заряду q , т. е. может быть положительна и отрицательна. Если смотреть в направлении поля, то частица с положительным зарядом движется по спирали против часовой стрелки, а с отрицательным зарядом – по часовой стрелке. Это ясно следует из исходной формулы для силы Лоренца.

§ 52. Системы единиц электромагнитных величин

Основное отличие системы СГСЭ и СИ состоит в электрических единицах. Обычные механические законы записываются одинаково в обеих системах единиц, отличие состоит только в величинах, взятых за единицу измерений. В случае же электрических явлений имеется отличие даже в формулах.

Единица заряда

В системе СГСЭ единицей заряда является «единица заряда СГСЭ». Сила взаимодействия двух таких зарядов, расположенных на расстоянии 1 см, равна 1 дин. В системе СГСЭ кулоновская сила равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (52.1)$$

где сила в динах, заряды в ед. СГСЭ, расстояние в см.

В системе СИ единицей заряда является *кулон* (Кл). Кулон – это заряд, протекающий за 1 с при силе тока 1 *ампер* (А). Ампер (по определению) – это такой ток, при котором два провода с таким током, находящиеся на расстоянии 1 см, притягиваются с силой $2 \cdot 10^{-2}$ дин на 1 погонный сантиметр. Сила для притяжения проводов в системе СГСЭ дается формулой (48.16). Откуда следует, что

$$1 \text{ Кл} = (c/10) \text{ ед. СГСЭ} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ ед. заряда СГСЭ} \quad (52.2)$$

(здесь скорость света в СГСЭ $c = 29979245800 \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с).

Сила взаимодействия двух зарядов в системе СИ, с учетом определения кулона, получается следующей:

$$F = c^2 10^{-7} \frac{q_1 q_2}{r^2} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8987551787,3 \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (52.3)$$

где сила выражена в ньютонах, заряды – в кулонах, расстояние – в метрах, скорость света – в м/с.

Заряд электрона:

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \approx 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}. \quad (52.4)$$

Примечание: В 2018 года на XXVI Генеральной конференции мер и весов была принято новое определение ампера, основанное на использовании численного значения элементарного электрического заряда. Ампер есть единица электрического тока в СИ. Она определена путём фиксации численного значения элементарного заряда равным $1,602176634 \cdot 10^{-19}$, когда он выражен единицей Кл, которая равна $A \cdot s$.

Электрический потенциал

В СГСЭ: при прохождении единичной разности потенциалов кинетическая энергия заряда в 1 ед. СГСЭ изменяется на 1 эрг. Такая разность потенциалов называется «*единицей потенциала СГСЭ*»:

$$1 \text{ эрг} = 1 \text{ ед. зар. СГСЭ} \times 1 \text{ ед. потенц. СГСЭ}. \quad (52.5)$$

В СИ: при прохождении единичной разности потенциалов кинетическая энергия заряда в 1 Кл изменяется на 1 Дж. Такая разность потенциалов называется *вольт* (В):

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \times 1 \text{ В}. \quad (52.6)$$

Учитывая, что $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$, получаем

$$\frac{1 \text{ ед. потенциала СГСЭ}}{1 \text{ Вольт}} = \frac{\text{эрг}}{\text{Дж}} \times \frac{\text{Кл}}{1 \text{ зар. СГСЭ}} = \quad (52.7)$$

$$= \frac{1}{10^7} (c[\text{в СГС}]/10) = 299,792458 \approx 300,$$

т. е. **1 ед. потенциала СГСЭ \approx 300 В.**

Магнитное поле

Сила Лоренца в СГСЭ

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}). \quad (52.8)$$

Единица магнитного поля в СГСЭ *гаусс* (Гс) – эта единица возникает естественным образом, магнитное поле и напряженность электрического поля в системе СГСЭ имеют одинаковую размерность, равную ед. потенциала СГСЭ/см (для напряженности поля в СГСЭ не придумали специального названия).

Сила Лоренца в СИ (по определению)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (52.9)$$

все как в СГСЭ, но без скорости света. Единица магнитного поля в системе СИ *тесла* (Т).

Все остальные величины, входящие в (52.8) и (52.9), выражаются в единицах СГСЭ и СИ соответственно. Из сравнения этих формул следует, что

$$1 \text{ Т} = 10^4 \text{ Гс}. \quad (52.10)$$

Магнитное поле Земли порядка 1 Гс. Поля в сильных магнитах до 10^5 Гс.

Электрон-вольт – это изменение энергии электрона при прохождении разности потенциалов 1 В.

$$1 \text{ эВ} = e \times 1 \text{ В} \approx 1.6 \times 10^{-10} \text{ Кл} \times 1 \text{ В} = 1,6 \times 10^{-10} \text{ Дж} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ эрг}. \quad (52.11)$$

§ 53. Мюонный коллайдер

Рассмотрим в качестве примера движения частиц в магнитном поле мюонный коллайдер (от *collide* (engl.) – сталкиваться). Мюоны – нестабильные частицы ($\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ с), и получать их, а тем более использовать в ускорителях – непростая задача, но очень привлекательная. Дело в том, что мюоны имеют массу $mc^2 = 105$ МэВ, примерно в 200 раз больше, чем у электронов. При одинаковой энергии мощность синхротронного излучения при движении по окружности у мюонов будет в 40000 раз меньше, чем у электронов. Поэтому с мюонами можно достичь более высоких энергий, используя кольцевые ускорители, где пучки сталкиваются много раз. Интересно, а сколько оборотов может сделать (в среднем) мюон, пока не распадется?

Время жизни мюона в лабораторной системе отсчета $\tau = \gamma\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6} \gamma$ с. За время жизни он пройдет путь $L \approx c\tau$ и совершит $n = L/2\pi R$ оборотов в ускорителе, отсюда

$$n = \frac{c\gamma\tau_0 eB}{2\pi r c} \approx \frac{eB\tau_0}{2\pi mc}. \quad (53.1)$$

Число оборотов не зависит от энергии и определяется только величиной магнитного поля на орбите. Это понятно: и радиус орбиты, и время жизни пропорциональны энергии. При поле $10 \text{ Т} = 100 \text{ кГс}$ получаем

$$n = \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \times 10^5 \times 2 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^{10}}{6,28 \cdot 105 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \approx 2700 \text{ оборотов}. \quad (53.2)$$

При вычислении (в системе СГСЭ) числитель и знаменатель были умножены на c и затем в знаменателе энергия mc^2 мюона в МэВ была переведена в эрг ($1 \text{ МэВ} \approx 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$).

ГЛАВА VI

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ, КОЛЕБАНИЯ

§ 54. Одномерное движение в потенциальном поле (нерелятивистское)

В общем случае одномерное движение задается уравнением

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (54.1)$$

Когда уравнение написано, то решить его дело техники. Для многих типов уравнений разработаны специальные математические методы, но часто намного проще решить конкретную задачу на компьютере. Временная шкала разбивается на малые временные интервалы, и на каждом шаге рассчитывается изменение скорости и координаты, используя непосредственно уравнение движения. Однако для установления закономерностей желательно получить результат в виде формулы.

Рассмотрим движение в случае, когда сила зависит только от координаты

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (54.2)$$

В этом случае, как мы знаем, можно ввести потенциальную энергию $U(x)$, такую что

$$U(x) = - \int F(x) dx, \quad (54.3)$$

тогда уравнение второго порядка (54.2) сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = \text{const}. \quad (54.4)$$

При решении уравнения движения второго порядка возникают две константы (поскольку два интегрирования), зависящие от начальных условий (x_0, v_0) . Первая константа появляется при переходе от (54.2) к (54.4) – это энергия E . Уравнение (54.4) устанавливает связь между скоростью и координатой, которые можно нарисовать в виде линий на *фазовой плоскости* с координатными осями x и $\dot{x} \equiv v$. Для каждой E это будет отдельная кривая, замкнутая для одномерного ограниченного (финитного) движения и незамкнутая для инфинитного движения. Такие кривые, характерные для конкретного потенциала, называют сепаратрисами. Понятие фазовой плоскости (для одномерного движения) и

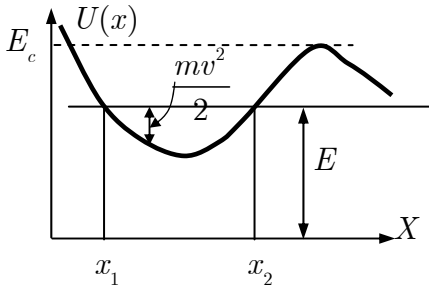


Рис. 38

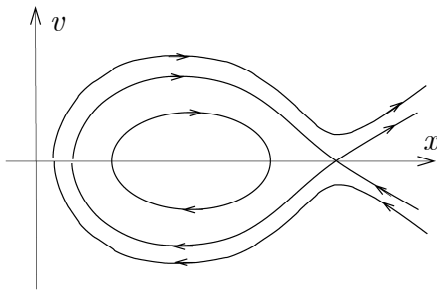


Рис. 39

6-мерного фазового пространства для движения в трехмерном пространстве широко используется в физике ускорителей, оптике, статистической и квантовой физике.

Рассмотрим потенциал, изображенный на рис. 38, где частица совершает движение (колебания) между точками x_1 и x_2 . Кинетическая энергия $K = E - U(x)$ должна быть положительной величиной, что и определяет допустимую область движения. При $E < E_c$ движение финитно, при $E > E_c$ – инфинитно. Соответствующие (приблизительно) траектории на фазовой плоскости показаны на рис. 39.

Уравнение (54.4) интегрируется путем разделения переменных. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \quad (54.5)$$

откуда

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \quad (54.6)$$

Знак \pm означает, что при данном x скорость может быть положительной или отрицательной (рис. 39). Период колебаний

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (54.7)$$

где x_1, x_2 находятся из $U(x) = E$.

§ 55. Малые, гармонические колебания

Пусть $U(x)$ имеет вид, как изображено на рис. 38. Поскольку начало отсчета потенциальной энергии произвольно, как и координаты x , то можно нижнюю точку кривой совместить с $x = 0$. и положить $U(0) = 0$. Любую плавную функцию вблизи точки $x = x_0$ можно разложить по малому параметру $x - x_0$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (55.1)$$

В рассматриваемом случае $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$, так что потенциальную энергию можно записать в виде

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad (55.2)$$

где $k = U''(0)$. Соответствующее силовое поле является линейной функцией смещения

$$f = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx, \quad (55.3)$$

и уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (55.4)$$

с $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E, \quad (55.5)$$

где E находится из начальных условий

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}. \quad (55.6)$$

Фазовая траектория представляет собой эллипс

$$\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_m}\right)^2 = 1, \quad (55.7)$$

$$\text{где } x_m = \sqrt{2E/k}, \quad v_m = \sqrt{2E/m}. \quad (55.8)$$

Решение уравнения (55.5) можно найти «в лоб» путем однократного интегрирования аналогично выводу формул (54.5)–(54.7). Подставляя

$U = \frac{kx^2}{2}$ в (54.6), находим

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E} \sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}} + \text{const}. \quad (55.9)$$

Интеграл берется путем замены переменной $\frac{kx^2}{2E} = \cos^2 \alpha$. Подставляя

$dx = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \alpha d\alpha$, получаем

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{2}{k}} \int d\alpha = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \alpha + \text{const} = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \sqrt{\frac{k}{2E}} x + \text{const}. \quad (55.10)$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{k}{m}} t + \text{const} \right) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (55.11)$$

где амплитуда колебаний

$$a = |-x_1| = x_2 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (55.12)$$

и частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (55.13)$$

Во второй части (55.11) мы убрали знак \pm , поскольку движение с отрицательной частотой сводится к движению с положительной частотой: $\cos(-\omega t + \varphi_1) = \cos(\omega t - \varphi_1)$, а сложение двух косинусов с одинаковой частотой, но разными фазами дает снова косинус той же частоты, но другой фазы.

Период колебаний можно найти из (55.10), взяв определенный интеграл с граничными условиями,

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} (\arccos(-1) - \arccos(1)) = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \pi = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (55.14)$$

а также его можно сразу получить из (55.11), принимая во внимание, что для гармонического колебания период T соответствует изменению аргумента синуса на 2π , т. е. $\omega_0 T = 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (55.15)$$

Итак, общим решением уравнения малых гармонических колебаний $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ является

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (55.16)$$

или

$$x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \quad (55.17)$$

Действительно (55.17) можно записать в виде

$$x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega_0 t \right), \quad (55.18)$$

$$\cos \varphi_0 \qquad - \sin \varphi_0$$

что, с учетом тригонометрической формулы

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (55.19)$$

дает

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (55.20)$$

где

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{c_2}{c_1}. \quad (55.21)$$

Константы находятся из начальных условий $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

Подставляя $t = 0$ в

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \\ \dot{x} &= -c_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + c_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (55.22)$$

находим

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (55.23)$$

Отсюда получаем решение с учетом начальных условий

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (55.24)$$

или $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$. (55.25)

Этим исчерпывается задача о свободных малых колебаниях при начальных условиях.

Энергия гармонического осциллятора

Найдем энергию гармонического осциллятора. Имеем

$$\begin{aligned} K &= \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{ka^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0); \\ U &= \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (55.26)$$

откуда следует, что сумма кинетической и потенциальной энергии является постоянной величиной, равной

$$E = K + U = \frac{ka^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}. \quad (55.27)$$

Другого и не могло быть, так как энергия в потенциальном поле сохраняется. Более того, усредненные по времени кинетическая и потенциальная энергии равны и составляют половину полной энергии

$$\langle K \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2}. \quad (55.28)$$

При усреднении было учтено $\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1 + \langle \cos 2\omega_0 t \rangle}{2} = \frac{1}{2}$. (55.29)

Примеры.

1. Тело на пружинке.

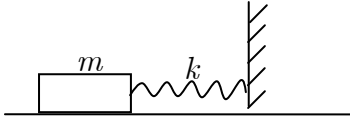


Рис. 40

$$m\ddot{x} = -kx; \quad (55.30)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (55.31)$$

2. Маятник.

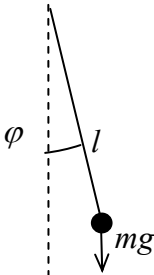


Рис. 41

$$E = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) \quad (55.32)$$

$$\approx \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

Выражение (55.32) можно записать в стандартном для гармонического осциллятора виде

$$E = \frac{m_*\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k_*\varphi^2}{2}, \quad m_* = ml^2, \quad k_* = mgl, \quad (55.33)$$

отсюда

$$\omega_0^2 = \frac{k_*}{m_*} = \frac{g}{l}. \quad (55.34)$$

Можно по-другому. Дифференцируя (55.32), получаем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (55.35)$$

3. Тело на пружинке, скользящее по спице.

Пусть F – натяжение пружинки в положении равновесия. При отклонении тела в горизонтальном направлении на него действует только проекция силы натяжения пружинки (рис. 42)

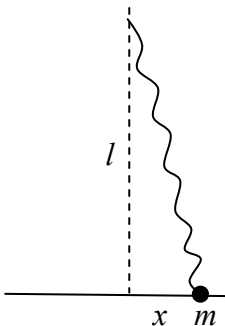


Рис. 42

$$m\ddot{x} = -(F + \delta F) \sin \theta \approx -F\theta \approx -F \frac{x}{l}, \quad (55.36)$$

откуда сразу находится частота колебаний

$$\omega_0^2 = \frac{F}{ml}. \quad (55.37)$$

При решении мы оставили в (55.36) только члены первого порядка малости.

§ 56. Решение уравнений с помощью комплексных чисел

Немного математики. Уравнения, описывающие колебательные процессы, относятся к классу линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \quad (56.1)$$

Для таких уравнений справедлив принцип суперпозиции: если есть два решения, $x_1(t), x_2(t)$, то их линейная комбинация $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ с произвольными коэффициентами $c_{1,2}$ будет тоже решением. Решениями являются синусы и косинусы, экспоненты, но намного удобнее оперировать решениями типа

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re} a_0 e^{i\omega t + i\varphi_0} = \operatorname{Re} Z, \\ Z &= A e^{i\omega t}, \quad A = a_0 e^{i\varphi_0}. \end{aligned} \quad (56.2)$$

Здесь используется формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (56.3)$$

Эту формулу можно получить следующим образом. Возьмем комплексное число $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Дифференцируя, получаем $dz = -\sin \varphi d\varphi + i \cos \varphi d\varphi = izd\varphi$. Откуда $\ln z = i\varphi$ и $z = e^{i\varphi}$, что и требовалось доказать.

Оперировать с экспонентами удобнее, поскольку после дифференцирования получается снова экспонента. При этом пока производятся линейные операции (сложение, умножение на постоянные коэффициенты, дифференцирование, интегрирование), можно опускать знак вещественной части и переходить к вещественной части только в окончательном результате.

Чтобы стало понятнее, почему можно оперировать в уравнении не действительными (физическими) решениями, а искать их в виде комплексных решений, подставим $Z = x_R + ix_I$ в (56.1) и получим

$$a_n \frac{d^n x_R}{dt^n} + \dots a_1 \frac{dx_R}{dt} + a_0 x_R + i \left(a_n \frac{d^n x_I}{dt^n} + \dots a_1 \frac{dx_I}{dt} + a_0 x_I \right) = 0. \quad (56.4)$$

Поскольку действительная и мнимая часть порознь должны быть равны нулю, для действительной части получается исходное физическое уравнение. Вдобавок появилось уравнение для мнимой части, тождественное уравнению для реальной части координаты, поэтому оно будет давать решение, тождественное физическому. Заметим, что такое разделение действительной и мнимой частей возможно только для линейных уравнений, т. е. содержащих x только в первой или нулевой степени. Если бы в уравнении был член, содержащий x^2 , то $(x_R + ix_I)^2 = x_R^2 - x_I^2 + 2ix_Rx_I$. Мы видим, что после подстановки x^2 действительная часть уравнения будет содержать член $x_R^2 - x_I^2$ и действительная часть уравнения не будет тождественна исходному физическому уравнению, содержащему x^2 .

Для решения подобных уравнений в математике используется следующий прием: решения ищутся в виде

$$x(t) = \operatorname{Re}\{e^{i\omega t}\}. \quad (56.5)$$

Тогда $\frac{dx}{dt} = \operatorname{Re}\{i\omega e^{i\omega t}\}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = \operatorname{Re}\{(i\omega)^n e^{i\omega t}\}$ и после подстановки в (56.1) получается уравнение

$$a_n (i\omega)^n + \dots a_1 (i\omega) + a_0 = 0. \quad (56.6)$$

Такое уравнение n -степени имеет n корней ω_j , в общем случае комплексных. Тогда общее решение *однородного* (без правой части) уравнения (56.1) будет

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}\{c_j e^{i\omega_j t}\}. \quad (56.7)$$

Если в правой части уравнения (56.1) стоит не ноль, а некая функция $F(t)$, то уравнение называется *неоднородным* и общее решение является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x(t) = x_{\text{однор.}}(t) + x_{\text{частн.}}(t). \quad (56.8)$$

Все это станет намного яснее при дальнейшем рассмотрении.

§ 57. Затухающие колебания

Рассмотрим колебания с трением. При малых скоростях в газах, жидкостях или при излучения заряда возникает тормозящая сила, направленная против скорости и равная

$$f_{mp} = -\beta\dot{x}. \quad (57.1)$$

Уравнение движения осциллятора с затуханием

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} \quad (57.2)$$

или в каноническом (общепринятом) виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где} \quad 2\gamma = \frac{\beta}{m}. \quad (57.3)$$

Как обсуждалось ранее, ищем решения в виде

$$x(t) = \operatorname{Re} Z, \quad \text{где} \quad Z = A e^{i\omega t}, \quad (57.4)$$

ω и A – пока неопределенные комплексные величины. Подставляя (57.4) в (57.3) имеем

$$A e^{i\omega t} (-\omega^2 + i\omega 2\gamma + \omega_0^2) = 0. \quad (57.5)$$

Поскольку левый сомножитель ненулевой, то получаем *характеристическое* уравнение

$$\omega^2 - i\omega 2\gamma - \omega_0^2 = 0. \quad (57.6)$$

Решение этого квадратного уравнения

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2}. \quad (57.7)$$

Отсюда

$$Z = A_1 e^{-\gamma t + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + A_2 e^{-\gamma t - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}, \quad (57.8)$$

где $A_{1,2}$ – комплексные числа. Если $\omega_0 > \gamma$ (трение мало), то

$$Z = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \Omega t + iA_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t - iA_2 \sin \Omega t), \quad (57.9)$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. (57.10)

$$\text{Отсюда} \quad x(t) = \operatorname{Re} Z = e^{-\gamma t} (c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t), \quad (57.11)$$

где константы c_1, c_2 являются вещественными (действительными) числами, значения которых находятся из начальных условий. Действительно, из (57.9) следует, что $c_1 = \operatorname{Re}(A_1 + A_2)$, $c_2 = \operatorname{Im}(A_2 - A_1)$.

Таким образом, при малом затухании решение похоже на свободные колебания, только амплитуда затухает как $e^{-\gamma t}$ и частота несколько сдвинута: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Время жизни колебаний (при $\gamma \ll \omega_0$)

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{\omega_0}{2\pi\gamma} \approx T \frac{\omega_0}{2\pi\gamma} \equiv T \frac{Q}{\pi}, \quad (57.12)$$

где *добротность*

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (57.13)$$

Найдем решение задачи с учетом начальных условий $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Полагая в (57.11) $t = 0$, сразу получаем $c_1 = x_0$. Вторую константу находим, дифференцируя (57.11) и приравнявая v_0 при $t = 0$:

$$x'(t) = -\gamma e^{-\gamma t} (c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t) + e^{-\gamma t} (-c_1 \Omega \sin \Omega t + c_2 \Omega \cos \Omega t),$$

$$x'(0) \equiv v_0 = -\gamma c_1 + c_2 \Omega, \text{ откуда } c_2 = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega}.$$

В результате получаем искомое решение при $\gamma < \omega_0$:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega} \sin \Omega t \right). \quad (57.14)$$

Если $\omega_0 < \gamma$, то в (57.8) выражение под корнем становится отрицательным и решение есть

$$Z = A_1 e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}, \quad (57.15)$$

$$x = \operatorname{Re} Z = e^{-\gamma t} \left(c_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right). \quad (57.16)$$

В этом случае решение *апериодическое*, при затухании совершается менее одного колебания. Константы $c_{1,2}$ легко находятся из начальных условий, аналогично предыдущему случаю (найдите сами).

Наконец, рассмотрим случай $\gamma = \omega_0$. Если подставить $\gamma = \omega_0$ в (57.16), то получим $x = c e^{-\gamma t}$. Это неверно! Одна константа не может удовлетворить двум начальным условиям (координата и скорость). В теории дифференциальных уравнений показывается, что решением уравнения $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ при $\gamma = \omega_0$ является

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}. \quad (57.17)$$

Это можно показать так. Положим $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \varepsilon \rightarrow 0$. С учетом малости ε и того, что $e^x \approx 1 + x$ при малом x , формулу (57.16) можно записать в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t} [b_1(1 - \varepsilon t) + b_2(1 + \varepsilon t)] = e^{-\gamma t} [(b_1 + b_2) + \varepsilon(b_2 - b_1)t]. \quad (57.18)$$

Делая замену $b_1 + b_2 \rightarrow c_1$, $\varepsilon(b_2 - b_1) \rightarrow c_2$, получаем (57.17). Константа c_2 может быть и не малой величиной (хотя содержит малую ε), если константы b_1 и b_2 очень большие и противоположные по знаку. Начальные условия учитываются аналогично (57.14). В результате получается

$$x(t) = e^{-\gamma t} [x_0 + (x_0 \gamma + v_0)t]. \quad (57.19)$$

Таким образом, получены решения для всех случаев свободных колебаний с затуханием.

§ 58. Вынужденные колебания

Рассмотрим движение осциллятора с затуханием под действием внешней гармонической силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (для удобства выбором начала отсчета времени делаем начальную фазу равной нулю). Уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (58.1)$$

Как обсуждалось в § 56, общим решением данного уравнения является сумма решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного (с правой частью) уравнения. Найдем это частное решение. Записываем силу в виде $F = F_0 e^{i\omega t}$ и ищем решение в виде $Z = A e^{i\omega t}$. Подставляя в (58.1), получаем

$$A e^{i\omega t} (-\omega^2 + i\omega 2\gamma + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (58.2)$$

откуда

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\gamma)}. \quad (58.3)$$

Решение неоднородного уравнения

$$x(t) = \text{Re}(A e^{i\omega t}) = \frac{F_0 \cos(\omega t + \delta)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = a \cos(\omega t + \delta), \quad (58.4)$$

где относительная фаза между координатой и силой

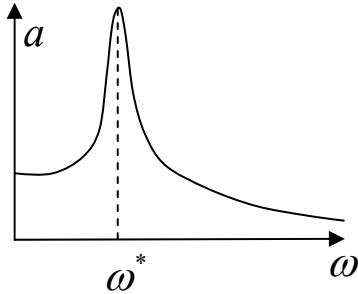


Рис. 43

$$\text{tg } \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (58.5)$$

Легко найти, что амплитуда достигает максимума при

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (58.6)$$

Зависимость амплитуды от частоты изображена на рис. 43. Амплитуда колебаний

равна

$$\omega = 0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \text{ — растянута пружина,} \quad (58.7)$$

$$\omega = \omega^* \Rightarrow a = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad (58.8)$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{m\omega^2\sqrt{1 + 4\gamma^2/\omega^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0^2}{\omega^2\sqrt{1 + 4\gamma^2/\omega^2}}. \quad (58.9)$$

В случае малого трения, $\omega_0 \gg \gamma$,

$$\omega^* \approx \omega_0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k} Q, \quad (58.10)$$

т. е. амплитуда в резонансе в Q раз (Q – добротность) больше, чем при статическом воздействии.

При малом затухании, $\gamma \ll \omega_0$,

$$a \propto \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 + \omega)^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{1}{2\omega_0\sqrt{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}} \quad (58.11)$$

и при $\Delta\omega = \gamma$ амплитуда падает в $\sqrt{2}$ раз. Относительная ширина резонансной кривой

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (58.12)$$

Исследуем поведение относительной фазы δ , даваемой (58.5). Эта формула записана так, что числитель равен синусу, а знаменатель косинусу этой фазы. Отсюда находим относительный сдвиг фазы координаты и силы:

$$\begin{aligned} \omega = 0 & \Rightarrow \delta = 0, \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{2}, \\ \omega \gg \omega_0, \omega \gg \gamma & \Rightarrow \delta = -\pi. \end{aligned} \quad (58.13)$$

Интересно посмотреть сдвиг фазы для скорости. Если $x = a \cos \omega t$, то

$$x'/\omega = -a \sin \omega t = a \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \text{ т. е. скорость опережает координату}$$

по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а значит, сдвиг фазы скорости относительно силы будет

$$\begin{aligned} \omega = 0 & \Rightarrow \delta_F = \frac{\pi}{2}, \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \delta_F = 0, \\ \omega \gg \omega_0 & \Rightarrow \delta_F = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (58.14)$$

т. е. в резонансе скорость и сила находятся в фазе, при этом мощность, закачиваемая в осциллятор, максимальна.

Общее решение уравнения колебаний под действием внешней силы есть сумма решения однородного уравнения и найденного выше частного решения

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t + \delta)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} + (57.11), (57.16) \text{ или } (57.17) \quad (58.15)$$

для $\omega_0 > \gamma$, $\omega_0 < \gamma$ и $\omega_0 = \gamma$ соответственно.

Рассмотрим еще отдельно случай $\gamma = 0$, при этом

$$x(t) = \frac{F_0 \cos \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \quad (58.16)$$

Пусть $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, тогда получается $c_2 = 0$ и

$$x(t) = \frac{F_0(\cos \omega t - \cos \omega_0 t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = -\frac{2F_0 \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)}{m(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}. \quad (58.17)$$

Здесь $\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)$ описывает быстрые колебания на полусумме частот, а $\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)$ – медленные биения на полуразности частот, т. е.

амплитуда то нарастает, то убывает. При $\omega = \omega_0$

$$x \propto t \sin \omega_0 t, \quad (58.18)$$

т. е. амплитуда растет линейно со временем.

Потери энергии осциллятора при малом затухании

При малом затухании, $\omega_0 \gg \gamma$,

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \langle f_{\text{тр}} v \rangle = -\langle \beta v^2 \rangle = -4\gamma \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = -2\gamma \langle E \rangle, \quad (58.19)$$

отсюда

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -2\gamma \langle E \rangle \Rightarrow \langle E \rangle = E_0 e^{-2\gamma t}. \quad (58.20)$$

Это следует также из того, что $E \propto v^2 \propto x^2 \propto (e^{-\gamma t})^2 = e^{-2\gamma t}$.

Работа сил при вынужденных колебаниях

Если осциллятор с малым затуханием колеблется с постоянной амплитудой, то мощность внешних сил равна потерям энергии на трение

$$\begin{aligned} P &= -\frac{d\langle E \rangle}{dt} = 2\gamma\langle E \rangle = 2\gamma m \langle \dot{x}^2 \rangle = 2\gamma m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle \\ &= \frac{\gamma \omega_0^2 F_0^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}. \end{aligned} \quad (58.21)$$

Например, при облучении атомов светом с напряженностью электрического поля $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ происходит рассеяние (т. е. поглощение и излучение света), при этом мощность дается формулой (58.21), где $F_0 = e\mathcal{E}_0$. Наиболее интенсивно рассеяние происходит на резонансной частоте (см. (58.6)) $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0$.

§ 59. Параметрический резонанс

При вынужденных колебаниях к осциллятору прикладывается внешняя сила. Внешнее воздействие может также осуществляться путем изменения во времени параметров системы. При некоторых частотах изменения параметров может возникать *параметрический* резонанс. Рассмотрим такой резонанс на частном примере – обычных качелях.

При раскачке качелей мы внизу встаем, а в верхней точке приседаем. В верхней точке качели покоятся, и приседание на их движение не влияет (только меняется на мгновение натяжение веревок). В нижней точке встаем на δl при длине качелей l . Из сохранения момента импульса

$$v + \delta v = \frac{vl}{l - \delta l} \approx v \left(1 + \frac{\delta l}{l} \right). \quad (59.1)$$

Найдем изменение энергии. В нижней точке потенциальная энергия равна нулю, поэтому

$$E = \frac{mv^2}{2}, \quad \delta E = mv\delta v = mv^2 \frac{\delta l}{l} = 2E \frac{\delta l}{l}. \quad (59.2)$$

Это есть приращение энергии за одно вставание. С учетом того, что за один период качели проходят нижнюю точку дважды, то число вставаний за время dt будет

$$dN = \frac{2dt}{T}, \quad (59.3)$$

отсюда
$$\frac{dE}{E} = \frac{4\delta l}{l} \frac{dt}{T} = 4 \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\delta l}{l} dt, \quad E = E_0 \exp\left(\frac{2\omega_0}{\pi} \frac{\delta l}{l} t\right). \quad (59.4)$$

Энергия качелей растет, потому что при вставании в нижней точке совершается большая работа, чем возвращается при приседании в верхней точке, ввиду дополнительной прижимающей вниз силы mv^2/l . Поскольку есть затухание $E = E_0 e^{-2\gamma t}$, то для роста амплитуды нужно

$$\frac{2\omega_0}{\pi} \frac{\delta l}{l} > 2\gamma \quad \text{или} \quad \frac{\delta l}{l} > \frac{\gamma\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2Q}. \quad (59.5)$$

§ 60. Адиабатический инвариант

Рассмотрим следующую задачу. Пусть маленький шарик летает между неподвижной стенкой и тяжелой пластиной, удаляющейся от стенки со скоростью u , упруго отражаясь от них. При этом пластина движется очень медленно, так что за один период движения шарика относительное изменение расстояния между стенкой и пластиной мало.

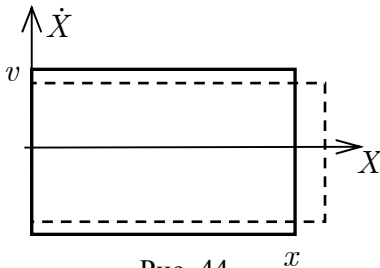


Рис. 44

На фазовой плоскости шарик описывает траекторию, показанную на рис. 44 сплошной линией. Через большое количество периодов движения фазовая траектория изменится, как схематично показано пунктирной линией. Как меняется площадь S внутри фазовой кривой?

Поскольку $S = 2xv$, то ее изменение

ние

$$\Delta S = 2(v\Delta x + x\Delta v). \quad (60.1)$$

Изменение модуля скорости шарика при упругом отскокивании от стенки, удаляющейся со скоростью u , равно

$$\Delta v = -2u. \quad (60.2)$$

Это следует из того, что в системе стенки шарик до столкновения имеет скорость $v - u$, которая меняется на противоположную при отскоке. При переходе в неподвижную систему от этой скорости нужно отнять скорость стенки, в результате скорость шарика после отскока будет $v - 2u$. Изменение расстояния пластины от стенки за один период движения шарика

$$\Delta x = uT = u \frac{2x}{v}. \quad (60.3)$$

Подставляя (60.2), (60.3) в (60.1), получаем

$$\Delta S = 2(vu \frac{2x}{v} - x2u) = 0. \quad (60.4)$$

Итак, при медленном, *адиабатическом*, изменении параметров системы (расстоянии между стенкой и пластиной) фазовая кривая остается (почти) замкнутой, ее форма меняется, но *площадь остается постоянной* и является *адиабатическим инвариантом*.

Рассмотрим теперь осциллятор в виде тела на пружинке. Найдем сохраняющуюся величину при медленном изменении коэффициента жесткости.

Имеем $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, где k медленно меняется. Продифференцируем и произведем усреднение по большому промежутку времени

$$\langle \dot{E} \rangle = \left\langle \frac{\dot{k}x^2}{2} + k \frac{2x\dot{x}}{2} + \frac{2m\dot{x}\ddot{x}}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{k}x^2}{2} + \dot{x} \underbrace{(kx + m\ddot{x})}_0 \right\rangle = \frac{\dot{k}}{k} \frac{\langle E \rangle}{2}. \quad (60.5)$$

Отсюда для средней энергии получаем

$$\frac{dE}{E} = \frac{1}{2} \frac{dk}{k} \Rightarrow \ln E = \frac{1}{2} \ln k + \text{const} \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{k}} = \frac{E}{\omega_0} = \text{const}, \quad (60.6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, m считается постоянной. В случае математического маятника (шарик на нитке) $\omega_0^2 = g/l$, значит, инвариантом является величина $I = E\sqrt{l/g}$. При уменьшении длины нитки энергия возрастает, поскольку совершается работа больше, чем $mg\Delta l$.

Итак, при медленном изменении параметров осциллятора инвариантом является величина

$$I = \frac{E}{\omega_0}. \quad (60.7)$$

Поскольку $E = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}$, а максимальная скорость $v_0 = \omega_0 x_0$, то площадь внутри фазовой кривой является адиабатическим инвариантом

$$x_0 v_0 = \text{const}. \quad (60.8)$$

Формула (60.7) справедлива для случая, когда масса не меняется. Изменение массы означает, что система незамкнута, в этом случае решение задачи зависит от механизма изменения массы. В случае симметричного испарения суммарная реактивная сила, действующая на тело со стороны отлетающих частиц, равна нулю, тогда вместо (60.5) получится

$$\begin{aligned} \langle \dot{E} \rangle &= \left\langle \frac{\dot{k}x^2}{2} + k \frac{2x\dot{x}}{2} + \frac{2m\dot{x}\ddot{x}}{2} + \dot{m} \frac{\dot{x}^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{k}x^2}{2} + \dot{m} \frac{\dot{x}^2}{2} + \dot{x} \underbrace{(kx + m\ddot{x})}_0 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\dot{k}x^2}{2} + \dot{m} \frac{\dot{x}^2}{2} \right\rangle = \left(\frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{m}}{m} \right) \frac{\langle E \rangle}{2}. \end{aligned} \quad (60.9)$$

Отсюда

$$\frac{dE}{E} = \frac{1}{2} \frac{dk}{k} + \frac{1}{2} \frac{dm}{m} \Rightarrow \ln E = \frac{1}{2} \ln km + \text{const} \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{km}} = \text{const}.$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{km}}. \quad (60.10)$$

Примеры.

1. Математический маятник (маленькое тело на нитке в поле тяжести). В этом случае уравнение колебаний $m\ddot{x} = -mgx/l$, т. е. эффек-

тивный коэффициент жесткости $k^* = mg/l$. Тогда $I = \frac{E}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}$. При ис-

парении получается $E \propto m$, что естественно, так как при испарении доля уносимой энергии, как кинетической так и потенциальной, пропорциональна доле отделившейся массы. Более удивительным являет-

ся возрастание энергии колебаний при укорочении нитки: $E \propto 1/\sqrt{l}$. Это связано с тем, что при втягивании нитки через точку подвеса совершается работа не только против силы тяжести (mg), но и против дополнительного натяжения нити, связанного с колебаниями (mv^2/l).

2. Тело на пружинке. В этом случае инвариант дается уравнением (60.10). При медленном испарении $E \propto \sqrt{m}$. Заметим, что при испарении только в точке с максимальной амплитудой энергия не зависела бы от массы, а при испарении только в точке с максимальной скоростью энергия была бы пропорциональна массе. При адиабатическом испарении получается промежуточный результат.

Заметим, что при адиабатическом испарении массы для маятника $E \propto m$, а для пружинки $E \propto \sqrt{m}$. Это различие возникает из-за того, что в случае пружинки при мгновенном испарении массы Δm уменьшается кинетическая энергия оставшейся части тела, а потенциальная энергия сохраняется, в то время как у маятника уменьшаются и кинетическая и потенциальная энергии.

Интересно, что при увеличении коэффициента жесткости энергия колебаний увеличивается. Откуда она берется? Что значит увеличить жесткость в момент, когда пружинка уже частично растянута? Для этого к ней нужно прицепить параллельно еще одну растянутую пружинку. Вот она то и приносит дополнительную энергию.

ГЛАВА VII

ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

§ 61. Упругие среды

Деформации тел под действием сил называются упругими, если при снятии напряжения их размеры восстанавливаются. При небольших относительных деформациях относительное удлинение пропорционально приложенной силе, деленной на поперечное сечение

$$T = -P = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \equiv E \varepsilon \equiv \frac{k \Delta l}{S}, \quad (61.1)$$

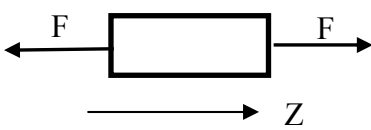


Рис. 45

где E – модуль Юнга, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$,
 $k \equiv \frac{F}{\Delta l} = \frac{ES}{l}$. Данное соотношение называется законом Гука.

При продольном растяжении (вдоль Z) поперечные размеры стержня уменьшаются

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = -\mu \frac{\Delta z}{z} \equiv -\mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (61.2)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Изменение объема при растяжении в *одном* направлении

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(xyz)}{xyz} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta z}{z} (1 - 2\mu), \quad (61.3)$$

так что при $\mu = \frac{1}{2}$ объем сохраняется. Для резины $\mu \approx 0.5$, металлов $\mu \approx 0.3$, алмаза 0.07.

При *равномерном обжатии*

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E} (1 - 2\mu), \quad (61.4)$$

отсюда

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{P}{K}, \quad (61.5)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – коэффициент объемного сжатия.

Коэффициент Пуассона не может быть больше 0.5, иначе при прикладывании внешнего давления объем будет расти и тело будет совершать работу. При снятии давления объем вернется к прежнему значению. Процесс можно повторить много раз, получается неисчерпаемый источник энергии, что невозможно.

Рассмотрим стержень, который не может расширяться вбок, так как с боков очень твердая среда. Тогда при приложении P_z возникают P_x , P_y такие, что поперечные размеры не меняются:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} &= -\frac{P_x}{E} + \frac{\mu}{E}(P_y + P_z) = 0 \\ \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} &= -\frac{P_y}{E} + \frac{\mu}{E}(P_x + P_z) = 0. \end{aligned} \quad (61.6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P_x = P_y &= \frac{\mu}{1-\mu} P_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{P_z}{E} + \mu \frac{(P_x + P_y)}{E} = -\frac{P_z}{E} \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu} \right) = -\frac{P_z}{E'}, \end{aligned} \quad (61.7)$$

где

$$E' = E \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (61.8)$$

– модуль одностороннего сжатия. Например, если резинку поместить в металлическую трубку, то в продольном направлении у нее будет очень малая сжимаемость и, соответственно, очень большой эффективный модуль Юнга.

§ 62. Волны в среде, модель с шариками


Представим среду как линейку из стоящих вплотную шариков. Если крайнему шарiku сообщить скорость, то он ударится о следующий шарик и остановится, передав ему весь свой импульс. Далее второй шарик ударит по третьему шарiku и остановится и. т. д. В каждый момент в движении будет находиться только один шарик, а в конце будет двигаться только последний шарик.

Если после того как первый шарик остановится, по нему снова ударить, то по цепочке побежит волна, состоящая из двух шариков. В конце все шарики будут стоять, кроме двух последних.

Теперь заменим шарики тонкими пластинками, стоящими вплотную друг к другу (получается стержень), и начнем ударять по первой пластинке после каждой ее остановки. По стержню побежит волна длительностью, равной времени воздействия на торец стержня. С уменьшением толщины пластинки к нулю удары становятся бесконечно частыми и воздействие сводится к действию постоянной силы.

§ 63. Скорость звука в упругой среде

Приложим силу F к концу стержня, тогда он начнет двигаться с некоторой скоростью v и по стержню побежит волна сжатия со скоростью звука c . Пусть $v \ll c$, тогда



$$\frac{d(mv)}{dt} = F, \quad (63.1)$$

Рис. 46

$$mv \approx (\rho + \delta\rho)S(c - v)vt \approx \rho S cvt.$$

Отсюда

$$P = F/S = \rho cv. \quad (63.2)$$

Относительное сжатие части стержня АВ равно

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{vt}{ct} = -\frac{v}{c} \quad (63.3)$$

(левый край передвинулся на vt). Отсюда

$$P = -E \frac{\Delta l}{l} = E \frac{v}{c}. \quad (63.4)$$

Приравнивая (63.2) и (63.4), получаем скорость звука для среды, подчиняющейся закону Гука,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (63.5)$$

Из (63.2) находим скорость левого конца стержня $v = P/\rho c = P/\sqrt{\rho E}$.

В общем случае вместо (63.4) можно записать уравнение непрерывности на движущейся границе В. Переходим в систему отсчета движущегося фронта В, спереди фронта за единицу времени падает масса ρc , а за фронт уходит $(c - v)(\rho + d\rho)$. Из сохранения потока

$$\rho c = (c - v)(\rho + d\rho), \quad \Rightarrow d\rho \approx \rho \frac{v}{c} \quad (63.6)$$

(этот результат похож на (63.3), так как $d\rho/\rho = -dl/l$). Объединяя (63.2) (с заменой P на dP) и (63.6), находим скорость звука

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (63.7)$$

В случае закона Гука $d\rho = -\frac{\rho dl}{l} = \rho \frac{dP}{E}$ и для скорости звука получаем формулу (63.5). Используя (63.7), в курсе молекулярной физики будет получена скорость звука в газе

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V}. \quad (63.8)$$

Следует заметить, что формула (63.5) справедлива только для тонких стержней, когда ничего не мешает стержню расширяться вбок. В противном случае вместо E нужно использовать E' (формула (61.8)), тогда продольная скорость

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}. \quad (63.9)$$

Эта скорость больше, чем в тонком стержне. Приближение толстого стержня работает в случаях: 1) стержень находится в очень жесткой трубке; 2) длина стержня короче толщины; 3) длина волны меньше толщины стержня.

Для справки: существуют еще и поперечные волны (частицы колеблются поперек движения волны). Для них

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (63.10)$$

где модуль сдвига $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$, при этом всегда $c_{\parallel} > c > c_{\perp}$.

Поперечные волны существуют только в твердом веществе, в жидкости при сдвиге слоев не возникает возвращающих сил. Именно по этому признаку геологи различают твердые и жидкие породы.

§ 64. Волновое уравнение

Рассмотрим звуковую волну в газе. При распространении волны происходит 3 явления.

1. Газ движется, плотность меняется.
2. При изменении плотности меняется давление.
3. Неравномерность давления вызывает движение газа.

Начнем с пункта 2. В общем случае $P = f(\rho)$. В равновесии $P_0 = f(\rho_0)$. Отсюда отличие давления и плотности от равновесных значений в звуковой волне

$$P_u = \kappa \rho_u, \quad \text{где } \kappa = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (64.1)$$

Здесь индекс u относится к изменению давления и плотности в волне.

Теперь используем явление 1. Пусть в волне продольное (X) смещение частиц равно $\psi(x, t)$ и в данный момент времени это смещение различно для точек с разными начальными координатами x . Тогда возникает изменение плотности. Пусть x – невозмущенное положение частицы. В волне она сместится в точку $x + \psi(x, t)$. Другая невозмущенная частица с координатой $x + \Delta x$ при этом сместится в точку $x + \Delta x + \psi(x + \Delta x, t)$. Частицы, которые находились в интервале Δx , теперь будут находиться в интервале $\Delta x + \psi(x + \Delta x, t) - \psi(x, t) = \Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x$, где второй член много меньше первого, так как смещения малы. Из сохра-

нения числа частиц $\rho_0 \Delta x = (\rho_0 + \rho_u) \Delta x \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$. В этом выражении

ρ_u и $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ являются малыми величинами одного порядка. Пренебрегая

членом $\rho_u \frac{\partial \psi}{\partial x}$ второго порядка малости, получаем

$$\rho_u \approx -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (64.2)$$

Наконец, явление 3 дает уравнение движения объема частиц в интервале Δx

$$\rho_0 \Delta x \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial P_u}{dx} \Delta x \Rightarrow \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial P_u}{dx}. \quad (64.3)$$

Подставляя (64.1) в (64.3), имеем $\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = -\kappa \frac{\partial \rho_u}{dx}$ и с учетом (64.2)

получаем

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{dx^2}, \quad c^2 = \kappa = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (64.4)$$

Нетрудно убедиться, что решением волнового уравнения являются функции

$$\psi(x, t) = \psi \left(t \pm \frac{x}{c} \right), \quad (64.5)$$

т. е. любые функции, описывающие возмущения в среде, бегущие влево и вправо со скоростями c . Действительно, подставляя (64.5) в (64.4), получаем в левой части ψ'' и в правой ψ'' , где производная берется по аргументу функции $(t \pm x/c)$, т. е. решение (64.5) удовлетворяет волновому уравнению (64.4). Это бегущая волна, поскольку если в точке $x = 0$ в момент $t = 0$ было возмущение $\psi(0)$, то такое же возмущение будет через время t в точке $x = \pm ct$. Таким образом, общее решение волнового уравнения

$$\psi(x, t) = \psi_1 \left(t + \frac{x}{c} \right) + \psi_2 \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (64.6)$$

Заметим, что скорость звука (64.4) совпадает с полученным ранее выражением (63.7).

Принцип суперпозиции

Если в среде возбуждено несколько волн и для каждой из них имеется решение вида (64.6), то нетрудно видеть, что и сумма этих волн является решением волнового уравнения линейного (в первой степени) по амплитуде. Это означает, что волны никак не влияют друг на друга, т. е. справедлив принцип суперпозиции.

Нетрудно сообразить, что для волн большой амплитуды это не так. Если изменение плотности в волне порядка самой плотности среды, то встречные волны будут отражаться от таких перепадов плотности аналогично тому, как звуковая волна в воздухе отражается от стенки.

Ниже мы получим аналогичное уравнение для натянутой струны, а затем еще раз проанализируем решение волнового уравнения (64.5) и поймем, как $\psi_{1,2}$ зависят от начальных условий.

§ 65. Волны в натянутой струне

Рассмотрим струну, натянутую с силой T , в которой на некотором участке Δz частицы имеют малые смещения x в поперечном направлении. Соответствующее продольное

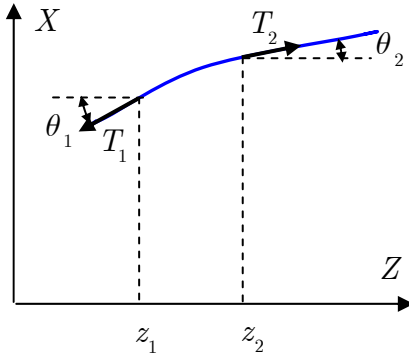


Рис. 47

удлинение $\delta l \approx \sqrt{(\Delta z)^2 + x^2} - \Delta z$

$$\approx \left(\frac{x}{\Delta z} \right)^2 \Delta z \ll \Delta z, \text{ т. е. пренебрежи-}$$

мо мало. Поэтому можно считать, что натяжения струны не меняется. Счи-

таем также, что все углы $\theta \approx \frac{x}{\Delta z}$ малы, т. е. $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$.

Поперечная сила, действующая на короткий участок струны длиной Δz , равна

$$F_x \approx T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx T \left(\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_2 - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_1 \right) = T \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Delta z. \quad (65.1)$$

Уравнение движения по X

$$\rho S \Delta z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Delta z, \quad (65.2)$$

отсюда получаем волновое уравнение и скорость волны в натянутой струне:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho S}. \quad (65.3)$$

Получим скорость в струне другим, более элементарным способом. Пусть волна бежит по струне со скоростью c . Перейдем в систему бегущей волны. Струна имеет в точке горба возмущения некий радиус кривизны R , по которому перетекает масса струны. Частицы струны в этой системе отсчета испытывают центростремительное ускорение

$$a = \frac{c^2}{R}, \quad (65.4)$$

вызванное натяжением. Сила, действующая на участок малой длины l , равна $F = 2T \sin \frac{\alpha}{2} \approx T\alpha \approx \frac{Tl}{R}$. Масса этого участка $m = \rho Sl$ и ускорение

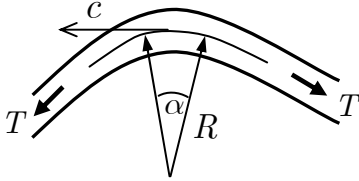


Рис. 48

$$a = \frac{F}{m} = \frac{T}{\rho SR}. \quad (65.5)$$

Приравнявая (65.4) и (65.5), получаем скорость гребня волны, совпадающую с (65.3):

$$c^2 = \frac{T}{\rho S}. \quad (65.6)$$

§ 66. Энергия в волне

Кинетическая энергия волны в объеме dV

$$dK = \frac{\rho v^2}{2} dV. \quad (66.1)$$

Как нам известно, потенциальная энергия растянутой пружинки $U = \frac{kx^2}{2}$. Тогда для стержня с учетом $k \equiv \frac{F}{\Delta l} = \frac{ES}{l}$

$$U = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{ESl}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2. \quad (66.2)$$

В случае приложенной к торцу стержня силы в стержне бежит волна и, в соответствии с (63.3) и (63.5),

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (66.3)$$

Подставляя (66.3) в (66.2), получаем

$$U = \frac{\rho v^2}{2} l S = \frac{\rho v^2}{2} V \Rightarrow dU = \frac{\rho v^2}{2} dV. \quad (66.4)$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии в бегущей волне равны!

§ 67. Начальные условия

Вернемся снова к общему решению волнового уравнения (64.6), состоящего из волн, бегущих в противоположные стороны. Предположим, в некоторой области произошло мгновенное увеличение давления (ударил по стержню сбоку), тогда в начальный момент есть только повышенное давление P в некоторой области, но частицы стержня никуда не движутся. Это состояние можно представить как две противоположно бегущие волны, каждая с давлением $P/2$ и

скоростями частиц в волне $\pm v = \pm \frac{P}{2\rho c}$. При наложении волн, в

соответствии с принципом суперпозиции, давления и скорости сложились, давление стало P , а скорость – ноль. В результате данное возмущение вызовет две одинаковые волны, бегущие в разные стороны. В данном примере в начальном состоянии была конечная потенциальная энергия и нулевая кинетическая. Если бы они были равны, то волна побежала бы в одну сторону – туда, куда направлена скорость частиц. В промежуточном случае (неравные потенциальные и кинетические энергии) возникнут две волны с неравными амплитудами.

§ 68. Столкновение стержней

Столкновение со стенкой

Пусть стержень налетает на бесконечно жесткую и массивную стенку со скоростью v . С момента удара от стенки побежит волна сжатия, в которой давление повышено, а скорость частиц равна нулю (рис. 49). Когда волна добежит до конца стержня, он покоится, но находится в

сжатом состоянии. Затем от конца начинает бежать волна разрежения: в волне давление падает до нуля, а частицы движутся в обратном направлении. Когда волна добегает до стенки, стержень отделяется от стенки и улетает со скоростью, противоположной начальной. Время соприкосновения стержня со стенкой $\tau = 2l/c$.

Столкновение одинаковых стержней

Пусть на покоящийся стержень налетает такой же стержень со скоростью v . Перейдем в систему, движущуюся со скоростью $v/2$. Из-за

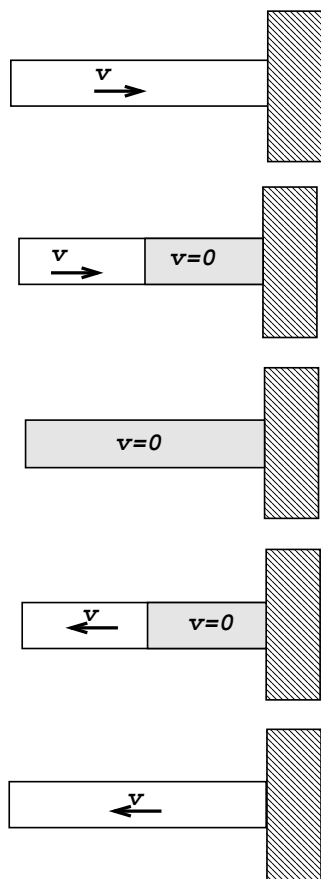


Рис. 49

симметрии в этой системе отсчета стержни сталкиваются как бы с неподвижной стенкой и, следовательно, меняют движение на противоположное. Возвращаясь обратно в лабораторную систему, находим, что налетающий стержень остановился и передал полностью свой импульс вначале покоящемуся стержню.

Столкновение стержней разной длины

Пусть короткий стержень налетает со скоростью v на покоящийся более длинный стержень. Перейдем в систему, движущуюся со скоростью $v/2$. В этой системе стержни налетают с одинаковой скоростью и после столкновения их торцы остановятся и по стержням побегут волны сжатия. Торцы остановятся, поскольку пока волны не сбегали туда-сюда, в этом месте ничего не известно о длинах стержней. Наконец, по короткому стержню пробежала волна разрежения, и он полетел в обратном направлении. В длинном стержне аналогичная волна разрежения еще не достигла границы столкновения, однако после отлета короткого стержня этот конец оказался свободным и от него пошла волна разрежения, а сам конец стал двигаться в вдогонку отлетающему короткому стержню с

той же скоростью, но не давя на него. Далее в длинном стержне будут еще долго бегать волны сжатия и разрежения, но он уже не будет давить на короткий стержень. Перейдя обратно в лабораторную систему,

мы находим, что короткий стержень остановился, а, стало быть, длинный стержень полетел с его импульсом (импульс всегда сохраняется).

Получился удивительный результат. Короткий стержень останавливается, как и в случае столкновения со стержнем той же длины, так и при столкновении с более длинным стержнем. В первом случае при соударении сохраняются и импульс, и энергия (передаются покоящемуся стержню), а во втором случае энергия длинного стержня

$$\frac{p^2}{2m_2} < \frac{p^2}{2m_1},$$

следовательно, удар неупругий, хотя и сталкиваются абсолютно упругие тела. Это связано с тем, что часть кинетической энергия перешла в колебания длинного стержня, которые постепенно затухли, перейдя в хаотическое движение молекул, т. е. тепло. Продемонстрировать данный факт экспериментально очень трудно, поскольку нужен идеальный контакт торцов стержней.

§ 69. Стоячие волны

Пусть две синусоидальных волны бегут в противоположных направлениях:

$$\psi_1 = a \cos(\omega t - kx), \quad \psi_2 = a \cos(\omega t + kx + \varphi), \quad (69.1)$$

где ω — частота, $k = 2\pi/\lambda$. Фазовая скорость волны (точки с постоянной фазой) $c = \omega/k$. Это могут быть налетающая и отраженная от стенки волны. Суммарная амплитуда

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = a \cos(\omega t - kx) + a \cos(\omega t + kx + \varphi) = \\ &= 2a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (69.2)$$

Амплитуда зависит от координаты как

$$A = \left| 2a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi}{2}\right) \right| \quad (69.3)$$

с пучностями при фазах, равных $\pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и узлами при фазах $\pm n\pi + \pi/2$. Расстояние между соседними узлами (пучностями) равно $\lambda/2$. В узлах молекулы всегда неподвижны, а в пучностях колеблются с максимальными амплитудами.

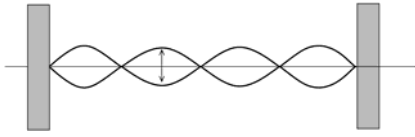


Рис. 50

Если в натянутой струне возбуждена поперечная волна (или цилиндре с газом возбуждена продольная волна) то на концах струны смещения частиц будут равны нулю, значит, там расположены узлы. Таким образом, в этих системах могут существовать моно-

хроматические волны только с длиной волны

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (69.4)$$

где L – расстояние между торцами, т. е. укладывается целое число полуволн. Если начало струны имеет координату $x = 0$, то амплитуда стоячей волны будет зависеть от координаты как

$$A \propto \left| \sin \frac{\pi n}{L} x \right|. \quad (69.5)$$

На рис. 50 показана стоячая волна в струне с длиной волны $\lambda = L/2$.

Пусть динамик, расположенный на торце цилиндра с газом, сгенерировал звуковой импульс протяженностью короче длины цилиндра, тогда этот сигнал будет бегать туда-сюда. Однако и он является суперпозицией монохроматических стоячих волн с длинами волн, даваемыми формулой (69.4), таких, что амплитуды на торцах каждой волны равны нулю.

Когда мы оттягиваем гитарную струну за середину, она имеет треугольную форму, значит, не является монохроматической волной. Такая форма складывается из стоячих волн с $\lambda = (2L), (2L/2), (2L/3)\dots$

При дергании струны за середину вторая гармоника вообще не возникает, так как она несимметрична относительно середины струны. Несмотря на наличие многих частот в основном слышна самая низкочастотная гармоника (основная гармоника) с $\lambda/2 = L$. Частота колебаний струны $\nu = c/\lambda$, где скорость звука "с" дается формулой (65.3). От-

сюда для $\lambda = 2L$ получаем $\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$. Для всех струн гитары до-

минирующая длина волны одинакова, но частоты разные за счет натяжения и толщины.

ГЛАВА VIII

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

§ 70. Общее решение для движения в центральном поле

В данной главе изучается движение тел, связанных силой, действующей по линии, соединяющей тела. Во взаимодействии участвуют всегда не менее двух тел. Как было показано в § 28, в случае двух тел задачу можно свести к движению одного тела с приведенной массой в поле неподвижного (бесконечно тяжелого) тела. Вспомним основные моменты.

Задача двух тел

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, сила взаимодействия которых зависит только от расстояния:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (70.1)$$

Уравнения движения частиц

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (70.2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (70.3)$$

Для относительного расстояния

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_2} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_1} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{\mu}, \quad (70.4)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — *приведенная масса*.

Таким образом, задача двух тел сводится к задаче движения одного тела с массой μ под действием силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Выберем начало отсчета в системе центра масс. Расстояния частиц относительно центра масс \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 находятся из уравнений

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \quad (70.5)$$

отсюда
$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (70.6)$$

Импульсы и кинетические энергии тел в системе центра масс

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} = -\mu \dot{\mathbf{r}}, & K_1 &= \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{\mu^2}{2m_1} v^2; \\ \mathbf{p}_2 &= m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} = \mu \dot{\mathbf{r}}, & K_2 &= \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{\mu^2}{2m_2} v^2. \end{aligned} \quad (70.7)$$

Здесь мы учли, что $(\dot{\mathbf{r}})^2 = v^2$. Заметим, что $(\dot{\mathbf{r}})^2 \neq \dot{r}^2$. Так, на круговой орбите $(\dot{\mathbf{r}})^2 = v^2$, а $\dot{r}^2 = 0$. Полная энергия

$$E = K_1 + K_2 + U(r) = \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) v^2 + U(r) = \frac{\mu v^2}{2} + U(r), \quad (70.8)$$

т. е. еще раз видим, что задача двух тел сводится к задаче о движении приведенной массы в поле бесконечно тяжелого источника поля. После нахождения $\mathbf{r}(t)$ траектория движения каждого из тел относительно центра масс находится из соотношений (70.6).

Сохранение момента импульса в центральном поле

Далее мы будем рассматривать движение двух тел, связанных силой, действующей вдоль линии, соединяющей тела. Как было показано, данная задача сводится к движению приведенной массы в центральном поле. Момент импульса сохраняется в любой замкнутой системе, а в центральном поле он сохраняется автоматически, поскольку момент сил, действующий на движущееся тело относительно силового центра, равен нулю. Действительно, момент импульса тела с импульсом \mathbf{p} на расстоянии \mathbf{r} от источника поля

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}]. \quad (70.9)$$

Изменение момента импульса во времени

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{p}] + [\mathbf{r} \dot{\mathbf{p}}]. \quad (70.10)$$

Первый член равен нулю, потому что направления $\dot{\mathbf{r}}$ и \mathbf{p} совпадают, второй член также равен нулю, так как сила $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ направлена вдоль \mathbf{r} .

Поскольку $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}] = \text{const}$, то движение происходит в одной плоскости, перпендикулярной \mathbf{L} .

Общее решение

Для нахождения траектории и периода движения достаточно воспользоваться законами сохранения момента импульса и энергии. В цилиндрических координатах

$$L = |[\mathbf{r}\mathbf{p}]| = rmv_{\perp} = mr^2\dot{\varphi} = 2m \frac{dS}{dt} = \text{const}, \quad dS = \frac{r^2 d\varphi}{2}, \quad (70.11)$$

это означает, что площадь, заметаемая радиус-вектором за единицу времени (секториальная скорость), постоянна

$$\frac{dS}{dt} = \text{const}. \quad (70.12)$$

Как обсуждалось ранее в § 31, центральное поле является потенциальным (консервативным), т. е. в нем справедлив закон сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r). \quad (70.13)$$

Полную энергию можно записать в виде

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{эф}}(r), \quad U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad (70.14)$$

что соответствует радиальному (одномерному) движению в эффективном потенциале $U_{\text{эф}}(r)$, содержащем кроме потенциальной энергии $U(r)$ дополнительное слагаемое $L^2/2mr^2$, которое называют *центробежным потенциалом* или центробежной энергией. Отсюда радиальная скорость

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{эф}}(r))}. \quad (70.15)$$

Знак « \pm » означает тот факт, что при данном r частица может двигаться как к центру, так и от центра с той же скоростью. Можно выбрать любой знак, поскольку эти два решения отличаются только началом отсчета времени. Для определенности выбираем знак «+».

Интегрируя (70.15), находим связь между временем и радиальной координатой

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + t_0. \quad (70.16)$$

Учитывая связь между углом и временем (70.11)

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt \quad (70.17)$$

и подставляя dt из (70.15), получаем уравнение траектории в плоскости (r, φ)

$$\varphi = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}} + \text{const}. \quad (70.18)$$

Границы области движения по радиусу соответствуют $\dot{r} = 0$ в (70.14), т. е. r находится из уравнения

$$E = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (70.19)$$

Если имеется две границы r_{\min} и r_{\max} , то движение называется *финитным* (ограниченным). Угол поворота при движении от r_{\min} до r_{\max} и обратно

$$\Delta\varphi = \sqrt{2m} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}}. \quad (70.20)$$

Траектория замкнута, если $\Delta\varphi = 2\pi k/n$, где k, n – целые числа (траектория замыкается после n колебаний по радиусу и k полных оборотов по φ). В общем случае траектория незамкнута. Оказывается, она замкнута только для потенциалов $U = -\alpha/r$ при любых L и $E < 0$ и $U = m\omega^2 r^2/2$ (пространственный осциллятор) при любых L и E .

Падение на центр возможно, если $\dot{r}^2(r=0) > 0$, т. е. (см. (70.14))

$$E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2} > 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (70.21)$$

или

$$r^2 U(r) + \frac{L^2}{2m} < E r^2 = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (70.22)$$

Поскольку E – конечная величина, то последний член в выражении равен нулю. Отсюда следуют условия падения на центр:

$$1) L = 0 \quad (\text{следует из (70.21)}); \quad (70.23)$$

$$2) U = -\frac{\alpha}{r^2} \quad \text{и} \quad \alpha > \frac{L^2}{2m} \quad (\alpha = \frac{L^2}{2m} - \text{круговая орбита}); \quad (70.24)$$

$$3) U = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad n > 2, \quad \alpha > 0. \quad (70.25)$$

В слабом гравитационном поле $U \propto -\frac{1}{r}$, поэтому частицы не падают на центр, однако в сильном гравитационном поле (вблизи черных дыр) в потенциале появляются члены более высокой степени $U \propto -\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} \dots$, что приводит к падению материи на центр тяготения.

Примеры эффективного потенциала

1. Притягивающий кулоновский (гравитационный) потенциал

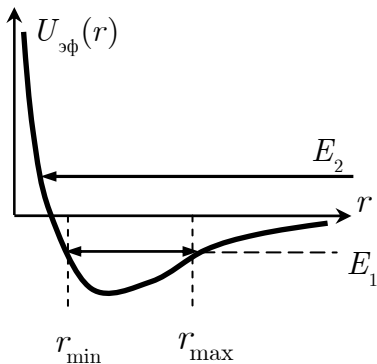


Рис. 51

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (70.26)$$

На малых расстояниях доминирует второй член, на больших – первый член. При $E > 0$ (линия E_2) частица, прилетевшая из бесконечности, отразится от потенциального барьера и улетит обратно (инфинитное движение). Для финитного движения необходимо $E < 0$ (линия E_1), при этом движение по радиусу ограничено r_{\min} и r_{\max} .

2. Пространственный осциллятор

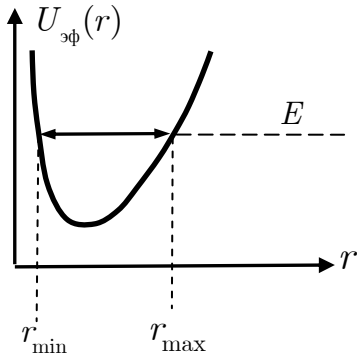


Рис. 52

Пространственный осциллятор – это тело на пружинке, которое может не только колебаться вдоль пружинки, но и вращаться вокруг закрепленного конца. В этом случае

$$U = \frac{kr^2}{2}, \quad U_{\text{эф}} = \frac{kr^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (70.27)$$

Движение финитно при любой физической возможной энергии.

Движение по круговым орбитам

Частица движется по окружности, если $r_{\min} = r_{\max}$. При этом $U'_{\text{эф}} = 0$. Пусть

$$U = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad F = -\frac{n\alpha}{r^{n+1}}. \quad (70.28)$$

Частица будет двигаться по окружности при

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{n\alpha}{r^{n+1}}. \quad (70.29)$$

Это получается как из приравнивания ускорения, вызванного силой, ускорению, необходимому для движения по окружности ($\ddot{r} = -v^2/r$), так и из $U'_{\text{эф}} = 0$, где $U_{\text{эф}}$ дается (70.14).

Казалось бы, все просто, при каждом радиусе найдется скорость, необходимая для кругового движения. Но будет ли это движение устойчиво? Движение устойчиво, когда на круговой орбите эффективный потенциал имеет минимум, и неустойчиво (падение на центр), когда в этой точке $U_{\text{эф}}$ имеет максимум.

Условия устойчивости движения аналогично условиям падения на центр, рассмотренным ранее:

$$\alpha > 0, \quad 0 < n < 2; \quad (70.30)$$

$$\alpha < 0, \quad n < 0. \quad (70.31)$$

При устойчивом движении небольшой радиальной толчок тела приведет к колебаниям вблизи исходной круговой орбиты, например, при $n = 1$ окружность превращается в эллипс.

Гравитационный потенциал удовлетворяет условию (70.30), а пространственный осциллятор – условию (70.31). Однако если потенциал

$U(r) = -\frac{\alpha}{r^{10}}$, то тело будет двигаться по окружности, но неустойчиво.

Малейшее начальное радиальное движение будет нарастать, и тело упадет на центр или улетит на бесконечность.

§ 71. Кеплерова задача

Немецкий математик и астроном Кеплер (1571–1630) из анализа данных датского астронома Тихо Браге (1546–1601) установил три эмпирических закона.

1. Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причем за равные времена радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет: $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$.

Применяя третий закон Кеплера к круговому движению в гравитационном поле, нетрудно найти, что для этого сила должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния. Об этом догадывались еще до Ньютона (в письме Галею Ньютон упоминал имена Буллиальда, Рена и Гука как своих предшественников). Исаак Ньютон строго математически показал, что при силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния, планеты движутся по законам Кеплера, поэтому его считают автором закона всемирного тяготения. Рассмотрим эту задачу.

Траектория движения

Итак, имеем

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \alpha > 0, \quad (71.1)$$

$$U_{\text{эф, min}} = -\frac{m\alpha^2}{2L} \quad \text{при} \quad r_* = \frac{L^2}{m\alpha},$$

где последнее соотношение соответствует круговому движению.

Из (70.18) получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{\left(2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}\right)}} + \text{const} = \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{L}{r} - \frac{\alpha m}{L}\right)}{\sqrt{\left(2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}\right) - \left(\frac{L}{r} - \frac{\alpha m}{L}\right)^2}} + \text{const}. \end{aligned} \quad (71.2)$$

Учитывая, что $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a}$, получаем

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{\alpha m}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}} + \text{const}. \quad (71.3)$$

Выбором начала отсчета делаем $\text{const} = 0$. Отсюда траектория движения

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi, \quad (71.4)$$

где введены обозначения

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (71.5)$$

Это кривые, соответствующие коническим сечениям (кривые, по которым поверхность круглого конуса пересекается плоскостью, см. курс аналитической геометрии). Величины p и e называются *параметром* и *эксцентриситетом* орбиты.

В аналитической геометрии показывается, что при

$e = 0$ – это круг;

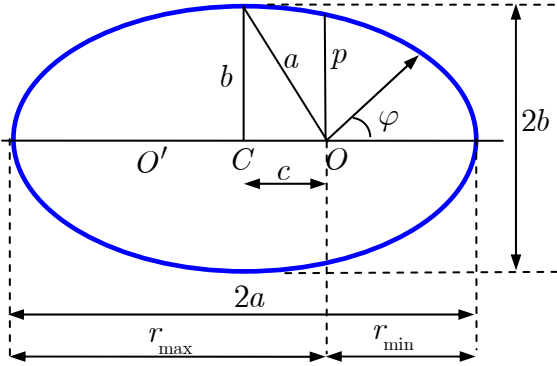
$e < 1$ – эллипс ($E < 0$ – финитная траектория);

$e = 1$ – парабола ($E = 0$);

$e > 1$ – гипербола ($E > 0$).

Случай $e < 1, E < 0$ – эллипс

Рассмотрим случай эллиптической траектории. Как известно, у эллипса



эллипса имеется два фокуса и сумма расстояний от фокусов до любой точки постоянна и равна $2a$. Уравнение эллипса в декартовых координатах с началом в центре эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (71.6)$$

Рис. 53

Центр тяготения находится в одном из фокусов, пусть в правом (рис. 53).

Из (71.4) минимальное расстояние от фокуса (перигелий) и максимальное расстояние (*афелий* или *апогелий*)

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - e}, \quad (71.7)$$

параметр p равен радиусу при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Большая полуось

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (71.8)$$

(при финитном движении энергия отрицательна, поэтому здесь использован модуль E , чтобы знак минус не вводил в заблуждение), отсюда

$$r_{\min} = a(1 - e), \quad r_{\max} = a(1 + e). \quad (71.9)$$

Расстояние между фокусом и центром эллипса

$$c = 0.5(r_{\max} - r_{\min}) = ae, \quad (71.10)$$

малая полуось

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (71.11)$$

Как мы видим, большая полуось a зависит только от полной энергии, а малая полуось – также от момента импульса.

Заметим, что выражение для r_{\max} , r_{\min} , и a , легко получить из законов сохранения энергии и момента импульса. Действительно, в перигелии и афелии нет радиального движения, тогда

$$L = mvr, \quad E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}, \quad (71.12)$$

отсюда

$$r_{\max, \min} = -\frac{\alpha}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \right), \quad (71.13)$$

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = -\frac{\alpha}{2E}, \quad (71.14)$$

что совпадает с (71.8) и (71.9).

Период обращения

Из сохранения момента импульса

$$L = mr^2\dot{\varphi} = 2m \frac{dS}{dt}, \quad \Rightarrow S = \frac{L}{2m} T, \quad (71.15)$$

где T – период обращения. Учитывая, что для эллипса $S = \pi ab$, получаем

$$T = \frac{2\pi mab}{L} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}. \quad (71.16)$$

Отсюда следует третий закон Кеплера

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} a^3. \quad (71.17)$$

Этот закон легко получить в случае кругового движения, но оказывается формула остается справедливой и для эллиптического движения, если вместо радиуса в формуле использовать большую полуось эллипса. Для гравитационного взаимодействия тел с массами M и m подставляем

$$\alpha = GMm, \quad m \rightarrow \mu = \frac{Mm}{M+m} \quad (71.18)$$

и получаем

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}. \quad (71.19)$$

Случай $e = 1, E = 0$ – парабола

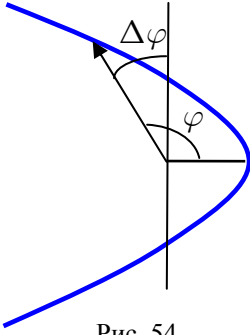


Рис. 54

Из (71.4) следует, что в этом случае

$$r_{\min} = \frac{p}{2} = \frac{L^2}{2m\alpha} \quad (71.20)$$

и угол поворота (рис. 54) при облете центра тяготения $\Delta\varphi = 2\pi$, т. е. траектория поворачивает в обратную сторону ($\cos\varphi = -1$ при $r \rightarrow \infty$). Выражение (71.20) также легко получить из законов сохранения энергии и момента импульса, полагая в них $E = 0$, тогда r_{\min} находится из

$$L = mvr, \quad E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = 0. \quad (71.21)$$

Случай $e > 1, E > 0$ – гипербола

Гипербола – геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных точек (фокусов) $(-c, 0), (c, 0)$ постоянна и равна $2a < 2c$. Уравнение гиперболы в декартовых координатах

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (71.22)$$

В полярных координатах (71.4) $p/r = 1 + e \cos\varphi, e > 1$. Минимальное расстояние равно

$$r_{\min} = \frac{p}{e + 1}. \quad (71.23)$$

Полагая $r = \infty$, находим $\cos\varphi = -\frac{1}{e}$. Половина угла поворота траектории при пролете мимо центра тяготения (см. рис. 54)

$$\Delta\varphi = \varphi - \frac{\pi}{2} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad (71.24)$$

отсюда

$$-\cos\left(\Delta\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\Delta\varphi = \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}. \quad (71.25)$$

Если частица имела на бесконечности скорость v_∞ и прицельный параметр (расстояние между продолжением исходной траектории и центром тяготения) ρ , то подставляя в (71.25)

$$L = m\rho v_\infty, \quad E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad (71.26)$$

нетрудно получить

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\alpha}{2\rho E} = \frac{GM}{\rho v_\infty^2}. \quad (71.27)$$

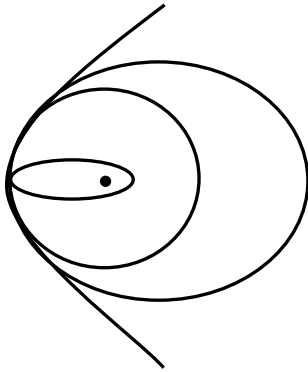


Рис. 55

Проследим эволюцию орбит при изменении параметров. Пусть тела пролетают на одном и том же расстоянии от центра тяготения, но с разными скоростями (рис. 55). При малой скорости центр тяготения находится в правом фокусе эллиптической орбиты. При увеличении скорости орбита становится круговой. При еще большей скорости орбита становится снова эллиптической, но центр тяготения находится уже в левом фокусе эллипса. При еще большей скорости траектория становится гиперболической.

Случай отталкивающего потенциала

Пусть

$$U = \frac{\alpha}{r}, \quad U_{\text{эф}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \alpha > 0. \quad (71.28)$$

После вычислений, аналогичных (71.2), получается уравнение траектории, отличающееся от (71.4) только знаком минус перед единицей:

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \varphi, \quad (71.29)$$

где p и e ($e > 1$, т.к. в случае отталкивания всегда $E > 0$) даются формулами (71.5). Расстояние в перигелии

$$r_{\min} = \frac{p}{e - 1}. \quad (71.30)$$

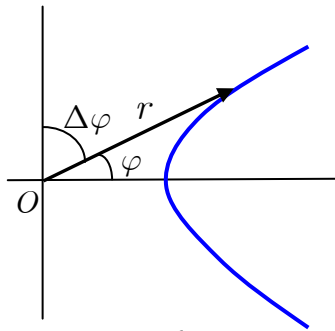


Рис. 56

Половина полного угла поворота при пролете мимо отталкивающего центра (рис. 56)

$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. При $r = \infty$ из (71.29) имеем

$\cos \varphi = \frac{1}{e}$, тогда

$$\sin \Delta\varphi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi = \frac{1}{e}. \quad (71.31)$$

Из сравнения (71.31) и (71.25) следует, что углы отклонения для притягивающего и отталкивающего потенциалов одинаковы! Это весьма неочевидный результат. Половинный угол поворота для частицы, летящей с бесконечности, будет даваться той же формулой (71.27). Разница только в том, что в случае притяжения частица отклоняется в сторону центра притяжения, а в случае отталкивания – в обратную сторону.

Конические сечения

Выше было декларировано, что формула (71.4) описывает эллипсы, параболы, гиперболы. Покажем это. Учитывая, что $\cos \varphi = x/r$, запишем (71.4) в виде

$$r = p - xe. \quad (71.32)$$

Возводя в квадрат, получаем

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pxe + x^2e^2. \quad (71.33)$$

Далее, после перегруппировки членов получается

1) $e < 1$ (эллипс)

$$\frac{\left(x + \frac{pe}{1-e^2} \right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a = \frac{p}{1-e^2} \text{ и } b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}; \quad (71.34)$$

2) $e = 1$ (парабола)

$$y^2 = -2p \left(x - \frac{p}{2} \right); \quad (71.35)$$

3) $e > 1$ (гипербола)

$$\frac{\left(x - \frac{pe}{e^2-1} \right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a = \frac{p}{e^2-1} \text{ и } b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}. \quad (71.36)$$

§ 72. Полеты в космос

Движение по круговой орбите

При движении по круговой орбите вокруг Земли

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (72.1)$$

Если спутник находится на низкой орбите около Земли, то $r = R_3$ и

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_3^2}} R_3 = \sqrt{gR_3} = 7.9 \text{ км/с}. \quad (72.2)$$

– это *первая космическая скорость*. Период обращения спутника на околоземной орбите

$$T = \frac{2\pi R_3}{\sqrt{\frac{GM}{R_3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} = 88 \text{ мин}. \quad (72.3)$$

Для спутников на геостационарной орбите

$$T = \frac{2\pi r_\Gamma}{\sqrt{\frac{GM}{r_\Gamma}}} = 1 \text{ сутки}. \quad (72.4)$$

Отсюда $r_\Gamma = 42200$ км и скорость

$$v_\Gamma = \sqrt{\frac{GM}{r_\Gamma}} = 3.07 \text{ км/с}. \quad (72.5)$$

Вторая космическая скорость

Для вылета на пределы гравитационного поля Земли необходимо, чтобы движение было инфинитно, а для этого, как было установлено ранее (в предыдущей лекции), необходимо

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R_3} > 0. \quad (72.6)$$

Заметим, что эта скорость не зависит от направления запуска ракеты. Минимальная скорость

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R_3^2} R_3} = \sqrt{2gR_3} = 11,2 \text{ км/с} \quad (72.7)$$

– это *вторая космическая скорость*.

Если скорость ракеты на поверхности Земли v , то скорость на бесконечности ($r \gg R_3$) находится из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R_3} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}, \quad (72.8)$$

отсюда $v_\infty^2 = v^2 - (11,2)^2$, где скорости в км/с. (72.9)

Третья космическая скорость

Найдем скорость, необходимую для полета за пределы Солнечной системы. Скорость Земли на орбите вокруг Солнца (аналог первой космической скорости)

$$v_{1c} = \sqrt{\frac{GM_c}{r_3}} = 29,76 \approx 30 \text{ км/с.} \quad (72.10)$$

Здесь r_3 – радиус орбиты Земли вокруг Солнца, M_c – масса Солнца. Для полета на бесконечность с орбиты Земли в поле Солнца необходима вторая солнечная космическая скорость

$$v_{2c} = \sqrt{\frac{2GM_c}{r_3}} = \sqrt{2}v_{1c} = 42,1 \text{ км/с.} \quad (72.11)$$

Следовательно, после выхода за пределы тяготения Земли ракета должна двигаться быстрее Земли на $42,1 - 30 = 12,1$ км/с. Это значит, что на поверхности Земли ракета должна иметь скорость (см. (72.9))

$$v = \sqrt{(12,1)^2 + (11,2)^2} = 16,5 \text{ км/с.} \quad (72.12)$$

Полет на Марс

Самым экономичным полетом к Марсу является полет, когда ракета стартует вдоль орбитальной скорости Земли и далее, двигаясь по эллипсу, касается орбиты Марса (рис. 57). Действительно, согласно (71.8) полная энергия $E = -\frac{GMm}{2a}$, где a – большая полуось. Отсюда начальная кинетическая энергия при старте с орбиты Земли

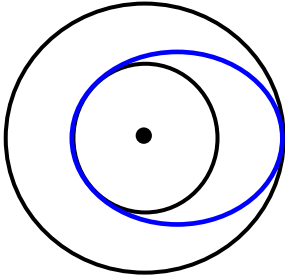


Рис. 57

$$K_0 = -\frac{GMm}{2a} - U_0 = -\frac{GMm}{2a} + \frac{GMm}{r_3}, \quad (72.13)$$

и она уменьшается при уменьшении большой полуоси эллипса.

Продолжительность полета (туда-обратно) находится из (71.19)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_C} = \frac{4\pi^2 (r_3 + r_M)^3}{8GM_C}. \quad (72.14)$$

Его можно выразить через периоды обращения Земли и Марса

$$T_3^2 = \frac{4\pi^2 r_3^3}{GM_C}, \quad T_M^2 = \frac{4\pi^2 r_M^3}{GM_C}. \quad (72.15)$$

В результате с учетом $T_3 = 1$ год, $T_M = 1.88$ года получаем

$$T^2 = \frac{1}{8} \left(T_3^{2/3} + T_M^{2/3} \right)^3 \Rightarrow T = 1,42 \text{ года}. \quad (72.16)$$

Полная энергия ракеты при движении по эллипсу, касающемуся орбит Земли и Марса (рис. 57), дается формулой (71.8)

$$E = -\frac{GM_C m}{r_3 + r_M}. \quad (72.17)$$

Скорость ракеты на орбите Земли v_3 находится из сохранения энергии

$$E = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{GM_C m}{r_3} = -\frac{GM_C m}{r_3 + r_M}, \quad (72.18)$$

откуда

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_C r_M}{r_3(r_M + r_3)}} = v_{2C} \sqrt{\frac{r_M}{r_3 + r_M}} \approx 42,1 \cdot 0,78 = 32,7 \text{ км/с}. \quad (72.19)$$

Поскольку имеется скорость орбитального движения Земли 29,76 км/с, то необходимая добавочная скорость $32,7 - 29,76 \approx 2,95$ км/с. Для этого стартовая скорость ракеты на поверхности Земли должна быть (см. (72.9))

$$v = \sqrt{(2,95)^2 + (11,2)^2} = 11,6 \text{ км/с.} \quad (72.20)$$

Это и есть искомая скорость ракеты для полета на Марс. Она лишь немного больше второй космической скорости.

Заметим, что формулу (72.19) можно легко получить, не прибегая к общему решению движения по эллиптическим орбитам. В точках, где орбита ракеты касается орбит Земли и Марса, скорость ракеты перпендикулярна радиусу. Законы сохранения момента импульса и энергии для этих двух точек

$$v_3 r_3 = v_M r_M, \quad (72.21)$$

$$\frac{v_3^2}{2} - \frac{GM_C}{r_3} = \frac{v_M^2}{2} - \frac{GM_C}{r_M}, \quad (72.22)$$

откуда сразу получаем для v_3 выражение, совпадающее с (72.19).

Долететь до Марса не так сложно, труднее вернуться. Вторая космическая скорость для Марса около 5 км/с (для Луны 2,375 км/с), так что стартовая масса посадочного модуля должна быть достаточно большая. Возможно, первые покорители Марса полетят в одну сторону. Сначала с помощью роботов построят жилище, завод по производству жизненно важных продуктов, а затем полетят люди-«переселенцы». Еще одна проблема – это очень высокая радиация во время полета и на поверхности Марса. Доза, получаемая во время полета, составляет порядка 100 бэр (1 Зиверт), что является предельно допустимой для людей. На поверхности Марса радиация примерно втрое выше, чем на орбитальной станции, но там можно спрятаться.

Рассмотрим еще вопрос, как часто Земля и Марс имеют расположение, удобное для полетов? Пусть ω_3 и ω_M – угловые скорости движения Земли и Марса вокруг Солнца. Тогда в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей, угловая скорость Марса $|\omega| = \omega_3 - \omega_M$. Момент благоприятного взаимного расположения повторяется с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3 - \omega_M} = \frac{T_3 T_M}{T_M - T_3} = 2.14 \text{ года.} \quad (72.23)$$

Нужно еще учесть, что орбита Марса имеет большой эксцентриситет. Минимальное расстояние до Солнца 207 млн км, максимальное – 249 млн км. Если сильно экономить топливо, то подлетать к Марсу нужно, когда он находится близко к Солнцу (будет меньше большая полуось орбиты корабля). Такие удобные моменты будут повторяться с частотой ω^* равной разности частот обращения Марса ω_M и частотой $\omega = \omega_3 - \omega_M$, определяющей времена, когда Марс оказывается в нужной точке орбиты корабля (см. выше). Время, соответствующее частоте $\omega^* = |\omega_M - |\omega_3 - \omega_M|| = 2\omega_M - \omega_3$ равно $T^* = 2\pi/\omega^* = \frac{T_M T_3}{2T_3 - T_M} \approx 15,7$ лет. Это время является также интервалом между великими противостояниями Земли и Марса, когда минимальное расстояние составляет 55,76 млн. км. Следующее такое событие будет летом 2018 г.

Большой разницы в стартовой скорости на Земле при полете к перигелию или апогелию Марса нет: разница составляет всего 0,3 км на уровне 11,6 км. Имеются много других, более существенных определяющих оптимальное время старта и траекторию полета

Полет к Солнцу

Посмотрим, сколько времени займет полет к Солнцу и какая для этого нужна скорость.

Оптимальная орбита для полета на Солнце – это сильно вытянутый эллипс, имеющий двойную полуось, равную расстоянию до Солнца. С учетом зависимости $T^2 \propto a^3$ находим время полета к Солнцу

$$T = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} T_3 = 0,35 \text{ года.} \quad (72.24)$$

Скорость на орбите Земли должна быть нулевой, для этого нужно запустить ракету в сторону, противоположную орбитальной скорости Земли со скоростью 30 км/с. Вдобавок к этому, нужно выйти за пределы тяготения Земли. Необходимая для всего этого скорость

$$v = \sqrt{(30)^2 + (11,2)^2} = 32 \text{ км/с.} \quad (72.25)$$

Это вдвое больше, чем третья космическая скорость (72.12), необходимая для покидания Солнечной системы.

§ 73. Средние потенциальные и кинетические энергии, теорема о вириале

Начнем с движения по круговой орбите в поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}. \quad (73.1)$$

В природе чаще всего встречаются силы с $n = 1$ (электрическое и гравитационное взаимодействия), однако бывают и другие. Например, между нейтральными молекулами существуют силы Ван-дер-Ваальса (диполь-дипольные взаимодействия) с $n = 6$. Кинетическая энергия при движении по окружности находится из уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{dU}{d\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{что дает} \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{n\alpha}{r^{n+1}}. \quad (73.2)$$

Отсюда находим соотношения между кинетической, потенциальной и полной энергиями

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{n\alpha}{2r^n} = -\frac{n}{2}U, \quad (73.3)$$

$$E = K + U = \frac{n-2}{n}K = \frac{(2-n)}{2}U.$$

Например, для гравитационного поля, $n = 1$,

$$K = -\frac{U}{2}, \quad E = -K = \frac{U}{2}; \quad (73.4)$$

для поля гармонического осциллятора ($U = kr^2$), $n = -2$,

$$K = U, \quad E = 2K = 2U. \quad (73.5)$$

Пример. Пусть искусственный спутник Земли за много оборотов тормозится в верхних слоях атмосферы, при этом орбита остается примерно круговой. Что происходит со скоростью? На первый взгляд, раз на тело действует сила, направленная против вектора скорости, то скорость должна уменьшаться. Это было бы так, если торможение происходило на коротком участке орбиты, а при медленном торможении нужно учесть изменение радиуса орбиты. Торможение означает уменьшение *полной* энергии. Из (73.4) следует, что уменьшение полной энергии означает уменьшение потенциальной энергии (уменьшение радиуса орбиты) и *увеличение* кинетической энергии!

Рассмотрим теперь произвольное финитное движение системы частиц. Запишем уравнение движения для одной частицы

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}. \quad (73.6)$$

Помножим обе части на \mathbf{r} и просуммируем по всем частицам

$$\sum \mathbf{F}\mathbf{r} = \sum m(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{r}). \quad (73.7)$$

Перепишем, учитывая, что $\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\mathbf{r}) = \mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}\mathbf{r}$:

$$\sum \mathbf{F}\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \sum m(\mathbf{v}\mathbf{r}) - \sum m(\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt} \sum m(\mathbf{v}\mathbf{r}) - 2K. \quad (73.8)$$

Усредним это выражение по времени, много большему, чем характерные времена в системе ($\tau \approx r/v$). Среднее от функции $f(t)$ — это

$$\overline{f(t)} = \frac{\int_0^\tau f(t) dt}{\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (73.9)$$

Для предпоследнего члена в (73.8) интеграл равен выражению, стоящему после знака производной. При финитном движении скорости и расстояния конечные, поэтому сумма в предпоследнем члене (73.8) есть некое конечное число $S(t)$, тогда среднее значение этого члена

$\frac{S(\tau) - S(0)}{\tau}$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum \mathbf{F}\mathbf{r} \rangle. \quad (73.10)$$

Величина $-\frac{1}{2} \langle \sum \mathbf{F}\mathbf{r} \rangle$ называется *вириалом* сил, действующих в системе, а выражение (73.10) называют *теоремой о вириале* (Клаузиус, 1870).

В данном выражении \mathbf{F} — это сила, действующая на одну из частиц со стороны всех остальных, а \mathbf{r} — радиус-вектор частицы. Суммирование производится по всем частицам, так что (73.10) представляет собой двойную сумму. Однако ранее мы убеждались, что все силы в системе можно разложить на парные взаимодействия, в которых пары силы имеют противоположные направления, а полная потенциальная энергия системы есть сумма энергий парных взаимодействий. Поэтому, для

простоты, не умаляя общности, рассмотрим систему всего из двух частиц. Тогда

$$\sum \mathbf{F}\mathbf{r} = \mathbf{F}_{21}\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12}\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F}\mathbf{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} r. \quad (73.11)$$

Пусть $U = -\frac{\alpha}{r^n}$, тогда $\frac{\partial U}{\partial r} r = n \frac{\alpha}{r^{n+1}} r = n \frac{\alpha}{r^n} = -nU$. (73.12)

Отсюда

$$\sum \mathbf{F}\mathbf{r} = nU. \quad (73.13)$$

Подставляя в (73.10), получаем для потенциала $U = -\alpha/r^n$

$$K = -\frac{n}{2}U, \quad (73.14)$$

$$E = K + U = \frac{n-2}{n}K = \frac{(2-n)}{2}U. \quad (73.15)$$

В итоге мы получили соотношение между потенциальной и кинетической энергиями в системах частиц, совершающих финитные движения, где потенциальная энергия взаимодействия между частицами

$U = -\frac{\alpha}{r^n}$. Оно оказалось таким же, как и для круговых орбит.

§ 74. Астрофизические следствия теоремы о вириале

Связь излучения с температурой и размером системы

Пусть есть некоторая туманность, которая светится, тем самым теряя энергию. Из (73.15) для гравитационного взаимодействия ($n=1$) $K = -E$. Раз E убывает, значит, кинетическая энергия растет. Кинетическая энергия пропорциональна температуре, $K = \frac{3}{2}kTN$, (k – постоянная Больцмана), поэтому температура тоже растет. При этом размер туманности уменьшается, поскольку $E = \frac{U}{2} \sim -\frac{GM^2}{r}$, уменьшение E означает уменьшение r .

Если на Солнце отключить термоядерные реакции, то его температура начнет расти! Собственно, так и происходит. Когда в звезде выгорает водород, она начинает уменьшаться в размерах, ее температура

возрастает и начинают гореть более тяжелые элементы (гелий и т. д.). «Горением» здесь является синтез тяжелых элементов из легких.

Неустойчивость межгалактического газа

Однородный газ не может быть гравитационно-устойчивым, поскольку если брать все большие размеры, то потенциальная энергия шара пропорциональна $U \propto M^2$, а кинетическая энергия пропорциональна количеству молекул, т. е. $K \propto M$. Для устойчивости же необходимо $K = -\frac{U}{2}$. Газовое скопление будет сжиматься, если (опускаем численные коэффициенты)

$$\frac{GM^2}{R} \geq NkT \sim nR^3kT. \quad (74.1)$$

Полагая $M \sim M_H nR^3$, $n \sim 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ – плотность межзвездного газа, $T \sim 10^4$ – характерная температура, находим, что газ неустойчив при

$$R > \sqrt{\frac{kT}{GnM_H^2}} = \sqrt{\frac{10^{-16}10^4}{10^{-7}10^{-5}10^{-48}}} \sim 10^{24} \text{ см}. \quad (74.2)$$

Это есть характерное расстояние между галактиками.

§ 75. Влияние солнечной радиации на движение малых тел

Давление света

Пусть пылинка радиуса R и плотности ρ находится на некотором расстоянии r от звезды массы M , излучающей во все стороны мощность P . При поглощении света на пылинку действует сила, направленная от звезды,

$$F_{rad} = \frac{P}{4\pi r^2 c} \cdot \pi R^2 = \frac{PR^2}{4r^2 c}. \quad (75.1)$$

Сила гравитационного притяжения

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GM4\pi\rho R^3}{3r^2}. \quad (75.2)$$

Обе силы пропорциональны $1/r^2$, так что если одна из них больше другой, то так будет на всех расстояниях. Пылинка будет удаляться от звезды при $F_{rad} > F_g$, т. е. при

$$R < \frac{3}{16\pi} \frac{P}{GM\rho c}. \quad (75.3)$$

Для Солнца $P = 3.9 \cdot 10^{33}$ эрг/с, $M = 2 \cdot 10^{33}$ г. Для плотности пылинки $\rho = 3$ г/см³ и $G = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см³г⁻¹с⁻² (система СГС), получаем

$$R < 2 \cdot 10^{-5} \text{ см.} \quad (75.4)$$

Солнечный свет выдувает из солнечной системы все мелкие пылинки.

Эффект Пойнтинга – Робертсона

Пусть небольшое тело движется по круговой орбите вокруг Солнца. Солнечный свет падает на тело, а затем эта энергия изотропно (в системе тела) испускается в пространство. При поглощении порции энергии $d\varepsilon$ масса тела увеличивается на $dm = \frac{d\varepsilon}{c^2}$. Эта дополнительная масса приобретает скорость тела и импульс вдоль траектории движения $dp = vdm = \frac{d\varepsilon}{c^2} v$ (при этом общий импульс тела вдоль орбиты не меняется, так как фотоны прилетают перпендикулярно траектории).

Световое давление на тело вдоль радиуса приводит только к небольшому уменьшению силы притяжения, которая остается пропорциональна $1/r^2$ (см. предыдущую задачу), им можно пренебречь.

Поскольку температура тела в среднем сохраняется, вся поглощенная энергия излучается изотропно в пространство, унося с собой этот импульс, забирая его у тела. Следовательно, тело испытывает силу трения

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dt} \frac{\mathbf{v}}{c^2} = -\frac{P\pi R^2}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{v}}{c^2}, \quad (75.5)$$

где P – мощность Солнца, r – расстояние от Солнца, v – орбитальная скорость, R – радиус тела. Сила трения ведет к уменьшению полной механической энергии тела, которая, по теореме о вириале, равна половине потенциальной энергии. Отсюда следует уравнение движение тела

$$d\left(-\frac{GMm}{2r}\right) = \mathbf{F}_{\text{тр}} \mathbf{v} dt = -\frac{PR^2}{4r^2} \frac{v^2}{c^2} dt, \quad (75.6)$$

$$\frac{GMm}{2} dr = -\frac{PR^2}{4} \frac{v^2}{c^2} dt. \quad (75.7)$$

Подставляя орбитальную скорость $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, $m = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$, получаем уравнение

$$rdr = -\frac{3P}{8\pi\rho Rc^2} dt, \quad (75.8)$$

откуда

$$\frac{r^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} = -\frac{3P}{8\pi\rho Rc^2} t. \quad (75.9)$$

Отсюда время падения на Солнце ($r = 0$)

$$t = \frac{4\pi\rho Rc^2 r_0^2}{3P}. \quad (75.10)$$

Подставляя радиус орбиты Земли $r_0 = 150 \cdot 10^{11}$ см, $\rho = 3$ г/см³, $P = 3,9 \cdot 10^{33}$ эрг/с, получаем

$$t = 6,5 \cdot 10^{14} R[\text{см}] \text{ с} = 2 \cdot 10^7 R[\text{см}] \text{ лет}. \quad (75.11)$$

За время существования солнечной системы (около 5 млрд лет) с орбиты Земли на Солнце упали все тела с радиусом меньше 250 см. Они, конечно, не упали, а испарились при падении, а останки вынесло солнечным ветром за пределы солнечной системы. Однако сейчас на орбите Земли могут быть другие тела, которые вначале были на краю Солнечной системы.

§ 76. Модель расширяющейся Вселенной, критическая плотность

Из наблюдений следует, что Вселенная в среднем очень однородна, изотропна, безгранична и при этом расширяется. Если взять две галактики, то они притягиваются друг к другу. Однако на них действуют также во все стороны силы со стороны других галактик, так будут ли эти две выбранные галактики ускоряться относительно друг друга?

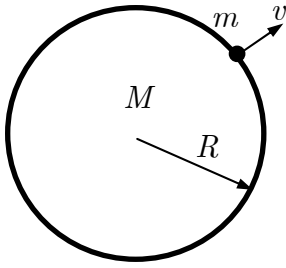


Рис. 58

Рассмотрим модель такой однородной Вселенной, наполненной пылью (нет давления). Найдем силу, действующую со стороны выделенного в пространстве шара, на маленькое пробное тело, находящееся на границе этого шара и движущееся при расширении вместе с этой границей (рис. 58). Это может быть просто частичка пыли на границы шара. Масса пыли внутри шара при расширении сохраняется и равна M . Если мы находимся в центре шара, то можем сказать, что на пробное тело

действуют только масса, расположенная внутри шара, поскольку внешние (для пробного тела) сферические слои не создают поля. Отсюда ускорение пробного тела относительно центра шара равно

$$a = -\frac{GM}{R^2} = -G \frac{4\pi\rho R}{3}. \quad (76.1)$$

Во время расширения на пробное тело действует все время одна и та же масса M , и мы можем записать закон сохранения энергии для пробного тела

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = A \quad \text{или} \quad \frac{v^2}{2} - \frac{G4\pi\rho R^2}{3} = A, \quad (76.2)$$

где $A = \text{const}$. Если $A = 0$, то скорость на бесконечности будет равна нулю; если $A < 0$, то после достижения радиуса $R = -GM/A$ шар начнет сжиматься. При $A > 0$ шар будет расширяться до бесконечности, при этом $v_\infty = \sqrt{2A}$.

При однородном расширении относительная скорость движения двух точек в данный момент времени пропорциональна расстоянию между этими точками

$$v = Hr, \quad (76.3)$$

где H – некая константа, постоянная Хаббла. Она зависит от времени, но в любой данный момент одинакова во всем пространстве. Подставляя в (76.2) $v = HR$, получаем

$$A = \frac{4}{3}\pi GR^2 \left(\frac{3H^2}{8\pi G} - \rho \right). \quad (76.4)$$

Здесь плотность взята в тот же момент времени, что и постоянная Хаббла. Получается, что скорость на бесконечности будет нулевая ($A = 0$) при *критической плотности*

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (76.5)$$

Критическая плотность является одной из важнейших величин в космологии. Постоянная Хаббла измерена экспериментально по «красному смещению» спектров объектов, до которых известно расстояние с точностью в несколько процентов, и равна

$$H = c \cdot 0.8 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-1}. \quad (76.6)$$

Определение средней плотности оказалось очень сложной задачей. Прямой подсчет видимой массы (звезды, светящийся газ) давал $\rho \approx 0.04\rho_{\text{кр}}$, и только в 2005 г. удалось измерить плотность Вселенной косвенным методом (см. § 104) с однопроцентной точностью. Оказалось, что плотность Вселенной равна критической плотности

$$\rho = \rho_{\text{кр}} \approx 10^{-29} \text{ г/см}^3. \quad (76.7)$$

При этом известные формы материи составляют всего около 5 %. Более подробно о Вселенной будет рассказано в последней главе.

§ 77. Рассеяние частиц

При прохождении пучка частиц через мишень некоторые частицы рассеиваются, а некоторые могут вообще исчезнуть в результате какой-то реакции. Вероятность взаимодействия пропорциональна толщине мишени dx и ее плотности n

$$dP = \sigma n dx, \quad (77.1)$$

где коэффициент пропорциональности называют сечением процесса. Его геометрический смысл простой: если частицы мишени представляют собой шарики радиуса R , а налетающие частицы имеют существенно меньшие размеры, то $\sigma = \pi R^2$, т. е. сечение равно проекционной площади частиц мишени.

Рассеяние является упругим, если исходные частицы остаются неизменными и новых частиц не рождается. В обратном случае процесс рассеяния является неупругим.

При столкновениях частицы могут рассеиваться на различные углы. Обычно чем ближе к рассеивающему центру пролетает частица, тем

больше угол рассеяния. Чтобы учесть этот факт, в классической физике вводится понятие прицельного параметра, так что

$$dP = d\sigma n \Delta x, \quad d\sigma = 2\pi\rho d\rho, \quad (77.2)$$

где ρ – прицельный параметр (расстояние исходной траектории от рассеивающего центра). В случае упомянутых шариков после интегрирования по прицельным параметрам (77.2) переходит в $\sigma = \pi R^2$. Прицельный параметр в задаче рассеяния является ненаблюдаемой величиной, однако его можно связать с углом рассеяния.

Пусть имеется зависимость $\rho(\theta)$, тогда

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (77.3)$$

Здесь взято абсолютное значение производной, поскольку угол обычно отсчитывают от нуля и $d\theta$ является положительной величиной, а $\frac{d\rho}{d\theta}$ может быть как положительной, так и чаще отрицательной величиной (угол уменьшается при увеличении прицельного параметра).

Сечение обычно относят не к элементу плоского угла θ , а к элементу телесного угла

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (77.4)$$

тогда (77.3) переходит в

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (77.5)$$

При рассеянии поляризованных частиц сечение может зависеть не только от полярного угла θ , но и от азимутального угла.

Следует заметить, что в микромире для описания процессов рассеяния необходимо использовать квантовую механику, поскольку движение частицы нельзя описать траекторией с прицельными параметрами. Однако мы продолжим рассмотрение в рамках классической механики. Условия применимости этого подхода будут изучаться в курсе квантовой механики.

§ 78. Рассеяние на сфере

Для простоты рассмотрим сначала упругое рассеяние точечных частиц на неподвижной сфере. Как видно из рис. 59,

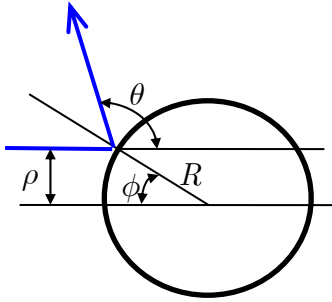


Рис. 59

$$\rho = R \sin \phi = R \sin \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2}, \quad (78.1)$$

где $\theta = \pi - 2\phi$. Дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta, \quad (78.2)$$

где
$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin \frac{\theta}{2}. \quad (78.3)$$

Отсюда получаем

$$d\sigma = \pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{R^2}{4} d\Omega. \quad (78.4)$$

Это изотропное распределение. Из рисунка может показаться, что изотропии нет, поскольку справа за сферой имеется тень, куда не проникают частицы. Однако если экспериментатор интересуется только угловым распределением, то это распределение будет изотропным. Если взглянуть на процесс рассеяния с расстояний, много больше радиуса сферы, то будет виден изотропный «ежик» из рассеянных частиц.

§ 79. Резерфордское рассеяние на малые углы

Пусть α -частицы обстреливают тонкую мишень с целью изучения силы взаимодействия α -частиц с ядрами (опыт Резерфорда). Считаем, что ядра неподвижны, а α -частицы рассеиваются на малые углы $\theta \ll 1$. Предположим, что сила зависит от расстояния как

$$F = \frac{a}{r^k}. \quad (79.1)$$

Задачей эксперимента является нахождения k . Сделаем приближенный расчет. Пусть скорость α -частицы равна v . Время взаимодействия (рассматриваем нерелятивистский случай)

$$\tau \approx \frac{\rho}{v}. \quad (79.2)$$

Будем считать, что на α -частицу действует поперечная сила $F = a/\rho^k$ на участке пути длиной $\sim \rho$, тогда частица получает поперечный импульс

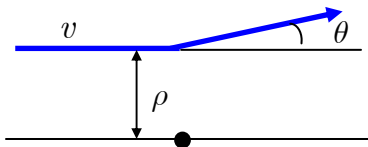


Рис. 60

$$P_{\perp} \sim F\tau \sim \frac{a}{v\rho^{k-1}}. \quad (79.3)$$

Угол рассеяния

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \frac{P_{\perp}}{P} = \frac{a}{mv^2 \rho^{k-1}}, \quad (79.4)$$

отсюда $\rho \approx \left(\frac{a}{mv^2 \theta} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ и $\left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| \approx \left(\frac{a}{mv^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{|1-k| \theta^{\frac{k}{k-1}}}$. (79.5)

Число частиц, рассеявшихся на мишени,

$$\begin{aligned} dN &= N_0 n dx \cdot 2\pi \rho d\rho = N_0 n dx \cdot 2\pi \left(\frac{a}{mv^2} \right)^{\frac{2}{k-1}} \frac{d\theta}{|1-k| \theta^{\frac{k+1}{k-1}}} = \\ &= N_0 n dx \cdot \left(\frac{a}{mv^2} \right)^{\frac{2}{k-1}} \frac{d\Omega}{|1-k| \theta^{\frac{2k}{k-1}}}, \end{aligned} \quad (79.6)$$

где N_0 – число частиц, упавших на мишень.

Пусть детектор, занимающий некоторый малый телесный угол, помещается под различными углами. Тогда отношение скоростей счета будет

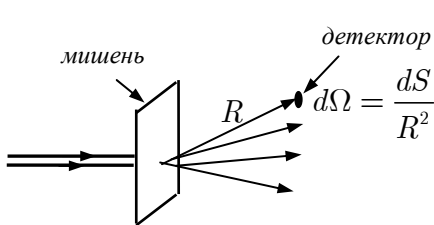


Рис. 61

$$\frac{j(\theta)}{j(\theta_0)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{2k}{k-1}}. \quad (79.7)$$

В эксперименте у Резерфорда получилось (для малых углов) $j(\theta)\theta^4 = \text{const}$, откуда $k = 2$. Ока-

залось, что α -частицы взаимодействуют с ядрами как электрически заряженные частицы. Кроме зависимости силы от расстояния этот эксперимент показал, что ядро имеет размеры $r \sim 10^{-13}$ см (при таких прицельных параметрах формула перестает работать) и что заряд ядра равен Ze . Почти вся информация о строении частиц была получена в подобных экспериментах.

§ 80. Формула Резерфорда

В предыдущем параграфе была получена приближенная формула для сечения при рассеянии на малые углы для потенциала $U = \pm\alpha/r^n$.

Однако у нас есть все для получения точной формулы для рассеяния в кулоновском поле $U = \pm\alpha/r$, где связь между углом рассеяния, начальной скоростью частицы и прицельным параметром дается формулой (71.27)

$$\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{\alpha}{\rho m v_{\infty}^2}. \quad (80.1)$$

Здесь χ – угол рассеяния. Подставляя это выражение в (77.5), получаем

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (80.2)$$

Это знаменитая формула Резерфорда. Расчет по квантовой механике дает (по случайности) сечение рассеяния в кулоновском поле, полностью совпадающее с формулой Резерфорда.

Учет массы частиц мишени (факультативно)

Формула (80.2) получена для случая рассеяния на бесконечно массивном источнике поля. Рассмотрим теперь случай конечной массы частиц мишени. Картина рассеяния будет следующей: на покоящуюся частицу с массой m_2 налетает частица с массой m_1 , имеющая на бес-

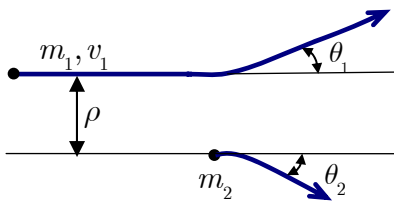


Рис. 62

конечности от мишени скорость v_1 и прицельный параметр ρ . После взаимодействия угол рассеяния налетающей частицы θ_1 и частицы мишени θ_2 (зависит от θ_1). Для вычисления дифференциальных сечений нужно найти связь этих углов с прицельным параметром.

Вспомним задачу двух тел, рассмотренную ранее. Относительный радиус вектор \mathbf{r} двух частиц под действием взаимных сил изменяется так, как если бы одну частицу (например, мишени) закрепили, а второй

(налетающей) частице приписали приведенную массу $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$,

рис. 63 (справа). Поскольку $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, то траектория частицы с

массой m_1 в системе центра масс будет подобна траектории частицы с приведенной массой (справа), значит, их углы отклонения будут одинаковы. Начальная скорость приведенной массы должна быть такая же, как и относительная начальная скорость налетающей частицы и мишени, т. е. равна скорости налетающей частицы.

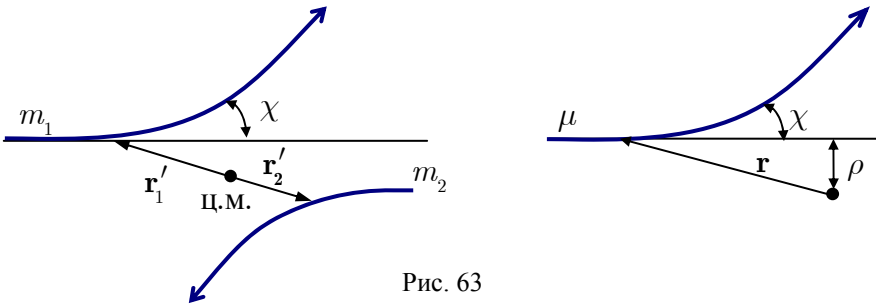


Рис. 63

Таким образом, для решения задачи мы должны сначала найти угол отклонения частицы с приведенной массой в поле бесконечно тяжелого центра. Этот угол χ будет равен углу рассеяния налетающей частицы в системе центра масс. Угол рассеяния частицы мишени в системе ц. м. равен $\pi - \chi$. Далее эти углы нужно преобразовать в лабораторную систему, т. е. выразить χ в формуле (80.2) через углы в лабораторной системе. Кроме этого, вместо m в (80.2) нужно подставить приведенную массу

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ и вместо v_∞ – начальную скорость налетающей частицы.

Найдем связь между χ и θ_1 и θ_2 . Скорость системы центра масс

$$v_{\text{ц.м.}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (80.3)$$

Импульс частиц в системе ц. м.

$$|p| = m_1(v_1 - v_{\text{ц.м.}}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \mu v_1. \quad (80.4)$$

Импульс налетающей частицы после рассеяния и угол рассеяния в лабораторной системе:

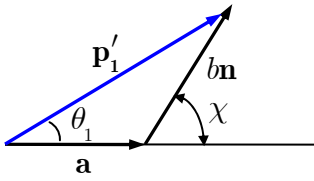


Рис. 64

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= m_1 \mathbf{v}_{\text{ц.м.}} + \mathbf{n}|p| = \\ &= \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 \mathbf{n} = \mathbf{a} + b\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (80.5)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{b \sin \chi}{a + b \cos \chi} = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}. \quad (80.6)$$

Импульс частицы мишени и угол после рассеяния:

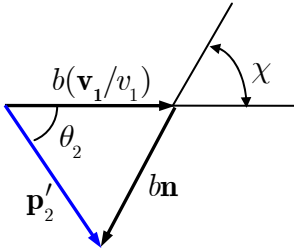


Рис. 65

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_2 &= m_2 \mathbf{v}_{\text{ц.м.}} - \mathbf{n}|p| = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 \mathbf{n} = b \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} - b\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (80.7)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \quad (80.8)$$

Ввиду простой связи (80.8) легко получить сечение рассеяния, выраженное через угол рассеяния частицы мишени

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3 \theta_2}. \quad (80.9)$$

Для налетающей частицы, из-за сложной связи углов в лабораторной и ц. м. системах, получаются слишком громоздкие формулы. Нужно учитывать также (§ 39), что при $m_1 > m_2$ один и тот же угол θ_1 соответствует двум разным углам χ . На рис. 64 в этом случае $a > b$. Рассмотрим только случай равных масс. Тогда $\chi = 2\theta_1$ и подстановка в (80.2) с учетом $\mu = m_1/2$ дает дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1 d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1}, \quad \text{где } E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (80.10)$$

Заметим, что при $\theta \ll 1$ эта формула совпадает с (80.2) для бесконечно тяжелой частицы-мишени. Это связано с тем, что при малых углах рассеяния частица мишени за время взаимодействия сдвигается очень мало, поэтому ответ не зависит от ее массы.

Упражнение. Пусть частица с массой m_1 , имеющая на бесконечности скорость v_1 , налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 с прицельным параметром ρ . Найти расстояние наименьшего сближения, если потенциальная энергия взаимодействия частиц $U = -\frac{\alpha}{r}$.

Решение. Используя общий подход к решению задачи двух тел, можно считать, что одна из частиц закреплена, а налетает частица с приведенной массой с относительной скоростью, равной начальной относительной скорости частиц, т. е. v_1 . Записываем уравнения сохранения момента импульса и энергии для начального положения и расстояния минимального сближения d

$$\mu v_1 \rho = \mu v d, \quad (80.11)$$

$$\frac{\mu v_1^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\alpha}{d}. \quad (80.12)$$

Подставляя v из первого уравнения во второе, находим ответ задачи:

$$d = -\frac{\alpha}{\mu v_1^2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu^2 v_1^4} + \rho^2}, \quad \text{где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (80.13)$$

Поскольку расстояние не может быть отрицательным, перед корнем нужно взять знак плюс.

Сечение рассеяния (сечение реакции) – это очень широко используемые характеристики в атомной физике и физике элементарных частиц. Для их расчетов используется квантовая механика, и сечения процессов уже нельзя представлять чисто геометрически, но по-прежнему вероятность рассеяния (или процесса рождения новых частиц) дается формулой $dp = n x d\sigma$.

ГЛАВА IX ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 81. Твердое тело, система координат, угловая скорость, ось вращения

До сих пор рассматривалась в основном кинематика и динамика поступательного движения. Кинематика вращательного движения твердого тела обсуждалась кратко в § 11, где было введено понятие угловой скорости, найдено перемещение и скорость точек при вращении тела вокруг оси. В § 38 был введен момент импульса системы и было показано, что для замкнутой системы он сохраняется вследствие второго и третьего закона Ньютона. Было показано также, что сохранение момента импульса обусловлено изотропностью пространства.

При дальнейшем рассмотрении динамики вращательного движения мы увидим, что имеется много аналогий между динамикой поступательного и вращательного движения: закон сохранения импульса \mathbf{p} и закон сохранения момента импульса \mathbf{L} ; поступательная скорость \mathbf{v} и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и момент импульса $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, где

I – момент инерции; кинетические энергии $K = \frac{mv^2}{2}$ и $K = \frac{I\omega^2}{2}$, за-

коны движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ и $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – момент сил. Однако в общем случае рассмотрение вращательного движения является более сложной задачей, поскольку момент инерции зависит от формы тела. Это приводит, например, к тому, что вектор угловой скорости может не совпадать с вектором момента импульса и менять направление в пространстве даже в отсутствие внешних сил.

Далее мы проанализируем общие законы движения твердого тела, но конкретное рассмотрение проведем только для достаточно простых случаев. Более детально движения твердого тела будет изучаться в курсе аналитической механики.

Твердое тело – система материальных точек, расстояния между которыми неизменно. Движение будем описывать с помощью двух систем отсчета: инерциальной системы XYZ и системы координат x_1, x_2, x_3 (или x, y, z), жестко связанной с телом и участвующей во всех его движениях. Для задания положения тела в неподвижной системе от-

счета необходимо 6 чисел: три координаты для задания начала отсчета подвижной системы и три угла для ориентации ее осей относительно неподвижной системы, т. е. твердое тело имеет 6 степеней свободы.

Координата точки тела относительно неподвижной системы

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{R} + \mathbf{r}, \quad (81.1)$$

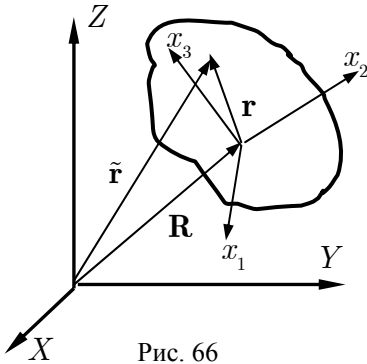


Рис. 66

где обозначения понятны из рис. 66. Как было показано в § 11, при повороте тела на угол $d\phi$ вокруг оси, проходящей через начало координат, радиус вектор точки изменяется на $d\mathbf{r} = [d\phi \times \mathbf{r}]$, тогда в неподвижной системе отсчета

$$d\tilde{\mathbf{r}} = d\mathbf{R} + d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + [d\phi \cdot \mathbf{r}]. \quad (81.2)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{v} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt}, \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\phi}{dt}, \quad \text{находим}$$

скорость точки на теле

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}], \quad (81.3)$$

где \mathbf{V} – поступательная скорость тела, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость. При чисто поступательном движении линия между двумя произвольными точками на теле перемещается параллельно самой себе; при чисто вращательном тело совершает движение вокруг некоторого направления.

Пока мы не делали никаких предположений о выборе центра подвижной системы. Пусть центр подвижной системы сдвинули на вектор \mathbf{a} , так что $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$. Подставляя в (81.3), получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}] + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']. \quad (81.4)$$

С другой стороны, по определению,

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + [\boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}'], \quad (81.5)$$

отсюда

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}], \quad \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}. \quad (81.6)$$

Таким образом, угловая скорость не зависит от выбора начала отсчета, скорость же поступательного движения такого абсолютного характера не имеет. Полная скорость точки на теле есть сумма скоростей этого центра и вращательной скорости точки (относительно этого центра).

В некоторых случаях выбором \mathbf{a} можно сделать $\mathbf{V}' = 0$. Тогда все движение будет сводиться к вращению относительно мгновенного центра вращения. Из (81.6) следует, что для этого необходимо $\mathbf{V} \perp \boldsymbol{\omega}$.

Для вращений имеет место закон сложения угловых скоростей. Действительно, вместо одновременного вращения с двумя угловыми скоростями совершим два последовательных малых поворота за равные времена сначала с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, затем с $\boldsymbol{\omega}_2$. Изменение радиус вектора при первом повороте $d\mathbf{r}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}] dt$, при втором повороте $d\mathbf{r}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2 (\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1)] dt \approx [\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{r}] dt$ (отброшен малый член второго порядка). Откуда $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] dt$, где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Примеры.

1. Колесо катится по дороге со скоростью V . Нижняя точка является мгновенной осью вращения. Центр колеса движется со скоростью V , а верхняя точка колеса – со скоростью $2V$.

2. Левый конец палки длины L имеет мгновенную скорость V_A под углом α к палке, при этом точка B смещается направо вдоль палки. Найти скорость точки, расположенной на расстоянии x от правого конца.

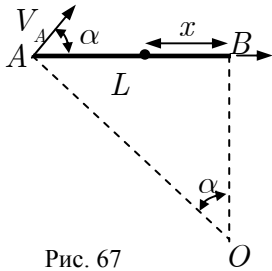


Рис. 67

Решение. Проводя линии перпендикулярно скоростям правого и левого концов, находим положение мгновенной оси вращения (точка O).

Угловая скорость $\omega = \frac{V_A}{AO} = \frac{V_A}{L} \sin \alpha$. Скорость заданной точки

$$V_x = \omega \sqrt{(OB)^2 + x^2} = \frac{V_A}{L} \sin \alpha \sqrt{\frac{L^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + x^2}. \quad (81.7)$$

§ 82. Кинетическая энергия и момент импульса вращающегося тела

Кинетическая энергия тела

Кинетическая энергия тела в неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2} (\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i])^2 = \\ &= \frac{V^2}{2} \sum m_i + \sum m_i \mathbf{V} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] + \sum \frac{m_i}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]^2. \end{aligned} \quad (82.1)$$

Первый член $\sum m_i \frac{V^2}{2} = \frac{MV^2}{2}$ – это кинетическая энергия поступательного движения. Второй член можно записать как $\sum m_i \mathbf{V}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] = \mathbf{V}[\boldsymbol{\omega} \sum m_i \mathbf{r}_i]$. Тогда если начало отсчета подвижной системы координат помещено в центре масс тела, то второй член равен нулю, поскольку $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$. В результате получаем, что кинетическая энергия тела есть сумма энергии поступательного движения тела как целого ($M = \sum m_i$) и вращательной энергии (далее индекс « i » для краткости опускаем)

$$K = K_{\text{п}} + K_{\text{вр}}, \quad (82.2)$$

$$\text{где } K_{\text{п}} = \frac{MV^2}{2}, \quad K_{\text{вр}} = \sum \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]^2 = \sum \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r})^2). \quad (82.3)$$

При получении последнего равенства использована замена $\sin^2 \theta \Rightarrow 1 - \cos^2 \theta$.

Напомним, что координаты частиц здесь даются в системе координат, жестко привязанной к телу и вращающейся вместе с ним. Угловая скорость также определена относительно подвижной системы координат и в общем случае изменяется по направлению и величине (даже если тело свободно, то постоянной величиной является момент импульса, а не угловые скорости).

Рассмотрим сначала простейший случай, когда угловая скорость постоянна, например, тело вращается на закрепленной оси. Тогда точки тела движутся вокруг оси на расстояниях $\rho_i = r_i \sin \theta_i$ со скоростями $v_{\perp} = \rho_i \omega$, тогда выражение для кинетической энергии приобретает простой и понятный вид

$$K_{\text{вр}} = \sum \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]^2 = \sum \frac{m}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \sum \frac{m}{2} (\rho \omega)^2 = \sum \frac{m v_{\perp}^2}{2} \quad (82.4)$$

$$\text{или} \quad K_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (82.5)$$

$$\text{где} \quad I = \sum m \rho^2 \equiv \sum m_i \rho_i^2. \quad (82.6)$$

Величина I называется моментом инерции тела относительно оси.

Момент импульса тела

Найдем момент импульса вращающегося тела в неподвижной системе отсчета. По определению,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum [\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \sum m(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \times (\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]) = \\ &= \sum m[\mathbf{R}\mathbf{V}] + [\sum m\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}] + [\mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}\sum m\mathbf{r}]] + \sum m[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]. \end{aligned} \quad (82.7)$$

Если начало отсчета подвижной системы, прикрепленной к телу, отсчитывается от центра масс тела, то $\sum m\mathbf{r} = 0$, поэтому второй и третий члены равны нулю. В результате получаем

$$\mathbf{L} = [\mathbf{R}\mathbf{p}] + \sum m[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]. \quad (82.8)$$

Отсюда видим, что момент импульса есть сумма момента импульса, связанного с поступательным движением, и момента импульса вращательного движения. Если импульс тела равен нулю, то *момент импульса не зависит от начала отсчета*.

Далее будем считать, что центр масс тела покоится. Используя правило векторной алгебры $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b})$, получаем

$$\mathbf{L} = \sum m(\boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})). \quad (82.9)$$

Это есть общее выражение для момента импульса тела относительно центра масс тела. Во-первых, замечаем, что направления момента импульса и угловой скорости в общем случае не совпадают. Возьмем, например, гантель, у которой одна масса m расположена в точке \mathbf{r} , а вторая масса – в точке $-\mathbf{r}$, при этом направление вектора \mathbf{r} имеет угол θ по отношению к угловой скорости. В соответствии с (82.9) полный момент импульса $L = 2mr^2\omega \sin \theta$ и направлен $\perp \mathbf{r}$, откуда видно, что направления угловой скорости и момента импульса отличаются.

При вращении тела вокруг *закрепленной оси* направления \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$ также могут не совпадать, как в рассмотренном выше примере. Кроме того, направление \mathbf{L} может не сохраняться, так как подшипники могут давить на ось в боковом направлении, создавая момент сил, изменяющий момент импульса (это и будет происходить в рассмотренном примере). Однако при вращении тела вокруг оси сохраняется проекция момента импульса на направление угловой скорости. Действительно, если сила действует на ось перпендикулярно оси, то создаваемый ей момент сил в направлении оси вращения (пусть это ось Z) равен нулю (так как плечо равно нулю). Момент импульса вдоль оси может ме-

няться только за счет сил трения, действующих по касательной к оси. Чтобы они создавали меньший момент сил, ось в месте закрепления обычно делают как можно тоньше.

Итак, при вращении тела, закрепленного на оси, направленной вдоль Z , сохраняется проекция момента импульса

$$L_z = I\omega_z, \quad I = \sum m\rho^2, \quad (82.10)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$ – расстояние точки до оси вращения. Это следует непосредственно из (82.9), действительно:

$$L_z = \sum m(\omega_z r^2 - \omega_z z^2) = \sum m\omega_z(x^2 + y^2).$$

Сравнивая общие выражения для кинетической энергии вращения (82.3) и момента импульса (82.9), нетрудно заметить, что

$$K_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \mathbf{L}\boldsymbol{\omega}. \quad (82.11)$$

§ 83. Главные оси вращения, главные моменты инерции тела

Проанализируем выражение для момента импульса тела (82.9). Компонента момента импульса вдоль оси x («прибитой» к телу)

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m(\omega_x r^2 - x(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})) = \\ &= \omega_x \sum m(y^2 + z^2) - \omega_y \sum mxy - \omega_z \sum mxz. \end{aligned} \quad (83.1)$$

В него дают вклады не только угловая скорость ω_x , но и угловые скорости вдоль осей y и z . Аналогичная ситуация и для других проекций. Всего возникает три типа добавочных членов: $\sum mxy$, $\sum mxz$ и $\sum myz$. Оказывается, можно так направить три взаимно перпендикулярные оси координат, привязанные к телу, чтобы все эти добавочные члены занулились. Такие оси называются *главными осями инерции*. Действительно, направление подвижной системы координат задается тремя числами, и поэтому неудивительно, что, варьируя их, можно сделать нулевыми три суммы чисел, зависящие от этих направлений. Более подробно это будет обсуждаться в курсе аналитической механики.

В системе главных осей инерции в выражении (83.1) остается только первый член и выражения для компонент момента импульса приобретают вид

$$L_x = I_x \omega_x, \quad I_x = \sum m(y^2 + z^2) \equiv I_1 = \sum m(x_2^2 + x_3^2); \quad (83.2)$$

$$L_y = I_y \omega_y, \quad I_y = \sum m(x^2 + z^2) \equiv I_2 = \sum m(x_1^2 + x_3^2); \quad (83.3)$$

$$L_z = I_z \omega_z, \quad I_z = \sum m(x^2 + y^2) \equiv I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2) \quad (83.4)$$

и в векторном виде

$$\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\omega}_2 + I_3 \boldsymbol{\omega}_3. \quad (83.5)$$

Моменты инерции относительно главных осей, проходящих через центр масс, называются центральными *главными моментами инерции* тела. Учитывая (82.11) и (83.5), кинетическая энергия в системе главных осях имеет вид

$$K_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \quad (83.6)$$

Как видно из (83.2)–(83.4), главные моменты инерции равны сумме произведений масс, составляющих тело, на их расстояние до соответствующей оси в квадрате: $I_i = \sum m \rho^2$ (или $\int \rho^2 dm$).

Нетрудно видеть, что сумма любых двух моментов инерции больше третьего:

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) > \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (83.7)$$

Тела можно классифицировать следующим образом:

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \quad \text{– асимметрический волчок;}$$

$$I_1 = I_2 \neq I_3 \quad \text{– симметрический волчок;}$$

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad \text{– шаровой волчок.}$$

При вращении вокруг главных осей направление угловой скорости совпадает с направлением момента импульса и сохраняется. При этом оказывается, что вращение относительно главных осей с максимальным и минимальным моментом инерции устойчиво, а относительно среднего по величине неустойчиво, в чем легко убедиться с помощью спичечного коробка.

Нахождение главных осей для тела является непростой задачей, однако часто их направление очевидно из соображений симметрии. Например, для прямоугольного параллелепипеда главные оси проходят перпендикулярно граням через центр тяжести. Для круглого цилиндра оси проходят вдоль цилиндра и поперек через ц. м.

Плоское тело, $x_3 = 0$, имеем

$$I_1 = \sum m x_2^2, I_2 = \sum m x_1^2, I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2), \text{ т. е. } I_3 = I_1 + I_2. \quad (83.8)$$

Найдем моменты инерции для круглой тонкой пластинки. Момент относительно вертикальной оси

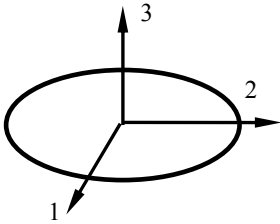


Рис. 68

$$I_3 = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr = 2\pi\rho \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}, \quad (83.9)$$

где ρ – плотность на единицу площади, интегрирование идет по кольцам. Поскольку из симметрии $I_1 = I_2$, то из (83.7) следует

$$I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2} = \frac{MR^2}{4}. \quad (83.10)$$

§ 84. Теорема Гюйгенса – Штейнера

Пусть момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, равен I_0 . Момент инерции относительно оси, сдвинутой параллельно на расстояние \mathbf{a} ,

$$I = \sum m_i (\mathbf{a} + \mathbf{r}_i)^2 = \sum m_i a^2 + 2\mathbf{a} \sum m_i \mathbf{r}_i + \sum m_i r_i^2. \quad (84.1)$$

Здесь \mathbf{a} и \mathbf{r}_i перпендикулярны оси вращения. Поскольку, по определению, при расположении начала отсчета в центре масс $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$, то

$$I = Ma^2 + I_0. \quad (84.2)$$

Эта формула Гюйгенса – Штейнера.

Данный результат можно получить еще по-другому. Кинетическая энергия (82.2)

$$K = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}. \quad (84.3)$$

Полагая $V = \omega a$, получаем $K = \frac{I\omega^2}{2}$, где $I = Ma^2 + I_0$, что совпадает с (84.2).

Моменты инерции некоторых тел

1. Тонкий стержень (палка).

Момент инерции относительно центра палки

$$I_0 = \int \rho r^2 dr = 2 \int_0^{L/2} \frac{M}{L} r^2 dr = \frac{ML^2}{12}, \quad (84.4)$$

тогда, используя теорему Гюйгенса – Штейнера, находим момент инерции относительно конца палки

$$I = M \left(\frac{L}{2} \right)^2 + I_0 = \frac{ML^2}{3}. \quad (84.5)$$

2. Тонкое кольцо.

Момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца,

$$I_3 = MR^2. \quad (84.6)$$

В соответствии с (83.8) момент инерции относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через центр,

$$I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2} = \frac{MR^2}{2}. \quad (84.7)$$

3. Круглый диск.

Для круглого плоского диска моменты инерции были найдены ранее (см. (83.9), (83.10)):

$$I_1 = I_2 = \frac{MR^2}{4}, \quad I_3 = \frac{MR^2}{2}. \quad (84.8)$$

4. Шар.

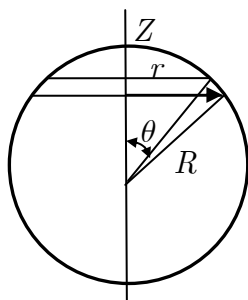


Рис. 69

Момент инерции относительно оси, проходящей через центр, находим сложением моментов инерции круглых пластинок толщиной $|dz| = R \sin \theta d\theta$ (следует из $z = R \cos \theta$). Для такой пластинки

$$\begin{aligned} dI &= \frac{r^2 dm}{2} = \frac{(R \sin \theta)^2}{2} \rho \pi (R \sin \theta)^2 R \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi R^5 (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta). \end{aligned} \quad (84.9)$$

Интегрируя, получаем
$$I = \int_{\theta=0}^{\pi} dI = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2. \quad (84.10)$$

§ 85. Уравнение движения твердого тела

При движении свободного твердого тела сохраняются его момент импульса и кинетическая энергия.

Уравнение поступательного движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{dv_{\text{ц.м.}}}{dt} = \sum \mathbf{f}_i = \sum \mathbf{f}_{\text{внут}} + \sum \mathbf{f}_{\text{внеш}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}, \quad (85.1)$$

здесь $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i$, $\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \sum \mathbf{f}_{\text{внеш}}$, сумма внутренних сил равна нулю.

Для вращательного движения (индекс суммирования « i » опускаем)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{r} \mathbf{p}] = \sum [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{p}] + \sum [\mathbf{r} \dot{\mathbf{p}}] = \sum [\mathbf{r} \mathbf{f}]. \quad (85.2)$$

Член $\sum [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{p}]$ равен нулю, поскольку $\dot{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{p}$. С учетом того, что сумма моментов внутренних сил равна нулю, получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum [\mathbf{r} \mathbf{f}_{\text{внеш}}] = \boldsymbol{\tau}, \quad (85.3)$$

т. е. изменение момента импульса равно моменту внешних сил.

При переносе начала координат $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$

$$\boldsymbol{\tau} = \sum [\mathbf{r} \mathbf{f}_{\text{внеш}}] = \sum [\mathbf{r}' \mathbf{f}_{\text{внеш}}] + [\mathbf{a} \mathbf{F}_{\text{внеш}}] = \boldsymbol{\tau}' + [\mathbf{a} \mathbf{F}_{\text{внеш}}]. \quad (85.4)$$

Момент сил не зависит от начала координат, если $\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$, например, если действует пара противоположно направленных сил. Если \mathbf{F} и $\boldsymbol{\tau}$ взаимно-перпендикулярны, то можно найти такое \mathbf{a} , что $\boldsymbol{\tau}' = 0$. Тогда из (85.4)

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{a} \mathbf{F}_{\text{внеш}}] \quad (85.5)$$

и результирующее действие всех сил сводится к действию одной суммарной силы, приложенной к определенной точке, точнее к любой точке вдоль определенной прямой (момент сил при этом один и тот же).

Рецепт действий при этом такой. Пусть на тело действуют несколько сил. Находим суммарную силу \mathbf{F} и суммарный момент $\boldsymbol{\tau}$ относительно центра масс. Затем заменяем все силы одной силой \mathbf{F} , приложенной к точке тела, расположенной на прямой, проходящей на рас-

стоянии $d = \frac{\tau}{F}$ от центра масс. Как уже говорилось, это можно сделать только тогда, когда \mathbf{F} и $\boldsymbol{\tau}$ взаимно перпендикулярны.

Для однородного поля тяжести суммарный момент сил $\sum m[\mathbf{r}\mathbf{g}] = [\sum m\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}] = M[\mathbf{R}\mathbf{g}]$, где \mathbf{R} – радиус вектор центра масс, так что все действие однородного поля сводится к силе, приложенной к центру масс тела.

Работа при вращении

Изменение кинетической энергии всегда равно работе сил. Выразим ее через моменты сил, действующие на тело.

$$dK = \sum \mathbf{f}d\mathbf{r} = \sum \mathbf{f}[d\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}] = d\boldsymbol{\varphi} \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \boldsymbol{\tau}d\boldsymbol{\varphi}. \quad (85.6)$$

Выражение для работы такое же, как и при поступательном движении, только вместо силы входит момент сил, а вместо перемещения – угол поворота.

§ 86. Примеры динамики вращательного движения

Скатывание цилиндра с наклонной плоскости

Это пример задачи движения с вращением, когда ось вращения перпендикулярна одной плоскости. Уравнения движения при движении без проскальзывания

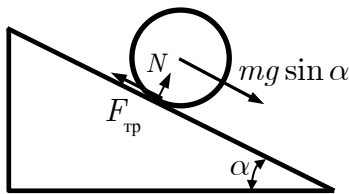


Рис. 70

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (86.1)$$

$$\frac{dL}{dt} = I_0 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} R, \quad (86.2)$$

$$v = \omega R.$$

Здесь моменты сил рассчитаны относительно центра масс. Решение системы

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_0}{mR^2}}, \quad F_{\text{тр}} = \frac{I_0}{R^2} \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_0}{mR^2}}. \quad (86.3)$$

Для цилиндра $I_0 = \frac{mR^2}{2}$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mg \sin \alpha. \quad (86.4)$$

Для качения без проскальзывания необходимо

$$F_{\text{тр}} < kN = kmg \cos \alpha \quad (86.5)$$

или

$$\text{tg } \alpha < 3k. \quad (86.6)$$

Эту задачу можно было решить по-другому, выбрав за ось вращения точку соприкосновения цилиндра с наклонной плоскостью, являющейся мгновенной осью вращения. Тогда получается на одно уравнение меньше:

$$\frac{I}{R} \frac{dv}{dt} = Rmg \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{R^2 mg \sin \alpha}{I}. \quad (86.7)$$

По теореме Гюйгенса – Штейнера $I = I_0 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$, что дает

прежний ответ $\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

Физический маятник

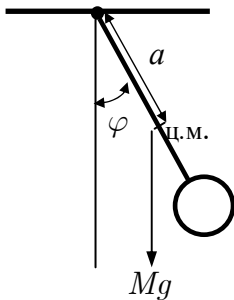


Рис. 71

Уравнение движения для маятника относительно точки подвеса

$$I \frac{d\omega}{dt} = -Mga \sin \varphi. \quad (86.8)$$

Для малых углов

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi, \quad (86.9)$$

где
$$\omega_0^2 = \frac{Mga}{I}. \quad (86.10)$$

В случае математического маятника

$$I = Ml^2, \quad a = l \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (86.11)$$

Для палки, подвешенной за конец, $I = Ml^2/3$, $a = l/2$, $\omega_0^2 = 3g/2l$.

Опертый симметричный волчок, вращающийся вокруг главной оси в поле тяжести

На волчок (рис. 72) действует момент сил

$$\tau = Mga \sin \theta, \quad (86.12)$$

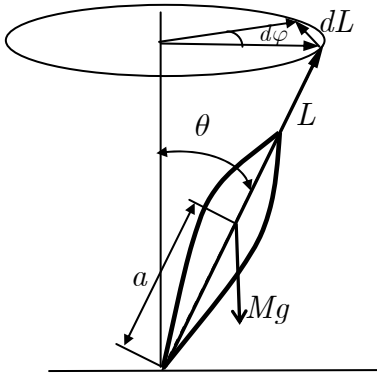


Рис. 72

направленный перпендикулярно листу, где a – расстояние от центра тяжести до точки опоры. При повороте оси волчка на угол $d\varphi$ вокруг вертикальной оси вектор \mathbf{L} поворачивается, сохраняя свою абсолютную величину и угол по отношению к вертикали. Поскольку момент сил лежит в горизонтальной плоскости, то вертикальная составляющая момента импульса сохраняется, а изменение горизонтальной составляющей –

$$dL = L \sin \theta d\varphi. \quad (86.13)$$

Это легко понять, если посмотреть на волчок сверху, откуда будет «видна» горизонтальная проекция момента импульса, равная $L \sin \theta$, поворачивающаяся вокруг начала вектора с некоторой угловой скоростью $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Приравнивая скорость изменения момента импульса моменту сил, находим частоту прецессии

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mga}{L} = \frac{Mga}{I\omega}. \quad (86.14)$$

Прецессия тем медленнее, чем больше угловая скорость волчка. Скорость прецессии гироскопического маятника не зависит от угла наклона. При рассмотрении мы неявно предполагали, что скорость вращения волчка много больше частоты прецессии. С учетом (86.14) условие $\omega \gg \Omega$ означает $I\omega^2 \gg Mga$, т. е. энергия вращения много больше потенциальной энергии.

§ 87. Гироскопы

Гироскоп – это быстро вращающееся аксиально-симметричное твердое тело. Главным свойством свободного гироскопа является сохранение направления вращения в пространстве.

Прецессия гироскопа под действием внешних сил

Рассмотрим волчок (рис. 73) на оси уравновешенного стержня, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Сначала стержень неподвижен.

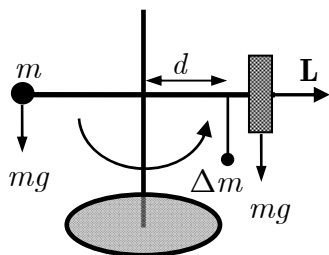


Рис. 73

Но если подвесить небольшой добавочный грузик слева или справа, создав тем самым момент сил, волчок начнет прецессировать вокруг вертикальной оси. Положение стержня остается горизонтальным. Это очень удивительно, что стержень при подвешивании груза не наклоняется, а вместо этого прецессирует. При убирании грузика прецессия мгновенно останавливается.

Найдем скорость прецессии, если на расстоянии d от оси подвешен дополнительный грузик массой Δm . Он создает момент сил $\tau = Fd$, $F = \Delta m g$. Направление этого момента

сил перпендикулярно листу и будет приводить к повороту гироскопа в горизонтальной плоскости. Рассмотрение аналогично опертому волчку, рассмотренному выше. Скорость прецессии находится из соотношения

$\frac{dL}{dt} = \tau$ или $\Omega L = Fd$. Откуда

$$\Omega = \frac{Fd}{L} = \frac{Fd}{I\omega}, \quad (87.1)$$

что совпадает с (86.14).

Рассмотрим теперь «обратную» задачу. Пусть этот гироскоп поворачивается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью Ω , какую вертикальную силу нужно прикладывать к нему, чтобы удерживать в горизонтальной плоскости? Из (87.1) получаем

$$F = \frac{L\Omega}{d} = \frac{I\omega \Omega}{d}. \quad (87.2)$$

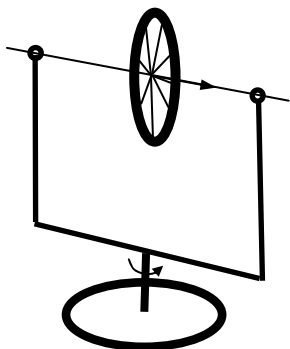


Рис. 74

Устройство, которое удерживает ось гироскопа в горизонтальном направлении и разрешает вращаться вокруг вертикальной оси, изображено на рис. 74. Для вращения такого гироскопа вокруг вертикальной оси не нужно прикладывать никаких усилий (кроме сил трения)! Но при этом возникают очень большие силы в подшипниках, которые держат ось гироскопа в горизонтальном положении (формула (87.2)).

Сделаем оценку. Пусть гироскоп имеет массу 1 кг, радиус 10 см, длину оси 10 см и вращается с частотой 10000 оборотов в минуту, $\omega \sim 1000$ 1/с (как жесткий диск в компьютере) вокруг своей оси и с частотой 10 Гц ($\Omega \sim 60$ 1/с) вокруг вертикальной оси. Тогда сила, действующая на оси,

$$F \approx \frac{mR^2\Omega\omega}{2d} \approx \frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 1000 \cdot 60}{2 \cdot 10} = 3 \cdot 10^8 \text{ дин} \approx 300 \text{ кг.} \quad (87.3)$$

Гироскопические силы

Продолжим разговор о необычном поведении гироскопов. Если попытаться развернуть за ось в горизонтальной плоскости быстро вращающееся колесо,

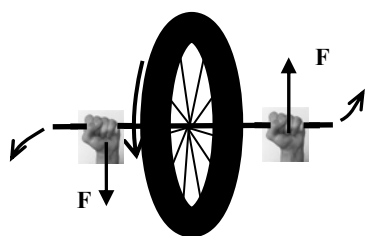


Рис. 75

то на руки будут действовать силы в вертикальном направлении, как показано на рис. 75. Причина ясна: для изменения момента импульса нужен момент сил. Если мы поворачиваем гироскоп в горизонтальной плоскости с угловой скоростью Ω , то вертикальная сила, необходимая для удержания в горизонтальной плоскости,

дается снова формулой (87.2).

Гироскопические силы играют существенную роль при движении самолета. Если представить, что в моторе крутится маховик с моментом импульса, направленным в направлении движения самолета, то при повороте направо нос самолета будет уходить вниз. Аналогично происходит с морскими судами. Если корабль идет поперек волн и испытывает килевую качку, то одновременно его будет мотать вправо-влево.

Свободный гироскоп

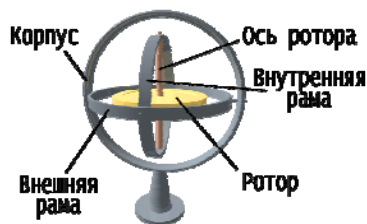


Рис. 76

Технически совсем свободных гироскопов нет, но можно сделать конструкцию, которая удерживает центр масс гироскопа, но не влияет на его вращение. Устройство называют кардановым подвесом (рис. 76). В нем гироскоп сохраняет направление вращения в пространстве при движении внешней рамы. Такие устройства используются для

ориентации в самолетах и на космических станциях.

Гироскоп

Рассмотрим гироскоп, изображенный на рис. 74, ось которого может свободно двигаться только в плоскости Земли. Пусть такой гироскоп стоит на экваторе (рис. 77). Поскольку Земля

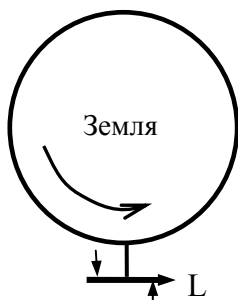


Рис. 77

вращается, для сохранения горизонтального положения оси гироскопа подшипники давят на ось, как показано стрелками на рисунке. Создаваемый момент сил, направленный вдоль оси вращения Земли, приводит к повороту оси гироскопа к оси вращения Земли. На любой широте гироскоп будет ориентирован вдоль меридиана (в случае, изображенном на рисунке, стрелка момента импульса будет поворачиваться к нам).

Подобные устройства сейчас используются на кораблях и самолетах. Они намного точнее, чем магнитные компасы: не требуется учитывать магнитное склонение.

§ 88. Элементы статики

Тело находится в равновесии, если сумма сил и моментов сил, приложенных к нему, равна нулю.

$$\mathbf{F}_{\text{вн}} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_{\text{вн}} = 0. \quad (88.1)$$

Общий рецепт решения статических задач следующий. Нужно нарисовать все силы, включая реакции опор и силы трения, максимальное значение которых связано с силой нормального давления, найти суммы сил и моментов сил и приравнять их нулю. Решая систему уравнений, находим эти силы. Поскольку суммарная сила равна нулю, то, как было показано ранее (см. (85.4)), момент сил не зависит от точки отсчета.

Многие статические задачи переопределены и имеют множество решений. Например, если абсолютно жесткий брус лежит на трех опорах, то небольшое изменение высоты опор приводит к полному перераспределению нагрузок. Такая же ситуация со столом – четвертая ножка «лишняя». Несколько примеров.

Тело на наклонной плоскости

Найдем силы, которые действуют на тело, лежащее на наклонной плоскости (рис. 78). На него действуют три силы: сила тяжести, сила реакции опоры и сила трения. Если тело покоится, то сумма сил равна нулю. Что касается момента сил, то здесь возникает вращающий момент относительно центра масс за счет силы трения, действующей вдоль нижней грани тела. Поскольку суммарный момент сил равен нулю, то сила реакции опоры распределена неравномерно по площади: давление на нижнюю часть тела больше, чем на верхнюю. Это отражено на рис. 78 тем, что сила реакции опоры приложена правее центра масс.

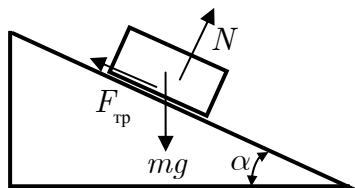


Рис. 78

Спроектируем силы на направления вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно ей. Условие равенства суммарной силы нулю дает

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha. \quad (88.2)$$

Из равенства нулю суммарного момента сил можно найти точку приложения реакции опоры (не будем это выписывать). Это пример задачи, где решение однозначно.

Два соединенных тела на наклонной плоскости

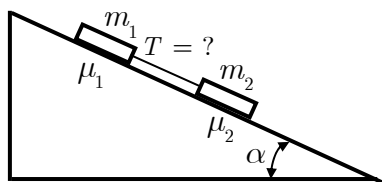


Рис. 79

Рассмотрим теперь два тела на наклонной плоскости, скрепленные между собой жестким невесомым стержнем (рис. 79). Вопрос: с какой силой T взаимодействуют эти тела?

Для направления перпендикулярного наклонной плоскости по-прежнему

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha, \quad N_2 = m_2 g \cos \alpha. \quad (88.3)$$

Для направления вдоль наклонной плоскости

$$F_{\text{тр},1} + F_{\text{тр},2} = (m_1 + m_2) g \sin \alpha. \quad (88.4)$$

Сила натяжения соединяющего стержня

$$T = m_2 g \sin \alpha - F_{\text{тр},2}. \quad (88.5)$$

Пока тела не скользят, нет однозначной связи между силой трения и силой нормального давления. Из записанных уравнений мы не можем найти отдельно $F_{\text{тр},1}$ и $F_{\text{тр},2}$, а знаем только их сумму (88.4) и то, что

$$F_{\text{тр},1} < N_1 \mu_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha, \quad F_{\text{тр},2} < N_2 \mu_2 = \mu_2 m_2 g \cos \alpha. \quad (88.6)$$

Уравнения (88.4) и (88.6) изображены на рис. 80, где утолщенным отрезком показана область возможных значений сил трения. Однозначность наступает только тогда, когда

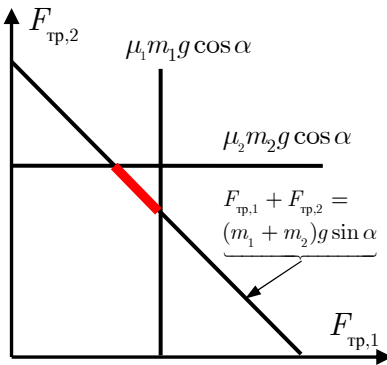


Рис. 80

длина этого отрезка становится нулевой, что соответствует условию скатывания:

$$F_{\text{тр},1} = \mu_1 m_1 g \cos \alpha, \quad (88.7)$$

$$F_{\text{тр},2} = \mu_2 m_2 g \cos \alpha.$$

Если обсуждаемую систему из двух соединенных тел несколько раз ставить на наклонную плоскость, то показания динамометра (в стержне) каждый раз будут

будут разными. Это пример неоднозначной статической задачи.

Лестница у стены

Аналогичный пример – лестница, прислоненная к стенке (рис. 81).

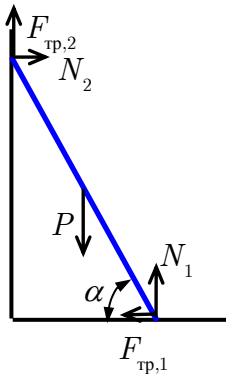


Рис. 81

На простой вопрос, с какой силой лестница давит на стенку и пол, нельзя дать однозначного ответа. Однозначность наступает, когда лестница начинает проскальзывать. Действительно, на лестницу действуют 5 сил: сила тяжести, две силы нормального давления на пол и стенку и две силы трения, 4 из них неизвестны. Уравнений же всего 3: равенство нулю суммы сил по горизонтальной и вертикальной проекциям и равенство нулю момента сил. Это означает, что задача неоднозначная и допускает целую область решений. Найдем предельный угол, при котором лестница еще может стоять (начинается проскальзывание). Пусть коэф-

лестница еще может стоять (начинается проскальзывание). Пусть коэф-

коэффициент трения о пол μ_1 , а о стенку – μ_2 . Получаем следующую систему уравнений:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 = F_{\text{тр},1}, \quad (88.8)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P = N_1 + F_{\text{тр},2}, \quad (88.9)$$

$$\sum \tau = 0 \text{ (относительно нижней точки)} \Rightarrow P \frac{L}{2} \cos \alpha = F_{\text{тр},2} L \cos \alpha + N_2 L \sin \alpha. \quad (88.10)$$

$$\text{Связи} \quad F_{\text{тр},1} = \mu_1 N_1, \quad F_{\text{тр},2} = \mu_2 N_2. \quad (88.11)$$

Решение системы (88.8)–(88.11)

$$\text{tg } \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_1}. \quad (88.12)$$

Этот ответ для случая, когда центр тяжести находится посередине лестницы. Следует заметить, что если нет трения о пол, $\mu_1 = 0$, то лестница не может стоять под углом даже при наличии трения о стенку.

Составляя аналогичную систему уравнений, нетрудно найти предельный угол для случая, когда центр тяжести находится на самом вершугу лестницы (человек наверху). В этом случае предельный угол не зависит от коэффициента трения о стенку и равен

$$\text{tg } \alpha_{\min} = \frac{1}{\mu_1}. \quad (88.13)$$

Этот ответ можно получить сразу, если рассмотреть момент сил относительно верхней точки, он равен $N_1 L \cos \alpha - N_1 L \mu_1 \sin \alpha = 0$, откуда следует (88.13).

Устойчивость

Положение равновесия может быть устойчивым и неустойчивым. Например, маятник в нижней точке устойчив, а в верхней – неустойчив. Положение тела (системы) устойчиво, если при сдвиге из положения равновесия потенциальная энергия возрастает, т. е. нужно затратить работу, чтобы сдвинуть. При неустойчивом положении, наоборот

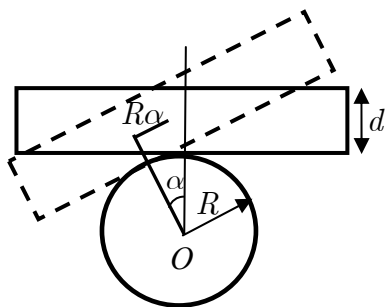


Рис. 82

– потенциальная энергия уменьшается и тело приобретает кинетическую энергию. Пример с маятником удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим более сложный пример: брус, лежащий на круглом закрепленном бревне (рис. 82). В исходном положении центр тяжести бруса будет находиться на высоте $h_0 = R + d/2$ от точки O . После наклона бруса на угол α центр бруса иметь вертикальную координату

$$h = \left(R + \frac{d}{2} \right) \cos \alpha + R \alpha \sin \alpha \approx \left(R + \frac{d}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + R \alpha^2 \quad (88.14)$$

$$\text{Изменение высоты центра масс } \Delta h = h - h_0 = \left(R - \frac{d}{2} \right) \frac{\alpha^2}{2}. \quad (88.15)$$

$$\text{Брус устойчив при } \Delta h > 0, \text{ т. е. при } d < 2R. \quad (88.16)$$

Веревка вокруг столба

Рассмотрим еще одну статическую задачу, имеющую практическое применение. Пусть веревка намотана на столб и ее тянут за концы с силами T_1 и T_2 . При каком отношении сил будет проскальзывание, если угол соприкосновения со столбом $\Delta\alpha$, коэффициент трения k ?

Рассмотрим две точки веревки, отстоящие на угол $d\alpha$. Сила давления веревки на столб на участке $d\alpha$ равна $dN = Td\alpha$, где T – натяжение веревки. Здесь мы пренебрегли разностью натяжений веревки в точках α и $\alpha + d\alpha$, поскольку это дает добавку второго порядка в разность сил, пропорциональную $dTd\alpha$. При проскальзывании сила трения на данном участке равна $dT = kdN = kTd\alpha$, откуда получаем формулу Эйлера

$$\frac{dT}{T} = kd\alpha \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 e^{k\Delta\alpha}. \quad (88.17)$$

Например, если сделать 5 оборотов веревки вокруг бревна, то для $k = 0,5$ получим $T_2/T_1 = \exp(0,5 \cdot 2\pi \cdot 5) \approx 6,6 \cdot 10^6$. Таким образом можно удержать рукой у причала океанский корабль.

ГЛАВА X

ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Гидродинамика рассматривается подробно в курсе физики сплошных сред, однако было бы несправедливо в курсе механики рассматривать только твердые тела и не упомянуть жидкие.

§ 89. Гидростатика

В жидкости, налитой в сосуд, на глубине h имеется давление

$$P = P_{\text{атм}} + \rho gh. \quad (89.1)$$

На погруженное в жидкость тело действует сила, равная весу вытесненной жидкости (закон Архимеда). Он следует из того, что такой же объем, заполненный такой же жидкостью, будет находиться в равновесии. Поскольку сумма сил, действующая на боковую поверхность объема, не зависит от того, что внутри, то отсюда следует вывод, что выталкивающая сила равна весу жидкости в этом объеме, направлена вверх и приложена к центру масс вытесненной жидкости

$$\mathbf{F}_в = -\rho_{жс} V \mathbf{g}. \quad (89.2)$$

Однако если подводная лодка ляжет на дно, то закон Архимеда не работает, ее прижимает ко дну сила, равная весу столба воды, находящейся над лодкой.

§ 90. Стационарные течения, закон Бернулли

Пусть поток жидкости обтекает неподвижное тело. Скорости жидкости в разных точках различные, но в каждой конкретной точке постоянны во времени. Такие течения называются стационарными. Для них можно нарисовать неподвижные линии тока (траектории элементов жидкости), а из линий тока образовать стенки трубки тока (рис. 83).



Рис. 83

Пусть сечение трубки на входе S_1 и скорость жидкости V_1 , а на выходе — S_2 и V_2 . Количество жидкости в трубке не меняется, отсюда следует условие непрерывности (сколько втекает, столько вытекает):

$$S_1 V_1 = S_2 V_2. \quad (90.1)$$

Закон Бернулли

Рассмотрим течение идеальной жидкости, без вязкости, не испытывающей трения о стенки трубки. Нетрудно заметить, что кинетические энергии одинаковой по объему порции жидкости на входе и выходе различаются, это происходит за счет давлений, совершающих работу над жидкостью. Давление на боковую поверхность трубок тока работы не совершает, так как действует перпендикулярно направлению движения жидкости. Работа сил, действующих на левый торец трубки (сила, умноженная на перемещение) $A_1 = P_1 S_1 V_1 t$, работа сил справа $A_2 = -P_2 S_2 V_2 t$ (знаки минус, поскольку сила и перемещение имеют противоположные направления). Работа равна разности кинетической энергии вышедшей и вошедшей одинаковых порций жидкости

$$\frac{m V_2^2}{2} - \frac{m V_1^2}{2} = A_1 + A_2, \quad m = \rho V_1 S_1 \Delta t = \rho V_2 S_2 \Delta t, \quad (90.2)$$

откуда

$$\frac{\rho V_2 S_2 \Delta t V_2^2}{2} - \frac{\rho V_1 S_1 \Delta t V_1^2}{2} = P_1 S_1 V_1 \Delta t - P_2 S_2 V_2 \Delta t. \quad (90.3)$$

Сокращая на $V_1 S_1 \Delta t = V_2 S_2 \Delta t$, получаем

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}. \quad (90.4)$$

Если вход и выход находятся на разной высоте, нужно учесть еще изменение потенциальной энергии рассматриваемой порции жидкости, в результате получим *закон Бернулли*

$$P + \frac{\rho V^2}{2} + \rho gh = \text{const}. \quad (90.5)$$

Для горизонтальной трубы с переменным сечением давление в узких местах трубы будет меньше, чем в широких.

Пусть жидкость обтекает покоящийся шар. Линии тока будут огибать шар. Однако одна линия, идущая к центру шара, упрется перпендикулярно в шар и оборвется, т. е. скорость станет равной нулю. Отличие давления в этой точке от давления вдалеке от шара находится из

уравнения Бернулли и равно $\Delta P = \frac{\rho V^2}{2}$.

Формула Торричелли

Рассмотрим вытекание воды из широкого бака через дырку, расположенную на высоте h ниже уровня воды в баке. Трубка тока воды, вытекающей из бака, начинается с поверхности воды, где она равна по сечению площади бака и имеет близкую к нулю скорость. Из уравнения Бернулли следует (P_A – атмосферное давление)

$$P_A + \rho gh = P_A + \frac{\rho V^2}{2}, \quad (90.6)$$

откуда находим скорость истечения воды

$$V = \sqrt{2gh}. \quad (90.7)$$

Это формула Торричелли (1608–1647).

Из этой формулы следует, что скорость не зависит от размера отверстия. Однако все знают, что если сжать конец шланга с водой, то струя будет вытекать с существенно бóльшей

скоростью. Это связано с тем, что скорость течения в шланге определяется совсем другим механизмом – вязкостью воды (это явление будет рассматриваться в курсе молекулярной физики). В то время как при маленьком отверстии вода в шланге движется медленно и вязкостью (фактически трением о стенки шланга) можно пренебречь. В этом случае скорость истечения находится так же, как было рассмотрено выше, только ρgh в (90.6) нужно заменить на давление в водопроводе P . В результате получаем скорость истечения воды из маленького отверстия в шланге

$$V = \sqrt{2P/\rho}. \quad (90.8)$$

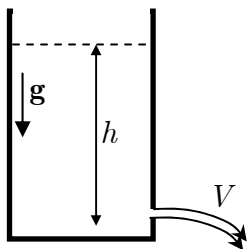


Рис. 84

Гидравлический удар

Пусть по трубе течет вода со скоростью V . Если кран быстро перекрыть, то вода начнет останавливаться, кинетическая энергия будет переходить в энергию сжатия и по воде со скоростью звука (c) побегит волна сжатия. Сила, действующая на торец трубы, равна импульсу воды, останавливающейся за единицу времени. Отсюда находим давление

$$P = \rho Vc. \quad (90.9)$$

Скорость звука в воде 1435 м/с. При скорости воды 1 м/с в трубах возникнет давление $P = 1.4 \cdot 10^7 \text{ дин/см}^2 = 1.4 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2 \approx 14 \text{ атм}$. Это явление называется *гидроударом*. Чтобы трубы не разорвало, краны нужно закрывать медленно (за времена большие, чем время распространения ударной волны вдоль трубы до широкой магистральной трубы). Если попытаться быстро заткнуть кран с текущей водой пальцем, то ввиду гидроудара из-под пальца вначале брызнет струйка воды (даже при низком давлении в водопроводе), затем сдерживать напор воды станет намного легче.

Кумулятивный снаряд

В конце Второй мировой войны Германия стала использовать фаустпатроны, которые пробивали броню толщиной 20 см. Они состояли из металлического конуса, окруженного взрывчаткой (рис. 85). При

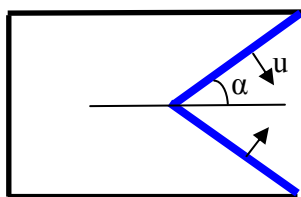


Рис. 85

взрыве образуется струя металла, летящая вперед с огромной скоростью. Для объяснения механизма возникновения струи достаточно закона Бернулли.

При взрыве снаряда возникает очень большое давление и металлический конус ведет себя как жидкость. Пусть скорость металла u . Перейдем в систему отсчета, движущуюся направо со скоростью $V = u/\sin \alpha$. В этой системе отсчета металл течет вдоль стенки конуса со скоростью

$V_0 = u/\text{tg } \alpha$ и затем растекается вдоль оси направо и налево с той же скоростью V_0 (следует из формулы (90.5) при $P = \text{const}$).

Найдем, какая доля струи потечет направо. Пусть струя с сечением S падает на плоскость под углом α . Из закона сохранения импульса

$$\begin{aligned} V_0 S_L - V_0 S_R &= S V_0 \cos \alpha, \\ S_L + S_R &= S, \end{aligned} \quad (90.10)$$

откуда доля струи, летящей направо,

$$S_R = S(1 - \cos \alpha) / 2. \quad (90.11)$$

Возвращаясь обратно в лабораторную систему отсчета, находим скорость струи, летящей направо и налево,

$$\begin{aligned} V_R &= V_0 + V = u(1 + \cos \alpha) / \sin \alpha, \\ V_L &= -V_0 + V = u(1 - \cos \alpha) / \sin \alpha. \end{aligned} \quad (90.12)$$

Оказывается, что обе струи летят в одну сторону, только первая с большой скоростью, а вторая с много меньшей скоростью (в $4/\alpha^2$ раз при малом α). Пусть $u = 2$ км/с, $\alpha = 20^\circ$, тогда $V_R = 11,4$ км/с, это больше, чем вторая космическая скорость. Хотя масса этой струи мала, но она уносит большую часть кинетической энергии металлического конуса. Такая концентрация энергии называется *кумуляцией*. Максимальное давление возникает в точке разделения потоков и равно $P = \rho V_0^2 / 2$, примерно $1,5 \cdot 10^6$ атм. в нашем случае (в центре Земли 3,7 млн атм.). Казалось бы, что при уменьшении угла конуса можно еще в несколько раз увеличить скорость струи, однако здесь возникнет ограничение, связанное с объемной сжимаемостью металла.

Длина струи равна длине образующей конуса. При столкновении струи с броней последняя ведет себя тоже как жидкость и точка соприкосновения движется вглубь брони со скоростью $V_R/2$, получается кумулятивное течение как в снаряде, но в обратную сторону, а глубина проникновения в броню оказывается равной длине струи.

ГЛАВА XI

ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

§ 91. Неинерциальные системы отсчета. Неинерциальные силы

До сих пор исследовалось движение тел относительно инерциальных систем отсчета, в которых справедливы Законы Ньютона.

Рассмотрим теперь движение тела (материальной точки) относительно системы отсчета S' , которая совершает ускоренное поступательное движение относительно инерциальной системы S . Пусть \mathbf{R}_0 – радиус вектор начала отсчета системы S' , а \mathbf{r} – тела в этой системе. В нерелятивистском случае справедливо преобразование Галилея

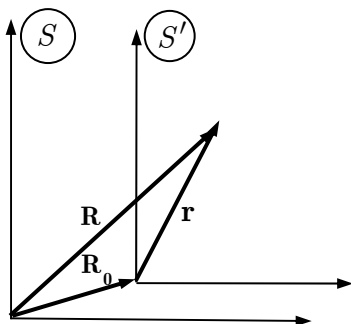


Рис. 86

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, \quad t = t'. \quad (91.1)$$

Закон движения в инерциальной системе

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (91.2)$$

отсюда

$$m \mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{R}_0}{dt^2} = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_0. \quad (91.3)$$

Следовательно, если движение рассматривается относительно системы отсчета, ускоренно движущейся относительно инерциальной системы отсчета, то во втором законе Ньютона, кроме реальной силы, появляется дополнительное слагаемое $-m\mathbf{a}_0$. Это не реальная, а фиктивная сила, имеющая чисто кинематическое происхождение, пропорциональная массе тел (как и гравитационная сила). Такие силы называют *силами инерции*. Они появляются в неинерциальных системах отсчета.

Казалось бы, все можно рассматривать в инерциальных системах и тогда не требуется вводить силы инерции. Это так, но иногда удобно

связывать систему координат с ускоренно движущимися телами, такими как вращающаяся Земля или ускоренно движущаяся тележка.

Рассмотрим тележку, движущуюся с ускорением a_0 , на которой стоит подставка с висящим на нитке грузиком (рис. 87). На какой угол отклонится грузик?

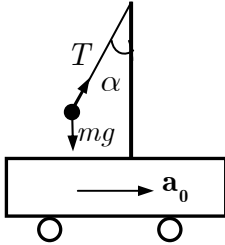


Рис. 87

В инерциальной системе задача решается так:

$$\begin{aligned} T \cos \alpha &= mg, \\ ma_0 &= T \sin \alpha, \end{aligned} \quad (91.4)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g}. \quad (91.5)$$

Из условия равновесия в неинерциальной системе следует (рис. 88)

$$\mathbf{T} = -m\mathbf{g} + m\mathbf{a}_0, \quad (91.6)$$

или $T \sin \alpha = ma_0$ и $T \cos \alpha = mg$, (91.7)

откуда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g}$. (91.8)

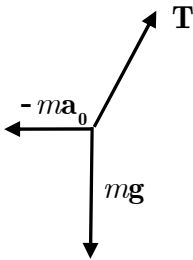


Рис. 88

Найдем частоту колебаний. Эта задача решается проще в неинерциальной системе. В системе тележки эффективное ускорение

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0, \quad (91.9)$$

отсюда частота колебаний

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}}, \quad \text{где } g' = \sqrt{g^2 + a_0^2} \quad (91.10)$$

§ 92. Силы инерции во вращающейся системе отсчета

Центробежная сила

Для того чтобы тело было неподвижно относительно диска, вращающегося с угловой скоростью ω , к нему нужно приложить силу, направленную к центру,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\mathbf{e}_r \frac{mv^2}{r} = -m\omega^2 \mathbf{r}. \quad (92.1)$$

Чтобы объяснить неподвижность тела в системе вращающегося диска нужно объявить, что кроме этой реальной силы (например, натяжение веревки, связывающей тело с осью) в этой системе действует сила инерции

$$\mathbf{F}_i = m\omega^2 \mathbf{r}, \quad (92.2)$$

направленная от центра. Ее называют *центробежной силой*. Эта сила уравнивает натяжение веревки, и тело остается неподвижным относительно вращающегося диска. Такой силы нет в инерциальной лабораторной системе, ее вводят только при рассмотрении движения во вращающейся системе отсчета.

Кориолисова сила

Рассмотрим движение тела со скоростью v относительно обода вращающегося диска. Для такого движения в неподвижной системе координат должна действовать центростремительная сила

$$\mathbf{F}_ц = -\mathbf{e}_r m \frac{(\omega r + v)^2}{r}. \quad (92.3)$$

Наблюдатель, сидящий на диске, видит, что веревка натянута с таким натяжением, значит, в этой системе отсчета натяжение веревки уравновешено силами инерции

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{F}_ц = \mathbf{e}_r \left(m\omega^2 r + 2m\omega v + \frac{mv^2}{r} \right). \quad (92.4)$$

Первый член в (92.4) – это уже знакомая центробежная сила, третий член – это обычная центростремительная сила, необходимая для движения по окружности, второй член, $F = 2m\omega v$, зависит как от угловой скорости вращения диска, так и от скорости движения тела относительно диска. Эта сила называется *Кориолисовой силой* (Г. Кориолис, 1792–1843).

Рассмотрим движение тела вдоль спицы вращающегося колеса. Момент импульса тела $L = m\omega r^2$ увеличивается при движении от центра. Изменение момента импульса за единицу времени равно моменту сил

$$\frac{dL}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt} = Fr, \quad (92.5)$$

откуда

$$F = 2m\omega v. \quad (92.6)$$

Эта сила, с которой спица действует на тело, сопротивляясь силе Кориолиса. Поскольку сила Кориолиса перпендикулярна угловой скорости и скорости тела, то в векторном виде ее можно записать как

$$\mathbf{F}_{\text{Кор}} = 2m [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] . \quad (92.7)$$

Далее мы получим это выражение строго математически.

Рассмотрим снова рис. 86. Система S является неподвижной, а система S' движется относительно ее как поступательно, так и вращательно. Скорость материальной точки относительно неподвижной системы

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] + \mathbf{v}_{\text{отн}} , \quad (92.8)$$

где \mathbf{v}_0 – поступательная скорость начала отсчета системы S' , $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ – скорость, связанная с вращением системы S' (как для твердого тела), $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ – скорость точки относительно начала отсчета системы S' . Действительно

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z , \quad (92.9)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} . \quad (92.10)$$

Учитывая, что $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}]$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}]$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}]$, и вводя обозначение $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z}$, из (92.10) получаем (92.8).

Ускорение точки относительно неподвижной системы

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_0 + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}} . \quad (92.11)$$

Учитывая, что

$$\dot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] + \mathbf{v}_{\text{отн}} \quad (92.12)$$

и аналогично

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}] + \mathbf{a}_{\text{отн}} , \quad (92.13)$$

находим

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \underbrace{\mathbf{a}_0 + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]}_{\text{переносное}} + \overbrace{[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]}^{\text{центробежное}} + \underbrace{2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}]}_{\text{кориолисово}} + \underbrace{\mathbf{a}_{\text{отн}}}_{\text{относительное}} . \quad (92.14)$$

Рассмотрим смысл каждого члена.

- $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{F}/m$ – это ускорение, вызванное реальной силой;
- $\mathbf{a}_0 + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$ – *переносное* ускорение, связанное с движением системы S' ;
- $2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}]$ – ускорение Кориолиса.
- Член $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$ в переносном ускорении – это центробежное ускорение. Полагая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ (относительно $\boldsymbol{\omega}$), находим

$$[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{\perp}]] = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{\perp}) - \mathbf{r}_{\perp}\omega^2 = -\mathbf{r}_{\perp}\omega^2. \quad (92.15)$$

Перегруппировав члены в (92.14) с учетом (92.15), получим уравнение относительного движения

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{пер}} + \mathbf{F}_{\text{Кор}}, \quad (92.16)$$

где

$$\mathbf{F}_{\text{пер}} = -m\mathbf{a}_0 + m[\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\omega}}] + m\omega^2\mathbf{r}_{\perp}, \quad (92.17)$$

$$\mathbf{F}_{\text{Кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]. \quad (92.18)$$

Примеры силы Кориолиса

1. Маятник Фуко – это обычный тяжелый маятник на длинном подвесе. Впервые публичная демонстрация была осуществлена Фуко в 1851 г. в Парижском Пантеоне. Плоскость колебаний такого маятника поворачивается относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Проще всего это явление можно понять, рассматривая такой маятник на вращающемся диске. Плоскость маятника сохраняет ориентацию в пространстве, а диск под ним вращается со своей частотой.

При рассмотрении колебаний в неинерциальной системе, связанной с Землей, на груз действует сила Кориолиса

$$\mathbf{F} = 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\perp}], \quad \omega_{\perp} = \omega \sin \theta, \quad (92.19)$$

которая стремится отклонить маятник вправо (в северном полушарии) от направления движения. В результате плоскость колебаний постепенно поворачивается. На скорость поворота влияет только составляющая угловой скорости, перпендикулярная поверхности Земли. Составляющая угловой скорости, параллельная поверхности Земли, не

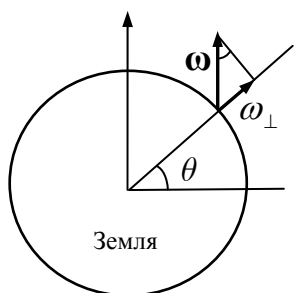


Рис. 89

влияет, так как создает силу вдоль троса. Период вращения плоскости колебаний

$$\omega_{\perp} = \omega \sin \theta, \quad T = \frac{\text{сутки}}{\sin \theta}. \quad (92.20)$$

На рис. 90 показаны фигуры, описываемые нижним концом маятника, если его оттянуть, опустить (слева) и толкнуть из центра (справа).

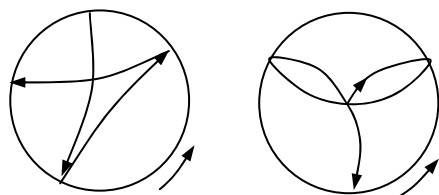


Рис. 90

2. Подмывание берегов.

В северном полушарии сила Кориолиса направлена вправо от направления движения, поэтому правые берега рек в Северном полушарии более крутые – их подмывает вода. В Южном полушарии все происходит наоборот.

3. Колеса поезда.

Правые колеса (в северном полушарии) поезда сильнее прижимаются к рельсу сбоку и быстрее снашивается.

4. Ураганы.

Ураганы закручиваются силой Кориолиса. Наиболее сильные на сороковых «ревущих» широтах. На экваторе не бывает.

§ 93. Приливы

У берегов морей и океанов дважды в сутки наблюдается подъем уровня воды до некоего максимального значения и столько же раз опускание до минимального уровня. Они являются результатом изменения положений Луны и Солнца относительно Земли совместно с эффектами вращения Земли и особенностями рельефа. В некоторых местах подъем достигает 10–15 м, но в среднем перепад составляет порядка одного метра. Аномальные подъемы связаны с увеличением высоты волны при набегании ее на берег и геометрией береговой линии.

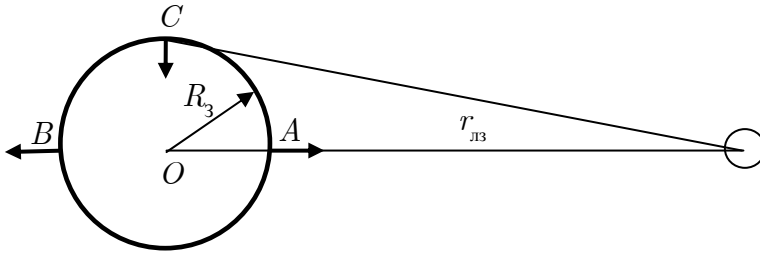


Рис. 91

Рассмотрим механизм возникновения приливной волны в идеализированном случае, когда имеется сплошной океан. Приливные силы зависят не от величины гравитационного поля (Луны, Солнца), а от степени его неоднородности (градиента). Ниже будет получено соотношение приливных эффектов от Луны и Солнца. Пусть для определенности Луна притягивает Землю (рис. 91). Рассмотрим ускорения, действующие в точках A , B и C , вычитая при этом ускорение центра масс Земли.

Поскольку точка A ближе к Луне, то в ней дополнительная гравитационная сила направлена к Луне, в то время как в противоположной точке B сила такая же, но направлена от Луны. В точке C имеется составляющая перпендикулярная линии, соединяющей Луну и Землю. Приливы в точках A и B будут происходить одновременно и одинаковой величины.

Ускорение в точке, находящейся между O и A , на расстоянии x от центра Земли за вычетом ускорения центра Земли равно

$$a(x) = GM_{\text{Л}} \left(\frac{1}{(r_{\text{ЛЗ}} - x)^2} - \frac{1}{r_{\text{ЛЗ}}^2} \right) \approx \frac{GM_{\text{Л}}}{r_{\text{ЛЗ}}^3} 2x. \quad (93.1)$$

Потенциал в точке A относительно O , связанный с этим градиентным полем,

$$\Delta\varphi_A = -\int_0^R a(x)dx = -\frac{GM_{\text{Л}}}{r_{\text{ЛЗ}}^3} R^2. \quad (93.2)$$

Потенциал между точками C и O может быть найден непосредственно как разность потенциалов в этих точках, поскольку в этом направлении центр масс Земли не имеет ускорения.

$$\Delta\varphi_C = -\frac{GM_{\text{Л}}}{\sqrt{r_{\text{ЛЗ}}^2 + R_3^2}} + \frac{GM_{\text{Л}}}{r_{\text{ЛЗ}}} \approx \frac{GM_{\text{Л}}}{2r_{\text{ЛЗ}}^3} R_3^2. \quad (93.3)$$

Отсюда эффективная разность потенциалов между A и C (эффективная потому, что вычтено поле, действующее на ц. м. Земли) равна

$$\Delta\varphi_{AC} \approx \frac{3GM_{\text{Л}}}{2r_{\text{ЛЗ}}^3} R_3^2. \quad (93.4)$$

Эта разность потенциалов равна gh , где h – разность уровней подъема воды в точках A относительно точки C , g – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Учитывая, что $g = \frac{GM_3}{R_3^2}$, находим перепад подъемов воды при приливах, связанный с Луной,

$$h_{\text{Л}} = \frac{3M_{\text{Л}}R_3^4}{2r_{\text{ЛЗ}}^3M_3} \approx 0,55 \text{ м}. \quad (93.5)$$

Ответ для приливов за счет Солнца находится заменой $M_{\text{Л}} \rightarrow M_{\text{С}}$, $r_{\text{ЛЗ}} \rightarrow r_{\text{СЗ}}$:

$$h_{\text{С}} = \frac{3M_{\text{С}}R_3^4}{2r_{\text{СЗ}}^3M_3} \approx 0,24 \text{ м}. \quad (93.6)$$

Выше была рассмотрена *статическая* теория приливов, в которой горбы на воде появляются на линии Луна–Земля (средневзвешенным направлением между Луной–Солнцем и Землей). Более точная динамическая теория учитывает движение приливной волны вокруг Земли.

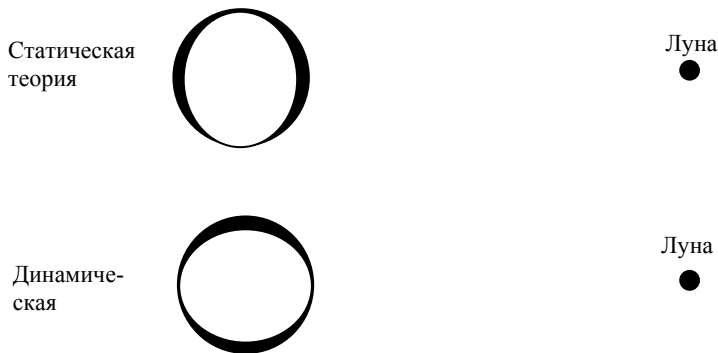


Рис. 92

Не вдаваясь в детали, приливные силы можно считать вынуждающей силой, а частоту обхода волны вокруг Земли – собственной частотой осциллятора. Период обхода волны вокруг Земли оказывается больше

периода вынуждающей силы. В этом случае, в соответствие с теорией вынужденных колебаний осциллятора с малым затуханием (§ 58), амплитуда отстает от силы на π , т. е. на половину периода. Это приводит к тому, что горбы на воде будут находиться прямо противоположно тому, что предсказывает статическая теория (минимумы вместо максимумов, и наоборот), рис 92.

Реально наличие материков меняет эту картину до неузнаваемости (рис. 93). Точно только то, что приливы происходят дважды в сутки, но высота зависит от места и может отличаться от наших расчетов в несколько раз в большую или меньшую сторону.

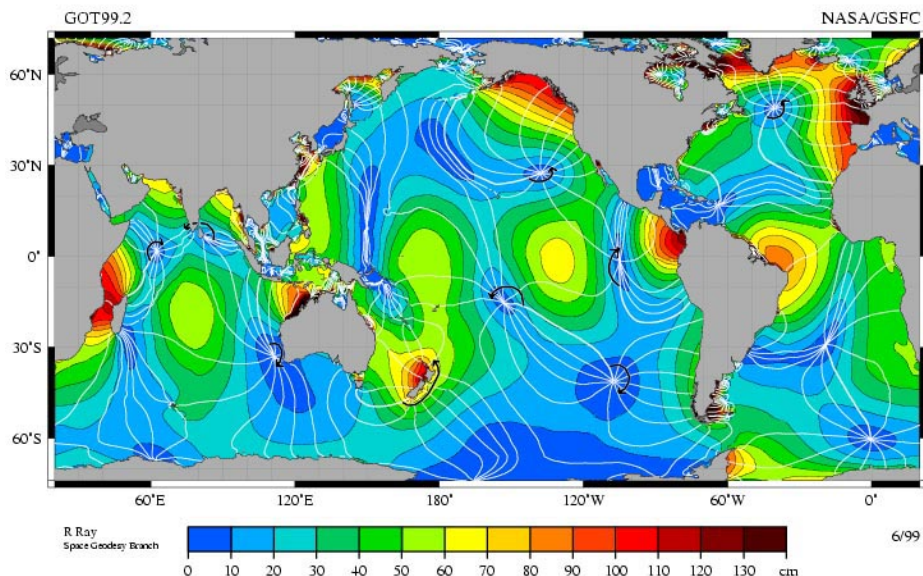


Рис. 93

ГЛАВА XII

ГРАВИТАЦИЯ, ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 94. Введение

Ранее мы рассмотрели специальную теорию относительности (СТО), которая описывает движение тел относительно инерциальных систем отсчета. При этом предполагалось, что пространство евклидово и сигналы связи, например свет, распространяются по прямым линиям. При известном законе взаимодействия СТО, в принципе, позволяет рассчитать все движения тел при любых скоростях.

В таком подходе, однако, имеются проблемы при рассмотрении гравитационных взаимодействий. Силы гравитации действуют на все тела без исключения, в том числе и на свет. Траектории фотонов становятся «кривыми», а само пространство – искривленным. Еще одна особенность – гравитационные поля создаются не только самими телами, но и любым видом энергии (в том числе гравитационной). Принцип суперпозиции в достаточно сильных гравитационных полях не выполняется.

Явления, связанные с гравитацией, описывает *общая теория относительности (ОТО)*, созданная А. Эйнштейном (1916). Принцип относительности был распространен на системы, находящиеся в гравитационных полях. Ключом к решению задачи стал *принцип эквивалентности*. Гравитационные поля по своему действию очень похожи на силы, возникающие в неинерциальных (ускоренных) системах отсчета. В падающем лифте сила инерции и гравитационная сила компенсируются. Законы физики в такой системе будут совпадать с законами в инерциальных системах. Сидя в лифте нельзя сказать, какая часть силы вызвана гравитацией, а какая ускорением лифта. Разница заключается только в том, что силы инерции можно полностью исключить выбором системы отсчета, а истинно гравитационные силы можно скомпенсировать силами инерции только в точке. Так, в падающем лифте пробное тело, помещенное в центре лифта, будет иметь нулевое ускорение относительно лифта, в верхней точке лифта сила тяжести немного меньше, поэтому тело будет ускоряться вверх, а в нижней точке – вниз.

Еще один принципиально важный момент. Пусть наблюдатель на вращающемся диске разложил вдоль радиуса и обода короткие одинаковые линейки. Какое он получит отношение длины периметра к ра-

диусу? Ответ на этот вопрос проще всего найти, взглянув на эту картину из неподвижной инерциальной системы отсчета. Линейка, лежащая на диске вдоль радиуса, будет иметь одинаковую длину в системе диска и в неподвижной системе отсчета, так как поперечные размеры при движении не изменяются. Однако линейка, лежащая вдоль обода на вращающемся диске, будет в неподвижной системе отсчета в

$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}} > 1$ раз короче. Это значит, что вдоль обода, кото-

рый в неподвижной системе отсчета имеет длину $2\pi R$, можно уложить движущихся линеек в γ раз больше, чем в случае покоящегося диска.

Число линеек, лежащее на диске, не зависит от системы отсчета, следовательно наблюдатель на диске получит отношение длины обода к радиусу, равное $2\pi\gamma$. Это означает, что геометрия на вращающемся диске отличается от евклидовой! Инерциальные силы искривляют пространство. К таким же эффектам приводит и истинная гравитация. *Кривизна пространства* является неотъемлемой составляющей общей теории относительности.

Примером искривленного двумерного пространства является поверхность сферы. Говоря о ее кривизне, мы обычно воображаем сферу, помещенную в трехмерное пространство. Реально наблюдатель, живущий в n -мерном мире, не может выбраться в $n+1$ -мерное пространство, чтобы увидеть кривизну своего пространства. Однако он может определить геометрию своего пространства, измерив сумму углов в треугольнике. Для окружности на сфере отношение периметра к радиусу будет меньше 2π . На вращающемся диске это отношение было больше 2π . Если вместо вращающегося диска, на котором центробежные силы направлены от центра, рассмотреть пространство вокруг массивного тела, то там отношение периметра к радиусу будет меньше 2π , как на выпуклой сфере.

Математический аппарат общей теории относительности довольно сложен. ОТО пользуются в основном астрономы и космологи. Ее использование необходимо при рассмотрении эффектов вблизи компактных объектов, таких как нейтронные звезды и черные дыры, а также для описания динамики расширяющейся Вселенной. Имеется ряд эффектов, предсказанных общей теорией относительности и проверенных экспериментально. Пока не найдено ни одного эффекта, противоречащего ОТО.

Хотя закон Кулона для электрических взаимодействий совпадает с законом тяготения Ньютона, хорошо описывающего гравитационные взаимодействия при слабых полях и небольших скоростях (в обоих случаях $F \propto 1/r^2$), эти два типа взаимодействий принципиально различные. Они отличаются не только тем, что у них различные константы взаимодействия. Их переносчики взаимодействия (фотон и гравитон) имеют разные спины (внутренние моменты импульсов), и сила взаимодействия по-разному зависит от скорости частиц. Это непростые вопросы, и здесь мы их обсуждать не будем, рассмотрим только несколько явлений, для объяснения которых достаточно принципа эквивалентности.

§ 95. Инертная и гравитационная масса, принцип эквивалентности

Масса, входящая во второй закон Ньютона, характеризует инертность тела и называется *инертной массой*

$$m_i = F/a. \quad (95.1)$$

В законе всемирного тяготения сила притяжения пропорциональна произведению *гравитационных масс*:

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{m_g(1)m_g(2)}{r^3} \mathbf{r}. \quad (95.2)$$

Оказывается, что с огромной точностью инертные массы пропорциональны гравитационным. Именно поэтому имеет место *принцип эквивалентности*, о котором мы говорили в предыдущем параграфе. Как это можно проверить? Рассмотрим падение двух тел 1 и 2 в поле тяжести Земли. Ускорения тел находятся из соотношений

$$m_i(1)a(1) = -GMm_g(1)/r^2, \quad (95.3)$$

$$m_i(2)a(2) = -GMm_g(2)/r^2, \quad (95.4)$$

где m_i , m_g – инертная и гравитационная масса пробных тел, M – гравитационная масса Земли. Отсюда находим

$$\frac{m_i(1)}{m_i(2)} = \frac{m_g(1)a(2)}{m_g(2)a(1)}. \quad (95.5)$$

Галилей первым заметил, что все тела в пустоте падают с одинаковым ускорением: $a(2) = a(1)$ и, следовательно,

$$\frac{m_i(1)}{m_g(1)} = \frac{m_i(2)}{m_g(2)}. \quad (95.6)$$

Если это отношение одно и то же для всех тел, то путем выбора значения гравитационной постоянной его можно сделать равным единице, т. е. считать гравитационную массу равной инертной.

В отличие от Галилея Ньютон использовал для проверки этого утверждения маятник, период которого

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \frac{m_i}{m_g} \right)^{1/2}. \quad (95.7)$$

Из этого опыта следует равенство m_i и m_g для различных тел с точностью 10^{-5} .

Бóльшая точность достигается в статических экспериментах. Если на тело действует две силы, одна пропорциональная m_i , а другая — m_g , то направление результирующей силы зависит от m_i/m_g . Такая установка создана самой природой. Земля вращается вокруг оси и является неинерциальной системой отсчета. На тело, покоящееся относительно Земли, действуют две силы: гравитационное притяжение, пропорциональное m_g , и центробежная сила, пропорциональная m_i .

В 1890–1920 гг. Этвеш провел основанные на этом принципе эксперименты, используя крутильные весы с подвешенными на коромысле гириями из различных материалов, но с одинаковыми гравитационными массами (коромысло параллельно Земле), рис. 94. Если инертные массы этих гирь, сделанных из разных веществ, были бы не равны, то за счет центробежных сил коромысло получило бы крутильный момент. Действительно, коромысло уравновешено в вертикальной плоскости при

$$m_{1g}r_1 = m_{2g}r_2. \quad (95.8)$$

Вращающий момент в горизонтальной плоскости

$$\tau \propto m_{i1}r_1 - m_{i2}r_2 \quad (95.9)$$

будет равен нулю при $m_{1g}/m_{1i} = m_{2g}/m_{2i}$. Отсутствие такого момента показало, что отношение инертной и гравитационной массы одно и то же для тел, сделанных из различных материалов, с точностью 10^{-8} . Позже точность была доведена до 10^{-12} .

Принцип эквивалентности проверялся на различных расстояниях от

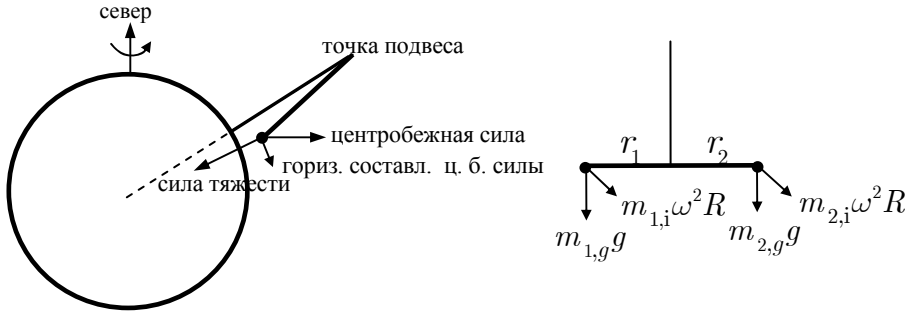


Рис. 94

тел, создающих притяжение. Это важно, поскольку не исключено, что гравитационное поле состоит из нескольких полей с разной длиной взаимодействия. Если переносчик взаимодействия имеет массу m , то из квантовой механики следует, что сила взаимодействия будет иметь следующий вид:

$$F \propto \frac{\exp(-r/\lambda)}{r^2}, \quad \lambda \approx \frac{\hbar}{mc}. \quad (95.10)$$

Может оказаться, что

$$F \propto \frac{1}{r^2} \left(1 + \alpha \exp(-r/\lambda) \right), \quad (95.11)$$

при этом для первого члена выполняется принцип эквивалентности, а для второго – нет. Например, вторая сила может действовать только на барионы и не действовать на электроны. Тогда если $R_3 \gg \lambda$, то в эксперименте Этвеша принцип эквивалентности будет выполняться, а при расстояниях меньше λ – нет. Сейчас принцип эквивалентности проверен для расстояний от долей миллиметра до размеров Солнечной системы.

Интересно, как проводятся измерения для различных расстояний. Например, для расстояний в несколько километров в качестве источника поля берут гору. Крутильные весы устанавливают на стол, вращающийся с периодом в несколько часов, и измеряют зависимость угла поворота

коромысла весов от времени. Затем в полученной функции $\varphi(t)$ ищут гармонику, соответствующую периоду обращения стола.

Из подобных экспериментов следует, что энергия связи ядер и энергия гравитационного поля также участвуют в гравитационном взаимодействии с той же константой взаимодействия. Все это доказывает принцип эквивалентности.

§ 96. Падение фотона в гравитационном поле

Фотон имеет нулевую массу. Какая же на него действует гравитационная сила? Попробуем в этом разобраться. Пусть фотон падает вниз с высоты L . Для выяснения характера движения воспользуемся лифтом, падающим вниз с ускорением g . В этой системе отсчета сумма гравитационных и инерциальных сил равна нулю, фотон является свободным, а его энергия постоянна во времени и равна E_0 . В первом приближении фотон достигнет пола за время $t \approx L/c$. За это время лифт наберет скорость $v \approx gt \approx gL/c$. Тогда энергия фотона в неподвижной лабораторной системе

$$E = \gamma(E_0 + E_0 v/c) \approx E_0(1 + v/c), \quad (96.1)$$

т. е. изменение частоты света

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{gL}{c^2}. \quad (96.2)$$

Отсюда следует, что фотон как бы имеет «эффективную» гравитационную массу $m = E_0/c^2 = h\omega_0/c^2$ и в поле получает энергию mgL .

Такой эксперимент был поставлен в 1960 г. Паундом и Ребка в Стэнфорде. Фотоны падали вниз с башни высотой около 20 м. Изменение частоты совпало с расчетной в пределах ошибок (10 %, в дальнейшем точность была доведена до 1 %). Относительное изменение частоты составило всего $\sim 2 \cdot 10^{-15}$. Такой малый эффект удалось измерить благодаря открытому в 1958 г. эффекту Мессбауэра (при испускании фотона ядром импульс отдачи передается при некоторых условиях не атомному ядру, испустившему фотон, а всему кристаллу, так что энергия фотона при излучении практически не тратится на отдачу).

Формулу (96.2) можно записать в виде

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right), \quad (96.3)$$

где ω_0 – частота света, испускаемого источником, находящимся в гравитационном потенциале $\Delta\varphi$ (относительно наблюдателя), ω – частота, регистрируемая наблюдателем. Частота света на большом расстоянии от звезды, испустившей фотоны,

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{GM_3}{R_3 c^2} \right). \quad (96.4)$$

§ 97. Замедление времени в гравитационном поле

Пусть одни часы находятся при гравитационном потенциале φ , а другие – при нулевом потенциале. Каждую секунду первые часы испускают световые вспышки. Частота сигналов, принимаемых в районе вторых часов, дается формулой (96.3). Количество зарегистрированных сигналов (тиков часов) – это и есть прошедшее время. Отношение показаний часов (t), находящихся в гравитационном потенциале φ , ко времени (t_0), прошедшему по часам при нулевом потенциале, равно

$$\frac{t}{t_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2}. \quad (97.1)$$

Вблизи тел потенциал φ ниже, чем на бесконечности, поэтому часы на поверхности звезды будут идти медленнее. Для Солнца эффект составляет $2 \cdot 10^{-6}$, его измерили по сдвигу спектров испускания атомов.

Более точно эффект замедления времени в гравитационном потенциале проверен в 1976 г. с помощью атомных часов, установленных на самолете. Самолет летал с малой скоростью на высоте 10 км в течение 15 часов. Гравитационный эффект составил плюс $50 \cdot 10^{-9}$ с, а сокращение времени за счет скорости (в γ раз) меньше: минус $7 \cdot 10^{-9}$ с. Теория была подтверждена с точностью 1.6 %. К настоящему времени эта цифра улучшена до сотых долей процента.

Когда космонавты (астронавты) улетают далеко от Земли, то за счет изменения потенциала их часы начинают идти быстрее:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} = \frac{GM_3}{R_3 c^2}. \quad (97.2)$$

В то же время ход часов замедляется за счет скорости движения

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{(t/\gamma - t)}{t} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - 1 \approx -\frac{V^2}{2c^2}. \quad (97.3)$$

Эти два явления дают нулевой результирующий эффект при

$$V^2 = \frac{2GM_3}{R_3} = 2gR_3, \quad (97.4)$$

т. е. при второй космической скорости, равной 11,2 км/с.

У космонавтов, летающих по орбите вблизи Земли, часы идут медленнее, чем на Земле, а у космонавтов (астронавтов), путешествующих к Луне со скоростями существенно меньше второй космической скорости, часы будут идти быстрее, чем на Земле.

§ 98. Область применимости классических законов движения в гравитационных полях

В общей теории относительности есть два параметра, которые определяют величину эффектов ОТО. Эффекты ОТО малы при

$$\varphi/c^2 \ll 1, \quad V^2/c^2 \ll 1. \quad (98.1)$$

Первый эффект мы рассмотрели выше, второй эффект не обсуждался. Это не просто эффект специальной теории относительности, он зависит также от природы гравитационного взаимодействия. При движении планет $V^2 \approx GM/r \approx \varphi$, т. е. параметры примерно равны. Для отклонения света вблизи звезды гравитационный потенциал мал, но поправка ОТО достигает 100 % за счет большой скорости фотона.

Важнейшую роль ОТО занимает при рассмотрении проблем астрофизики и космологии. ОТО предсказывает существование черных дыр, которые втягивают в себя окружающее вещество, но ничего не выпускают обратно. Такие объекты обнаружены. Их масса варьируется от в диапазоне $3-10^{10}$ масс Солнца. Возможно, что гравитационные взаимодействия играют важную роль в структуре элементарных частиц. Из фундаментальных констант e , h , c , G можно построить размерность массы (масса Планка)

$$M = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ г} \quad (\sim 10^{19} m_{\text{протона}}). \quad (98.2)$$

ГЛАВА XIII

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 99. Введение, волновые свойства частиц

Завершая изучение курса механики и теории относительности, стоит сделать небольшой экскурс в квантовую механику, которая будет изучаться только на третьем курсе университета, но некоторые представления о ней желательно иметь уже сейчас. Это будет не последовательное введение в квантовую механику, а рассмотрение ее на нескольких примерах.

Еще в 19 в. были известны явления, которые не описывались классической физикой – это спектры излучения атомов, спектр излучения нагретого тела. Было непонятно, как устроен атом, почему электрон не падает на ядро, почему у атома размер порядка 10^{-8} см?

В 1900 г. М. Планк для объяснения спектра теплового излучения ввел новую фундаментальную константу \hbar – постоянную Планка. В 1905 г. А. Эйнштейн объяснил явление фотоэффекта, предположив существование квантов света (фотонов) с энергией $\hbar\omega$, что было подтверждено А. Комптоном в экспериментах по рассеянию рентгеновского излучения на электронах. В 1923 г. Луи де Бройль высказал идею, что по аналогии с фотоном любая материальная частица обладает волновыми свойствами:

$$\omega = E/\hbar \text{ и } \lambda = 2\pi\hbar/p, \quad (99.1)$$

где λ – длина волны Де Бройля, положив начало развитию волновой механики. В 1925–1926 гг. В. Гейзенберг и Э. Шредингер сформулировали основы (нерелятивистской) квантовой механики. В 1927 г. американские учёные К. Дэвиссон и Л. Джермер провели эксперимент по рассеянию электронов на кристаллах и показали, что электроны испытывают дифракцию, ведут себя как волны, с длиной волны даваемой формулой Де Бройля.

Что такое электромагнитная волна – это более-менее понятно, ее можно «пощупать». А что такое волны материи Де Бройля $\Psi(x, y, z, t)$? Оказалось, что их можно интерпретировать как вероятность нахождения частицы в данной точке пространства: $p \propto |\Psi|^2$.

Пусть частица совершает одномерное движение между двумя стенками с координатами 0 и a . Поскольку частица не может проникнуть в стенку, то ее волновая функция $\Psi(x)$ на стенках равна нулю, что соответствует стоячим волнам, рассмотренным ранее в § 69. В этом случае между стенками должно укладываться целое число полувольт, т. е.

$$n \frac{\lambda_n}{2} = a. \quad (99.2)$$

С учетом (99.1) получаем возможные значения импульса

$$p_n = \frac{\pi \hbar}{a} n \quad (99.3)$$

и энергии

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}. \quad (99.4)$$

Мы видим, что импульс и энергия принимают дискретные значения. Минимальный импульс $p = \pi \hbar / a$ или $pa = \pi \hbar$. Частица находится в движении даже при нулевой температуре. Чем меньше расстояние между стенками, тем больше импульс. Данное утверждение формулируется как знаменитое соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar / 2, \quad (99.5)$$

где Δp_x и Δx – среднеквадратичные отклонения от среднего импульса и координаты частицы.

Вероятность найти частицу между стенками в точке с координатой x для низшего состояния равна

$$dp = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx. \quad (99.6)$$

Коэффициент выбран так, что $\int p(x) dx = 1$.

§ 100. Размер атома

Пусть электрон находится на расстоянии r от ядра, тогда он должен иметь импульс $p \sim \hbar / r$. Полная энергия электрона

$$E \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}. \quad (100.1)$$

Минимум энергии ($dE/dr = 0$) достигается при радиусе атома

$$r \approx \frac{\hbar^2}{me^2} \sim 10^{-8} \text{ см.} \quad (100.2)$$

Подставляя r в (100.1) находим энергию этого низшего состояния

$$E \approx -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -\alpha^2 \frac{mc^2}{2} \approx -13,6 \text{ эВ,} \quad (100.3)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ – *постоянная тонкой структуры*.

Хотя мы делали оценки, полученная формула совпадает с точным квантово-механическим расчетом. Для того чтобы вырвать электрон из атома, нужно затратить энергию 13,6 эВ. Электрон в атоме находится в потенциальной яме, поэтому, как и в случае с частицей между двумя стенками, его возможные энергии принимают дискретные значения.

§ 101. Время падения вертикально стоящего карандаша

Сколько времени может простоять карандаш (ручка) вертикально на остром кончике в идеальных условиях? Для простоты заменим карандаш шариком массы m на конце невесомого стержня длины l (рис. 95). На первый взгляд, для того чтобы карандаш стоял дольше, его нужно поставить как можно более вертикально, сделать x_0 стремящимся к нулю. Однако, согласно соотношению неопределенности Гейзенберга, шарик будет иметь горизонтальный импульс $p_0 \approx \hbar/x_0$ и при малом начальном смещении быстро упадет за счет большой начальной скорости. По-видимому, есть оптимум. Давайте решим эту задачу, используя ньютоновскую механику, но учитывая квантовую механику при выборе начальных условий.

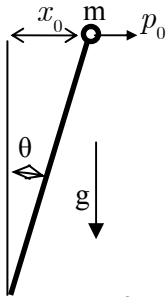


Рис. 95

Уравнение для вращательного движения будет

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \theta \quad \text{или} \quad \ddot{\theta} = \omega^2 \theta, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (101.1)$$

Решение этого уравнения

$$\theta = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}, \quad (101.2)$$

где a и b находятся из начальных условий. Нетрудно получить, что

$$\theta = \left(\frac{x_0}{2l} + \frac{p_0}{2ml\omega} \right) e^{\omega t} + \dots e^{-\omega t}. \quad (101.3)$$

Для нас важен первый член, описывающий экспоненциальное со временем нарастание угла наклона. Второй член быстро затухает со временем, и им можно пренебречь. Минимальное значение выражения в скобках, с учетом соотношения неопределенности $x_0 p_0 \approx \hbar$, равно

$$\theta \approx \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega l^2}} e^{\omega t} \quad (101.4)$$

и время, за которое карандаш упадет (отклонится на угол $\theta \approx 1$),

$$T \approx \frac{\ln \sqrt{\frac{m\omega l^2}{\hbar}}}{\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{m(gl^3)^{1/2}}{\hbar}. \quad (101.5)$$

Для $l = 100$ см, $m = 1000$ г, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ (в ед. СГС), $g \approx 980$ см/с² получаем $T \approx 13$ с. Удивительно, что для таких макроскопических тел решение определяется квантовой механикой.

ГЛАВА XIV

СОВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ВСЕЛЕННОЙ

§ 102. Введение

Наиболее глубокие знания о законах природы и в целом о нашей Вселенной дают исследования в области элементарных частиц и космологии. В последние годы были сделаны потрясающие открытия, разгадка которых станет настоящей революцией в науке. Может, это незаметно со стороны, но именно сейчас микро- и космофизика переживают один из самых захватывающих моментов за многие годы. Ответы на некоторые вопросы, возможно, будут даны уже в ближайшие годы.

На первый взгляд физика элементарных частиц (или физика высоких энергий) и космология изучают совершенно различные масштабы: первая – микромир (уже достигли 10^{-17} см), вторая – эволюцию Вселенной (масштаб порядка 10^{28} см). Однако на самом деле задача у них одна: познание природы окружающего нас мира на самом глубоком уровне. Вопросы можно сформулировать так: как возникла и эволюционировала Вселенная; из чего она состоит, какие есть виды материи; как устроена материя, какие есть виды взаимодействия, каковы законы движения; почему так устроен мир?

Долгое время астрономия была чисто созерцательной наукой, поскольку наблюдения велись только с помощью телескопов в узком оптическом диапазоне. Благодаря развитию техники сейчас есть возможность видеть, что происходит во Вселенной во всех диапазонах электромагнитных волн, а также регистрировать другие виды космических частиц: протоны, электроны, ядра, нейтрино и т. д. В результате открытия следуют одно за другим. При этом исследования ведутся на очень высоком уровне, позволяющем сравнивать полученные результаты с предсказаниями различных моделей и делать соответствующие выводы. Например, исследование движения двойных звезд позволило установить, что изменение периода обращения соответствует излучению гравитационных волн (которые напрямую до сих пор еще не зарегистрированы). Это было получено уже более двадцати лет назад. То, что делается сейчас, вообще потрясает основы наших знаний. Кратко это можно сформулировать так:

- получена информация о первых мгновениях жизни Вселенной;
- появились основания утверждать, что все известные сейчас виды материи составляют всего лишь 4,5 % от полной плотности Вселенной. При этом есть невидимая материя, которой примерно в 6 раз больше, чем обычной материи (т. е. 25 % от полной плотности), а больше всего, 70 %, – мистической темной энергии (возможно «физический» вакуум), которая обладает антигравитационными свойствами;
- Вселенная расширяется, и скорость расширения увеличивается со временем (ожидалось замедление).

Нет сомнений, что точность данных будет со временем улучшаться. Возможно даже, что удастся напрямую зарегистрировать частицы темной материи и узнать некоторые ее свойства. Однако для того чтобы *понять, что это такое*, требуются дополнительные эксперименты на ускорителях (если хватит энергии), где кроме нейтральных стабильных частиц самой темной материи могут рождаться любые частицы из этого семейства, заряженные и нейтральные, стабильные и нестабильные. Так, например, с помощью ускорителей было установлено, что протоны и нейтроны состоят из кварков, которые взаимодействуют между собой путем обмена глюонами, и, кроме двух типов кварков, составляющих протон (или нейтрон), открыли еще четыре типа кварков. На основании таких исследований была создана теория сильных взаимодействий, квантовая хромодинамика. Нечто аналогичное должно быть проделано с темной материей, которая, по-видимому, относится к новому классу частиц.

Другой пример взаимосвязи космологии и физики элементарных частиц. Вселенная родилась примерно 15 млрд лет назад (Большой взрыв). Что было в самом начале, мы пока не знаем, однако благодаря экспериментам на ускорителях мы можем утверждать, что примерно понимаем, что происходило с Вселенной, начиная с 10^{-11} с ее жизни. Тогда у нее была температура порядка $3 \cdot 10^{15}$ К (сейчас 3 К). Начиная с этого момента во Вселенной остались только частицы, которые уже достаточно хорошо изучены на ускорителях (кроме частиц темной материи).

Ниже пойдет речь об основных открытиях и проводимых исследованиях в области космологии и физики элементарных частиц, а также о том, что можно ожидать в последующие два-три десятилетия. Данные исследования ведутся обычно международными коллаборациями, и при желании каждый может принять в этом участие.

§ 103. Физика элементарных частиц

Невозможно охватить все методы изучения свойств материи, поэтому остановимся только на главных направлениях.

Ускорители, детекторы

Основным методом изучения материи являются ускорители частиц. Ускоренные частицы затем сталкиваются с частицами неподвижной мишени или частицами, движущимися навстречу (встречные пучки, или коллайдеры, от «collide» – сталкиваться). Встречные пучки сделать сложнее, но они намного эффективнее, так как позволяют достичь существенно более высокой энергии в системе центра инерции (с. ц. и.). Институт ядерной физики СО РАН (Новосибирск) является пионером в этой области, здесь около 40 лет назад были построены и проведены эксперименты на первых e^-e^- и e^+e^- коллайдерах. В дальнейшем в мире были построены e^+e^- , pp , $p\bar{p}$ (\bar{p} – антипротон), ep коллайдеры на различную энергию.

Для продвижения в изучении материи требуются все более высокие энергии. Это необходимо по двум причинам:

1. максимальная масса рождающихся частиц при столкновении встречных пучков равна $M_{max} = 2E/c^2$;
2. ускоритель является своеобразным микроскопом, в котором пространственное разрешение ограничено де-бройлевской длиной волны частицы $\lambda = \hbar/p \approx \hbar c/E$.

При достаточно большом числе событий можно разглядеть в частице детали порядка $0,1\lambda \approx 2 \cdot 10^{-15}/E$ [ГэВ] см. Достигнутая энергия e^+e^- коллайдеров $2E \approx 215$ ГэВ (LEP-II, ЦЕРН, Женева) и pp коллайдеров 14 ТэВ (LHC, ЦЕРН), таким образом, разрешение составляет порядка $10^{-18} - 10^{-17}$ см. Нужно заметить, что электрон участвует во взаимодействиях как точечная частица, несущая всю энергию, в то время как протон состоит из трех кварков и связывающих их глюонов, каждый из которых несет примерно 1/6 часть энергии протона. В столкновениях на малых расстояниях в реакциях участвуют именно точечные (пока) составляющие – кварки и глюоны. Это нужно учитывать при сравнении pp (или $p\bar{p}$) и e^+e^- коллайдеров. Размер pp коллайдера LHC с энергией $2E = 14$ ТэВ, вступившего в строй в 2008 г., составляет около 30 км (бывший тоннель e^+e^- коллайдера LEP).

Максимальная энергия протонных коллайдеров ограничивается их размерами (кривизна траектории $R \propto E/B$). По-видимому, энергия порядка 100 ТэВ является пределом, такие коллайдеры сейчас серьезно рассматриваются в ЦЕРН и Китае.

Для кольцевых e^+e^- коллайдеров основной проблемой является очень большая мощность синхротронного излучения, которая растет как E^4/R на один оборот. Ускоритель LEP-II был фактически близок к пределу. Дальнейшее продвижение по энергии возможно на линейных e^+e^- коллайдерах. Сейчас идет работа по проектированию e^+e^- линейного коллайдера ILC (International Linear Collider) на энергию $2E = 1$ ТэВ. Его длина составит около 40 км. Окончательное решение о строительстве зависит от первых результатов LHC, когда станет известно, есть ли в области $2E = 0,1 - 1$ ТэВ новая интересная физика. Так же разрабатывается линейный коллайдер CLIC на энергию до $2E = 3 \div 5$ ТэВ, фактически предельную для линейных коллайдеров. Ограничение связано с полной потребляемой мощностью. Разумный предел составляет порядка 0.5 ГВт.

На линейных коллайдерах пучки используются однократно, это делает возможным получение встречных фотон-фотонных пучков (фотонный коллайдер) с высокой энергией и светимостью. Фотоны высокой энергии предполагается получать путем рассеяния лазерных фотонов на высокоэнергичных электронах. Таким способом почти все электроны можно конвертировать в фотоны с почти такой же энергией.

Хотя e^+e^- коллайдеры имеют энергию меньше, чем pp , однако они взаимно дополняют друг друга. В e^+e^- хорошо определено начальное состояние (точечные частицы, почти монохроматические пучки) и низкий фон. Количество крупных открытий, сделанных на этих коллайдерах, примерно одинаково. Кроме того, даже если что-то вначале обнаруживают в pp , то последующие исследования на e^+e^- коллайдерах позволяют изучить явления со значительно более высокой точностью.

Есть еще одна идея – мюонный коллайдер. Мюоны, как и электроны, являются точечными частицами, но в 200 раз более массивные. При той же энергии они будут излучать в 40 000 раз меньше, чем электроны, поэтому пучки мюонов можно сталкивать в кольцевых ускорителях до более высоких энергий. Главная проблема в их создании заключается в том, что мюоны нестабильны ($\tau = 2 \times 10^{-6}$ с), а их нужно родить, охладить, разогнать и столкнуть. Это сложно, но можно. За

счет релятивистского увеличения времени жизни они могут совершить 1000 оборотов в коллайдере (см. § 53). Обсуждаются проекты мюонных коллайдеров на энергию 0.1–100 ТэВ, но строиться они начнут еще не скоро, поскольку требуется детальная проработка проекта и экспериментальная проверка ключевых технологий.

Следует заметить, что, кроме энергии, ускоритель должен иметь достаточную для изучения физических процессов светимость $L \approx N^2 f/S$, где N – число частиц в пучке; S – сечение пучка; f – частота встреч. Число событий определенного процесса за единицу времени $\dot{N} = L\sigma$. Сечения интересных процессов, таких как рождение пары заряженных частиц, падает с ростом энергии как $\sigma \propto 1/E^2$, так что светимость должна расти как E^2 , чтобы за время эксперимента зарегистрировать достаточное количество событий нового процесса (хотя бы 1000). Так что проблема состоит не только в ускорении частиц, но и в получении очень плотных пучков с высокой частотой столкновений.

Сейчас во многих лабораториях ведутся работы по ускорению частиц сильными электрическими полями, создаваемыми в плазме короткими лазерными вспышками или пучками электронов. В таком плазменном ускорителе темп ускорения может составлять более 1 ГэВ/см (уже получено), что на три порядка превосходит возможности традиционных радиочастотных вакуумных линейных ускорителей. Тогда, казалось бы, вместо разрабатываемого сейчас ускорителя ILC на энергию 1 ТэВ с полной длиной 40 км можно сделать плазменный ускоритель длиной всего 10 м, а в будущем на длине 10 км получить 1000 ТэВ! Разогнать частицы до такой энергии в принципе возможно, однако вряд ли удастся достигнуть необходимой для встречных пучков светимости. Даже если будут решены все проблемы с нестабильностью плазмы, останется ограничение на размеры пучков, связанные с рассеянием частиц в плазме, а также огромной мощностью, которую нужно вкачивать в плазму для получения требуемой светимости коллайдера. Тем не менее, такие методы ускорения могут быть полезны для многих других задач.

Пока физики только начинают разрабатывать плазменные ускорители, природа их уже давно создала. При вспышках сверхновых звезд и других космических катаклизмах образуются мощные плазменные потоки, которые ускоряют некоторые частицы до очень высоких энергий. В настоящее время зарегистрированы космические частицы с макси-

мальной энергией порядка 10^{20} эВ (10^8 ТэВ). Это в 10^7 раз больше, чем будет на ЛНС, однако их поток составляет всего порядка одной частицы на 100 км^2 в год. На ЛНС энергия летящих навстречу протонов равна $2E_0 = 14 \text{ ТэВ}$. Чтобы космической частице произвести такой же эффект при столкновении с неподвижным протоном, ей необходима энергия $E \approx 2E_0^2/m_p c^2 \sim 10^5 \text{ ТэВ}$. Поток таких частиц составляет порядка 1 000 штук на 1 км^2 в год. Энергия исходной космической частицы и тип (протон, ион, и др.) неизвестны, ввиду взаимодействия с атмосферой до Земли долетают только остатки адронных ливней, в основном мюоны.

Сейчас в Аргентине работает эксперимент (Pierre Auger observatory) по регистрации космических частиц сверхвысокой энергии. Покрываемая им площадь составляет $3\,000 \text{ км}^2$. Регистрируются как частицы на поверхности Земли (баки с водой, просматриваемые фотоумножителями), так и флюоресценция азота в атмосфере (с помощью специальных телескопов).

Еще более амбициозный эксперимент готовит европейская коллаборация EUSO (Extreme Universe Space Observatory). В этом эксперименте световые вспышки (флюоресценция и черенковское излучение) от каскада частиц, образованного в атмосфере высокоэнергичной космической частицей, будут регистрироваться специальным телескопом, установленным на орбитальной космической станции. Просматриваемая им площадь в каждый момент составляет $20\,000 \text{ км}^2$. Ожидается регистрация за год около 1000 частиц с энергией более 10^{20} эВ (16 Дж).

Исследования космических частиц имеют две цели: во-первых, нужно понять, как они образуются, какие космические ускорители разгоняют их до таких больших энергий; во-вторых, оказывается, во Вселенной есть неизвестные науке формы материи, их обнаружение и изучение сейчас выходит на первый план. Это еще будет обсуждаться далее. Если в класс космических частиц включить еще не обнаруженную темную материю, то актуальность изучения космических частиц несомненна, хотя они не могут конкурировать с ускорителями в систематическом и детальном изучении свойств материи.

Следует отметить, что многие базовые идеи упомянутых выше коллайдеров (а также реализация некоторых из них или концептуальная проработка) исходят из Института ядерной физики (ИЯФ СО РАН). Что касается реализации очередных проектов коллайдеров на высокую энергию, характерная стоимость которых составляет примерно 5–

10 млрд долларов, так что они могут быть построены только объединенными усилиями ведущих стран мира.

Эксперименты на ускорителях проводятся с помощью детекторов, которые регистрируют все конечные частицы и определяют их параметры. По сложности они сравнимы с самим ускорителем и даже в чем-то более продвинутое. Это касается, например, потоков информации и их обработки. Так, на LHC пучки сталкиваются 40 млн раз в секунду, за одно столкновение пучков будет происходить в среднем 30 *pp* столкновений, сопровождающихся развалом протонов и рождением других частиц, а в каждом таком процессе будет рождаться более сотни различных конечных частиц (т. е. несколько тысяч частиц за встречу). В результате быстрого анализа нужно выделить события, представляющие интерес, и затем записать их в память для дальнейшего анализа. Не случайно именно в ЦЕРНе возникла идея WWW, а сейчас ЦЕРН продвигает проект GRID, который обеспечит передачу информации между ведущими центрами на уровне ГБ/с.

Стандартная модель

В результате экспериментальных и теоретических исследований на сегодняшний день сложилась довольно стройная картина, описывающая мир элементарных частиц, которую называют *Стандартной моделью*. Это заведомо временная схема, содержащая более двух десятков параметров (массы частиц и константы взаимодействия), которые нельзя пока выразить через какие-то более фундаментальные величины. Однако эта модель позволяет рассчитывать с высокой точностью тысячи всевозможных реакций. Так или иначе, эта теория есть результат титанического труда тысяч ученых и является вершиной человеческих знаний о природе.

Стандартная модель имеет дело с тремя классами фундаментальных частиц: кварками, лептонами и калибровочными бозонами, являющимися переносчиками взаимодействий. Они взаимодействуют посредством давно известных, но весьма загадочных четырех видов взаимодействий: сильного, слабого, электромагнитного и гравитационного и движутся согласно законам квантовой механики и теории относительности.

Кварки

Существует 6 типов кварков (табл. 5). У каждого кварка есть антикварк с противоположным электрическим зарядом и другими зарядами. Кварки участвуют во всех видах взаимодействий. Спин кварка равен $1/2$ (фермион). Кроме электрического заряда, кварки обладают цветовым зарядом, всего есть 3 цвета. Цветовой заряд в сильном взаимодей-

ствии является аналогом электрического заряда в электромагнитном взаимодействии. Аромат кварка – это некое квантовое число, присущее кварку, сохраняющееся в сильных и электромагнитных взаимодействиях, но нарушающееся в слабых. Сохранение аромата запрещает, например, распад $s \rightarrow d + \gamma$. Кварки имеют также барионный заряд, сохраняющийся во всех взаимодействиях. Из кварков складываются барионы ($q_i q_j q_k$) и мезоны ($q\bar{q}$), они бесцветны (смесь трех цветов или цвета-антицвета). Например, протон – это uud . Взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена глюонами, которые имеют 8 цветов ($3 \times 3 - 1$ (бесцветный) = 8). Кварки и глюоны ведут себя как точечные частицы с размерами менее $< 10^{-17}$ см.

Таблица 5

Кварки

Тип	Масса, МэВ	Эл. заряд	Бар. заряд	Аромат
u	2–3	+2/3	1/3	–
d	4–6	–1/3	1/3	–
s	100	–1/3	1/3	strange
c	1 300	+2/3	1/3	charm
b	4 200	–1/3	1/3	beauty
t	175 000	+2/3	1/3	truth

В отличие от фотона глюоны имеют заряды (цвета) и поэтому взаимодействуют друг с другом. В результате сильное взаимодействие имеет почти кулоновский вид на достаточно малых расстояниях, но при больших расстояниях сила перестает падать из-за множественного рождения промежуточных глюонов, образующих своеобразные сети, поэтому в природе свободных цветных кварков с дробными зарядами нет. Если энергии достаточно, то кварк вырывает из вакуума дополнительные кварк-антикварковые пары, они слипаются в бесцветные адроны и мезоны и в виде струй обычных бесцветных частиц вылетают из области рождения в направлении исходного кварка. Все это наблюдается в экспериментах и хорошо согласуется со Стандартной моделью.

Возможно, есть 4- и даже 5-кварковые состояния, но их существование пока под вопросом. Почему у кварков такие массы, пока никто не знает. И вообще, что лежит в основании Стандартной модели, не имеет объяснения (не сводится к более фундаментальным понятиям).

Лептоны

Существует 6 типов лептонов (табл. 6). У каждого лептона есть античастица с противоположными зарядами. Лептоны участвуют во всех видах взаимодействий, кроме сильного. Спин лептонов равен 1/2 (фермионы). Лептоны ведут себя как точечные частицы с размерами менее 10^{-17} см.

Таблица 6

Лептоны

Тип	Масса, МэВ	Эл. заряд	Лепт. число
e	0,51	1	$L_e = 1$
μ	105,6	1	$L_\mu = 1$
τ	1 777	1	$L_\tau = 1$
ν_e	$< 10^{-6}$	0	$L_e = 1$
ν_μ	$< 0,19$	0	$L_\mu = 1$
ν_τ	< 18	0	$L_\tau = 1$

Есть три относительно тяжелых заряженных лептона и три очень легких нейтральных нейтрино. Хотя массы нейтрино еще напрямую не измерены, однако из нейтринных осцилляций известно, что они отличны от нуля. В реакциях с участием лептонов сохраняется лептонное число, но оно нарушается в нейтринных осцилляциях.

Калибровочные бозоны

Кроме кварков и лептонов существуют частицы, которые осуществляют взаимодействие между фермионами (кварками и лептонами). Это частицы с целым спином – калибровочные бозоны (табл. 7).

Таблица 7

Калибровочные бозоны

	Масса,	Эл. заряд	Спин	Перен.взаимод.
γ	0	0	1	эл-магнитное
8 цв. глюон	0	0	1	сильное
W^\pm	80 000	± 1	1	слабое
Z	91 000	0	1	слабое
Гравитон	0	0	2	гравитационное

Взаимодействия, хиггсовский бозон, общие замечания по СМ

В 1970–1980 гг. было установлено, что электромагнитное и слабое взаимодействия являются одинаковыми по константе связи, разница только в том, что переносчики слабого взаимодействия W и Z бозоны имеют большую массу. Так возникла теория электрослабого взаимодействия. В основе лежит идея локальной (или калибровочной) симметрии. Требование такой симметрии приводит к появлению четырех безмассовых калибровочных бозонов. Их можно было бы ассоциировать с γ , W^\pm , Z , однако три последних – массивные. Для выхода из положения английский физик Хиггс (и еще несколько физиков-теоретиков) предложили механизм спонтанного нарушения симметрии. Для этого пришлось ввести некое скалярное поле, заполняющее все пространство. Массы калибровочных бозонов и всех фермионов возникают за счет взаимодействия с этим полем, масса частицы пропорциональна ее константе взаимодействия с хиггсовским полем. Аналогичный подход был использован для построения теории сильных взаимодействий, которая носит название квантовой хромодинамики (от греч. *chroma* – цвет).

Несмотря на некоторую искусственность построения Стандартная модель, основанная на идее калибровочных полей и включающая электрослабую теорию и хромодинамику, замечательно выполняется на практике. Для ее проверки необходимо было зарегистрировать хиггсовский бозон (H), являющийся возбужденным состоянием хиггсовского поля. Его масса не предсказывалась явно, однако из теоретических соображения (нестабильность вакуума, сильное самовзаимодействие Хиггсовских бозонов) следовало, что M_H должна быть в районе 120–200 ГэВ. Из прецизионных экспериментов на LEP (поправки за счет виртуальных Хиггсов к другим процессам) и данных с Tevatron были указания, что масса Хиггсовского бозона лежит в области 115–160 ГэВ. Наконец, в июле 2012 г. два эксперимента на коллайдере LHC, ATLAS и CMS объявили одновременно об обнаружении хиггсовского бозона с массой около 125 ГэВ. Для проверки того, что найденная частица действительно является хиггсовским бозоном, отвечающим за возникновение масс частиц, необходимо было убедиться, что вероятности распада H на пару частиц пропорциональны квадрату их масс. Так оно и оказалось. Фантастическое предсказание и открытие! Найден механизм происхождения масс элементарных частиц. Несомненно, это огромный шаг вперед, однако вопросов не убавилось.

Сколько же констант в Стандартной модели? Задача науки – найти общие закономерности и описать все явления природы минимальным количеством законов, т. е. аксиом. Хорошо было бы все выразить через константы \hbar , c , G . Они задают масштабы

$$\text{длины } l_p = (\hbar G / c^3)^{1/2} = 1,6 \times 10^{-33} \text{ см,}$$

$$\text{времени } t_p = (\hbar G / c^5)^{1/2} = 5,4 \times 10^{-44} \text{ с}$$

$$\text{и массы } m_p = (\hbar c / G)^{1/2} = 2,18 \times 10^{-5} \text{ г} \sim 10^{19} \text{ ГэВ}/c^2,$$

которые называют планковскими длиной, временем и массой соответственно.

Массы реальных элементарных частиц намного меньше планковской, поэтому возникает вопрос, можно ли будет когда-нибудь выразить их массы через планковскую массу. Есть удивительный факт, который говорит, что такое возможно. Три вида взаимодействия, о которых мы говорили: сильное, электромагнитное и слабое, имеют константы взаимодействия, которые зависят от расстояния за счет виртуальных заряженных частиц (электрон-позитронные, кварковые пары и др.), рождающихся из вакуума, или иначе – поляризации вакуума. Расстояния часто выражают в энергетических величинах в соответствии с соотношением неопределенности Гейзенберга ($Q \sim \hbar c/r$). При этом оказывается, что при $Q \sim 10^{16}$ ГэВ все константы сравниваются. Это может свидетельствовать о возможном объединении этих взаимодействий в некое единое взаимодействие. Эту теорию (гипотезу) называют Великим объединением. Одним из предсказаний этой теории является нестабильность протона (с нарушением барионного числа). Распад протона уже много лет пытаются обнаружить, просматривая фотоумножителями большие баки с водой (до 50 000 т, Super-Kamiokande). Установлен предел на время жизни $\tau_p > 10^{34}$ лет. Эксперименты будут продолжены с большим объемом воды (на порядок).

Однако вернемся к вопросу о количестве фундаментальных констант в физике. Много, даже сосчитать не просто.

Начнем с масс фундаментальных частиц: 6 кварков, 6 лептонов, 2 массивных калибровочных бозона, хиггсовский бозон – всего 15.

Добавим константы сильного и электромагнитного взаимодействия (константа слабого взаимодействия выражается через заряд электрона и массы калибровочных бозонов) – всего 2.

Превращение кварков из одного в другой при взаимодействии с W -бозоном описывается матрицей (3 x 3) Кабибо – Кабаяши – Маскава, в которой 4 независимых параметра: три угла смешивания и фаза, связанная с нарушением CP-симметрии. Для лептонов (включая массивные нейтрино) есть аналогичная матрица Маки – Накагава – Саката (3 x 3) с 4 независимыми параметрами. Всего 8.

Итак, кроме трех констант \hbar , c , G задающих размерности длины, времени и массы, мы насчитали еще 25 констант! И это еще без космологии, где тоже есть космологическая константа и неведомая темная материя. Явный «перебор», но это то, что сейчас имеется. Однако сведение бесконечного количества явлений природы к такому небольшому количеству констант (законов природы) – это тоже большое достижение.

Нерешенные проблемы. Дальнейшее развитие теории

Нерешенных проблем не счесть. Еще очень далеко до разгадки строения материи. Это следует из того, что мы не умеем вычислять вышеупомянутые константы и их количество продолжает расти (хотя и не раз сокращалось). Мы не понимаем даже, почему наша Вселенная состоит в основном из материи, куда делась антиматерия? Уже найдены процессы на уровне элементарных частиц, в которых наблюдается такая асимметрия (в распадах K - и B -мезонов), однако этого недостаточно для объяснения наблюдаемой асимметрии во Вселенной.

Обычно новые явления сначала пытаются объяснить на основе уже существующих знаний, но что делать, если явление выходит за рамки стандартной модели? Теоретики часто предлагают совершенно фантастические идеи типа пространства с большим количеством измерений; суперструны, которые, по их мнению, должны объяснить все, но на данный момент теория суперструн не дает ни одного конкретного предсказания. Идеи не запретишь, однако каждому исследователю хорошо бы иногда вспоминать знаменитую фразу Леонардо да Винчи: «Знания, не рожденные опытом, бесплодны и полны ошибок».

Однако есть и очень интересные теории, в которые хочется верить. Здесь мы упомянем только одну – суперсимметрия (SUSY). В существующих теориях возникают расходимости при вычислении петлевых поправок, которые автоматически устраняются, если предположить, что у каждого фермиона (бозона) со спином $1/2$ (1) есть партнер со спином 0 ($1/2$). Из того, что их пока не обнаружили, следует, что они достаточно тяжелые. Большинство вариантов теории суперсимметрии предсказывают массы таких частиц в районе нескольких сот ГэВ, т. е.

как раз в области, покрываемой коллайдерами LHC и ILC. Такие частицы являются основными кандидатами на роль темной материи во Вселенной (см. ниже в этой главе). Это может быть самая легкая стабильная суперсимметричная частица, очень слабо взаимодействующая с веществом. Однако после нескольких лет работы на LHC таких частиц с массами менее примерно 1 000 ГэВ не было найдено. Шанс найти их на LHC пока остается. Если повезет, то вскоре может быть открыт новый класс частиц, которых во Вселенной даже больше, чем обычной материи. Это может быть сделано как на LHC, так и путем прямой регистрации частиц темной материи. Об этом мы скоро узнаем.

Загадочные нейтрино

Все, конечно, слышали про нейтрино, они очень легкие и трудноуловимые. Всего их три типа: электронное, мюонное и тау нейтрино (ν_e, ν_μ, ν_τ). Они являются партнерами заряженных лептонов e, μ, τ , (табл. 6). Про них уже достаточно много известно, их умеют рождать и регистрировать. Многие их свойства хорошо описываются Стандартной моделью. Однако недавно в области нейтрино сделаны открытия, выходящие за рамки Стандартной модели, точнее требующие ее переделки со старой Стандартной модели в новую Стандартную модель.

Проблема с солнечными нейтрино была замечена более 30-ти лет назад. Как известно, на Солнце происходят термоядерные реакции, при которых рождается много нейтрино. Их поток на Землю составляет более 10^{11} шт./см²/с. Солнечные нейтрино регистрировали несколькими методами (хлор-аргонный, водно-черенковский, галлиевый) с различными порогами по энергии, однако каждый раз их было меньше ожидаемого потока в два-три раза. Сначала дефицит списывали на неточность Солнечной модели, но после регистрации солнечных нейтрино с помощью специально прокалиброванного галлиевого детектора с низким порогом, захватывающим все основные реакции на Солнце, проблема стала очень серьезной.

Тем временем в Японии на подземном детекторе Super-Kamiokande, представляющем собой бак с 50 000 м³ воды, в котором черенковское излучение частиц регистрировалось 13 000 фотоумножителями полуметрового диаметра, в конце прошлого века заметили интересный и неожиданный эффект (точнее сначала заметили на его меньшем предшественнике – Kamiokande). В атмосфере рождаются мюонные и электронные нейтрино в результате каскадных распадов пионов и мюонов, образованных космическими частицами (в основном протонами). При

этом ожидаемое число мюонных нейтрино должно быть вдвое больше, чем электронных. Фактически же оказалось, что для нейтрино, летящих сверху, это отношение, действительно, равно двум, а для летящих снизу через Землю их примерно поровну. Вероятность потеряться при этом за счет взаимодействия с Землей очень маленькая. Так были открыты нейтринные осцилляции, которые обсуждались, но предсказать их конкретное проявление было невозможно из-за незнания масс нейтрино и углов смешивания.

Суть явления заключается в следующем. Нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ , которые рождаются в различных реакциях, – это состояния, как говорят, с определенным ароматом (в данном случае лептонным числом). Каждая из этих частиц может быть квантово-механической суперпозицией трех нейтрино с определенными массами (связанные осцилляторы). При движении в вакууме такого пакета каждое такое нейтрино осциллирует со своей частотой, зависящей от ее массы. В результате состав частиц в пакете меняется, и если вначале было только мюонное нейтрино, то затем это будет смесь всех типов нейтрино. Характерная длина таких осцилляций $\lambda = 4\pi\hbar E / (m_j^2 - m_i^2)c^3$. В эксперименте с атмосферными нейтрино частицы, летящие сверху, долетали до детектора без изменений, а прошедшие через Землю имели достаточный путь, чтобы проосциллировать в другой тип нейтрино. В данном случае часть мюонных нейтрино превратилось в тау-нейтрино, которые в эксперименте не регистрировались.

Загадка солнечных нейтрино разрешилась в 2002 г. До этого детекторы солнечных нейтрино были рассчитаны на регистрацию электронных нейтрино, других на Солнце и не образуется (водно-черенковские детекторы регистрировали и другие типы нейтрино, но с малой эффективностью). Новый детектор, SNO (Sudbury Neutrino Observatory), состоящий из 1 000 т тяжелой воды (D₂O) (дали на время из стратегического запаса Канады), имел возможность регистрировать нейтрино всех типов. Принцип состоял в следующем. Ядро дейтерия состоит из протона и нейтрона. Возможны два типа реакций нейтрино на дейтроне: а) *электронное* нейтрино путем испускания *W*-бозона превращает нейтрон в протон, а само переходит в электрон, который регистрируется по черенковскому свету; б) нейтрино *любого* типа путем обмена *Z*-бозоном расщепляет дейтрон на протон и нейтрон (оставаясь нейтрино), где нейтрон затем регистрируется путем регистрации гамма-квантов, испускаемых при его захвате ядром дейтерия, или специ-

ально добавленной для усиления эффекта поваренной соли (NaCl). Результат оказался следующим: число событий реакции *a*, чувствительной только к электронным нейтрино, оказалось равным примерно 35 % от ожидаемого потока солнечных нейтрино, в то время как число событий реакции *b*, чувствительной ко всем типам нейтрино, с хорошей точностью совпало с ожидаемым потоком. Таким образом, Солнце производит ожидаемое количество электронных нейтрино, но по пути к Земле 2/3 из них превращаются в другие типы нейтрино!

Эксперименты с детекторами Super-Kamiokande и SNO открыли новую страницу в физике нейтрино. Вскоре результаты по осцилляциям мюонных нейтрино были подтверждены и уточнены на ускорителях в Японии и США, где стреляли пучками мюонных нейтрино по большим подземным детекторам, находящимся за сотни километров. Исчезновение по дороге электронных нейтрино было проверено в Японии на реакторных нейтрино. Сейчас разворачивается широкая программа по изучению свойств нейтрино, получаемых на ускорителях. Точное измерение всех особенностей по взаимопревращению нейтрино (массы, углы смешивания и др.) так же важно, как и все, что было открыто и изучено с кварками. Тут нас ждет еще много неожиданностей.

Как было отмечено ранее, реальные нейтрино – это суперпозиция трех нейтрино с определенными массами m_1, m_2, m_3 . На данный момент изучение длин осцилляций дает следующие значения разницы квадратов масс:

$$m_2^2 - m_1^2 = (8,0 \pm 0,5)10^{-5} \text{ эВ}^2; \quad m_3^2 - m_2^2 = (2 - 3)10^{-3} \text{ эВ}^2. \quad (103.1)$$

Сами значения масс нейтрино пока не известны, но видно, что они лежат в районе сотых долей электрон-вольты, т. е. нейтрино в сотни миллионов раз легче электрона.

§ 104. Вселенная

Из всего многообразия интересных явлений, наблюдаемых в космосе, обсудим только главные открытия последних лет, которые стали в физике проблемой номер один. Эти открытия можно кратко сформулировать так: измерена средняя плотность Вселенной, при этом оказалось, что все известные формы материи (о которых шла речь выше) составляют только около 5 %! Еще 25 % – это некие неизвестные частицы (темная материя), которые, как и обычная материя, собираются в скоплениях, и остальные 70 % от всей плотности составляет какая-то субстанция (темная энергия, а может, физический вакуум), которая об-

ладает антигравитационными свойствами и ускоряет расширение Вселенной.

Потрясает воображение, не так ли! Вся наука до сих пор была сосредоточена на изучении только 5 % состава Вселенной. Можно считать, что нам всем повезло, так как мы можем принять участие в разгадке природы темной энергии и материи.

Для понимания сути открытия нам понадобятся некоторые сведения о Вселенной и ее эволюции.

Общие представления об эволюции вселенной, стандартная космология

Наше местоположение во Вселенной ничем не выделено, она выглядит одинаковой во всех направлениях. Отсюда следует, что Вселенная безгранична, в среднем изотропна, однородна и одинакова во всех точках. Наблюдения показывают также, что Вселенная расширяется. Анализ всех данных говорит о том, что Вселенная образовалась из некой сингулярности около 15 млрд лет назад, этот момент называют Большим взрывом. Однако он отличается от обычного взрыва тем, что нет выделенной точки в пространстве, и вообще само пространство создается при расширении Вселенной. Такая необычная геометрия возникает за счет гравитации. В каждой точке пространства имеется выделенная система отсчета, которая покоится относительно реликтового излучения. В качестве реперных точек приближенно можно выбрать галактики. Можно задать единое для всех наблюдателей время ($t = 0$ можно синхронизовать по локальной плотности).

Вселенная расширяется: любые две реперные точки удаляются со скоростью $V = Hr$ (при $V \ll c$) – закон Хаббла. В настоящее время $H \approx 70$ км/с/Мпк. Размер Вселенной обычно характеризуют масштабным фактором $a(t)$ и в общем случае закон Хаббла записывается как

$$\dot{a}(t) = H(t)a(t). \quad (104.1)$$

Космологическое красное смещение

Если некоторая удаленная галактика испускает свет с длиной волны λ_0 в момент t_0 и мы принимаем этот сигнал в момент t , то можно показать, что длина волны увеличится пропорционально размеру Вселенной

$$1 + z \equiv \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a(t)}{a(t_0)}. \quad (104.2)$$

Это называется космологическим красным смещением.

Замечание. Распространенное утверждение, что космологическое красное смещение объясняется эффектом Доплера (скоростью удаления) не совсем верно. В расширяющейся Вселенной нельзя ввести единую инерциальную систему отсчета. Красное смещение переходит в доплеровский эффект только при $z \ll 1$.

Чтобы легче понимать различные эффекты, удобно вообразить Вселенную как раздувающийся шар, по которому можно передвигаться только вдоль поверхности. Это будет искривленное двухмерное пространство с положительной кривизной. Наше трехмерное пространство вообразить искривленным сложнее, но для понимания сути двухмерной поверхности достаточно. Представим расширяющийся шар. Свет может передвигаться относительно поверхности шара со скоростью c . Ограничений же на скорость увеличения радиуса шара нет (как мы увидим, скорость изменения размера Вселенной определяется гравитационными силами и ее составом). Если удаленный источник испустил свет в нашем направлении, то он может до нас никогда не дойти ввиду растяжения поверхности шара. Легко понять также, что если источник расположен близко, то относительная скорость за счет растяжения много меньше c и свет дойдет до нас. В противном случае – не дойдет. Граничное положение источника, при котором свет, испущенный в самом начале существования Вселенной, только что дошел до нас, называется горизонтом событий. Вселенная может быть большой, но дальше горизонта мы не видим. Интересно, что расширение может происходить так, что объекты, которые были видны, со временем скроются за горизонтом.

Динамика Вселенной. Уравнения Фридмана

В 1922 г. А. Фридман, решив уравнения общей теории относительности Эйнштейна для однородной Вселенной, получил два независимых уравнения для $a(t)$:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 - kc^2, \quad (104.3)$$

$$\frac{d(\rho c^2 a^3)}{dt} + p\frac{d(a^3)}{dt} = 0. \quad (104.4)$$

Здесь ρc^2 – плотность всех видов энергии; p – давление, k – параметр, характеризующий кривизну пространства, равный -1 для пространства с отрицательной кривизной, 0 для плоского и 1 для про-

странства с положительной кривизной (сфера). Из (104.3), (104.4) получается уравнение для ускорения:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi G a (\rho + 3p/c^2). \quad (104.5)$$

Очень важно, что динамика расширения зависит не только от плотности энергии, но и от давления! Уравнение (104.5) (но без давления) легко получить в ньютоновской механике. Это есть не что иное, как притяжение пробной частицы к выделенному в пространстве шару. Гравитация за счет давления – чисто релятивистско-гравитационный эффект (содержит скорость света). Для пылевидной Вселенной $p = 0$, для радиационно-доминантной $p = (1/3)\rho c^2$, для вакуума $p = -\rho c^2$.

Последнее утверждение требует пояснения, поскольку мы привыкли считать вакуум пустым. В принципе, вакуум – это низшее энергетическое состояние, которое может иметь произвольную плотность, однако при этом обязательно должно быть отрицательное давление $p = -\rho c^2$.

Происхождение этого соотношения можно пояснить следующим образом. Рассмотрим сосуд с поршнем, заполненный газом. При адиабатическом расширении (без подвода тепла) изменение внутренней энергии равно работе, совершенной газом:

$$dE + p dV = 0. \quad (104.6)$$

Если газ является вакуумом, то при расширении вакуум должен, по определению, оставаться неизменным, т. е. плотность должна оставаться постоянной. В этом случае $dE = (\rho_v c^2) dV$. Подставляя dE в (104.6), получаем

$$p_v = -\rho_v c^2. \quad (104.7)$$

Если плотность материи в пылевидной Вселенной ρ_m , то с учетом плотности и давления вакуума из (104.5) получаем

$$\ddot{a} \propto -(\rho_m - 2\rho_v). \quad (104.8)$$

Отсюда следует, что при $\rho_v < 0,5\rho_m$ скорость расширения Вселенной уменьшается со временем (так все ожидали), а при $\rho_v > 0,5\rho_m$ – увеличивается. Эффект ускоренного расширения был давно известен и

рассматривался для ранней Вселенной (инфляционная теория), но никто не ожидал такой динамики расширения в настоящее время.

Приведем еще одно соотношение. Из уравнений Фридмана следует, что

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - H^2. \quad (104.9)$$

Вселенная является плоской, $k = 0$, при критической плотности

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (104.10)$$

Из измерений постоянной Хаббла следует, что в настоящий момент $\rho_c \sim 10^{-29}$ г/см³. Если $\rho < \rho_c$, то $k = -1$ – Вселенная открыта и бесконечна, если $\rho > \rho_c$, то $k = +1$ – Вселенная замкнута, безгранична, но имеет конечный объем. Плотность различных видов веществ выражают обычно в единицах критической плотности $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$. Вообще говоря, близость полной и критической плотностей (в пределах точности измерений) еще не означает, что $k = 0$. Как следует из (104.9), это может быть случай произвольного значения k с очень большим радиусом кривизны.

Скорость расширения зависит от того, чем заполнена Вселенная. Это может быть пыль, фотоны, вакуум или некая субстанция с $p = w\rho c^2$, где $-1 < w < 1/3$ – некий коэффициент. И наоборот, зная закон расширения Вселенной, можно найти, из чего она состоит. Эта задача сводится к определению постоянной Хаббла $H(z)$, зависящей от состава Вселенной:

$$H^2(z) = H(0)^2 \left[(1 - \Omega_{0,tot})(1+z)^2 + \Omega_{0,m}(1+z)^3 + \sum_i \Omega_{0,w_i}(1+z)^{3(1+w_i)} \right], \quad (104.11)$$

где $\Omega_{0,tot}$ – полная плотность; индекс t относится к пылевидной материи; индекс w_i – к другим составляющим с $p = w\rho c^2$. Практически это делается так. Во Вселенной есть объекты (цефеиды, сверхновые звезды, галактики) с определенной яркостью – «стандартные свечи». Цефеиды калибруют на малых расстояниях методом триангуляции, затем по ним калибруют сверхновые звезды и галактики, которые затем

можно использовать для определения больших расстояний. Измеряют количество приходящего на Землю света и красное смещение, из которых однозначно находится $H(z)$.

Вопрос о том, какова сейчас реальная плотность, долгое время оставался неясным. Подсчет количества материи в звездах давал плотность не более одного процента от критической, в то время как из теоретических соображений очень хотелось иметь плотность, равную критической.

Открытие ускоренного расширения Вселенной

В конце 1998 г. две группы астрономов, измеряющих постоянную Хаббла с помощью сверхновых класса Ia, практически одновременно опубликовали удивительное открытие: Вселенная расширяется с ускорением! Сверхновые звезды этого типа являются белыми карликами в

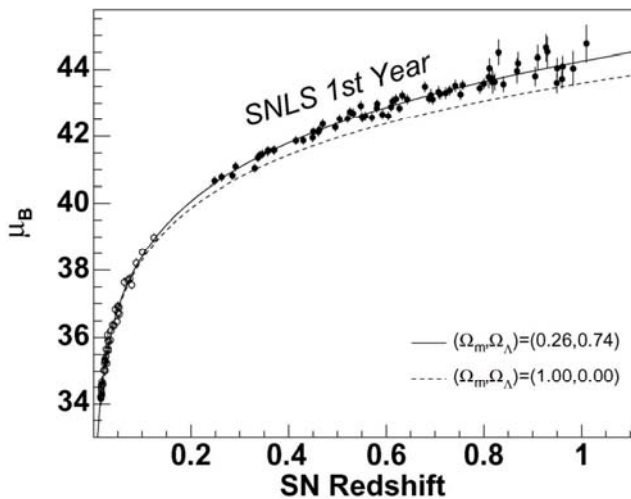


Рис. 96. Зависимость яркости Сверхновых (в звездных величинах) от параметра красного смещения z в эксперименте SNLS

системе двойных звезд. Они перетягивают массу с соседней звезды и при $M \approx 1,4M_c$ (предел Чандрасекара) давление квантового электронного газа уже не может сдерживать гравитационные силы, звезда начинает сжиматься и происходит термоядерная вспышка, видимая с большого расстояния. Частота таких вспышек в нашей Галактике одна за 300 лет, а во всей видимой Вселенной – порядка одной в секунду.

Исходно, в экспериментах было найдено, что далекие сверхновые (при $z < 0,5 - 1$) примерно на 20 % тусклее, чем ожидалось. Это могло быть из-за космической пыли или немного другого состава ранних звезд. Такие гипотезы тщательно проверялись, но ошибки не нашли. В последующие годы такие эксперименты активно продолжались этими же и другими группами. На рис. 96 приведена зависимость звездной величины Сверхновых от параметра красного смещения z , полученная после одного года работы группой Supernova Legacy Survey (SNLS), которая провела систематические исследования в данном направлении с помощью больших наземных телескопов. Из анализа данного эксперимента в предположении, что Вселенная заполнена материей и вакуумом (см. теорию выше), следует, что

$$\begin{aligned}\Omega_m &= 0.263 \pm 0,052 \\ \Omega_v &\sim 0.74,\end{aligned}\tag{104.12}$$

т. е. плотность вакуума примерно в 2.5 раза больше плотности всех видов материи, а общая плотность вакуума и материи близка к критической. Другие эксперименты дают примерно такие же результаты. Так, в аналогичном эксперименте, проводимом коллаборацией Supernova Search Team Collaboration (SSTC). Они получили $\Omega_m = 0,29 \pm 0,04$. В этом эксперименте был задействован также космический телескоп Хаббл, что позволило найти сверхновые до $z \sim 1,8$. Из полученных данных было найдено, что замедление расширения сменилось на ускорение при $z = 0,46 \pm 0,13$, т. е. когда Вселенная была в полтора раза меньше, чем сейчас.

Вскоре это открытие подтвердили независимым способом: по анизотропии реликтового микроволнового излучения и корреляциям в распределении галактик во Вселенной. Для детального изучения динамики Вселенной по сверхновым готовится специальный спутниковый эксперимент JDEM (Joint Dark Energy Mission), который позволит намного повысить статистику и точность.

Микроволновое Реликтовое Излучение (МРИ)

МРИ, предсказанное в 1946 г. Г. Гамовым, было открыто в 1965 г. Пензиас и Вильсоном. Около 400 тыс. лет ($z \sim 1\ 100$) после Большого взрыва температура Вселенной упала до нескольких тысяч градусов, электроны и протоны рекомбинировали и Вселенная стала прозрачной для тепловых фотонов. При дальнейшем расширении температура фо-

тонов упала до $T = 2.7$ К. Современная плотность реликтовых фотонов $n_\gamma \sim 410$ шт./см³. Скорость Земли относительно МРИ около 370 км/с. Кроме того, что реликтовое излучение является одним из важнейших подтверждений теории Большого взрыва, оно дает уникальные данные о самой ранней истории Вселенной, геометрии и составе Вселенной. Основным источником информации – это пространственная анизотропия реликтового излучения, открытая в 1992 г. (возникающую за счет движения Земли дипольную температурную анизотропию вычитают), относительная величина которой составляет всего $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Некоторые космологи назвали открытие анизотропии МРИ крупнейшим событием в астрофизике за несколько последних десятилетий. В 2006 г. это открытие было удостоено Нобелевской премии по физике.

Наиболее точная температурная карта неба получена на космическом аппарате WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Результаты измерения анизотропии представляют в виде разложения температурной карты неба по угловым гармоникам, которые отражают распределение температурных пятен по угловым размерам. Результаты трех лет работы WMAP приведены на рис. 97. В распределении имеется четкий пик на угле около 1 углового градуса. Более того, также на

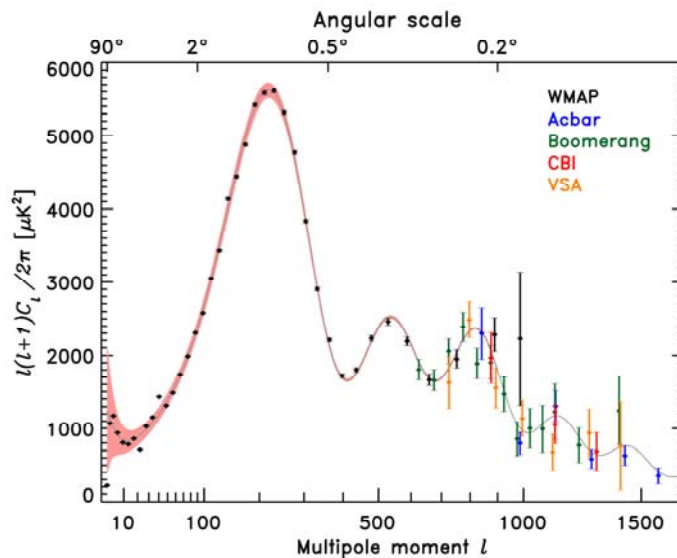


Рис. 97. Угловые корреляции в анизотропии реликтового излучения, полученные в эксперименте WMAP

блюдаются несколько дополнительных пиков на меньших масштабах. Температурные флуктуации связывают с квантовыми флуктуациями на ранней стадии Вселенной, которые дошли до стадии рекомбинации как плазменные акустические волны. Колебания есть результат двух противоборствующих сил: гравитационного притяжения и давления фотонного газа. Изменение температуры связано как с повышенной плотностью, так и с движением вдоль линии наблюдения (эффект Доплера). Положение первого пика оказывается однозначно связано с геометрией Вселенной. Данные свидетельствуют, что Вселенная плоская, т. е. имеет плотность, очень близкую к критической:

$$\Omega_{tot} = 1 \pm 0,015. \quad (104.13)$$

Это очень важный результат, поэтому интересно качественно понять его происхождение.

Положение первого пика соответствует отношению современного размера области, которая была причинно-связанной на момент рекомбинации (пятно с примерно одинаковой температурой) к расстоянию от нас до места образования этих фотонов в настоящее время. Опуская множители порядка единицы, размер такого пятна в момент испускания фотонов был равен $\sim ct_r$ ($t_r = 400 \times 10^3$ лет) и с тех пор увеличился пропорционально размеру Вселенной (см. (104.2)), т. е. в $z + 1 \approx 1100$ раз. Расстояние от этого пятна до нас примерно равно расстоянию до горизонта событий $\sim ct_0$ ($t_0 \sim 15 \cdot 10^9$ лет – возраст Вселенной). Отсюда получаем угловой размер

$$\theta \sim (z + 1)t_r/t_0 \sim 0.03 \sim 1^\circ. \quad (104.14)$$

Данная оценка соответствует случаю плоской Вселенной (лучи идут по прямой). При $\Omega_{tot} > 1$ (положительная кривизна) угол был бы больше, а для $\Omega_{tot} < 1$ (отрицательная кривизна) – меньше.

Оказывается также, что высота основного пика и более высоких гармоник очень чувствительна к составу материи, поскольку обычная материя (плазма) хорошо взаимодействует с фотонами и испытывает их давление, а темная материя для них прозрачна. Происхождения серии пиков можно понять как резонансные гармоники в трубе. Исходно возникли волны разных частот, но при наступлении рекомбинации волны дальше распространяться не могли и максимальная амплитуда оказалась у волн, для которых в объеме укладывается целое число по-

луволн. Из данных по МРИ было найдено, что с точностью 10 % полная плотность материи $\Omega_m \approx 0,27$, а плотность обычной (барионной) материи $\Omega_m \approx 0,045$.

Еще одно интересное явление. После рекомбинации протонов и электронов при температуре около 3 000 К Вселенная была заполнена в основном нейтральными атомами водорода и других легких элементов. Кроме этого, было реликтовое излучение, охлаждающееся за счет расширения. Со временем его спектр сместился в невидимую область спектра. Не было ни звезд, ни галактик – полная темнота! Это время так и называют «темной эпохой». Затем материя сгруппировалась на флуктуациях плотности и зажглись первые Звезды. Их излучение вновь ионизовало Вселенную. Изучение особенностей микроволнового излучения (поляризация, диффузное рассеяние) позволило установить, что повторная ионизация произошла при $z \sim 10$ и оптическая толщина для комптоновского рассеяния реликтовых фотонов на свободных электронах составила около 10 %.

Крупномасштабная структура, акустический барионный пик

Из реликтового излучения мы знаем, что в эпоху рекомбинации Вселенная была очень однородна: $\sigma_\rho/\rho \sim 10^{-5}$. Сейчас же имеются звезды, галактики, скопления галактик, суперскопления, крупномасштабные структуры, так что $\sigma_\rho/\rho \sim 1$. На специальных телескопах были проведены измерения 3-мерного пространственного распределения звезд и галактик. В продольном направлении координата определялась по красному смещению. Получаемые распределения плотности материи по различным масштабам (размерам флуктуаций) очень чувствительны к параметрам Вселенной и ее составу. Наблюдения сравнивают с моделированием на суперкомпьютерах и таким образом находят параметры Вселенной.

Простой вопрос, Что возникло раньше: звезды, галактики или, может, крупномасштабные структуры? Ответ совсем не очевиден. Оказывается, сначала образовались звезды, и это произошло только благодаря большому количеству темной материи, которая начала группироваться еще в радиационно-доминантную эпоху задолго до рекомбинации. После рекомбинации давление фотонов упало и барионная материя стала группироваться на уже сформировавшихся сгустках темной материи.

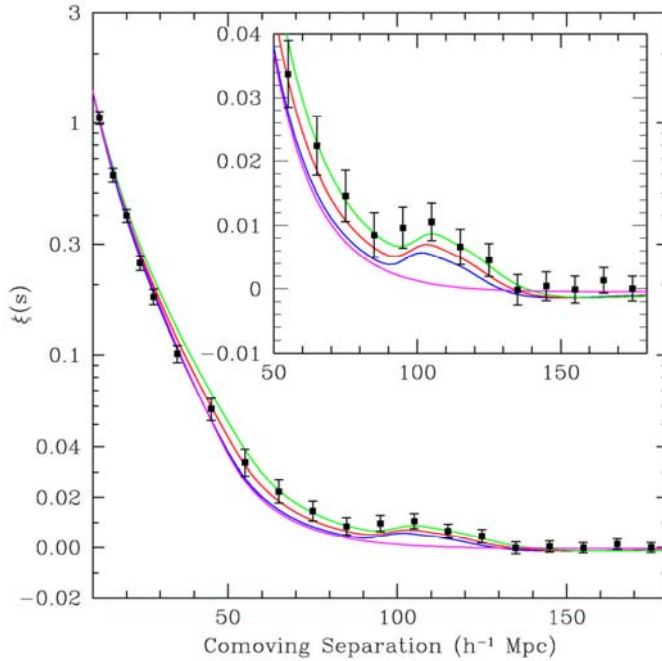


Рис. 98. Пространственные корреляции на больших расстояниях в распределении галактик во Вселенной, полученные на телескопе SDSS

Наиболее детальное 3-мерное распределение галактик получено на телескопе SDSS (Sloan Digital Sky Survey). Недавно эта группа обнаружила характерный пик в распределении галактик по взаимному расстоянию (рис. 98). Пик соответствует расстоянию примерно 500 млн световых лет. Он имеет фундаментальное происхождение, это акустический барионный пик.

Происхождение его следующее. Представим, что в некоей точке на ранней стадии Вселенной была флуктуация плотности, темной и обычной материи. Флуктуация плотности обычной материи стала распространяться в плазме во все стороны в виде сферической акустической волны. Темная же материя осталась стоять на месте, поскольку она с фотонами не взаимодействует и потому акустических волн не создает. Впоследствии на месте оставшейся флуктуации темной материи и на барионной волне (после рекомбинации) стала концентрироваться материя, возникли звезды, галактики. Положение пика соответствует расстоянию, на которое успела убежать акустическая волна до момента рекомбинации, а затем это расстояние было увеличено последующим расширением Вселенной. Естественно, во Вселенной была не одна такая исходная флуктуация, но для любой из них расстояние между ба-

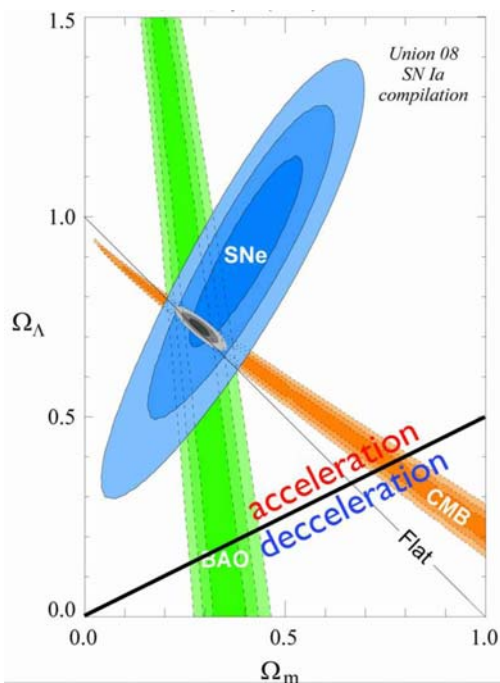


Рис. 99. Результаты измерения параметров Ω_m и Ω_Λ в экспериментах SNLS (Сверхновые) и SDSS (по барионному акустическому пику, BAO)

рионной волной и оставшейся на месте темной материей одно и то же. Из этой физики ясно, что положение пика несет важную информацию о динамике Вселенной и очень чувствительно к ее составу.

На рис. 99 показана подгонка космологических параметров Ω_m (плотность материи) и Ω_Λ (плотность вакуума) по результатам эксперимента SNLS по сверхновым и эксперимента SDSS по измерению положения акустического барионного пика. Как видно, они пересекаются как раз на прямой соответствующей плоской Вселенной, т. е. в полном согласии с измерениями анизотропии реликтового излучения. Все это подтверждает достоверность открытия ускоренного расширения Вселенной и ее необычного состава.

Космологический нуклеосинтез

Количество барионной материи во Вселенной можно также определить по относительной доле легких элементов. Этот метод давно известен и был использован раньше других. Когда температура упала настолько, что нейтроны перестали рождаться, их количество стало уменьшаться из-за распадов свободных нейтронов. Не распались только те, которые успели соединиться с протонами и образовать атомные ядра. Количество образованных легких элементов зависит от плотности и скорости падения плотности в ту эпоху. Наиболее чувствительным к этим эффектам оказался дейтерий, концентрация которого была найдена по поглощению света в газовых облаках при больших z . Найденная таким образом плотность барионов составила около 4 % от критической плотности. Результат, полученный с помощью реликтового излучения хорошо согласуется с этой цифрой.

Гравитационное линзирование

Если объект не светится, то его не видно. Однако его можно увидеть по гравитационному отклонению света от источника, находящегося на линии наблюдения позади темного тела. Этот эффект предсказал еще А. Эйнштейн. В результате гравитации появляются дополнительные изображения источника – кольца, дуги или просто временное увеличение яркости. Этот метод сейчас взят на вооружение и дает уникальную информацию.

Один пример: определение плотности темной материи по кластерам галактик. Изучая характеристики кластеров галактик, удается определить их полную массу и массу барионной материи. Барионная масса следует из наблюдаемого рентгеновского излучения горячей плазмы. Полная масса хорошо определяется по гравитационному линзированию. Для 50 проверенных кластеров отношение полной и барионной масс $M_m/M_b \sim 8$. Считая это отношение в кластерах и Вселенной равными и используя плотность барионной материи из нуклеосинтеза, получаем $\Omega_m \sim 0,3$, что находится в согласии с аналогичными результатами, полученными по вспышкам сверхновых и анизотропии реликтового излучения.

Темная материя

Мы уже несколько раз упомянули темную материю. Что же это такое и откуда возникает уверенность в ее существовании?

Еще в 1937 г. астрономы обратили внимание, что звезды в спиральных галактиках движутся не так, как положено по законам гравитации для наблюдаемого распределения светящейся материи. Если верить в закон Ньютона, то нужно добавить еще в несколько раз большую массу с определенным распределением плотности. Существенный недостаток массы наблюдается и в нашей Галактике. Сейчас можно твердо сказать, что это не барионная материя. В районе Земли плотность таких частиц около $0,3 \text{ ГэВ/см}^3$. Если их масса равна $50 \text{ ГэВ}/c^2$, то получается примерно одна такая частица на чашку кофе. Но реально мы пока ничего не знаем о их массах. Скорость их движения соответствует характерным скоростям в Галактике, т. е. несколько сот км/с.

Данные по расширению Вселенной, микроволновому излучению, кластерам и др. также подтверждают, что темной материи раз в 6–8 раз больше обычной материи. То, что темная материя концентрируется в галактиках и других структурах, говорит о том, что это какие-то нерелятивистские частицы. Реликтовые нейтрино для этого явно не подхо-

дят. Наиболее популярной является гипотеза, что темная материя – это слабо взаимодействующие с обычной материей тяжелые суперсимметричные частицы, образовавшиеся, когда температура во Вселенной была достаточной для их рождения.

Сейчас предпринимаются попытки зарегистрировать такие частицы специальными детекторами. Наиболее чувствительный из них – полупроводниковый детектор при криогенных температурах – регистрирует как ионизацию, так и звуковые фононы (по разрыву куперовских пар). Это позволяет подавить фоны от фотонов и заряженных частиц. Получено, что сечение взаимодействия меньше, чем 10^{-43} см². Планируется увеличить массу детектора и понизить предел в 1000 раз. Ведутся также эксперименты с детекторами других типов.

В результате рассеяния (очень редкого) на обычной материи частицы темной материи скапливаются в центре Земли, Солнца, Галактики. Там за счет высокой плотности они могут сталкиваться друг с другом, аннигилировать и рождают высокоэнергичные нейтрино, которые можно зарегистрировать. Такие эксперименты уже ведутся. Готовится также спутниковый эксперимент по регистрации монохроматичных аннигиляционных фотонов, образованных вблизи поверхности Солнца.

Есть шансы, что частицы темной материи будут зарегистрированы в ближайшие 5–10 лет. Сюрпризы не исключены. Однако в любом случае для того чтобы понять их природу, будет необходимо изучить эти частицы (все семейство) на ускорителях.

Состав Вселенной

Итак, установлено, что плотность Вселенной с высокой точностью равна критической (плоская Вселенная), ее состав приведен в табл. 8. Что за темные субстанции составляют 95 % плотности Вселенной, мы не знаем. Природа бросила дерзкий вызов физикам!

Таблица 8

Состав Вселенной в единицах критической плотности

Вид	Доля
Темная энергия	0,7
Темная материя	0,25
Свободный Н и He	0,04
Звезды	0,005
Нейтрино	<0,015

§ 105. Заключительные замечания

Одной из привлекательных теорий Большого взрыва является инфляционная модель. Вселенная, вероятно, уже прошла фазу вакуумно-подобного состояния ($P = -\rho c^2$) при $t \approx 10^{-43} - 10^{-30}$ с, и ее размер экспоненциально возрастал как $a(t) \sim l_p \exp(Ht)$, где $Ht > 70$. Это объясняет однородность видимой Вселенной, плотность, равную критической, спектр флуктуаций, анизотропию реликтового излучения. Одинаковая температура всего неба в рамках инфляционной модели объясняется следующим образом. Даже если вначале температуры в разных точках Вселенной были различные (ввиду их причинной несвязанности), то в результате инфляции пространство растянулось так быстро, что внутри горизонта событий осталась только область, все точки которой ранее находились в тепловом контакте. Плоскостность же следует из того, что если даже мы живем на замкнутой сфере, то в результате инфляции видим только маленькую область, которая с большой точностью плоская.

Откуда возникает в настоящее время плотность вакуума? Из физики мы знаем о нулевых колебаниях электромагнитного поля. Однако легко проверить, что насчитываемая таким образом плотность энергии превышает наблюдаемую плотность в 10^{120} раз! Привлечение SUSY (теория суперсимметрии, которую пока не подтверждена) уменьшает расхождение до 10^{55} раз (бозоны и фермионы дают в энергию вакуума противоположные вклады). Это тоже не проходит. Пока разумных объяснений нет.

Другая загадка: почему плотность вакуума ненулевая и примерно равна плотности материи в настоящее время? За время эволюции плотность материи во Вселенной уменьшилась более чем на 100 порядков, и такое случайное совпадение кажется очень подозрительным. Возможно, оно имеет простое объяснение.

Мы попытались рассказать о ситуации в физике элементарных частиц и космологии. Эти две области науки объединились для решения главного вопроса: как возникла и устроена Вселенная. Совсем недавно в космологии были сделаны великие открытия: доминирование во Вселенной темной энергии и материи. Пока они являются скорее великими загадками, но тем и интересней будет найти ответы!

Учебное издание

Тельнов Валерий Иванович

Механика и теория относительности

Учебное пособие

Редактор *Д. И. Ковалева*

Подписано в печать

Формат 70 x100 1/16, Уч.-изд. л. 17,9. Усл. печ. л. 23,1.

Тираж 250 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2