Классическая Электродинамика

О.В. Жиров

4 апреля 2021 г.

Содержание

Список литературы

[1] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Теоретическая физика, т.2 , Теория поля.

[2] *В.Г. Левич*, Курс теоретической физики, т.1.

[3] *В. Пановский, М. Филипс*, Классическая электродинамика.

[4] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике, тт.5 и 6.

[5] *И.Е. Тамм.* Основы теории электричества.

[6] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика.

[7] *И.Н. Мешков, Б.В. Чириков.* Электромагнитное поле.

[8] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред.

http://www.inp.nsk.su/~zhirov/em-lect.pdf

1 Микроскопические уравнения Максвелла.

1.1 Введение

.

Электромагнитные взаимодействия лежат в основе большинства наблюдаемых явлений. Они связывают электроны и атомные ядра, образуя атомы, из которых состоим мы и окружающий нас мир. Они же дают электромагнитные волны и, в частности, свет — с помощью которого мы наблюдаем этот мир.

Электромагнитные взаимодействия очень сильны: кулоновское отталкивание двух электронов в 10^{40} (!) раз сильнее их гравитационного притяжения!

Теория классического электромагнитного поля была заложена Дж. К. Максвеллом в 1873 году. Удивительным образом в ней *уже* содержалась специальная теория относительности (СТО), сформулированная А. Эйнштейном много позднее, лишь в 1905 году. Связи этих двух теорий в значительной степени и посвящен предлагаемый курс лекций. В конце курса мы затронем также и электродинамику сплошных сред — поведение электромагнитного поля в веществе.

Мы начнем с электростатики и магнитостатики, рассмотрим поля, зависящие от времени и завершим этот раздел уравнениями Максвелла и определением электромагнитных потенциалов, описывающих как электрическое, так и магнитное поле.

1.1.1 Электромагнитные заряды и токи.

Встречающиеся в природе заряды кратны т.н. элементарному заряду, совпадающему зарядом электрона

$$\boxed{\text{Элементарный заряд } e = 4.8 \cdot 10^{-10}\text{CGSE} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{кулон}}$$

По этой причине говорят о *дискретности* заряда. [1]

Дискретность заряда проявляется в аналоговых электронных приборах в качестве т.н. "дробового эффекта".

Задача 1 В современном процессоре число элементов достигает 10^{10}, рабочая частота $3 \cdot 10^9$ гц. *В предположении*, что потребляемый ток 100 А делится поровну между элементами, оценить количество электронов, приходящихся на один такт процессора.

---

[1] Заряды всех элементарных частиц кратны e. Заряды кварков кратны $e/3$, но в свободном виде кварки не существуют, а заряд образующихся из них частицы всегда кратен целому значению e.

Макроскопические заряженные тела состоят из большого числа точечных зарядов. На практике более удобна идеализация *непрерывного* распределения зарядов — в тех случаях, когда расстояния между зарядами очень мало по сравнению с масштабами задачи. В этом случае в рассматриваемом объеме количество носителей заряда велико, и дискретную функцию величины заряда можно аппроксимировать плавной, введя *макроскопическую* плотность заряда.

Макроскопическая плотность заряда определяется как предел отношения заряда Δq к занимаемому им малому объему ΔV:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}; \tag{1}$$

При этом предполагается, что заряд Δq все же *достаточно велик* по сравнению с элементарным зарядом e.

Электрический ток возникает при движении зарядов, и

макроскопическая плотность тока определяется как

$$\vec{j} = \rho\vec{v}. \tag{2}$$

Для точечного заряда плотность заряда

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

и ***микроскопическая*** плотность заряда для макроскопического тела

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i e_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \tag{3}$$

есть **сумма** вкладов от отдельных зарядов.

1.1.2 Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности)

.

Полный заряд сохраняется: изменение заряда внутри некоторого объема V, ограниченного замкнутой поверхностью S, равно потоку заряда $\vec{j}$ через эту поверхность:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}V\,\rho(\vec{r},t) = \int_V \mathrm{d}V\,\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\oint_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \mathrm{d}V\,\mathrm{div}\,\vec{j},$$

что дает ***интегральную***

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q + \oint_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad (4)$$

и ***дифференциальную*** форму закона сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0. \qquad (5)$$

1.1.3 Взаимодействие зарядов и токов.

Взаимодействие двух точечных зарядов q_1 и q_2 расположенных на расстоянии $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ друг от друга описывается ***законом Кулона*** (Шарль Кулон, 1785г.):

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k_1 q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \qquad (6)}$$

здесь $\vec{F}_{12} \equiv \vec{F}_{1\to 2}$ — сила, действующая со стороны первого заряда на второй.

Зависимость кулоновской силы от расстояния $|F_{12}| = \text{const}/r^s$ неоднократно проверялась экспериментально. В 1971 году было показано (Э. Р. Уильямс, Д. Е. Фоллер и Г. А. Хилл) что $s = 2$ с точностью $(3.1 \pm 2.7) \cdot 10^{-16}$

Магнитостатическое взаимодействие двух электрических токов дается ***законом Ампера*** (Андре Мари Ампер,1820г.). В формулировке Максвелла (для двух замкнутых рамок 1 и 2 с токами I_1 и I_2) он принимает вид:

$$\vec{F}_{12} = k_2 I_1 I_2 \oint_2 \oint_1 \frac{[\mathrm{d}l_2 \times [\mathrm{d}l_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{7}$$

здесь $\vec{F}_{12} \equiv \vec{F}_{1\to 2}$ — сила, действующая со стороны первой рамки на вторую.

Коэффициенты пропорциональности k_1 и k_2 определяются выбором системы единиц (см. ФЛФ, т.5, стр.70).

Напомним две наиболее употребительные системы единиц, систему СИ, используемую преимущественно в технике, и систему CGSE, встречающуюся в научных исследованиях:

СИ		**CGSE**	
Основные единицы			
длина	*м* (метр)	длина	*см* (сантиметр)
масса	*кг* (килограмм)	масса	*г* (грамм)
время	*сек*	время	*сек*
ток	*а* (ампер)	заряд:	1 ед. CGSE (1 *Фр*)
Производные единицы			
сила	$н = \frac{кг \cdot м}{сек^2}$ (ньютон)	сила	$дина = 1 \frac{г \cdot см}{сек^2}$
заряд	$кул = а \cdot сек$ (кулон)	ток	$статА = 1\ Фр/сек$

Таблица 1: Основные и производные единицы

В **системе СИ** основной единицей является не единица заряда, а ***единица тока***, что отражает прикладной характер системы СИ: точное измерение тока осуществить намного легче, чем заряда.

Отсюда возникает определение единицы тока:

Два линейных параллельных проводника, по которым текут токи силой $1 a$ и которые расположены на расстоянии $1 м$ друг от друга, взаимодействуют с силой $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины.

Единица заряда — *кулон* является в СИ производной единицей: 1 Кл $= a \cdot сек$

В **системе CGSE** закон Кулона приобретает простой вид:

Два одинаковых единичных заряда, разделяемых расстоянием 1 *см* отталкиваются с силой 1 *дин*.

В CGSE единица заряда, называемая также *статкулоном* (в зарубежной литературе *фра́нклином*) имеет размерность

$$\textit{дина}^{1/2} \cdot \textit{см}$$

Из нее выводятся определения для напряженности поля, сопротивления, индуктивности, емкости и других единиц.

Соответственно, запись многих формул в системе CGSE приобретает особую простоту, ценимую в научной среде...

Значения коэффициентов k_1 и k_2:

в **СИ**	в **CGSE**
$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $k_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}$ где ε_0, μ_0 — *диэлектрическая* и *магнитная* проницаемость вакуума: $\varepsilon_0 = 10^7/4\pi c^2 \frac{а^2 \cdot сек^4}{кг \cdot м^3} = 10^7/4\pi c^2 \frac{ф}{м}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{кг м^2}{а^2 \cdot \text{сек}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{гн}{м}$ Единица индуктивности – *генри* $1 гн = \frac{кг м^2}{а^2 \cdot \text{сек}^2}$ Единица емкости – *фарада* $1 ф = \frac{а^2 \cdot сек^4}{кг \cdot м^2}$ Единица напряженности электрического поля 1 $н/кул$ = 1 $в/м$ Единица индукции магнитного поля 1 т (тесла) ($\approx 10^4 гаусс$) ***В частности***, $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \frac{м^2}{сек^2}$	$k_1 = 1$, или $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ $k_2 = 1/c^2$, $\mu_0 = 4\pi/c^2$

Задача 2 Оценить силу магнитного притяжения двух проводов в шнуре электроутюга, полагая ток $I \sim 3$ *а*, расстояние между жилами $r \sim 2$ *мм*.
Ответ: $F \sim 0.45$ *н/м*.

Задача 3 Оценить то же самое за счет *электростатического* взаимодействия.
Ответ: $F \sim 4 \cdot 10^{-5}$ *н/м*.

Задача 4 Выразить в вольтах единицу напряжения CGSE.

1.2 Электростатика: электрическое поле.

Понятие электрического поля. Рассмотрим пробный заряд $e \to 0$ (настолько малый, что не влияет на движение других частиц) и, измеряя в каждой точке пространства действующую на него со стороны электрического поля силу $\vec{F}(\vec{r})$, определим векторную функцию

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{e \to 0} \frac{1}{e} \vec{F}(\vec{r}), \qquad (8)}$$

называемою ***напряженностью* электрического поля**.

Эта функция не зависит от величины пробного заряда; зная ее, можно найти силу, действующую на любой заряд, помещенный в данную точку — при условии, что такой заряд достаточно мал, чтобы не повлиять на положение других зарядов.

Пример: для точечного заряда q, исходя из закона Кулона, имеем

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eq\vec{R}}{R^3} \tag{9}$$

Соответственно, для напряженности электрического поля одиночного заряда получим

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{R}}{R^3} \tag{10}}$$

Принцип суперпозиции. Электрическое поле для системы зарядов равно *векторной* сумме полей от каждого заряда:

$$\vec{E}_{(\sum q_i)}(\vec{r}) = \sum_i E_{q_i}(\vec{r}). \tag{11}$$

Это очень нетривиальное свойство называется *принципом суперпозиции*. Фактически оно означает, что

любое электростатическое поле может быть “набрано” как сумма полей точечных зарядов,

причем вклад от каждого точечного заряда в “общее” поле <u>не зависит</u> от наличия других зарядов и дается выражением (10).

Силовые линии. Для описания векторного электрического поля удобно ввести т.н. *силовые линии*, таким образом, чтобы их плотность $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}S}$ в любой точке равнялась нормальной к площадке $\mathrm{d}\vec{S}$ компоненте напряженности электрического поля:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}S} = E_n, \quad \text{или} \quad \mathrm{d}w = \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} \tag{12}$$

Потоком $\mathrm{d}w$ *электрического поля* называется количество силовых линий, пересекающих элемент поверхности $\mathrm{d}S$.

Для *точечного заряда* поток

$$\mathrm{d}w = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{R}\mathrm{d}\vec{S}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}S_R}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega \tag{13}$$

как и полный поток w,

$$w = q/\varepsilon_0 \quad \text{(в системе СИ)}, \qquad w = 4\pi q \quad \text{(в системе CGSE)} \tag{14}$$

не зависит от R.

Это обстоятельство порождает для системы зарядов весьма важную и крайне полезную ***теорему Гаусса***, связывающую *поток электрического поля* через замкнутую поверхность S с *полным зарядом* внутри объема V, ограниченного поверхностью S (в системе СИ):

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \qquad (15)}$$

(интегральная форма).

В *дифференциальной* форме это уравнение принимает вид (в системе СИ):

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \qquad (16)}$$

Соответствующие формулы в системе CGSE получаются заменой $\varepsilon_0 \to 1/4\pi$.

Замечание 1 Функция $\vec{r}/r^3$ по сути совпадает с умноженным на $4\pi\varepsilon_0$ электрическим полем (10) точечного *единичного* ($q = 1$) заряда. Прямое вычисление $\operatorname{div} \vec{r}/r^3$ дает 0 при $r \neq 0$, что ожидаемо, т.к. плотность точечного заряда $\rho(r) = \delta(\vec{r})$ и отлична от нуля лишь в точке $r = 0$, где дивергенция не определена. Использование теоремы Гаусса 16 позволяет доопределить дивергенцию и в точке $r = 0$, как

$$\operatorname{div} \vec{r}/r^3 = \delta(\vec{r}) \tag{17}$$

В заключение подчеркнем важнейшие
Свойства силовых линий электрического поля:

1. Начинаются и кончаются только на зарядах.
2. Не пересекаются.
3. Не замкнуты в случае *статических* полей.

На последнем свойстве мы подробнее остановимся ниже.

Задача 5 Используя принцип суперпозиции и результат (13), доказать теорему Гаусса (15).

Задача 6 Найти поле над бесконечной однородно заряженной плоскостью, $\sigma-$плотность заряда на единицу поверхности.
Ответ: $\vec{E} = \sigma/2\varepsilon_0$.

Задача 7 Найти поле однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда σ.
Ответ: $\vec{E} = \sigma\vec{R}/2\pi\varepsilon_0 R^2$.

Задача 8 Сфера радиуса R равномерно заряжена по поверхности, полный заряд равен q. Найти зависимость поля от радиуса внутри и снаружи сферы.

Задача 9 Шар радиуса R равномерно заряжен по объему, полный заряд равен q. Найти зависимость поля от радиуса внутри и снаружи шара.

Задача 10 Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного по объему (плотность заряда ρ) имеется сферическая полость радиуса a. Центр полости смещен по отношению к центру шара на вектор $\vec{b}$ так, что $|\vec{b}| + a < R$. Найти поле внутри полости.

Работа в электростатическом поле. Работа, совершаемая электрическим полем над зарядом e вдоль пути l равна

$$\mathcal{A} = \int_l \vec{F}\mathrm{d}\vec{l} = e\int_l \vec{E}\mathrm{d}\vec{l}. \tag{18}$$

Поле называется *потенциальным*, если работа $\mathcal{A}$ не зависит от пути l и определяется лишь начальным и конечным положением заряда e. Это эквивалентно утверждению, что работа в потенциальном поле по *любому замкнутому* пути равна нулю:

$$\mathcal{A} = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = 0. \tag{19}$$

Теорема Стокса позволяет получить дифференциальную форму этого уравнения:

$$\oint_l \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \tag{20}$$

Потенциальность электрического поля точечного заряда легко проверить прямым вычислением величины $\operatorname{rot}\vec{E}$:

Задача 11 Доказать, что электрическое поле точечного заряда (10) потенциально: $\operatorname{rot}(\vec{R}/R^3) = 0$.

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что электростатическое поле, которое может быть "набрано" из полей ***покоящихся*** точечных зарядов, потенциально *всегда*.

Таким образом, уравнения электростатики в дифференциальной и интегральной форме принимают вид:

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0 & \oint_l \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = 0 \\ \hline \end{array} \qquad (21)$$

1.3 Электростатика: скалярный потенциал.

В случае потенциального электрического поля можно ввести скалярную функцию — ***скалярный потенциал*** φ таким образом, что

$$\boxed{\vec{E} \equiv -\nabla\varphi \equiv -\operatorname{grad}\varphi. \qquad (22)}$$

В механике аналогичным образом вводится потенциальная энергия $U(\vec{r})$ — скалярная функция координат, градиент которой описывает силовое потенциальное поле $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Разумеется, далеко не каждое силовое поле $\vec{F}(\vec{r})$ является потенциальным — необходимо, чтобы оно удовлетворяло условию потенциальности:

$$\oint \vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = 0. \qquad (23)$$

Выше мы уже показали, что электростатическое поле этим свойством обладает.

Основные свойства электростатического потенциала φ:

1. Принцип суперпозиции:

$$\varphi_{\sum q}(\vec{r}) = \sum_q \varphi_q(\vec{r}) \tag{24}$$

   Потенциал системы зарядов равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов.

2. Условие потенциальности электростатического поля выполнено автоматически: $\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times (-\nabla\varphi) \equiv 0$.

3. Теорема Гаусса приводит к *уравнению Пуассона*:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla(-\nabla\varphi) \equiv -\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \Longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = -\tfrac{1}{\varepsilon_0}\rho} \tag{25}$$

Таким образом, вместо двух уравнений Максвелла — причем, одного скалярного и одного *векторного*(!), мы получаем *одно* скалярное уравнение (25).

Используя принцип суперпозиции и граничное условие на бесконечности: $\varphi(\infty) = 0$, легко получить общее решение

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}V' \qquad (26)}$$

Откуда для электрического поля имеем

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}V' \qquad (27)}$$

Таким образом, зная распределения зарядов, мы всегда можем вычислить по нему и потенциал $\varphi(\vec{r})$, и напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$.

Полученный результат (26) может быть представлен в более элегантном виде, с использованием метода *функций Грина*.

Вводя ***функцию Грина*** как

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}\,') \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (28)}$$

можно выразить потенциал как результат линейного интегрального преобразования распределения плотности заряда, с ядром $G(\vec{r}, \vec{r'})$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}\,') \rho(\vec{r}\,') \mathrm{d}V' \qquad (29)$$

С *математической точки зрения* это отражает свойство линейности уравнений электродинамики по отношению к источникам полей, в данном случае — распределению плотности зарядов.

С *физической точки зрения* — это проявление уже упомянутого *принципа суперпозиции* для электрического поля. Введенная функция Грина (28) по сути является потенциалом $\varphi(\vec{r})$ единичного заряда, помещенного в точку $\vec{r}\,'$, а $\rho(\vec{r}\,')$ — плотность (единичных) зарядов в этой точке.

Замечание 2 Для точечного заряда $\rho(r) = e\delta(r)$, а потенциал $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$, откуда следует полезное математическое тождество: $\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(r)$.

Задача 12 Найти распределение потенциала и напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженным толстым слоем толщиной d.

Задача 13 а) Найти распределение потенциала и напряженности электрического поля внутри и снаружи сферы радиуса R, равномерно заряженной по поверхности с плотностью заряда σ.
б) То же — для шара радиуса R, равномерно заряженного по объему с плотностью заряда ρ_0.

Задача 14 Два заряда, равных по величине и противоположных по знаку находятся на расстоянии a друг от друга. Изобразить качественно картину силовых линий и линий постоянного потенциала.

1.4 Магнитостатика: магнитное поле.

Изучение силового поля, действующего на пробный электрический заряд, позволило ввести весьма полезное понятие напряженности электрического поля $\vec{E}$. К сожалению, буквально повторить подобное для магнитного поля нельзя — *магнитных зарядов в природе не существует*!

Тем не менее, проведенное Жаном Батистом Био и Феликсом Саваром в 1820 году экспериментальное изучение взаимодействия *двух токов* различной формы, позволило Пьеру Лапласу ввести понятие силового магнитного поля — ***магнитной индукции*** $\vec{B}$; роль пробного заряда в данном случае по сути сыграл *пробный контур с током.*

Детальный анализ эмпирических данных привел установлению эмпирической формулы, известной как закон ***Био-Савара-Лапласа*** (**в системе СИ**):

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{\left[\mathrm{d}\vec{l'} \times \vec{R}\right]}{R^3}, \quad \vec{R} \equiv |\vec{r} - \vec{r'}| \qquad (30)}$$

Тогда, в соответствии с законом Ампера(7) сила, действующая на элемент пробного тока $I_\text{п}\mathrm{d}\vec{l}$ (***сила Ампера***) равна

$$\mathrm{d}\vec{F}_\text{п} = I_\text{п} \left[\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right] \qquad (31)$$

В системе CGSE:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} I \int_l \frac{\left[\mathrm{d}\vec{l'} \times \vec{R}\right]}{R^3}, \quad \text{причем} \quad \mathrm{d}\vec{F}_\text{п} = \frac{1}{c} I_\text{п} \left[\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right] \qquad (32)$$

Обратим внимание на то, что определение $\vec{B}$ в CGSE отличается от определения в СИ: в частности, в CGSE поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$ имеют *одинаковую* размерность.

Принцип суперпозиции справедлив и для магнитных полей:

результирующее поле $\vec{B}$, создаваемое контуром l, равно *векторной сумме* полей от различных элементов $I_{\text{п}}\mathrm{d}\vec{l}$.

В свою очередь, рассматривая объемный ток как сумму линейных токов, можно (30) обобщить и на случай объемных токов:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\left[\vec{j}(r') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\right]}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \mathrm{d}V'. \tag{33}$$

Здесь $\vec{j}(r)$ – плотность объемного тока.

Аналогично тому, как это было сделано для электрического поля, для магнитного поля можно ввести понятие ***магнитных силовых линий***, направленных в каждой точке вдоль вектора $\vec{B}$, с плотностью равной $\left|\vec{B}\right|$.

Так же, как и в случае электрического поля, они

а) непрерывны;

б) замкнуты.

Последнее есть следствие отсутствия в природе магнитных зарядов. Математически это выражается как

$$\oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{34}$$

т.е. число силовых линий *входящих* внутрь объема, ограниченного поверхностью S равно числу линий *выходящих*.

или, в *дифференциальной* форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{35}$$

Циркуляция статического магнитного поля, в отличии от случая статического электрического поля, при наличии тока отлична от нуля (***теорема Ампера*** А.М. Ампер, 1826 г.):

$$\boxed{\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} \equiv \int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 I} \tag{36}$$

(**в системе СИ**). В *дифференциальной* форме это уравнение приобретает вид:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \tag{37}$$

В системе CGSE имеем, соответственно

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{38}$$

Для описания магнитного поля $\vec{B}$ можно ввести т.н. ***векторный потенциал***:

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \qquad (39)}$$

который, хотя и является (в отличии от электростатического потенциала!) векторной функцией, с плотностью тока связан значительно более простым образом, чем магнитное поле $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}V' \qquad (40)}$$

(ср. с (26)). Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что $\operatorname{rot} \vec{A}$ дает (33).

Столь же легко убедиться, что вектор-потенциал $\vec{A}$ (как и скалярный потенциал φ !) удовлетворяет ***уравнению Пуассона***:

$$\Delta\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\vec{j}(r')\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \\ = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\vec{j}(r')\left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right) = -\mu_0\vec{j} \qquad (41)$$

или

$$\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \qquad (42)}$$

В отличии от уравнения Пуассона для скалярного потенциала φ (25), содержащего в правой части плотность зарядов $\rho(\vec{r})$, уравнение Пуассона для вектор-потенциала $\vec{A}$ содержит плотность тока $\vec{j}(\vec{r})$

Задача 15 Найти вектор-потенциал $\vec{A}$ для прямолинейного проводника током I.

Задача 16 Найти вектор-потенциал $\vec{A}$ для кольцевого контура с током I.

Итак, уравнения, описывающие магнитное *статическое* поля принимают вид (**в системе СИ**):

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0; \tag{43}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \qquad \oint_l \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{j} \tag{44}$$

Первая пара уравнений в дифференциальной и интегральной форме выражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов, вторая пара дает связь магнитного поля с задающими его токами.

Для перехода в этих уравнениях к **системе CGSE** необходимо сделать замену $\mu_0 = 4\pi/c$, $B \to B/c$.

В заключение отметим также, что из *закона сохранения заряда* (5) также следует, что

в ***статическом*** случае *линии электрического тока* ***замкнуты***:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \tag{45}$$

т.к. *заряд не накапливается*

$$\partial \rho / \partial t = 0 \tag{46}$$

1.5 Поля, зависящие от времени, закон Фарадея, ток смещения.

До сих пор мы рассматривали лишь случай статических полей. В случае, когда состояние источников поля (зарядов и токов) меняется во времени, возникает ряд новых эффектов.

В 1831 году Майкл Фарадей обнаружил, что переменное магнитное поле может порождать т.н. *вихревое* (непотенциальное) электрическое поле, циркуляция которого отлична от нуля:

$$\oint_l \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} \tag{47}$$

и пропорциональна изменению потока магнитного поля. В дифференциальной форме

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (48)}$$

В свою очередь, переменное *электрическое* поле порождает так называемый "***ток смещения***", введенный Дж. Максвеллом в 1865 г.

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) \qquad (49)}$$

где величина

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}(\mu_0\varepsilon_0)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (50)$$

интерпретировалась Максвеллом как *ток смещения* зарядов, составляющих т.н. *эфир* — по сути, прототип современного *физического вакуума*. Максвелл ввел "ток смещения", в частности, и для объяснения прохождения *переменного* тока через конденсатор, представляющий собою явный разрыв цепи по *постоянному току*.

Окончательно, полная система уравнений Максвелла принимает вид (в системе СИ):

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$	$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \mathrm{d}V$
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{S}$
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0$
$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \int \mathrm{d}\vec{S}\left(\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

(51)

1.6 Потенциалы в случае полей, зависящих от времени.

Появление у электрического поля *вихревой* составляющей в присутствии *переменного* магнитного поля означает, что вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ не может быть сведен к *градиенту от скалярной функции*, т.е. не может выражаться только через скалярный потенциал φ.

> В случае полей, зависящих от времени, связь электрического поля с потенциалами (скалярным и векторным) должна быть модифицирована.

Сформулируем основные требования, которым обязана удовлетворить искомая связь.

Очевидно, что она должна быть модифицирована за счет добавки, зависящей от векторного потенциала: именно вектор-потенциал при наличии магнитного поля несомненно содержит требуемую ненулевую вихревую составляющую: $\operatorname{rot}\vec{A} \neq 0$. В силу линейности электродинамики эта связь обязана быть линейной; кроме того, эта добавка должна исчезать в статическом пределе полей, не зависящих от времени.

Модификация этой связи в виде

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (52)}$$

вполне удовлетворяет всем перечисленным требованиям.

Связь магнитного поля с вектор-потенциалом остается при этом неизменной:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad (53)$$

Легко убедиться, что уравнения Максвелла, не содержащие источников выполняются при этом автоматически:

$$\operatorname{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \tag{54}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=0, \tag{55}$$

в силу математических тождеств:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad}(\ldots) \;&\equiv\; 0,\\ \operatorname{div}\operatorname{rot}(\ldots) \;&\equiv\; 0.\end{aligned}$$

При подстановке потенциалов в оставшиеся два уравнения Максвелла получим:

$$\Delta\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} \;=\; -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{56}$$

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \;=\; -\mu_0\vec{j}+\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{57}$$

Эти уравнения можно упростить, используя неоднозначность потенциалов, определяемых соотношениями $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ и $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ (см. (53),(52)):

электрическое поле $\vec{E}$ и магнитное поле $\vec{B}$ остаются неизменными (инвариантными) при преобразовании

$$\vec{A} \;\to\; \vec{A} + \operatorname{grad} f(\vec{r}, t) \tag{58}$$

$$\varphi \;\to\; \varphi - \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) \tag{59}$$

Это свойство называется ***калибровочной инвариантностью уравнений электродинамики*** (уравнений Максвелла), а соотношения (58),(59) — ***калибровочными преобразованиями потенциалов***.

Неоднозначность в выборе потенциалов можно устранить, например, накладывая дополнительное условие, называемое ***калибровочным условием Лоренца*** или ***лоренцевской калибровкой***:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{60}$$

Замечание 3 Возможны и другие условия, наиболее популярными из которых являются:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \tag{61}$$

(кулоновская калибровка), и

$$\varphi = 0 \tag{62}$$

(гамильтонова калибровка).

В лоренцевской калибровке уравнения для потенциалов (56),(57) в **системе СИ** принимают вид

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \Box\varphi \ &= \ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho && (63) \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \Box\vec{A} \ &= \ \mu_0\vec{j} && (64) \end{aligned}}$$

Эти уравнения называются ***уравнениями Даламбера***, а дифференциальный оператор

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{65}$$

называется ***оператором Даламбера***.

Соответствующие уравнения в **системе CGSE** получаются заменой $\varepsilon_0 \to 1/4\pi$, $\mu_0 \to 4\pi/c^2$, $\vec{A} \to \vec{A}/c$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi &= 4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}$$

причем φ и $\vec{A}$ в этой системе оказываются одной и той же размерности!

В следующем разделе мы увидим, что данная запись уравнений классической электродинамики явным образом подчеркивает ее ***релятивистскую ковариантность***.

Другими словами, запись уравнений Максвелла в данной форме отражает тот замечательный факт, что появившиеся в 1884 году уравнения Максвелла в ныне принятой форме[2] (усилиями Хевисайда, Герца и Гибсса) уже "знали" о релятивистской природе окружающего нас мира — и это более, чем за 20 лет до создания Альбертом Эйнштейном специальной теории относительности!

[2]Строго говоря, теория классической электродинамики была сформулирована Максвеллом еще в 1864 году, в его знаменитом трактате "Динамическая теория электромагнитного поля" ("A dynamical theory of the electromagnetic field", еще за двадцать лет до того, как она была перефомулирована в ныне привычной форме.)

2 Релятивистская ковариантность классической электродинамики.

2.1 Основы специальной теории относительности.

2.1.1 Основные постулаты.

- Все ***инерциальные*** системы отсчета – движущиеся с *постоянной* относительной скоростью – *равноправны*.

- Существует ***максимально возможная скорость*** и она равна скорости света:

$$c = 2.99793 \cdot 10^8 \text{м/сек}. \tag{66}$$

Принцип относительности:
все законы природы одинаковы во всех ***инерциальных*** системах отсчета

Каждое **событие** характеризуется точкой (t, x, y, z) в 4-*мерном пространстве-времени*, где (x, y, z) – его пространственное положение, а t – соответствующий ему момент времени.

Понятие интервала. Рассмотрим два события, связанные *световым сигналом* и отвечающие во времени и пространстве двум точкам (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2). Первая точка соответствует *испусканию* светового сигнала, а вторая – его *регистрации*. Тогда из

равенства скорости света во всех инерциальных системах отсчета *одному и тому же* универсальному значению c

легко убедиться, что величина s_{21}, построенная как

$$(s_{21})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (67)$$

в этих системах ***инвариантна***
(и в данном случае равна нулю !).

А что будет, если взять два *произвольных* события? Справедливо *общее* утверждение:

Для *любой* пары событий (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2) величина s_{21}, определяемая как

$$(s_{21})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (68)$$

и называемая ***интервалом***, *также инвариантна* во всех (инерциальных) системах отсчета.

Это очень нетривиальное утверждение, имеющее далеко идущие последствия.

В самом деле, в *разных* (инерциальных) системах отсчета каждое из событий будет описываться *разными* наборами четверок (t, x, y, z), характеризующих *время* и *положение* события в пространстве.

Для *пары* событий пространственные расстояния между событиями из этой пары *могут быть разными*: например, если в одной из систем отсчета (обозначим ее A) события произошли в одной и той же пространственной точке, то в системе отсчета, движущейся относительно такой системы со скоростью V (обозначим ее B) расстояние между событиями будет равно $l = V\Delta t_B$, где Δt_B — время, разделяющее эту пару событий в системе B.

Из инвариантности интервала (68) по отношению к системам A и B немедленно следует, что и время, разделяющее эти два события в системе A, будет другим:

$$(\Delta t_A)^2 = (\Delta t_B)^2 - l^2/c^2 < (\Delta t_B)^2 \tag{69}$$

Другими словами, это означает — в отличии от *принципа относительности Галилея* (!), что

время, разделяющее два события, инвариантом не является и зависит от выбора системы отсчета.

2.1.2 Геометрическая интерпретация.

Инвариантность интервала имеет простую геометрическую интерпретацию, если предположить, что и *временная*, и 3 *пространственные* переменные нашего мира являются компонентами 4-мерного *псевдо*евклидового [3] векторного пространства.

> Определенный выше ***интервал*** приобретает в таком случае смысл *расстояния* между двумя точками в *псевдоэвклидовом* ***пространственно–временном континууме***.

Каждое тело совершает в этом пространстве движение по некоторой траектории, называемой ***мировой линией***.

[3]В евклидовом пространстве квадрат меры (расстояния) равен положительно определенной сумме квадратов разностей координат. В псевдоевклидовом пространстве в квадрат меры квадраты разностей координат могут входить с произвольными знаками; числа квадратов входящих со знаком (+) и знаком (-) определяют сигнатуру псевдоевклидова пространства. В нашем случае сигнатура равна (1,3).

Даже *покоящееся* в некоторой системе отсчета тело *движется во времени*; очевидно, что в других системах отсчета (отвечающих повороту 4-мерной системы координат) такое движение получит и пространственные составляющие.

Переход от одной инерциальной системы отсчета к другой в рамках геометрической картины интерпретируется как *поворот системы координат* в этом пространстве — очевидно, что расстояние между точками от такого поворота системы координат изменяться не должно.

Важная особенность псевдоевклидова пространства состоит в том, что знак квадрата интервала s_{12}^2 может быть как *положительным*, так и *отрицательным*. В силу инвариантности интервала инвариантом является и этот знак - соответственно, пары любых событий распадаются на две *инвариантные* группы:

а)пары, для которых $s_{12}^2 > 0$,

б) пары, для которых $s_{12}^2 < 0$.

В случае, когда для двух событий $s_{12}^2 > 0$, возможен такой поворот системы координат, что оба события окажутся *в одной и той же пространственной точке*, разделенные лишь временным интервалом. В этом случае говорят о ***времениподобном*** интервале между событиями.

Очевидно, что любые две точки, лежащие на одной *мировой линии* всегда разделены *времениподобным* интервалом — чтобы в этом убедиться, достаточно перейти в систему отсчета, в которой рассматриваемое тело покоится.

Все причинно-связанные события отвечают $s_{12}^2 \geq 0$, причем знак равенства достигается, например, для событий, связанных световым сигналом.

Для двух событий возможно также, что $s_{12}^2 < 0$, — в этом случае, очевидно, не существует такого выбора системы отсчета (поворота системы координат), при котором события будут разделены лишь во времени, однако возможен такой поворот, при котором они станут *одновременными* и будут разделены лишь пространственно. Такой интервал называют ***пространственноподобным***.

Очевидно, что пространственноподобные события не могут быть причинно связанными, т.к. воздействие причины на следствие должно в таком случае передаваться с мгновенной скоростью, что противоречит основному постулату о существовании *предельной скорости, равной скорости света*.

2.1.3 Собственное время, парадокс близнецов.

Пусть космонавт, находящийся на космическом корабле, измеряет отрезок времени $\Delta\tau$. Интервал между началом и концом этого отрезка, равный в системе покоя корабля

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta\tau)^2, \tag{70}$$

равен интервалу, измеренному в лабораторной системе, относительно которой корабль летит со скоростью v:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2, \tag{71}$$

где Δt — время, прошедшее между началом и концом измерения с точки зрения лабораторного наблюдателя, и $\Delta x = v \cdot \Delta t$ — соответствующее расстояние, пролетаемое космическим кораблем за этот период времени. Тогда

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - (\Delta x/c \cdot \Delta t)^2} = \Delta t\sqrt{1 - (v/c)^2} = \Delta t\sqrt{1 - \beta^2} \tag{72}$$

где $\beta \equiv v/c$. Тем самым в лабораторной системе соответствующее время между событиями равно

$$\Delta t = \Delta\tau\gamma, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1, \tag{73}$$

т.е. *движущиеся* часы идут *медленнее*. Время в системе покоя часов (т.е. в системе, где рассматриваемые события происходят *в одной и той же* пространственной точке) называется ***собственным временем***.

Собственное время в силу (71) с точностью до множителя c совпадает с интервалом и поэтому является релятивистским инвариантом.

Собственное время всегда меньше времени, прошедшего с точки зрения наблюдателя, движущегося относительно рассматриваемых событий. Это лежит в основе известного "***парадокса близнецов***": близнец, путешествующий на космическом корабле с околосветовой скоростью, после своего возвращения окажется значительно более молодым, чем его брат, остававшийся на Земле.

Замечание 4 На первый взгляд, парадокс близнецов нарушает принцип эквивалентности различных систем отсчета. В действительности, принцип эквивалентности относится лишь к инерциальным системам отсчета, тогда как близнец-путешественник движется *неинерциально*: для того, чтобы вернуться на Землю, он должен менять и скорость, и направление своего движения.

Задача 17 Один близнец движется с постоянной скоростью v_1, другой покоится. Потом, через время t_0 второй начинает движение со скоростью $v_2 > v_1$. По чьим часам к моменту встречи пройдет больше времени?

2.1.4 Релятивистское сокращение длины.

Пусть линейка движется в продольном направлении (вдоль своей длины) со скоростью $v \parallel x$, и в начальный момент времени $t = 0$ ее передний конец находится в точке $x = 0$. Задний конец линейки окажется в точке $x = 0$ в момент $t = l'/v$, где l' — длина линейки, *видимая* в лабораторной системе, а соответствующий интервал между двумя событиями

$$s^2 = c^2 t^2 = c^2\, l'^{\,2}/v^2.$$

В системе, движущейся вместе с линейкой (в которой линейка покоится), эти события разделены промежутком времени

$$\tau = l_0/v$$

(l_0 – длина линейки в системе ее покоя) и пространственным промежутком l_0, что отвечает интервалу

$$s^2 = c^2\tau^2 - l_0^2 = l_0^2(c^2/v^2 - 1).$$

Сравнивая оба интервала, имеем

$$l' = l_0\sqrt{1-(v/c)^2} = l_0/\gamma \tag{74}$$

т.е. движущееся тело сокращается в продольном направлении в γ раз!

Легко сообразить, что *поперечные* размеры тела остаются при этом неизменными.

2.1.5 Поворот в псевдоевклидовой плоскости (x, ct). Преобразования Лоренца

.

Как известно, преобразования поворота в евклидовой плоскости

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{aligned}$$

сохраняют инвариантной длину, квадрат которой определен как $r^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = r'^2$.

В *псевдоевклидовой* плоскости (x, ct) при преобразованиях поворота

$$\begin{aligned} x' &= x\,\mathrm{ch}\,\eta - ct\,\mathrm{sh}\,\eta \\ ct' &= ct\,\mathrm{ch}\,\eta - x\,\mathrm{sh}\,\eta \end{aligned} \tag{75}$$

(как нетрудно убедиться прямой подстановкой) инвариантным остается *интервал*, квадрат которого определен как

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

Выясним теперь *физический смысл* параметра η. Пусть координата $x = 0$, т.е. в системе отсчета связанной с координатами x, t тело покоится в точке $x = 0$. Тогда в системе отсчета, связанной с координатами x', ct', имеем $x' = -ct\,\mathrm{sh}\,\eta$ и $t' = t\,\mathrm{ch}\,\eta$, откуда $x'/t' = -c\,\mathrm{th}\,\eta$. Другими словами, в системе x', t' тело движется с постоянной скоростью

$$v' = -c\,\mathrm{th}\,\eta, \tag{76}$$

поскольку $x' = -ct' \cdot \mathrm{th}\,\eta \equiv -t' \cdot v'$.

> Таким образом, поворот в плоскости (x, ct) на угол η эквивалентен переходу в систему отсчета (x', ct'), двигающуюся относительно системы(x, ct) со скоростью $V = -v' = c\,\mathrm{th}\,\eta$

Как и обычные повороты в евклидовом пространстве, неевклидовы повороты в плоскости (x, ct) аддитивны:

$$(x, ct) \xrightarrow{\eta_1} (x', ct') \xrightarrow{\eta_2} (x'', ct'') \equiv (x, ct) \xrightarrow{\eta_1+\eta_2} (x'', ct'') \tag{77}$$

Далее, выражая параметр η через скорость v, получим

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma, \qquad \operatorname{sh}\eta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma\frac{v}{c} \tag{78}$$

в результате чего преобразования (75) примут вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{79}$$

В этом виде они известны как *преобразования Лоренца*, описывающие преобразования координат и времени в случае, когда одна система отсчета движется относительно другой вдоль оси x со скоростью v. Координаты y, z, перпендикулярные направлению движения остаются инвариантными.

Задача 18 Используя преобразования Лоренца, получить: а) релятивистское замедление времени (73) и б) релятивистское сокращение длины (74).

Задача 19 Используя (77), получить релятивистский закон сложения скоростей.

<u>*Решение:*</u> Пусть тело покоится в системе (x, ct). В системе (x', ct'), повернутой относительно (x, ct) на угол η_1 оно движется со скоростью $v_1 = c\,\mathrm{th}\,\eta_1$. Перейдем теперь в систему (x'', ct''), повернутую относительно системы (x', ct') на угол η_2; в ней система (x', ct') движется со скоростью $v_2 = c\,\mathrm{th}\,\eta_2$, а тело — с соответствующей "суммарной" скоростью

$$\begin{aligned} V &= c\,\mathrm{th}(\eta_1 + \eta_2) = c\frac{\mathrm{sh}(\eta_1 + \eta_2)}{\mathrm{ch}(\eta_1 + \eta_2)} = c\frac{\mathrm{sh}\,\eta_1\,\mathrm{ch}\,\eta_2 + \mathrm{ch}\,\eta_1\,\mathrm{sh}\,\eta_2}{\mathrm{ch}\,\eta_1\,\mathrm{ch}\,\eta_2 + \mathrm{sh}\,\eta_1\,\mathrm{sh}\,\eta_2} = \\ &= \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \end{aligned} \qquad (80)$$

□

2.2 Ковариантная фомулировка СТО: скаляры и вектора в 4-мерном пространстве-времени Минковского.

2.2.1 Законы преобразования при поворотах.

В обычном 3-мерном пространстве геометрические объекты классифицируются по отношению к преобразованиям поворота как

a) скаляры, остающиеся неизменными при поворотах,

b) вектора A_i, преобразующиеся как соответствующие компоненты радиус-вектора x_i,

c) тензоры ранга m $A_{i_1 \dots i_m}$ преобразующиеся как произведения $x_{i_1} \dots x_{i_m}$.

Аналогично в 4-мерном пространстве-времени Минковского объекты могут быть классифицированы по отношению к преобразованиям, включающим в себя обычные повороты и преобразования Лоренца:

a) релятивистский (лоренцевский) скаляр. Примером является интервал и любая функция от него — и то, и другое инвариантно по определению;

b) релятивистский 4-вектор $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{r})$. Компоненты любого 4-вектора A^μ должны преобразовываться по тем же правилам, что и компоненты 4-вектора x^μ:

$$A'^0 = \frac{A^0 - \beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, A'^1 = \frac{A^1 - \beta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, A'^2 = A^2, A'^3 = A^3 \quad (81)$$

Примером 4-вектора является также 4-скорость

$$u^\mu = c\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{82}$$

где $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau = c\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t$.

4-скорость выражается через 3-скорость, как $u^\mu = \gamma\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$, но преобразования Лоренца для 3-скорости — ***релятивистский закон сложения скоростей*** — выглядят несколько сложнее:

пусть космический корабль движется относительно наблюдателя со скоростью V, и пусть $\vec{v}\,'$ – скорость тела относительно космического корабля, тогда $\vec{v}$ – "суммарная" скорость тела относительно наблюдателя

$$v_\parallel = \frac{v'_\parallel + V}{1 + (\vec{v}_\parallel\vec{V})/c^2}, \quad \vec{v}_\perp = \frac{\vec{v}_\perp\,'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (\vec{v}_\parallel\vec{V})/c^2} \tag{83}$$

Легко видеть, что она никогда не превышает скорости света.

2.2.2 Скалярное произведение 4-векторов, метрический тензор.

Обобщая определение интервала, как скалярное произведение радиус-вектора с самим собой, для двух различных 4-векторов A^μ и B^μ его следует определить как разность произведения временных компонент и скалярного произведения трехмерных векторов, отвечающих пространственным компонентам:

$$A^0B^0 - (A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3). \tag{84}$$

Удобно для каждого 4-вектора ввести два эквивалентных определения. Первое из них, называемое *контравариантным* (фактически оно было уже использовано выше) строится из временной A^0 и пространственных компонент $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ как

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}), \tag{85}$$

тогда как определение *ковариантного* вектора A_μ отличается знаком пространственных компонент:

$$A_\mu = (A^0, -\vec{A}) \tag{86}$$

В обозначениях эти определения отличаются положением индекса: индекс сверху обозначает контравариантный вектор и называется *контравариантным индексом*, а индекс снизу обозначает ковариантный вектор и называется соответственно *ковариантным.*

Тогда скалярное произведение (84) может быть записано как

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu, \tag{87}$$

где также подразумевается *суммирование по паре повторяющихся индексов*: $A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$.

Использование контравариантного и ковариантного ***метрического тензора***

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

дает другой, эквивалентный способ записи скалярного произведения

$$A^\mu B_\mu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} \tag{88}$$

Фактически роль метрического тензора сводится к “опусканию” и “подниманию” индекса:

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}, \quad A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} \tag{89}$$

Задача 20 Показать, что для 4-скорости u^{μ} скалярное произведение $u^{\mu} u_{\mu} = 1$.

2.2.3 4-градиент и 4-вектор энергии-импульса.

Вектор ***4-градиента*** строится обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \equiv \partial_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \equiv \partial^\mu \qquad (90)$$

Следует подчеркнуть, что

дифференцирование по контравариантному вектору дает ковариантный вектор

и, *наоборот*:

дифференцирование по ковариантному вектору дает контравариантный вектор.

4-вектор энергии-импульса определен как

$$p^\mu = (E, c\vec{p}) \equiv (\gamma mc^2, \gamma mc\vec{v}) \tag{91}$$

Отметим, что

хотя энергия E - скаляр по отношению к 3-мерным (пространственным) поворотам, *по отношению к <u>преобразованиям Лоренца</u>* *она неинвариантна, т.к.* *является временной компонентой 4-вектора энергии-импульса.*

Задача 21 Показать, что $p^\mu p_\mu = m^2c^4$.

2.3 Релятивистская ковариантность классической электродинамики.

Различные представления уравнений Максвелла (дифференциальное и интегральное) связывают между собою напряженности полей $\vec{E}, \vec{H}$ и порождающие их источники – плотности зарядов и токов $\rho, \vec{j}$. Однако непосредственно из этих уравнений увидеть релятивистскую ковариантность классической электродинамики непросто. Не менее важная задача — установить правильные преобразования соответствующих величин в зависимости от системы отсчета.

2.3.1 4-вектор тока, уравнение непрерывности.

Проще всего начать с изучения законов преобразования для источников.

Пусть в покоящейся системе плотность зарядов равна ρ_0. В системе, движущейся со скоростью v, соответствующий элемент объема V_0 сокращается в продольном (вдоль скорости) направлении в γ раз:

$$V = V_0/\gamma,$$

поэтому соответствующая плотность заряда

$$\rho = \rho_0 \cdot \gamma, \tag{92}$$

т.к. полный заряд инвариантен: $\rho V = \rho_0 V_0$.

Соответственно, для плотности тока получим

$$\vec{j} = \rho_0 \gamma \vec{v} \tag{93}$$

Вспоминая, что 4-вектор скорости имеет вид $u^\mu = (c\gamma, \vec{v}\gamma)$, легко сообразить, что и комбинация $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$ также является 4-вектором, т.к.

$$j^\mu = \rho_0 u^\mu \tag{94}$$

С учетом этого закон сохранения заряда (5) – уравнение непрерывности — легко записывается в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{95}$$

По существу левая часть уравнения представляет собой 4-дивергенцию 4-вектора тока (94) – т.е. скалярное произведение 4-векторов ∂^μ и j^μ и является при этом релятивистским скаляром.

2.3.2 4-мерный вектор-потенциал A^μ.

Покажем, что комбинация

$$A^\mu = (\varphi/c, \vec{A}), \tag{96}$$

где φ и $\vec{A}$ скалярный и векторный потенциалы, определенные соотношениями (52) и (53), соответственно, образует ***4-мерный вектор-потенциал***.

Действительно, определение (96) позволяет уравнения Даламбера для скалярного потенциала φ (63) и векторного потенциала $\vec{A}$ (64) записать в виде одного уравнения (в системе СИ)

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu \tag{97}$$

(где использовано $\rho/\varepsilon_0 c = \rho c/\varepsilon_0 c^2 = \mu_0 \rho c$). Оператор Даламбера в 4-мерной записи представляет собой скалярный оператор $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$, и действие им на A^μ может дать 4-вектор $\mu_0 j^\mu$ лишь при условии, что A^μ *является 4-вектором.*

Уравнения Даламбера (63),(64) справедливы, если на потенциалы наложено условие лоренцевской калибровки (60), которое (в свою очередь!) в 4-мерных обозначениях обретает смысл равенства нулю 4-мерной дивергенции от A^μ:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{98}$$

Калибровочные преобразования (58),(59) в этих же обозначениях принимают вид

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu f \tag{99}$$

2.3.3 4-мерное представление для напряженностей полей.

Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ связаны с потенциалами φ и $\vec{A}$ как

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

или в покомпонентной записи

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
E_x = -\partial_x\varphi - \partial_t A_x & & H_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y \\
\hline
E_y = -\partial_y\varphi - \partial_t A_y & & H_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z \\
\hline
E_z = -\partial_z\varphi - \partial_t A_z & & H_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x \\
\hline
\end{array} \tag{100}$$

Вычисляя антисимметричный тензор $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ и сравнивая его компоненты с (100), легко увидеть, что

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \\
&= \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} & -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} & 0
\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}
0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\
\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\
\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\
\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0
\end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}. \qquad (101)
\end{aligned}$$

Тензор $F^{\mu\nu}$ называется ***тензором электромагнитного поля***.

Используя лоренцевскую калибровку (98) и уравнение Даламбера (97) и вычисляя 4-дивергенцию тензора $F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\Box A^\nu} - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \Box A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} = \mu_0 j^\nu$$

получим уравнения Максвелла в ковариантной 4-мерной записи:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \qquad (102)$$

Задача 22 Доказать, что тензор $F^{\mu\nu}$ калибровочно инвариантен.

Поскольку и левая, и правая часть уравнения (102) калибровочно инвариантны, это уравнение справедливо в любой калибровке, а не только в лоренцевской, в которой оно было получено.

Уравнения Максвелла (51) представляют собой систему из 8-ми *независимых* уравнений, тогда как в (102) содержится лишь 4 независимых уравнения, а именно:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Где же остальные четыре:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0\ ?$$

Эти уравнения содержатся в *тождестве Бьянки*:

$$C^{\lambda\mu\nu} \equiv \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \tag{103}$$

Задача 23 Прямым вычислением доказать тождество (103), пользуясь определением $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Задача 24 Используя антисимметричность $C^{\lambda\mu\nu}$ по любой паре индексов, доказать, что тождество (103) представляет собой 4 независимых уравнения.

2.3.4 Преобразования Лоренца для потенциалов и полей.

Напомним преобразования Лоренца (81) для координат $\vec{x}$ и времени t:

$$
\begin{aligned}
t' &= \gamma(t - \frac{1}{c^2}\vec{v}\vec{x}_{\parallel}) && (104)\\
\vec{x}'_{\parallel} &= \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}t) && (105)\\
\vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp}. && (106)
\end{aligned}
$$

Поскольку потенциалы φ и $\vec{A}$ представляют собой компоненты 4-вектора $A_\mu \equiv (\varphi/c, \vec{A})$ (96), они преобразуются аналогичным стандартным образом :

$$
\begin{aligned}
\varphi' &= \gamma(\varphi - \vec{v}\vec{A}_{\parallel}), && (107)\\
\vec{A}'_{\parallel} &= \gamma(\vec{A}_{\parallel} - \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi), && (108)\\
\vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp}. && (109)
\end{aligned}
$$

Напряженности полей являются компонентами 4-мерного тензора второго ранга

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{110}$$

и преобразуются как произведение соответствующих компонент 4-вектора. В 3-мерной записи эти преобразования принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{|l|l|} \hline \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \\ \hline \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\vec{v} \times \vec{E}]) \\ \hline \end{array} \right. \tag{111}$$

В нерелятивистском пределе $(v \ll c)$

$$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + [\vec{v} \times \vec{B}], \qquad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\vec{v} \times \vec{E}]$$

Задача 25 Объяснить, почему продольные компоненты поля остаются инвариантными: $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$ и $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$.

2.3.5 Инварианты поля.

Используя тензор $F^{\mu\nu}$ универсальный абсолютно антисимметричный тензор $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно построить две скалярные величины

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \mathrm{inv} \tag{112}$$

и

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho} = \vec{E}\vec{H} = \mathrm{inv}\,. \tag{113}$$

Являясь 4-мерными скалярами, они по отношению к преобразованиям Лоренца *инвариантны*.

Задача 26 Используя (111), явным вычислением доказать инвариантность (112) и (113).

2.3.6 Релятивистская частица в электромагнитном поле.

Физическая траектория частицы отвечает минимуму действия независимо от системы отсчета. Поэтому действие должно быть релятивистским инвариантом.

Для свободной частицы единственным инвариантом, зависящим от траектории частицы является *интервал*, поэтому естественно ожидать, что действие равно

$$S = -mc\int \mathrm{d}s = -mc\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{114}$$

где интеграл берется между *фиксированными мировыми точками, определяющими начало и конец траектории.*

Отсюда ***функция Лагранжа свободной частицы***

$$L_0 = -mc\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{115}$$

Минимум действия для свободной частицы в пространстве Минковского означает *максимум длины мировой линии с фиксированными концами* .

Длина мировой линии равна суммарному собственному времени вдоль нее, умноженному на скорость света c. Рассмотрим систему отсчета, в которой пространственные координаты начальной и конечной точки мировой линии совпадают. Для свободной частицы которая покоится в такой системе, мировая линия представляет собой прямую, направленную вдоль временной оси. Любая другая траектория, имеющая те же самые начало и конец, описывает движение близнеца-путешественника (вспомним парадокс близнецов!) и собственное время вдоль нее окажется меньше, а значит, меньше будет и суммарная длина соответствующей мировой линии.

В пространстве Минковского среди всех линий, соединяющих две мировые точки наибольшей длиной обладает не кривая, а прямая линия!

Взаимодействие с электромагнитным полем дает свой вклад в действие

$$
\begin{aligned}
S_{\text{int}} &= -\int j_\mu A^\mu \mathrm{d}s = &(116)\\
&= -\int e\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\varphi}{c}\mathrm{d}s + \int e\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\vec{A}\mathrm{d}s = \\
&= -e\int \varphi \mathrm{d}t + e\int \vec{A}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int L_{\text{int}}\mathrm{d}t &(117)
\end{aligned}
$$

откуда ***лагранжиан взаимодействия частицы с электромагнитным полем***

$$L_{\text{int}} = -e\varphi + e\vec{A}\vec{v} \qquad (118)$$

Таким образом, ***функция Лагранжа для частицы в электромагнитном поле***

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\vec{A}\vec{v} - e\varphi (\text{в системе СИ}) \tag{119}$$

или

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi (\text{в системе CGSE}) \tag{120}$$

Обобщенный импульс – ***канонический импульс***

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\vec{A} = \vec{p} + e\vec{A} \tag{121}$$

где $\vec{p} = m\vec{v}\gamma$ "обычный" импульс. В присутствии электромагнитного поля канонический импульс отличается от "обычного" импульса добавкой, пропорциональной вектор-потенциалу $\vec{A}$.

Гамильтониан частицы в электромагнитном поле строится обычным образом

$$\mathcal{H} = E = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi \qquad (122)$$

На первый взгляд, зависимость от поля выпала из гамильтониана. На самом деле она возникнет, если гамильтониан следует выразить в терминах естественных *канонических* переменных — координаты и импульса: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, \mathcal{P})$.

Сначала выразим скорость через канонический импульс $\vec{\mathcal{P}}$ и вектор-потенциал $\vec{A}$, используя (121):

$$(\vec{p})^2 = \left(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}\right)^2 = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 \qquad (123)$$

откуда

$$v^2 = \frac{\left(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}\right)^2}{m^2c^2 + \left(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}\right)^2} \tag{124}$$

и

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{m^2c^2 + \left(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}\right)^2} \tag{125}$$

Подставляя в выражение для гамильтониана (122), получим

$$\mathcal{H}(x, \mathcal{P}) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}\right)^2} + e\varphi \tag{126}$$

В *нерелятивистском* пределе $(\frac{v}{c} \ll 1)$ в **системе СИ** имеем хорошо известный результат

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}\right)^2 + e\varphi \tag{127}$$

и в **системе CGSE**, соответственно

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi \tag{128}$$

Рассмотрим теперь уравнения движения частицы в электромагнитном поле. Уравнения Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, \qquad \text{где} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \tag{129}$$

дают уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле:

$$\dot{\vec{p}} + e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{A} = e\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{v}) - e\vec{\nabla}\varphi, \tag{130}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= -e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\vec{\nabla}\varphi + e\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{v}) - e(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{A} = \\
&= -e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\vec{\nabla}\varphi + e\left[\vec{v}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\right] = \\
&= e\vec{E} + e\left[\vec{v}\times\vec{B}\right] = \vec{F}_e.
\end{aligned}$$

Таким образом, ***уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле*** принимают вид:

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + e\left[\vec{v} \times \vec{B}\right] = \vec{F}_e. \tag{131}$$

Первое слагаемое описывает действие электрического поля $\vec{E}$ на заряд, второе – ***силу Лоренца***, описывающее действие магнитного поля $\vec{B}$ на *движущийся* заряд. Изменение энергии частицы в единицу времени равно

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_e\vec{v} = \left\{e\vec{E} + e\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right\}\vec{v} = e\vec{E}\vec{v} \tag{132}$$

т.е. работу над частицей совершает только электрическое поле $\vec{E}$, и изменение энергии от магнитного поля $\vec{B}$ не зависит.

3 Статические поля.

3.1 Условия применимости статического приближения.

Согласно СТО, скорость распространения полей конечна и не может превышать скорость света. Другими словами, изменение положения зарядов и токов скажутся на величине поля для наблюдателя, удаленного на расстояние R, через время

$$\tau = R/c. \tag{133}$$

Это время должно быть мало по сравнению с характерным временем T движения (или колебания) зарядов внутри системы, т.е. $\tau \ll T$. В случае, когда наблюдатель находится вблизи системы, т.е. $R \sim L$ (размеров системы), это приводит к минимальному требованию – ограничению на скорость зарядов $v/c \ll 1$. При выполнении этого условия справедливо рассмотренное ранее статическое приближение для зарядов, токов и порождаемых ими полей (см. (26),(27) и (40),(33)):

$$\left\{\boxed{\begin{array}{l}\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \\ \hline \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\frac{\rho(r')}{R} \\ \hline \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\rho(r')\frac{\vec{R}}{R^3}\end{array}}\right. \quad \left\{\boxed{\begin{array}{l}\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \hline \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}(r')}{R} \\ \hline B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\vec{j}(r')\frac{\vec{R}}{R^3}\end{array}}\right. \tag{134}$$

т.е. с помощью статических функций Грина (28):

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{135}$$

потенциали (и поля) выражаются через распределения зарядов и токов (здесь $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$).

3.2 Электрические поля на больших расстояниях, мультипольное разложение.

Рассмотрим наблюдателя, находящегося на расстоянии $R \gg L$, где L — характерный размер системы зарядов. Выберем начало координат внутри системы зарядов, $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор, указывающий на заряд, $\vec{r}$ — радиус-вектор, указывающий на наблюдателя. Поскольку $|\vec{r}\,'| \sim L \ll |\vec{r}| \sim R$, для (134) справедливо разложение

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} r'_i \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\frac{1}{r} + \ldots \tag{136}$$

что для скалярного потенциала дает

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} - \vec{d}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} + \frac{1}{6}Q_{ij}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\frac{1}{r} + \ldots\right\} \tag{137}$$

где использовано

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} = -\frac{r_i}{r^3}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\frac{1}{r} = \frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}$$

и введены обозначения

$$q = \int \mathrm{d}V \rho(\vec{r}) \text{ — полный заряд системы,}$$

$$\vec{d} = \int \mathrm{d}V \vec{r}\rho(\vec{r}) \text{ — электрический дипольный момент системы,}$$

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}V \left(r_i r_j - \frac{r^2}{3}\delta_{ij}\right)\rho(\vec{r}) \text{ — квадрупольный момент системы.}$$

Электрическое поле диполя

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q\vec{r}}{r^3} + \left(\frac{3\vec{r}(\vec{d}\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3}\right)\right\}. \qquad (138)$$

Легко видеть, что поле диполя спадает гораздо быстрее ($\propto \frac{1}{r^3}$), чем поле заряда ($\propto \frac{1}{r^2}$)!

Задача 27 При каком условии дипольный момент не зависит от выбора начала координат?

Решение. Сдвинем начало координат на вектор $\vec{a}$, тогда дипольный момент

$$\vec{d}' = \int \mathrm{d}V(\vec{a} + \vec{r})\rho(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V\vec{r}\rho(\vec{r}) + \int \mathrm{d}V\vec{a}\rho(\vec{r}) = \vec{d} + \vec{a} \cdot q$$

Дипольный момент не зависит от выбора начала координат при условии $q = 0$.

Задача 28 Приведите пример диполя и квадруполя.

В общем случае разложение (136) при $r' < r$ может быть представлено в виде

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta, \alpha) Y_{lm}^*(\theta', \alpha') \tag{139}$$

где углы (θ, α) и (θ', α') отвечают направлениям векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ соответственно. Тогда соответствующее разложение скалярного потенциала (137) примет вид

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta, \alpha) Q_{lm}^* \tag{140}$$

где соответствующий мультиполь в представлении шаровых функций принимает вид

$$Q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int r'^2 \mathrm{d}r' \mathrm{d}\Omega' \rho(r', \theta', \alpha') r'^l Y_{lm}(\theta, \alpha) \tag{141}$$

3.3 Магнитные поля на больших расстояниях, магнитный дипольный момент, гиромагнитный фактор .

Рассмотрим вектор-потенциал системы токов на больших расстояниях $r \gg L$, где L — размер области, занимаемой токами $\vec{j}(r)$:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}(r')}{R} \tag{142}$$

(здесь $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$). На больших расстояниях, как и в случае системы зарядов, можно воспользоваться разложением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}'\vec{r})}{r^3} + \dots$$

по малому параметру (r'/r) $(L/r) \ll 1$.

Первый член разложения обращается в нуль

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}V'\vec{j}(r') = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}e\sum_i \vec{v_i}\,' = $$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e\sum_i \vec{r_i}\,'\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{d} = 0$$

поскольку в статической системе токов дипольный момент системы не зависит от времени, т.к. заряд не накапливается, распределение заряда стационарно и не зависит от времени.

Рассмотрим теперь второй член разложения

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}(r')(\vec{r}\,'\vec{r})}{r^3}.$$

Преобразуем, выделяя полную производную по времени:

$$\begin{aligned}\vec{j}(r')(\vec{r}\,'\vec{r}) &= e\sum_i \frac{\vec{v}_i\,'(\vec{r}\,\vec{r}\,') - \vec{r}_i\,'(\vec{r}\,\vec{v}_i\,')}{2} + e\sum_i \frac{\vec{v}_i\,'(\vec{r}\,\vec{r}\,') + \vec{r}_i\,'(\vec{r}\,\vec{v}_i\,')}{2} = \\ &= e\sum_i \frac{\vec{r}\times[\vec{v}_i\,'\times\vec{r}_i\,']}{2} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e\sum_i \frac{\vec{r}_i\,'(\vec{r}\,\vec{r}\,')}{2}}_{=0} = \frac{\vec{r}\times[\vec{j}\,'\times\vec{r}_i\,']}{2}\end{aligned}$$

Второе слагаемое также обращается в нуль для статического распределения зарядов и токов. Таким образом, в рамках данного приближения

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{r}\times[\vec{j}'\times\vec{r}_i\,']}{2r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\left[\vec{m}\times\nabla\frac{1}{r}\right]+\ldots\right\} \tag{143}$$

где введен ***магнитный дипольный момент***

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V'\left[\vec{r}\,'\times\vec{j}(r')\right] \tag{144}$$

Соответствующее магнитное поле получается взятием ротора от полученного вектор-потенциала:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m}\left(\nabla,\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\underbrace{\vec{m}4\pi\delta(\vec{r})}_{=0\text{на больших }\vec{r}} - \frac{1}{r^3}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\right) = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{m}}{r^3} - 3\frac{\vec{r}(\vec{m},\vec{r})}{r^5}\right) \qquad (145)
\end{aligned}$$

Задача 29 Найти магнитный момент плоского контура с током I.

Решение:

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V'\left[\vec{r}\,'\times\vec{j}(r')\right] = \frac{I}{2}\oint\left[\vec{r}\,'\times \mathrm{d}\vec{l}\right] = I\cdot\vec{S} \qquad (146)$$

□

Для системы движущихся точечных зарядов в (системе СИ) магнитный момент может быть представлен в виде:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i e_i[\vec{r}_i \times \vec{v}_i] \tag{147}$$

(или $\frac{1}{2c}\sum_i e_i[\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$ в системе CGSE). В случае, когда для всех зарядов $e_i/m_i = \text{const} \equiv e/m$, и $v \ll c$, то магнитный момент системы оказывается пропорционален механическому:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{e_i}{m_i}[\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \frac{e}{2m}\sum_i[\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = g\vec{M} \tag{148}$$

где $\vec{M}$ — механический момент импульса системы, и

$$g = e/2m \tag{149}$$

называется гиромагнитным отношением или ***гиромагнитным фактором***. Гиромагнитный фактор может быть определен также для любого тела, распределения плотности массы и заряда в котором совпадают.

4 Энергия поля.

4.1 Плотность энергии поля и вектор Пойнтинга.

Изучим для замкнутой системы и заряженных частиц, и электромагнитного поля баланс энергии. Поскольку для замкнутой системы полная энергия сохраняется, изменение механической энергии заряженных частиц будет связано с изменением энергии взаимодействующего с зарядами поля.

Начнем с рассмотрения уравнений Максвелла, описывающих взаимодействие поля с источниками:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Умножая первое на $(-\vec{B})$, а второе – на $(\vec{E})$ и складывая, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c^2}E^2 + B^2\right\} + \mu_0 \cdot \left(\vec{j}\vec{E}\right) = \left(\vec{E} \cdot \operatorname{rot}\vec{B}\right) - \left(\vec{B} \cdot \operatorname{rot}\vec{E}\right) \tag{150}$$

Покажем, что правая часть равна $[-\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})]$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) &= \varepsilon^{ijk}\nabla^i(E^j B^k) = \\ &= \varepsilon^{ijk}B^k(\nabla^i E^j) + \varepsilon^{ijk}E^j(\nabla^i B^k) = \\ &= B^k \underbrace{\varepsilon^{kij}(\nabla^i E^j)}_{\operatorname{rot}\vec{E}} - E^j \underbrace{\varepsilon^{jik}(\nabla^i B^k)}_{\operatorname{rot}\vec{B}}\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Далее, учтем, что слагаемое $\left(\vec{j}\vec{E}\right)$ описывает скорость изменения кинетической энергии.

$$\left(\vec{j}\vec{E}\right) = \sum_i e\vec{v}_i\vec{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_{\text{кин}}$$

Интегрируя (150) по объему, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{c^2}E^2+B^2\right\}\mathrm{d}V+\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int\varepsilon_{\text{кин}}\mathrm{d}V}_{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = -\int\mathrm{d}V\,\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{B}) = = -\oint\mathrm{d}\vec{S}[\vec{E}\times\vec{B}] \quad (151)$$

Таким образом, изменение кинетической энергии частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{\text{кин}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int\left\{\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right\}\mathrm{d}V\right]-\oint\mathrm{d}\vec{S}\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] \quad (152)$$

складывается из изменения энергии электромагнитного поля (первое слагаемое) и потока энергии через охватывающую поверхность (второе слагаемое).

Тем самым мы установили, что поле обладает ***плотностью энергии***

$$w_{\text{поля}} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right\} \tag{153}$$

и ***потоком энергии***

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E} \times \vec{B}] \tag{154}$$

(***вектор Пойнтинга***). Т.е. поле выступает как *материальный объект*, а не абстракция для описания дальнодействия.

4.2 Электростатическая энергия заряженной системы .

Электростатическая *потенциальная энергия* системы заряженных частиц по сути является *энергией электрического поля*, порождаемого зарядами этих частиц.

Вычисляя энергию электрического поля и выражая поля через распределение индуцировавших их зарядов, получаем

$$
\begin{aligned}
W_{\text{э}} &= \int \mathrm{d}V \cdot \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathrm{d}V \cdot \vec{E} \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi\right) = \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathrm{d}V \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathrm{d}V \cdot \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) = \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \varphi \cdot \rho - \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \oint \mathrm{d}\vec{S} \cdot \underbrace{\varphi \vec{E}}_{\propto r^{-3}}}_{\to 0 \text{ при } r \to \infty}, \qquad (155)
\end{aligned}
$$

последнее слагаемое можно отбросить, выбирая охватывающую поверхность S на бесконечности. Далее, используя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V' \frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

мы убеждаемся, что энергия поля тождественна *потенциальной энергии* создающих поле зарядов:

$$W_э = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V \varphi \cdot \rho = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V \mathrm{d}V' \frac{\rho(r)\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{e_i e_j}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{156}$$

Задача 30 Найти энергию шара, равномерно заряженного по объему.
Ответ:

$$W_э = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{157}$$

где q – заряд шара, a – радиус шара.

Задача 31 Найти энергию равномерно заряженной сферы радиуса a.
Ответ:

$$W_э = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{158}$$

4.3 Электростатическая собственная энергия точечного заряда. Классический радиус электрона.

Допустим, вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение, и электрон представляет собой сферу радиуса r_e, тогда

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2.8 \cdot 10^{-13}\text{см} \tag{159}$$

Это принципиальная граница ***классической электродинамики*** — на меньших расстояниях $r < r_e$ она противоречива и неприменима.

На самом деле значительно раньше проявляются квантовые эффекты, которые становятся существенными начиная с расстояний порядка комптоновской длины волны, определяемой как

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 3.9 \cdot 10^{-11}\text{см} \tag{160}$$

С учетом квантовых эффектов вычисление электромагнитной энергии электрона дает

$$W_э/mc^2 = \frac{3\alpha}{2\pi}\ln\frac{\lambda_c}{a} \tag{161}$$

где постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c \approx 1/137$. Условие, что это отношение не превышает единицу, означает непротиворечивость ***квантовой электродинамики*** вплоть до расстояний

$$r_{кв} = \lambda_c \mathrm{e}^{-2\pi/3\alpha} = \lambda_c \mathrm{e}^{-287} = 8.9\cdot 10^{-136}см \tag{162}$$

На самом деле, граница эта практически недостижима, поскольку уже на расстояниях $\lambda_{\text{КХД}} \sim 10^{-13}$см начинают сказываться эффекты сильных взаимодействий, а на расстояниях $\lambda_{\text{weak}} \sim 10^{-16}$см начинает работать объединенная теория электрослабых взаимодействий и, наконец, на расстояниях $\lambda_{\text{грав}} \sim 10^{-33}$см вступает в игру квантовый характер пространства-времени.

4.4 Взаимодействие двух заряженных подсистем.

Взаимодействие двух заряженных подсистем может рассматриваться как результат своеобразной “интерференции” электростатических полей этих подсистем.

Каждая из подсистем создает свое поле, $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$. В соответствии с принципом суперпозиции, суммарное поле есть векторная сумма $(\vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)})$, а плотность энергии суммарного поля, кроме плотности энергий каждого из полей содержит перекрестный член, билинейный по каждому из полей. Именно этот перекрестный член и ответственен за электростатическое взаимодействие двух подсистем:

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)})^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^{(1)})^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^{(2)})^2 + \varepsilon_0 \vec{E}^{(1)}\vec{E}^{(2)}$$

Изучим его подробнее.

Аналогично (155), убеждаемся, что вклад этого члена в энергию поля

$$\begin{aligned} W_{\text{э}}^{(12)} &= \int \mathrm{d}V \cdot \varepsilon_0 \vec{E}^{(1)} \vec{E}^{(2)} = \\ &= \int \mathrm{d}V \cdot \rho^{(1)} \varphi^{(2)} = \int \mathrm{d}V \cdot \rho^{(2)} \varphi^{(1)} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}V \mathrm{d}V' \frac{\rho^{(1)}(r)\rho^{(2)}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{aligned} \tag{163}$$

тождественен энергии кулоновского взаимодействия заряженных подсистем.

4.5 Энергия системы зарядов во внешнем поле

Рассмотрим теперь взаимодействие системы зарядов $\rho(r)$ с внешним электрическим полем с потенциалом $\varphi^{\text{ext}}(r)$:

$$W_{\text{э}}^{\text{ext}} = \int \mathrm{d}V \cdot \rho(\vec{r})\varphi^{\text{ext}}(\vec{r}) \tag{164}$$

В случае, когда на размерах системы поле меняется слабо, можно поле разложить на размерах системы в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\varphi^{\text{ext}}(\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,') = \varphi^{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \vec{r}\,'\vec{\nabla}\varphi^{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \ldots \\ \varphi^{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{r}\,'\vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \ldots\end{aligned} \tag{165}$$

где $\vec{r}_0$ выбран в центре распределения зарядов системы.

Подстановка разложения в (164) дает для энергии взаимодействия

$$\begin{aligned} W_{э}^{\text{ext}} &= \varphi^{\text{ext}}(\vec{r}_0) \cdot \int \mathrm{d}V' \cdot \rho(r') - \vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r}_0) \int \mathrm{d}V' \cdot \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,') = \\ &= \varphi^{\text{ext}}(\vec{r}_0) \cdot q - \vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r}_0)\vec{d} \end{aligned} \tag{166}$$

В случае одиночного точечного заряда, расположенного в точке $\vec{r}$, его потенциальная энергия равна

$$W_{э}^{\text{ext}} = e\varphi^{\text{ext}}(\vec{r}) = U(\vec{r})$$

Для электрического диполя во внешнем поле

$$W_{э}^{\text{ext}} = -\vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r})\vec{d} = U(\vec{r}) \tag{167}$$

Сила и момент сил, действующих на диполь

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_{э}^{\text{ext}} = (\vec{d}\vec{\nabla})\vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r}) \tag{168}$$

$$\vec{K} = [\vec{d} \times \vec{E}^{\text{ext}}(\vec{r})] \tag{169}$$

4.6 Магнитная энергия в статическом случае.

Используя $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, получим

$$
\begin{aligned}
W_M &= \int \mathrm{d}V \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}V \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} = \\
&= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \left(\vec{A}\,\vec{j}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \operatorname{div}[\vec{A} \times \vec{B}]}_{\to 0} = \\
&= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \vec{A}\,\vec{j}
\end{aligned}
\tag{170}
$$

Подставляя $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (см. 40) видим, что энергия магнитного поля сводится к энергии взаимодействия токов

$$
W_M = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \vec{A}\,\vec{j} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}(r)\vec{j}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{171}
$$

Взаимодействие двух подсистем токов

$$W_M \;=\; -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_1\int_2 \mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2\frac{\vec{j}(r_1)\vec{j}(r_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = -\int_1 \mathrm{d}V\vec{A}_1\vec{j}_2 = -\int_2 \mathrm{d}V\vec{A}_2\vec{j}_1 \tag{172}$$

Энергия системы токов во внешнем поле

$$W_M^{\mathrm{ext}} = -\int \mathrm{d}V\vec{A}^{\mathrm{ext}}(r)\vec{j}(r) = U(r) \tag{173}$$

Раскладывая вектор-потенциал относительно центра $\vec{r}_0$ системы (1), получим

$$\vec{A}(\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}\,') = \vec{A}(\vec{r}_0) + (\vec{r}\,'\,\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r}_0) + \cdots\,,$$

Подставляя

$$-\int \mathrm{d}V\vec{A}^{\mathrm{ext}}(r)\vec{j}(r) \;=\; -\vec{A}^{\mathrm{ext}}(r_0)\underbrace{\int \mathrm{d}V'\vec{j}(r')}_{=0} - \int \mathrm{d}V'\vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{r}\,'\,\vec{\nabla})\vec{A}^{\mathrm{ext}} \tag{174}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int \mathrm{d}V'(\vec{r}\,'\ \vec{\nabla})\vec{A}^{\mathrm{ext}}\vec{j}(\vec{r}\,') = -\int \mathrm{d}V' r'_i j_k(r')\nabla_i A_k^{\mathrm{ext}} = \\
&\quad = -\int \mathrm{d}V' \left[\frac{1}{2}(r'_i j_k(r') + r'_k j_i(r'))\right] \nabla_i A_k^{\mathrm{ext}} + \\
&\qquad -\int \mathrm{d}V' \underbrace{\left[\frac{1}{2}(r'_i j_k(r') - r'_k j_i(r'))\right]}_{\varepsilon_{ikl} r'_i j_k(r')} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\nabla_i A_k^{\mathrm{ext}} - \nabla_i A_k^{\mathrm{ext}}\right)\right]}_{\varepsilon_{ikl}\nabla_i A_k^{\mathrm{ext}}} = \\
&\quad = -\vec{B}^{\mathrm{ext}} \int \mathrm{d}V' \frac{1}{2}(r'_i j_k(r') - r'_k j_i(r')).
\end{aligned}
\tag{175}
$$

Энергия магнитного диполя

$$
W_M^{\mathrm{ext}} = -\vec{B}^{\mathrm{ext}}(r)\vec{m} = U(r) \tag{176}
$$

Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле

$$
\vec{F} = -\vec{\nabla} U = (\vec{m}\vec{\nabla})\vec{B} \tag{177}
$$

а момент сил

$$\vec{K} = [\vec{m} \times \vec{B}] \tag{178}$$

5 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Выше мы получили, что плотность энергии электромагнитного поля выражается через напряженности $\vec{E}$ и магнитную индукцию $\vec{B}$ как

$$w = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right\} \tag{179}$$

а поток энергии (вектор Пойнтинга)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left\{\vec{E}\times\vec{B}\right\} \tag{180}$$

В отличии от плотности заряда и тока, образующих 4-вектор $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, плотность энергии и ее поток 4-вектора не образуют, т.к. энергия – в отличии от заряда – релятивистским скаляром не является.

Согласно (179),(180) плотность и поток энергии поля квадратичны по полю, поэтому естественно ожидать, что ***тензор энергии-импульса*** формируется как

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(aF^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}F^{\sigma\nu} + bg^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) \tag{181}$$

Выпишем покомпонентно

$$F^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}F^{\sigma\nu} = \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 & \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_x & \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_y & \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_z \\ \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_x & \frac{1}{c^2}E_x^2 - B_z^2 - B_y^2 & \frac{E_xE_y}{c^2} + B_xB_y & \frac{E_xE_z}{c^2} + B_xB_z \\ \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_y & \frac{E_xE_y}{c^2} + B_xB_y & \frac{1}{c^2}E_y^2 - B_z^2 - B_x^2 & \frac{E_yE_z}{c^2} + B_yB_z \\ \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_z & \frac{E_xE_z}{c^2} + B_xB_z & \frac{E_yE_z}{c^2} + B_yB_z & \frac{1}{c^2}E_z^2 - B_y^2 - B_x^2 \end{pmatrix} \tag{182}$$

и $F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} = -2\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$. Требование, чтобы плотность энергии T^{00} совпадала с (179), дает $a = 1, b = 1/4$, откуда окончательно

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline w & \frac{1}{c}S_x & \frac{1}{c}S_y & \frac{1}{c}S_z \\ \hline \frac{1}{c}S_x & & & \\ \hline \frac{1}{c}S_y & & T^{ik} & \\ \hline \frac{1}{c}S_z & & & \\ \hline \end{array}\right) \qquad (183)$$

где ***3-мерный тензор натяжений***

$$T^{ik} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \frac{(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)}{c^2} + (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) & \frac{E_x E_y}{c^2} + B_x B_y & \frac{E_x E_z}{c^2} + B_x B_z \\ \frac{E_y E_x}{c^2} + B_y B_x & \frac{(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2)}{c^2} + (B_y^2 - B_z^2 - B_x^2) & \frac{E_y E_z}{c^2} + B_y B_z \\ \frac{E_z E_x}{c^2} + B_z B_x & \frac{E_z E_y}{c^2} + B_z B_y & \frac{(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2)}{c^2} + (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) \end{pmatrix} \qquad (184)$$

Закон сохранения энергии при этом принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} = -\vec{j}\vec{E} = -\vec{f}\vec{v} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \qquad (185)$$

где ϵ – плотность энергии частиц. В интегральной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint \vec{S}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \tag{186}$$

Другими словами, сумма *энергии частиц* $\mathcal{E} = \int_V \epsilon \mathrm{d}V$ и *энергии поля* $W = \int_V w\mathrm{d}V$ сохраняется, если полный поток энергии через охватывающую поверхность равен нулю:

$$\oint \vec{S}\mathrm{d}\vec{s} = 0. \tag{187}$$

Если размер области $R \to \infty$, площадь поверхности $\propto R^2$ и полный поток стремится к нулю при условии, что вектор Пойнтинга $|\vec{S}|$ убывает быстрее, чем R^{-2}. В случае, когда $|\vec{S}| \propto R^{-2}$, поток энергии распространяется сколь угодно далеко, и мы имеем дело с *излучением* электромагнитной энергии.

Закон сохранения импульса для электромагнитного поля

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}S^i + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{ik}}_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{i\mu}} = -f^i = -\frac{\partial p^i}{\partial t} \tag{188}$$

где $\vec{p}$ плотность импульса частиц, а $\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{c^2\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] = \varepsilon_0[\vec{E}\times\vec{B}]$ – плотность импульса поля.

Баланс импульса можно увидеть и непосредственно из уравнений Максвелла. Запишем производную по времени от плотности импульса поля

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} \;=\; \varepsilon_0\left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}\right]+\varepsilon_0\left[\vec{E}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right]=$$
$$\;=\; -c^2\mu_0\varepsilon_0[\vec{j}\times\vec{B}]+c^2\varepsilon_0[\operatorname{rot}\vec{B}\times\vec{B}]-\varepsilon_0[\vec{E}\times\operatorname{rot}\vec{E}]$$

где производные по времени от полей подставлены из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{189}$$

и

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{190}$$

Далее, используя тождество

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk}=\delta^{il}\delta^{jm}-\delta^{im}\delta^{lj},$$

можно преобразовать

$$
\begin{aligned}
[\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E}]^i &= \varepsilon^{ijk} E^j (\operatorname{rot} \vec{E})^k = \varepsilon^{ijk} E^j \varepsilon^{klm} \partial^l E^m = \\
&= E^j \partial^i E^j - (E^j \partial^j) E^i = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{E})^2 - (\vec{\nabla} \vec{E}) \vec{E} + \vec{E} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{E})}_{\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} = \\
&= \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{E})^2 - (\vec{\nabla} \vec{E}) \vec{E} + \frac{\vec{E}}{\varepsilon_0} \rho \qquad (191) \\
\left[\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}\right] &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{B})^2 - (\vec{\nabla} \vec{B}) \vec{B} + \vec{B} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{B})}_{=0} = \\
&= \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{B})^2 - (\vec{\nabla} \vec{B}) \vec{B} \qquad (192)
\end{aligned}
$$

В итоге получаем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\vec{g} + \rho\left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]\right) \right\}^i =$$
$$= -\nabla^i \frac{1}{2}\left\{ \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \right\} + \varepsilon_0 \nabla^k (E^i E^k) + \frac{1}{\mu_0}\nabla^k (B^i B^k) \tag{193}$$

Правая часть представляет собой полную производную и при интегровании по объему сводится к интегралу от тензора натяжений по охватывающей объем поверхности: $\oint \mathrm{d}s^k T^{ik}$. При стремлении размеров области к бесконечности, при достаточно быстром убывании полей она обратится в ноль, что означает сохранения суммарного импульса электромагнитного поля и взаимодействующих с ним частиц.

6 Электромагнитные волны.

Рассмотрим уравнения Максвелла в пустоте в отсутствии источников (или когда источники находятся на бесконечности):

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \tag{194}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{195}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{196}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{197}$$

где $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. Отметим, что эти уравнения симметричны относительно замены $E \longleftrightarrow iBc$, т.е. магнитное и электрическое поле входят в них равноправным образом! Эта симметрия отсутствует, однако, на уровне потенциалов.

Легко увидеть, что нетривиальные решения возникают лишь для полей, зависящих от времени: $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0$.

6.1 Волновые уравнения.

Подстановкой одного уравнения в другое нетрудно получить:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Longrightarrow \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{198}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Longrightarrow \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0, \tag{199}$$

где использовано тождество

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{X} = -\Delta\vec{X} + \vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{X}), \tag{200}$$

и отсутствие зарядов, не только магнитных

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

но — в рассматриваемом случае *свободного электромагнитного поля* — и *электрических* тоже:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0. \tag{201}$$

Выражая поля через потенциалы, из уравнений Максвелла в отсутствии источников получим

$$\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} \;=\; -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{A}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

откуда $$-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right).$$

Выбирая калибровку Лоренца $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0$, получим волновые уравнения для потенциалов (см. (63), (64) и (97)):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi \;=\; 0, \tag{202}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} \;=\; 0 \tag{203}$$

6.2 Решение волновых уравнений. Избыточность решений.

Частным решением волновых уравнений являются т.н. *плоские волны*

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}), \tag{204}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}), \tag{205}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны. Аналогичные решения справедливы и для полей $\vec{E}, \vec{B}$.

На первый взгляд решение содержит 4 произвольных функции. на самом деле степень произвола значительно меньше.

Пусть $\vec{n}$ параллельно оси x, и пусть $\varphi = \varphi(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}) \neq 0$, тогда из калибровочного условия Лоренца:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\varphi' = -\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{1}{c}A'_x \qquad \text{откуда} \qquad A_x = \frac{\varphi}{c} \tag{206}$$

Легко показать, что вклад продольной компоненты $A_\parallel \equiv A_x$ в поля равен нулю:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_x = 0; \qquad \vec{E}_\parallel = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_\parallel}{\partial t} = 0.$$

Итак, в нашей калибровке можно без потери общности положить

$$\varphi \equiv 0, \qquad A_\parallel = 0; \tag{207}$$

и отличными от нуля остается лишь поперечная часть вектор-потенциала $\vec{A}_\perp \neq 0$. Равенство нулю продольных компонент $E_\parallel = B_\parallel = 0$ следует также из уравнений $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

Окончательно, в общем случае решения в виде плоской волны можно представить в виде, содержащим лишь поперечные компоненты вектор-потенциала:

$$\vec{A} = \vec{A}_{\perp}, \tag{208}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau}, \qquad \text{где } \tau = t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}, \tag{209}$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\left[\vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau}\right] = \frac{1}{c}\left[\vec{n} \times \vec{E}\right]. \tag{210}$$

В такой записи магнитное поле заведомо поперечно, $\vec{B} \perp \vec{n}$.

Можно также переписать выражение для электрического поля в заведомо поперечном виде

$$\vec{E} = \vec{n} \times \left[\vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau}\right]. \tag{211}$$

Последнее выражение остается справедливым и в калибровках, в которых продольная составляющая вектор-потенциала отлична от нуля. Легко легко также увидеть, что в плоской волне $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не только поперечны, но и взаимно перпендикулярны:

$$\vec{n}\vec{E} = 0; \quad \vec{n}\vec{B} = 0; \quad \vec{E}\vec{B} = 0. \tag{212}$$

Плотность энергии в плоской волне

$$w = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right\} = \varepsilon_0\vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \tag{213}$$

т.к. $\sqrt{\varepsilon_0}E = B/\sqrt{\mu_0}$. Очевидно также, что плотность потока энергии

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E} \times \vec{B}\right] = \vec{n}cw, \tag{214}$$

т.е. электромагнитная энергия в плоской волне распространяется со скоростью света.

6.3 Сферические волны.

Для точечного источника, расположенного в начале координат, решение для потенциалов

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r} f(t-\frac{r}{c}) \tag{215}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\vec{a}(t-\frac{r}{c}) \tag{216}$$

описывает расходящиеся сферические волны. Для напряженностей полей, аналогично случаю плоской волны, имеем

$$\vec{E} = \frac{1}{r}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{a}}{\partial\tau}\right]\right] \tag{217}$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c}\frac{1}{r}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{a}}{\partial\tau}\right] \tag{218}$$

где $\tau = t - r/c$.

6.4 Монохроматические плоские и сферические волны.

Пусть зависимость полей от времени и координат имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \tag{219}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \tag{220}$$

(где $\vec{E}_0 = c[\vec{n} \times \vec{B}_0]$). Это решение описывает монохроматическую плоскую волну с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$, $k = \omega/c$, или $\vec{k} = \vec{n}k$. Длина волны $\lambda = 2\pi/k$, а период $T = 2\pi/\omega$.

Аналогичное решение для сферической волны

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_0 \frac{1}{r} \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}, \tag{221}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{b}_0 \frac{1}{r} \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}. \tag{222}$$

Комплексные вектора $\vec{E}_0, \vec{e}_0$ и $\vec{B}_0, \vec{b}_0$ описывают амплитуду $|E_0|$ и фазу φ волны:

$$\vec{E}_0 = |E_0| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$$

Волновое уравнение является линейным уровнением *второго* порядка, и *два* линейно независимых решения описываются как мнимая и действительная часть данного решения (еще одно следствие линейности уравнений Максвелла!).

В определении *квадратичных* величин – таких, как плотность энергии, поток энергии при этом необходимо умножение квадрат модуля амплитуды на дополнительный фактор $\frac{1}{2}$ (среднее значение от $\cos^2, \sin^2$)

Несколько слов о **поляризации волны**.

Вектора $\vec{E}_0, \vec{e}_0$ и $\vec{B}_0, \vec{b}_0$ лежат в *двумерной* плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны $\vec{n}$. Выберем в качестве базиса два вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, так, что $\vec{e}_1 \perp \vec{n}$ и $\vec{e}_2 = [\vec{e}_1 \times \vec{n}]$. Пусть $\vec{E}_0 = \alpha_1 \vec{e}_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} + \alpha_2 \vec{e}_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2}$, где $\alpha_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ – вещественные числа.

Тогда,

а) при $\varphi_1 = \varphi_2$ $\mathrm{Re}\, \vec{E}(t)$ колеблется вдоль некоторого направления – случай *линейной* поляризации;

б) при $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$ $\mathrm{Re}\, \vec{E}(t)$ колеблется по эллипсу – случай *эллиптической* поляризации.

6.5 Волновые пакеты. Фазовая и групповая скорость.

Рассмотрим для простоты одномерный волновой пакет, т.е. собранный из плоских монохроматических волн, распространяющихся в одном направлении

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k g(k) \mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)} \tag{223}$$

В частности, в 3-мерном пространстве

$$\varphi(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k g(k) \mathrm{e}^{i(k\xi-\omega t)},$$

где $\xi = \vec{n}\vec{r}$. Пусть амплитуда $g(k) \neq 0$ сосредоточена в узкой области вблизи $k = k_0$.

Покажем, что *огибающая* (профиль) пакета распространяется с т.н. ***групповой скоростью***

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right)_{k=k_0}, \tag{224}$$

т.е.

$$\varphi(x,t) = G(x - v_{\text{гр}}t)\cdot \mathrm{e}^{i(k_0x-\omega_0 t)} \tag{225}$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$. Действительно, разлагая вблизи $k = k_0$

$$kx-\omega(k)t \approx (k_0x-\omega(k_0)t)+(k-k_0)\cdot\left[x-\left(\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right)_{k_0}\cdot t\right]+\ldots$$

и подставляя в (223), получим

$$\varphi(x,t) \;=\; \underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k g(k)\mathrm{e}^{i(k-k_0)\cdot(x-v_{\text{гр}}t)}\right\}}_{G(x-v_{\text{гр}}t)}\cdot \mathrm{e}^{i(k_0x-\omega_0 t)},$$

что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что групповая скорость отличается от ***фазовой скорости***

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} \tag{226}$$

которая описывает скорость распространения фронта постоянной фазы $(kx - \omega(k)t) = \text{const}$. Для света в вакууме $v_{\text{ф}} = v_{\text{гр}} = c$.

Задача 32 Найти фазовую и групповую скорости для электромагнитной волны в волноводе сечением $l_x \times l_y$.

6.6 Эффект Доплера.

Распространение монохроматической волны описывается формулой

$$\varphi \propto \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right],$$

где $|\vec{k}| = \omega/c$. Фаза волны

$$\theta \equiv \vec{k}\vec{r} - \omega t = -k^\mu x_\mu$$

является *релятивистским скаляром*, и поскольку $x^\mu = (ct, \vec{r})$ – 4-вектор, 4-компонентный сомножитель $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ также должен быть 4-вектором.

Применяя к нему преобразования Лоренца, получим закон преобразования его компонент

$$\vec{k}'_{\parallel} = \gamma \cdot \left(\vec{k}_{\parallel} - \vec{v}\frac{\omega}{c^2}\right) \qquad (227)$$

$$\vec{k}'_{\perp} = \vec{k}_{\perp} \qquad (228)$$

$$\omega' = \gamma \cdot \left(\omega - \vec{k}\vec{v}\right) =$$

$$= \gamma \cdot \left(\omega - \frac{\omega}{c} v \cos\theta\right) = \gamma\omega \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad (229)$$

Пусть источник волны с частотой ω_0 покоится в системе (x'), движущейся относительно неподвижного в (x) наблюдателя со скоростью v (т.е. $\omega' \equiv \omega_0$), тогда из последнего уравнения в частота в системе отсчета наблюдателя (x) равна:

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}\omega_0, \qquad (230)$$

(здесь θ — угол прихода волны также в системе отсчета *наблюдателя*).

В нерелятивистском пределе $\beta \equiv v/c \ll 1$ эффект Доплера принимает вид

$$\omega = (1 + \beta \cos\theta)\omega_0.$$

В поперечном направлении $\theta = \pi/2$ нерелятивистский эффект Доплера отсутствует, а точная формула (230) дает

$$\omega = \sqrt{1 - \beta^2}\omega_0 = \omega_0/\gamma, \tag{231}$$

отражая простой факт *замедления времени* в движущейся относительно (x) релятивистской системе отсчета (x').

Рассмотрим теперь преобразование угла распространения волны. Пусть источник в системе (x') излучает под углом θ'; найдем угол, под которым распространяется волна в системе отсчета наблюдателя (x). Для этого поделим уравнение (228) на уравнение (227):

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\theta}{(\cos\theta - \beta)}. \tag{232}$$

Передняя полусфера в системе источника (x') $0 < \theta' \leqslant \pi/2$ отвечает в системе наблюдателя

$$1 \geqslant \cos\theta \geqslant \beta. \tag{233}$$

причем угол в системе источника $\theta' = \pi/2$ соответствует в системе наблюдателя $\cos\theta - \beta = 0$.

В ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$, $\beta \to 1$, разлагая $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, имеем

$$\cos\theta - \beta \approx 1 - \theta^2/2 - \beta = (1-\beta) - \theta^2/2 = 0$$

откуда

$$\theta^2 = 2(1-\beta) \approx (1+\beta)(1-\beta) = 1/\gamma^2.$$

Таким образом, передняя полусфера в *системе источника* в ультрарелятивистском случае сжимается с точки зрения наблюдателя в узкий конус $\theta \lesssim 1/\gamma \ll 1$.

Задача 33 Как искажается карта звездного неба для космонавта, движущегося с ультрарелятивистской скоростью, $\gamma \gg 1$?

Рекомендую: “Тау-ноль” (Пол Андерсон).
ссылка 1 и
ссылка2 + отзывы

7 Запаздывающие потенциалы и поля.

7.1 Поле равномерно движущегося заряда.

Пусть точечный заряд e движется в *лабораторной* системе (x) (системе наблюдателя) со скоростью $\vec{v}$ паралельно оси x. В *собственной* системе отсчета (x') заряд покоится в начале системы кординат $x' = y' = z' = 0$, и соответствующее поле заряда равно

$$\varphi' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R'}; \qquad \vec{A}' = 0. \tag{234}$$

Пусть также в момент $t = 0$ начала обеих систем координат совпадают:

$$x(t=0) = x' = 0, \ y(t=0) = y' = 0, \ \text{и} \ z(t=0) = z' = 0.$$

Используя преобразования Лоренца для потенциалов

$$\varphi = \gamma \cdot (\varphi' + vA'_x), \qquad A_x = \gamma \cdot (A'_x + \frac{v}{c^2}\varphi'),$$

в *лабораторной* системе системе получим

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R'\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R'},$$

$$A_x = \frac{v}{c^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R'\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\frac{\mu_0}{4\pi}v_x\frac{e}{R'},$$

где $R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ – расстояние до наблюдателя в *системе покоя заряда*. Учитывая преобразования

$$x' = \gamma \cdot (x - vt), y' = y, z' = z,$$

выразим R' через координаты x, y, z в *лабораторной системе* (в системе наблюдателя):

$$R' = \gamma\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}, \qquad (235)$$

где $\beta \equiv v/c$.

Введение "эффективного расстояния" $R^* = R'/\gamma$, определяемого как

$$R^* = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}, \tag{236}$$

позволяет потенциалы записать в виде, *напоминающем* соответствующий результат в нерелятивистском пределе

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R^*}, \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{v}\frac{e}{R^*}. \tag{237}$$

"Эффективное расстояние" R^* можно выразить также через угол между $\vec{R}$ и $\vec{v}$:

$$R^* = R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\theta} \tag{238}$$

где R — расстояние до заряда в лабораторной системе (x):

$$R = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2} \tag{239}$$

Аналогичным образом можно найти поля быстро движущегося заряда. Записывая в *системе покоя заряда* выражения для полей

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{R}'}{4\pi\varepsilon_0 R'^3}; \qquad \vec{B}' = 0,$$

и используя соответствующие релятивистские преобразования для полей

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}; \qquad \vec{E}_{\perp} &= \gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v} \times \vec{B}']) = \gamma \vec{E}'_{\perp}, \\
\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}; \qquad \vec{B}_{\perp} &= \gamma(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{v} \times \vec{E}']) = \gamma \frac{1}{c^2}[\vec{v} \times \vec{E}'] = \frac{1}{c^2}[\vec{v} \times \vec{E}]
\end{aligned} \tag{240}$$

в *лабораторной системе* имеем

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 R'^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\gamma^3 {R^*}^3}\gamma \cdot (x - vt) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e \cdot (x - vt)}{\gamma^2 {R^*}^3}, \\
\vec{E}_{\perp} &= \gamma \vec{E}'_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{e\vec{r}_{\perp}}{R'^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\vec{r}_{\perp}}{\gamma^2 {R^*}^3}
\end{aligned}$$

Объединяя эти формулы, получим

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(1-\beta^2)\frac{e\vec{R}}{{R^*}^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\vec{R}(1-\beta^2)}{R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \qquad (241)$$

что, в соответствии с (240) для магнитного поля дает:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}]. \qquad (242)$$

Напомним, что радиус-вектор $\vec{R} = (x - vt, y, z) = \vec{r} - \vec{r}_e(t)$, где $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}_e = (vt, 0, 0)$ – положение в лабораторной системе наблюдателя и точечного заряда, соответственно.

7.2 Решение уравнений Максвелла с заданными источниками, учет запаздывания.

В лоренцевской калибровке

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{243}$$

потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению с правой частью:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{244}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \tag{245}$$

Для решения этих уравнений полезно перейти от *временнóго* (t) к *спектральному* (или *частотному*) представлению (ω):

$$\varphi(r,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-i\omega t}\varphi_\omega(r), \qquad \rho(r,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-i\omega t}\rho_\omega(r),$$

$$\vec{A}(r,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{A}_\omega(r), \qquad \vec{j}(r,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{j}_\omega(r),$$

в котором уравнения (243),(244),(245) принимают вид

$$\nabla^2\varphi_\omega + k^2\varphi_\omega = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega, \tag{246}$$

$$\nabla^2\vec{A}_\omega + k^2\vec{A}_\omega = -\mu_0\vec{j}_\omega, \tag{247}$$

$$\operatorname{div}\vec{A}_\omega - \frac{ik}{c}\varphi_\omega = 0. \tag{248}$$

и где использовано $k = \frac{\omega}{c}$.

Полученные уравнения не содержат зависимости от времени, *напоминая* обсуждавшиеся ранее уравнения для *статического распределения зарядов и токов*.

Как и в статическом случае, решения этих уравнений ввиду линейности могут быть получены методом функции Грина:

$$\varphi_\omega(\vec{r}) \;=\; -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V' G_\omega(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho_\omega(\vec{r}\,') \tag{249}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) \;=\; -\mu_0\int \mathrm{d}V' G_\omega(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{j}_\omega(\vec{r}\,') \tag{250}$$

где функция Грина $G_\omega(\vec{r}-\vec{r}\,')$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца для "точечных" источников:

$$\nabla^2 G_\omega(\vec{R}) + k^2 G_\omega(\vec{R}) = \delta(\vec{R}). \tag{251}$$

По сути, это отражение того факта, что произвольное распределение плотности (например, зарядов) может быть "набрано" из точечных источников, и соответствующие им потенциалы и поля являются суммой от потенциалов и полей соответствующих точечных источников.

Тем самым, решение исходной задачи для произвольных источников свелось к задаче (251) для точечного источника.

Дальнейший переход в (251), теперь уже к *импульсному представлению* при подстановке в (251)

$$G_\omega(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k' \mathrm{e}^{i\vec{k}'\vec{R}} G_\omega(k') \tag{252}$$

дает

$$G_\omega(k') = \frac{1}{k^2 - k'^2} \tag{253}$$

Это выражение имеет полюса $k'^2 = k^2$. Для удовлетворения принципа причинности необходимо доопределить правило обхода полюсов. Выбор

$$k' = \pm\sqrt{k^2 + i\varepsilon\frac{\omega}{c}} \tag{254}$$

где бесконечно малая $\varepsilon > 0$ дает нам требуемую *запаздывающую* функцию Грина.

“Запаздывающая” функция Грина описывает решение в виде расходящихся волн:

$$
\begin{aligned}
G_\omega^{\mathrm{ret}}(\vec{R}) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k'\mathrm{e}^{i\vec{k}'\vec{R}}\,\frac{1}{k^2-k'^2+i\varepsilon\frac{\omega}{c}} = \\
&= -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR\frac{\omega}{|\omega|}}}{R} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}.
\end{aligned}
\tag{255}
$$

Фактически она описывает решение для единичного заряда, умноженное на фазовый множитель $\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}$, учитывающий набег фазы на расстоянии R, при распространении волны с частотой ω из точки испускания в точку наблюдения.

Именно этот набег фазы отличает соответствующее решение для запаздывающих потенциалов в спектральном представлении:

$$\varphi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\frac{\rho_\omega(\vec{r}\,')}{R} \tag{256}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}\,')}{R} \tag{257}$$

от статических решений (26).
Переходя от спектрального к временно́му представлению, получим запаздывающие потенциалы

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\frac{\rho(\vec{r}\,',t-R/c)}{R} \tag{258}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-R/c)}{R} \tag{259}$$

в правую часть которых явным образом вошло время распространения волны от источника до наблюдателя, равное R/c.

7.3 Поля произвольно движущегося точечного заряда.

7.3.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта.

Рассмотрим случай произвольно движущегося точечного заряда

$$\rho(\vec{r},t) \;=\; e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)); \tag{260}$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) \;=\; e\vec{v}(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)); \tag{261}$$

где $\vec{v}(t) \equiv \mathrm{d}\vec{r}_0(t)/\mathrm{d}t$.

Переходя к спектральному представлению для плотности движущегося точечного заряда и тока

$$\rho_\omega(\vec{r}) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{i\omega\tau} e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)) \tag{262}$$
$$\vec{j}_\omega(\vec{r}) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{i\omega\tau} e\vec{v}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)) \tag{263}$$

и подставляя их в (256),(257), для потенциалов *в спектральном представлении*, получим

$$\begin{aligned}
\varphi_\omega(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V' \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\frac{1}{R}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{i\omega\tau} e\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(\tau))}_{\rho_\omega(r')} = \\
&= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau \frac{1}{R(\tau)}\mathrm{e}^{i(\omega\tau + \frac{\omega}{c}R(\tau))}, \qquad (264) \\
\vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V' \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\frac{1}{R}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{i\omega\tau} e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(\tau))}_{j_\omega(r')} = \\
&= \frac{\mu_0 e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau \frac{\vec{v}(\tau)}{R(\tau)}\mathrm{e}^{i(\omega\tau + \frac{\omega}{c}R(\tau))}. \qquad (265)
\end{aligned}$$

Потенциалы *во временном представлении* получаются с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-i\omega t}\varphi_\omega(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\frac{1}{R(\tau)}\mathrm{e}^{i(\omega(\tau-t)+\frac{\omega}{c}R(\tau))} = \\
&= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\frac{1}{R(\tau)}\delta\left(\tau - t + \frac{R(\tau)}{c}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{R(\tau)}\,\frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\tau + R(\tau)/c\right)\right|} = \\
&= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R(\tau)\left(1-\vec{n}\vec{v}/c\right)},
\end{aligned} \tag{266}$$

где использовано

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R(\tau) \equiv \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)) = -\vec{n}\vec{v}$$

Аналогично, для векторного потенциала имеем

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \\ = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}}{R(\tau)\,(1-\vec{n}\vec{v}/c)} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi \tag{267}$$

В правой части (266) и (267) зависящие от времени величины берутся в момент времени τ, определяемый из уравнения

$$t - \tau = R(\tau)/c \tag{268}$$

Полученные выражения (266) и (267) называются *потенциалами Лиенара-Вихерта*.

7.3.2 Поля точечного заряда.

Напряженности полей могут быть вычислены непосредственно из потенциалов (266) и (267), однако при вычислении производных необходимо учесть, что потенциалы в момент времени t на самом деле выражены через величины, заданные в момент времени τ, где $t = \tau + R(\tau)/c$:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{(1 - \vec{n}\vec{v}/c)}\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{269}$$

$$\begin{aligned} \nabla|_{t=\mathrm{const}} &= \nabla|_{\tau=\mathrm{const}} + (\nabla\tau)\frac{\partial}{\partial \tau} = \\ &= \nabla|_{\tau=\mathrm{const}} - \frac{\vec{n}}{c\cdot(1 - \vec{n}\vec{v}/c)}\frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \tag{270}$$

Вычисления дают

$$
\begin{aligned}
\vec{E} \;&=\; \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\vec{n}\vec{v}/c\right)^3}\,\frac{\vec{n}-\vec{v}/c}{R^2}+ \\
&+\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{c^2\left(1-\vec{n}\vec{v}/c\right)^3}\,\frac{[\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{v}/c)\times\vec{a}]]}{R}\,, \qquad (271) \\
\vec{B} \;&=\; \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}] \qquad (272)
\end{aligned}
$$

Напомним, что положение, скорость и ускорение в этих формулах берутся в момент времени $\tau = t - R(\tau)/c$, где $R(\tau)/c$ — время, необходимое для распространения поля от источника до наблюдателя.

Поле распадается на два слагаемых: первое зависит от координаты заряда $\vec{r}_0$ и его скорости $\vec{v}$ и убывает с расстоянием $\propto R^{-2}$, второе же зависит еще и от ускорения $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, но убывает с расстоянием как $\propto R^{-1}$.

Первое слагаемое доминирует в области вблизи движущегося заряда, называемой *квазистатической зоной*, второе – в области на больших расстояниях, называемой *волновой зоной*.

7.3.3 Поля в квазистатической зоне, связь с полем равномерно движущегося заряда.

Основной вклад в квазистатической зоне дает слагаемое

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{(1-\vec{n}\vec{v}/c)^3}\,\frac{\vec{n}-\vec{v}/c}{R^2}\bigg|_{\tau=t-R(\tau)/c}, \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}]. \end{aligned} \qquad (273)$$

Итак, в квазистатической зоне поля не зависят от ускорения и спадают $\propto R^{-2}$.

Поле в точке наблюдения $\vec{r}$ в момент времени t определяется, согласно (273), положением заряда $\vec{r}_0$ и его скоростью $\vec{v}$ в некоторый *предшествующий* момент времени $\tau = t - R(\tau)/c$.

Введем радиус-вектор $\widetilde{\vec{R}}$ описывающий "*эффективное положение*" заряда, в котором заряд оказался бы в момент времени t, если, начиная с момента τ, он продолжал бы двигаться *с постоянной скоростью* $\vec{v} = \vec{v}(\tau)$:

$$\widetilde{\vec{R}} = \vec{r} - [\vec{r}_0(\tau) + (t-\tau)\vec{v}] = \underbrace{\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)}_{\vec{R}(\tau)} - \underbrace{(t-\tau)}_{R(\tau)/c}\vec{v} = R(\tau)\cdot\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

Выразим поля в квазистатической зоне через $\widetilde{\vec{R}}$:

$$\vec{E}(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\widetilde{\vec{n}}}{\tilde{R}^2}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\tilde{\theta}\right)^{3/2}}, \tag{274}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\cdot[\vec{v}\times\widetilde{\vec{n}}]}{\tilde{R}^2}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\tilde{\theta}\right)^{3/2}} = \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}]. \tag{275}$$

Эти выражения по виду совпадают с результатами (241),(242) для заряда, движущегося с *постоянной скоростью* $\vec{v} = \vec{v}(\tau)$.

В нерелятивистском пределе $(v/c \ll 1)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\widetilde{\vec{n}}}{\tilde{R}^2}, \tag{276}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e \cdot [\vec{v} \times \widetilde{\vec{n}}]}{\tilde{R}^2}, \tag{277}$$

электрическое поле сферически симметрично, а магнитное поле мало: $c|\vec{B}|/|\vec{E}| = v/c \ll 1$.

В ультрарелятивистском случае $(v/c \to 1)$ поля велики в узкой области $\Delta\tilde{\theta} \sim 1/\gamma$ вблизи плоскости, перпендикулярной скорости частицы и проходящей через ее эффективное положение в момент t.

Квазистатическое поле перемещается вместе с зарядом, не отрываясь от него, и ***не дает*** *вклада в излучение.*

7.3.4 Поле в волновой зоне, излучение.

На достаточно больших расстояниях, в т.н. *волновой зоне*, поля определяются *вторым* слагаемым в (271):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2\left(1-\vec{n}\vec{v}/c\right)^3}\frac{[\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{v}/c)\times\vec{a}]]}{R}, \quad (278)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}]. \quad (279)$$

которое описывает *расходящиеся сферические волны*: поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ убывают пропорционально R^{-1}, а полный поток энергии $\propto 4\pi R^2\cdot\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}]\to\text{const}$.

Согласно (217), (218) для сферической волны поля могут быть выражены также и через производную вектор-потенциала (267) по времени

$$\vec{E}(\vec{r},t) \;=\; \left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]\right] = \frac{1}{1-\vec{n}\vec{v}/c}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right]\right], \tag{280}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) \;=\; -\frac{1}{c}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = \frac{1}{1-\vec{n}\vec{v}/c}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right]. \tag{281}$$

Интенсивность излучения (поток энергии, измеряемый наблюдателем) в заданный телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ равна

$$\mathrm{d}I(\theta,\varphi) = c\varepsilon_0 E^2\cdot R^2\mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{v}/c)\times\vec{a}\right]\right]^2}{c^3\left(1-\vec{n}\vec{v}/c\right)^6}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{282}$$

Изменение энергии заряженной частицы W в единицу времени за счет излучения в заданный телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ соответственно равно:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\Omega &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \cdot \mathrm{d}I(\theta, \varphi) = (1 - \vec{n}\vec{v}/c)\, \mathrm{d}I(\theta, \varphi) = \\
&= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}/c) \times \vec{a}]]^2}{c^3 (1 - \vec{n}\vec{v}/c)^5} \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}.
\end{aligned}
\tag{283}
$$

Интегрирование по всем направлениям дает

$$
-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a^2 - \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{a}\right]^2}{c^3 (1 - \frac{v^2}{c^2})^3}
\tag{284}
$$

8 Излучение электромагнитных волн.

8.1 Характер излучения в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях, угловое распределение.

В ***нерелятивистком пределе*** выражение (283) для излучаемой мощности дает

$$-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{[\vec{n}\times\vec{a}]^2}{c^3}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}]^2}{c^3}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}, \tag{285}$$

где $\vec{d}(t) \equiv e\vec{r}(t)$ — дипольный момент заряда, движущегося по траектории $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Мы видим, что в *нерелятивистском приближении* излучение точечного заряда носит *дипольный* характер.

Угловое распределение зависит от конкретной зависимости $\vec{d}(t)$. В частности, пусть зависимость $\vec{d}(t) = \vec{d}_0 \cos\omega_0 t$, и пусть $\vec{d}_0 \| z$, тогда интенсивность излучения

$$\mathrm{d}I(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\omega^4|d_0|^2}{c^3}\cos^2\omega_0 t\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{286}$$

Задача 34 Пусть дипольный момент d вращается в плоскости xy, с частотой ω_0. Найти распределение интенсивности по углам, а также полную интенсивность излучения.

Полная мощность дипольного излучения дается интегрированием по углам:

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{a^2}{c^3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\ddot{\vec{d}}^{\,2}}{c^3} \tag{287}$$

В ***ультрарелятивистском пределе*** основная мощность излучения сосредоточена в узком конусе $\Delta\theta \sim 1/\gamma$.

Если $\vec{a} \| \vec{v}$, то

$$-\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}]^2}{c^3 \left(1 - \vec{n}\vec{v}/c\right)^5} \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{288}$$

а полная (проинтегрированная по углам) мощность излучения

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a^2}{c^3 \left(1 - v^2/c^2\right)^3} = \tag{289}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3 \left(1 - v^2/c^2\right)^3} \tag{290}$$

пропорциональна γ^6 ! (Лиенар, 1898г)

Если же $\vec{a} \perp \vec{v}$ (пусть $\vec{v} \| z$, $\vec{a} \| x$)

$$-\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3}\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2 - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{291}$$

и полная мощность излучения в этом случае

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3\left(1-v^2/c^2\right)^2} \tag{292}$$

пропорциональна γ^4 !

Обратим внимание, что при том же ускорении a мощность излучения в этом случае в γ^2 раз меньше.

8.2 Излучение при движении в ускорителях и накопителях.

Ускорение частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле равно (см. (131)):

$$\vec{a} \;=\; \frac{1}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\vec{F}^e - \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{v}\vec{F}^e\right)\right\} \tag{293}$$

где

$$\vec{F}^e = e\left(\vec{E}^e + \left[\vec{v}\times\vec{B}^e\right]\right) \tag{294}$$

Подстановка ускорения в (284) дает полную мощность потерь на излучение

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\vec{F}^e)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\vec{F}^e\right)^2}{m^2c^3\left(1-v^2/c^2\right)}. \tag{295}$$

Удобно этот результат выразить через энергию и импульс частицы

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m^4c^7}\left\{(\vec{F}^e)^2W^2 - c^2\left(\vec{p}\vec{F}^e\right)^2\right\} \tag{296}$$

Весьма важным является факт, что излучение быстро падает с ростом массы частицы: при той же самой энергии частиц потери электронов на излучение оказываются в $\sim 10^9$ раз больше[4], чем протонов!

[4]для циклических ускорителей.

8.2.1 Потери в линейных ускорителях.

В линейных ускорителях основным является ускоряющее электрическое поле:

$$\vec{E}^e \| \vec{p}, \vec{B}^e = 0. \tag{297}$$

Мощность потерь

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\vec{E}^e|^2}{m^2c^3} \tag{298}$$

в этом случае *не зависит* от энергии частицы W. Максимальная энергия, приобретаемая частицей $W_{\max} \approx eE^eL$, где L – длина, на которой действует ускоряющее поле. Полная потеря энергии за все время ускорения

$$-\Delta W \sim -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}\frac{L}{c} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{E}^{e2}}{m^2c^3}\frac{L}{c} = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{W_{\max}^2}{m^2c^4L}. \tag{299}$$

Ускорение становится неэффективным при $-\Delta W \sim W_{\max}$, откуда следует, что длина ускорителя, необходимая для ускорения частицы до энергии $W_{\max}$:

$$L \sim \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{W_{\max}}{m^2c^4} \tag{300}$$

растет с $W_{\max}$ линейно.

8.2.2 Потери в циклических ускорителях, синхротронное излучение.

В циклическом ускорителе (накопителе) электрическое поле отсутствует $\vec{E}^e = 0$, и движение по замкнутой орбите обеспечивается постоянным по времени магнитным полем $\vec{B}^e \perp \vec{p}$. Соответствующая мощность потерь на излучение, называемое в этом случае *синхротронным*

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p^2 B^{e^2}}{m^2c^3} \tag{301}$$

в отличии от потерь в линейном ускорителе (298) растет пропорционально квадрату импульса частицы. В ультрарелятивистском случае $p^2 \to W^2/c^2$, и

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{B^{e^2}W^2}{m^2c^5}. \tag{302}$$

Частота обращения и радиус орбиты связаны с магнитным полем как

$$\omega_{\text{обр}} = eB^e c^2/W, R_{\text{обр}} = W/eB^e c; \tag{303}$$

а поле, отвечающее заданному радиусу

$$eB^e = W/cR_{\text{обр}}.$$

В результате при фиксированном радиусе накопительного кольца $R_{\text{обр}}$ мощность синхротронного излучения растет с энергией как

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{W^4}{m^4c^7R_{\text{обр}}^2} = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{4\pi\varepsilon_0R_{\text{обр}}^2}\gamma^4 \tag{304}$$

Потери *за один оборот* составляют

$$-\Delta W = \frac{e^2}{3\varepsilon_0R_{\text{обр}}}\gamma^4 \tag{305}$$

Использование циклических ускорителей становится бессмысленным, если потери энергии за оборот сопоставимы с полной энергией частицы: $-\Delta W \sim W$, соответственно, требуемый минимальный радиус ускорителя

$$R_{\text{обр}} \gtrsim \frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2}\gamma^3 = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 m^4 c^8} W^3 \tag{306}$$

растет как куб энергии ускоряемых частиц!

8.3 Тормозное излучение при рассеянии.

Пусть частица рассеивается на некотором рассеивающем центре, расположенном в начале координат $\vec{r} = 0$. Предположим также, что размеры области рассеяния малы, и изменение импульса частицы $\vec{p}_1 \to \vec{p}_2$ происходит быстро. Для простоты мы будем считать это изменение мгновенным.

Ниже нас будет интересовать спектральный состав излучения. Энергия, излученная в телесный угол $\mathrm{d}\Omega$, может быть вычислена через электрическое поле $\vec{E}(t)$ (или магнитное $\vec{B}(t)$) движущегося заряда на больших расстояниях (*в волновой зоне*), как

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, c\,\varepsilon_0 E^2(t) \cdot R^2 \mathrm{d}\Omega = c\varepsilon_0 R^2 \mathrm{d}\Omega \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega |\vec{E}_\omega|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \frac{c}{\mu_0}\, B^2(t) \cdot R^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{c}{\mu_0}\, R^2 \mathrm{d}\Omega \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega |\vec{B}_\omega|^2\end{aligned} \tag{307}$$

В свою очередь, спектральная плотность тормозного излучения равна

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}\cdot\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{\pi}c\varepsilon_0|\vec{E}_\omega|^2 R^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{c}{\mu_0}|\vec{B}_\omega|^2 R^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega \qquad (308)\end{aligned}$$

В волновой зоне поля выражаются (сравни с (211)) через вектор-потенциал $\vec{A}_\omega$ как

$$\begin{aligned}\vec{E}_\omega &= -i\frac{c^2}{\omega}[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{A}_\omega]], \qquad (309)\\ \vec{B}_\omega &= i[\vec{k}\times\vec{A}_\omega],\end{aligned}$$

и задача сводится к вычислению вектор-потенциала $\vec{A}_\omega$.

Используя (257), имеем

$$\begin{aligned}\vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R} \approx \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR_0}}{R_0}\int \mathrm{d}V'\mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}\vec{j}_\omega(\vec{r}\,') = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR_0}}{R_0}\vec{j}_\omega(\vec{k}). \end{aligned} \tag{310}$$

Здесь предполагается, что наблюдатель находится на расстояниях R очень больших по сравнению с $1/k$ – размером области, в которой формируется излучение с частотой ω. Вводя $R_0 = |\vec{r}|$ – расстояние от центра рассеяния (находящегося в начале координат) до наблюдателя $\vec{r}$, мы использовали разложение $Rk \approx (R_0 - \vec{n}\cdot\vec{r}\,')k = R_0 k - \vec{k}\cdot\vec{r}\,'$.

Таким образом, спектральное и угловое распределение тормозного излучения (308) выражаются через фурье-образ $\vec{j}_\omega(\vec{k})$ пространственно-временного распределение токов:

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta, \varphi; \omega)}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} \cdot \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi^2 \varepsilon_0 c} \left| [\vec{k} \times \vec{j}_\omega(k)] \right|^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \mathrm{d}\omega \qquad (311)$$

Вычисляя $\vec{j}_\omega(\vec{k})$ для движущегося заданным образом точечного заряда, получим

$$\begin{aligned} \vec{j}_\omega(\vec{k}) &= \int \mathrm{d}V \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \underbrace{e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \cdot \vec{v}(t)}_{\vec{j}(t)} \cdot \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \\ &= e \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}V \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \cdot \vec{v}(t) \cdot \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \\ &= e \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \vec{v}(t) \cdot \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}_0(t))} \qquad (312) \end{aligned}$$

Для малых частот $\omega \ll 1/\tau_c$, где τ_c – время соударения можно считать, что траектория частицы состоит из двух участков: до рассеяния $t < 0$, и после рассеяния $t > 0$:

$$\vec{r}_0(t) = \begin{cases} \vec{v}_1 t, \ t < 0; \\ \vec{v}_2 t, \ t > 0. \end{cases}$$

Подставляя в (312), получим

$$\begin{aligned} \vec{j}_\omega(\vec{k}) &= e\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t\vec{v}_1 \cdot \mathrm{e}^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_1)t} + e\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t\vec{v}_2 \cdot \mathrm{e}^{i(\omega - \vec{k}\vec{v}_2)t} = \\ &= ie\left(\frac{\vec{v}_2}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2} - \frac{\vec{v}_1}{\omega - \vec{k}\vec{v}_1}\right) = \\ &= ie\left(\frac{m\vec{v}_2\gamma}{\frac{\omega}{c}mc\gamma - \vec{k}m\vec{v}_2\gamma} - \frac{m\vec{v}_1\gamma}{\frac{\omega}{c}mc\gamma - \vec{k}m\vec{v}_1\gamma}\right) = \\ &= ie\left(\frac{\vec{p}_2}{kp_2} - \frac{\vec{p}_1}{kp_1}\right) \qquad (313) \end{aligned}$$

Здесь $kp \equiv \frac{\omega}{c}mc\gamma - \vec{k}m\vec{v}\gamma$ обозначает скалярное произведение двух 4-векторов, $k = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ и $p = (mc\gamma, m\vec{v}\gamma)$. В итоге

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi^2 c}\left|\frac{[\vec{k}\times\vec{p_2}]}{kp_2} - \frac{[\vec{k}\times\vec{p_1}]}{kp_1}\right|^2 \tag{314}$$

Очевидно, что при $p_2 = p_1$ излучение отсутствует.

Легко также убедиться, что *интенсивность тормозного излучения* не зависит от частоты – вплоть до частот $\omega \sim 1/\tau_c$, где τ_c –характерное время соударения, величиной которого мы выше при вычислении (313) пренебрегли.

Число излученных квантов частоты ω равно отношению излученной энергии к энергии одного кванта:

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{\hbar\omega}\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2}\left|\frac{[\vec{k}\times\vec{p_2}]}{kp_2} - \frac{[\vec{k}\times\vec{p_1}]}{kp_1}\right|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

Полное число излучаемых фотонов бесконечно, т.к. $\int \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} \to \infty$
.

8.4 Реакция излучения.

Потери энергии частицы, связанные с излучением, можно связать с наличием силы радиационного трения $\vec{F}_r$, вызывающей торможение частицы

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\vec{F}_r\vec{v}. \tag{315}$$

Выражение для мощности излучения (287)[5] можно преобразовать к такому виду следующим образом:

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = I = \frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\ddot{\vec{d}})^2}{c^3} = \tag{316}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\vec{d}}\dot{\vec{d}}\right) - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\vec{v}}\right)}_{\vec{F}_r}\vec{v} \tag{317}$$

[5] Мы ограничиваемся нерелятивистским пределом – в противном случае определение и силы, и мощности, и формулы для мощности излучения становятся сложными для анализа.

Первое слагаемое представляет собой полную производную по времени и *в случае периодического движения* в результате усреднения по периоду обращается в нуль. Второе слагаемое дает

$$\vec{F}_r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{v}} \tag{318}$$

Этот результат применим лишь тогда, когда сила радиационного трения $\vec{F}_r$ *мала* по сравнению с остальными силами $\vec{F}^e$, определяющими движение частицы

$$\left|\vec{F}_r\right| \ll \left|\vec{F}^e\right| \tag{319}$$

В случае периодического движения, например, в переменном электрическом поле с частотой ω, данное условие дает

$$\omega \ll \frac{4\pi\varepsilon_0 m c^3}{e^2}, \tag{320}$$

или $\lambda \gg r_e$ (r_e – классический радиус электрона).

Для иллюстрации этого ограничения предположим, что на частицу действует лишь сила радиационного трения, а остальные силы равны нулю. Тогда уравнение движения примет вид

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}_r}{m} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3 m}\ddot{\vec{v}} = \tag{321}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\ddot{\vec{v}}, \qquad r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2} \tag{322}$$

Это уравнение помимо тривиального решения $\vec{v} = \mathrm{const}$ имеет лишь абсурдное решение

$$\dot{\vec{v}} \propto \vec{v} \propto \vec{r} \propto \exp\left\{\frac{3}{2}\frac{ct}{r_e}\right\} \tag{323}$$

что демонстрирует, что пользоваться понятием силы радиационного трения надо с осторожностью.

8.5 Излучение гармонического осциллятора.

Рассмотрим излучение заряженного осциллятора, предполагая заряд точечным:

$$\vec{r}_0(t) \; = \; \vec{r}_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{324}$$

Воспользуемся дипольным приближением (286), применимым при условии

$$kr_0 = 2\pi \frac{r_0}{\lambda} \ll 1, \text{или} \frac{v_0}{c} \ll 1. \tag{325}$$

Подставляя дипольный момент $\vec{d}(t) = e\vec{r}_0(t) = e\vec{r}_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ в (285), получим интенсивность излучения

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 I(\theta, \varphi; t)}{\mathrm{d}\Omega} \mathrm{d}\Omega \; &= \; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|[\vec{n} \times \overset{\rightarrow}{\ddot{d}}\,]|^2}{c^3} \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \\ &= \; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\omega_0^4 e^2 r_0^2}{c^3} \cos^2 \omega_0 t \sin^2 \theta \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}, \end{aligned} \tag{326}$$

Усреднение по времени дает дополнительный множитель $\cos^2 \omega_0 t = 1/2$.

Легко видеть, что спектральная интенсивность излучения

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 e^2 r_0^2}{2c^3}\sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{d}\omega, \quad (327)$$

пропорциональна ω^4. Полная интенсивность дипольного излучения

$$I = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_0^4 r_0^2}{2c^3} \quad (328)$$

Учет силы радиационного трения приводит к затуханию колебаний осциллятора

$$\vec{d}(t) = e\vec{r}_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}, \quad (329)$$

где

$$\gamma = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2}{3mc^3} = \frac{1}{3}r_e\frac{\omega_0^2}{c} \quad (330)$$

В этом случае движение осциллятора уже не является монохроматичным:

$$\vec{d}_\omega = \int_0^\infty \mathrm{d}t \mathrm{e}^{i\omega t} \vec{d}(t) = \tag{331}$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t \mathrm{e}^{i\omega t} e\vec{r}_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} = \frac{er_0}{\gamma - i(\omega - \omega_0)} \tag{332}$$

а угловое и спектральное распределение излученной энергии в этом случае

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta, \varphi; \omega)}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^4 e^2 r_0^2}{2c^3} \sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \frac{\omega_0^4}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \mathrm{d}\omega. \tag{333}$$

Проинтегрировав по углам, получим спектральное распределение излученной энергии

$$W(\omega) = W \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \tag{334}$$

где

$$W = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}^2 W(\theta, \varphi; \omega)}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = $$
$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_0^2 \omega_0^4}{6\gamma c^3} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_0^2 \omega_0^4}{3c^3} \tau, \tag{335}$$

где $\tau = 1/2\gamma$ – время жизни (высвечивания) возбужденного состояния осциллятора, а γ – естественная ширина линии излучения.

9 Рассеяние электромагнитных волн.

Рассеяние электромагнитных волн удобно характеризовать сечением рассеяния (переизлучения), определяемым как отношение интенсивности $\mathrm{d}I$ рассеянной волны к вектору Пойнтинга падающей волны

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}I}{\tilde{S}} \tag{336}$$

9.1 Рассеяние свободным зарядом.

В нерелятивистском приближении сила, действующая на заряд в поле электромагнитной волны $\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ равна

$$\vec{F} = e\vec{E} = e\vec{E}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}$$

в дипольном приближении $kr \ll 1$, тогда из уравнения движения $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$ имеем для дипольного момента $\ddot{\vec{d}} = e^2\vec{E}/m$. Используя дипольное приближение

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}]|^2}{c^3}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}$$

с учетом потока энергии падающей волны $\tilde{S} = c\varepsilon_0 E_0^2$ получим

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \sin^2\psi \mathrm{d}\Omega = r_e^2 \sin^2\psi \mathrm{d}\Omega \qquad (337)$$

Здесь ψ – угол между направлением вектора $\vec{E}_0$ в падающей волне и направлением $\vec{n}$ рассеянной волны. В частности, $\cos\psi = \sin\theta\cos\varphi$, где θ угол рассеяния, φ угол поляризации падающей волны. Если падающая волна неполяризована, то после усреднения по поляризациям

$$\mathrm{d}\sigma_T = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2\theta) \mathrm{d}\Omega \tag{338}$$

Полное сечение

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_e^2, \tag{339}$$

известное как ***томсоновское сечение рассеяния***, *не зависит* от частоты.

9.2 Рассеяние осциллятором.

Уравнение движения осциллятора в поле волны имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + 2\delta\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{340}$$

где $\delta = \frac{1}{3} r_e \frac{\omega_0^2}{c}$ (оценка радиационного трения). Решая уравнение, имеем

$$\vec{d} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta}\,\frac{e^2}{m}\vec{E}.$$

Далее, для амплитуды и фазы второй производной дипольного момента

$$\ddot{\vec{d}} = \mathrm{Re}\left\{\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta}\frac{e^2}{m}\vec{E}\right\} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}\frac{e^2}{m}\vec{E}_0\cos(\omega t - \beta),$$

где $\quad \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2},$

а сечение рассеяния

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2} \cdot \mathrm{d}\sigma_T. \tag{341}$$

Интегрируя по углам, для полного сечения получим аналогично

$$\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2} \cdot \sigma_T \approx \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2} \cdot \sigma_T. \tag{342}$$

Здесь $\mathrm{d}\sigma_T, \sigma_T$ дифференциальное и полное томсоновское сечение рассеяния на свободной частице.

Сечение рассеяния на осцилляторе $\mathrm{d}\sigma, \sigma$ носит резонансный характер. В резонансе ($\omega = \omega_0$) сечение велико и **не зависит от свойств осциллятора** и определяется лишь длиной рассеиваемой волны:

$$\sigma(\omega = \omega_0) = \frac{\omega_0^2}{(2\pi\delta)^2} \cdot \sigma_T = \frac{3}{2\pi}\lambda^2 \gg r_e^2,$$

(здесь λ –длина волны).

В пределе малых частот $\omega \ll \omega_0$ (рэлеевское рассеяние) сечение рассеяния

$$\sigma = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \cdot \sigma_T \tag{343}$$

быстро растет с частотой.

Это, в частности, обеспечивает голубой цвет неба – коротковолновая (голубая) часть спектра рассеивается сильнее, чем длинноволновая (красная). Этот же эффект приводит к красному оттенку заходящего солнца.

10 Электромагнитное поле в веществе.

10.1 Строение вещества, микроскопические поля в веществе и уравнения Максвелла-Лоренца.

Внутри вещества электромагнитное поле есть сумма полей, создаваемых внешними зарядами и токами, и полей, создаваемых зарядами среды.

Заряды среды возникают в результате *поляризации среды* пространственного смещения микроскопических зарядов среды и возбуждении в ней микроскопических токов порождаемых воздействием этого *суммарного* электромагнитного поля.

Точные микроскопические уравнения *Максвелла-Лоренца*

$$\operatorname{div}\vec{e} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_t, \tag{344}$$

$$\operatorname{rot}\vec{e} = -\frac{\partial\vec{b}}{\partial t}, \tag{345}$$

$$\operatorname{div}\vec{b} = 0, \tag{346}$$

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \mu_0\vec{j}_t + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}, \tag{347}$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_t = 0. \tag{348}$$

связывают микроскопические поля $\vec{e}, \vec{b}$ – электрическое и магнитное, соответственно, с ρ_t – полной плотностью всех зарядов (включая заряды среды) и с $\vec{j}_t$ – полной плотностью всех соответствующих токов.

10.2 Усредненные уравнения Максвелла-Лоренца, макроскопические поля.

Микроскопические поля испытывают большие флуктуации на расстояниях порядка атомных. На практике представляют интерес сглаженные – *макроскопические* поля, усредненные по размеру много больше атомного, но малому по сравнению с масштабом изменения макроскопического поля

$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle, \qquad \vec{B} = \langle \vec{b} \rangle \tag{349}$$

для напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, соответственно.

> В силу *линейности* микроскопических уравнений по полям и порождающим их источникам оказывается возможным эти усредненные поля выразить через *усредненные распределения зарядов в среде.*

Уравнения Максвелла для макроскопических полей в среде

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho_t\rangle, \tag{350}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{351}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{352}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\langle\vec{j}_t\rangle + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{353}$$

а усредненные заряды и токи среды удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial\langle\rho_t\rangle}{\partial t} + \operatorname{div}\langle\vec{j}_t\rangle = 0. \tag{354}$$

Среда может относиться либо к *проводникам*, заряды в которых обладают подвижностью и могут перетекать из одной части в другую, либо к *диэлектрикам*, в которых заряды “связаны” и могут лишь смещаться на расстояния порядка атомных размеров. Ниже мы ограничимся лишь рассмотрением диэлектриков.

Полная плотность заряда складывается из плотности *внешних* заданных зарядов ρ и плотности *связанных* зарядов диэлектрика $\rho_{\text{связ}}$:

$$\begin{aligned} \langle \rho_t \rangle &= \rho + \rho_{\text{связ}}, && (355) \\ \langle \vec{j}_t \rangle &= \vec{j} + \vec{j}_{\text{связ}} && (356) \end{aligned}$$

Вычисление наведенных плотностей связанных зарядов и токов в диэлектрике задача достаточно нетривиальная, и ниже мы рассмотрим величины, связанные с наведенными зарядами и токами, но более удобные для описания.

Смещение зарядов диэлектрика под воздействием электрического поля приводит к появлению плотности дипольного момента $\vec{P}$ в диэлектрике, называемому также ***вектором поляризации среды***. Дипольный момент диэлектрического тела создается как объемной, так и поверхностной плотностью зарядов

$$\int \mathrm{d}V \vec{P} = \int \mathrm{d}V(\rho_{\text{связ}}\vec{r}) + \oint_S \mathrm{d}S(\sigma_{\text{связ}}\vec{r}) \tag{357}$$

В свою очередь, и объемная, и поверхностная плотность зарядов может быть выражена через вектор поляризации

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div}\vec{P}, \sigma_{\text{связ}} = P_n, \tag{358}$$

что, как мы увидим ниже, значительно удобнее для описания. Тем самым, вместо плотности наведенных зарядов мы используем вектор поляризации среды $\vec{P}$.

Далее, таким же образом вместо токов связанных зарядов $\vec{j}_{\text{связ}}$, складывающихся из поляризационных токов $\vec{j}_P$ и токов намагничивания $\vec{j}_M$:

$$\vec{j}_{\text{связ}} = \vec{j}_P + \vec{j}_M, \tag{359}$$

удобно использовать вектор поляризации $\vec{P}$

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{360}$$

и вектор намагниченности $\vec{M}$:

$$\vec{j}_M = \operatorname{rot} \vec{M} \tag{361}$$

имеющий смысл магнитного момента единицы объема вещества). Поверхностная плотность токов намагниченности также может быть выражена через вектор намагниченности $\vec{M}$ как $\vec{i}_M = [\vec{M} \times \vec{n}]$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности тела.

Введем теперь **вектор электрической индукции** $\vec{D}$ определенный как

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{362}$$

и **вектор напряженности магнитного поля** $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{363}$$

Определенные таким образом величины удовлетворяют уравнениям Максвелла в среде:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \tag{364}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{365}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{366}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{367}$$

и ***уравнению непрерывности*** – *закону сохранения зарядов.*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

из которых наведенные в среде плотности зарядов $\rho_{\text{связ}}$ и токов $\vec{j}_{\text{связ}}$ выпали полностью, правда ценой введения векторных полей $\vec{P}$ и $\vec{M}$, определить которые нам еще предстоит.

Поскольку каждое из этих полей характеризует локальную электрическую и магнитную поляризацию среды, естественно предположить, что электрическая поляризация вещества определяется электрическим полем: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$, а намагниченность – магнитным: $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$. Для достаточно слабых полей эта связь должна быть линейной:

$$P^i = \varepsilon_0 \kappa_e^{ij} E^j, \tag{368}$$
$$M^i = \kappa_m^{ij} H^j \tag{369}$$

а величины κ_e^{ij} и κ_m^{ij} называются тензорами соответственно *диэлектрической* и *магнитной* восприимчивости.

В **случае изотропной среды** $\vec{P} \| \vec{E}$ и $\vec{M} \| \vec{H}$, и эти тензора сводятся к скалярным функциям $\kappa_e(\vec{E})$ и $\kappa_m(\vec{H})$:

$$\kappa_e^{ij} = \kappa_e \delta^{ij}, \quad \kappa_m^{ij} = \kappa_m \delta^{ij}. \tag{370}$$

Заряды *всегда* смещаются по направлению поля, поэтому для всех диэлектриков $\kappa_e > 0$.

В случае магнитного поля наведенный магнитный момент может быть направлен как по полю: $\kappa_m > 0$ (парамагнетизм), так и против поля: $\kappa_m < 0$ (диамагнетизм).

Поля $\vec{P}$ и $\vec{M}$ можно исключить вовсе, вводя диэлектрическую и магнитную проницаемость

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (1+\kappa_e), \qquad \varepsilon \geqslant 1; && (371) \\ \mu &= (1+\kappa_m), \qquad \mu \geqslant 0; && (372) \\ \vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, && (373) \\ \vec{B} &= \mu\mu_0\vec{H} && (374) \end{aligned}$$

Вместе с уравнениями Максвелла в среде это дает замкнутую систему уравнений.

10.3 Условия на границе раздела двух сред.

В случае, когда среда состоит из нескольких областей, разделенных границами, уравнения электродинамики можно решать в каждой из этих областей, на границе между областями необходимо эти решения "сшить".

Условия сшивки для нормальной компоненты электрической индукции имеют вид имеют вид

$$\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma \tag{375}$$

где σ – поверхностная плотность ***внешних*** (не путать с *наведенными*!) зарядов на границе раздела. Ввиду отсутствия *магнитных* зарядов соответствующие условия для магнитной индукции

$$\vec{B}_{2n} - \vec{B}_{1n} = 0. \tag{376}$$

Для тангенциальной компоненты электрического поля условие

$$\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0 \tag{377}$$

следует из потенциальности электрического поля $\vec{E}$. Наконец, для тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля имеем условие

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = i, \tag{378}$$

где i – поверхностная плотность *внешних* токов на границе раздела, следует из уравнения Максвелла (367).

10.4 Потенциалы в среде. Плотность энергии и потока энергии в среде.

В среде связь потенциалов с полями E, B остается неизменной

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{379}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{380}$$

В однородной изотропной среде уравнения для потенциалов имеют вид ($v^2 \equiv 1/(\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)$):

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho, \tag{381}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j}, \tag{382}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{383}$$

Последнее уравнение представляет собою условие лоренцевской калибровки для потенциалов в среде.

Плотность энергии и импульса в среде определена как

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}\right), \tag{384}$$

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}, \tag{385}$$

где $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ — вектор Пойнтинга, описывающий поток энергии электромагнитного поля в среде.