МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(5 семестр)

профессор Давид Абрамович Шапиро

1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Метод характеристик для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными. Задача Коши. Образование разрывов.
2. Понятие характеристик для систем линейных и квазилинейных уравнений с двумя переменными. Классификация по типам: гиперболические, эллиптические, параболические системы.
3. Приведение гиперболической системы к каноническому виду. Инварианты Римана, простая волна Римана.
4. Метод годографа для уравнений газовой динамики. Точные решения для политропного газа.

2. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Волновое уравнение. Вывод из уравнений Максвелла и газодинамики. Решение одномерного волнового уравнения, формула Даламбера.
2. Приведение гиперболического, эллиптического и параболического уравнения с двумя переменными к каноническому виду.
3. Приведение многомерных уравнений второго порядка к каноническому виду. Характеристики гиперболического уравнения и их физический смысл.
4. Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнений теплопроводности. Бегущие волны.
5. Разделение переменных. Метод Фурье.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Разделение переменных в задаче круглой мембране. Функции Бесселя.
2. Разделение переменных в уравнении Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Присоединенные функции Лежандра. Сферические гармоники. Функции Бесселя с полуцелым индексом.
3. Решение дифференциального уравнения второго порядка вблизи обыкновенной точки и регулярной особой точки. Характеристические показатели.
4. Функция Гаусса и вырожденная гипергеометрическая функция.
5. Уравнение Шрёдингера для осциллятора и атома водорода. Полиномы Эрмита и Лагерра.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1. Асимптотика интегралов Интеграл Лапласа.
   а) Случаи стационарной точки на границе и внутри отрезка интегрирования. Асимптотика $\Gamma-$ функции Эйлера.
   б) Метод стационарной фазы. Асимптотика функции Бесселя.
   в) Метод перевала. Асимптотика функций Лежандра и Эйри.
2. Метод усреднения. Асимптотика усредненного решения дифференциального уравнения.

Литература

1. **В. Я. Арсенин.** *Методы математической физики и специальные функции.* М.: Наука, 1984.
2. **С. К. Годунов.** *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1971.
3. **И.В. Колоколов и др.** *Задачи по математическим методам физики.* УРСС, 2002.
4. **Е.В. Подивилов и др.** *Рабочая тетрадь по математическим методам физики,* Новосибирск: НГУ, 2012.
5. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** *Квантовая механика; Гидродинамика.*
6. **Дж. Мэтьюз, Д. Уокер.** *Математические методы в физике.* М.: Атомиздат, 1972.
7. **Ф. Олвер.** *Асимптотика и специальные функции.* М.: Наука, 1990.

Дополнительная литература

8. **В. И. Арнольд.** *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. — § 7; *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — Изд. $3^е$. М.: Наука, 1984. — § 11.
9. **А. Найфэ**. *Введение в методы возмущений.* М.: Мир, 1984.
10. **Р. Рихтмайер**. *Принципы современной математической физики.* М.: Мир, Т.1 — 1982.
11. **Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин**. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1976. — Гл.VII.

Примерная программа семинаров

доцент Евгений Вадимович Подивилов

1. Собственные значения. Функции от матриц. Резольвента. Задачи 14, 2, 5, 20. Решить задачу 20 с помощью собственных значений.

2. Унитарные и эрмитовы матрицы, проекторы. Матрицы Паули.
Задачи 1, 4, 8. Вывести формулу $\sigma_i\sigma_j = ie_{ijk}\sigma_\kappa + \delta_{ij}$. Показать, что для всякой матрицы 2x2 коэффициенты разложения $A = a_0\sigma_0 + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$ даются формулой $a_\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(A\sigma_\alpha\right)$ (σ_0 – единичная матрица). Найти общий вид проектора 2x2. Решить задачу 20 с помощью раздожения по матрицам Паули.

3. Свойства δ-функции. Ортогонализация. Полнота системы функций. Проверка самосопряженности дифференциальных операторов. Задачи 21 а,б, 24, 27 а,б, 30. Показать, что оператор $-d^2/dx^2+U(x)$ самосопряжен на отрезке [0,1], если функции удовлетворяют граничным условиям: u(0)=u(1)=0; u'(0)=u'(1)=0, линейной комбинации этих двух, или периодическим u(0)=u(1), u'(0)=u'(1).

4. Линейные уравнения первого порядка. Характеристики. Условие разрешимости задачи Коши. Задачи 36 а,б, 37, 38, 42.

5. Квазилинейные уравнения. Опрокидывание. Задача 43. Найти точку опрокидывания уравнения Хопфа для начального условия $u(x,0)=1-\mathrm{th}(x)$. Найти закон расширения области неоднозначности. Найти точку опрокидывания неоднородного уравнения Хопфа $u_t+uu_x=1$. [+ 45a].

6. Системы линейных уравнений. Приведение к каноническому виду. Задачи 48, 47 а,б. Пример системы квазилинейных уравнений, задача 53.

7. Инварианты Римана и характеристики в случае двух переменных. Задача о политропном газе. Задачи 49, 50, 51, 52 [+58].

8. Характеристические переменные. Области эллиптичности и гиперболичности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду. Исключение первых производных. Задачи 59 а,б,в, 60 а. Исключить первую производную в уравнениях $u_{xx}-u_{yy}+u_x+u_y=0$; $(x-y)u_{xy}-u_x+u_y=0$.

9. Поиск автомодельной подстановки с помощью масштабных преобразований. Автомодельные решения линейного и нелинейного уравнения теплопроводности. Решения нелинейных уравнений типа бегущей волны. Солитоны. Задача 98. Найти автомодельное решение задачи $u_t=u_{xx}$, $u(x,0)=x^3$, $u(0,t)=0$. Задача 100 при n=2. Задачи 102, 103, 110 [+108,111].

10. Решение волнового уравнения, уравнений теплопроводности и Лапласа методом Фурье. Задачи 68, 71, 72, 73, 75,79. [+76,78].

11. Разделение переменных уравнения Шредингера в ортогональных системах координат. Разделить переменные стационарного уравнения Шредингера в сферических координатах. Задачи 88 в, г.

12-13. Сферические гармоники. Полиномы Лежандра, Лагерра и Эрмита: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности. Задачи 127, 128, 130, 157, 158, 137, 159. Получить формулу Родрига для полиномов Лагерра из интегрального представления

14-15. Основные свойства функции Бесселя: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности. Задачи 161, 162, 139, 142, 143, 144, [+147, 148].

16. Характеристические показатели в особых точках. Определяющее уравнение. Гипергеометрические функции. Выразить ln(1+z)/z и $(1-z)^n$ через гипергеометрическую функцию. Задачи 120, 152, 153. Выразить функцию Эйри через вырожденную гипергеометрическую функцию. [Решить уравнение Шредингера для атома водорода в параболических координатах].

17. Асимптотика интеграла Лапласа. Задачи 177, 163, 180, 181, 182. Найти асимптотику интеграла $\int_0^\infty dt \exp\left(-t^2 - \frac{a}{t^2}\right), a \to \infty$.

18. Метод стационарной фазы. Задачи 173, 185, 186, 187.

19. Метод перевала. Седловые точки, рельеф функции, линии Стокса. Асимптотика функции Эйри. Задачи 190, 189, 191, 165, 185 (методом перевала).

20. Асимптотики функции Бесселя и Лежандра. Метод перевала для подынтегральной функции с полюсами. Найти асимптотику функции Бесселя с произвольным индексом, пользуясь представлением Шлефли

$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1} dt$, $|z| \to \infty$. Задачи 194, 193.

21. Метод усреднения. Преобразование Боголюбова – Крылова. Задачи 167, 169, 170, 195, 196, 171, 197, 168 [+198].

Контрольная работа: проводится по группам перед началом контрольной недели.

Коллоквиум: проводится после окончания контрольной недели.

ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ № 1 (сдать до 25 октября)

1. Найти

$$e^A, \qquad A = \frac{x}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

тремя способами: разложением в ряд, приведением к диагональному виду и с помощью резольвенты.

2. Найти решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}]\right)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = 0$$

в скрещенных электрическом и магнитном полях **E·H**=0. Как выглядят характеристики?

3. Решить задачу Коши для нелинейного уравнения Шредингера в оптическом волокне с запаздывающей нелинейностью

$$\frac{\partial A}{\partial z} + |A|^2\frac{\partial A}{\partial t} = iA|A|^2,\ A(0,t) = (1 + t^2/a^2)^{-1},$$

где *A(z,t)* – комплексная функция двух действительных переменных, a - действительный параметр. Найти точку опрокидывания.

4. Определить тип уравнения

$$y(u_{xx} - u_{yy}) - 2xu_{xy} - u_y = 0,$$

привести к каноническому виду и решить задачу Коши $u(0,y) = ch^{-1}y\,, u_x(0,y) = 0$. Исследовать разрешимость.

ЗАДАНИЕ № 2 (сдать до 25 ноября)

5. Найти семейство преобразований симметрии, свести к обыкновенному дифференциальному уравнению и найти точное решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u.$$

6. Решить уравнение теплопроводности

$$u_t = \chi \Delta u$$

в бесконечном цилиндре радиуса R, если на границе цилиндра температура осциллирует как $u(t)=T_0 \sin \omega t$. Исследовать распределение температуры по радиусу при $\omega >> \chi / R^2$.

7. Найти собственные частоты ω колебаний шара радиуса R с граничным условием

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \ \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{r=R} = 0$$

в пределе $\omega R/c >> 1$.

8. Показать, что уравнение Шрёдингера для двумерного «атома водорода» в электрическом поле F

$$-\frac{1}{2}\Delta_2 \psi - \frac{\psi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Fy\psi = E\psi$$

допускает разделение переменных в параболических координат $x = \xi\eta, y = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}$.

Найти уровни энергии E и волновые функции ψ связанных состояний при $F = 0$. Сравнить с ответом в полярных координатах.

ЗАДАНИЕ № 3 (сдать до 25 декабря)

9. Найти решение $\psi(x,t)$ уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + mgx\psi$$

с начальным условием $\psi(x,0)=A \exp(-|x|/a)$. Исследовать асимптотику на больших временах. С какой скоростью движется центр пакета и как меняется его ширина?

10. С помощью интегрального представления

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{xu}\, u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

найти асимптотику вырожденной гипергеометрической функции, если $x = \gamma\xi, \ \gamma \to +\infty$, при $\xi > 1$ или $\xi < 1$.

11. Методом усреднения исследовать эволюцию медленной переменной в уравнении Ван дер Поля с нелинейным трением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(\dot{x} - \dot{x}^3 x^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Пример экзаменационного билета

1. Найти асимптотику интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega t^3 - t^{-3}}\ dt, \omega \to +\infty$.

2. Найти решение уравнения $u_t + xu_y - yu_x = u^2,\ \ u(0,x,y) = x^2 + y^2$.

Примеры дополнительных задач

A. Найти асимптотику интеграла:

1. $\int_0^1 e^{\lambda t} \ln t\, dt,\ \lambda \to +\infty$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\left(\operatorname{ch}^2 t - \frac{t^2}{2}\right)} dt,\ \lambda \to +\infty$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t - t^4} dt,\ \lambda \to +\infty$.

B. Решить уравнение в частных производных:

1. Задачу Коши $xu_y - yu_x = 1,\ \ u(x = 1) = y^2$.
2. Уравнения Лапласа в единичном шаре с граничным условием $u|_{r=1} = 3\cos^2\theta - 1$.
3. Задачу Коши $u_t + uu_x = x,\ u(x,0) = x$.

Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Метод характеристик.
2. Квазилинейное уравнения I порядка.
3. Канонический вид уравнения II порядка. Формула Даламбера.
4. Автомодельное решение уравнения теплопроводности.
5. Метод Фурье для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.
6. Разделение переменных в цилиндрических и сферических координатах. Функции Бесселя, полиномы Лежандра и Эрмита.
7. Асимптотика интеграла Лапласа. Метод стационарной фазы.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(6 семестр)

профессор Давид Абрамович Шапиро

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП

1. Симметрия молекул (повороты, отражения, зеркальные повороты). Определение группы, гомоморфизм, изоморфизм. Примеры конечных групп: $\mathbf{C_n}$, $\mathbf{D_n}$, **T, O, Y**.
2. Основные понятия теории групп: порядок элемента и группы, подгруппа, смежный класс, класс сопряженных элементов, нормальная подгруппа, центр, фактор-группа.
3. Матричные представления конечных групп. Единичное, точное, регулярное представления, размерность представления. Приводимые и неприводимые представления. Лемма Шура. Соотношение ортогональности неприводимых представлений. Таблица характеров. Соотношение ортогональности характеров. Разложение представления на неприводимые.
4. Симметрии, законы сохранения и вырождение в квантовой механике. Снятие вырождения при понижении симметрии. Использование симметрии для расчета кратности вырождения колебаний молекул.
5. Общие свойства групп Ли, связность, размерность, компактность. Примеры групп Ли: **GL**(**n,C**), **U**(**n,C**), **SU**(**n,C**), **O**(**n,R**), **SO**(**n,R**). Алгебра Ли, структурные константы. Инфинитезимальные операторы (генераторы). Алгебра Ли группы Ли.
6. Восстановление группы Ли по ее алгебре Ли. Экспоненциальная формула. Группа **SO**(**3**), **SU**(**2**) и их параметризации. Изоморфизм алгебр Ли **ASU**(**2**) и **ASO**(**3**). Гомоморфизм группы **SU**(**2**) на **SO**(**3**). Спиноры.
7. Построение неприводимых представлений группы вращений. Повышающий и понижающий операторы, оператор Казимира. Базис представления из сферических гармоник. Связь с квантованием момента импульса.
8. Тензорное произведение представлений. Разложение Клебша – Гордана. Тензорные представления группы, понятие тензора. Симметричные тензоры, симметризаторы Юнга. Инвариантные тензоры, расчет количества независимых компонент. Правила отбора.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

1. Необходимые условия существования обратного оператора. Фундаментальное решение и функция Грина краевой задачи. Принцип взаимности. Функция Грина уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале.
2. Альтернатива Фредгольма. Разложение обратного оператора по проекторам, нулевые моды. Обобщенная функция Грина.
3. Принцип максимума для оператора Лапласа. Единственность решения задач Дирихле и Неймана. Особенность фундаментального решения уравнения Пуассона в пространствах разной размерности. Формула Грина. Функции Грина второго рода для задач Дирихле и Неймана. Потенциалы объемного заряда, простого и двойного слоя. Функция Грина уравнения Гельмгольца. Применение в квантовой теории рассеяния.
4. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение с помощью преобразования Фурье. Единственность решения волнового уравнения. Запаздывающая функция Грина. Правило обхода полюсов. Принцип Гюйгенса - Френеля.

Литература

1. **С. К. Годунов.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1971.
2. **И.В. Колоколов и др.** *Задачи по математическим методам физики.* УРСС, 2002.
3. **Е.В. Подивилов и др.** *Рабочая тетрадь по математическим методам физики,* Новосибирск: НГУ, 2012.
4. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** *Квантовая механика.*
5. **Дж. Мэтьюз, Д. Уокер.** *Математические методы в физике.* М.: Атомиздат, 1972.
6. **М. И. Петрашень, Е. А. Трифонов.** *Применения теории групп в квантовой механике.*

Дополнительная литература

1. **Г. Вейль.** *Теория групп и квантовая механика*. М.: Наука, 1970.
2. **Е. Вигнер.** *Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров.* М.: Изд. иностранной литературы, 1961.
3. **Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.** *Современная геометрия.*
4. **Г. Я. Любарский.** *Теория групп и физика.* М.: Наука, 1986.

5. **А. Мессиа.** *Квантовая механика.* Т.1,2. М.: Наука, 1979.
6. **Р. Рихтмайер.** *Принципы современной математической физики.* Т.2. М.: Мир, 1984.
7. **С. Л. Соболев.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966.
8. **Дж. Эллиот, П. Добер.** *Симметрия в физике.* Т.I, II. М.: Мир, 1983.

Примерная программа семинаров

доцент Евгений Вадимович Подивилов

1. Группа симметрии правильного треугольника: таблица умножения, подгруппы, смежные классы. Задачи 292, 293, 295, 294, 296, 283, 297, 284.

2. Классы сопряженных элементов, инвариантные подгруппы, фактор-группы. Группы подстановок. Задачи 302 (а), 303, 306, 307, 309 (а). Найти порядок группы вращений куба.

3. Группа симметрии квадрата и куба. Центр группы. Задачи 302 (б), 287, 299, 286, 305.

4. Матрицы неприводимых представлений группы треугольника. Характеры. Соотношения ортогональности. Разложение произвольного представления на неприводимые. Найти неприводимые представления группы треугольника и построить таблицу неприводимых характеров. Построить и сравнить таблицы неприводимых характеров групп $\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{C_4}$. Задачи 309 (б), 310, 311.

5. Таблица неприводимых характеров группы квадрата. Кратности вырождения нормальных колебаний симметричной молекулы. Задачи 344. Двумерная система из трех одинаковых грузов в вершинах правильного треугольника. Грузы соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Выписать матрицы исходного представления и разложить его на неприводимые. В молекуле C_2H_6 треугольник из атомов водорода развернут относительно второго треугольника на 60°. Найти кратности вырождения нормальных колебаний. [То же для NH_3 и CH_3F].

6. Действие элемента группы на функциях. Снятие вырождения при понижении симметрии в задачах о колебаниях круглой мембраны и об уровнях энергии

квантовой системы. Прямое произведение представлений. Снимается ли вырождение колебаний круглой мембраны, если на ее края помещены четыре одинаковых груза в вершинах квадрата? Задачи 349, 350.

7. Примеры групп Ли, вычисление размерности. Различные параметризации. Генераторы, алгебры Ли. Восстановление группы Ли по ее алгебре с помощью экспоненциальной формулы. Задачи 329, 328 (в), (г), 315.

8. Неприводимые представления группы **SO(2)** и их характеры. Тензорные представления, разложение по неприводимым, инвариантные тензоры. Найти размерность пространства тензоров n- го ранга, разложить по неприводимым. Сколько независимых компонент имеет тензор третьего ранга, инвариантный относительно группы **SO(2).**

9. Неприводимые представления групп **O(2)** и **SO(3)** и их характеры. Оператор Казимира в представлении на функциях. Задачи 316, 317(а), 333.

10. Преобразование тензоров при вращении и инверсии. Разложение Клебша – Гордана. Задача 334. Разложить $D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ на неприводимые в группе **SO(3)**. Выделить линейные комбинации компонент бесследового симметричного тензора второго ранга, которые преобразуются при вращении как $Y_{2,m}$.

11. Симметризация тензоров и разложение симметричного тензора на неприводимые. Представления в пространстве полиномов. Задача 340(а),(б),(в).

12. Количество независимых компонент инвариантного тензора. Правила отбора. Сколько независимых компонент имеет тензор второго ранга, инвариантный относительно группы **SO(3), D_3 [T]**? То же для симметричного тензора. Найти правила отбора для дипольного момента в группах **SO(3), D_3 [T]**.

13. Связь групп **SU(2)** и **SO(3)**. Оператор Казимира и неприводимые представления. Задача 317 (б), 318. Линейное преобразование вектора $\vec{r}$: $\overrightarrow{r'} = \hat{R}\vec{r}$ задается формулой $(\overrightarrow{r'}\vec{\sigma}) = \exp(-i\vec{n}\vec{\sigma}\varphi/2)(\vec{r}\vec{\sigma})\exp(+i\vec{n}\vec{\sigma}\varphi/2)$. Найти матрицу $\hat{R}$ [341-343].

14. Построение функции Грина для одномерных краевых задач. Фундаментальное решение. Скачок производной. Задачи 219, 220, 199, 224 (а), 225 (а), (б), 227.

15. Функция Грина для оператора Штурма-Лиувилля. Нулевые моды и обобщенная функция Грина. Принцип взаимности. Задачи 228 (а), (б).

16. Функция Грина уравнений Пуассона и Гельмгольца.Задачи Дирихле и Неймана. Характер особенностей в двумерном и трехмерном случаях. Функция Грина второго рода. Интеграл Пуассона. Метод изображений и метод конформных преобразований. Задачи 230, 231, 232, [233], 204, 236,

17. Функция Грина уравнений теплопроводности и Фоккера–Планка. Преобразования Фурье по координатам и времени. Задачи 238, 207 (а), 240, 241, 242 с x^3, [208].

18. Функция Грина уравнения Шрёдингера. Правило обхода полюсов. Запаздывающая функция Грина волнового уравнения. Формула Кирхгофа. [Пропагатор уравнения Клейна – Гордона – Фока.] Задачи 207 (б), 246, 209-212 [213].

Контрольная работа: проводится по группам перед началом контрольной недели.

Коллоквиум: проводится после окончания контрольной недели.

ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ № 1 (сдать до 25 марта)

1. Определить порядок и число классов сопряженных элементов в группе вращений тетраэдра **T**. Найти инвариантную подгруппу H и фактор-группу **T**/H. Построить таблицу неприводимых характеров.
2. В квантовой механике можно обозначить спиновую волновую функцию электрона как α, если спин направлен «вверх» или β, когда спин направлен «вниз». Состояния α и β ортогональны. Для системы из трех электронов можно сформировать волновые функции вида $\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)$, $\alpha(1)\alpha(2)\beta(3)$ и т.д., всего 8 волновых функций. Эти волновые функции преобразуются друг через друга под действием элементов группы подстановок P_3. Разложить данное представление на неприводимые.
3. Построить таблицу неприводимых характеров полной группы тетраэдра $\mathbf{T_d}$. Четыре одинаковых грузика соединены попарно одинаковыми пружинами так, что в равновесии находятся в вершинах правильного тетраэдра. Найти кратности вырождения нормальных колебаний системы. Можно ли найти собственные частоты, не решая секулярного уравнения?

ЗАДАНИЕ №2 (сдать до 25 апреля)

4. Построить представление группы вращений в пространстве однородных полиномов третьей степени $P(x,y,z)=\sum\limits_{m+n+l=3} C_{mnl}x^m y^n z^l$. Найти базис подпространства гармонических полиномов. Разложить исходное представление на неприводимые. Выразить базис неприводимых представлений через сферические функции Y_{lm}.
5. Разложить на неприводимые представление группы вращений **SO(3)** на тензорах третьего ранга в трехмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?
6. Центробежная поправка в гамильтониане многоатомной молекулы имеет вид $V=\sum\limits_{ijkl}\tau_{ijkl}\,J_iJ_jJ_kJ_l$, где J_i – вектор углового момента, τ_{ijkl} – симметричный тензор.

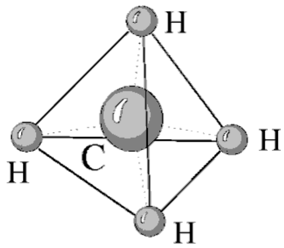
   Сколько независимых компонент содержит тензор τ, если молекула имеет симметрию треугольника $\mathbf{C_{3v}}$?

7. Две переменные z_1, z_2 преобразуются вещественной матрицей из группы G=**SL(2)**

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1.$$

Найти генераторы $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ группы G в представлении на функциях $w(z_1, z_2)$ и их коммутационные соотношения. Найти собственные функции оператора Казимира. Построить повышающий и понижающий операторы для $\hat{I}_3$.

8. Вывести правила отбора для матричных элементов электрического дипольного момента в молекуле метана CH_4 для переходов между состояниями, которые преобразуются по неприводимым представлениям.



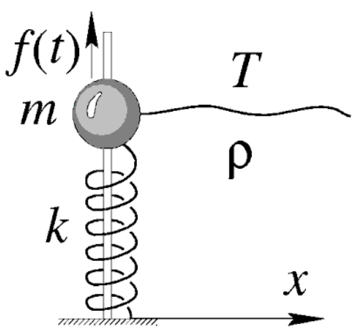
ЗАДАНИЕ № 3 (сдать до 25 мая)

9. Найти функцию Грина и решение уравнения $y'''= f(x)$ с граничными условиями $y(0)=a, y(1)=0, y'(0)+y'(1)=0$. При каких a задача разрешима?
10. Найти функцию Грина неоднородного уравнения теплопроводности на поверхности цилиндра радиуса R:

$$u_t = \chi \Delta_2 \mathrm{u} + \mathrm{f}(\mathrm{z}, \varphi, \mathrm{t}).$$

Выписать решение задачи с источником $f = Q\delta(z - Vt)$.

11. Найти функцию Грина второго рода $G(x,t|t')$ механической системы, состоящей из шарика, скользящего по вертикальной спице, соединенного с пружинкой и полубесконечной струной, натянутой вдоль оси оси x.



$$\rho u_{tt}(x,t) = T u_{xx}(x.t), \quad m u_{tt}(0,t) = -k u(0,t) + T u_x(0,t) + f$$

.

Пример экзаменационного билета

1. Правило обхода полюсов. Построить функцию Грина уравнения Шредингера $\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \psi(x,0) = g(x).$
2. Каждому повороту группы $\mathbf{D}_3$ соответствует линейное преобразование коэффициентов квадратичной формы $P(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + axy + bxz + cyz.$ Разложить полученное представление на неприводимые.

Примеры дополнительных задач

1. Построить функцию Грина уравнения $y'' + y' - 2y = f(x),\ \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}'(1) = 0.$
2. Построить функцию Грина уравнения $y'' + \pi^2 y = f(x),\ y'(0) = y'(1) = 0.$
3. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности на единичной окружности.
4. Какова максимальная размерность неприводимого представления группы A_4?
5. Найти число независимых компонент симметричного тензора ранга 3, инвариантного относительно группы $\mathbf{D}_4$.
6. Построить таблицу неприводимых характеров группы $\mathbf{D}_6$.

Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Правые смежные классы, классы сопряженных элементов, инвариантные подгруппы в группе $\mathbf{D}_3$.
2. Неприводимые представления и характеры $\mathbf{D}_3$, $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{SO}(3)$. Разложение представления группы на неприводимые.
3. Кратность вырождения колебаний молекулы.
4. Размерность групп $\mathbf{GL}(n), \boldsymbol{U}(n), \mathbf{SU}(n), \mathbf{O}(n), \mathbf{SO}(n).$ Параметризация группы $\mathbf{SO}(3)$.
5. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля. Условия на скачке. Нулевые моды.
6. Функция Грина уравнений Пуассона и Лапласа. Задачи Дирихле и Неймана.
7. Функция Грина уравнения теплопроводности и волнового уравнения.