

3-36

20

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 43 - 70

Г.М.Заславский, Б.В.Чириков

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Новосибирск

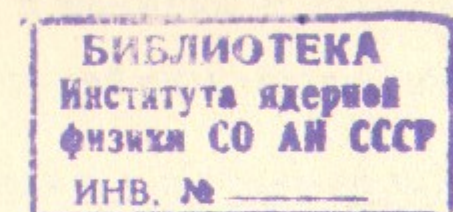
1970

Институт ядерной физики Сибирского отделения АН СССР

Г.М.Заславский, Б.В.Чириков

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ
КОЛЕБАНИЙ

Статья направлена в журнал УФН.



Новосибирск

1970

§ 1. Введение

§ 2. Одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического возмущения.

2.1. Изолированный нелинейный резонанс.

2.2. Фазовые колебания в приближении умеренной нелинейности.

2.3. Взаимодействие нелинейных резонансов.

2.4. Основная модель стохастичности гамильтоновой системы.

§ 3. Основные понятия эргодической теории.

3.1. Элементарная модель стохастичности.

3.2. Методы описания движения в эргодической теории.

3.3. Эргодичность движения, или как появляется вероятность в динамической теории.

3.4. Движение с перемешиванием, или турбулентность фазового потока.

3.5. К-энтропия и кинетическое уравнение.

3.6. Является ли движение с перемешиванием настоящим случайным процессом?

§ 4. Некоторые численные эксперименты.

4.1. Проверка на стохастичность.

4.2. Проверка на эргодичность.

4.3. Промежуточная зона.

§ 5. Стохастическое ускорение Ферми.

- 5.1. Одномерная модель Улама.
- 5.2. Многомерный случай.
- 5.3. Стохатрон.

§ 6. Стохастический слой и условие перекрытия резонансов.

- 6.1. Движение частицы в поле двух плоских волн.
- 6.2. Броуновское движение частицы в поле волнового пакета.
- 6.3. Обсуждение свойств основной модели (2.12).

§ 7. Разрушение магнитных поверхностей.

- 7.1. Магнитные поверхности стелларатора.
- 7.2. Влияние локальных возмущений.

§ 8. Приближение хаотических фаз (ПХФ) и основное кинетическое уравнение (master equation)

- 8.1. Анализ потери памяти о начальных условиях.
- 8.2. Временные масштабы.

§ 9. Нелинейные волны.

- 9.1. Проблема Ферми-Паста-Улама (ФПУ).
- 9.2. Слабая турбулентность.
- 9.3. Неустойчивость нелинейных периодических волн.

§ 1. Введение

Предмет настоящего обзора является относительно новым и малоизвестным особенно, для физиков. Поэтому мы начнём с простого примера. Представим себе движение некоторого нелинейного осциллятора, например, обычного маятника, но без затухания, под действием внешней очень слабой периодической силы. Уравнение движения такой системы можно записать в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \varepsilon F(t) \quad (1.1)$$

где φ — угол отклонения маятника от положения равновесия, а ω_0 — частота малых колебаний, а $\varepsilon \rightarrow 0$

Пусть сначала возмущение является гармоническим:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (1.2)$$

Решение последней задачи хорошо известно (см., например, /2/ и § 2.2) и мы опишем качественно случай, близкий к резонансу, когда частота возмущения Ω равна приблизительно частоте невозмущенного движения осциллятора $\omega(\alpha)$, которая, в силу нелинейности, зависит от амплитуды колебаний $\alpha(\omega(0) = \omega_0)$. В отличие от линейного резонанса частота нелинейного осциллятора изменяется под действием резонансного возмущения из-за изменения амплитуды колебаний. В результате амплитуда и частота осцилляторов, в свою очередь, испытывает колебания (биения) в некотором интервале $\Delta \alpha$, $\Delta \omega$.

Подставим себе теперь, что возмущение $F(t)$ содержит много гармоник:

$$F(t) = \sum_n F_n \cos n \Omega_0 t \quad (1.3)$$

причем расстояние между ними по частоте (Ω_0) много меньше интервала биений $\Delta \omega$, так что в резонансе находятся одновременно несколько гармоник периодического возмущения (1.3). Как будет колебаться маятник в этом случае? Несмотря на малость возмущения ($\varepsilon \rightarrow 0$) до сих пор не удалось получить строгое решение этой задачи. Однако полукачественная теория,

изложение которой — и посвящен, в значительной степени, нас — тоящий обзор, а также численные эксперименты (§ 4) приводят к довольно неожиданному выводу: маятник будет колебаться так, как будто на него действует "случайная" сила. В частности, энергия колебаний будет расти, в среднем, пропорционально времени несмотря на нелинейность системы при отсутствии затухания). Этот особый тип движения колебательной системы мы будем называть стохастичностью.

Изучение явления стохастичности интересно, прежде всего, с чисто физической точки зрения, поскольку оно связывает две, казалось бы, довольно различные области физики — теорию нелинейных колебаний и статистическую механику и представляет собой, по существу, один из возможных механизмов возникновения статистических законов в динамической системе. С этой точки зрения выяснение основных особенностей стохастического движения имеет существенное значение и для общей теории нелинейных колебаний. Не меньшее значение имеет стохастичность и с точки зрения приложений, главным образом, к проблеме устойчивости нелинейных колебаний консервативных систем, которая возникает в самых различных областях физики и техники.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

Наиболее трудным в проблеме устойчивости колебаний является как раз случай консервативной системы. В этом случае возможна лишь так называемая нейтральная устойчивость, когда малые возмущения начальных условий вызывают ограниченные колебания вокруг невозмущенного решения, не нарастающее, но и не затухающее со временем. Это означает, в частности, что любой сколь угодно малый неучтенный фактор может превратить такую нейтральную устойчивость в неустойчивость. В этом — одна из причин, вследствие которой мы до сих пор не имеем общей теории устойчивости нелинейных колебаний консервативных систем, несмотря на значительные усилия в этом направлении, особенно, в последнее десятилетие. Другая причина состоит в том, что основная область приложений теории нелинейных колебаний была связана до недавнего времени с автоколебательными или авторегулируемыми системами, которые не являются консервативными. Эта преимущественная ориентация теории колебаний хорошо заметна по монографиям [см., например, /5/] и привела к тому, что даже такие гибкие новые методы как асимптотическое разложение Кры-

лова — Боголюбова — Митропольского (метод КБМ /1,2/) использовались очень ограниченно, а весь предмет теории нелинейных колебаний был искусственно сужен до проблемы существования и устойчивости периодических решений. С другой стороны в небесной механике (которая, как это не парадоксально, не включается, обычно, в общие курсы нелинейных колебаний /50/) оказалось возможным, в силу краткости человеческой жизни, ограничиться построением приближенных решений лишь для очень коротких (в характерном масштабе) интервалов времени. Это обстоятельство является весьма специфической особенностью современной небесной механики, особенностью, которая привела к отказу от первоначальной программы Пуанкаре построения общей, хотя бы качественной, теории движения консервативной системы.

В последнее время, однако, появились новые важные приложения теории нелинейных колебаний, связанные с проблемой длительного удержания заряженных частиц в ограниченной области пространства с помощью электромагнитного (обычно, магнитного) поля специальной конфигурации. Это — магнитные ловушки для термоядерного реактора /55/, ускорители заряженных частиц /6/ и, особенно, наполнители для встречных протонных и протон-антипротонных пучков /56/. Сюда же можно отнести и проблему нелинейного взаимодействия волн в плазме (см., например, /33/ и § 9). Эти приложения выдвигают задачу изучения движения нелинейной колебательной системы в целом, т.е. на неограниченном временном интервале и для произвольных начальных условий. С другой стороны, уже первые эксперименты /9, 57/ и расчёты /10/ в области новых приложений указали на связь проблемы устойчивости нелинейных колебаний с проблемой появления статистических законов в динамической системе. Далее, оказалось, что подобная связь была обнаружена еще Хедлундом и Хопфом /12/ в рамках так называемой эргодической теории (см. § 3) — специального раздела математики, возникшего из попыток обосновать законы термодинамики и статистической физики на чисто механической основе. Первое и до недавнего времени единственное приложение этого важного результата Хедлунда и Хопфа к проблемам физики было произведено Крыловым /13/; который исследовал статистическое поведение молекулярных систем. Математические и физические работы последнего времени, обзор которых даётся в настоящей статье, следует рассматривать как развитие или, лучше сказать, возрождение этого направления. В частности, в послед-

нее время бурно развивается эргодическая теория, главным образом, в связи с работами Колмогорова /31/, Аносова и Сина /14-16/ (п.3.5), оставляя далеко позади породившую её статистическую механику. Однако, современная эргодическая теория описывает лишь предельный, часто принципиально недостижимый, случай максимальной неустойчивости движения и поэтому сама по себе недостаточна для решения упомянутых прикладных задач. С другой стороны, в последнее время возникла стимулируемая отчасти небесной механикой математическая теория, рассматривающая как раз обратный предельный случай максимальной устойчивости нелинейных колебаний гамильтоновой системы. Эта весьма общая теория была начата также Колмогоровым /58/ и развита Арнольдом /59/ и Мозером /60/ (теория КАМ). Очевидно, что для решения практических задач необходимо объединение обеих крайних теорий. К сожалению, строгое построение такой объединяющей теории в настоящий момент невозможно в силу больших принципиальных трудностей (см. § 4). Однако удаётся развить полукачественную теорию, которую мы будем называть теорией стохастичности. Эта теория позволяет представить себе общую картину неустойчивости нелинейных колебаний, дополненную оценками по порядку величины. Часто этого оказывается достаточно для приложений, во всяком случае, в комбинации с экспериментами, численными или "настоящими".

Основным понятием теории является понятие нелинейного резонанса (п.2.2). Это интересное явление, пример которого описан выше, было исследовано впервые, по-видимому, Лагранжем в небесной механике, где оно получило название либрационного движения планет (см., например, /3/) и, в более явной форме, в теории ускорителей в связи с открытием Векслера и Мак-Миллана механизмом автофазировки /4,5/) (см. также /6/). Мы вводим и исследуем ниже нелинейный резонанс на примере сравнительно простых одномерных моделей, начиная с довольно общего случая нелинейного осциллятора под действием внешнего периодического возмущения (п.2.1) и кончая "элементарной" моделью (п.3.1). Основным методом исследования служат аналитические оценки, базирующиеся отчасти на современной эргодической теории /§ 3/, подкрепленные численными экспериментами с "элементарной" моделью /§ 4/.

Теория стохастичности даёт возможность представить себе

общую структуру фазового пространства нелинейной колебательной системы, которое оказывается пронизанной всюду плотной системой (п.2.4) нелинейных резонансов. Вследствие взаимодействия этих резонансов в окрестности сепаратрисы каждого из них всегда появляется так называемый стохастический слой, который представляет собой зародыш неустойчивости. Это обстоятельство было в общем известно еще Пуанкаре /61/ и детально исследовалось Мельниковым /62/, которому удалось вычислить так называемое расщепление сепаратрисы, характеризующее нижнюю границу ширины стохастического слоя. Верхняя граница была оценена с помощью теории стохастичности в работах /20, 8/ и оказалась совпадающей по порядку величины с расщеплением сепаратрисы. Недавно Алексеев строго доказал существование в стохастическом слое квазислучайных траекторий /63/, что и оправдывает его название.

В случае системы с одной степенью свободы достаточно тонкие стохастические слои разных резонансов не пересекаются на фазовой плоскости (см., например, рис.1). Поэтому неустойчивость локализована в пределах одного стохастического слоя и с практической точки зрения не является опасной. Строгое рассмотрение этой проблемы в теории КАМ /59/ позволяет сформулировать и доказать в этом случае теорему о вечной (для $t \rightarrow \infty$) устойчивости движения. Такая же ситуация возникает и для автономной системы с двумя степенями свободы, так как её движение ограничено в фазовом пространстве поверхностью постоянной энергии. Оба эти случая мы будем называть одномерными. В многомерном случае стохастические слои различных резонансов, вообще говоря, пересекаются между собой, образуя запутанную систему "каналов", по которым возможна диффузия на большие расстояния, т.е. реальная неустойчивость. Первый пример такой неустойчивости был построен Арнольдом /35/, поэтому она называется, обычно, диффузией Арнольда. Полукачественная теория этой неустойчивости развита в /8/.

Ширина нелинейного резонанса и его стохастического слоя определяется величиной "возмущения" по отношению к "невозмущенной" системе, в качестве которой мы подразумеваем так называемую максимально устойчивую систему (п.3.3), т.е. систему с разделяющимися переменными. При достаточно большом возмущении соседние в фазовом пространстве резонансы перекрываются

(п.2.3), а стохастические слои расширяются до размера своих резонансов, образуя в фазовом пространстве сплошную стохастическую область. При этом возникает сильная стохастическая неустойчивость (в том числе и в одномерном случае), которая является наиболее опасной неустойчивостью нелинейных колебаний. Настоящий обзор посвящен, главным образом, описанию именно этой неустойчивости на примере простых моделей (§§ 2, 4) и некоторых приложений (§§ 5-7, 9). Для удобства читателя мы даём также сводку основных идей и понятий современной эргодической теории (§ 3).

Теория стохастичности позволяет не только получить практически важные критерии и характеристики неустойчивости нелинейных колебаний, но и детально проследить переход от динамического к статистическому описанию движения механической системы. Последнее представляется существенным для более глубокого и правильного понимания природы статистических законов. Этот вопрос обсуждается кратко в § 8, а также в п.3.6. Читателей, интересующихся этой проблемой более детально, мы отсылаем к прекрасной монографии Крылова /13/, работы которого явились, на наш взгляд, первым шагом на пути построения физической теории стохастичности.

§ 2. Одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического возмущения

Основной задачей настоящего обзора является демонстрация феномена стохастической неустойчивости нелинейных колебаний на возможно более простых, но в то же время физических (т.е. имеющих отношение к реальным механическим системам) моделях. Одной из таких моделей является одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического возмущения, описанный во Введении. Картина движения такой модели очень наглядна, но как мы увидим совсем не тривиальна. К этой модели могут быть сведены важные практические задачи, некоторые из которых рассматриваются ниже (§§ 5, 7, 9), в том числе и многомерные (в первом приближении). Конечно, это совершенно не означает, что с помощью рассматриваемой модели можно решить все задачи нелинейных колебаний, однако, она даёт возможность, как мы увидим ниже, изучить основные особенности нелинейных колебаний, с помощью которых можно приступить к решению более

сложных задач. К числу последних относится, например, так называемая диффузия Арнольда - особая форма стохастической неустойчивости многомерных систем. Мы не будем касаться её сколько-нибудь подробно и отсылаем интересующихся читателей к специальным работам /35,8/ (см.также п.6.1).

В дальнейшем мы будем всегда считать возмущение малым, чтобы иметь возможность использовать приближённые методы. По этой причине основной эффект возмущения связан с резонансом. Для нелинейной системы такое утверждение не столь очевидно как для линейной, но тем не менее оно оказывается правильным (п.2.2).

2.1. Изолированный нелинейный резонанс

Наиболее удобными переменными для описания движения нелинейного осциллятора являются переменные действие (I) - угол (θ). Действие связано с энергией системы W соотношением:

$$\frac{dW(I)}{dI} = \omega(I) ; \theta = \omega t + \varphi$$

где $\omega(I)$ - частота нелинейных колебаний. При наличии возмущения уравнения движения осциллятора в переменных (I, θ) невозмущенного движения имеют вид:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \vartheta)}{\partial \theta} \quad (2.1)$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \vartheta)}{\partial I} ; \dot{\vartheta} = \Omega$$

$$\mathcal{H}(I, \theta, \vartheta) = \mathcal{H}_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, \vartheta)$$

где $\mathcal{H}$ - гамильтониан, а возмущение εV является малым ($\sim \varepsilon \ll 1$) и периодическим по θ, ϑ с периодом 2π . Фаза ϑ характеризует внешнее возмущение с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Под нелинейностью осциллятора будем понимать его неизохронность, т.е. зависимость частоты колебаний от

энергии. Характеристикой нелинейности служит безразмерный параметр:

$$\alpha = \left| \frac{I}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dI} \right| = \left| 2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial I^2} / \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial (I^2)} \right| \quad (2.2)$$

Ангармоничность колебаний, т.е. присутствие высших гармоник, не обязательно связано с нелинейностью. Так, вращение релятивистской частицы в магнитном поле даёт пример нелинейного, но гармонического осциллятора. С другой стороны движение ультрарелятивистской частицы в прямоугольной потенциальной яме представляет собой ангармонические колебания с постоянной частотой. В общем случае возмущение εV разлагается в двойной ряд Фурье:

$$V(I, \theta, \vartheta) = \sum_{m, n} \frac{V_{mn}(I)}{2} e^{i(m\vartheta + n\theta)} + \text{K.C.} \quad (2.3)$$

Резонанс (m, n) (m — гармоники колебаний осциллятора с n — й гармоникой внешнего возмущения) определяется условием:

$$m\Omega + n\omega \approx 0 \quad (2.4)$$

Требуемая точность этого равенства зависит от ширины резонанса (см. ниже п.2.2).

Простейшим является случай единственного резонанса:

$m, n = \pm 1$ ($\omega \approx \Omega$). В сумме (2.3) остаётся при этом два (действительных) слагаемых, одно из которых с аргументом $\vartheta - \theta$ ($\omega, \Omega > 0$) является собственно резонансным, в то время как другое ($\vartheta + \theta$) представляет высокочастотное возмущение. В первом приближении последним слагаемым можно пренебречь, например, на основании метода усреднения КБМ (Крылова-Боголюбова-Митропольского, /1,2/). Более тонкие эффекты влияния такого возмущения будут рассмотрены ниже (см. § 6).

Если ширина резонансов достаточно мала, то при заданных начальных условиях может осуществляться только один резонанс, который мы будем называть реальным, или просто резонансом (2.4). Всем другим членам в сумме (2.3) соответствуют при этих начальных условиях виртуальные резонансы^{х)}. Естественно, что виртуальные резонансы влияют на движение, однако в нелинейной системе это влияние не сводится к тривиальной суперпозиции, и мы будем называть его взаимодействием резонансов.

В случае, если расстояние между резонансами "достаточно велико" — термин, который будет уточнен ниже (п.2.3), — должно, тем не менее, выполняться приближение изолированного резонанса, когда можно пренебречь взаимодействием резонансов. Это соответствует обычному методу усреднения КБМ. Оставляя в сумме (2.3) только одно резонансное слагаемое и вводя резонансную фазу $\Psi_{mn} = m\vartheta + n\theta$, получим из (2.1) уравнения движения в виде:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon n V_{mn} \sin \Psi_{mn} \\ \dot{\Psi}_{mn} &= m\Omega + n\omega(I) + \varepsilon n V'_{mn} \cos \Psi_{mn} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где штрих означает производную по действию I .

2.2. Фазовые колебания в приближении умеренной нелинейности

Пусть параметр α (2.2) удовлетворяет условию умеренной нелинейности:

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon \quad (2.6)$$

Как будет видно из дальнейшего, изменение $\Delta I = I - I_p$ в этом случае всегда мало ($|\Delta I| \ll I_p$), где значение

^{х)} Заметим, что не каждый виртуальный резонанс может стать реальным, так как условие (2.4) выполняется, вообще говоря, не для всех m, n .

I_p соответствует точному резонансу ($m\Omega + n\omega(I_p) = 0$). Поэтому независимо от вида функций $\omega(I)$, $V_{mn}(I)$ движение вблизи нелинейного резонанса (2.5) описывается приближенно следующим (сохраняющимся) универсальным гамильтонианом:

$$\mathcal{H}_y = n\omega' \cdot \frac{(\Delta I)^2}{2} + \varepsilon n V_{mn}(I_p) \cdot \cos \Psi_{mn} \quad (2.7)$$

$$\omega' = (d\omega/dI)_{I=I_p}$$

Система (2.7) похожа на маятник с массой $(n\omega')^{-1}$ в поле тяжести с ускорением $g = \varepsilon n^2 \omega' V_{mn}$. Картина траекторий на фазовой плоскости I, Ψ_{mn} показана на рис.1 для двух нелинейных резонансов без учёта взаимодействия между ними. На исходной фазовой плоскости осциллятора (I, θ) цепочка резонансов замкнута и содержит n областей. В каждой такой области имеется устойчивое положение равновесия, или эллиптическая неподвижная точка^{х)} ($\Psi_{mn} = \pi$; $g > 0$), обозначенная на рис.1 значком $\odot$. Соседние области разделяются неустойчивым положением равновесия, или гиперболической неподвижной точкой ($\Psi_{mn} = 0$; $g > 0$, знак $\times$ на рис.1). Траектория, соединяющая две соседние гиперболические точки и обозначенная на рис.1 пунктиром, называется сепаратрисой. Она ограничивает область нелинейного резонанса, внутри которой имеют место фазовые колебания, т.е. ограниченное изменение фазы Ψ_{mn} . Вне сепаратрисы фаза меняется со временем монотонно. Максимальная ширина нелинейного резонанса (размер сепаратрисы) определяется из (2.7):

$$(\Delta I)_\varphi = 4 \sqrt{\varepsilon V_{mn} / \omega'}$$

$$(\Delta \omega)_\varphi = \omega' (\Delta I)_\varphi = 4 \sqrt{\varepsilon \omega' V_{mn}} = \quad (2.8)$$

$$= \frac{4 \Omega_{mn}}{n}$$

х) Под устойчивостью везде в этой работе понимается так называемая нейтральная устойчивость, при которой малые возмущения не нарастают и не затухают со временем.

где Ω_{mn} — частота малых фазовых колебаний. При умеренной нелинейности (2.6) измерение как I , так и ω мало:

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}}; \quad \frac{\Delta \omega}{\omega} \sim \sqrt{\varepsilon \lambda}$$

что и оправдывает универсальное описание нелинейного резонанса с помощью гамильтониана (2.7).

Физический смысл фазовых колебаний можно пояснить следующим образом. Изменение амплитуды колебаний в резонансе вызывает, вследствие нелинейности, уход частоты колебаний от резонансного значения и, следовательно, прекращает дальнейшее изменение амплитуды колебаний. Однако возникшая при этом частотная расстройка приводит к уходу резонансной фазы, так что амплитуда колебаний начинает изменяться, в конце концов, в противоположном направлении, частота колебаний снова возвращается к резонансному значению и т.д.

Хотя нелинейность и стабилизирует таким образом, изолированный резонанс, т.е. ограничивает изменение ΔI , последнее оказывается, согласно (2.8), существенно больше, чем в нерезонансном случае: $\Delta I \sim \varepsilon$. Это оправдывает выделение резонансов в нелинейной системе. По той же причине фактическим параметром разложения при $\lambda \sim 1$ является $\sqrt{\varepsilon}$, а не ε . В частности, в первом приближении по $\sqrt{\varepsilon}$ можно пренебречь последним слагаемым в уравнении для Ψ_{mn} (2.5), которое представляет собой линейную поправку к частоте^{хх)}. Её нужно учитывать только при $\varepsilon \gtrsim \lambda$. В частности, условие стабилизации резонанса нелинейностью может быть получено приближенно из оценки^{хх)}:

$$\varepsilon n V'_{mn} \lesssim n (\Delta \omega)_\varphi$$

х) Это слагаемое сохраняется и для линейного осциллятора.

хх) Подробное исследование резонанса при слабой нелинейности проведено Шохом /66/ и Мельниковым /62/; качественно новое явление — сохранение значительной области стохастичности при сколь угодно слабой нелинейности — обнаружено недавно Фордом и Лансфордом /85/.

или

$$\frac{\xi}{\Delta} \lesssim \frac{\omega V_{mn}}{I (V'_{mn})^2} \quad (2.9)$$

Нелинейный резонанс был исследован впервые, по-видимому, Лагранжем в связи с так называемым либрационным движением планет /3/ и, в более явной форме, в теории ускорителей в связи с открытым Векслером и Мак-Милланом механизмом автофазировки /4,5/ (см. также /6/). Из последних работ мы заимствуем основную терминологию, относящуюся к нелинейному резонансу. Универсальная теория нелинейного резонанса в приближении умеренной нелинейности была дана в /7/ (см. также /8/).

2.3. Взаимодействие нелинейных резонансов

Взаимодействие нелинейных резонансов — основной эффект, на который мы хотим обратить внимание в этой работе. Его значение состоит в том, что при достаточно сильном взаимодействии возникает очень опасная стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.

Очевидно, что взаимодействие резонансов зависит от отношения ширины резонанса $(\Delta\omega)_\varphi$ (2.8) к расстоянию до ближайшего соседнего резонанса $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$ (см. рис.1).

Величину

$$S = \frac{(\Delta\omega)_\varphi}{\Delta} \quad (2.10)$$

назовем константой связи резонансов.

Приближение изолированного резонанса соответствует условию: $S \ll 1$. С другой стороны при $S \gg 1$, которое означает перекрывание соседних резонансов, картина движения должна существенно измениться. Действительно, как показывает универсальный гамильтониан (2.7), изолированный нелинейный резонанс эквивалентен движению системы в некоторой потенциальной "яме". При наличии нескольких резонансов имеется столько же потенциальных "ям" (рис.1). Если $S \gtrsim 1$, соседние "ямы" сливаются,

так что система может переходить из одной "ямы" в другую^{х)}. Очевидно, что это означает развитие некоторой неустойчивости. Наше основное утверждение состоит в том, что при константе связи $S \gtrsim 1$ возникает стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний, т.е. движение становится сильно нерегулярным, похожим на случайное (см. п.3.6). Поэтому константу связи S можно назвать также параметром стохастичности.

Условие:

$$S \sim 1 \quad (2.11)$$

будем называть границей стохастичности.

Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний, по-видимому, впервые наблюдалась в численных экспериментах Говарда и Хайна /9/, которые получили также критерий неустойчивости вида (2.11). Аналитические оценки даны в работе /10/, где были приведены также аргументы в пользу того, что эта неустойчивость является стохастической. Последняя точка зрения подтвердилась в дальнейшем в ряде работ, обзор которых можно найти в монографиях /11, 8/ (см. также ниже). Оказалось, что стохастическая неустойчивость является частным случаем проявления статистических законов. Связь последних с неустойчивостью была замечена впервые на специально сконструированном примере Хедлундом и Хопфом /12/, детально проанализирована Крыловым /13/ для случая молекулярных столкновений и строго доказана при весьма общих условиях Аносовым и Синаем /14-16/.

Ниже мы опишем основные особенности, механизм и природу стохастической неустойчивости на примере простых моделей.

2.4. Основная модель стохастичности гамильтоновой системы

Рассмотрим специальный случай периодического возмущения нелинейного осциллятора в виде очень коротких "толчков", зависящих только от фазы θ : $V(1, \theta, \tau) \rightarrow T V(\theta) \sum_k \delta(t - kT)$ (2.1). Уравнения движения можно записать тогда в форме кано-

^{х)} Заметим, что при этом одновременно несколько соседних резонансов становятся реальными.

нического преобразования $I, \theta \rightarrow \bar{I}, \bar{\theta}$

$$\bar{I} = I - \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta} = I - \varepsilon I_0 f(\theta) \quad (2.12)$$

$$\bar{\theta} = \theta + T \cdot \omega(\bar{I})$$

с производящей функцией: $F(\bar{I}, \bar{\theta}) = \bar{I}\bar{\theta} + T(\mathcal{H}_0(\bar{I}) + \varepsilon V(\bar{\theta}))$

Это преобразование описывает изменение величин I, θ под действием одного "толчка", или, как мы будем говорить в дальнейшем, на одном шаге. При $T \rightarrow 0$ преобразование (2.12) переходит, разумеется, в гамильтоновы уравнения (2.1), но без линейной поправки к частоте в силу принятого нами условия $\partial V / \partial I = 0$. Последнее выражение для $\bar{I}$, где $f(\theta) \sim 1$ — безразмерная функция фазы, а I_0 — постоянная размерности действия, введено для большей наглядности.

Рассмотрим, далее, частный случай, когда $f(\theta) = \sin \theta$, т.е. возмущение имеет всего одну гармонику. Условие резонанса может быть записано в виде: $T\omega = 2\pi m$, где m — целое. В терминах дифференциальных уравнений (2.1), или, как мы будем говорить, непрерывного времени, эта система резонансов соответствует разложению в ряд Фурье периодической δ -функции:

$$\sum_k \delta(t - kT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Omega t} / T$$

причем расстояние между резонансами равно: $\Delta = 2\pi/T = \Omega$, а $V_{m1} = 2I_0/T$ (2.3), (2.12). Параметр стохастичности (2.10) принимает вид:

$$S^2 = \left| \frac{8}{\pi^2} \varepsilon \omega' I_0 T \right| \quad (2.13)$$

Покажем прежде всего из простых физических соображений, что при $S \gg 1$ движение системы (2.12), которую мы будем называть основной моделью стохастичности^{x)}, действительно похоже на случайное /10/. Для этого обратим внимание, что обе переменные I, θ играют соответственно различную роль в движении системы (2.12). Фазовое пространство системы представляет собой цилиндр, замкнутый по θ и бесконечный по I . Изменение I на один шаг всегда мало, так как $\varepsilon \ll 1$. Однако этого нельзя сказать об изменении θ , если $T\omega \gg 1$. Нетрудно видеть, что преобразование фазы имеет при этом, в основном, характер расширения, коэффициент которого мы определим посредством:

$$K(\theta) \equiv \frac{d\bar{\theta}}{d\theta} - 1 = -\varepsilon \omega' I_0 T f'(\theta) \quad (2.14)$$

Последнее выражение получается из (2.12). Сравнивая с (2.13), находим: $|K| \sim S^2$.

При $K \gg 1$ имеют место два существенных процесса. Первый из них — локальная неустойчивость движения, означающая экспоненциальную расходимость близких траекторий, по крайней мере, по фазе: $(\Delta\theta)_n = (\Delta\theta)_0 \cdot (K)^n$, где

$K(\theta)$ — среднее геометрическое значение коэффициента расширения вдоль траектории, а n — номер шага преобразования, или дискретное время. Второй процесс — так называемое перемешивание — в данном случае распределение траекторий, вышедших из небольшой области $\Delta\theta \approx 2\pi/|K|$, по всему

интервалу фаз 2π уже после одного шага. Легко представить себе, что это ведет к исчезновению корреляций в последовательности фаз $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$, т.е. движение по фазе становится как бы "случайным". Разумеется приведенные соображения являются слишком упрощенными, но зато, как нам кажется, очень наглядными. Это особенно важно потому, что строгая математическая теория движения даже такой простой модели как

^{x)} Смысл этого термина выяснится ниже (п.6.3), после того как мы увидим, какие свойства стохастичности описываются этой моделью и какие нет; основная модель введена в /10/.

(2.12) наталкивается пока, как мы увидим ниже, на непреодолимые трудности (п.4.2). Тем не менее оказывается возможным несколько углубить эти наглядные соображения с помощью современной эргодической теории (§ 3).

Представим себе на минуту, что мы уже доказали "случайность" движения по фазе. Тогда мы приходим к типичной ситуации в современной статистической механике при выводе кинетического уравнения в приближении хаотических фаз. Обычно постулируется, что угловые переменные являются случайными величинами, и это даёт возможность написать кинетическое уравнение для функции распределения от переменных действия, которые служат интегралами движения невозмущенной системы. За подробностями получения кинетического уравнения мы отсылаем читателя к специальным работам [17, 18, 27] (см. также § 8).

§ 3. Основные понятия эргодической теории

Эргодическая теория является разделом математики, изучающим дискретные или непрерывные преобразования с сохраняющейся мерой (интегральным инвариантом). Как показывает название, эргодическая теория возникла из попыток обосновать статистические законы, т.е. вывести их из динамических уравнений движения. Наиболее интересным её объектом в настоящее время (по крайней мере для физиков) является случай максимальной неустойчивости движения гамильтоновой системы. Противоположный случай максимальной устойчивости рассматривается теорией КАМ (см. п.6.1). Согласно теореме Лиувилля интегральным инвариантом (и мерой пространства) служит фазовый объём, элемент которого обозначим посредством $d\Gamma$. Полный объём ограниченного фазового пространства системы положим: $\Gamma = 1$.

Цель этого параграфа - пояснить на простых примерах основные понятия и язык современной эргодической теории и тем самым облегчить чтение специальных работ в этой области. Мы убеждены, что знакомство с этой теорией является сейчас на сущней необходимостью для всех занимающихся проблемой устойчивости нелинейных колебаний и смежными вопросами. Кроме того, мы воспользуемся последними результатами эргодической теории для более подробного анализа движения основной модели (2.12) (см. п.3.5).

3.1. Элементарная модель стохастичности

Прежде всего нам придётся еще более упростить основную модель (2.12). Это связано с тем, что эргодическая теория применима, главным образом, к системам с конечным фазовым пространством, что не выполняется для основной модели. Движение последней распадается фактически на два существенно различных процесса (при $S \gg 1$): динамическое движение (в ограниченной области фазового пространства, приводящее к образованию "случайной" последовательности фаз $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$, и неограниченная диффузия по Γ . Только первый из этих процессов имеет отношение собственно к эргодической теории, тогда как второй описывается кинетическим уравнением. Покажем, как можно разделить оба процесса на примере основной модели.

Для удобства записи преобразования перейдем прежде всего к новой фазе: $\psi = \theta / 2\pi$ с периодом 1, который удобно задавать с помощью операции взятия дробной части:

$\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ - целая часть x . Введем теперь вместо Γ новую переменную: $\Psi = \{T\omega(I)/2\pi\}$

Смысл её состоит в том, что мы хотим выделить только такие изменения I , которые приводят к изменению фазы ψ и таким образом исключить диффузионный процесс.

В новых переменных преобразование принимает вид:

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \{\psi + k f(\psi)\} \\ \bar{\Psi} &= \{\Psi + \bar{\varphi}\}\end{aligned}\tag{3.1}$$

и также является каноническим. Здесь $k = \varepsilon \omega' I_0 T / 2\pi$.

Фазовое пространство системы (3.1) ограничено теперь единичным квадратом с попарно отождествленными сторонами, или единичным тором. Модель (3.1) будем называть элементарной. В этом параграфе мы используем её наряду с другими простыми моделями для иллюстрации основных понятий современной эргодической теории.

Подчеркнем во избежание недоразумений, что мы не собираемся приводить не только доказательства теорем эргодической теории, но даже и их точные формулировки. Наша основная цель — по возможности наглядно пояснить, если так можно выразиться, физический смысл эргодической теории. Читателям, интересующимся собственно математической стороной этой теории мы рекомендуем в первую очередь книгу Халмоша /23/, по-видимому, наиболее доступную из специальных руководств. Современное состояние теории изложено достаточно полно в обзорах Рохлина, и Аносова и Синая /16/.

3.2. Методы описания движения в эргодической теории.

Исходным является фазовая траектория движения, т.е. траектория в фазовом пространстве системы: $X(t)$, где X означает фазовый вектор (совокупность координат фазового пространства). Для элементарной модели (3.1) $X = (\varphi, \psi)$, а время дискретно: $t = n$ — целое. Такое движение будем называть каскадом /16/. Движение с непрерывным временем, заданное, например, дифференциальными уравнениями, называется потоком.

Другой способ описания движения связан с использованием некоторой функции точки фазового пространства $f(X)$, вообще говоря комплексной. Последняя может представлять любую величину, например, энергию системы. Ниже, однако, мы будем считать ради наглядности, что $f(X)$ является обычной для статистической механики функцией распределения в фазовом пространстве, или (фазовой) плотностью /22/.

Сингулярная плотность ($f = \delta(X - X_0(t))$) эквивалентна описанию в терминах единственной траектории. В эргодической теории используется обычно несингулярная плотность $f(X)$, исключая особые траектории на множестве меры нуль. Заметим, однако, что несингулярная плотность является принципиально ненаблюдаемой (неосуществимой)^{х)} и может использоваться поэтому лишь в качестве вспомогательного, промежуточного, понятия.

х) Это следует уже из того факта, что несингулярная плотность не подчиняется возвратной теореме Пуанкаре, справедливой для любой гамильтоновой системы (см. п. 3.4).

Изменение фазовой плотности $f(x, t)$ со временем определяется движением системы вдоль фазовых траекторий:

$$f(x, t+T) = \hat{S}_T f(x, t) \equiv f(\hat{T}x, t) \quad (3.2)$$

Здесь $\hat{T}$ — оператор сдвига фазовой точки вдоль траектории за время T , а $\hat{S}_T$ — оператор изменения функции за то же время (классический аналог S — матрицы, см., например, /24/. В случае каскада оператор T задается преобразованием, например, (3.1). Смысл введения нового оператора $\hat{S}_T$ состоит в том, что он является линейным, а для обратимого и сохраняющего меру преобразования также и унитарным.

Важной характеристикой оператора $\hat{S}_T$ является его спектр. Определим вначале скалярное произведение двух векторов гильбертова пространства посредством:

$$\langle g, f \rangle = \int g f d\Gamma \quad (3.3)$$

Для дальнейшего нам будет удобно ввести коэффициент корреляции функций g, f :^{х)} $\rho(g, f) = \langle g f \rangle - \langle g \rangle \langle f \rangle$

В частном случае, когда $g = \hat{S}_T f$, говорят об автокорреляции, которая и определяет спектр $S(\omega)$ согласно теореме Хинчина /25, 26/:

$$\langle \hat{S}_T f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega T} S(\omega) d\omega \quad (3.4)$$

Здесь T является переменным параметром, так что автокорреляция есть функция от T и функционал от f . Корреляцион-

х) Иногда употребляется еще нормированный коэффициент корреляции:

$$\rho(g, f) = \frac{\langle g f \rangle - \langle g \rangle \langle f \rangle}{[(\langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2)(\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2)]^{1/2}}$$

Здесь и ниже: $\langle f \rangle = \int f d\Gamma$; иногда применяется

$$\text{обозначение: } \langle f, 1 \rangle \quad (3.3).$$

ный спектр $S(\omega)$ зависит, конечно, от ξ , однако, тип спектра в известных пределах /16/ не зависит от ξ . В дальнейшем мы будем иметь дело с двумя основными типами спектра - дискретным и непрерывным. В первом случае спектральная плотность $S(\omega) = \sum C_k \delta(\omega - \omega_k)$; во втором случае функция $S(\omega)$ непрерывна и ограничена.

3.3. Эргодичность движения, или как появляется вероятность в динамической теории.

Эргодичность движения является, пожалуй, наиболее известным свойством статистической системы. Это понятие было введено в физику Гиббсом и связывается обычно с представлением о траектории движения, равномерно (по инвариантной мере) заполняющей весь доступный фазовый объем. Более точно эргодичность означает, что в пределе при $t \rightarrow \infty$ доля времени (t_A/t) пребывания системы в любом элементе (A) фазового пространства пропорциональна мере этого элемента Γ_A :

$$\omega_A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_A}{t} = \frac{\Gamma_A}{\Gamma} \quad (3.5)$$

Существование предела (3.5) является центральной теоремой (Биркгофа-Хинчина) классической эргодической теории и позволяет ввести понятие вероятности для единственной динамической траектории /25/. В (3.5) ω_A означает вероятность попадания системы в область A^x . Соответствие введенной таким образом вероятности с нашим эмпирическим представлением об

х) Для системы, состоящей из очень большого числа $N \rightarrow \infty$ одинаковых подсистем - "частиц", возможно другое определение вероятности в фазовом пространстве одной "частицы" (так называемое M-пространство): $\omega_A = \lim_{N \rightarrow \infty} N_A/N$

Это есть обычный способ введения функции распределения в M-пространстве. Однако, в этом случае приходится принимать дополнительные предположения о допустимых начальных условиях, от которых зависит ω_A при любом $N \rightarrow \infty$ /27/. Фазовое пространство всей системы, в котором определена вероятность (3.5) называется Γ -пространством.

этой величине будет обсуждаться в п.3.6.

Существование предела (3.5) следует по теореме Биркгофа-Хинчина /25/ только из существования инвариантной меры. Поэтому в некотором смысле все гамильтоновы системы являются эргодическими. Чтобы разъяснить это странное на первый взгляд утверждение, необходимо уточнить понятие "доступный фазовый объем", фигурирующее в приведенном выше определении эргодичности. В некоторых случаях, например, для элементарной модели (3.1), это может быть все фазовое пространство. Обычно, однако, "доступным" является лишь некоторое подпространство, выделяемое однозначными интегралами движения /28/. У автономной (замкнутой) системы всегда есть по крайней мере один такой интеграл - энергия W , который и выделяет в фазовом пространстве энергетическую поверхность $W = \text{const}$ с числом измерений $2N - 1$, где N - число степеней свободы системы.

Назовем систему максимально устойчивой, если она имеет N однозначных интегралов. "Доступный фазовый объем" сводится в этом случае к поверхности N измерений, которая в разделяющихся переменных действие - угол является N -мерным тором:

$$I = \text{const}; \quad \theta_k = t \omega_k(I_1, \dots, I_N) + \theta_{k0}$$

Большое число однозначных интегралов вплоть до $2N - 1$ возможно только на резонансных торах: $\sum_{k=1}^N n_k \omega_k = 0$ (n_k - целые) /28/, мера которых в фазовом пространстве системы равна нулю.

На резонансных торах, мера которых в фазовом пространстве равна 1, фазовая траектория незамкнута и покрывает весь тор. Последнее свойство называется транзитивностью (на торе). Согласно теореме Биркгофа /25/ транзитивность эквивалентна эргодичности. Несколько упрощенно можно сформулировать эту теорему следующим образом: если траектория заполняет какую-либо область фазового пространства, то она заполняет её равномерно (по наведенной на ней мере, см. следующее примечание). В физике, однако, под эргодичностью понимают такой случай, когда движе-

ние транзитивно на энергетической поверхности^{x)}. Если это условие не выполняется, то система может быть всегда разложена на эргодические компоненты. Это значит, что все фазовое пространство можно представить в виде суммы (объединения) конечного или счетного числа, или даже континуума подпространств, в каждом из которых движение транзитивно и, следовательно, эргодично. Примером может служить упомянутое выше множество (континуум) торов максимально устойчивой системы.

Таким образом проблема эргодичности сводится к отысканию максимальной области транзитивности движения.

На спектральном языке эргодичность эквивалентна условию, чтобы число 1 являлось невырожденным собственным значением оператора $\hat{S}_T$. Это условие обеспечивает транзитивность движения. В противном случае появляются инвариантные при движении подпространства и происходит распад на эргодические компоненты по числу различных собственных функций, соответствующих собственному значению 1.

Равномерное заполнение фазового пространства траекторией приводит к релаксации любой начальной функции распределения $f(x, t)$ к константе /23/; последняя всегда является собственной функцией оператора $\hat{S}_T$ с собственным значением 1, как это следует из выражения (3.2). Это свойство эргодического движения может быть выражено равенством:

$$\overline{f(x, t)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{S}_{kT} f(x, t) = \langle f(x, t) \rangle \quad (3.6)$$

$$\hat{S}_{kT} f(x, t) = f(x, t + kT)$$

где черта означает, как это видно из определения, усреднение

x) Так как инвариантным является полный фазовый объем, то введенная мера определяется в данном случае объемом слоя между двумя близкими энергетическими поверхностями

$$\Delta W = \text{Const} \rightarrow 0, \text{ или: } \Gamma(S) \propto S / \text{grad } W(x)$$

где S - площадь энергетической поверхности.

по времени с шагом T . Равенство $\bar{f} = \langle f \rangle$ имеет место почти всюду в фазовом пространстве, т.е. за исключением, быть может, множества точек меры нуль. Последняя оговорка является типичной для всей эргодической теории.

Соотношение (3.6) выражает хорошо известное в статистической физике равенство временных ($\bar{f}$) и фазовых ($\langle f \rangle$) средних. Существенно подчеркнуть, однако, что релаксация в эргодической системе имеет место только в среднем по времени, между тем как функция $f(x, t)$ изменяется, вообще говоря, квазипериодически, так как её спектр может быть дискретным (см. выше).

Условие эргодичности (на данном множестве) можно выразить также с помощью коэффициента корреляции функций

$$f(x, t), g(x) \quad \rho_T(f, g) \equiv \rho(\hat{S}_T f, g) \quad (\text{п.3.2}) \text{ в виде:}$$

$$\rho_T(f, g) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{kT}(f, g) = 0 \quad (3.7)$$

В частном случае $g(x) = f(x, t)$ получаем аналогичное соотношение для автокорреляции.

Наконец, введём ещё одну важную величину - вероятность перехода $\omega_{ik}(T)$ между двумя областями фазового пространства A_i, A_k . Основанием для введения такой величины служит тот факт, что для эргодического движения всегда существуют траектории, соединяющие обе области. Пусть $\hat{T}A_i$ - область, в которую перешла область A_i через время T в результате движения по траекториям. Мера пересечения её с областью A_k ^{x)} $\Gamma_{ik}(T) = \Gamma(\hat{T}A_i \cap A_k)$ и назовём вероятностью перехода:

$$\omega_{ik}(T) \equiv \Gamma_{ik}(T)$$

x) т.е. общую часть областей $\hat{T}A_i$; A_k .

Оказывается /23/, эргодичность означает, что

$$w_{ik}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{e=0}^{n-1} \Gamma_{ik}(eT) = \Gamma_i \Gamma_k = w_i w_k \quad (3.8)$$

где w_e - вероятность попадания траектории в область A_e , равная мере этой области Γ_e ($\Gamma = 1$) (см. п.3.3).

Соотношение (3.8) может быть получено непосредственно из (3.7), если в качестве функции $f(x, 0); g(x)$ взять так называемые характеристические функции областей A_i, A_k , т.е. функции, равные 1 внутри соответствующей области и нулю вне её.

3.4. Движение с перемешиванием, или турбулентность фазового потока

Согласно предыдущему разделу (п.3.3) спектр эргодической системы может быть дискретным, а, значит, движение её - квазипериодическим. Характерной особенностью такого движения является его регулярность, означающая, в частности, возврат траектории к начальной точке с заданной точностью на определенном, ограниченном сверху, интервале времени. Примером может служить движение по поверхности двумерного тора с постоянными частотами ω_1, ω_2 , отношение которых иррационально. Частоты спектра в этом случае равны: $\omega_e = k\omega_1 + l\omega_2$;

k, l - целые. При $\omega_1 \ll \omega_2$ или $\omega_2 \ll \omega_1$

регулярность обхода тора особенно наглядна. Картина движения в этом случае напоминает развертку луча на экране телевизора и не имеет ничего общего с нашим интуитивным представлением о случайном процессе. Следовательно, эргодичность является слишком слабым свойством с точки зрения моделирования случайного процесса. Используя гидродинамическую аналогию, можно сказать, что фазовый поток, т.е. совокупность всех траекторий в фазовом пространстве системы, является в этом случае ламинарным. Турбулентный фазовый поток называется перемешиванием /23/ (ср. п.2.4). Это - одно из основных понятий современной эргодической теории в отличие от классической, которая останавливалась

на эргодичности. Точное определение перемешивания на языке, соответственно, релаксации плотности, корреляции и вероятности перехода имеет вид:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = \langle f(x, t) \rangle \quad (3.9)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho_T(f, g) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w_{ik}(T) = w_i w_k$$

Характерной особенностью этих соотношений является необратимость процесса релаксации при перемешивании в отличие от квазипериодического изменения величин $f(x, t), \rho_T(f, g)$.

$w_{ik}(T)$ со временем при наличии только эргодичности (3.6, 3.8). Иными словами, при эргодичности предельные значения достигаются только в среднем по времени, а при перемешивании они имеют место асимптотически для достаточно большого времени. Это уже значительно ближе к нашему интуитивному представлению о случайном процессе. В частности, перемешивание приводит не только к понятию вероятности, но и к понятию статистически независимых событий (для единственной траектории!), каковыми являются, например, попадания траектории в различные участки фазового пространства (последнее соотношение (3.9)). Заметим, что второе соотношение (3.9) представляет собой хорошо известный в статистической механике закон расщепления временных корреляций.

Введем еще одно вспомогательное понятие, которое поможет глубже уяснить механику перемешивания. Это - так называемое слабое перемешивание, определяемое эквивалентными условиями:

$$\begin{aligned} |f(x, t) - \langle f(x, t) \rangle| &= 0 \\ |\rho_T(f, g)| &= 0 \\ |w_{ik}(T) - w_i w_k| &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

На первый взгляд это очень похоже на эргодичность (ср. 3.6 - 3.8). Существенное отличие, однако, состоит в том, что здесь берутся абсолютные значения величин, стремящихся к нулю. Поэтому на самом деле свойство слабого перемешивания ближе к перемешиванию (3.9) (которое иногда называют также сильным перемешиванием), чем к эргодичности.

При слабом перемешивании возможен возврат плотности $f(x, t)$, т.е. сильное отклонение её от равновесного (предельного) значения при любых $t \rightarrow \infty$, однако, частота этих отклонений или их длительность должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Согласно современной эргодической теории /23/ слабое перемешивание эквивалентно непрерывному спектру оператора S_T . Отсюда вытекает, что сильное перемешивание также имеет непрерывный спектр. Это следует непосредственно и из необратимого характера процесса релаксации (3.9).

Заметим, что необратимость процесса релаксации согласно соотношениям (3.9) не противоречит возвратной теореме Пуанкаре /23/, поскольку последняя относится к фазовой траектории движения, а не к функции распределения (см. п. 3.2)^{х)}. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее, так как в физической литературе получило распространение неправильное понимание возвратной теоремы как утверждения о квазипериодичности движения (см., например, /19, 29, 30/). Если понимать последний термин буквально, он эквивалентен дискретному спектру движе-

х) Заметим, что эта теорема иногда формулируется (и "доказывается") неверно (см., например, /51/).

ния^{х)} /36/ и автокорреляций. Между тем при перемешивании спектр непрерывный, хотя возвратная теорема Пуанкаре, опирающаяся на существование инвариантной меры, остаётся, разумеется, справедливой. Возможно, что указанная ошибка является в значительной мере терминологической, проистекающей от расширения понятия квазипериодического движения. Важно подчеркнуть, что возврат траекторий имеет существенно различный характер при дискретном и непрерывном спектре движения. В первом случае возврат является регулярным в том смысле, что при заданной точности возврата существует нижняя ненулевая граница частоты возврата. Иными словами возврат обязательно происходит в течение конечного интервала времени. Во втором случае нижняя граница частоты возврата равна нулю, несмотря на то, что согласно теореме Пуанкаре возврат будет иметь место бесконечное число раз /23/. Движение по траектории носит в последнем случае нерегулярный ("апериодический") характер, нисколько не противоречащий "настоящему" случайному процессу и, в частности, статистически равновесному состоянию (с флуктуациями!). Поэтому встречающиеся иногда утверждения о неприменимости статистических представлений на достаточно больших интервалах времени, превышающих цикл Пуанкаре, /30/ ошибочны уже по существу^{хх)}. Соотношения (3.9) показывают, что дело обстоит как раз наоборот: чем больше интервал времени, тем точнее статистические понятия в механике.

3.5. К - энтропия и кинетическое уравнение

В результате перемешивания происходит релаксация к статистически равновесному состоянию. Однако, этого свойства, вооб-

х) Точнее, термин квазипериодический означает даже некоторый специальный вид дискретного спектра с конечным числом ос-

новных частот: $\omega_{n_1 \dots n_N} = n_1 \omega_1 + \dots + n_N \omega_N$

В общем случае дискретного спектра говорят о почти-периодической функции.

хх) Заметим, однако, что кинетическое уравнение действительно становится неприменимым на больших временах, так как оно не описывает флуктуации, существенные на таких временах. Но это не означает, конечно, неприменимости статистического описания вообще.

ше говоря, недостаточно для получения кинетического уравнения, описывающего сам процесс релаксации. Дело в том, что статистическое описание в динамической системе возможно только после выполнения с заданной точностью предельных соотношений вида (3.9). Пусть это происходит за время $\sim \tau_n$. Тогда характерное время диффузии, определяемое кинетическим уравнением, должно быть много больше: $\tau_D \gg \tau_n$. Выполнение этого неравенства возможно благодаря тому, что диффузия и перемешивание могут относиться к различным координатам фазового пространства. Такая ситуация имеет место, например, для нашей основной модели (2.12). Диффузия идёт здесь по Γ и характеризуется масштабом времени: $\tau_D \sim \epsilon^{-2}$ (шагов).

Перемешивание не касается, в основном, фазы Θ и происходит за время $\tau_n \sim 1$ (более подробное обсуждение этого вопроса см. в § 8).

Немаловажное значение имеет и закон релаксации (расцепления корреляций) при перемешивании (3.9). Дело в том, что диффузия приводит в обычных условиях (в частности, в ограниченном объёме) к экспоненциальной релаксации. Отсюда ясно, что если мы хотим иметь статистическое описание с достаточной точностью, то расцепление корреляций должно происходить, по крайней мере, тоже по экспоненциальному закону (но, конечно, с меньшим характерным временем). Оказывается, что такой закон перемешивания действительно обычно имеет место для реальных механических систем. Этот факт был установлен впервые Крыловым [13]. Впоследствии, независимо от работ Крылова, Колмогоров [31] ввел специальную величину — энтропию динамической системы (h), — которая равна по порядку величины обратному времени расцепления корреляций. В дальнейшем мы будем называть эту величину энтропией Крылова-Колмогорова, или K -энтропией^{x)}.

Строгое определение K -энтропии удобно связать со свойством локальной неустойчивости движения (п.2.4), которая характеризует разбегание близких траекторий. Локальную неустойчивость можно исследовать с помощью линеаризованных уравнений

^{x)} По поводу связи её с термодинамической энтропией см. ниже.

движения, или уравнений в вариациях, которые называются также касательным преобразованием^{x)}.

Рассмотрим вначале случай каскада, определяемого некоторым преобразованием. Пусть e , $\bar{e}$ — длина касательного вектора (расстояние между двумя траекториями) до и после преобразования. Тогда K -энтропия каскада может быть определена посредством [15]:

$$h = \lim_{e \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\bar{e}}{e} \right) \quad (3.11)$$

где черта означает усреднение во времени (п.3.3), т.е. вдоль траектории движения. Это выражение удобно для экспериментального нахождения энтропии, например, путем численного решения уравнений движения (§ 4). В рассматриваемом случае каскада K -энтропия характеризует, согласно (3.11), среднее разбегание близких траекторий за один шаг.

Перейдем теперь к потоку, который представим себе как предел каскада, длительность шага которого $T \rightarrow 0$. Тогда из (3.11) имеем:

$$h = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{T} \lim_{e \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\bar{e}}{e} \right) \right) \quad (3.11a)$$

Это выражение немедленно приводит к экспоненциальному закону развития локальной неустойчивости:

$$e(t) = e(0) e^{ht}$$

Согласно (3.11a) K -энтропия равна среднему значению инкремента этой неустойчивости.

Теория [15] позволяет получить более удобное для аналитических расчётов выражение для K -энтропии непосредственно

^{x)} Говорят, что это преобразование действует в касательном пространстве.

через параметры системы. Для каскада это может быть сделано следующим образом.

Как и всякое линейное преобразование, касательное преобразование характеризуется матрицей, произведение характеристических чисел которой: $\prod \lambda_i = 1$ в силу сохранения фазового объёма. Если бы коэффициенты преобразования, a , значит, и λ_i были постоянными, то неустойчивость соответствовала бы просто действительным λ_i , в то время как комплексно-сопряжённые отвечали бы локальной устойчивости. Пример такой простейшей ситуации даёт элементарная модель (3.1) с

$f(\psi) = \psi$. Несложные вычисления приводят к собственным значениям и векторам:

$$\lambda = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{K \left(1 + \frac{K}{4}\right)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K \\ K^{-1} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$\tan \beta = \frac{K}{\lambda - 1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - 1/K \\ -K \end{array} \right.$$

где $K(\psi) = k f'(\psi) = k$ в рассматриваемом случае;

θ — угол между осью ψ и собственным вектором с $\lambda > 1$; последние выражения дают предельные значения при $K \rightarrow \infty$. Локальная устойчивость соответствует интервалу:

$$-4 < K < 0 \quad (3.13)$$

Для остальных значений K движение неустойчиво.

Трансформация небольшого участка фазового пространства в последнем случае изображена схематически на рис.2. Участок экспоненциально ($\sim \lambda^n$) расширяется вдоль собственного вектора с $\lambda^+ > 1$ и сжимается вдоль вектора с $\lambda^- < 1$. Процесс перемешивания неминуемо происходит после того, как длина участка достигает максимального размера фазовой области системы (рис.2, ср.п.2.4).

Легко видеть, что при $t \rightarrow \infty$ направление почти любо-

го касательного вектора будет стремиться к направлению собственного вектора расширения; поэтому (3.11) переходит в:

$$h = \ln \lambda^+ \quad (3.14)$$

В типичном случае переменных (по фазовому пространству) коэффициентов касательного преобразования проблема локальной неустойчивости значительно усложняется. С одной стороны, неустойчивость может иметь место и для комплексно-сопряжённых значений λ за счёт параметрического резонанса. С другой стороны, действительные $\lambda(x)$ ещё не гарантируют локальной неустойчивости, так как из-за поворота собственных векторов расширение фазового участка может сменяться его сжатием, что может привести в свою очередь, к ограниченным колебаниям близких траекторий, т.е. к локальной устойчивости^{х)}. В этом случае необходимо найти решение линеаризованных уравнений на всей временной оси. Заметим, что аналогичная процедура уже давно используется в гидродинамике /32/ для получения критерия возникновения турбулентности.

С другой стороны, локальная неустойчивость возможна и при $h = 0$, хотя и развивается в этом случае неэкспоненциально. Например, для любых нелинейных колебаний формально существует локальная неустойчивость $\ln t$ за счёт сдвига частоты между траекториями. Однако по всем разумным критериям такое движение должно считаться устойчивым. Напротив, есть примеры перемешивания (т.е. несомненной неустойчивости движения) с $h = 0$. Это показывает, что свойство локальной неустойчивости должно использоваться с известной осторожностью. Строгое математическое исследование этого вопроса для широкого класса динамических систем было произведено лишь сравнительно недавно Аносовым и Синаем /14-16/. Они показали, что экспоненциальная локальная неустойчивость для всех начальных условий как в основном, так и в касательном пространствах действительно влечёт за собой статистические свойства — положительную K -энтропию^{хх)}, перемешивание и эргодичность.

х) Последний эффект можно наблюдать, в частности, на примере /86/ специального нелинейного преобразования, сконструированного Мак-Милланом.

хх) В дальнейшем будем говорить просто K -энтропия, подразумевая всегда $h > 0$.

Теория Аносова-Синая позволяет несколько усилить приведенный выше результат относительно элементарной модели. Именно, Оселедец и Синий показали, что движение этой модели обладает статистическими свойствами, если:

$$|f'(\psi)| \geq c \quad (3.15)$$

где c — некоторая постоянная. Смысл последнего условия состоит в том, что при достаточно больших $k > 4/c$ устойчивые области (3.13) отсутствуют.

Этот результат — максимум того, что может дать современная эргодическая теория для колебательной системы. Из-за взятия дробной части в (3.1) возмущение оказывается при условии (3.15) негладким. В реальном случае при любом $k \rightarrow \infty$

могут существовать устойчивые области вблизи точек $f' = 0$, что исключает возможность строгого применения современной теории^х). С другой стороны, размер этих областей стремится к нулю с возрастанием k :

$$\Delta \psi \approx \frac{4}{k f''} \quad (3.16)$$

Поэтому можно думать, что фактически, несмотря на неприменимость строгой теории, влиянием устойчивых областей можно пренебречь, если только $k \gg 1$. Численные эксперименты с элементарной моделью подтверждают в конечном счёте этот вывод, хотя и показывают, что он является далеко не тривиальным (§ 4). Принимая этот вывод, мы можем определить по порядку величины положение границы стохастичности для элементарной модели как: $K \sim 4$. Для основной модели (2.12) получаем, используя (2.13): $S \sim 2$, в соответствии с первоначальной оценкой (2.11). Уточнение последней оценки не имеет смысла, так как само понятие границы стохастичности является приближенным. Как мы уви-

х) Для полноты картины отметим, что в другой механической системе сталкивающиеся шарики, — которая в известном смысле моделирует молекулярные системы, нет устойчивых областей; это дало возможность Синаю строго доказать её статистические свойства /34/.

дим в следующем параграфе, имеется целая переходная зона ($S \sim 1$) с весьма сложной структурой фазовой плоскости.

В рассматриваемом случае переменных $\lambda(x)$ K -энтропия выражается через некоторое среднее значение от $\lambda^+(x)$ по фазовому пространству /15/. Для элементарной модели при $K \gg 1$ общая ситуация несколько упрощается, так как направление собственных векторов остается в этом случае почти постоянным (3.12) за исключением узкого интервала фаз ($\Delta \psi \sim 1/k$) вблизи области устойчивости (3.13). Общая теория /15, 8/ приводит к выражению:

$$h \approx \langle \ln \lambda^+(x) \rangle \approx \langle \ln |K(\psi)| \rangle \quad (3.17)$$

Для основной модели получаем аналогично:

$$h \approx \ln |\varepsilon \omega' I_0 T| + \langle \ln |f'(0)| \rangle \quad (3.18)$$

Рис.2 наглядно демонстрирует, что локальная неустойчивость движения в сочетании с ограниченностью фазового пространства системы непосредственно приводит к перемешиванию траекторий. Можно сказать поэтому, что локальная неустойчивость является первопричиной процесса перемешивания, а, значит, и всех статистических свойств динамической системы. Вот почему K -энтропия является наиболее существенной статистической характеристикой динамической системы, как это было подчеркнуто еще Крыловым /13/.

Экспоненциальная локальная неустойчивость движения является, как показал Аносов /14/, причиной еще одного весьма важного свойства стохастической системы — её грубости, или структурной устойчивости. Последняя означает, как известно (см., например, /50/), независимость топологической структуры фазовых траекторий от малых изменений уравнений движения. Это даёт возможность ограничиться при исследовании стохастичности первым приближением теории возмущения, а также широко использовать различные приближенные модели.

Пример на рис.2 показывает, что грубое перемешивание больших (~ 1) областей фазового пространства происходит

за время $\tau_n \sim h^{-1}$. Кроме того, общая картина развития локальной неустойчивости позволяет заключить, что тонкое перемешивание, т.е. перемешивание малых участков происходит с запаздыванием: $t(\Delta_0) \sim \frac{|\ln \Delta_0|}{h}$, где Δ_0 — начальный размер участка. Эта оценка характеризует также зависимость пространственного масштаба перемешивания от времени ($\Delta_0(t)$).

Остановимся в заключение на связи K — энтропии с обычной термодинамической энтропией /8/. Последняя характеризует, как известно, статистическое состояние системы и зависит только от функции распределения /22/.

$$H = - \int d\Gamma f \ln(f \Gamma_0) \quad (3.19)$$

Здесь Γ_0 — некоторая постоянная, имеющая размерность объёма фазового пространства. В статистической физике эта постоянная определяется квантованием фазового пространства: $\Gamma_0 = (2\pi h)^N$

Физический смысл величины Γ_0 состоит в том, что она характеризует минимальную ячейку разбиения фазового пространства. В классическом случае также можно ввести минимальную ячейку из следующих соображений. По своему физическому смыслу энтропия характеризует статистические свойства системы, возникающие вследствие процесса перемешивания. Но последний ограничен областями масштаба Δ_0 (см. выше). Поэтому можно положить: $\Gamma_0 \sim \Delta_0(t)$. Определенная таким образом новая энтропия $H(f, \Delta_0)$ зависит теперь уже не только от статистического состояния (f), но и от динамики перемешивания (Δ_0). В таком виде её трудно использовать как в статистической, так и в динамической теории. Однако, из неё легко получить величину, характеризующую только динамику перемешивания. Для этого положим $f = 1$, т.е. примем, что статистическое состояние системы является равновесным. Определенная таким образом динамическая энтропия $H(1, \Delta_0)$ монотонно возрастает со временем (в состоянии статистического равновесия!) для любой системы с перемешиванием. В случае же систем с экспоненциальной локальной неустойчивостью движения $H(1, \Delta_0)$ оказывается асимптотически пропорциональной времени. Поэтому в ка-

честве характеристики перемешивания естественно ввести среднюю скорость её изменения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(- \frac{\int d\Gamma \ln \Delta_0(t)}{t} \right) = h \quad (3.20)$$

Вышеприведенные рассуждения иллюстрируют также (очень упрощенно) основную идею Колмогорова при введении им новой динамической характеристики — энтропии.

3.6. Является ли движение с перемешиванием настоящим случайным процессом?

Этот вопрос выходит за рамки чисто математической теории, однако, он является существенным для физики. Формальное определение случайного процесса включает в себя два основных требования (см., например, /37/). Первое — возможность введения вероятности; это обеспечивается существованием предела (3.5) для эргодической системы. Второе требование — так называемая иррегулярность процесса, означающая в конечном счёте отсутствие алгоритма этого процесса. Очевидно, что для динамических систем второе требование нарушается по определению. Однако это требование не является убедительным с точки зрения физики. Более того, можно думать, что воображаемое свойство иррегулярности относится к числу принципиально ненаблюдаемых. Действительно, любая конечная (по времени) реализация даже "абсолютно" случайного процесса всегда может быть аппроксимирована некоторой регулярной функцией, например, рядом Фурье или Тейлора. Мы можем, конечно, убедиться в регулярности некоторого процесса путем предсказания его будущего хода. Однако любая кажущаяся нерегулярность может оказаться на самом деле реализацией достаточно сложного алгоритма. Поэтому мы думаем, что требование иррегулярности должно быть исключено из определения случайного процесса /8/x). Вместо этого в основу определения случайного процесса может быть положено движение эргодической динамики системы с перемешиванием и K — энтропией. Такие системы называются в эргодической теории K — системами по имени открывшего их Колмогорова /31/.

x) К аналогичному выводу пришел ранее Постников /37/.

Правда, движение K -системы в определенном смысле регулярно и это проявляется, в частности, в остаточных автокорреляциях. Однако эти корреляции затухают со временем экспоненциально, так что ими можно пренебречь при условии: $ht \gg 1$. Можно возразить, что такое определение случайного процесса было бы несовершенным. Но ведь именно это мы и наблюдаем в эксперименте, так как в процессе статистической релаксации всегда сохраняется, хотя и экспоненциально малый, вклад начального состояния.

"Настоящий" случайный процесс, заданный, скажем, с помощью вероятности перехода (марковский процесс), можно рассматривать при этом как предельный случай движения K -системы, когда можно пренебречь регулярной фазой развития экспоненциальной неустойчивости (см. п.3.5), а, значит, и остаточными корреляциями. В соответствии с этим энтропия "настоящего" случайного процесса $h = \infty$.

Таким образом, на наш взгляд, не исключено, что любой случайный процесс в природе реализуется движением некоторой K -системы. Мы далеки, однако, от мысли, что это единственная возможность в настоящее время. Поэтому для K -системы и её движения мы употребляем термин стохастичность, сохранив за понятием случайность его прежнее несколько мистическое содержание.

Стохастичность возможна только в нелинейной системе, так как линейная система является всегда максимально устойчивой (п.3.3). Поэтому стохастичность даёт возможность построить нелинейную модель статистических законов. Упомянем для полноты картины, что существует также квазилинейная модель статистических законов, введенная Боголюбовым /38/ и положенная сейчас в основу статистической механики. Она базируется на использовании бесконечно большого термостата ($N \rightarrow \infty$) со случайными начальными условиями /40, 27/. Подробное сравнение обеих моделей дано в /8/.

§ 4. Некоторые численные эксперименты

Как отмечалось выше (п.3.5) проблема движения даже элементарной модели (3.1) с гладким возмущением оказывается неразрешимой для современной эргодической теории из-за областей

устойчивости вблизи точек $f' = 0$. Масштаб этой трудности будет ясен из дальнейшего (п.4.2). С другой стороны, при $k \rightarrow \infty$ размер устойчивых областей по фазе для гладкой $f(\psi)$ стремится к нулю ($\Delta\psi \sim 1/k$ (3.13)). Поэтому выше (п.3.5) мы предположили, что устойчивыми областями можно просто пренебречь при $k \gg 1$. Однако более детальное исследование роли устойчивых областей /8/ показывает, что такое заключение было бы чересчур поспешным. В этой ситуации естественно обратиться к эксперименту, "настоящему" или численному. Основная проблема здесь — это выбор оптимальной модели. Нам кажется, что нет необходимости работать с очень сложными моделями, обязательно близкими к реальным механическим системам, хотя некоторые контрольные эксперименты с такими моделями весьма желательны (см. § 5)^х). Мы думаем, что элементарная модель достаточно полно представляет феномен стохастической неустойчивости во всей его сложности и многообразии. Это станет особенно очевидным несколько позже, когда мы познакомимся со стохастическим слоем вблизи сепаратрисы (п.6.1).

Ниже приводятся результаты некоторых численных экспериментов с элементарной моделью, взятые из работы /39/. Они касаются главным образом движения в переходной зоне в окрестности границы стохастичности: $S \sim 1$ (2.11), поскольку именно эта зона и её проникновение в область стохастичности ($S \gg 1$) определяет отклонения от эргодической теории, не поддающиеся пока строгому математическому анализу.

4.1. Проверка на стохастичность

Наиболее непосредственной проверкой является вычисление K -энтропии системы по расходимости двух близких траекторий, используя формулу (3.11). Численный счёт преобразования (3.1) производился для двух траекторий, начальные точки которых отстояли на $\vec{e}$, причём после каждого шага преобразования длина касательного вектора $\vec{e}$ приводилась к начальному значению $e = 10^{-7}$ без изменения его направления. Полученные

^х) В последнее время стохастическая неустойчивость исследовалась в большой серии экспериментов с электронным пучком в накопителе /84/.

значения h приведены в таблице 1. Исследовано две различных функции $f(\psi)$, первая из которых имеет разрыв производной в точке $\psi = 0$ (из-за взятия дробной части в (3.1)), а вторая является аналитической. Теоретическое значение h получалось по формуле (3.17) с λ^+ из (3.12). В устойчивой области (3.13) нужно положить $\lambda^+ = 1$ согласно (3.11), поскольку касательный вектор здесь поворачивается без изменения длины. Заметим, что было бы неправильным просто исключить всю область устойчивых фаз (3.13) из среднего (3.17), поскольку, как мы увидим ниже (п.4.2), стохастическая траектория заполняет почти всю эту область за исключением очень малой доли островков устойчивости.

Таблица 1.

k	$f = \psi^2 - \psi + 1/6$		$f = (1/2\pi) \sin 2\pi\psi$	
	Численный эксперимент	Теория	Численный эксперимент	Теория
6.21	0.958	0.909	1.157	1.133
14.0	1.654	1.655	1.949	1.949
25.0	2.241	2.225	2.537	2.526
50.0	2.914	2.913	3.227	3.219
100.2	3.615	3.608	3.914	3.914
142	3.938	3.955	4.234	4.263
200	4.308	4.298	4.603	4.605
1000	5.926	5.908	6.206	6.215

Уже сам факт существования K -энтропии показывает, что в фазовом пространстве системы имеется какая-то стохастическая компонента. Неожиданно хорошее (учитывая приближенность формулы (3.17)) совпадение с теорией (таблица 1) говорит о том, что эта компонента заполняет практически всю фазовую

плоскость системы (3.1) даже при $k \approx 6$, которое нужно сравнить с $k \sim 4$ на границе стохастичности (п.3.5).

4.2. Проверка на эргодичность

Этот вывод подтверждается непосредственной проверкой эргодичности преобразования (3.1). Грубая проверка производилась путем разбиения фазового квадрата системы (3.1) на $2^{19} = 512 \times 1024 = 524288$ ячеек и наблюдения за прохождением траектории через каждую из этих ячеек (проверка на транзитивность (п.3.3)). Для $f = (1/2\pi) \sin 2\pi\psi$ зависимость числа пустых (незаполненных траекторией) ячеек от параметра k приведена в таблице 2. Видно, что при $k \approx 6$ стохастическая

Таблица 2.

k	3.67	4.78	5.98	8.64	10.5	25.1	37.7	50.3
Число пустых ячеек из 524288	48958	10292	1681	24	0	45	8	4

компонента занимает уже более 99.7% и даже при $k \approx 3.7$ все еще около 90.7%. Более подробные результаты работы /39/ показывают, что число пустых ячеек убывает с k , вообще говоря, экспоненциально, а для специальных значений k пропорционально k^{-2} . Эти пустые ячейки представляют собой устойчивые области движения, иногда весьма сложной формы /39/.

Численные эксперименты /39/ и аналитические оценки /8/ не противоречат гипотезе, высказанной Синаем, что устойчивые области при любом $K \rightarrow \infty$ образуют всюду плотное множество, как бы "насыщающее" стохастическую компоненту^{x)}. С х) Недавно Дунская и Синай показали аналитически, что преобразование типа основной модели (2.12) с гладкой функцией $f(\theta)$ имеет островки устойчивости в окрестности периодических решений произвольного периода при сколько-нибудь больших, но специальных, значениях параметра стохастичности S (см./11/, стр. 124, а также /39/).

этим и связана главная трудность современной эргодической теории в применении к колебательным системам.

Дополнительная проверка на стохастичность производилась путём наблюдения процесса заполнения траекторий ячеек фазовой плоскости. Для случайного движения при не слишком большом времени должно оставаться некоторое количество пустых ячеек (N_0), которое может быть вычислено по обычной формуле распределения Пуассона:

$$N_0 = N e^{-M} \pm \sqrt{N_0} \quad (4.1)$$

где $N = 524288$ — полное число ячеек фазовой плоскости, а $M = t/N$ — среднее число попаданий траектории в одну ячейку за время (число шагов) t . Результаты этого эксперимента ($\bar{f} = \psi^2 - \psi + 1/6$) приведены в таблице 3 для $k = 16$.

Таблица 3.

t , шаги	2×10^6	5×10^6	6×10^6	8×10^6	10^7
N_0 , эксперимент	11531	258	6	1	0
Ожидаемое N_0	11500	251	5,8	0,12	$2,5 \times 10^{-3}$
при случайном заполнении	± 107	± 16	$\pm 2,4$	$\pm 0,35$	$\pm 0,05$

Другая проверка на эргодичность преобразования (3.1) состояла в исследовании равномерности заполнения траекторий фазового пространства. Для этого использовалось разбиение фазового квадрата на $N = 128 \times 128 = 16384$ ячейки и подсчет числа попаданий траектории (n_i) в каждую из ячеек. Критерием равномерности служила дисперсия $D = \langle (n_i - M)^2 \rangle$, где

$M = \langle n_i \rangle = \frac{t}{N}$, а усреднение проводится по всем ячейкам. Ожидаемое значение D равно:

$$\frac{D}{M} = 1 \pm \sqrt{2/N} = 1 \pm 0,011 \quad (4.2)$$

причём последний член даёт среднеквадратичное отклонение. Экспериментальное значение для $\bar{f} = \psi^2 - \psi + 1/6$ при $k = 16$; $t = 10^7$ составляет: $D/M = 1,017$. Вероятность такого отклонения равна 12%.

4.3. Промежуточная зона

Таким образом численные эксперименты с элементарной моделью подтверждают основной критерий стохастичности (2.11) и показывают, что при $S \gg 1$ (фактически уже при $S > 2$) движение становится стохастическим с большой степенью точности. Промежуточная зона ($S \sim 1$) проникает в область стохастичности в форме системы островков устойчивости, размеры и общая площадь которых быстро уменьшаются с ростом S .

Промежуточная зона распространяется также в устойчивую область ($S \leq 1$), образуя участки все более и более слабой, по мере уменьшения S , неустойчивости. Этот эффект наблюдался в [41, 42]. Другой механизм такого распространения связан с разрушением сепаратрис нелинейных резонансов, которое происходит при любом $S \rightarrow 0$ (п.6.1).

Согласно теории КАМ при достаточно малом, но конечном, имеет место вечная (для $t \rightarrow \infty$) устойчивость движения. Фактически, граница этой вечной устойчивости лежит, как показывают численные эксперименты, вблизи границы стохастичности (2.11). Так, в работе [39] при $S \approx 0,6$ не наблюдалось диффузии, превышающей округления (коэффициент диффузии $D \approx 4 \cdot 10^{-27}$ по сравнению с $D \sim 1$ в стохастической области^{х)}). В другой работе [43] при $S \approx 0,05$ наблюдался систематический дрейф траектории со скоростью 10^{-31} , также объясняемый ошибками округления. Коэффициент диффузии составлял в последнем случае всего: $D = 1,6 \times 10^{-61}$ вследствие использования двойной точности счёта.

^{х)} Отметим любопытный факт, состоящий в том, что приведенное выше экспериментальное значение D оказывается примерно в 80 раз меньше, чем можно было бы ожидать, исходя из случайного накопления ошибок округления (подробнее см. в [8/]).

§ 5. Стохастическое ускорение Ферми

Прежде чем перейти к более детальному описанию механизма стохастической неустойчивости (§ 6) рассмотрим простой пример реальной механической системы, в которой возникает такая неустойчивость.

В 1949 г. для объяснения происхождения космических лучей Ферми предложил механизм стохастического ускорения при столкновении заряженных частиц с движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве /49/. Объясняя этот механизм, Ферми использовал аналогию с молекулярными столкновениями, рассматривая магнитное облако как гигантскую частицу. Поскольку, однако, такое облако является макроскопическим объектом, движение которого определяется, казалось бы, динамическими законами, возникает вопрос, применимы ли в данном случае, и если да, то в какой степени, статистические законы? Только в 1961 году Улам попытался выяснить этот вопрос путем численных экспериментов на простейшей модели.

5.1. Одномерная модель Улама /44/

Модель представляет собой частицу, движущуюся между двумя плоскопараллельными бесконечно тяжелыми и абсолютно упругими стенками, одна из которых неподвижна, а другая колеблется по определенному заданному закону. Последняя и моделирует, таким образом, движущееся магнитное облако. Численный расчёт движения такой системы /44/ привел к отрицательному результату — ускорение практически не наблюдалось. Скорость частицы иногда достигала 3-4 скоростей стенки и в большинстве случаев была порядка скорости стенки, в то время как согласно механизму Ферми средняя скорость частицы должна была бы неограниченно возрастать пропорционально времени /49/.

Ниже мы даём краткий анализ движения этой модели, следуя работе /45/.

Пусть стенка колеблется по "пилообразному" закону таким образом, что её скорость изменяется линейно со временем в течение каждого полупериода. Пусть, далее, минимальное расстояние между стенками равно ℓ , а амплитуда колебаний одной из них a . Тогда движение частицы между ними можно опи-

сать следующим приближенным преобразованием^{х)}, справедливым при условии: $a \ll \ell$, случай, который оказывается наиболее интересным (см. ниже):

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v + V[\Psi - 1/2] \\ \bar{\Psi} &\approx \left\{ \Psi + \frac{\ell V}{16a\bar{v}} \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь v , $\bar{v}$ — абсолютная величина скорости частицы до и после соударения со стенкой; $V/4$ — амплитуда скорости стенки; Ψ — фаза колебаний стенки в момент удара, определенная на интервале (0,1). Приближенным является второе уравнение (5.1), которое учитывает набег фазы только на минимальной длине пути частицы между столкновениями 2ℓ , пренебрегая дополнительным малым отрезком $\sim a$.

Преобразование (5.1) того же типа, что и основная модель (2.12). Условие стохастичности проще всего найти, воспользовавшись соотношением (2.14):

$$s^2 \sim |K| = \left| \frac{d\bar{\Psi}}{d\Psi} - 1 \right| \approx \frac{\ell}{16a} \left(\frac{V}{v} \right)^2 \gtrsim 4 \quad (5.2)$$

Отсюда находим область стохастичности по скорости:

$$\frac{4v}{V} \gtrsim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{a}} \quad (5.3)$$

Для получения значительного ускорения ($v \gg V$) должно выполняться довольно неожиданное условие: $a \ll \ell$.

На рис. 3 приведена функция распределения частиц по скорости, выраженной через параметр K , при различных значениях отношения a/ℓ . Данные эти получены в /45/ путем численного интегрирования точных уравнений движения модели Улама.

^{х)} Точные уравнения движения для этой модели см. в /45/.

Видно, что обрыв функции распределения приходится довольно хорошо на значение $|K| = 4$

5.2. Многомерный случай

В случае двух (и более) измерений ситуации существенно изменяются. В частности Синай строго доказал /34/, что при упругом столкновении дисков или шариков всегда имеет место стохастичность. Этот результат можно наглядно представить себе как следствие экспоненциальной расходимости близких траекторий из-за рассеяния на выпуклой поверхности. Можно думать поэтому, хотя это и не доказано строго, что упругие столкновения любых тел с выпуклой поверхностью приводят к стохастичности движения. Наличие же вогнутых участков поверхности может привести, напротив, к появлению областей устойчивости. Простейшим примером может служить модификация модели Улама, в которой одна из стенок слегка вогнута и рассматривается многомерная задача. Ясно, что поперечное движение будет в этом случае устойчивым и, следовательно, граница стохастичности останется, как и для плоских стенок.

5.3. Стохатрон

Еще в 1948 г. Бурштейн, Векслер и Коломенский предложили использовать обычные ускорители типа фазотрона или синхротрона в стохастическом режиме /46/. Для этого предполагалось подавать ускоряющее высокочастотное напряжение со случайной фазой. Используя стохастическую неустойчивость, можно осуществить такой режим ускорения с обычным (регулярным) вч-напряжением, что, по-видимому, более удобно практически.

Получим условия стохастического ускорения, ограничиваясь ради простоты случаем однородного магнитного поля B_x .

Уравнения движения можно записать в виде преобразования типа основной модели:

x) Более реалистические оценки приведены в /8/.

$$\bar{W} = W + eU \cos \psi$$

$$\bar{\psi} = \psi + \frac{2\pi \omega}{\omega_0(W)} \quad (5.4)$$

где W — полная энергия частицы, U , ω — амплитуда и частота ускоряющего напряжения; $\omega_0 = eBc/W$ — ларморовская частота релятивистской частицы. Условие стохастичности получаем аналогично (5.2): $|K| = 2\pi q(eU/W)|\sin \psi| \geq 4$

или

$$q \geq \frac{W}{eU} \quad (5.5)$$

где $q = \omega/\omega_0$ — кратность высокой частоты. Это неравенство можно рассматривать также, аналогично (5.3), как определение максимальной энергии стохастического режима ускорения.

Легко видеть, что граница стохастичности (5.5) соответствует условию так называемого микротронного ускорения /47/, при котором происходит монотонное изменение энергии, весьма необычное для нелинейной системы. Неравенство (5.5) показывает, что при увеличении ускоряющего напряжения или частоты, или при уменьшении магнитного поля микротрон превращается в стохатрон.

Наконец, упомянем еще своеобразный вариант стохатрона, примененный в работе /48/ для предварительного нагрева плазмы в стеллараторе.

§ 6. Стохастический слой и условие перекрытия резонансов

Перейдем теперь к более детальному описанию механизма стохастической неустойчивости. Как будет видно ниже, центральным местом выяснения этого механизма является исследование поведения системы в области на фазовой плоскости, лежащей вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса. Этот анализ мы проведем на примере движения заряженной частицы в поле двух плоских волн /21/.

6.1. Движение частицы в поле двух плоских волн

Рассматриваемая система, с одной стороны, описывается общими уравнениями нелинейного резонанса (2.1), а с другой стороны представляет самостоятельный интерес для физики плазмы. Пусть одна из волн является малым возмущением. Уравнение движения запишем в виде:

$$m \ddot{x} = -e E_0 \sin k_0 x - e E_1 \sin(k_1 x - \vartheta t)$$

$$\varepsilon = E_1/E_0 \ll 1$$

или в безразмерной форме:

$$\tau_0 \frac{d\zeta}{dt} = -\sin \zeta - \varepsilon \sin\left(\frac{k_1}{k_0} \zeta - \vartheta t\right) \quad (6.1)$$

$$\zeta = k_0 x; \quad \vartheta = \tau_0 k_0 \dot{x}; \quad \tau_0 = \sqrt{m/e E_0 k_0}$$

где $2\pi\tau_0$ — период малых невозмущенных колебаний. Траектории невозмущенного движения на фазовой плоскости аналогичны изображенным на рис.1, если по осям абсцисс и ординат отложить соответственно ζ , ϑ . С помощью обычных операций мы можем ввести новые переменные действие (I) — угол (θ) и переписать уравнение (6.1) в форме:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\varepsilon}{\omega \tau_0^2} \vartheta \sin\left(\frac{k_1}{k_0} \zeta - \vartheta t\right) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\omega = \omega(I)$ есть нелинейная частота невозмущенных колебаний частицы в потенциальной яме. Вблизи дна ямы

$$\omega \rightarrow 2\pi/\tau_0, \quad \text{а при приближении к сепаратрисе } \omega \rightarrow 0.$$

Опишем качественно возмущенное поведение частицы вблизи сепаратрисы (при этом $\omega\tau_0 \ll 1$). Частица проводит сравнительно мало времени ($\sim \tau_0$) вблизи центра ямы и её скорость близка при этом к своему максимальному значению. На-

оборот, большую часть времени ($\sim 2\pi/\omega \gg \tau_0$)

частица находится вблизи точек поворота, где её скорость близка к нулю. Это обстоятельство может быть также легко установлено формально из точного решения невозмущенной задачи. Если теперь в правую часть (6.2) подставить невозмущенную скорость V , то силу, действующую на частицу можно представить в виде последовательности узких импульсов, следующих друг за другом с очень большим интервалом $\sim \omega^{-1}$. Изменение действия в результате толчка можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{\varepsilon}{\tau_0 \omega(I)} \int dt \vartheta(t) \sin \vartheta \\ \vartheta &= \frac{k_1}{k_0} \zeta - \vartheta t \end{aligned} \quad (6.3)$$

где интегрирование ведется по интервалу времени, содержащему один толчок. В действительности, основной вклад в интеграл даёт узкий участок по t вблизи максимума $V(t)/20\%$. Поэтому фаза ϑ в (6.3) берется в точке экстремума $\zeta = \zeta_0$. Движение (6.2) может быть записано приближенно в виде следующего канонического преобразования (на один шаг):

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I - \frac{\partial V(\bar{I}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta - \pi\vartheta/\omega(I) + \frac{\partial V(\bar{I}, \vartheta)}{\partial \bar{I}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

где произвольная функция V равна

$$V = -\frac{\varepsilon}{\tau_0 \omega(I)} \int dt \cdot \vartheta(t) \cdot \cos \vartheta$$

Поскольку возмущение $V \sim \varepsilon$, то можно в уравнениях (6.4) заменить $(\bar{I}, \bar{\vartheta})$ на (I, ϑ) , то можно в уравнениях (6.4) заменить $V(\bar{I}, \bar{\vartheta})$ на $V(I, \vartheta)$ с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$.

Система (6.4) аналогична основной модели (2.12). Условие стохастичности найдем из (6.4) с помощью выражения (2.14):

$$K(\vartheta) = \left| \frac{d\vartheta}{dI} - 1 \right| \approx \pi \vartheta \frac{\omega'}{\omega^2} \Delta I \approx 4 \quad (6.5)$$

При достаточно общих условиях вблизи сепаратрисы имеет место асимптотическое выражение:

$$\omega \approx \pi / \tau_0 \ln \frac{32 W}{|W - W_0|} \quad (6.6)$$

где W — энергия частицы, а W_0 — энергия на сепаратрисе.

Учитывая, что $\Delta I \sim \varepsilon / \tau_0 \omega$ при условии $\vartheta \tau_0 \lesssim 1$

получим из (6.5) границу стохастичности в виде /8,12/

$$\omega \lesssim \pi / \tau_0 \ln \frac{16 \pi}{\varepsilon} \quad (6.7)$$

$$|I_0 - I| \lesssim \varepsilon I_0; \quad |W - W_0| \lesssim \varepsilon W_0$$

где I_0 — значение действия частицы на сепаратрисе. Граница стохастичности определяется с помощью (6.7) симметрично относительно сепаратрисы для захваченных и пролётных частиц. Таким образом, можно утверждать вообще, что вокруг сепаратрисы образуется слой конечной ширины разрушенных интегралов движения, который мы дальше будем называть стохастическим слоем (рис.1). При $\vartheta \tau_0 \gg 1$ относительная величина стохастического слоя экспоненциально мала и имеет порядок /8, 12/:

$$|W - W_0| \sim W_0 e^{-\vartheta \tau_0} \quad (6.7^1)$$

Ширина стохастического слоя согласно оценкам (6.7), (6.7¹) совпадает по порядку величины с расщеплением сепаратрисы, полученным Мельниковым /62/. Заметим, что весьма обстоятельные исследования Иельникова не позволили, тем не менее, оценить действительную ширину неустойчивой области вблизи сепаратрисы, величина расщепления которой даёт лишь нижнюю границу этой ширины. Более того, существовали серьезные опасения, что неустойчивость может захватить практически всю резонансную область. Оценки (6.7), (6.7¹) показывают, однако, что эти опасения были напрасными и что ширина стохастического слоя, вообще говоря, мала.

Рассмотренная задача интересна также с точки зрения общей теории нелинейного резонанса, поскольку она может быть интерпретирована как случай взаимодействия двух резонансов. При такой интерпретации расстояние между резонансами по частоте равно ϑ , а ширина каждого из резонансов согласно (2.8) равна соответственно $4/\tau_0$ и $4/\tau_1 = \sqrt{e E_1 k_1 / m}$. При $\varepsilon \sim 1$ и $\vartheta \tau_0 \lesssim 1$ происходит полное перекрытие резонансов. Одновременно происходит их полное разрушение согласно (6.7)^x. Этот результат подтверждает критерий стохастичности (2.11) и даёт возможность распространить его на общий случай взаимодействия резонансов. Заметим, что при $\varepsilon \ll 1$ относительная ширина стохастического слоя всегда мала, так что внутренняя область резонансов остается устойчивой, независимо от расстояния между резонансами. Поэтому, критерий стохастичности (2.11) подразумевает перекрытие резонансов одного порядка по величине. В общем случае возможно возникновение стохастической неустойчивости за счёт пересечения узких стохастических слоёв, но только при специальных начальных условиях. Критерий такой слабой стохастичности исследовался в /64, 65, 8/.

6.2. Броуновское движение частицы в поле волнового

пакета

Проведенное выше исследование является основным элементом, позволяющим перейти к построению общего условия возникновения стохастической неустойчивости. Можно считать, что при движении частицы в сложных полях фазовые траектории частицы имеют следующую топологию на фазовой плоскости: вся плоскость делится на большое число ячеек, связанных с различными сепаратрисами и на области между сепаратрисами. С каждой сепаратрисой связан стохастический слой, ограниченный "хорошими" траекториями с сохраняющимся интегралом движения. Отдельные сепаратрисы могут перекрываться и тогда образуется более широкая область стохастического движения. Таким образом, критерием стохастической неустойчивости является условие перекрытия сепаратрис, или иначе, условие перекрытия резонансов (2.11).

^x) Этот вывод был подтвержден недавно в работе /87/ с помощью численного эксперимента.

Проиллюстрируем сказанное на примере движения частицы в поле волнового пакета

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \sum_k E_k \cos(kx - \omega_k t) \quad (6.8)$$

с характерным расстоянием Δk между волновыми числами соседних гармоник, входящих в пакет. Каждая плоская волна в отдельности порождает на фазовой плоскости сепаратрису, внутри которой находятся траектории частиц, захваченных волной. Размер сепаратрисы определяет также ширину резонанса между частицей и волной. Для определения ширины резонанса перепишем уравнение (6.8) в виде

$$\dot{v} = \sum_k V_k \cos \vartheta_k; \quad V_k = \frac{e}{m} E_k \quad (6.9)$$

$$\dot{\vartheta}_k = kv - \omega_k \equiv \omega_k(v); \quad \vartheta_k = kx - \omega_k t$$

откуда видно, что скорость аналогична переменной I в уравнениях (6.2). Ширина сепаратрисы равна, очевидно:

$$\delta v_k \sim \sqrt{V_k / \frac{d\omega_k(v)}{dv}} = \sqrt{V_k / k} = \frac{1}{k\tau_k}$$

$$\frac{1}{\tau_k} = \sqrt{e E_k k / m}$$

Расстояние между ближайшими резонансами равно:

$$\Omega_k = \omega_{k+\Delta k}(v) - \omega_k(v) = \Delta k (v - d\omega_k/dk)$$

и условие возникновения стохастической неустойчивости принимает вид [21, 52]:

$$K = \left(\frac{k\delta v_k}{\Omega_k} \right)^2 = \frac{1}{\tau_k \Omega_k} \gg 1 \quad (6.10)$$

Пусть критерий (6.10) выполняется для всех волн в пакете, имеющих фазовые скорости от некоторого $v_{\min}$ до $v_{\max}$.

Тогда ясно, что в этом интервале скоростей фазы ϑ_k являются стохастическими, а движение частицы аналогично броуновскому и её скорость растёт в среднем со временем.

Заметим, что в случае очень больших $K \gg N$ (где N — число волн) стохастичность может исчезать [8]. Это легко понять в предельном случае $K \gg N$, когда все волны образуют для частицы единую потенциальную яму с медленно меняющимися параметрами. В связи с этим критерий (6.10) следует дополнить неравенством

$$\frac{1}{\tau_k \Omega_k} \ll N \quad (6.10^1)$$

которое было получено ранее в работе [53] из нескольких иных соображений.

Неравенства (6.10), (6.10¹) являются условиями применимости так называемого квазилинейного приближения в нелинейной теории плазмы.

6.3. Обсуждение свойств основной модели (2.12)

Приведенные в этом параграфе примеры позволяют высказать следующие соображения:

- 1) Разрушение сепаратрисы описывается с помощью уравнений (6.4), эквивалентных основной модели (2.12);
- 2) Перекрывание сепаратрис (резонансов) (2.10) является условием возникновения стохастической неустойчивости движения динамической системы;
- 3) В тех случаях, когда движение системы может быть приведено к виду (2.12), удаётся оценить корреляционную функцию фаз [54]:

$$R_n = R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_m e^{-i\psi_m} \cdot e^{i\psi_{m+n}} \sim \quad (6.11)$$

$$\sim e^{-n \rho_n K} = e^{-t \Omega \rho_n K}$$

и определить время перемешивания

$$\tau_n \sim (\Omega \epsilon_n K)^{-1} \quad (6.12)$$

а, следовательно, и K -энтропию (см. § 3). Этой информации вполне достаточно не только для того, чтобы перейти к статистическому описанию системы с помощью кинетического уравнения (§ 8), но также и для анализа некоторых тонких деталей такого перехода:

- 4) Определим область применимости основной модели. Пусть возмущение системы таково, что на интервалах времени $T_1, T_2, \dots$ изменение состояния системы является адиабатическим ($I = \text{const}$), а на границах интервалов T_i происходит существенное (не экспоненциально малое) изменение действия I . Области времени, внутри которых I существенно изменяется, обозначим через Δt_i . Тогда при условии

$$\Delta t \ll T \quad (6.13)$$

можно перейти от дифференциальных уравнений к уравнениям в конечных разностях типа (2.12), т.е. к основной модели. Это достигается следующим образом /54/: на интервалах T_i решение записывается в ВКБ-приближении, и решения на соседних интервалах T_i сшиваются с учётом изменения действия ΔI и фазы $\Delta \varphi$. Если условие (6.13) не выполнено, вычисление времени перемешивания и K -энтропии не удаётся провести в общем виде. Тем не менее, условие перекрытия резонансов всегда допускает хотя бы грубую оценку и факт перемешивания может быть установлен.

- 5) При отсутствии перекрытия резонансов ($S \ll 1$) стохастическая область вырождается в систему экспоненциально узких (см. (6.7¹)) стохастических слоев. В одномерном случае (2.1) эти слои не пересекаются на фазовой плоскости и движение становится устойчивым для любых $t \rightarrow \infty$. Этот результат строго доказан в теории Колмогорова-Арнольда-Мозера для достаточно малых, но конечных S . Численные эксперименты (§ 4) показывают, что граница такой вечной устойчивости лежит вблизи границы стохастичности $S \sim 1$.

В многомерном случае стохастические слои различных резонансов всегда пересекаются при сколь угодно малых S . Это может приводить к диффузионному движению системы вдоль этих слоев в достаточно большом объеме фазового пространства. Первый пример такой неустойчивости был построен Арнольдом /35/. Такая неустойчивость, получившая название диффузии Арнольда, может оказаться существенной для различных физических приложений /8/.

§ 7. Разрушение магнитных поверхностей

С задачей, рассмотренной в § 6, оказывается тесно связанной проблема существования и устойчивости магнитных поверхностей замкнутых магнитных ловушек. Для удобства сформулируем эту проблему в терминах задачи об устойчивости динамических систем.

Пусть безвихревое магнитное поле $\vec{B}_0$ определено с помощью заданного скалярного потенциала Φ_0 :

$$\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \Phi_0$$

а система уравнений магнитных силовых линий

$$\frac{dx}{B_{0x}} = \frac{dy}{B_{0y}} = \frac{dz}{B_{0z}} \quad (7.1)$$

имеет интеграл $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y, z)$, определяющий семейство магнитных поверхностей. Введем вместо z новую переменную t , аналогичную "времени" с помощью уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = B_{0z}(x, y, z)$$

Существуют такие переменные (x, y, z) , что систему (7.1) можно переписать в каноническом виде /20/:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial y}; \quad \dot{y} = - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial x} \quad (7.2)$$

где точка означает дифференцирование по t . Сечение магнитной поверхности плоскостью $t = \text{const}$ изображается замкнутой кривой на фазовой плоскости (x, y) , которую можно ин-

терпретировать как фазовую траекторию нелинейного осциллятора с гамильтонианом $\mathcal{H}_0$ и уравнениями движения (7.2). Пусть теперь возмущенный скалярный потенциал имеет вид:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1(x, y, z)$$

что приводит к возмущению, вообще говоря, нестационарному, уравнений движения (7.2). Таким образом, проблема существования магнитных поверхностей сводится к задаче об устойчивости эквивалентной динамической системы (7.2). Мы рассмотрим два практически важных типа возмущений, первый из которых связан с изгибанием цилиндрической магнитной ловушки в тор, а второй — с возмущениями, локализованными по координате z .

7.1. Магнитные поверхности стелларатора

В ловушках типа "стелларатор" невозмущенным является прямое винтовое магнитное поле, задаваемое потенциалом

$$\Phi_0 = B_0 z + b I_n(nz) \sin n\theta; \quad \theta = \varphi - z$$

где (z, φ, z) — цилиндрические координаты, I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента, B_0, b — параметры, n — целое (обычно $n = 2$ или 3) и шаг винта принят равным единице. Интеграл $\mathcal{H}_0$, равный в этом случае

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} z^2 - bz I_n'(nz) \cos n\theta \quad (7.3)$$

определяет магнитные поверхности $z = z(z, \varphi, \mathcal{H}_0)$, сечения которых для $n = 3$ изображены на рис.4. В частности уравнения движения (7.2) в полярных координатах принимают вид:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial z} = z \dot{\theta}; \quad \frac{1}{z} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta} = -\dot{z}$$

Изгибание системы с таким магнитным полем в тор нарушает симметрию задачи и приводит к возмущению потенциала

$$\varepsilon \Phi_1 \approx -\varepsilon \frac{z}{z_c} \Phi_0 \cos(\theta + z)$$

где z_c — радиус до особой точки на сепаратрисе, $\varepsilon = z_c/R$ и R — большой радиус тора.

Теперь нетрудно провести сравнение задачи об устойчивости магнитных поверхностей с задачей, рассмотренной в § 6. Для этого достаточно сравнить гамильтонианы и обратить внимание на то, что возмущение $\varepsilon \Phi_1$ является периодической функцией времени t , хотя и более сложного вида, чем в § 6. Это позволяет сразу сформулировать конечный результат [20]: вблизи сепаратрисы образуется стохастический слой разрушенных магнитных поверхностей (заштрихованная область на рис.4), граница которого определяется из условия, аналогичного (6.7):

$$\omega \lesssim \frac{\pi}{c_n \sqrt{\varepsilon}}; \quad |z - z_c| \lesssim \varepsilon z_c \quad (7.4)$$

Здесь ω — частота прокручивания магнитных силовых линий в системе отсчета, связанной с винтом. Она вводится так же, как и в § 6 с помощью переменных действие — угол для возмущенного движения и представляет собой нелинейную частоту эквивалентного осциллятора, причём в выбранной нами системе единиц $\omega = 1$ на оси и $\omega = 0$ на сепаратрисе.

Зависимость области разрушения от ε исследовалась численно Гибсоном [67]. Эти результаты согласуются с формулой (7.4) [8].

7.2. Влияние локальных возмущений [64, 68]

Вследствие различного рода экспериментальных причин могут возникать возмущения магнитного поля, локализованные по z (и, следовательно, по t) в очень узкой области $\delta z \ll 1$ ($\delta t \ll 1$). В тороидальных ловушках такое возмущение является периодическим по t с периодом $2\pi R$ и может быть представлено в виде:

$$\varepsilon \Phi_1 = \varepsilon \bar{\Phi}_1(I, \vartheta, t) R \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m \cdot 2\pi R)$$

Мы снова пришли к основной модели, и критерий стохастической

неустойчивости (2.11) может быть использован в данном случае с помощью соответствующих переобозначений.

Анализ полученного критерия показывает, в частности, что при заданных возмущениях существует максимально допустимое значение "ширы" ($d\omega/dz$), соответствующее границе стохастичности.

§ 8. Приближение хаотических фаз (ПХФ) и основное

кинетическое уравнение
(master equation)

8.1. Анализ потери памяти о начальных условиях

Приведенные выше результаты позволяют по-новому подойти к выводу основного кинетического уравнения в статистической механике. Центральным местом вывода подобных уравнений является гипотеза о хаотических фазах в начальный момент времени (см., например, /27/). Это обстоятельство обычно называется приближением хаотических фаз (ПХФ) и его формальное содержание для частного случая, рассматриваемого ниже, выглядит следующим образом. Пусть $f(I, \vartheta, t)$ есть функция распределения от совокупности действий ($I_1, I_2, \dots$) и фаз ($\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$). Тогда ПХФ заключается в том, что f не зависит от фаз при $t = 0$, т.е.

$$f(I, \vartheta, 0) = f(I) \quad (8.1)$$

Вместе с тем рассмотренные ранее примеры показывают, что можно непосредственно из уравнений движения установить критерий стохастичности фаз и, как видно ниже, найти критерий, при котором условие (8.1) справедливо с необходимой точностью. Особенностью такого подхода является более тщательный, чем это делалось до сих пор, анализ движения системы.

Проиллюстрируем на простом примере, каким образом анализ стохастических свойств системы позволяет получить кинетическое уравнение при произвольных начальных условиях /69/ (см. также /65, 20/).

Рассмотрим снова нелинейный осциллятор, возмущаемый периодически δ -функциональными толчками:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \sin \vartheta \equiv \varepsilon V(I, \vartheta, t) \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I) \end{aligned} \quad (8.2)$$

где ε - малый параметр, и запишем уравнение непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I} (V f) = 0 \quad (8.3)$$

Разложим f и V в ряд Фурье:

$$f(I, \vartheta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(I, t) e^{in\vartheta} \quad (8.4)$$

$$V(I, \vartheta, t) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} V_{n,k}(I) e^{i(n\vartheta + k\Omega t)} \quad (\Omega = 2\pi/T)$$

(в рассматриваемом случае имеются только члены с $n = \pm 1$). Подставляя (8.4) в (8.3) получаем уравнение для f_n :

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + in\omega f_n = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n',k} V_{n',k} f_{n-n'} \quad (8.5)$$

Заметим, что переход в уравнении (8.5) к представлению взаимодействия осуществляется с помощью преобразования

$$f_n \rightarrow f_n e^{-in \int_0^t \omega dt}$$

т.к. согласно уравнениям движения (8.2) частота зависит от времени вследствие нелинейности. Это приводит к дополнительным трудностям при выводе кинетического уравнения, однако в дальнейшем мы будем пользоваться неравенством:

$$|\Delta\vartheta - \omega t| \ll \omega t$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta(t) - \vartheta(0) = \int_0^t \omega dt \quad (8.6)$$

Условие (8.6) фактически эквивалентно ВКБ-приближению.

Теперь удобно перейти к представлению Лапласа для f_n :

$$g_n(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_n(I, t) dt$$

и привести уравнение (8.5) с учётом неравенства (8.6) к виду:

$$g_n(p) = \frac{f_n(0)}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{m,k} [V_{m,k} g_{n-m}(p + i(n-m)\omega - i k \Omega)] \quad (8.7)$$

где сокращенно обозначено:

$$g_n(I, p) \equiv g_n(p); \quad f_n(I, 0) \equiv f_n(0)$$

В дальнейшем нас будет интересовать асимптотика $t \rightarrow \infty$, что эквивалентно $p \rightarrow 0$. С учётом этого произведем итерацию уравнения (8.7) и удержим при этом только главные (резонансные) члены.

Это даёт для g_0 :

$$g_0(p) = \frac{1}{p} f_0(p) - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k>0} \left[\frac{V_{n,k} f_n(0)}{p + i(n\omega - k\Omega)} + \frac{V_{-n,-k} f_{-n}(0)}{p - i(n\omega - k\Omega)} \right] +$$

$$+ 2 \frac{\varepsilon^2}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k>0} \frac{|V_{n,k}|}{p^2 + (n\omega - k\Omega)^2} \frac{\partial}{\partial I} |V_{n,k}| f_0(0) + O(\varepsilon^3)$$

или, возвращаясь к t -представлению при $p \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k>0} [V_{n,k} f_n(0) e^{i(n\Delta\vartheta - k\Omega t)} + V_{-n,-k} f_{-n}(0) e^{-i(n\Delta\vartheta - k\Omega t)}] + \quad (8.8)$$

$$+ 2\pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k>0} |V_{n,k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} |V_{n,k}| f_0 + O(\varepsilon^3)$$

Из (8.8) видно, что члены порядка ε (а также все остальные нечётные по ε члены) содержат осциллирующие множители, входящие одновременно с начальными условиями $f_n(0)$ (причём $n \neq 0$, т.к. V зависит от ϑ). Отсюда сразу следует, что в линейном случае, когда $\omega = \text{const}$ и $\Delta\vartheta = \omega t$

разность $(n\omega - k\Omega)$ может быть сколь угодно малой (резонанс) и от осциллирующих слагаемых в (8.8) нельзя избавиться никакой подходящей процедурой усреднения по заданному конечному интервалу времени. В этом заключается основная трудность вывода основного кинетического уравнения, которая разрешается с помощью ПХФ. Действительно, условие (8.1) для принимает вид:

$$f_n(0) = f_0(0) \delta_{n,0}$$

Ситуация становится совершенно иной в нелинейном случае,

когда $\omega = \omega(I)$. Для того, чтобы понять это, введем

для больших $t \approx NT$ ($N \gg 1$) дискретную шкалу

времени с интервалом T и выразим $\vartheta(t) = \vartheta_N$

через начальную фазу $\vartheta(0) = \vartheta_0$. Это можно сделать, исходя из уравнений (8.2). Для этого необходимо проинтегрировать систему, аналогичную (2.12):

$$\vartheta_{m+1} \approx \vartheta_m + \omega T + K_m \sin \vartheta_m$$

$$I_{m+1} = I_m + \varepsilon I_m \sin \vartheta_m$$

$$K_m = \varepsilon \frac{I_m}{\Omega} \frac{d\omega(I_m)}{dI_m}$$

(8.9)

Заметим, что преобразование (8.9) получается приближенно из основной модели (2.12), если в последней учесть малость изменения $|I - I| \ll I$. Преобразование в форме (8.9) оказывается удобным при оценке корреляционной функции:

$$R(t) = R_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 e^{i(\vartheta_N - \vartheta_0)} \quad (8.10)$$

Можно показать [54], что при $K \gg 1$

$$R(t) \sim e^{-\Omega t \ln K + i\omega t}$$

Если теперь ввести функцию распределения

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 d\vartheta_0$$

то для F из (8.8) при $K \gg 1$ сразу следует кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\pi \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} |V_{n,k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} |V_{n,k}| F \quad (8.11)$$

Полезно отметить следующие два обстоятельства:

- 1) при $K \ll 1$ усреднение по ϑ ни к чему не приводит, т.к. в этом случае $R(t) \sim e^{i\omega t} [1 + O(K)]$;
- 2) в силу эргодичности движение при $K \gg 1$ усреднение по ϑ_0 эквивалентно усреднению по времени, много большему T . Последнее означает, что уравнение (8.8) можно усреднять по ϑ_0 , если время диффузии в (8.1) много больше T (п.3, 5). Иначе говоря, кинетическое уравнение (8.10) справедливо для

времен $t \gg T$. Этим оно отличается от кинетического уравнения, полученного методом ПХФ, которое справедливо для

$t \gg t_{\vartheta_3}$, где время взаимодействия t_{ϑ_3} в данном случае равно длительности толчка ($t_{\vartheta_3} \ll T$). Таким образом дополнительное предположение о хаотичности фаз в начальный момент времени позволяет расширить область применимости кинетического уравнения по времени.

8.2. Временные масштабы

Как уже отмечалось, главной особенностью существующих методов вывода основного кинетического уравнения является использование в той или иной форме ПХФ (см. обзор [70]). Не обсуждая вопрос о целесообразности гипотезы хаотических фаз для построения основного кинетического уравнения, заметим лишь, что в обычных теориях она является не только удобной, но, возможно, и необходимой. Последнее связано с тем, что проводимый анализ динамических уравнений движения системы является, по существу, линейным и не позволяет учесть неустойчивости, приводящий к перемешиванию. Формально это связано с тем, что при решении уравнений движения частоты считаются постоянными. Поэтому такой подход можно назвать линейной моделью статистических законов.

Современная эргодическая теория позволяет не только восполнить этот пробел, но и провести более детальный анализ тех функций распределения, для которых может быть получено основное кинетическое уравнение. Поскольку перемешивание в эргодической теории существенно связано с нелинейностью системы, то естественно говорить в этом случае о нелинейной модели статистических законов.

Мы уже видели в п.8.1, что кинетическое уравнение марковского типа выводится для "грубой" функции распределения $F(I, t)$, получающейся из $f(I, \vartheta, t)$ усреднением по фазам ϑ в интервале от 0 до 2π . При этом мы отделяем процесс динамического перемешивания от статистической релаксации (п.3.5). В действительности, однако, процесс перемешивания происходит не только по фазе ϑ , но и, в меньшей степени, по I . Поэтому, в общем случае кинетическое уравнение справедливо для функции распределения, усредненной также и по

конечному интервалу Δ_I . Из уравнений движения (8.9) вытекает, что при расширении $\mathcal{V}$ на $\sim 2\pi$ действие I меняется на

$$\Delta_I \sim 2\pi \varepsilon I / K \quad (8.12)$$

Очевидно, что эта величина и определяет ячейку усреднения функции распределения. При этом перемешивание происходит согласно (8.10) за время

$$\tau_n \sim T / \ln K \quad (8.13)$$

т.е. практически за один шаг. Если мы уменьшим размер ячейки Δ_I по сравнению с (8.12), то перемешивание дополнительно запаздывает (см. п. 3.5) на время (число шагов)

$$n_0 \approx \left(\ln \frac{2\pi \varepsilon I}{K} \right) / \ln K \quad (8.14)$$

Максимально допустимое запаздывание определяется из условия применимости кинетического уравнения

$$n_0 T \leq \tau_0 \sim T / \varepsilon^2 \quad (8.15)$$

откуда сразу следует минимальный размер ячейки усреднения:

$$\min \Delta_I \sim \frac{2\pi \varepsilon I}{K} \exp \left(- \frac{\ln K}{\varepsilon^2} \right) \quad (8.16)$$

Отметим теперь характерные временные масштабы, которые используются при выводе кинетического уравнения и расположим их в порядке возрастания времен.

1) t_{e3} - время взаимодействия, которое в рассмотренном примере есть длительность толчка и является самым малым временем;

2) $\tau_n = T / \ln K$ - время перемешивания, или время расщепления корреляции фаз для максимальной ячейки усреднения (8.12);

3) $\tau_\Delta = n_0 T + T / \ln K$ - время перемешивания ячеек $\Delta_I = 2\pi \varepsilon I / K^{n_0}$ с учётом запаздывания. При

$n_0 = 0$ имеем $\tau_\Delta = \tau_n$. Если же n_0 определено выражением (8.14), то $\tau_\Delta = \tau_0$. Вообще, $\tau_n \leq \tau_\Delta \leq \tau_0$;

4) $\tau_0 = T / \varepsilon^2$ - время диффузии.

§ 9. Нелинейные волны

9.1. Проблема Ферми - Паста - Улама (ФПУ)

Хотя до сих пор рассматривались простейшие динамические системы, тем не менее развитые выше методы оказываются эффективными и для ряда более сложных систем с большим числом степеней свободы. Мы начнем с классической проблемы ФПУ. В начале 50-х годов для выяснения механизмов возникновения стохастичности в динамических системах Ферми предложил для исследования модель одномерной цепочки связанных нелинейных осцилляторов:

$$\ddot{u}_m = (u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) \left\{ 1 + \beta [(u_{m+1} - u_m)(u_m - u_{m-1}) + (u_{m+1} - u_m)^2 + (u_m - u_{m-1})^2] \right\} \quad (9.1)$$

$$m = 0, 1, \dots, N-1; \quad u_N = u_0$$

Казалось естественным, что при большом числе степеней свободы через достаточно большое время в системе (9.1) должно установиться термодинамическое равновесие, проявляющееся, в частности, в равномерном распределении начальной энергии возмущения по всем степеням свободы. Первые /71/ и ряд последующих /72, 73/ численных исследований показали, что ничего подобного не происходит, и движение системы (9.1) носит условнопериодический характер.

Из результатов, приведенных выше, мы уже знаем, что стохастичность возникает лишь при нелинейности, большей некоторой критической, и отрицательные результаты работ /71-73/ можно объяснить выбором слишком малых β . Решение пробле-

мы ФПУ и анализ критерия стохастичности для системы (9.1) было дано в работе /74/.

При малой нелинейности β удобно ввести нормальные координаты q_k с помощью соотношений:

$$U_m = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} q_k \sin \frac{\pi k m}{N}$$

Система уравнений движения для q_k имеет вид:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 \left[1 - \frac{3\beta}{4N} \omega_k^2 (2 - \omega_k^2) q_k^2 \right] q_k = \quad (9.2)$$

$$= \frac{\beta}{8N} \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{kk_1 k_2 k_3} q_{k_1} q_{k_2} q_{k_3}$$

где $V_{kk_1 k_2 k_3}$ - известная функция k, k_1, k_2, k_3 и

$$\omega_k = 2 \sin (\pi k / 2N) \quad (9.3)$$

Уравнение (9.2) описывает движение нелинейного осциллятора под действием внешней силы с большим числом гармоник. Действительно, полагая при малых β

$$q_k = c_k(t) \cos \theta_k; \quad \dot{\theta}_k \approx \omega_k + \delta \omega_k(c_k)$$

где $\delta \omega_k(c_k)$ - поправка к частоте $\sim \beta$, связанная с нелинейностью. Теперь видно, что в правой части (9.2) возникают такие фазовые множители, которые могут приводить к резонансу при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^4 n_i \omega_{k_i} = 0, \quad n_i = \pm 1 \quad (9.4)$$

Ширина одного изолированного резонанса имеет порядок

$$\Delta \omega_k \sim \left(\frac{d \delta \omega_k}{d c_k} \frac{\beta}{8N \omega_k} V_{kk_1 k_2 k_3} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} \right)^{1/2}$$

Расстояние между резонансами определяется структурой спектра (9.3) и равно:

$$\Delta_k = (\omega_{k+1} - \omega_k) \approx \frac{d \omega_k}{d k} = \frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi k}{2N}$$

Теперь можно записать критерий возникновения стохастичности /74/ в цепочке осцилляторов (9.1), используя критерий (2.11):

$$\frac{\Delta \omega_k}{\Delta_k} \gtrsim 1 \quad (9.5)$$

Хотя формальный вид полученного критерия нам уже знаком, тем не менее, существует ряд особенностей, связанных со специфической задачи, которые мы опишем ниже.

Численные исследования проблемы ФПУ, проведенные в /74, 75/, подтверждают аналитическую оценку (9.5). Несколько отличная от (9.1) модель рассматривалась в /76/. Численный эксперимент для двумерной цепочки осцилляторов также привел к обнаружению границы стохастичности /77/.

9.2. Слабая турбулентность

Несмотря на модельный характер проблемы ФПУ, её исследование имеет принципиальное значение и позволяет перейти к кругу вопросов, связанному с турбулентным движением сплошной среды. В этом разделе мы остановимся на задачах, связанных с так называемой слабой турбулентностью, возникающей в слабонелинейной среде^{х)} /33/.

Прежде всего заметим, что в приближении, когда длины волн в колеблющейся цепочке (9.1) много больше расстояния между осцилляторами, систему (9.1) можно заменить скалярным полем $U(x, t)$, удовлетворяющим приближенно уравнению:

$$U_{tt} = U_{xx} (1 + 3\beta U_x^2) + \gamma U_{xxxx} \quad (9.6)$$

х) Во избежание недоразумений заметим, что турбулентность, о которой идёт речь ниже, не имеет прямого отношения к обычной гидродинамической турбулентности, поскольку рассматриваемые системы являются консервативными.

Пусть, вообще, поле $U(x, t)$ удовлетворяет некоторой системе уравнений с малыми нелинейностями и задача в нулевом (линейном) приближении имеет дискретный спектр:

$$U(x, t) = \sum_k U_k(t) e^{ikx}$$

С помощью подходящего вариационного принципа можно записать потенциальную энергию поля U в виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 U_k^2 + \beta \sum_{k_1+k_2+k_3=0} V_{k_1 k_2 k_3} U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} + \beta^2 \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=0} V_{k_1 k_2 k_3 k_4} U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} U_{k_4} \quad (9.7)$$

где $\omega_k = \omega(k)$ - частотный спектр задачи и ядра V обладают обычными свойствами симметрии. Дискретность спектра характеризуется расстоянием между гармониками Δk и между частотами

$$\Delta \omega_k = \frac{d\omega_k}{dk} \Delta k \quad (9.8)$$

При определенных условиях изменение поля $U(x, t)$ будет носить стохастический характер и возникает движение среды, которое принято называть турбулентным. Таким образом, определение критерия стохастичности фактически означает выяснение условий перехода от ламинарного движения поля $U(x, t)$ к турбулентному. Наметим кратко путь такого исследования [69].

Из (9.7) можно получить уравнения движения для отдельной волны, аналогичные (9.2):

$$\ddot{U}_k + \omega_k^2 U_k = -3\beta \sum_{k_1, k_2} V_{k k_1 k_2} U_{k_1} U_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} - 4\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k k_1 k_2 k_3} U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} \delta_{k+k_1+k_2+k_3} - \dots \quad (9.9)$$

При малых β решение удобно отыскивать в виде:

$$U_k = c_k(t) e^{i\theta_k} \\ \dot{\theta}_k = \omega_k + \delta\omega_k$$

где $\delta\omega_k$ - нелинейные поправки к частоте, содержащие члены порядка β , β^2 и т.д. В правой части (9.9) надо выделить такие члены, которые соответствуют резонансным (распадным) условиям:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} = 0 \quad (9.10)$$

либо

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4} = 0 \quad (9.11)$$

и т.д.

Выполнение условий типа (9.10), (9.11) или более высокого порядка определяется видом спектра $\omega(k)$ (например, в случае (9.3) распады (9.10) невозможны, а распады (9.11) возможны). Рассмотрим только те резонансы, которые имеют в (9.9) низший порядок по β и определим их ширину $\Delta\omega_{k, k_1, \dots}$ связанную с нелинейными поправками к частоте:

$$\Delta\omega_{k k_1 \dots} = \Delta\omega(c_k, c_{k_1}, \dots)$$

Условие стохастичности принимает вид:

$$K_{k k_1 \dots} = \left| \frac{\Delta\omega_{k k_1 \dots}}{\frac{d\omega_k}{dk} \Delta k} \right| \geq 1 \quad (9.12)$$

аналогичный (9.5).

Из (9.12) можно определить область спектра волн, движение которых является стохастическим, т.е. границу возникновения турбулентности. Несколько более сложное исследование критерия

(9.12) выясняет характер стохастизации различных гармоник спектра и "распространения" стохастичности по спектру /74/.

В некоторых случаях удастся перейти от дифференциальных уравнений (9.9) к дискретному преобразованию типа (2.12), (6.4) для переменных действие (I_k) - угол (θ_k) волн /69/:

$$I_{k,(n+1)} = I_{k,(n)} + \Delta I_{k,k_1, \dots, (n)} \quad (9.13)$$

$$\theta_{k,(n+1)} = \theta_{k,(n)} + \omega_k T + K_{kk_1, \dots, (n)} f(\theta_{k_1,(n)}, \theta_{k_2,(n)}, \dots)$$

где T - временной масштаб преобразования, f - периодическая функция фаз θ . С помощью преобразования (9.13) можно наиболее просто оценить характерное время расщепления корреляции фаз волн в результате их перемешивания.

Дальнейший шаг использования результатов, вытекающих из условия (9.12), связан с выводом кинетического уравнения, описывающего турбулентное движение среды. Обычная процедура включает, как уже отмечалось в § 8, гипотезу хаотических фаз /18, 78, 79/. Описанная выше нелинейная теория позволяет получить кинетическое уравнение при произвольных начальных условиях /69/ подобно тому, как это сделано в § 8.

9.3. Неустойчивость нелинейных периодических волн

В этом разделе мы кратко остановимся на более сложных явлениях, связанных с турбулентным движением среды. Как известно, гидродинамические уравнения в отсутствии диссипации допускают решение в виде простых волн

$$u = u(x - ct) \quad (9.14)$$

где c - скорость волны. Нелинейность обычно приводит к укручению фронта волны и к её опрокидыванию. Наличие дисперсии (благодаря, например, члену u_{xxxx} в (9.6)) даёт возможность построить устойчивые решения типа (9.14), которые имеют вид нелинейных периодических волн с некоторой длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. При $\lambda \rightarrow \infty$ такие волны переходят в уединенную волну - солитон (см., например, /80/). Для

конкретности мы воспользуемся простейшим уравнением Кортевега - де Вриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (9.15)$$

Очевидно, что его периодическое решение можно разложить в ряд Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{inkx} \quad (9.16)$$

$$u_n(t) = e^{-inkct} C_n, \quad u_n^* = u_{-n}$$

Иными словами, решение типа (9.14) описывает пакет скоррелированных плоских волн, движущихся с фазовой скоростью c .

Для $n > N = \sqrt{c}/k$ амплитуды C_n ведут себя как

$\exp(-n/N)$, и, следовательно, N определяет характерное число гармоник в пакете (9.16). Обычно показателем нелинейности в гидродинамике является число Рейнольдса R . Можно показать, что в данном случае его аналогом является $R = N^2$. Ниже нас будет интересовать случай $R \gg 1$.

Рассмотрим как влияют внешние возмущения на решения типа (9.16) и исследуем с этой целью уравнение:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon F(u, x, t) \quad (9.17)$$

где ε - малый параметр возмущения и F - функционал от u и его производных. Для уравнения (9.17) можно записать гамильтониан:

$$H = H_0[u_n] + \varepsilon V[u_n, F_n] \quad (9.18)$$

$$F_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-inkx} F[u, x, t] dx$$

и канонические уравнения движения:

$$\dot{u}_n = i k_n \frac{\delta H}{\delta u_{-n}}; \quad \dot{u}_{-n} = -i k_n \frac{\delta H}{\delta u_n} \quad (9.19)$$

Особенностью задачи об устойчивости нелинейной волны является возможность ввести только две переменных (вместо $2N$ переменных) с точностью до малых более высокого порядка по ε . Такими переменными являются H_0 и Θ , уравнения движения которых имеют вид [81]:

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= -\varepsilon c \sum_n (u_n F_{-n} + u_{-n} F_n) \\ \dot{\Theta} &= \omega(H_0) = k c(H_0) \end{aligned} \quad (9.20)$$

причём в правой части (9.20) для F можно воспользоваться нулевым приближением из (9.16).

Нетрудно видеть, что система типа (9.20) аналогична уравнениям (6.2), но с более сложной структурой возмущения. Дальнейшее её исследование проводится так же, как и в § 6, и мы остановимся лишь на физических следствиях.

Если возмущение F приводит к появлению большого числа перекрытых резонансов между гармониками волны u_n и гармониками возмущения, то возникает стохастическая неустойчивость нелинейной волны. Она проявляется в том, что волна, как целое, стохастически ускоряется аналогично броуновской частице с энергией $H_0(t)$ и скоростью $c(t)$. В реальных условиях такая волна может опрокинуться, если скорость её $c(t)$ достигает некоторого критического значения c_0 . При этом волна покрывается мелкой флуктуирующей рябью, которая наводится внешним возмущением.

Описанный процесс исследован в работах [81, 82]. В [82] проведен также подробный анализ влияния на волну отдельного резонанса.

Роль возмущения F могут играть другие нелинейные волны. Этот эффект исследовался в работе например, для многомерного случая [83], где показано, что при определенных началь-

ных условиях решение уравнения (9.15) можно искать в виде слабо взаимодействующих нелинейных волн. Взаимодействие между волнами носит резонансный характер и может приводить к хаотизации фаз аналогично тому, как это было в проблеме ФПУ (п.9.1).

Рассмотренные выше задачи показывают, насколько широк круг явлений, в которых играет роль стохастическая неустойчивость. Мы надеемся, что этот краткий обзор привлечет внимание к рассматриваемой проблеме и будет способствовать её дальнейшему развитию.

Пользуемся случаем выразить нашу искреннюю благодарность Б.Б.Кадомцеву и Я.Г.Синаю, просмотревшим рукопись этой статьи и сделавшим ряд ценных замечаний.

Л и т е р а т у р а

1. Н.М.Крылов, Н.Н.Боголюбов. Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, 1937.
2. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы и теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
3. И.И.Путили. Малые планеты, Гостехиздат, 1953.
4. В.И.Векслер, ДАН, 43, 346, 44, 393 (1944).
5. E. M. Mc Millan, Phys. Rev. 68, 143 (1945)
6. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей, Физматгиз, 1962.
7. Б.В. Чириков, ДАН, 125, 1015 (1959).
8. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, 1969.
9. F. K. Goward. Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону на 25 ГэВ с сильной фокусировкой (Женева, октябрь 1953); M. G. Hine, там же.
10. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630 (1959); Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1959.
11. Г.М.Заславский. Статистическая необратимость в нелинейных системах, 1968.
12. G. Hedlund, Bull. Amer. Math. Soc., 45, 241 (1939)
13. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики, Изд. АН СССР, 1950.
14. Д.В.Аносов. Геофизические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды матем.института им.В.А.Стеклова, 90 (1967).

15. Я.Г.Синай, Изв.АН, сер.матем., 30, 15 (1966).
16. Д.В.Аносов, Я.Г.Синай, УМН, XXII, в.5 (137), 107 (1967); Б.А.Рохлин, там же, стр.3.
17. Г.И.Будкер, С.Т.Беляев, Кинетическое уравнение для электронного газа при редких столкновениях. Сб.Физики плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т.II, стр.330, Изд.АН СССР, 1958.
18. R. Brout, I. Prigogine. Physica, 22, 621 (1956)
19. С.Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИИЛ, 1947.
20. M. V. Filonenko, R. Z. Sagdeev, St. M. Zaslavsky. Nuclear Fusion, 7, 253 (1967)
21. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, ЖЭТФ, 54, 1590 (1968).
22. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
23. П.Р.Халмош. Лекции по эргодической теории, ИИЛ, 1959.
24. К.П.Гуров. Основания кинетической теории (Метод Н.Н.Боголюбова), Наука, 1966.
25. В.В.Немыцкий, В.В.Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1947.
26. А.А.Харкевич, Спектры и анализ, Физматгиз, 1962.
27. И.Пригожин. Неравновесная статистическая механика, МИР, 1964.
28. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958.
29. Дж.Уленбек, Дж.Форд, Лекции по статистической механике, МИР, 1965.
30. R. Balesku, Physica, 36, 433 (1967)

31. А.Н.Колмогоров, ДАН, 119, 861 (1958).
32. А.Н.Колмогоров, ДАН, 30, 299 (1941); Л.Д.Ландау, ДАН, 44, 339 (1944); Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической неустойчивости, ИИЛ, 1958.
33. Б.Б.Кадомцев. В сб. "Вопросы теории плазмы", т.4, 188, Атомиздат (1964).
34. Я.Г.Синай, ДАН, 153, 1261 (1963).
35. В.И.Арнольд, ДАН, 156, 9 (1964); Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем, Доклад на Международном съезде математиков, Москва, 1966.
36. Г.Бор, Почти-периодические функции, 1934; Б.М.Левитан, Пяты периодические функции, М., 1953.
37. А.Г.Постников. Арифметическое моделирование случайных процессов. Труды МИАН им.Стеклова, УП, 1960.
38. Н.Н.Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР, 1945.
39. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством, препринт ИЯФ СО АН СССР, 1968.
40. L. Van Hove. Physica, 21, 517 (1955)
41. B. Chirikov, E. Keil, A. Sessler. Stochasticity in Many-Dimensional Nonlinear Oscillating Systems, CERN Report, (1969)
42. А.В.Комин, Л.С.Красицкая, В.П.Минаев. Магнитные поверхности тороидального магнитного поля вблизи сепаратрисы, препринт № 225, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.

43. L.J. Laslett. A computational investigation of a Nonlinear Algebraic Transformation (1967) (unpublished)
44. S.M. Ulam. Proc. 4-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 3, 315 (1961) (перевод: Математика, 7, 137 (1963))
45. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков. ДАН, 159, 306 (1964).
46. Э.Л.Бурштейн, В.И.Векслер, А.А.Коломенский. Стохастический метод ускорения частиц. Сб. Некоторые вопросы теории циклических ускорителей, АН СССР, 1955.
47. С.П.Капица, В.Н.Мелехин, Микротрон, "Наука", 1969.
48. В.Н.Бочаров, В.И.Волосов, А.В.Комин, В.М.Панасюк, Удержание плазмы в стеллараторе при различных значениях длины свободного пробега, Д-7, Новосибирск, 1968.
49. E. Fermi. Phys. Rev., 75, 1169 (1949).
50. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959; О.Блакьер, Анализ нелинейных систем, "Мир", 1969.
51. I. Prigogine, Introduction to Nonequilibrium Statistical Physics, Proc. Intern. School of Non-linear Mathematics and Physics. Physics Session, Munich (1966)
52. R.Z. Sagdeev, A.A. Galeev. Nonlinear Plasma Theory. Benj. Inc., N.Y. - Amsterdam (1969)
53. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
54. Г.М.Заславский, ПМТФ, 2, 16 (1967).
55. Л.А.Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961.

56. Г.И.Будкер, УФН, 89, 533 (1966).
57. С.Н.Родионов, Атомная энергия, 6, 623 (1959).
58. А.Н.Колмогоров, ДАН, 98, 527 (1954).
59. В.И.Арнольд, УМН, XVIII, в.6 (114), 91 (1963).
60. J. Moser. A Rapidly Convergent Iteration Method and Nonlinear Differential Equations. II. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie III.*, v. 20, Fasc. III (1966)
61. H. Poincaré. Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I, II, III, Paris (1892, 1893, 1899). Reprinted by Dover. N.Y. (1957)
62. В.К.Мельников, ДАН, 148, 1257 (1963).
63. В.М.Алексеев, ДАН, 177, 495 (1967); Матем.сб., 76 (118), 72 (1968); 77 (119), 545 (1968), 78 (120), 3 (1969).
64. M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor, G.M. Zaslavsky. Nuclear Fusion, 6, N4 (1966)
65. G. Contopoulos. Bull. Astronomique, Ser. 3. 2, 223 (1967).
66. A. Schoch, CERN Report, 57-21 (1958)
67. A. Gibson. Phys. of Fluids, 10, 1553 (1967)
68. Б.В.Чириков, ДАН, 174, 1313 (1967).
69. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 52, 1081 (1967).
70. Дж.Честер, Теория необратимых процессов, изд. "Наука", 1966.
71. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Scientific Report, LA-1940 (1955)
72. J. Ford. Journ. Math. Phys. 2, 387 (1961). J. Ford, J. Waters. J. Math. Phys., 4, 1293 (1963).

73. E.A. Jackson. J. Math. Phys. 4, 581, 686 (1963)
74. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, ДАН, 166, 57, (1966).
75. Ф.М.Израйлев, А.И.Хисамудинов, Б.В.Чириков. Численные эксперименты с нелинейной цепочкой, препринт № 252 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.
76. Ф.М.Израйлев. Исследование стохастичности колебаний струны с квадратичной нелинейностью, препринт № 77 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1966.
77. H. Hasegawa, N. Saito, Journ. Phys. Soc. Japan, 26, 624 (1969).
78. W.E. Drummond, D. Pines. Nucl. Fusion, Suppl., Pt. 3, 1049 (1962).
79. А.А.Галеев, В.И.Карпман, ЖЭТФ, 44, 592 (1963).
80. M. J. Zabusky, J. Math. Phys. 3, 1028 (1962).
81. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, ЖЭТФ, 56, 1964 (1969).
82. Н.Н.Филоненко. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 282, Новосибирск (1969).
83. Г.П.Берман, Г.М.Заславский. ЖЭТФ, 58, 1453 (1970).
84. Г.Н.Кулипанов, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский, Излучение стохастической неустойчивости бетатронных колебаний электронного пучка в накопителе, Доклад на Международной конференции по ускорителям, Ереван, 1969.
85. J. Ford, G.H. Linsford, Phys. Rev. A1, 59 (1970)
86. E. M. McMillan, Some Thoughts on Stability in Nonlinear Periodic Focusing Systems, UCRL-17795, Berkeley (1967);
L.J. Laslett, E.M. McMillan, J. Moser, Long-Term Stability for Particle Orbits, NYO-1480-101, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York (1968)
87. G.H. Walker, J. Ford, Phys. Rev., 188, 416 (1969).

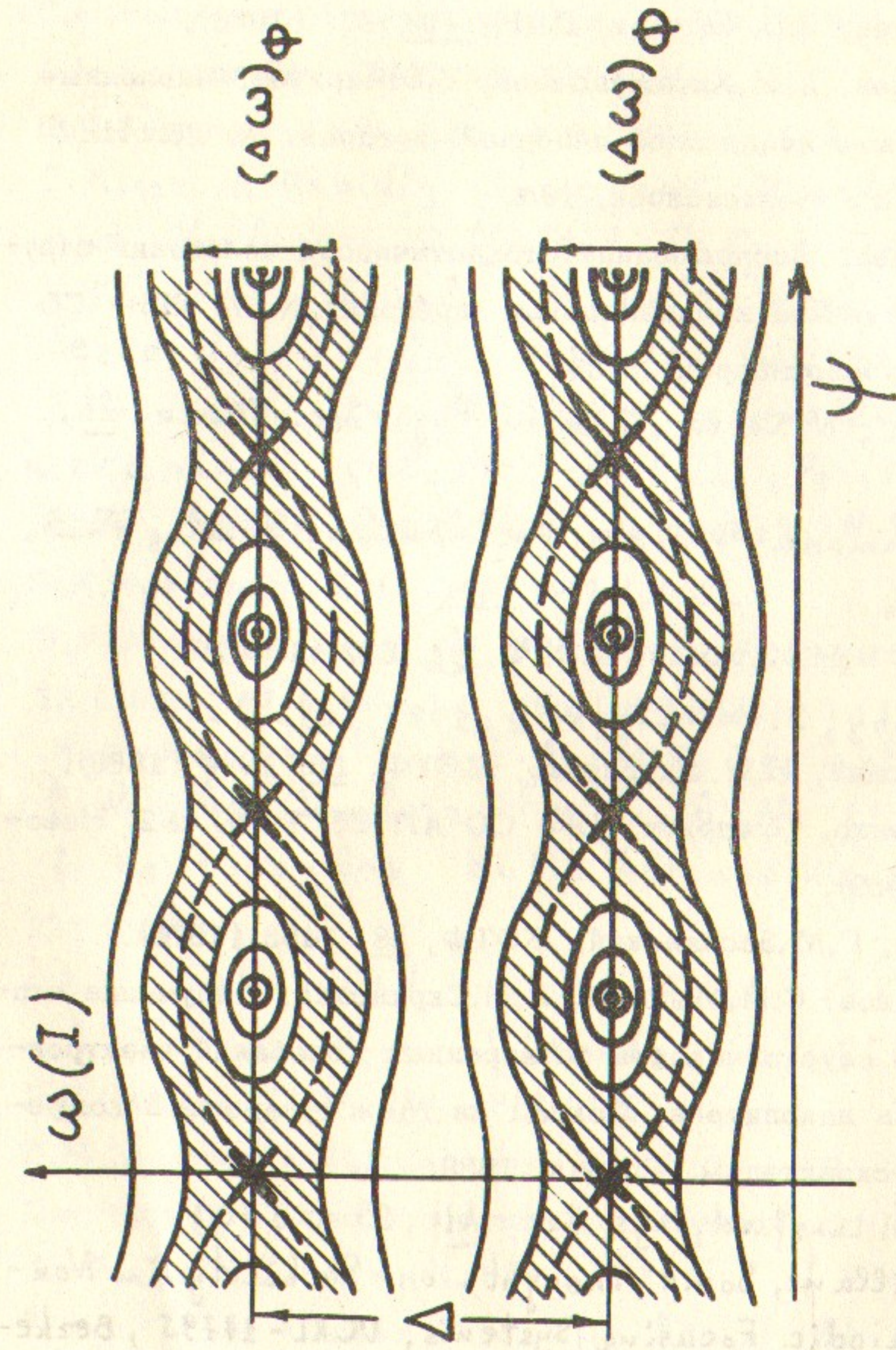


Рис.1. Схема фазовых траекторий в окрестности двух резонансов при умеренной нелинейности (2.6): $(\Delta\omega)\phi$ - ширина нелинейного резонанса; Δ - расстояние (по частоте) между соседними резонансами. Пунктиром показаны сепаратрисы первого приближения; в следующих приближениях они разрушаются и на их месте образуются стохастические слои, которые показаны штриховкой (п.6.1).

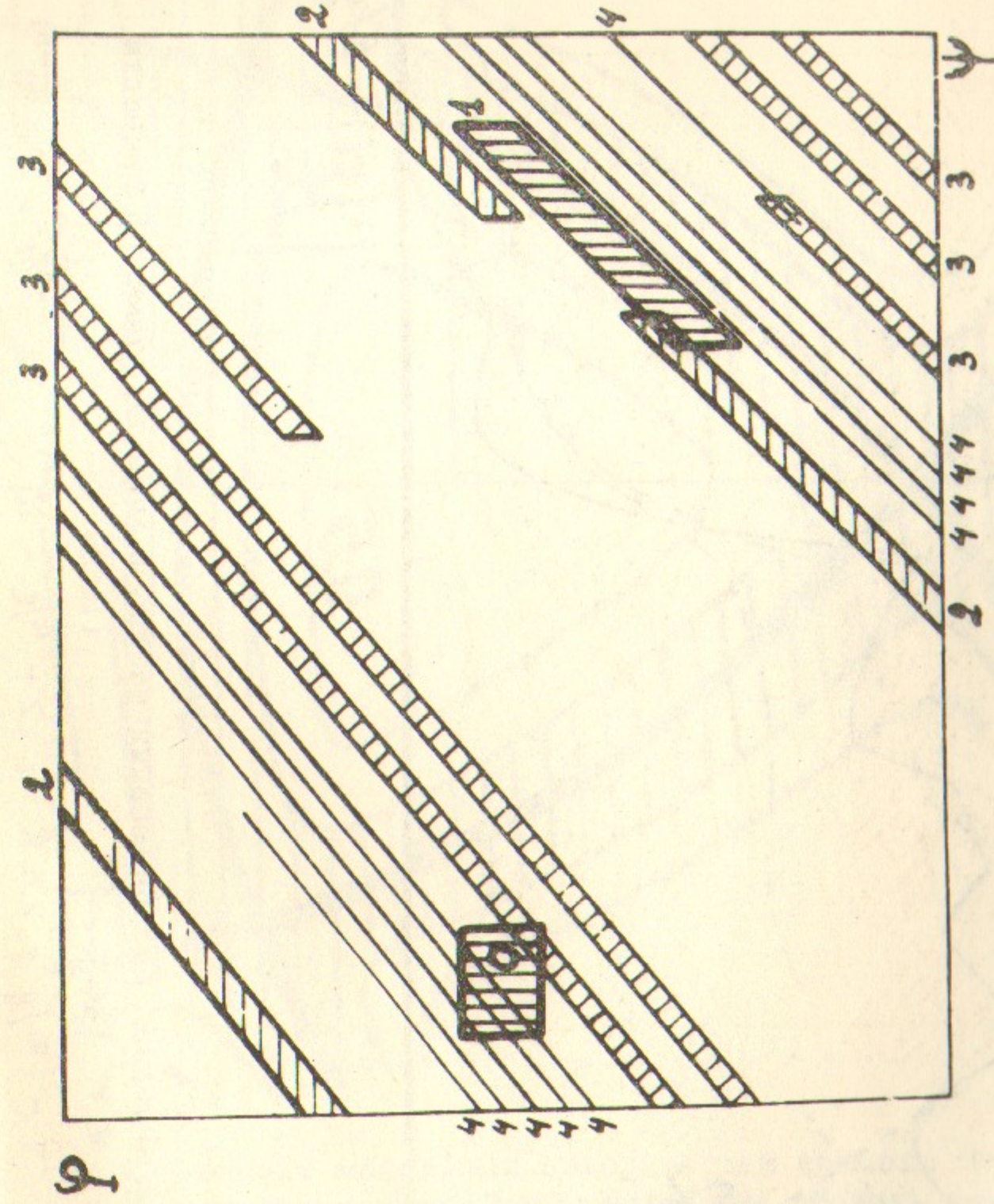


Рис.2. Схематическое изображение процесса перемешивания для элементарной модели (3.1) с $f(\psi) = \psi$ ($k \gg 1$). Начальная область - квадрат; цифры указывают номер шага. Направление растяжения совпадает приблизительно с диагональю фазового квадрата, а направление сжатия - с осью ψ .

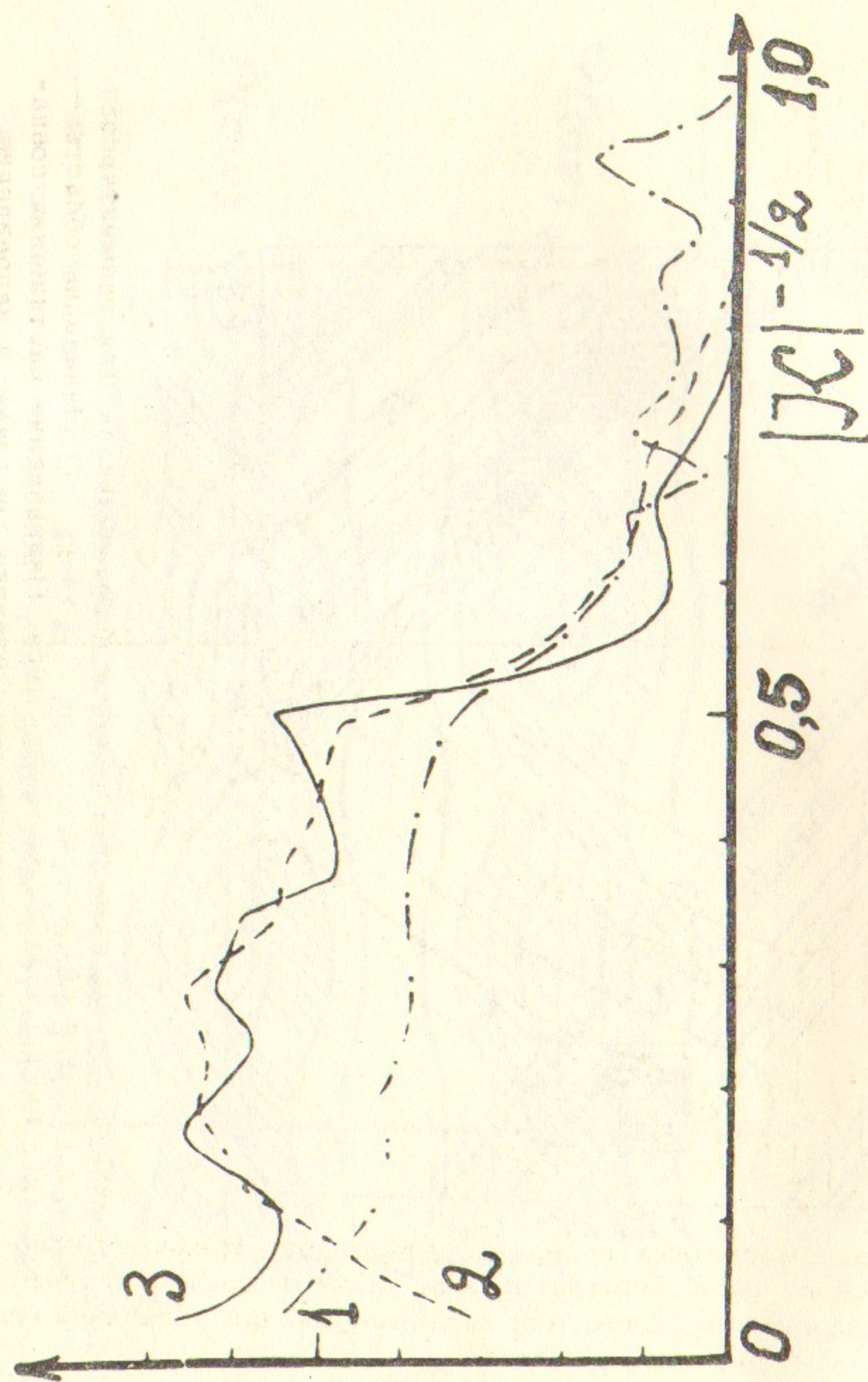


Рис.3. Функция распределения частиц в модели Улама по скорости $v \propto |K|^{-1/2}$ (5.2):
 1 - $a/e = 2,5 \cdot 10^{-3}$; 2 - $a/e = 10^{-4}$; 3 - $a/e = 2,5 \cdot 10^{-5}$.

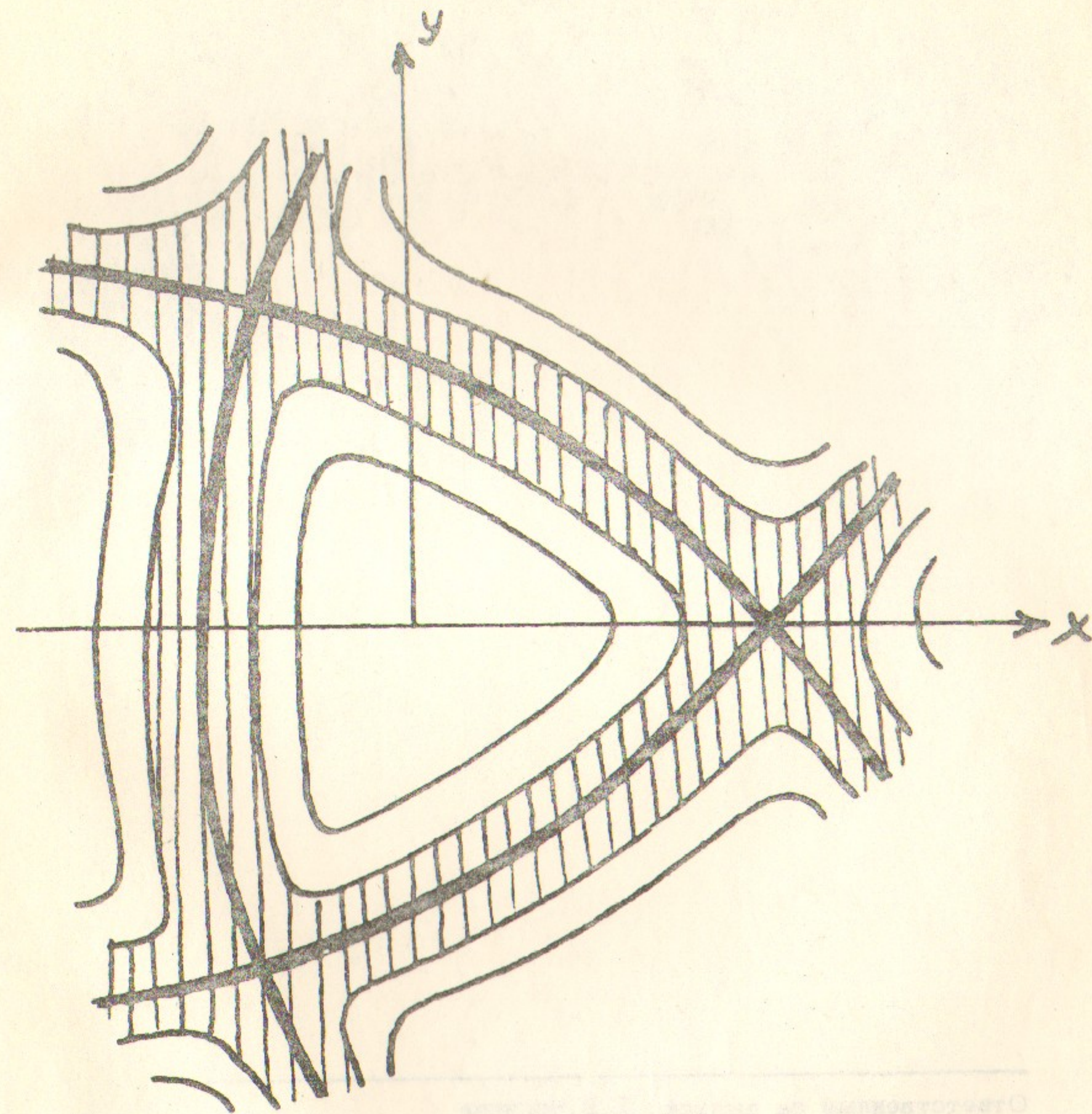


Рис.4. Сечение магнитных поверхностей прямого трехзаходного винтового поля. Заштрихованная область соответствует стохастическому слою, обращающемуся при изгибании прямого винтового поля в тор.

Ответственный за выпуск Б.В.Чириков

Подписано к печати 17.У1-1970 г.

Усл. 3,5 печ.л., тираж 300 экз. Бесплатно

Заказ № 43 , ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР, нв.