Яд. физика

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 50
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Б.Г.Конопельченко.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ: ГРУППЫ СИММЕТРИИ, БЭКЛУНД-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ПРЕПРИНТ 80-147

Новосибирск

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ: ГРУППЫ СИММЕТРИИ, БЭКЛУНД-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются группы симметрии и Бэклунд-преобразования вполне интегрируемых линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Обсуждается общая структура групп преобразований, допускаемых интегрируемыми уравнениями.

INTEGRABLE EQUATIONS: GROUPS OF SYMMETRIES, BÄCKLUND-TRANSFORMATIONS AND DYNAMICAL GROUPS

B.G.Konopelchenko

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

Groups of symmetries and Bäcklund-transformations of the completely integrable linear and nonlinear differential equations are considered. A general structure of the group of transformations admissible by integrable equations is discussed.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ: ГРУППЫ СИММЕТРИИ, БЭКЛУНД-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Б.Г.Конопельченко

1. Введение

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) позволил детально исследовать большое число различных дифференциальных уравнений в частных производных (см.например обзоры [1-6]). Уравнения, к которым применим МОЗР, обладают целым рядом интересных свойств - решения солитонного типа, бесконечные наборы законов сохранения, полная интегрируемость. Для этих уравнений характерно существование очень своеобразных нелинейных преобразований, действующих на множестве решений - так называемых Бэклунд-преобразований. Все это резко отличает нелинейные уравнения, интегрируемые МОЗР, от других дифференциальных уравнений.

Специфические свойства интегрируемых уравнений тесно связаны с их специальными свойствами симметрии. Цель настоящей работы - обсудить групповые свойства интегрируемых уравнений. Мы рассмотрим общую структуру групп симметрии и их связь с высшими интегралами движения. Часть работы посвящена Бэклунд-преобразованиям (БП), их свойствам и групповой структуре. Анализируется также общая структура групп преобразований, допускаемых интегрируемыми уравнениями.

План работы следующий. Во втором разделе рассматриваются бесконечные группы симметрии линейных и нелинейных интегрируемых уравнений. В третьем разделе обсуждаются Бэклунд-преобразования. Соотношения между МОЗР и Бэклунд-преобразованиями анализируется в следующем четвертом разделе. Динамическим группам интегрируемых уравнений посвящен пятый раздел. Переход от классической теории к квантовой обсуждается в шестом разделе. В последнем, седьмом разделе рассмотрен пример частично интегрируемой нелинейной системы с бесконечным числом высших интегралов движения–уравнения сверхпроводимости в приближении Бардина–Купера–Шриффера.

II. Группы симметрии интегрируемых уравнений

Для уравнений, интегрируемых МОЗР, характерно существование бесконечных серий интегралов движения. Среди этих интегралов имеются как хорошо известные, обычные интегралы (энергия, импульс, заряд и т.п.), так и новые (высшие), не имеющие непосредственного физического смысла. Структура и свойства высших интегралов обсуждалась, в частности, в обзоре [7].

Ясно, что существование высших интегралов движения связано с какой-то дополнительной симметрией уравнений.

Обычные интегралы, как хорошо известно, отражают инвариантность уравнений движения относительно той или иной группы преобразований (группы сдвигов, групп Галилея, Лоренца, групп внутренней симметрии и т.п.). Встает естественный вопрос: каким группам симметрии уравнений соответствуют высшие интегралы движения? Ответу на него посвящен этот раздел. Мы увидим, что высшие интегралы связаны с группами симметрии нового типа.

Задача восстановления группы симметрии по интегралам движения достаточно сложна. Однако, она сильно упрощается, если рассматриваемое уравнение гамильтоново. Для гамильтоновых систем интеграл движения I является, как известно /8/, производящей функцией инфинитезимального преобразования симметрии $u \to u' = u + \delta u$, где $\delta u = \varepsilon \{u, I\}$ а ε – параметр преобразования. Вычисление δu по явному виду $I\{u\}$ при известных скобках Пуассона $\{\ ,\}$ не представляет особого труда.

Рассмотрим в качестве примеров уравнение Клейна–Гордона $\Box\varphi - m^2\varphi = 0$ и нелинейное уравнение Шредингера $iu_t + u_{xx} + 2u^2u^* = 0$. Для первого уравнения инфинизимальные преобразования, порождаемые интегралами движения $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\ldots\tau_{2n})}$ (см. (I.2.1)) (здесь и в дальнейшем обзор [7] мы будем обозначать I) имеют вид

$$\delta\varphi(x) = \alpha_{\mu\tau_1\ldots\tau_{2n}} \frac{\partial^{2n+1}\varphi(x)}{\partial x^{\mu}\partial x^{\tau_1}\ldots\partial x^{\tau_{2n}}} \qquad (2.1)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Для нелинейного уравнения Шредингера (все вещественные константы включены в параметры ε_n):

$$C_n : \delta u = \varepsilon_n \{u, C_n\} = i\varepsilon_n \frac{\delta C_n}{\delta u^*}.$$

Приведем явный вид первых пяти преобразований:

$$C_1 : \delta u = i\varepsilon_1 u, \quad C_2 : \delta u = -\varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$C_3 : \delta u = -i\varepsilon_3 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u|u|^2\right] = -\varepsilon_3 \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$(2.2)$$

$$C_4 : \delta u = -i\varepsilon_4 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\frac{\partial}{\partial x}(u|u^2|)\right],$$

$$C_5 : \delta u = i\varepsilon_5 \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 8|u|^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + 6u^*\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4u\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + 6u|u|^4\right].$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что уравнение Клейна–Гордона действительно инвариантно относительно преобразований (2.1), а нелинейное уравнение Шредингера – относительно преобразований (2.2). Отметим, что выраже – ния (2.1) и (2.2) задают изменение формы функций φ и u при преобразованиях симметрии. Если рассматри – вать преобразования симметрии типа (2.1) и (2.2), как исходные, то ясно, что соответсвующие интегралы движения совпадают с $P_\mu^{(n)}(\dots)$, и C_n.

Преобразования вида (2.1) и (2.2) для каждого интеграла движения, как нетрудно показать, образуют однопараметрическую группу.

Группы преобразований, генерируемые обычными интегралами движения, имеют простой смысл. Так, для уравнения Клейна–Гордона преобразование $\delta\varphi(x) = \varepsilon_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$ есть обычные пространственно–временные сдвиги. Для НУШ интеграл C_1 связан с группой калибровочных преобразований $u \to u = e^{i\varepsilon} u$. C_2 и C_3 свя – заны с трансляциями по x и t.

Высшие же интегралы движения отражают инвариант – ность уравнений относительно более сложных преобразований. Эти преобразования содержат производные полей порядка выше первого, а для нелинейного уравнения и нелинейные члены с нарастающей степенью поля. В результате преобразования, генерируемые высшими интегралами движения, не могут быть связаны с какими бы ни было пространственно–временными группами или группами внутренней симметрии, т.к. для последних порядок производных полей в законе преобразования (в инфинитезимальной форме) не может превышать единицу.

Аналогичными свойствами обладают группы симметри, ассоциированные с высшими интегралами движения и для

других интегрируемых уравнений.

Таким образом, если обычные интегралы движения отражают инвариантность уравнений относительно пространственно–временных групп или групп внутренней симметрии, то высшие интегралы связаны с группами преобразований, не имеющих непосредственного геометрического смысла.

Выше при построении групп симметрии мы использовали явный вид интегралов движения. К сожалению, все интегралы движения нелинейного уравнения, как правило, не известны и поэтому при отыскании групп симметрии прихо – дится обращаться к самому уравнению. Например, для уравнения $F(\partial/\partial x)u+V(u)=0$ условие инвариантности его относительно преобразований $\delta u = \varepsilon f(u,u_x,\dots)$ имеет вид

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(u,u_x,\dots)+V\ (u)f(u,u_x,\dots)=0 \qquad (2.3)$$

Решая уравнения (2.3) относительно f мы найдем группу симметрии. Если же преобразования имеют какой-нибудь специальный вид, то из (2.3) в принципе можно найти и $V(u)$ совместные с этими преобразованиями.

Математическая схема описанного способа для обычных групп преобразований – метод группового анализа дифференциальных уравнений был разработан в ряде работ (см. монографию /21/). Появление групп симметрий типа (2.1), (2.2) потребовало модификации этого метода с тем, чтобы учесть преобразования, содержащие высокие порядки производных /9,12-14,18,22-24/. Дальнейшее видоизменение необходимо для того, чтобы включить в схему группового анализа нелокальные преобразования, индуцируемые, например, нелокальными интегралами движения типа (1.4.25) /25,26/. Эти интересные вопросы выходят, к сожалению, за рамки настоящей работы.

Итак, высший интеграл движения связан с однопара – метрической группой симметрии. Поскольку все высшие интегралы "коммутируют" между собой, то коммутируют между собой, то коммутируют и соответствующие преобразования. Тем самым, нелинейные уравнения, интегрируемые

МОЗР, обладают бесконечнопараметрическими абелевыми группами симметрии. Ясно, однако, что с этими группами не исчерпываются все допускаемые уравнениями группы симметрии: уравнения КдВ, НУШ, уравнение синус-Гордона инвариантны также относительно преобразований Галилея или Лоренца, не коммутирующих со сдвигами по t и x. Каковы же полные группы симметрии?

По-видимому, наиболее простой способ выяснения структуры полных групп симметрии состоит в использовании того факта, что нелинейные интегрируемые уравнения эквивалентны некоторым линейным уравнениям. Так, для вполне интегрируемых уравнений линейными являются уравнения для переменных типа действие-угол

$$\frac{dS_k}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega_k}{dt} = I_k$$

Переходя к каноническим переменным $a_k(t) = \sqrt{S_k}\, \exp i\, \mathcal{I}_k t$, $a_k^*(t) = \sqrt{S_k}\, \exp(-i\, \mathcal{I}_k t)$ получаем линейные однородные уравнения

$$\frac{da_k}{dt} - iI_k a_k = 0, \quad \frac{da_k^*}{dt} + iI_k a_k^* = 0 \tag{2.4}$$

Заметим, что преобразование от исходного уравнения к уравнению (2.4) является каноническим.

Взаимооднозначное соответствие между исходными переменными, удовлетворяющими нелинейному уравнению, и "линеаризующими" переменными устанавливает также соответствие между преобразованиями на многообразиях решений. Ясно, что при этом групповая структура преобразований сохраняется. В результате, группы симметрии нелинейного уравнения и соответствующего ему линейного изоморфны или просто совпадают. Для вполне интегрируемых уравнений это есть очевидное свойство канонических преобразований.

Задача отыскания группы симметрии нелинейного интегрируемого уравнения сводится, таким образом, к гораздо более простому случаю линейных уравнений. Подчеркнем,

что при этом мы определим структуру группы симметрии (структурные константы), а не явный вид преобразований.

Выясним какова структура групп симметрии линейных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = 0 \tag{2.5}$$

где $x = \{x_\mu\}$ – независимые переменные, $F(\partial/\partial x)$ – произвольный дифференциальный оператор. Число N независимых переменных и число компонент поля $\psi(x)$ также произвольны. Пусть уравнение (2.5) инвариантно относительно n – параметрической группы G_n преобразований (в инфинитезимальной форме)

$$\delta\Psi(x) = \omega_\alpha D_\alpha(x)\Psi(x) \tag{2.6}$$

где $\omega_\alpha(\alpha=1,\dots,n)$ – параметры преобразований, D_α – инфинитезимальные операторы группы G_n в реализации на полях $\psi(x)$. Отметим, что инфинитезимальные операторы D_α являются дифференциальными операторами, действующими на функции $\psi(x)$. Генераторы L_α группы G_n, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\{L_\alpha, L_\beta\} = c_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma \tag{2.7}$$

где $c_{\alpha\beta\gamma}$ – структурные константы группы, суть функционалы полевых переменных. В гамильтоновых теориях L_α можно представить в виде

$$L_\alpha = \int d^{N-1}x\, \pi(x) \overleftrightarrow{D_\alpha} \Psi(x) \tag{2.8}$$

где $\pi(x)$ – канонический импульс.

Связь генераторов L_α и инфинитезимальных операторов D_α очень проста: $\{L_\alpha, \Psi(x)\} = D_\alpha \Psi(x)$. В силу этого операторы D_α удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и L_α (с заменой скобок Пуассона $\{\ ,\ \}$ на коммутаторы $[\ ,\ ]$).

Условие инвариантности уравнения (2.5) относительно преобразований (2.6) имеет вид

$$\left[F\left[\frac{\partial}{\partial x}\right], \omega_\alpha D_\alpha\right] = 0 \qquad (2.9)$$

или

$$\left[F\left[\frac{\partial}{\partial x}\right], D_\alpha\right] = 0 \qquad (\alpha = 1,\dots,n)$$

Параметры преобразований в (2.6) и (2.9) суть постоянные числа. Заметим, теперь, что если выполняется (2.9), то выполняется и соотношение

$$\left[F\left[\frac{\partial}{\partial x}\right], \omega_\alpha\left[D_1(x),\dots,D_n(x)\right] D_\alpha(x)\right] = 0$$

где $\omega_\alpha(D_1,\dots,D_n)$ – произвольные целые функции инфинитезимальных операторов $D_1(x),\dots,D_n(x)$.

Таким образом, уравнение (2.5), инвариантное относительно преобразований (2.6) с постоянными параметрами, инвариантно также относительно преобразований

$$\delta\Psi(x) = \omega_\alpha(D_1,\dots,D_n) D_\alpha(x)\Psi(x) \qquad (2.10)$$

где параметры ω_α являются произвольными целыми функциями инфинитезимальных операторов $D_1,\dots,D_n$ [x)]

Преобразование (2.10) можно представить в виде

$$\delta\Psi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \omega^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l} D^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l}(x)\Psi(x) \qquad (2.11)$$

где

$$\mathcal{D}^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l} = \operatorname*{Sym}_{\alpha_1\dots\alpha_l} \mathcal{D}_{\alpha_1}\mathcal{D}_{\alpha_2}\dots\mathcal{D}_{\alpha_l}, \qquad (2.12)$$

$$\omega^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l} = \frac{1}{l!}\operatorname*{Sym}_{\alpha_1\dots\alpha_l} \frac{\partial^l \omega_{\alpha_1}(y_1,\dots,y_n)}{\partial y_{\alpha_2}\dots\partial y_{\alpha_n}}\Bigg|_{y_1=\dots y_n=0}$$

---

x) В силу соотношений $[\mathcal{D}_\alpha,\mathcal{D}_\beta] = C_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{D}_\gamma$ в качестве независимых можно выбрать $\mathcal{D}^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ полностью симметричные по всем индексам.

Следовательно, группа преобразований (2.10) может рассматриваться как бесконечнопараметрическая группа (обозначим её $G_{n\infty}$ (с параметрами $\omega^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ и инфинитезимальными операторами $D_{\alpha_1\dots\alpha_l}$. Генераторы группы $G_{n\infty}$ имеют вид

$$L^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l} = \int d^{N-1}x\, \pi(x)\, \overleftrightarrow{D}^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l}\Psi(x).$$

Перестановочные соотношения генераторов группы $G_{n\infty}$ полностью определяются структурными константами группы G_n. Учитывая (2.7), (2.12) и (2.13) находим /15/

$$\left\{L^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l}, L^{(k-l)}_{\beta_{l+1}\dots\beta_k}\right\} = C^{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}_{\alpha_1\dots\alpha_l\beta_{l+1}\dots\beta_k} L^{(k-1)}_{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}, \qquad (2.14)$$

$$(l,k = 1,2,3,\dots)$$

где

$$C^{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}_{\alpha_1\dots\beta_k} = \operatorname*{Sym}_{\substack{\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}\\ \{\beta_{l+1},\dots,\beta_k\}\\ \{\gamma_1,\dots\gamma_{k-1}\}}} C_{\alpha_i\beta_k\gamma_m}\delta^{\gamma_1}_{\alpha_1}\dots\delta^{\gamma_l}_{\alpha_l}\delta^{\gamma_{l+1}}_{\beta_{l+1}}\dots\delta^{\gamma_{k-1}}_{\beta_k}. \qquad (2.15)$$

Итак, мы видим, что полной группой симметрии линейного уравнения является бесконечномерная группа типа $G_{n\infty}$. Свойства её определяются структурой группы G_n.

Генераторы $L^{(l)}_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ $(\alpha_i = 1,\dots,n;\ l = 1,2,\dots)$ группы $G_{n\infty}$ суть интегралы движения уравнения (2.5). В качестве группы G_n естественно выбирать полную пространственно-временную группу и группу внутренней симметрии. Тогда $L^{(1)}_\alpha$ – это обычные интегралы движения, а $L^{l}_{\alpha_1\dots\alpha_l}$ $(l > 1)$ высшие. Нетрудно убедиться, что высшие интегралы, рассмотренные во втором разделе обзора 1 (см.1, 2.5) можно представить в форме (2.13), а соответствующие им преобразования имеют вид (2.11).

Перестановочные соотношения (2.14) позволяют подробно исследовать группу $G_{n\infty}$. Особый интерес представляют бесконечные абелевы подгруппы этой, вообще говоря, неабелевой группы. Им соответствуют бесконечные наборы коммутирующих интегралов движения, играющие, как мы видели, важную роль в вопросе о полной интегрируемости. Нетрудно убедиться, что генераторы $L^{1}_{\alpha\alpha\ldots}$ при фиксированном α и $1=1,2,\ldots,\infty$ коммутируют, т.е. каждая однопараметрическая группа симметрии G_1 порождает бесконечнопараметрическую абелеву группу $G_{1\infty}$. Тем самым, уравнение (2.5) имеет n бесконечных наборов коммутирующих интегралов движения. Если же алгебра группы G имеет абелеву подалгебру с генераторами $L_1,\ldots,L^n_k$ $(k<n)$, то группа $G_{n\infty}$ имеет бесконечную абелеву подгруппу $G^{\alpha}_{k\infty}$ с коммутирующими генераторами $L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ принимают значения $1,\ldots,k$, а $l=1,2,\ldots,\infty$. Таким образом, каждый полный набор интегралов движения порождает бесконечный полный набор, в частности, стандартный набор – бесконечный стандартный набор.

Из формул (2.10) и (2.13) следует, что собственные значения $d^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ высших интегралов движения $L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ суть простые функции собственных значений d_α обычных интегралов L_α, а именно, для N – частичного состояния

$$d^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}=\sum_{i=1}^{N} d^{(i)}_{\alpha_1} d^{(i)}_{\alpha_2}\ldots d^{(i)}_{\alpha_l} \qquad (l=1,2,\ldots,\infty)$$

Вся специфика высших интегралов движения связана с этим свойством.

Нелинейные уравнения, интегрируемые МОЗР, также обладают бесконечными группами симметрии типа $G_{n\infty}$ поскольку их группы симметрии совпадают с группами симметрии соответствующих линейных уравнений. Однако, в то время как для линейных уравнений преобразования симметрии и их генераторы $L^{(l)}_{(\ldots)}$ имеют простой вид (2.11), (2.13), то для нелинейных уравнений они устроены гораздо сложнее (см.,например, (1.4.8) и (1.7.4)). Тем не менее,

если известна обычная группа симметрии G_n, то структурные константы бесконечной группы $G_{n\infty}$ вычисляются по формулам (2.15). Следовательно, структура бесконечной группы симметрии и бесконечных наборов интегралов движения для нелинейных уравнений определяется группой G_n.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Группа симметрии G_5 этого уравнения является пятипараметрической и содержит: 1) пространственно-временные сдвиги $x\to x'=x+a$, $t\to t'=t+b$ с генераторами L_1, L_2, 2) преобразования Галилея $x\to x'=-vt+x$, с генератором L_3 3) преобразования

$$x\to x'=\rho x,\quad t\to t'=\rho^2 t$$
$$u(x,t)\to u'(x',t')=\rho^{-1}u(x,t) \qquad (2.16)$$

с инфинитезимальным оператором $D=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-1$ и 4) градиентные преобразования $u\to u'=e^{i\alpha}u$ с генератором L_5.

Структура бесконечной группы $G_{5\infty}$ симметрии НУШ легко находится из перестановочных соотношений генераторов $L_1,\ldots L_5$. Максимальная абелева подгруппа группы $G_{5\infty}$ состоит из преобразований, порождаемых генераторами $L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$, где $\alpha_i=1,2,5$; $l=1,2,\ldots$, Интегралы движения $L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ $(\alpha_i=1,2,5)$ образуют бесконечный набор, изоморфный набору $\{C_n,\ n=1,2,3,\ldots\}$ приведенному в четвертом разделе 1.

В работе [15] аналогичным образом рассмотрены уравнения Кортевега-де-Вриза и синус-Гордона.

Ш. Бэклунд-преобразования

1. Дифференциальные уравнения, интегрируемые МОЗР, кроме групп симметрии, допускают также преобразования совершенно иного типа. Эти преобразования были обнаружены в теории поверхностей постоянной кривизны еще в прош лом веке /27-28/. Если записать линейный элемент поверхности в виде

$$ds^2 = -\alpha^2(dt^2 + 2\cos u\,dt\,dx + dx^2)$$

где $1/\alpha^2$ – постоянная полная кривизна, то функция $u(t,x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = \sin u \tag{3.1}$$

Каждому решению этого уравнения соответствует поверхность постоянной отрицательной кривизны. Как известно, преобразования симметрии $t \to \lambda t, x \to \lambda^{-1}x, u(t,x) \to u(\lambda t, \lambda^{-1}x)$ переводят одно решение уравнения (3.1) в другое. Бэклунд обнаружил, что новое решение u' (т.е. новую поверхность) можно получать из данного решения u также с помощью соотношений /27/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u' - u) &= 2a\sin\left[\frac{u'+u}{2}\right] \\ \frac{\partial}{\partial t}(u' + u) &= \frac{2}{a}\sin\left[\frac{u'-u}{2}\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

где a – произвольная константа. Действительно, легко проверить, что если u удовлетворяет уравнению (3.1), то и u' удовлетворяет (3.1). Тем самым, преобразование (3.2) переводит поверхность постоянной кривизны в другую поверхность той же самой кривизны. Преобразования типа (3.2) впоследствии стали называть Бэклунд-преобразованиями. (О применении их в дифференциальной геометрии см., например /36/).

Рассмотрим теперь уравнение (3.1) и свойства Бэклунд-

-преобразований безотносительно к теории поверхностей. Основное отличие преобразований (3.2) от преобразований симметрии состоит в том, что преобразованная функция u' не выражена явно через u. Тем не менее Бэклунд-преобразования оказываются эффективным орудием исследования уравнения (3.1) (синус-Гордона).

Используя соотношения (3.2) мы можем по заданному решению u_0 построить бесконечную серию новых решений. Если выбрать начальное $u_0 = 0$, то преобразованная функция, т.е. u определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2a\sin\frac{u}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{a}\sin\frac{u}{2} \tag{3.3}$$

Эти уравнения легко интегрируются. В результате получаем

$$u(t,x) = 4\,\mathrm{arctg}\,\exp\left(ax + \frac{t}{a} + b\right) \tag{3.4}$$

где b – произвольная константа, т.е. односолитонное решение уравнения синус-Гордона. Следовательно, Бэклунд-преобразование B_a (3.2) трансформирует вакуумное решение $u = 0$ в решение, описывающее солитон уравнения (3.1). Если применить преобразование к односолитонному решению, то получим двухсолитонное. Действуя Бэклунд-преобразованием, нужное число раз, получим любое многосолитонное решение. На каждом этапе нам придется решать дифференциальные уравнения всего лишь первого порядка. Кроме преобразования (3.2) имеется также Бэклунд-преобразование, отличающееся от него знаком в правой части. Нетрудно убедиться, что преобразование (обозначим его B_{-a}) уничтожает солитон.

Таким образом, действуя Бэклунд-преобразованиями на тривиальное решение мы получим весь спектр солитонных решений, используя только квадратуры.

Оказывается, что Бэклунд-преобразования позволяют находить новые решения вообще без квадратур. Это становится возможным благодаря коммутативности Бэклунд-преобразований: $B_{a_1} B_{a_2} = B_{a_2} B_{a_1}$. Пусть u_0 некоторое решение уравнения (3.1). Обозначим решения, получающиеся из него действием Бэклунд-преобразований следующим образом: $u_1 = B_{a_1} u_0$, $u_2 = B_{a_2} u_0$, $u_3 = B_{a_1} B_{a_2} u_0 = B_{a_2} B_{a_1} u_0$. Используя соотношения (3.2), включающие поочередно все решения u_0, u_1, u_2, u_3, можно показать, что /34,36,38/.

$$\mathrm{th}\left[\frac{u_3-u_0}{4}\right] = \frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\,\mathrm{th}\left[\frac{u_1-u_2}{4}\right]. \tag{3.5}$$

Соотношение (3.5) выражает нелинейный принцип суперпозиции для уравнения (3.1). Это соотношение дает простой рецепт построения нового решения по двум известным. (Решения u_1 и u_2 отличаются только значением константы a). Равенство (3.5) позволяет также вычислить все многосолитонные решения чисто алгебраически. Действительно, положим $u_0 = 0$, тогда u_1 и u_2 – односолитонные решения вида (3.4) с параметрами a_1 и a_2. Из (3.5) получаем двухсолитонное решение

$$u_3 = 4\,\mathrm{arctg}\left[\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\cdot\frac{\exp(a_1x+\frac{t}{a_1}+b_1)-\exp(a_2x+\frac{t}{a_2}+b_2)}{1+\exp(a_1x+\frac{t}{a_1}+b_1)\exp(a_2x+\frac{t}{a_2}+b_2)}\right]. \tag{3.6}$$

Выбирая далее, в качестве u_0 односолитонное решение (3.4) и учитывая, что соответствующие u_1 и u_2 имеют вид (3.6), находим трехсолитонное решение u_3. Повторяя эту процедуру, можно найти любое решение солитонного типа. Отметим, что многосолитонные решения уравнения (3.1) впервые были найдены именно таким способом /34/.

Достоинства Бэклунд-преобразований (3.2) не исчерпываются возможностью конструирования точных решений.

Как было показано в работе /33/, эти преобразования можно также использовать для построения бесконечного числа законов сохранения.

Рассмотрим для этого (3.2) в качестве формул, определяющих u' как функцию константы a. Предположим, что a мало и будем искать $u'(x,t,a)$ в виде

$$u'(x,t,a) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\,a^n \quad \text{при } a\to 0 \tag{3.7}$$

Подстановка (3.7) во второе уравнение Бэклунд-преобразования дает ($u_t \equiv \partial u/\partial t$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}a^n = -u_t + \frac{2}{a}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n a^n - u\right)\right] \tag{3.8}$$

При $a\to 0$ получаем $u_0 = u$, $u_1 = 2u_t$. Приравнивая коэффициенты при различных степенях a находим рекуррентные соотношения для определения для определения всех u_n. Первые из них равны

$$u_0 = u,\ u_1 = 2u_t,\ u_2 = 2u_{tt},\ u_3 = 2u_{ttt} + \frac{u_t^3}{3},$$
$$u_4 = 2u_{tttt} + 2u_t^2 u_{tt},\ u_5 = 2u_{ttttt} + \tag{3.9}$$
$$+ 3u_t^2 u_{ttt} + 5u_t u_{tt}^2 + \frac{3}{20}u_t^5$$

Нетрудно убедиться, что этот ряд для u' не противоречит первому уравнению Бэклунд-преобразования.

Пусть теперь у нас имеется какой-нибудь закон сохранения, например, закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_x^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}(\cos u - 1) = 0 \tag{3.10}$$

Поскольку Бэклунд-преобразование переводит решение u в решение u' того же самого уравнения, то вместе с (3.10) выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2} u'^2_x\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos u' - 1\right] = 0 \qquad (3.11)$$

Подставим в (3.11) разложение (3.7). Приравнивая нулю выражения перед каждой степенью a получаем бесконечную серию законов сохранения. Плотности первых двух интегралов движения равны

$$T_0 = \frac{1}{2} u_x^2 \ , \qquad (3.12)$$

$$T_1 = 2u_{tttx}u_x + 4u_{ttx}u_{tx} + u_t^2 u_{tx}u_x$$

Первый интеграл T_0, как всегда, обычный интеграл движения. T_1 и остальные – высшие.

Итак, мы видим, что Бэклунд-преобразования позволяют получать обширную информацию о нелинейном уравнении. Поэтому построение преобразований типа (3.2) представляет значительный интерес.

Систематический метод конструирования Бэклунд-преобразований рассматривался в работах /29,30,35/. Проиллюстрируем его на уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F(u) \qquad (3.13)$$

где $F(u)$ пока произвольная функция. Бэклунд-преобразование – это преобразование, переводящее функцию u удовлетворяющую (3.13) в функцию u', также удовлетворяющую (3.13). Функции u и u' в самом общем случае связаны соотношениями

$$\Phi_i(u', u, u'_x, u_x, u'_y, u_y, u'_{xx}, u_{xx}, \ldots) = 0 \qquad (3.14)$$

где $i=1,2,\ldots$. Задача состоит в вычислении функций

Φ_i. Предположим, что система (3.14) имеет вид*)

$$\begin{aligned} u'_x &= P(u', u, u_x, u_y) \ , \\ u'_y &= Q(u', u, u_x, u_y) \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau = u', \ \xi_1 = u, \ \xi_2 = u_x, \ \xi_3 = u_y \ , \\ \xi_4 = u_{xy}, \ \xi_5 = u_{xx}, \ \xi_6 = u_{yy} \ . \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Для того, чтобы u' было решением, должно выполняться условие $u'_{xy} = u'_{yx}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} u'_{xy} &= Q\frac{\partial P}{\partial \tau} + \xi_3 \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + \xi_4 \frac{\partial P}{\partial \xi_2} + \xi_6 \frac{\partial P}{\partial \xi_3} \\ u'_{yx} &= P\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \xi_2 \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} + \xi_5 \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} + \xi_4 \frac{\partial Q}{\partial \xi_3} \ . \end{aligned} \qquad (3.17)$$

Учитывая далее, что u' и u удовлетворяют уравнению (3.13) и предполагая, что P не зависит от ξ_3 а Q не зависит от ξ_2, окончательно получаем

$$\begin{aligned} Q\frac{\partial P}{\partial \tau} + \xi_3 \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + F(\xi_1)\frac{\partial P}{\partial \xi_2} &= F(\tau) \\ P\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \xi_2 \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} + F(\xi_1)\frac{\partial Q}{\partial \xi_3} &= F(\tau) \end{aligned} \qquad (3.18)$$

Любое решение P, Q системы (3.18) задает Бэклунд-преобразование

---

*) Это предположение является, как показывают результаты работы [23], достаточно сильным ограничением.

$$u'_x = P(u',u,u_x)$$
$$u'_y = Q(u',u,u_y) \qquad (3.19)$$

для уравнения (3.13). Ясно, что не для произвольной функции $F(u)$ существуют Бэклунд-преобразования вида (3.19). Возможные $F(u)$ также определяются из уравнений (3.18).

Анализ системы (3.18) показывает /40/, что она имеет решение только, если

$$F''(u) = \nu^2 F(u) \qquad (3.20)$$

т.е. когда

$$F(u) = A\, e^{\nu u} + B\, e^{-\nu u} \qquad (3.21)$$

где A, B и $\nu (\nu \neq 0)$ произвольные комплексные числа или $F(u) = \text{const}\ u$ [x)]. Бэклунд-преобразования при этом имеют вид

$$u'_x = u_x + \frac{2a}{\nu} F\left[\frac{1}{2}(u'+u)\right]$$
$$u'_y = -u_y + \frac{2}{a}\, \text{sh}\left[\frac{\nu}{2}(u'-u)\right] \qquad (3.22)$$

где a – произвольное число.

Таким образом, мы определили класс уравнений, допускающих Бэклунд-преобразования (3.19), и явный вид этих преобразований. Аналогичным способом в работе /42/ были найдены Бэклунд-преобразования и для других уравнений: в частности для уравнения КдВ ($u \equiv -w_x$, λ – произвольное число):

---

x) Бэклунд-преобразования для линейных уравнений мы рассмотрим ниже.

$$w'_x + w_x = 2\lambda^2 - \frac{1}{2}(w'-w)^2 ,$$
$$w'_t + w_t = (w'-w)(w'_{xx} - w_{xx}) - \qquad (3.23)$$
$$- 2(w'^2_x + w'_x w_x + w^2_x)$$

и нелинейного уравнения Шредингера

$$u'_x + u_x = (u-u')\sqrt{4\lambda^2 - |u'+u|^2} ,$$
$$u'_t + u_t = i(u_x - u'_x)\sqrt{4\lambda^2 - |u'+u|^2} + \qquad (3.24)$$
$$+ \frac{1}{2}(u'+u)(|u'+u|^2 + |u'-u|^2) .$$

2. Существует несколько методов конструирования Бэклунд-преобразований. Рассмотренный выше привлекает тем, что он оперирует только с самии уравнением и не требует введения дополнительных структур.

Бэклунд-преобразования можно также строить, исходя из интегрирующих операторов X и T , если они известны. Так были получены Бэклунд-преобразования для большинства интегрируемых уравнений /47,48-53/. Глубокую связь МОЗР и Бэклунд-преобразований мы рассмотрим в следующем разделе.

В терминах МОЗР Бэклунд-преобразования типа (3.22) имеют простой смысл /70,72/. Поскольку солитон соответствует нулю величины $a(\lambda)$, то их действие сводится к порождению у $a(\lambda)$ дополниетльного нуля, т.е. к преобразованию

$$a(\lambda) \to a'(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0^*}\, a(\lambda) . \qquad (3.25)$$

Из свойств величины $a(\lambda)$ ясно, что кроме преобразований (3.25) должны существовать преобразования несолитонного типа. Для уравнений класса (1.3.17) при $\vec{\nu} = 0$ можно показать /52-53/, что эти преобразования $v \to v'$, переводящие решение в решение, имеют вид

$$\left[g(\Lambda)+f(\Lambda)\sigma_3\right]v'+\left[g(\Lambda)-f(\Lambda)\sigma_3\right]v=0 \quad (3.26)$$

где $g(z)$, $f(z)$ – произвольные функции, а интегро – дифференциальный оператор Λ равен

$$\Lambda(v',v)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_3}{i}\frac{\partial}{\partial x}-v_1Iv_1^T\sigma_2-v_2Iv_2^T\sigma_2\right], \quad (3.27)$$

где $v_1=\begin{pmatrix}u_1'\\u_2\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}u_1\\u_2'\end{pmatrix}$.

Величина $R(\lambda,t)$ преобразуется следующим обра – зом

$$R(\lambda,t)\to R'(\lambda,t)=\begin{bmatrix}\frac{f(\lambda)-g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}, & 0\\ 0, & \frac{f(\lambda)+g(\lambda)}{f(\lambda)-g(\lambda)}\end{bmatrix}R(\lambda,t) \quad (3.28)$$

Если обозначить $\rho(z)=2\operatorname{arcth}\left[-\frac{g(z)}{f(z)}\right]$, то преоб– разования (3.26) и (3.28) запишутся в виде

$$\begin{aligned}v'(x,t)&=\exp\left[\rho\left[\Lambda(v',v)\right]\sigma_3\right]v(x,t),\\ R'(\lambda,t)&=\exp\left[\rho(\lambda)\sigma_3\right]R(\lambda,t).\end{aligned} \quad (3.29)$$

Солитонным Бэклунд-преобразованиям соответствуют такие функции f и g, то либо $f+g$, либо $f-g$ имеет нуль.

В формулах (3.26), (3.29) f и g не зависят от времени t и в силу этого v и v'

удовлетворяют одному и тому же уравнению. Если же рас – сматривать функции f и g, зависящие от вре– мени, возникает новый тип преобразований, а именно преоб– разования, переводящие друг в друга решения разных (с раз– ными γ) уравнений. Преобразования такого типа (обоб– щенные Бэклунд-преобразования) позволяют получать инте – ресные функциональные соотношения, инфинитезимальной фор– мой которых являются исходные дифференциальные уравнения /53/.

3. Рассмотрим групповые свойства Бэклунд-преобразо– ваний. Имеется существенное различие между солитонными и несолитонными преобразованиями. Последние, как нетрудно видеть (формула (3.29)), образуют бесконечную непрерыв – ную абелеву группу: "параметром" группы является $\rho(\lambda)$ $\rho=0$ соответствует тождественному преобразованию, $(-\rho)$ – обратному. Если ограничиться функциями $\rho(\lambda)$ разложимыми в ряд Тейлора, то эта группа эквивалентна бесконечнопараметрической абелевой группе. На языке спек– тральных данных группа несолитонных Бэклунд-преобразова– ний – это группа умножения на функции $\xi(\lambda)$, не имею– щие нулей в верхней полуплосеости: $a(\lambda)\to a'(\lambda)=\xi(\lambda)a(\lambda)$

Солитонные Бэклунд-преобразования обладают сущест – венно дискретным характером. Нетрудно убедиться, что кон– станту a в преобразовании (3.2) нельзя рассматри – вать в качестве группового параметра: два последовательно выполненных Бэклунд-преобразования (3.2) соответственно с постоянными a_1 и a_2 не имеют опять вида (3.2), т.е. не существует функции φ такой, что $B_{a_1}B_{a_2}=B_{a_3=\varphi(a_1,a_2)}$. В выражениях (3.2) постоян– ная a играет роль индекса, нумерующего различные Бэклунд-преобразования.

Дискретный характер преобразований (3.2) совершенно очевиден на языке спектральных данных $a(\lambda)$ (см.фор – мулу (3.25)). Значения λ_0 нумеруют различные Бэклунд-преобразования. Из формулы (3.25) также ясно, что Бэклунд-преобразования между собой коммутируют – порядок умноже– ния на функции вида $\frac{\lambda-\lambda_c}{\lambda-\lambda_c^*}$ безразличен.

Итак, Бэклунд-преобразования (3.2) с различными a составляют континуальный набор коммутирующих преобразований $\{B_a, -\infty < a < \infty\}$. Назовем преобразования B_a элементарными. Сами по себе элементарные Бэклунд-преобразования B_a группы не образуют. Однако, если вместе с преобразованиями B_a и тождественным преобразованием E рассмотреть всевозможные повторные Бэклунд-преобразования, т.е. преобразования $B_{a_1} B_{a_2}$, $B_{a_1} B_{a_2} B_{a_3}$, и т.д. то вся совокупность $\{E, B_a, B_{a_1} B_{a_2}, B_{a_1} B_{a_2} B_{a_3}, \ldots\}$ таких преобразований образует группу. (напомним, что $B_a^{-1} = B_{-a}$). Эта бесконечная группа произвольных Бэклунд-преобразований является абелевой и дискретной. Для других уравнений группы солитонных Бэклунд преобразований также суть бесконечные абелевы дискретные группы с континуальным набором элементарных Бэклунд-преобразований.

Тот факт, что различные Бэклунд-преобразования обладают различной структурой – несолитонные Бэклунд-преобразования образуют бесконечномерную непрерывную группу, а солитонные – бесконечную дискретную группу, есть отражение различных свойств решений континуального и дискретного секторов. Коммутативный же характер группы Бэклунд-преобразований связан с полной интегрируемостью нелинейного уравнения.

Заметим, что элементарные Бэкулнд-преобразования B_a можно "расщепить" (см.,например, /36/) Действительно, уравнение (8.1) инвариантно относительно преобразований $x \to x' = \rho x$, $t \to t' = \rho^{-1} t$, $u(x,t) \to u'(x',t') = u(x,t)$ – преобразований Лоренца, записанных в конусных координатах $x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$, $t = \frac{1}{2}(x_0 - x_1)$. Если сделать это преобразование в формулах (8.2), то они перейдут в себя с заменой $a \to \rho a$. Тем самым, преобразования (3.2) с различными постоянными a связаны друг с другом преобразованием Лоренца $\Lambda(\rho)$.

Следовательно, произвольное элементарное Бэклунд-преобразование B_a можно представить в виде $B_a = \Lambda^{-1}(a)\, B_1\, \Lambda(a)$, где B_1 – стандартное Бэклунд-преобразование.

Элементарные Бэклунд-преобразования других нелинейных уравнений также расщепляются в произведения некоторых стандартных и преобразований групп симметрии. Например, для нелинейного уравнения Шредингера представимо следующим образом

$$B_\lambda^{(НУШ)} = \Lambda_4^{(Н)^{-1}}(\lambda)\, B_{\lambda=1}^{(П)}\, \Lambda_4^{(Н)}(\lambda)$$

где $\Lambda_4(\lambda)$ – преобразования (2.16) с параметром λ.

Бэклунд-преобразования построены не только для уравнений с двумя независимыми переменными, но и в многомерном случае /51,73/. Отметим работы /78-81/, в которых продемонстрировано соотношение Бэклунд-преобразований с новыми типами решений классических нелинейных уравнений – инстантонами /78,81/ и монополями /79,80/.

Все свойства Бэклунд-преобразований указывают на глубокую связь теории нелинейных дифференциальных уравнений с теорией нелинейных преобразований.

1У. МОЗР, Бэклунд-преобразования и группы симметрии

1. В предыдущих главах мы видели, что метод обратной задачи рассеяния и метод Бэклунд-преобразований в некоторых отношениях равноценны: и тот и другой позволяют находить точные решения солитонного типа и бесконечные наборы законов сохранения. Оказывается, это не случайно. В работах /44,47,49/ было показано, что каждый из этих методов может быть отображен на другой, а именно: по интегрирующим операторам X и T можно найти Бэклунд-преобразование и обратно, по виду Бэклунд-преобразования восстанавливается линейная спектральная задача.

Рассмотрим в качестве примеров уравнения КдВ, НУШ и уравнение синус-Гордона. Покажем, следуя работе /49/, как, исходя из линейной спектральной задачи

$$X\Psi = 0, \quad T\Psi = 0 \tag{4.1}$$

строить Бэклунд-преобразования. Величина Ψ является двухкомпонентной. Однако поскольку она определяется из уравнений (4.1) с точностью до умножения на произвольное число, то удобно ввести новую однородную переменную $\Gamma = \Psi_1/\Psi_2$. В результате уравнения (4.1) принимают вид

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = u_1 + 2i\lambda\Gamma - u_2\Gamma^2$$
$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = B + 2A\Gamma - C\Gamma^2 \tag{4.2}$$

где A,B,C определены в третьем разделе обзора 1 (1.3.8)-(3.10). Уравнения типа (4.2) называют уравнениями Рикати.

Бэклунд-преобразование, по определению, переводит решение v уравнения, интегрируемого операторами X и T (4.1) в решение v'. В силу соответствия $v \leftrightarrow \Psi$ при этом преобразуется и $\Psi \to \Psi'$. Поскольку v' и v удовлетворяют одному и тому же уравнению, которое есть условие совместности системы (4.1) или (4.2), то ясно, что эта последняя имеет одинаковый вид до и после преобразований. Таким образом Бэклунд-преобразование – это преобразование

$$\Gamma \to \Gamma' = f_1(\Gamma, v), \tag{4.3}$$

$$v \to v' = f_2(\Gamma, v) \tag{4.4}$$

оставляющее систему (4.2) инвариантной. Для того, чтобы найти явный вид Бэклунд-преобразования, достаточно проделать следующее: 1) записать систему (4.2) в переменных Γ' и v', 2) подставить в эту систему выражение Γ' через Γ и v. Получится система уравнений, содержащая Γ, v, v'. 3) Исключить из этой системы

Γ с помощью (4.4). В результате возникает система уравнений на v и v', которая по построению задает Бэклунд-преобразование. Остается, тем самым, найти функции f_1 и f_2. В работе /49/ показано, что они имеют следующий вид:

1) уравнение КдВ

$$\Gamma' = -\Gamma - 2i\lambda$$
$$u'(t,x) = u(t,x) + 2\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma + 2i\lambda) \tag{4.5}$$

2) нелинейное уравнение Шредингера

$$\Gamma' = 1/\Gamma^*$$
$$u'(t,x) = u(t,x) + 2\frac{\Gamma^2\Gamma^*_x - \Gamma_x}{1 + |\Gamma|^4} \tag{4.6}$$

3) уравнение синус-Гордона

$$\Gamma' = 1/\Gamma$$
$$u'(t,x) = u(t,x) - 2\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\Gamma \tag{4.7}$$

Описанная выше процедура дает:

1) уравнение КдВ $(w_x \equiv -u)$

$$w'_x + w_x = 2(i\lambda)^2 - \frac{1}{2}(w' - w)^2$$
$$w'_t + w_t = (w' - w)(w'_{xx} - w_{xx}) - 2(w'^2_x + w'_x w_x + w_x^2) \tag{4.8}$$

2) нелинейное уравнение Шредингера

$$u' + u = (u - u')\sqrt{4(i\lambda)^2 - |u' + u|^2}$$
$$u'_t + u_t = i(u_x - u'_x)\sqrt{4(i\lambda)^2 - |u' + u|^2} + \frac{i}{2}(u' + u)(|u' + u|^2 + |u' - u|^2) \tag{4.9}$$

3) уравнение синус-Гордона

$$u'_x - u_x = 2i\lambda \sin\left(\frac{u'+u}{2}\right)$$

$$u'_t + u_t = \frac{2}{i\lambda} \sin\left(\frac{u'-u}{2}\right) \qquad (4.10)$$

Преобразования (4.8)-(4.10) совпадают с Бэклунд-преобразованиями, которые мы приводили ранее (см.(3.23), (3.24), (3.2). Обратим внимание на то, что роль констант в Бэклунд-преобразованиях (4.8)-(4.10) играет спектральный параметр λ, точнее $i\lambda$. Если учесть, что солитоны соответствуют нулям $a(\lambda)$, расположенным на мнимой оси комплексной плоскости спектрального параметра, то получаем полное совпадение с (3.23), (3.24) и (3.2).

Рассмотрим теперь Бэклунд-преобразования (4.8)-(4.10) в качестве исходных. Ясно, что для восстановления спектральной задачи (4.1) достаточно найти такую функцию $\varphi(\Gamma)$, чтобы подстановка $u' = u + \varphi(\Gamma)$ приводила уравнения, задающие Бэклунд-преобразование, к форме Риккати (типа (4.2)). Тогда, вводя стандартным образом две функции Ψ_1 и Ψ_2 $(\Psi_1/\Psi_2 = \Gamma)$ мы получим линейные уравнения типа (4.1). Очевидно, что (4.5), (4.6) и (4.7) и есть искомые подстановки для преобразований (4.8), (4.9) и (4.10), переводящие их в уравнения (4.2).

В общем случае отыскивать функции $\varphi(\Gamma)$ можно по следующему правилу: рассмотреть сначала уравнения, получающиеся из Бэклунд-преобразований если положить исходное решение равным нулю, $(u = 0)$ (этому уравнению удовлетворяет односолитонное решение*). Затем найти подстановку $u' = Q(\Gamma)$, превращающую это уравнение в линейное. $Q(\Gamma)$ и есть требуемая функция $\varphi(\Gamma)$. Для всех известных Бэклунд-преобразований это правило выполняется.

*) Отметим, что односолитонные решения выделены из остальных тем, что они, кроме уравнений движения, удовлетворяют этому специальному уравнению.

2. Рассмотрим групповые свойства величин, возникающих в методе обратной задачи рассеяния.

Пусть интегрируемое уравнение обладает конечнопараметрической группой симметрии G_n. Естественно потребовать инвариантности относительно этой группы и линейной задачи (4.1), условием совместности которой является исходное уравнение. В систему (4.1) кроме поля u входят спектральный параметр λ и функции Ψ. Трансформационные свойства λ и Ψ определяются из условия инвариантности (4.1) и зависят от явного вида операторов X, T и закона преобразования поля u.

Для уравнений КдВ, НУШ, синус-Гордона, группы симметрии хорошо известны. Исходя из трансформационных свойств поля u и явного вида X, T, (см.(1.3.6)-(3.10) нетрудно убедиться, что спектральный параметр λ и функции $\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}$ преобразуются следующим образом [85]:

Уравнение КдВ:

1) пространственно-временные сдвиги –

$$\lambda \to \lambda' = \lambda \qquad \Psi \to \Psi' = \Psi$$

2) преобразования Галилея –

$$\lambda^2 \to \lambda'^2 = \lambda^2 + \frac{v}{6}, \quad \Psi_1 \to \Psi'_1 = \Psi_1 + i\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + \frac{v}{6}}\right)\Psi_2$$
$$\Psi_2 \to \Psi'_2 = \Psi_2$$

3) преобразования $x \to x' = \rho x$, $t \to t' = \rho^3 t$,

$$\lambda \to \lambda' = \rho^{-1}\lambda, \quad \Psi_1 \to \Psi'_1 = \Psi_1, \quad u \to u' = \rho^{-2} u$$
$$\Psi_2 \to \Psi'_2 = \rho\Psi_2. \qquad (4.11)$$

Нелинейное уравнение Шредингера:

1) при пространственно-временных сдвигах λ и Ψ не преобразуются,

2) преобразования Галилея –

$$\lambda \to \lambda' = \lambda + \frac{v}{4}, \quad \Psi_1 \to \Psi_1' = \exp\left(-\frac{ivx}{4} + \frac{iv^2t}{8}\right)\Psi_1, \quad \Psi_2 \to \Psi_2' = \exp\left(\frac{ivx}{4} - \frac{iv^2t}{8}\right)\Psi_2,$$

3) преобразования (2.16) –

$$\lambda \to \lambda' = \rho^{-1}\lambda \qquad \Psi \to \Psi' = \Psi \tag{4.12}$$

4) градиентное преобразование $(u \to u' = e^{i\alpha}u)$:

$$\lambda \to \lambda' = \lambda, \qquad \Psi_1 \to \Psi_1' = \Psi_1, \qquad \Psi_2 \to \Psi_2' = e^{i\alpha}\Psi_2 \tag{4.13}$$

Уравнение синус–Гордона:

1) пространственно–временные сдвиги – λ и Ψ не меняются,

2) преобразования Лоренца $(x \to x' = \rho x, t \to t' = \rho^{-1}t)$

$$\lambda \to \lambda' = \rho^{-1}\lambda, \quad \Psi \to \Psi' = \Psi.$$

Отметим, что спектральный параметр, как правило, не является скаляром относительно преобразований группы симметрии . Трансформационные свойства λ обеспечивают правильные законы преобразования явных (солитонных) решений. С учетом свойств λ и Ψ, относительно группы симметрии G_n инвариантны также все уравнения МОЗР (треугольное представление, уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко и т.д.) и Бэклунд–преобразования (4.8)–(4.10).

МОЗР можно также сформулировать в таком виде, чтобы инвариантность всех его основных уравнений относительно группы симметрии G_n была явной (очевидной) /82/

В качестве примеров, рассмотрим два релятивистски–инвариантных уравнения в двумерном пространстве–времени:

уравнение синус–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\mu} + m^2 \sin u = 0 \tag{4.14}$$

и уравнение массивной модели Тирринга

$$i\gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - m\Psi - g\gamma_\mu \Psi \cdot \overline{\Psi}\gamma_\mu \Psi = 0 \tag{4.15}$$

где $\mu = 0,1$; Ψ – двухкомпонентное спинорное поле:

γ_μ – двумерные матрицы Дирака ($\gamma_0 = \sigma_1, \gamma_1 = i\sigma_2$)

Релятивистски–инвариантные уравнения (4.14), (4.15) являются условием совместности $[T_\mu, T_\nu] = 0$ релятивистски инвариантной линейной системы

$$T_\mu \Phi = 0 \qquad (\mu = 0,1) \tag{4.16}$$

Для уравнения (4.14) оператор T_μ равен[x)]

$$T_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x^\nu}\sigma_1 + \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\lambda_\mu \sigma_2 + \frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\epsilon_{\mu\nu}\lambda_\nu \sigma_3, \tag{4.17}$$

где $\epsilon_{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор, а постоянный вектор λ_μ, играющий роль спектрального параметра, удовлетворяет условию

$$\lambda_\mu \lambda_\mu = m^2, \tag{4.18}$$

Вектор λ_μ можно представить в виде

$$\lambda_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right) \qquad \lambda_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)$$

где λ – произвольное число. Число λ является спектральным параметром в неинвариантных формулировках линейной задачи (4.16) (1. /18–20/).

В случае массивной модели Тирринга вектор T_μ равен

---

x) Отметим, что, зная одну компоненту вектора T_μ, мы можем из соображений Лоренц–инвариантности восстановить другую.

$$T_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\sqrt{g}}{4}(\bar\Psi\gamma_\mu\xi + \bar\xi\gamma_\mu\Psi)\sigma_1 + \tag{4.19}$$

$$+\frac{i\sqrt{g}}{4}(\bar\Psi\gamma_\mu\xi - \bar\xi\gamma_\mu\Psi)\sigma_2 + \frac{1}{4}(2\bar\xi\gamma_\mu\xi - g\bar\Psi\gamma_\mu\Psi)\sigma_3$$

Спектральный параметр ξ является двухкомпонентным спинором относительно группы Лоренца и удовлетворяет условию

$$\bar\xi\xi = m \quad \text{или} \quad \bar\xi\gamma_\mu\xi\cdot\bar\xi\gamma_\mu\xi = m^2$$

Спинор ξ можно записать в виде

$$\xi = \frac{m}{2}\begin{pmatrix}\lambda^{-1}\\ \lambda\end{pmatrix}$$

где λ – произвольное число. Оно играет роль спектрального параметра в работах /1./30.31/.

Отправляясь от (4.17) и (4.19), можно все уравнения МОЗР записать в явно лоренц-инвариантной форме /82/. Приведем лишь вид высших интегралов движения в переменных типа действие-угол: для уравнения синус-Гордона

$$I^{(n)}_{\mu_1\ldots\mu_n} = \int d^2\lambda\,\delta(\lambda_\nu\lambda_\nu - m^2)\lambda_{\mu_1}\ldots\lambda_{\mu_n}P(\lambda) + \tag{4.20}$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P^i_{\mu_1}\ldots P^i_{\mu_n} \qquad (n=1,3,5,\ldots)$$

Первое слагаемое описывает непрерывный спектр, второе-вклад солитонов ($P^i_\mu - 2$ – импульс солитона).

Учет трансформационных свойств спектрального параметра важен не только для анализа групповой структуры МОЗР и связанных с ним уравнений, но и для практического построения интегрирующих операторов X и T

У. Динамические группы интегрируемых уравнений

Структура групп преобразований, допускаемых дифференциальным уравнением, является важной характеристикой этого уравнения и многообразия его решений. Различным классам уравнений (пространств решений) соответствуют различные группы. Можно провести аналогию с теорией римановых пространств, а именно, с хорошо известной классификацией их по группам движений: каждый класс римановых пространств характеризуется допускаемой им группой. С этой точки зрения класс уравнений, интегрируемых МОЗР, сильно отличается от остальных нелинейных уравнений: первые допускают бесконечные группы симметрии типа $G_{n\infty}$ и бесконечные абелевы группы Бэклунд-преобразований. Группы симметрии $G_{n\infty}$ являются аналогами групп вращений, а Бэклунд-преобразования – аналогами трансляций.

Рассмотрим теперь аналог группы движений – объединение группы симметрии и группы Бэклунд-преобразований. Эта группа (будем называть ее динамической группой) характеризуется тем, что ее преобразования переводят любое решение некоторого дифференциального уравнения в любое другое решение того же уравнения. Тем самым, многообразие решений является однородным пространством динамической группы.

Для вполне интегрируемых уравнений структуру динамической группы можно (и удобно) изучать в тех переменных, в которых эти уравнения линейны, т.е. в переменных типа действие-угол (или спектральных данных). Действительно, переход от исходных переменных к "линеаризующим" переменным является каноническим преобразованием. Структура же динамической группы, так же как структура группы симметрии и группы Бэклунд-преобразований, инвариантна относительно таких преобразований.

Рассмотрим поэтому сначала линейные уравнения /72/. Для произвольного уравнения

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x) = 0 \tag{5.1}$$

из определения динамической группы следует $F(\partial/\partial x)\delta\Psi(x)=0$, где $\Psi \to \Psi' = \Psi + \delta\Psi$ – инфинитезимальное преобразование. Учитывая (5.1), находим что $\delta\Psi(x)$ имеет вид

$$\delta\Psi(x) = a_\alpha \Gamma_\alpha(x)\omega(x) \tag{5.2}$$

где a_α – параметры преобразований, Γ_α – дифференциальные операторы, коммутирующие с F ($[F(\frac{\partial}{\partial x}), \Gamma_\alpha]=0$), $\omega(x)$ – произвольное решение уравнения (5.1). Нетрудно убедиться, что преобразование (5.2) можно представить в виде комбинации двух типов преобразований

$$\text{а)}\quad \delta\Psi(x) = a_\alpha\, \Gamma_\alpha(x)\, \Psi(x), \tag{5.3}$$

$$\text{в)}\quad \delta\Psi(x) = \omega(x)\, . \tag{5.4}$$

Преобразования (5.3) – это преобразования группы симметрии, записанные в инфинитезимальной форме. Как мы видели во втором разделе, группа симметрии уравнение (5.1) является бесконечной и принадлежит к типу $G_{n\infty}$. Отметим, что решение $\Psi = 0$ инвариантно относительно преобразований (5.3).

Преобразования (5.4) также образуют бесконечную группу, т.к. $\omega(x)$ – произвольное решение уравнения (5.1), а число независимых решений такого уравнения бесконечно. Преобразование (5.4) можно представить в виде

$$\delta\Psi(x) = \{B_\omega\, ,\, \Psi(x)\}\, , \tag{5.5}$$

где

$$B_\omega = -\int d^{N-1}x\; \omega(x)\; \pi(x)\, , \tag{5.6}$$

Здесь $\pi(x)$ – канонический импульс. Оператор B_ω является генератором преобразований (5.4), образующих в силу $\{B_\omega, B_{\omega'}\} = 0$ бесконечную абелеву группу, кото-

рую мы будем называть группой Бэклунд-преобразований (по прямой аналогии с Бэклунд-преобразованиями разделов Ш и IУ). Инвариантность уравнения (5.1) относительно группы Бэклунд-преобразований является, очевидным образом, следствием линейности уравнения по полю Ψ, а абелевость этой группы (и соответствующей алгебры) – математической формулировкой линейного принципа суперпозиции.

Бесконечную группу преобразований (5.4) можно рассматривать как бесконечно-параметрическую абелеву группу. Для этого надо разложить $\omega(x)$ (произвольное решение уравнения (5.1)) по полному набору решений. В качестве базиса в пространстве решений можно выбрать собственные функции любого полного набора интегралов движения. Для трансляционно-инвариантных уравнений удобным является базис из собственных функций оператора импульса, т.е. из плоских волн e^{ipx}. В этом базисе

$$\omega(x) = \int d^N p\; \delta\left[\det F(ip)\right] \omega_p e^{-ipx} \tag{5.7}$$

и следовательно[*)]

$$B_\omega = \int d^N p\; \omega_p\, B_p\, , \tag{5.8}$$

где

$$B_p = \int d^{N-1}x\; e^{-ipx}\, \pi(x)\, , \tag{5.9}$$

Таким образом, произвольное Бэклунд-преобразование (5.5) есть суперпозиция элементарных Бэклунд-преобразований с генераторами B_p и параметрами преобразований ω_p $(-\infty < \omega_p < \infty)$. В силу (5.9) $\{B_p, B_{p'}\} = 0$ т.е. группа B абелева. Для элементарного Бэклунд-

---

*) В этой и других формулах этого раздела подынтегральные выражения содержат стандартный множитель $\delta(\det F(ip))$ где $\delta(\ )$ – дельта-функция Дирака.

преобразования

$$\delta_p\Psi(x) = \omega_p\{B_p,\Psi(x)\} = \omega_p e^{-ipx} \qquad (5.10)$$

Его действие, тем самым, состоит в добавлении к первоначальному решению $\Psi(x)$ плоской волны с импульсом p и амплитудой, являющейся при фиксированном импульсе параметром преобразования $(-\infty < \omega_p < \infty)$.

Преобразование (5.10) можно также представить в виде дифференциального уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\Psi'(x) - \Psi(x)\right] = p_\mu\left[\Psi'(x) - \Psi(x)\right] \qquad (5.11)$$

где $\det F(ip)=0$. В предыдущих разделах Бэклунд-преобразования приводились именно в такой форме.

Аналогично и для других базисов $\{\xi_i\}$ пространства решений: произвольное Бэклунд-преобразование является суперпозицией бесконечного числа элементарных B_i, действие которых сводится к добавлению к исходному решению элемента базиса $\xi_i(x)$ с амплитудой, которая есть параметр преобразования. Переходя от одного базиса $\xi_i(x)$ в пространстве решений к другому мы соответственно переходим от одного вида элементарного Бэклунд-преобразования к другому. Очевидно, что генераторы элементарных Бэклунд-преобразований в различных базисах связаны между собой линейными преобразованиями.

Итак, динамическая группа D линейного уравнения является бесконечной и содержит в качестве подгрупп бесконечномерную группу симметрии типа $G_{n\infty}$ и бесконечную непрерывную абелеву группу B Бэклунд-преобразований. Генераторы B_i элементарных Бэклунд-преобразований вместе с генераторами L_α группы симметрии $G_{n\infty}$ образуют алгебру группы D. Перестановочные соотношения этой алгебры нетрудно найти, исходя из явного вида генераторов (см.формулы (5.9) и (2.13)). Перестановочные соотношения генераторов группы симметрии приведены в разделе П (см.(2.14)). Генераторы элементарных

Бэклунд-преобразований коммутируют между собой $\{B_p, B_{p'}\}=0$. Остальные перестановочные соотношения имеют вид

$$\{B_p, L_\alpha\} = \mathcal{D}_\alpha(p) B_p \qquad (5.12)$$

где $\mathcal{D}_\alpha(p)$ – инфинитезимальные операторы группы $G_{n\infty}$ в импульсном представлении. При другом выборе элементарных Бэклунд-преобразований перестановочные соотношения B_i и L_α выглядят аналогично (5.12).

Рассмотрим теперь нелинейные вполне интегрируемые уравнения. В "линеаризующих" переменных к ним полностью применимы приведенные выше рассуждения. Надо только учесть, что кроме континуального набора переменных, имеется дискретный набор переменных. Тем самым, дополнительно к бесконечной непрерывной группе Бэклунд-преобразований возникает группа Бэклунд-преобразований дискретного сектора. Ясно, что эта группа является бесконечной абелевой дискретной группой с континуальным набором элементарных Бэклунд-преобразований: каждое элементарное Бэклунд-преобразование добавляет в спектр одну дискретную переменную (один нуль в $a(\lambda)$). Если, уравнение допускает различные типы дискретных переменных, то им соответствуют различные типы элементарных Бэклунд-преобразований. Для уравнения синус-Гордона имеется, например, два типа дискретных переменных: один описывает солитоны, другой – двойные солитоны и тем самым, два типа дискретных Бэклунд-преобразований.

Элементарные Бэклунд преобразования из различных секторов коммутируют. Поэтому полная группа B Бэклунд-преобразований вполне интегрируемого уравнения является прямым произведением $B = B_k \otimes B_g$, где B_k – бесконечная абелева непрерывная группа Бэклунд-преобразований континуального сектора, и B_g – бесконечная абелева дискретная группа Бэклунд-преобразований дискретного (солитонного) сектора.

При переходе к исходным переменным структура динамической группы сохраняется, в частности, сохраняется свойство $B = B_k \circledast B_g$. В полевых переменных элементарные Бэклунд-преобразования задаются нелинейными дифференциальными соотношениями: солитонные Бэклунд-преобразования – формулами типа (4.8)–(4.10), несолитонные Бэклунд-преобразования имеют вид (3.29).

Таким образом, любое вполне интегрируемое уравнение обладает бесконечной динамической группой, содержащей в качестве подгрупп бесконечномерную группу симметрии и бесконечную абелеву группу Бэклунд-преобразований. Динамическая группа действует на пространстве решений транзитивно и полностью характеризует его. Поскольку многообразие решений вполне интегрируемого уравнения является однородным пространством динамической группы, то информация, содержащаяся в уравнении совпадает с информацией, содержащейся в его динамической группе.

В силу этого, вполне интегрируемую полевую систему можно описывать либо на языке дифференциального уравнения, либо на языке динамической группы. Эти две формулировки дают два различных, но эквивалентных способа исследования вполне интегрируемых систем.

В этом отношении полевые вполне интегрируемые системы являются бесконечными (по числу степеней свободы) аналогами таких систем с конечным числом степеней свободы, как атом водорода, гармонический осциллятор и т.д. /88,89/. И те и другие обладают кроме "явной" группы симметрии, скрытыми группами. Для систем с конечным числом степеней свободы – это конечные группы Ли (для атома водорода – $SO(4)$, $SO(2,4)$, для осциллятора – $SU(3)$, $SU(1,3)$. Для вполне интегрируемых систем с бесконечным числом степеней свободы – бесконечные группы ("скрытые" группы симметрии типа $G_{n\infty}$, бесконечные динамические группы).

Отметим, что для систем с коечным числом степеней свободы развиты методы их исследования, основанные на использовании алгебраической структуры динамических групп /88,89/. Аналогичные методы могут быть, по-видимому, развиты и для систем с бесконечным числом степеней свободы, в частности, для вполне интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений.

Интегрируемое дифференциальное уравнение можно получить отправляясь от динамической группы, чисто групповым методом. А именно, вполне интегрируемая теория может быть получена в результате нелинейной (Намбу-Голдстоуновской) реализации симметрии относительно динамической группы D с подгруппой $G_{n\infty}$ в качестве подгруппы стабильности вакуума (решения $\Psi = 0$) [75].

VI. Интегралы движения и группы симметрии в квантовой теории

1. Переход к квантовой теории не представляет проблемы для свободных полей. В классической теории и обычные и высшие интегралы движения являются билинейными функционалами полей. Поэтому, выполняя стандартную процедуру – замену обычного произведения полей на нормальное произведение (см.,например /1,12/) – мы приходим к хорошо определенным операторам. Структура бесконечной группы симметрии $G_{n\infty}$ при этом не меняется: в перестановочных соотношениях (2.14) вместо скобок Пуассона возникают коммутаторы. Квантовые поля преобразуются следующим образом

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = U(\omega)\Psi(x)U^{-1}(\omega), \tag{6.1}$$

где

$$U(\omega^l) = \exp\left(i\omega^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l} L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}\right)$$

и $\omega^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ – параметры преобразований. Перестановочные соотношения генераторов $L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$ (они даются формулой (1.2.5) с заменой AB на $:AB:$) с полями $\Psi(x)$ имеют вид ($l = 1,2,3,\ldots$):

$$\left[\Psi(x), L^{(l)}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}\right] = (-1)^l i D_{\alpha_1}(x)\ldots D_{\alpha_l}(x)\Psi(x), \tag{6.2}$$

Например, для операторов $P^{(m)}_{\mu_1\ldots\mu_{2m+1}}$

$$\left[\Psi(x),\ P^{(m)}_{\mu_1\ldots\mu_{2m+1}}\right]=(-1)^m\,\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{\mu_1}\ldots\partial x^{\mu_{2m+1}}}\,\Psi(x). \qquad (6.3)$$

Из соотношения (6.2) и предположения о инвариантности вакуума $|0\rangle$ ($L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}|0\rangle=0$) вытекает бесконечная система уравнений для вакуумных средних $W(x_1,\ldots,x_p)=\langle 0|\Psi(x_1)\ldots\Psi(x_p)|0\rangle$:

$$\left[D_{\alpha_1}(x_1)\ldots D_{\alpha_l}(x_1)+\ldots+D_{\alpha_1}(x_p)\ldots D_{\alpha_l}(x_p)\right]\times$$
$$(\alpha_i=1,\ldots,n;\ \ell=1,2,\ldots;\ p=1,2,\ldots)\ \times W(x_1,\ldots,x_p)=0, \qquad (6.4)$$

В частности, для вещественного скалярного поля система (6.4) выглядит следующим образом

$$\left(P^1_{\mu_1}\ldots P^1_{\mu_{2m+1}}+\ldots+P^p_{\mu_1}\ldots P^p_{\mu_{2m+1}}\right)W(p_1,\ldots,p_p)=0, \qquad (6.5)$$

где

$$W(p_1,\ldots,p_p)=\int dx_1\ldots dx_p\,W(x_1,\ldots,x_p)\exp(-ip_1x_1-\ldots-ip_px_p).$$

Бесконечная система уравнений (6.5) легко решается. Если $W(x)=\langle 0|\Psi(x)|0\rangle=0$, то

$$W(p_1,\ldots p_{2p})=\sum_{i,j}W(p_1,p_i)\ldots W(p_j,p_{2p}) \qquad (6.6)$$

где $W(p_1,p_2)=\delta(p_1+p_2)\tilde{W}(p_1,p_2)$ ($\tilde{W}$ – произвольная функция), и $\sum$ обозначает суммирование по всевозможным разбиениям четного числа импульсов на независимые пары.

Таким образом, требование инвариантности теории относительно бесконечной группы преобразований (6.1) приводит к распадению произвольной вайтмановской функции в произведение двухточечных. Для свободных полей, этот результат, конечно, представляет только методический интерес.

Собственные значения высших интегралов движения для произвольного N -частичного состояния $|k_1,\ldots,k_N\rangle$ легко могут быть найдены из соотношений типа (6.2), (6.3). В частности, для величин $P^{(m)}_{\mu_1\ldots\mu_{2m+1}}$ имеем

$$P^{(m)}_{\mu_1\ldots\mu_{2m+1}}|k_1,\ldots,k_N\rangle=\sum_{i=1}^{N}k^i_{\mu_1}\ldots k^i_{\mu_{2m+1}}|k_1,\ldots,k_N\rangle \qquad (6.7)$$

2. В квантовой теории свободных полей кроме бесконечной группы симметрии, хорошо определены бесконечная абелева группа Бэклунд-преобразований и динамическая группа. Обратим внимание на то, что для полей с полуцелым спином генератор B_p элементарных Бэклунд-преобразований является спинором по отношению к группе Лоренца. Поэтому для того, чтобы сохранить правильную связь спина и статистики для полей с целым спином B_p должны коммутировать, а для полей с полуцелым спином – антикоммутировать.

Итак, перестановочные соотношения генераторов динамической группы D имеют вид

$$\left[P_\mu,\ P_\rho\right]_-=0,\qquad \left[B_q,\ P_\mu\right]_-=q_\mu B_q \qquad (6.8)$$
$$\left[B_p,\ B_{p'}\right]_{\mp}=0$$

плюс коммутационные соотношения остальных генераторов группы $G_{n\infty}$ с B_p. Заметим, что для фермионов (знак +) динамическая группа является супергруппой.

В классической теории многообразие решений линейного уравнения есть, как мы видели, однородное пространство динамической группы. Здесь мы покажем, что в квантовой теории пространство состояний свободного поля является пространством одного неприводимого бесконечномерного представления группы D /84/.

Для построения представлений динамической группы необходимо, как обычно, выбрать полный набор коммутирующих генераторов. Общие собственные вектора этих генераторов будут составлять базис пространства представления, а собственные значения – нумеровать его. Из перестановочных соотношений (6.8) видно, что в случае полей с целым спином для динамической группы D существует по крайней мере два таких набора. Первый состоит из операторов импульса P_μ и коммутирующих с P_μ генераторов группы $G_{n\infty}$, т.е. из генераторов максимальной абелевой подгруппы группы $G_{n\infty}$. Поскольку, однако, собственные значения "высших" генераторов есть простые функции (степени) собственных значений P_μ, то достаточно рассмотреть только генераторы P_μ. Второй набор состоит из генераторов B_p элементарных Бэклунд–преобразований. Для фермионов естественно имеется только первая возможность.

Ограничимся для простоты теорией скалярного поля. Рассмотрим базис из собственных векторов оператора импульса P_μ

$$P_\mu \,|p\rangle = p_\mu \,|p\rangle \,. \qquad (6.9)$$

Предположим, что существует вектор $|0\rangle$ такой, что

$$P_\mu \,|0\rangle = 0 \,. \qquad (6.10)$$

Из соотношений (6.8)–(6.10) вытекает

$$P_\mu \, B^+_q \,|p\rangle = (p_\mu + q_\mu)\, B^+_q \,|p\rangle \,,$$
$$P_\mu \, B_q \,|p\rangle = (p_\mu - q_\mu)\, B_q \,|p\rangle \,, \qquad (6.10)$$
$$P^2 \, B^+_q \,|0\rangle = m^2 B^+_q \,|0\rangle \,.$$

Таким образом, состояние $B^+_q\,|0\rangle$ является одно – частичным, а операторы B^+_q и B_q (генераторы элементарных Бэклунд–преобразований)–операторами рождения и уничтожения частицы. Нетрудно убедиться, что векторы

$$|0\rangle,\ B^+_{p}|0\rangle,\ B_p|0\rangle,\ B^+_{p_1}B^+_{p_2}|0\rangle,\ B_{p_1}B^+_{p_2}|0\rangle,\ B^+_{p_1}B_{p_2}|0\rangle,\ B_{p_1}B_{p_2}|0\rangle,\ \ldots$$

образуют базис неприводимого бесконечномерного представления группы D. Тем самым, пространство представления

динамической группы имеет вид

$$|0\rangle \oplus B|0\rangle \oplus B^+|0\rangle \oplus B^+|0\rangle \otimes B^+|0\rangle \oplus B|0\rangle \otimes B^+|0\rangle \oplus \ldots \qquad (6.12)$$

где $\oplus$ обозначает прямую сумму, а $\otimes$ – прямое произведение. В случае лоренц–инвариантных теорий, выделяя положительно и отрицательно–частотные части в генераторе B и делая обычную переинтерпретацию, мы можем избавиться от отрицательных энергий.

Легко видеть, что конструкция (6.12) совпадает с хорошо известной в теории квантовых полей конструкцией – пространством Фока, т.е. пространством состояний свободного квантового поля (1./12/).

Мы получили, таким образом, фоковское представление динамической группы. Если же в качестве базиса выбрать собственные вектора оператора B_p, то учитывая, что B_p есть линейная комбинация обычных операторов рождения и уничтожения, придем к так называемому когерентному представлению. Подобные построения легко переносятся на случай любого свободного поля.

Все эти результаты справедливы и для нелинейных вполне интегрируемых уравнений, если рассматривать их в переменных типа действие–угол. При этом добавляются лишь операторы B_i элементарных Бэклунд–преобразований, соответствующие дискретному спектру. Они имеют смысл операторов рождения и уничтожения солитонов. Квантование интегрируемого уравнения в исходных переменных является достаточно сложной задачей (см.,например, [90–92]).

УП. Пример нелинейной системы с бесконечной группой симметрии

Здесь мы рассмотрим пример достаточно интересной нелинейной системы, обладающей бесконечным набором высших интегралов движения, и тем не менее не интегрируемой полностью /11/.

Этот пример – теория сверхпроводимости в приближении Бардина–Купера–Шриффера. Уравнения движения модели, являющиеся следствием ряда динамических предположений имеют вид /93/:

$$i\,\frac{da_s(\vec p,t)}{dt} = \left[\frac{\vec p^{\,2}}{2m} - \mu\right] a_s(\vec p,t) - \tag{7.1}$$

$$-\frac{1}{V}\sum_{\vec p',s} I(\vec p,\vec p\,')a^+_{s'}(-\vec p,t)a_{-s'}(-\vec p\,',t)a_{s'}(\vec p\,',t),$$

где $a_s(\vec p,t)$ – фермионный оператор, $\vec p$ – трехмерный импульс, s – проекция спина, μ – химический потенциал, V – объем, $I(\vec p,\vec p\,')$ – некоторая функция.

Нетрудно убедиться, что уравнения (7.1) (и соответствующий им гамильтониан H) инваринатны относительно преобразований

$$a_s(\vec p,t) \to a'_s(\vec p,t) = e^{if(\vec p,s)}\, a_s(\vec p,t), \tag{7.2}$$

где $f(\vec p,s)$ – произвольная вещественная нечетная функция своих аргументов ($f(-\vec p,-\vec s)=-f(\vec p,s)$). Преобразования (7.2) образуют бесконечную группу. Разлагая функцию $f(\vec p,s)$ в формальный ряд Тейлора по степеням импульса p_i ($i=1,2,3$) и проекции спина s, убеждаемся, что группа преобразований (7.2) эквивалентна бесконечнопараметрической абелевой группе

$$a_s(\vec p,t) \to a'_s(\vec p,t) = \exp\left(i\alpha^m_{i_1\dots i_n} p_{i_1}\cdots p_{i_n} S^m\right) a_s(\vec p,t), \tag{7.3}$$

$$(m,n=0,1,2,\dots;\ n+m=1,3,5,\dots)$$

где $\alpha^m_{i_1\dots i_n}$ (коэффициенты разложения функции $f(\vec p,s)$) – параметры преобразований).

Генераторы $T^m_{i_1\dots i_n}$ преобразований (7.3) равны

$$T^m_{i_1\dots i_n} = \frac{1}{2}\sum_{\vec q,s} q_{i_1}\cdots q_{i_n} S^m\left\{a^+_s(\vec q,t)a_s(\vec q,t) - a^+_{-s}(-\vec q,t)a_{-s}(-\vec q,t)\right\}. \tag{7.4}$$

Они образуют бесконечный набор сохраняющихся величин для рассматриваемой системы. Более того, не зависит от времени величина[x)] $a^+_s(\vec q,t)a_s(\vec q,t) - a^+_{-s}(-\vec q,t)a_{-s}(-\vec q,t)$ моментами которой являются $T^m_{i_1\dots i_n}$.

Итак, нелинейное уравнение (7.1) обладает бесконечным набором высших интегралов движения ($n > 1$). Тем не менее динамика системы не тривиальна. Это связано с тем, что набор интегралов (7.4) не является полным: он не содержит высших интегралов движения, индуцированных гамильтонианом. Нелинейные уравнения типа (7.1) естественно называть частично интегрируемыми.

Учет инвариантности уравнений движения (7.1) относительно бесконечной группы преобразований (7.2) приводит к ряду следствий динамического характера.

Перестановочные соотношения генераторов $T^m_{i_1\dots i_k}$ с операторами $a_s(p,t)$ имеют вид

$$\left[T^m_{i_1\dots i_n}, a_s(\vec p,t)\right] = p_{i_1}\cdots p_{i_n} s^m a_s(\vec p,t). \tag{7.5}$$

Предполагая инвариантность основного состояния относительно преобразований (7.2) и используя (7.5) находим уравнения для функций Грина $\Gamma(\vec p_1 s_1,\dots,\vec p_N s_N) = \langle a^+_{s_1}(\vec p_1,t)\dots a_{s_N}(\vec p_N,t)\rangle$:

$$\Big(-p^1_{i_1}\cdots p^1_{i_n}S^m_1 \pm \dots \pm p^l_{i_1}\cdots p^l_{i_n}S^m_l \pm \dots \tag{7.6}$$

$$\dots + p^N_{i_1}\cdots p^N_{i_n}S^m_N\Big)\,\Gamma(\vec p_1 s_1,\dots,\vec p_l s_l,\dots \vec p_N s_N) = 0$$

где $n=0,1,2\dots$; $m=0,1,2,\dots$; $n+m=1,3,5,\dots$ Знак "+" перед l -тым членом соответствует оператору $a_{s_l}(\vec p_l,t)$ в $\Gamma(\dots)$, знак "–" – оператору $a^+_{s_l}(\vec p_l,t)$. Из уравнений (7.6) следует, что $\Gamma(\dots)$ равны

[x)] Этот факт был замечен в работе /94/.

$$\Gamma(\vec{p}_1 s_1, \ldots, \vec{p}_{2N} s_{2N}) = \sum \delta(-\vec{p}_1 \pm \vec{p}_2)\,\delta(-s_1 \pm s_2) \ldots$$

$$\ldots \delta(\pm\vec{p}_l \pm \vec{p}_{l+1})\,\delta(\pm s_l \pm s_{l+1}) \ldots \tilde{\Gamma}(\vec{p}_1 s_1, \ldots, \vec{p}_2\, p_2) \tag{7.7}$$

где $\tilde{\Gamma}(\vec{p}_1 s_1, \ldots, \vec{p}_2\, s_2)$ – произвольные функции.

Заметим далее, что операторы рождения и уничтожения куперовской пары $a_s^+(\vec{p},t)\,a_{-s}^+(-\vec{p},t)$ и $a_{-s}(-\vec{p},t)\,a_s(\vec{p},t)$ инвариантны относительно преобразований (7.2) и, следовательно, во всех инвариантных выражениях фигурируют именно такие комбинации, а не операторы $a_s^+(\vec{p},t)$, $a_s(\vec{p},t)$ по отдельности. Переход к квазичастицам (преобразование Боголюбова) не нарушает симметрии относительно группы (7.2).

С другой стороны, можно показать, что требование инвариантности четырехфермионного гамильтониана относительно преобразований (7.2) (и градиентных преобразований) фиксирует гамильтониан уравнений (7.1) с точностью до перенормировки кинетического члена.

Таким образом, бесконечная группа симметрии (7.2) несет существенную информацию о рассматриваемой модели.

<u>З а к л ю ч е н и е</u>.

Мы видим, таким образом, что группы симметрии отражают глубокие свойства интегрируемых уравнений, в частности, теория, описываемая интегрируемым уравнением может быть сформулирована на групповом языке как теория преобразований.

Бесконечные группы симметрии интегрируемых уравнений существенно отличаются от обычных кинематических групп симметрии. Если переход от одной кинематической группы к другой, более широкой (например, переход от группы Пуанкаре к конформной группе, к группам суперсимметрии и т.п., см./95/) можно представлять как движение вширь: растет число полей и квантовых чисел, то переход от конечной группы Ли G_n симметрии к бесконечной группе $G_{n\infty}$

соответствует движению вглубь: число полей и квантовых чисел не изменяется, однако, группа несет все большую информацию о динамике системы.

В заключении мне хотелось бы выразить глубокую благодарность Ю.Б.Румеру за постоянное внимание и многочисленные полезные обсуждения.

Литература:

1. Scott A.C., Chu F.Y.E., McLanghlin D.W., Proc. I.E.E.E. (1973), v. 61, p. 1449.
2. Захаров В.Е., "Метод обратной задачи рассеяния", гл. в книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой", 1975, Наука.
3. Backlund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and their Applications, Ed.R.Miura, Lecture Notes in Mathematics (1976). v. 515.
4. Ablowitz, M.S., Stud. Appl. Math. (1978) v. 58, p. 17.
5. Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, Research Notes in Mathematics, 26, Ed. by F.Calogero, London, 1978.
6. "Solitons", Eds.R.Bullough, R.Caudrey, Springer-Verlag (1979).
7. Б.Г.Конопельченко, Законы сохранения и группы симметрии интегрируемых уравнений 1., препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-23 (1980).
8. В.И.Арнольд, Математические методы классической механики, 1974, Наука.

Группы симметрии.

9. Kumei S., J.Math. Phys.,(1975),v.16,p.2461.
10. Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, № 76-50 (1976)
11. Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, № 76-59 (1976)
12. Н.Х.Ибрагимов, Р.Л.Андерсон, ДАН СССР (1976), т.227, стр.539.

13. Н.Х.Ибрагимов, ДАН СССР (1977), т.230, стр.26.
14. Ibragimov N.H., Anderson R.L., J. Math. Anal. Appl., (1977), v. 59, p. 145.
15. Конопельченко Б.Г.,Яд.физ.(1977), т.26, стр.658.
16. Olver R., J. Math. Phys., (1977),v.18,p.1212.
17. Gonzaler-Gascon F.,J.Math.Phys.,(1977), v.18, p. 1763.
18. Kumei S., J. Math. Phys. (1977), v. 18, p. 256; (1978), v.19, p. 195.
19. Wadati M., Stud. Appl. Math., (1978), v. 59, p. 153.
20. Leroy B., Lett. Nuovo Cim., (1978), v. 22, p. 17.
21. Л.В.Овсянников, "Групповой анализ дифференциальных уравнений", Наука,1978.
22. Н.Х.Ибрагимов, Шабат А.Б., ДАН СССР (1979), т.244, стр.56.
23. А.В.Жибер, А.Б.Шабат, ДАН СССР, (1979), т.247 стр.1103.
24. Н.Х.Ибрагимов, А.Б.Шабат, Функц. анализ и его приложения (1980), т.14, вып.1, стр.25.
25. Конопельченко Б.Г., Мохначев В.Г., Ядерн.физ. (1979), т.30, стр.559.
26. Конопельченко Б.Г., Мохначев В.Г., препринт ИЯФ СО АН СССР 79-35 (1979),J.Phys.A(London)(in press)

Бэклунд-преобразования

27. Bäcklund A.V., Lund Universitëts Arsskrift (1875), v. 10; ibid. (1883), v. 19.
28. Bäcklund A.V., Math. Ann. (1876), v. 9, p. 297; ibid. (1882), v. 19, p. 387.

29. Clairin J., Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (1903), v. 52^e Ser., p. 437.

30. Coursat E., Le problème de Backlund, Memorial Sci.Math.Frasc.v.6, Gauthier-Villars,

31. Kochendörfer A., Seeger A., Z.Phys.(1950), v. 127, p. 533.

32. Seeger A., Kochendörfer A., Z.Phys.,(1951), v. 130, p. 321.

33. Loewner C., J.Analyse Math., (1952), v.2, p.21

34. Seeger A., Donth H., Kochendörfer A., Z.Phys. (1953), v. (134), p. 173.

35. Forsyth A.R., Theory of Differential Equations, Dover, New York (1959), v. 6, chap.21.

36. Eisenhart L.P., A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover Publications, New York (1960), p. 278-290.

37. Lamb G.L. Jr. Phys. Lett. (1967), v. 25A, p. 181; ibid. 1969), v. 29A, p. 507.

38. Lamb G.L., Rev. Mod. Phys. (1971), v.43, p. 99.

39. Barnard T., Phys. Rev. (1973), v.A7, 373.

40. McLaughlin D.W., Scott A.C., J.Math.Phys. (1973), v. 14, p. 1817.

41. Wahlquist H.D., Estabrook F.B., Phys. Rev. Lett. (1973), v. 31, p. 1386.

42. Lamb G.L., J. Math. Phys., (1974), v. 15, p. 2157.

43. Hirota R., Prog. Theor. Phys. (1974), v.52, p. 1498.

44. Chen H.-H., Phys. Rev. Lett., (1974), v.33, p. 925.

45. Wadati M., J. Phys. Soc. Japan.(1974), v.36, p. 1498.

46. Steudel H., Ann. Physik (1975), v. 32, PP. 214, 445.

47. Wadati M., Sanuki H., Konno K., Prog. Theor. Phys., (1975), v.53, p. 419.

48. Satsuma J., Progr. Theor. Phys. (1975), v. 53, p. 585.

49. Konno K., Wadati M., Prog. Theor. Phys. (1975), v. 53, p. 1652.

50. Chen H.-H., Liu C.-S., J. Math. Phys.(1975), v. 16, p. 1428.

51. Chen H.-H., J. Math. Phys. (1975), v. 16, p. 2382.

52. Calogero F., Lett. Nuovo Cim. (1975), v.14, p. 537.

53. Calogero F., Degasperis A., Lett. Nuovo Cim. v. 16, p. 181.

54. Byrnes S.G., J. Math. Phys., (1976), v.17, p. 836.

55. Hirota R., Satsuma J., Prog. Theor. Phys. (1976), v. 55, p. 2037.

56. Kodama Y., Wadati M., Prog. Theor. Phys. (1976), v. 56, p. 342.

57. Izergin A., Stehr J., preprint DESY 76/60 (1976).

58. Aoyama S., Kodama Y., Prog. Theor. Phys., (1976), v. 56, p. 1970.

59. Dodd R.K., Bullough R.K., Proc. Roy Soc. (Lond.) (1976), v.351A, p. 499.

60. Watanabe Y., J. Phys. Soc. Japan (1976), v. 41, p. 727.

61. Lamb G.L., Jr., Lecture Notes in Mathematics, (1976), v. 515, p. 69.
62. Scott A.C., Lecture Notes in Mathematics (1976), v. 515, p. 80.
63. Wahlquist H.D., Lecture Notes in Mathematics (1976), v. 515, p. 162.
64. Newell A.C., Lecture Notes in Mathematics, (1976), v. 515, p. 228.
65. Chen H.-H., Lecture Notes in Mathematics, (1976), v. 515, p. 241.
66. Flaschka H., McLaughlin D.W., Lecture Notes in mathematics (1976), v. 515, p. 253.
67. Hopf E., Commun. Pure Appl. Math. (1950) v. 3, p. 201.
68. Cole J.D., Quart. Appl. Math. (1951), v.9, p. 225.
69. Miura R.M., J. Math. Phys., (1968), v. 9, 1202.
70. Dodd R.K., Bullough R.K., Phys. Lett. (1977 v. 62A, p. 70.
71. Case K.M., Chiu S.C., J. Math. Phys. (1977) v. 18, p. 2044.
72. Конопельченко Б.Г., препринт ИЯФ СО АН СССР 77-53 (1977)
73. McCarthy P.J., Lett. Math. Phys. (1978),v. p. 167; ibid, v. 2, p. 493.
74. Crampin M., McCarthy P.J., Lett. Math.Phys. (1978), v. 2, p. 303.
75. Конопельченко Б.Г., Ядерн.физ. (1978), т.28, стр.527. Lett. Math. Phys. (1979), v. 3, p. 67.

76. Shadwick W.F., J. Math.Phys. (1978),v.19, p. 2312.
77. Harrison B.K., Phys. Rev. Lett., (1978), v. 41, p. 1197.
78. Corrigan E.F., Fairlie D.B., Yates R.G., Goddard P.,Commun. Math. Phys., (1978), v. 58, p. 223.
79. Lohe M.A., Nucl. Phys., (1978), v. B142, p. 236.
80. Bruce D.J., Nucl. Phys.(1978), v.B142,p.253.
81. Brihage Y., Fairlie D.B., Nuyts J., Yates R. 6, J. Math.Phys.,(1978),v.19,p.252
82. Konopelchenko, Lett.Math.Phys. (1979) 3, 197.
83. Konopelchenko B.G., preprint 78-90, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1978)
84. Konopelchenko B.G., J. Phys. A: Mathematical and General (1979), v. 12, p. 1937.
85. Герджиков В.С., Кулиш П.П., ТМФ. (1979), т.39, стр.69.
86. Fokas A.S., Anderson R.L., Lett. Math. Phys. (1979), v.3, p. 117.
87. Konopelchenko B.G., Phys. Lett. (1979), v. 74A, p. 189.
88. Kleinert H., Fort. Phys., (1968), v. 16, p. 1.
89. Аронсон Э.Б., Малкин И.А., Манько В.И. ЭЧАЯ (1974) т.5 стр.122.
90. Кулиш П.П., Манаков С.В., Фаддеев Л.Д., ТМФ (1976) т.28, стр.38.
91. Faddeev L.D., Korepin V.E., Phys. Reps. (1978), v. 42C, p. 2.

92. Lowenstein J.H., Speer E.R., Comm. Math. Phys., (1978), v. 63, p. 97).

93. Шриффер Дж., Теория сверхпроводимости, Наука, 1970.

94. Боголюбов Н.Н., препринт Р-511, ОИЯИ, Дубна (1960)

95. Конопельченко Б.Г., ЭЧАЯ, (1977), т.8, стр.135.

Работа поступила - 30 апреля 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 5.06.1980 г. МН 07167
Усл. 3,0 печ.л., 2,9 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 147

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР