

22

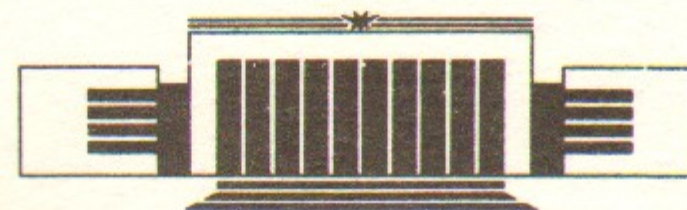
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



А.Р. Житницкий

НАРУШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ
КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КХД И
ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВАКУУМА,
ОСНОВАННАЯ НА ОТОБРАЖЕНИИ
 $\pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$

ПРЕПРИНТ 86-152



НОВОСИБИРСК

1986

НАРУШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КХД И
ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВАКУУМА, ОСНОВАННАЯ НА
ОТОБРАЖЕНИИ $\pi_1 (SU(N)/Z_N) = Z_N$.

А.Р. Житницкий

А Н Н О Т А Ц И Я

В дополнение к стандартной классификации вакуумных состояний, основанной на отображении $\pi_3 (SU(N)) = Z$ и характеризующихся индексом Понтрягина, обсуждается классификация, связанная с нетривиальной группой $\pi_1 (SU(N)/Z_N) = Z_N$. Показано, что в глюодинамике имеется N_c различных вакуумных состояний, характеризующихся полным ненулевым магнитным потоком $(0, 1, \dots, N_c - 1)$, определенным по модулю N_c и нулевой энергией. Внесение в теорию фермионов в присоединенном представлении не меняет классификацию. В этом случае N_c вакуумных состояний различаются величиной конденсата $\langle \psi^2 \rangle \sim \exp(2\pi i \cdot k/N_c)$, $k = 0, \dots, N_c - 1$. Возможность классификации сохраняется и в случае введения в теорию N_f безмассовых фермионов в фундаментальном представлении. Если $N_f = N_c$. (КХД соответствует этому случаю с $N_f = N_c = 3$) имеется $N_c = N_f$ вакуумных состояний, различающихся величиной кваркового конденсата.

Обнаруженная связь между глобальными свойствами группы и нарушением дискретных симметрий анализируется также в других моделях - 2х-мерных, киральных, суперсимметричных, $\mathcal{N} = 1$ моделях и т.д.

Кроме того, оказалось, что изученные ранее вакуумные состояния Грибова подпадают под данную классификацию и тем самым нетривиальность $\pi_1 \sim Z_N$ связана с проблемой неоднозначностей.

Обсуждается также связь классификации с загадкой θ - периода.

1. Введение
2. Основная идея
3. Суперсимметричная глюодинамика
4. 2х-мерная $U(1)$ - калибровочная теория
5. Суперсимметричная $\mathcal{N} = 1$ модель
6. Калибровочная $SU(5)$ модель с киральной материей
7. СКХД
8. КХД, $N_f = N_c$
9. Заключение
10. Приложение. О связи классификации, основанной на центре с проблемой неоднозначностей Грибова

I. Введение

В настоящее время является общепризнанной гомотопическая классификация [I] вакуумных состояний, характеризующихся целым числом n (топологическим индексом)^ж:

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \operatorname{Tr} (U^\dagger \partial_i U) (\partial_j U) (\partial_k U) \epsilon^{ijk} \quad (1)$$

Здесь $-i U^\dagger \partial_i U = A_i$ есть выражение для вакуумного, чисто калибровочного поля ($G_{\mu\nu} = 0$). Важное условие, допускающее такую классификацию, состоит в требовании

$$U(x \rightarrow \infty) \rightarrow U_0 \quad (2)$$

где U — элемент калибровочной группы $SU(2)$. Тем самым трехмерное пространство компактифицируется в поверхность гиперсферы S^3 (все точки $|x| = \infty$ эквивалентны одной точке S^3). При этом $U(x)$ задает отображение этой сферы S^3 в группу $SU(2)$. Формально этот факт выражается соотношением $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$, где \mathbb{Z} — группа целых чисел (I). Таким образом, классические вакуумы $A_i = -i U^\dagger \partial_i U$ представляют бесконечную дискретную систему секторов, характеризующихся индексом n (I), рис. I (см. обзор [3, 2] и ссылки на оригинальные работы там же). Напомним, что инстантон есть флуктуация с $G_{\mu\nu} \neq 0$, соединяющая соседние вакуумы.

Такая классификация является, видимо, полной для калибровочной группы $SU(N)$. Хорошо известно [4, 5], однако, что в отсутствие полей фундаментального представления (например, кварков в КХД), группой является не $SU(N)$, а $SU(N)/\mathbb{Z}_N$, где \mathbb{Z}_N — центр $SU(N)$. Действительно, элементы центра $\mathbb{Z}_N = \exp\{2\pi i \frac{k}{N}\}$, $k = 0, \dots, N-1$, пропорциональные единичной матрице не действуют на поля присоединенного представления, глюоны ($A' = U^\dagger A U = A$, $U = \exp\{2\pi i \frac{k}{N}\}$), однако изменяют вид фундаментального представления, кварков ($\psi' = U\psi$). С другой стороны из-

^ж) Не путать с топологическим зарядом $Q = \int G \tilde{G} d^4x$, являющимся характеристикой невакуумного поля ($G_{\mu\nu} \neq 0$), а, например, инстантона ($Q = 1$).

вестно, что имеется нетривиальное отображение S^1 в группу $SU(N)/Z_N$, именно $\pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$, $\pi_1(SU(N)) = 0$. Это и является формальным доводом в пользу существования дополнительной топологической классификации вакуумов $A_i = -i U^\dagger d_i U$. Другими словами, класс разрешенных калибровочных преобразований для группы $SU(N)/Z_N$ должен быть шире, чем это требуется условием (2). Тем самым и классификация по n (I) не является полной.

Поясним физическую сторону обсуждаемого вопроса на следующем простом примере. Именно, опишем возможные состояния магнитной струны. Вначале предположим, что в теории имеется поле с минимально возможным зарядом (положим его равным 1). Тогда очевидно, что все состояния струны с потоком $\varphi = 2\pi n$ эквивалентны, струна ненаблюдаема. Обход вокруг струны приводит точно к фактору $2\pi n$. Формально это выражается соотношением: $n = 1/2\pi \oint A_\mu dx_\mu$. Число n характеризует состояние струны. Эти состояния разные, но физически эквивалентные. Описанная ситуация является точным аналогом системы, изображенной на рис. I.

Теперь предположим, что в теории имеются только поля с зарядом $q > 1$ ($q = 2, 3, \dots$). Тогда очевидно, что струна остается ненаблюдаемой, имея минимальный поток, равный $2\pi/q$. Действительно, фаза, набегаяемая при обходе струны частицей с зарядом q имеет вид: $\exp\{iq \oint A_\mu dx_\mu\} = \exp\{iq \cdot 2\pi/q\} = 1$. Таким образом частица с зарядом q не "замечает" дробного потока. Требование непрерывности волновой функции при этом выполнено:

$$\psi(2\pi) = \exp\{iq \oint A_\mu dx_\mu\} \psi(0) = \psi(0)$$

Вернемся к глюодинамике. Здесь ситуация сходная с описанным выше случаем. Именно, аналогом теории, в которой для струны допустимы лишь целочисленные потоки, является калибровочная $SU(N)$ -теория с кварками. Аналогом теории, в которой имеются только частицы с большим зарядом и в которой допустимы дробные потоки, является, в частности, глюодинамика с калибровочной группой $SU(N)/Z_N$. Формально этот факт выражается в том, что калибровочные преобразования U , различающиеся при $x \rightarrow \infty$ на элемент центра Z_N , столь же хороши, как и преобразования

(2) - глюон не "различает" этих ситуаций. В то же время, такие преобразования явно не подпадают под схему классификации (I, 2).

Поясним сказанное следующей иллюстрацией, ограничившись случаем $SU(2)$. Как уже обсуждалось стандартная классификация приводит к дискретной системе вакуумов (рис. I), характеризующихся числом $n(I)$. Эту же систему можно представить себе в виде многообразия с удаленным диском (рис. 2)^ж, свернув рис. I в кольцо и отождествив соответствующие точки. Вся информация, заложенная в (I) сохранилась - точки $n = 0, 1, 2, \dots$ (рис. I) представляются в виде одной точки - 0 (рис. 2). При этом информация о том, что это физически эквивалентные, но разные состояния сохранилась и закодирована в виде числа оборотов вокруг диска. Точке 0 отвечают, например, матрицы, удовлетворяющие на бесконечности условию (2): $U = \exp\{i\pi \sigma_z n_z\}$, и подпадающие под классификацию (I):

$$U = \exp\{i\pi \sigma_z n_z\}, \quad U(z=+\infty) = U(z=-\infty, n_z=-1) = U_0 \quad (3)$$

Здесь n_z - орт по оси z , σ_z - матрица Паули. В приведенном выше случае точки $z = \pm \infty$ могут быть отождествлены и ось z компактифицируется в кольцо:

$$\varphi = \pi + 2 \arctan z/\rho_0, \quad U = \exp\{i\varphi \sigma_z\} \quad (4)$$

$$z = +\infty \rightarrow \varphi = 2\pi, \quad z = -\infty \rightarrow \varphi = 0, \quad U(\varphi=0) = U(\varphi=2\pi)$$

Теперь рассмотрим матрицы другого типа:

$$U = \exp\{i\sigma_z \varphi/2\}, \quad U(z=+\infty, \varphi=2\pi) = Z_2 U(z=-\infty, \varphi=0) \quad (5)$$

$$Z_2 = -1 \in SU(2)$$

не удовлетворяющие условию (2), но отличающиеся на противоположных концах пространства ($z = \pm \infty$, $\varphi = 0, 2\pi$) лишь на элемент центра (напомним, что для группы $SU(2)$ нетривиальный элемент центра состоит лишь из одного элемента $Z_2 = \exp(i\pi \sigma_z)$).

^ж) Автор выражает благодарность А.И.Вайнштейну, обратившему внимание на возможность такого описания состояний (I).

Если в теории нет полей фундаментального представления, то глюон не "обнаружит" этого факта и точки ($\varphi = 0, 2\pi, z = \pm \infty$) можно отождествить. Явная демонстрация возможности такого отождествления содержится ниже, в разделе 2.

Описанную ситуацию можно изобразить рис. 3 с двумя удаленными дисками. Здесь точка "0" отвечает, как и на рис. 2 калибровочным преобразованиям вида (3), точка "0" отвечает "получелым" преобразованиям вида (5). Однако точки 0, $\bar{0}$ физически эквивалентны, если в теории отсутствуют кварки. Поэтому путь из 0 в $\bar{0}$ является замкнутым. Этот путь, однако, не стягивается в тривиальный, точно так же как полный оборот на рис. 2 не может быть стянут в точку.

Из приведенных выше рассуждений видно, что тип классификации вакуумных состояний в значительной степени определяется топологией координатного пространства. В свою очередь эта топология не произвольна, но определяется физическими граничными условиями. Поясним это утверждение. Если физическое требование состоит в условии (2): $U(\vec{x} \rightarrow \infty) = I$, как это имеет место для группы $SU(N)$, мы приходим к топологии S^3 координатного пространства (все точки на бесконечности отождествлены). Если физическое требование состоит в менее жестких граничных условиях (5): $U(x = +\infty) = Z_N U(x = -\infty)$, отождествляющих не все бесконечно удаленные точки, но лишь противоположные, мы приходим к топологии $S^1 \times S^1 \times S^1$ [4, 5] *. Такая ситуация возникает для группы $SU(N)/Z_N$.

Забегая вперед отметим, что описанная выше система вакуумов допускает дробные k/N_c , $k = 0, \dots, N_c - 1$ топологические индексы (I). Это замечание совершенно очевидно, поскольку величина (I) определяется лишь значением калибровочной матрицы U на границе и не изменяется при малых деформациях. Если допустимы $U \sim \exp\{i\pi \sigma_z n_z\}$ вида (3), то $n(I)$ - целые **. Соот-

*) Отметим, что в работах [4, 5] топологически анализировались струноподобные солитоны, а не вакуумные состояния. Соответствующие солитоны [4, 5], предположительно играют значительную роль в конфайменте.

***) Мы приводим вид U как функцию z лишь для наглядности, имея в виду отразить тип граничных условий при компактификации: $U(z = +\infty) = U(z = -\infty)$ или $U(z = +\infty) = Z_N U(z = -\infty)$.
Сноска стр. 7.

ответственно для $U \sim \exp\{i\frac{\pi}{2} \sigma_z n_z\}$ вида (5), $n(I)$ принимает полуцелые значения. Для группы $SU(N)/Z_N$ $n(I)$ принимает соответственно значения k/N_c , $k = 0, \dots, N_c - 1$.

Анализу физических следствий, описанной выше классификации, и посвящена настоящая работа.

Основная цель настоящей работы является, конечно, изучение структуры вакуумных состояний в КХД. Однако похожие явления возникают во многих других, более простых моделях: 2х-мерных, $SUSY$ -моделях, σ -моделях и т.д., где ответы известны из более общих соображений.

Мы приведем топологический анализ некоторых из этих моделей в интересующем нас контексте и воспроизведем соответствующие результаты. Это поможет нам понять важные аспекты классификации вакуума в КХД и связь этой классификации с глобальными свойствами группы.

Учитывая изложенные выше соображения, работа построена следующим образом. В разделе 2 дан краткий экскурс необходимых для дальнейшего сведений по топологической классификации струн и вертексов. В разделе 3 рассматривается простейшее приложение описываемой классификации, именно калибровочная теория с кварком в присоединенном представлении. По существу модель является $SUSY$ -глюодинамикой, для которой количество вакуумных состояний известно из совершенно независимых соображений [6]. Более того, мы убедимся, что лагранжиан описывает N_c различных теорий, отличающихся величиной кирального конденсата глюино $\langle \lambda^2 \rangle \sim \exp\{2\pi i k/N_c\}$, $k = 0, 1 \dots N_c - 1$ в согласии с догадкой [6].

В этой модели $SU(N)/Z_N$ дробные значения $n(I)$ допустимы изначально. КХД с кварками в фундаментальном представлении с группой $SU(N)$ не относится к теории этого типа. Однако свойства других глобальных симметрий (например, $SU(N_c)$) могут сохранить обсуждаемую классификацию и для теорий с кварками

Для ненулевого значения $n(I)$ необходима зависимость от всех \vec{x} , например: $U(\vec{x} \rightarrow \infty) \sim \exp\{i\pi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\}$.

в фундаментальном представлении. Чтобы пояснить этот важный вопрос подробнее, в разделах 4-7 анализируются глобальные свойства различных моделей.

В разделе 4 рассматривается 2х-мерная калибровочная $\mathcal{U}(1)$ модель с N_f - кварками [7]. Это по существу первая работа, в которой акцентировалось внимание на существование дробного топологического числа. Мы не будем прибегать к конкретным динамическим схемам расчета (методу "бозонизации", $1/N$ разложению), изложенных в [7], а воспроизведем результаты работы, исходя из групповых соображений. Отметим, что модель [7] - простейшая модель, в которой именно благодаря кваркам оказываются допустимыми дробные топологические числа. В отсутствие кварков, как хорошо известно, в $2d$ $\mathcal{U}(1)$ -калибровочной теории допустимы лишь целые топологические числа. Грубо говоря, причина этого явления связана с наличием дополнительной глобальной $SU(N_f)$ -симметрии. Коротко поясним это. Для этого рассмотрим $\mathcal{U}(1)$ -калибровочные преобразования, которые, конечно, изменяют вид поля $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$. Однако с помощью подходящего дискретного поворота Z_{N_f} из центра $SU(N_f)$ можно точно сократить $\mathcal{U}(1)$ калибровочные преобразования с параметром $\alpha = \frac{2\pi k}{N_f}$. Другими словами, на кварковые поля можно наложить периодические с точностью до дискретного Z_{N_f} поворота граничные условия. Это автоматически приведет к допустимости дробного $\sim 1/N_f$ топологического числа, что и было обнаружено в решении [7]. Формально: $G = \frac{SU(N_f) \times \mathcal{U}(1)}{Z_{N_f}}$, $\pi_1(G) \sim Z_{N_f}$.

В разделе 5 обсуждаются дискретные свойства суперсимметричной σ -модели [6]. Соответствующий анализ схож с обсуждением раздела 4. Причина, по которой эта модель обсуждается в статье связана с её широкой популярностью по сравнению с моделью [7]. Однако в σ -модели не акцентировалось внимание на дробные топологические числа (в отличие от [7]), хотя явное следствие этой дробности - нарушение дискретной киральной симметрии - отмечалось [6].

В разделе 6 рассмотрена $4d$ $SUSY SU(5)$ модель с киральной материей [9-10]. Топологический анализ в этом случае по-

зволяет убедиться в возникновении конденсата глюино $\langle \lambda^2 \rangle \sim \exp\{2\pi i k/5\}$, аналогично тому как это происходит в $SUSY$ глюодинамике (раздел 3). В данном случае это означает спонтанное нарушение суперсимметрии. Возможно это одно из интересных приложений обсуждаемой классификации - топологический анализ моделей, допускающих конденсат глюино. Как и в других моделях обсуждаемая классификация воспроизводит соответствующие результаты, полученные независимым образом.

В разделе 7 рассмотрена хорошо понятая $SUSY QCD$ [II-14]. Достижения в этой модели достигнуты в значительной степени благодаря возможности работать в режиме слабой связи и правомерности инстантонных расчетов. Обсуждаемая классификация согласуется с результатами [II-14].

Основная мысль, которую мы бы хотели подчеркнуть в анализе разделов 3/7 состоит в следующем. Заранее известные свойства этих моделей (полученные из независимых соображений) подтверждают существование более широкого класса допустимых калибровочных преобразований с дробным топологическим числом. Это обеспечивает наличие дискретной системы вакуумов, численность и свойства которых находятся в согласии динамических расчетов [7-14] с предлагаемой классификацией. Это является сильным аргументом в пользу правильности последней.

В разделе 8 рассматривается возможность введения в $4d$ калибровочную $SU(N)$ теорию полей фундаментального представления (кварков). Наивно они нарушают симметрию $SU(N)/Z_N$, а тем самым и классификацию, связанную с центром. Однако оказывается, что если число безмассовых ароматов N_f в точности равно числу цветов N_c , то классификация сохраняется, допуская при этом нарушение киральной симметрии. Вновь имеется $N_f = N_c$ теорий с различной величиной конденсата. КХД с $m_u = m_d = m_s = 0$ соответствует как раз этому случаю. Грубо говоря, возможность сохранения классификации в присутствии кварков в фундаментальном представлении связана с наличием центра Z_{N_f} группы $SU(N_f)$. Так что дискретные калибровочные повороты из центра Z_{N_c} группы $SU(N_c)$ можно точно сократить глобальным поворотом Z_{N_f} . Други-

ми словами, если $N_f = N_c$, то на кварковые поля можно наложить периодические с точностью до дискретного Z_{N_f} поворота граничные условия. Это автоматически приведет к допустимости дробного топологического числа. Аналогичные результаты в более простых моделях (разделы 3-7) подтверждают этот вывод.

К каким физическим следствиям приводят эти "лишние" вакуумные состояния в данном случае? Как уже упоминалось в *SUSY* глюодинамике (раздел 3) эти состояния приводят к нарушению дискретной киральной симметрии и отличному от нуля значению конденсата глюино $\langle \lambda^2 \rangle$. Причем, величина конденсата разная в зависимости от номера вакуумного сектора: $\langle \lambda^2 \rangle_k \sim \exp\{2\pi i k/N\}$. Аналогичным свойством обладают и другие модели, рассмотренные в разделах 3-7. В КХД при $N_f = N_c$ происходит похожее явление. Хорошо известно, что аномалия аксиального $U(1)_A$ тока $\partial_\mu q_\mu \sim N_f \tilde{G} \tilde{G}$ сохраняет дискретную подгруппу: $\Psi_R \Psi_L \rightarrow \exp\{2\pi i k/N_f\} \Psi_R \Psi_L$. Выбор определенной комбинации из обсуждавшихся выше "лишних" вакуумных состояний обеспечивает спонтанное нарушение этой дискретной киральной симметрии. В свою очередь это означает существование N_f различных физических вакуумов, отличающихся величиной конденсата: $\langle \Psi_R \Psi_L \rangle \sim \exp\{2\pi i k/N_f\}$. Мы находимся в одном из этих миров.

Тесно примыкающие к обсуждаемым вопросам проблема неоднозначностей Грибова [15] и загадка θ -периода [16] рассматриваются в Приложении.

2. Основная идея

Прежде чем излагать классификацию вакуумных состояний в калибровочной группе $SU(N)/Z_N$, коротко напомним гомотопическую классификацию неабелевых струн в простейшем случае $SU(2)/Z_2$ [17-20].

Рассмотрим струну, направленную в обычном и изотопическом пространствах вдоль 3-й оси. В цилиндрических координатах потенциал выглядит следующим образом:

$$A_\varphi^3 = \frac{1}{\rho} \quad A_i = -i u^+ \partial_i u$$

$$W_{adj} = \exp\{i\varphi t^3\}, \quad W_{fund.} = \exp\{i\varphi \frac{\sigma^3}{2}\}. \quad (6)$$

Здесь верхний индекс у A_φ^3 - изотопический, нижний - пространственный, $(t^c)_{ab} = i\epsilon^{abc}$ - генератор присоединенного представления группы $SU(2)$, $\sigma^i/2$ - соответственно фундаментального.

Если в теории нет полей фундаментального представления (группой является $SU(2)/Z_2$), то требование однозначности волновой функции при обходе вокруг струны (5,6) с половинным потоком выполнено. Действительно, фаза при обходе равна:

$$W_{adj} = P \exp\{i \int_0^{2\pi} A_\varphi^3 t^3 d\varphi\} = \exp\{i \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\varphi t^3\} = \exp\{i 2\pi t^3\} = 1 \quad (7)$$

Заметим, что обход частицы фундаментального представления не приведет к эквивалентному состоянию, волновая функция изменит знак и струна окажется наблюдаемой:

$$W_{fund.} = P \exp\{i \int_0^{2\pi} \varphi A_\varphi^3 \frac{\sigma^3}{2} d\varphi\} = \exp\{i \pi \sigma^3\} = -1 \quad (8)$$

Какие уроки можно извлечь из этого простого примера? а) Если группой является $SU(2)/Z_2$, то, как и обсуждалось во Введении, точки $\varphi = 0, 2\pi$ могут быть отождествлены, калибровочные преобразования (5,6) являются разрешенными, так как приводят к физически эквивалентной ситуации (отсутствие струны эквивалентно её ненаблюдаемости); б) В присутствии фундаментального представления разрешенными являются лишь преобразования (3,4) с удвоенной фазой. Отметим в этой связи, что удвоенная фаза как раз соответствует классификации (I) с целочисленной величиной топологического числа $n(I)$, в то время как преобразования (5,6) допускают полуцелые значения n ; в) Величиной, характеризующей струну, является $W_{fund.}$ (8), аналог потока в электродинамике. Таким образом W является величиной, характеризующей топологически-различные (но физически эквивалентные) сектора. В этом смысле W , как характеристика, является аналогом величины $n(I)$.

В общем случае, для группы $SU(N)$ все $W_{adj} = I$ (ненаблюдаемость струны) приводят к следующим W_f :

$$W_{fund} = P \cdot \exp \int A_\mu dx^\mu = \exp \{ 2\pi i k / N \}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

в точности равным элементам центра^ж. Таким образом имеется N_c различных состояний струны. Они характеризуются величиной $k = 0, 1, \dots, N-1$, см. (9). В дальнейшем будем называть число k - потоком. Заметим, что поток "к" определен лишь по модулю N_c .

Чтобы понять, каким образом W принимает в точности значения из центра, получим соотношение (8) несколько иным образом. Напомним, что при любых калибровочных преобразованиях W изменяется следующим образом:

$$W' = U(\varphi = 2\pi) W U(\varphi = 0) \quad (10)$$

Здесь $U(\varphi = 0)$, $U(\varphi = 2\pi)$ соответствуют калибровочным преобразованиям в начале и конце пути. Отсюда следует, что если калибровочные преобразования "малые", так что $U(0) = U(2\pi)$, то собственные значения W, W' совпадают; если преобразования большие, типа (5), $U(\varphi = 2\pi) = Z_N U(0)$, то собственные значения отличаются на элемент центра.

Теперь перейдем к выводу (8). Для этого рассмотрим сектор теории без струны $A_\mu = 0$, $W(A_\mu = 0) = I$. Теперь сделаем допустимое калибровочное преобразование (6), перейдя в состояние с ненаблюдаемой струной. Подставляя в (10) $U(\varphi = 0) = I$, $U(\varphi = 2\pi) = -I$, $W(A = 0) = I$, получаем $W' = -I$ в согласии с (8). Из соотношения (10) видно, почему W принимает значения из центра. Рассматривая всевозможные преобразования типа (5) с отождествлением границ многообразия с точностью до центра, и подставляя их в (10) мы с необходимостью воспроизводим (9).

ж) Мы рассмотрели простейший случай струны с заданным цветовым направлением: σ^3 для $SU(2)$, λ^8 для $SU(3)$, λ^{N-1} для $SU(N)$. W_{fund} в этом случае пропорциональна единичной матрице и классификация очевидна. В общем случае, W есть матрица, характеризующаяся своими собственными значениями. Если границы отождествлены с точностью до центра (как в (5)), то собственные значения W , являющиеся характеристической вакуумного состояния, в точности равны элементам центра, см. ниже. Мы сохраним в дальнейшем обозначение W , имея в виду собственные значения W .

Рассмотрим другой способ описания той же струны с помощью $\epsilon \rightarrow 0$ -перехода. Вместо сингулярного, чисто калибровочного поля (6), рассмотрим регуляризованное выражение:

$$A_\varphi^3 = \frac{1}{\rho + \epsilon}, \quad F_{\rho\varphi}^3 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A_\varphi^3) = \frac{\epsilon}{\rho(\rho + \epsilon)^2} \quad (11)$$

Поле (11), конечно, не чисто калибровочное, так как $F \sim \epsilon \neq 0$. Теперь можно вычислить (8) еще одним способом через напряженность поля F :

$$W = P \cdot \exp i \oint A_\mu dx^\mu \frac{\sigma^3}{2} = \exp \left\{ i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F_{\rho\varphi}^3 \rho d\rho \int d\varphi \frac{\sigma^3}{2} \right\} = \exp \left[i \pi \sigma^3 \int_0^\infty \frac{\epsilon d\rho}{(\rho + \epsilon)^2} \right] = -1 \quad (12)$$

в согласии с (8). Теперь понятны как термин "струна" (поток набирается в области $\sim \epsilon$, $F_{\rho\varphi}(\epsilon \rightarrow 0) \sim \delta(\rho^2)$), так и термин "поток" - целое число "к" (9) выражается через $\int F ds$. Отметим, что обеспечить ненулевой поток, а тем самым и нетривиальное значение $W \neq I$, можно и иным $\epsilon \rightarrow 0$ доопределением, например:

$$A_\varphi^3 = \frac{\epsilon}{\epsilon\rho + 1} g(\rho), \quad F_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\epsilon\rho g(\rho)}{\epsilon\rho + 1} \right], \quad g(\rho): \begin{cases} g(\rho \rightarrow 0) = 0 \\ g(\rho \rightarrow \infty) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

При этом $W = \exp \left\{ i \pi \sigma^3 \int_0^\infty \frac{\epsilon\rho g(\rho)}{\epsilon\rho + 1} \frac{d\rho}{\rho^2} \right\} = -1$, как и в (12). Важное отличие, однако, состоит в том, что поток набирается здесь на больших $\rho \gg 1/\epsilon$. Ситуацию можно представить себе так, что весь поток в случае (11) сконцентрирован в точке $\rho = 0$, а в случае (13) поток размазан по всему пространству. Это важное отличие приводит к тому, что энергия $E \sim \int F^2 \rho d\rho \sim \frac{1}{\epsilon^2} \rightarrow \infty$ в случае (11) для струны и $E \sim \int F^2 \rho d\rho \sim \epsilon \rightarrow 0$ для поля (13).

Этот простой пример показывает, что топологическая классификация, связанная с $W(8,9)$ важна не только при изучении струн, монополей и вертексов, но и при изучении классических вакуумных состояний с нулевой энергией.

Теперь дадим некоторое интуитивное объяснение, почему классификация по $W(9)$ связана с гомотопической группой $\pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$. Формально, последняя запись означает,

что в группе $SU(N)/Z_N$ имеется N штук бесконечно длинных линейных объектов, несводимых непрерывным образом друг в друга. Объект действительно одномерен, так как классификация связана с отображением кольца S^1 в группу. Классификация вертексов и струн всегда связана с отображением π_1 , а величина W является количественной характеристикой этого отображения. Напомним в этой связи, что 2-х мерные объекты, например, монополи, классифицируются группой π_2 . А инстантоны, связанные с отображением сферы S^3 , классифицируются группой π_3 , и характеризуются величиной $n(I)$.

Напомним, что π_1 характеризует меру связанности группового пространства. В частности, для односвязанного пространства π_1 содержит лишь единичный элемент.

В настоящем разделе обсуждалось лишь одно из приложений топологического анализа, основанного на π_1 (изучение вакуумных состояний в $SU(N)/Z_N$). Другие приложения, так же как и полезные математические результаты, необходимые для дальнейшего изложения, могут быть найдены в работах [4,5, 17-20].

3. Суперсимметричная глюодинамика

В предыдущем разделе мы убедились, что в группе $SU(N)/Z_N$ имеется N различных вакуумных состояний, отличающихся величиной потока $k = 0, \dots, N-1$ (или, что эквивалентно, величиной $W = \exp\{2\pi i k/N\}$). В этом разделе сделан следующий шаг на пути от глюодинамики к КХД. Именно, наряду с калибровочными полями рассмотрим один левый кварк в присоединенном представлении. Мы вычислим киральный заряд топологически-нетривиальных вакуумных состояний, обсуждавшихся в разделах 1,2. После чего убедимся, что в теории имеется N различных состояний, отличающихся величиной конденсата $\langle \psi^2 \rangle_k = \exp\{2\pi i k/N\}$, $k = 0, \dots, N-1$. С другой стороны, известно, что эта система есть в точности $SUSY$ -теория, где ответ известен заранее [6]. Согласно с результатом [6] говорит о правомерности подхода в целом. Заметим, что помещая систему в ящик и отключая взаимодействие (метод [6]) можно выяснить коли-

чество вакуумных состояний лишь для $SUSY$ -теорий ($(-1)^F$ инвариантен при этих вариациях). Мы обсуждаем классификацию, не связанную с этими ограничениями. И поэтому аналогично можно рассмотреть не суперсимметричные теории с любым числом ароматов кварков в присоединенном представлении. Обсуждение этого вопроса, однако, выходит за рамки настоящей работы.

Прежде чем вычислять киральный заряд вакуумных состояний, обсуждавшихся в разделах 1,2, коротко напомним некоторые общие соотношения [2, 3], сформулированные в удобном для дальнейшего изложения, виде. Такая переформулировка известных результатов сделает вычисления тривиальными, а ответ очевидным.

Рассмотрим стандартную топологическую классификацию вакуумных состояний в группе $SU(2)$. Различные вакуумы характеризуются числом $n(I)$. Введем в теорию одно дираковское поле в фундаментальном представлении. Тогда, как хорошо известно [2, 3] киральный заряд n -го состояния равен:

$$Q_5 \equiv \int \bar{\psi} \gamma_5 \psi d^3x = 2n \quad (I4)$$

при условии, что $Q_5(n=0) = 0$. Соотношение (I4) можно получить многими способами. В частности, можно использовать аксиальную $U(1)$ - аномалию:

$$Q_5(n_1) - Q_5(n_2) = \int d^4x \partial_\mu a_\mu = 2Q = 2 \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{G}^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} \quad (I5)$$

Здесь $Q = n_1 - n_2$ - топологический заряд поля "соединяющего" n_1, n_2 - вакуумы. Например, инстантон, "соединяющий" два ближайших состояния имеет $Q = 1$, тем самым из (I5) имеем $Q_5(n=1) - Q_5(n=0) = 2$. Другой способ понять (I4) состоит в использовании теоремы об индексе и вычислении числа нулевых мод (см., например, обзор [2]). Приведенные соображения полностью основаны на топологической характеристике поля с $G_{\mu\nu} \neq 0$ (в частности, инстантонного с $Q = 1$) соединяющего состояния $|n=0\rangle$ и $|n=1\rangle$.

Можно поставить вопрос по другому - найти $Q_5(n=1)$ ва-

куумного состояния с $n = 1$ безотносительно к существованию инстантона, а используя лишь свойства чисто калибровочного потенциала $A_i = -iU^\dagger \partial_i U$, отвечающего $n = 1$. Как мы убедимся, именно такая постановка вопроса окажется наиболее предпочтительной в дальнейшем. Итак, задано внешнее стационарное, чисто калибровочное поле:

$$A_0 = 0 \quad A_i = -iU^\dagger \partial_i U \quad (I6)$$

Требуется определить Q_5 (I4), как функционала U , рассматривая ψ во внешнем поле (I6) ^{*}. Эта задача может быть решена, например, адиабатическим методом (см., например, [21]) и по существу сводится к вычислению диаграмм типа рис. 4 [21, 30]. Технические детали вычислений здесь опущены, так как ответ известен $Q_5 (n = 1) = 2$. С формальной же точки зрения задача аналогична вычислению барийного заряда скирмиона в поле топологически нетривиального π -мезонного классического поля. Подробнее эта аналогия обсуждается в Приложении, здесь же приведен ответ:

$$Q_5(n) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} T_2(U^\dagger \partial_i U) (j)(k) \quad (I7)$$

$U' = U^2$

Результат (I7) конечно согласуется с (I4). Отметим, что как и любая топологическая характеристика $Q_5(n)$ инвариантна относительно "малых" калибровочных преобразований и определяется лишь значениями U на границе. Итак, в теории с одним дираковским кварком в фундаментальном представлении, $Q_5 = 2$ для вакуумного сектора с индексом $n = 1$. Отметим, что $Q_5 = 2$ это минимально-возможное нетривиальное значение для вакуумного сектора, не нарушающего лоренц-инвариантности (безмассовое поле ψ_2 имеет $Q_5 = 1$, но не является лоренц-скаляром).

Теперь легко модифицировать результат для теории с L кварком в присоединенном представлении и для дробного индекса

^{*} Очевидно, что сингулярное выражение $\int d^3x \dots$ требует доопределения (необходимо сделать раздвижку совпадающих аргументов). Мы понимаем выражение для Q_5 с соответствующими доопределениями, хотя явно это и необозначено.

($n = \frac{1}{2}$ в $SU(2)$). Из (I7) имеем:

$$\frac{(Q_5, adj)_L}{(Q_5, fund)_{L+R}} = \frac{1}{2} \frac{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle}{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle} \cdot (n = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \quad (I8)$$

$\rightarrow (Q_5, adj)_L = (Q_5, fund)_{L+R} = 2$

Здесь первый множитель $\frac{1}{2}$ за счет уменьшения лоренцевых степеней свободы (вместо 1-го дираковского \rightarrow 1 вейлевский); фактор $\frac{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle}{\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle} = 4$ связан с представлением; фактор ($n = \frac{1}{2}$) связан с "половинной" фазой (5) допустимых калибровочных преобразований. В общем случае группы $SU(N)$:

$$Q_5 = 0, 2, \dots, 2(N-1) \quad (I9)$$

принимает N различных значений в вакуумных секторах, характеризующихся соответственно потоком $k = 0, 1, \dots, N-1$ и числом $n(I) = k/N$. Тот факт, что количество вакуумных состояний в этой теории равно N был получен иным образом в [6]. Кроме того, наше выражение (I9) для Q_5 в точности согласуется с догадкой [6].

Заметим, что результат (I9) может быть воспроизведен и из соотношения (I5) заменой $Q \rightarrow N_c Q$, учитывающей изменение вида аксиальной аномалии при переходе от фундаментального представления к присоединенному. Кроме того, так как в $SU(N)/Z_N$ теориях допустимы $Q = k/N_c$, $k = 0, \dots, N-1$, то $N_c Q$ принимает набор значений $0, 1, \dots, N-1$ и мы вновь возвращаемся к (I9).

Последний вопрос, на котором мы бы хотели остановиться в этом разделе, связан с выбором физического вакуумного состояния. Физический вакуум представляет из себя некоторую суперпозицию возможных N состояний с потоками $k = 0, \dots, N-1$ и киральными зарядами (I9). Исходный принцип аналогичен стандартному построению θ -вакуумов [2]. Отличие состоит лишь в том, что вместо бесконечного набора состояний (I), мы имеем конечное число равное N . Это приведет к тому, что истинные вакуумные состояния будут характеризоваться дискретным набором значений, а не параметром $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Напомним, что в теориях $SU(N)/Z_N$ большие калибровочные

преобразования (назовем их T), переводящие состояния с потоком $|k\rangle$ в состояние с потоком $|k+1\rangle$ являются допустимыми: $|k+1\rangle = T|k\rangle$. Такие преобразования соответствуют переходу от состояния, характеризующегося $W_k = \exp\{2\pi i k/N\}$, к состоянию $W_{k+1} = \exp\{2\pi i (k+1)/N\}$. Допустимость T означает, что T коммутирует с гамильтонианом: $[T, H] = 0$ и оператор T одновременно с H может быть диагонализирован. То есть физическими вакуумными состояниями $|R_e\rangle$ будут собственные состояния оператора T . Легко убедиться, что состояния:

$$|R_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} k} |k\rangle, \quad |R_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} \cdot 2k} |k\rangle \quad (20)$$

$|R_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\{2\pi i \frac{k^e}{N}\} |k\rangle$
удовлетворяют этому требованию, то есть:

$$T|R_e\rangle = \exp\{-i \frac{2\pi^e}{N}\} |R_e\rangle \quad (21)$$

Кроме того, так как любой физический оператор O коммутирует с T , $[T, O] = 0$, то:

$$0 = \langle R_1 | [O, T] | R_2 \rangle = (e^{-i \frac{2\pi}{N}} - e^{-i \frac{4\pi}{N}}) \langle R_1 | O | R_2 \rangle \Rightarrow \langle R_1 | O | R_2 \rangle = 0 \quad (22)$$

Таким образом, состояния $|R_e\rangle$ представляют физические вакуумы различных теорий и ни один физический оператор не связывает их. Легко убедиться, что состояния $|R_e\rangle$ различаются величиной кваркового конденсата:

$$\langle R_e | \psi^2 | R_e \rangle \approx \exp\{-i \frac{2\pi^e}{N}\} \quad (23)$$

Как отмечалось в работе [6] соотношение (23) означает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. Действительно, величина $\langle \psi^2 \rangle$ не инвариантна относительно киральных $\psi \rightarrow \exp\{i \gamma_5 k/N\}$ поворотов, в то время как аномалия аксиального тока $\partial_\mu q_\mu \sim N_c \bar{\psi} \psi$ эту инвариантность Z_{N_c} не нарушает. Учитывая этот факт, а также вычислив индекс $(1)^F = N_c$, Виттен высказал гипотезу, что обнаруженные в [6] N_c состояний в непрерывном пределе переходят в точности в N_c состояний с нарушенной дискретной симметрией. Эта догадка [6] явно под-

тверждается как приведенными выше рассуждениями, так и прямыми инстантонными расчетами [I2-I4].

Итак, основная идея 3 раздела состоит в том, что группой является не $SU(N)$, а $SU(N)/Z_N$. Это означает, что преобразования U и $Z_N U$ мы отождествляем (они приводят к одинаковому виду поля A_μ). В свою очередь это означает, что групповое пространство не является односвязанным. Формально это выражается так: $\pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$. Отдельный вопрос состоит в том, к каким физическим проявлениям приводит это вырождение? В $SUSY$ глюодинамике ответ очень простой: имеется $U(1)$ симметрия $\psi \rightarrow \exp\{i\alpha\}\psi$, нарушаемая аномалией, однако дискретная Z_N симметрия $\psi^2 \rightarrow \exp\{2\pi i k/N\}\psi^2$ сохраняется*. Дополнительные вакуумные состояния в точности обеспечивают спонтанное нарушение этой дискретной симметрии. Условно запишем это в виде:

$$\frac{SU(N)}{Z_N} \times Z_N \quad Z_N: \lambda^2 \rightarrow \exp\{2\pi i k/N\} \lambda^2 \quad (24)$$

Здесь Z_N в знаменателе означает, что групповое пространство N -связанно, то есть имеется N элементов, не изменяющих вида полей теории. Z_N в числителе есть дискретная глобальная симметрия, присущая теории. Стрелка в (24) показывает способ реализации глобальных свойств группы: то есть $\pi_1 \sim Z_N$ обеспечивает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. Мы столь подробно остановились на демонстрации связи глобальных свойств группы и дискретных симметрий, именно в $SUSY$ глюодинамике благодаря широкой известности этой модели и ее простоте. В дальнейших примерах мы будем ограничиваться условной записью типа (24).

Важный момент, на который мы хотели бы обратить внимание, состоит в том, что отождествление U и $Z_N U$ автоматически означает допустимость граничных условий типа (5). Это, в свою очередь, автоматически приводит к дробным значениям $n(1)$. Более того, эта дробность является необходимой, чтобы киральный заряд Q_5 вакуумных состояний принимал минимально-возможные вакуумные значения $0, 2, 4, \dots (19)$. Это в свою очередь необходи-

* Более точно, сохраняется Z_{2N} симметрия $\psi \rightarrow \exp\{i\pi k/N\}$ $k = 0, 2N-1$. Однако $\psi \rightarrow -\psi$ соответствует обычным поворотам.

мо для $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$ ^ж. Итак, если верить, что $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$ [I2-I4], то с необходимостью надо принять допустимость более широкого класса калибровочных преобразований. Ниже рассмотрены модели, где вместо предположения (типа $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$) имеется строгое утверждение такого же сорта.

В заключении настоящего раздела напомним, что возможность обсуждаемой классификации полностью обусловлена отсутствием полей фундаментального представления в теории, то есть группой является $SU(N)/Z_N$. Наивно можно было бы ожидать, что включение полей фундаментального представления полностью разрушает классификацию. В общем случае это действительно так. Однако в исключительных случаях (и КХД с $m_u = m_d = m_s = 0$ попадает в их число!) классификация с некоторыми видоизменениями может быть сохранена. Значительную роль в понимании этого сыграло развитие 2-мерных и $SUSY$ -теорий. В следующем разделе мы кратко обсудим соответствующие результаты в необходимом для нас контексте. Получив необходимый опыт мы обсудим вакуум КХД.

4. 2-х мерная $U(1)$ -калибровочная теория [7]

В этом разделе подробно рассмотрена модель [7]. Основной результат авторов этой работы связан с утверждением о существовании дробных топологических зарядов и о наличии кваркового конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ в модели. Мы по новому интерпретируем эти результаты, и, в частности, убедимся, что $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ обеспечивается нарушением лишь дискретной симметрии. Так что теорема Коулмана о невозможности спонтанного нарушения непрерывной симметрии в данном случае не относится к делу.

В разделах 2, 3 мы обсудили теорию $SU(N)/Z_N$, в которой дробные значения $n(I)$ допустимы изначально. КХД с кварками в фундаментальном представлении не относится к теории этого типа. Сейчас мы обсудим ренормализуемую 2х-мерную модель [7].

^ж) Целые топологические заряды обеспечивают лишь большие значения $\varphi_5 = 2N \cdot k$.

в которой дробные топологические числа оказываются допустимыми именно благодаря введению в теорию N_f фермионов в фундаментальном представлении. Аналогичное явление возникает и в КХД.

Мы не будем описывать решение [7], а сконцентрируем основное внимание на топологических и групповых свойствах модели [7]. Это даст возможность по новому интерпретировать основной результат [7] о существовании кваркового конденсата ($\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$) и дробных значений топологического числа, не прибегая к конкретным динамическим схемам расчета (методу "бозонизации", вычислению функционального детерминанта, $1/N$ разложению и т.п.).

Итак, теория определяется следующим Лагранжианом:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (i\hat{\partial} + \frac{e}{N} \hat{A}) \psi + \frac{g^2}{N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\hat{5}\psi)^2]. \quad (25)$$

Здесь A_μ - калибровочное $U(1)$ поле, ψ - кварковое поле, преобразующееся по фундаментальному представлению группы $SU(N_f)$. По существу (25) описывает суперпозицию $SU(N_f)$ -модели Гросса-Невью и калибровочной $U(1)$ модели Швингера. Остановимся на анализе симметричных свойств теории. Свободный Лагранжиан обладает $SU(N)_A \times SU(N)_V \times U(1)_A \times U(1)_V$ - симметрией. Аксимальная $SU(N)_A$ симметрия нарушается явно 4х-фермионным взаимодействием; $U(1)_A$ - симметрия нарушается на квантовом уровне аномалией $\partial_\mu \varphi_\mu \sim N_f \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$. Дискретная Z_N - симметрия $\bar{\psi}_R \psi_L \rightarrow \exp\{2\pi i k/N\} \bar{\psi}_R \psi_L$ при этом сохраняется.

Теперь сконцентрируем внимание на векторной симметрии. На первый взгляд кажется, что группой инвариантности является $SU(N)_V \times U(1)_V$. Это, однако, ошибочное заключение. Дело в том, что суперпозиция преобразований из центра группы $SU(N)$, $Z_N = \exp\{2\pi i k/N\}$ и из калибровочной $U(1)$ - группы $e^{i\alpha}$ с параметром $\alpha = \frac{2\pi}{N}(N-k)$ не меняет вид поля ψ . Таким образом группой является $\frac{SU(N) \times U(1)}{Z_N}$ и соответствующие преобразования должны быть отождествлены с единичными:

$$\pi_1 \left(\frac{SU(N) \times U(1)}{Z_N} \right) \sim Z_N$$

Как только соответствующее отождествление проведено (фактор Z_N появился в знаменателе), класс допустимых калибровочных преобразований стал шире. Если в обычных 2х-мерных $U(1)$ -калибровочных моделях стандартная классификация по группе

$\pi_1(U(1)) = Z$ допускает лишь калибровочные преобразования вида (см., например, [2]):

$$e^{i\alpha(x+\varphi)} = e^{i\alpha(x-\varphi)} \quad (26)$$

$$\alpha(x+\varphi) - \alpha(x-\varphi) = 2\pi n$$

то наличие Z_N - фактора в нашем случае обеспечивает более широкий класс допустимых преобразований:

$$e^{i\alpha(x+\varphi)} = \left[Z_N = e^{i\frac{2\pi k}{N}} \right] e^{i\alpha(x-\varphi)} \quad (27)$$

$$\alpha(x+\varphi) - \alpha(x-\varphi) = \frac{2\pi}{N} k, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

(27) есть в точности результат [7], означающий, что края отождествлены с точностью до глобального поворота. Кроме того (27) описывает состояния с дробным топологическим числом,

легко вычислить киральные заряды Q_5 вакуумных состояний, удовлетворяющих граничным условиям (27), исходя из аномалии: $\partial_\mu a_\mu = 2N_f \cdot Q$. В частности, для теории с $N_f = 1$, имеем при Q (топологический заряд) = 1, $Q_5 = 2$ в согласии с известными результатами. В нашем случае $Q = k/N_f$ - дробное, но и в уравнении для аномалии имеется фактор N_f . Так что, как и в $SUSY$ глюодинамике (19) имеем $Q_5 = 0, 2, \dots, 2(N_f - 1)$. Приводя стандартные аргументы раздела 3, легко убедиться, что физическими вакуумными состояниями будут суперпозиции типа (20), с отличным от нуля конденсатом:

$$\langle \bar{\Psi}_R \Psi_L \rangle \sim \exp\{-2\pi i \frac{k}{N_f}\}. \quad (28)$$

Как и в $SUSY$ -глюодинамике групповое пространство и здесь оказалось неодносвязанным: $\pi_1 \sim Z_N$. Более того, реализация этого факта проявилась (как и в разделе 3) в нарушении дискретной киральной симметрии. Условная запись, аналогичная (24) выглядит в данном случае следующим образом:

$$\frac{SU(N_f) \times U(1)}{Z_N} \times Z_N, \quad Z_N: \bar{\Psi}_R \Psi_L \rightarrow e^{i\frac{2\pi k}{N}} \bar{\Psi}_R \Psi_L \quad (29)$$

Важное различие, однако, состоит в том, что в отсутствие фермионов допустимые топологические числа лишь целые: $\pi_1(U(1)) \sim Z$. Введение дополнительной симметрии $SU(N_f)$ приводит к возможности и дробных преобразований. Аналогичное явление возникает и в КХД. Решение [7], подтверждающее существование дробных топологических зарядов, является сильным аргументом в пользу правильности предлагаемой классификации.

5. Суперсимметричная σ - модель

В данном разделе обсуждается $SU(N)$ суперсимметричная σ - модель при больших N [8]. Решение модели хорошо известно. Именно, для любых N индекс Виттена $(-1)^F = N$ так что имеется ровно N вакуумных состояний. Кроме того, при больших N известен путь реализации этих состояний - они обеспечивают спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии [8]. Поэтому, в смысле симметричных свойств, модель аналогична обсуждавшейся в разделе 4. Основная причина настоящего анализа модели связана с её широкой популярностью и достоверностью полученных в ней результатов. Так что согласие результатов [6,8] с предлагаемой классификацией вновь подтверждает правильность подхода в целом. Кроме того, в данной модели мы обсуждаем и некоторые новые моменты, на которые раньше не акцентировалось внимание. Именно, в модели с необходимостью допустимы калибровочные преобразования с дробным $1/N$ топологическим числом. Это является необходимым следствием известного результата о ненулевости кирального конденсата $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \neq 0$. Ситуация в точности аналогична $SUSY$ глюодинамике (см. обсуждение в конце раздела 3).

Запишем Лагранжиан модели в следующем виде [8]:

$$L = \frac{N}{g^2} \left[(\partial_\mu - iA_\mu) n_i^* (\partial_\mu + iA_\mu) n^i + \bar{\Psi}_i (i\hat{D} - \hat{A}) \Psi^i - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \sqrt{\frac{1}{2}} \bar{\Psi} (\sigma + i\pi \gamma_5) \Psi - \lambda (n_i^* n^i - 1) + \right. \\ \left. + \bar{\chi} n_i^* \Psi^i + \bar{\Psi}_i n^i \chi \right] \quad (30)$$

Здесь $n^i(\psi^i)$ — N компонентное комплексное скалярное (дираковское) поле; $\chi, \bar{\chi}, \lambda$ — лагранжевы множители, поддерживающие связи $n_i^* \psi^i = 0, n_i^* n^i = I$ соответственно. Поля σ, π, A_μ — вспомогательные, не содержащие кинетических членов.

Кроме очевидной глобальной $SU(N)$ симметрии, модель обладает локальной $U(1)$ — инвариантностью: $n^i \rightarrow e^{i\alpha} n^i, \psi^i \rightarrow e^{i\alpha} \psi^i$, явно выраженной записью Лагранжиана в виде (30). Модель имеет наивную киральную симметрию:

$$\psi \rightarrow e^{i\beta} \psi, \quad \sigma + i\pi \rightarrow e^{-2i\beta} (\sigma + i\pi)$$

нарушаемую аномалией: $\partial_\mu q_\mu \sim \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$. Дискретная симметрия с параметром $\beta = \pi/N$ на этом этапе сохраняется [8].

Классификацию, как обычно, начинаем с поиска элементов группы, требующих отождествления. Это дает возможность аккуратно выяснить глобальные свойства группы инвариантности. В данном случае эта задача тривиально решается, как и в разделе 4. Существенной группой инвариантности является не $SU(N) \times U(1)$, но $SU(N) \times U(1) / Z_N$. Действительно, преобразования из центра Z_N группы $SU(N)$ и калибровочные $U(1)$ преобразования с параметром $\alpha = 2\pi k/N$ не меняют вида полей и соответствующие преобразования должны быть отождествлены с единичным. Как объяснялось в конце раздела 3, это автоматически приводит к тому, что калибровочные $U(1)$ — преобразования допускают дробные $\sim 1/N$ топологические числа, так как $\pi_1 \sim Z_N$. Киральные заряды этих N вакуумных состояний, как и в модели раздела 4 равны: $Q_5 = 0, 2, \dots, 2(N-1)$. Далее, приводя стандартные аргументы о виде правильных физических состояний (20) приходим к выводу о существовании N физических теорий с отличным от нуля конденсатом:

$$\langle \bar{\psi}_2 \psi_2 \rangle \sim \exp\left\{2\pi i \frac{k}{N}\right\} \quad (31)$$

Этот результат находится в полном согласии как с величиной индекса Виттена $\text{Ind} F = N$ [6] для данной теории, так и с утверждением о спонтанном нарушении дискретной киральной симметрии в данной модели [8].

Условная запись, демонстрирующая связь глобальных свойств группы с дискретной симметрией выглядит следующим образом (ср. с (24), (29)):

$$\frac{SU(N) \times U(1)}{Z_N} \times Z_N \quad Z_N: \begin{cases} \bar{\psi}_2 \psi_2 \rightarrow \exp\left\{\frac{2\pi i k}{N}\right\} \bar{\psi}_2 \psi_2 \\ \sigma + i\pi \rightarrow \exp\left\{-\frac{2\pi i k}{N}\right\} (\sigma + i\pi) \end{cases} \quad (32)$$

Мы бы хотели заострить внимание, что существование конденсата в этой модели с необходимостью означает допустимость калибровочных преобразований с дробным числом $\sim 1/N$.

Действительно, утверждение $\langle \bar{\psi}_2 \psi_2 \rangle \neq 0$ обязательно означает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. В свою очередь это означает выбор одного из N вакуумных состояний (20). Обеспечить ненулевое вакуумное значение оператора $\bar{\psi}_2 \psi_2$ с киральностью $Q_5 = 2$, можно только, если суперпозиция (20) содержит вакуумные состояния с киральными зарядами, отличающимися на две единицы: $Q_5 = 0, 2, \dots$. Из вида аномалии $\partial_\mu q_\mu \sim 2N_c Q$ это с необходимостью означает существование дробных $Q \sim 1/N_c$.

В заключении настоящего раздела поясним причину того, что в работе [8] рассматривалось лишь одно состояние с отличным от нуля вакуумным значением $\langle \sigma \rangle \neq 0, \langle \pi \rangle = 0$. При этом доказывалось нарушение дискретной киральной симметрии, предполагающей существование N таких состояний. Дело в том, что эффективное действие, полученное интегрированием по $n^i \psi^i$ — полям имеет следующий вид (несущественные факторы опущены) [8]:

$$\begin{aligned} I_{\text{eff.}} = & -N T_2 \ln(-(\partial_\mu + iA_\mu)^2 - \lambda) + \\ & + N T_2 \ln\left(i\partial - \hat{A} - \frac{1}{f_2}(\sigma + i\pi\gamma_5)\right) - \\ & - i \frac{N}{2g^2} \int d^2x (\sigma^2 + \pi^2) + i \frac{N}{g^2} \int d^2x \lambda \end{aligned} \quad (33)$$

Стандартный выбор стационарной точки (что соответствует выбору определенного вакуумного состояния) имеет вид:

$$\sigma^2 = 2\Lambda^2 \exp\left\{-4\bar{v}/g^2\right\}, \quad \pi = 0 \quad (34)$$

Наше замечание сводится к тому, что это не единственная возможность. Кроме выбора (34) допустимы также состояния с $\sigma, \pi \neq 0$, связанных определенной фазой. Явный вид вакуумных значений в этих состояниях легче всего получить, используя киральную симметрию Лагранжиана (30). Именно, полагая $\sigma, \pi \neq 0$ сделаем киральный поворот с параметром β так чтобы $\sigma' \neq 0, \pi = 0$. В этом случае мы возвращаемся к решению (34). Хорошо известно, однако, что такой поворот далеко не безобидный для произвольных значений β - он меняет вид эффективного действия (33), добавляя к I_{eff} фактор $2N\sigma\beta/2\pi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu$ [22]. Этот фактор вырождается только при $N\beta = \pi k$. В этом случае мы возвращаемся к исходной теории, эквивалентной (33). Возвращаясь к исходным σ, π полям мы видим, что имеется N теорий, различающихся величиной конденсата:

$$\begin{aligned} \langle \sigma + i\pi \rangle_k &\sim \exp\{-2\pi k/N\} \\ \langle \bar{\psi}_2 \psi_2 \rangle_k &\sim \exp\{2\pi k/N\}, \quad k=0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (35)$$

в полном согласии с нашим утверждением (31), основанном на топологическом анализе.

Несколько слов об $SO(N)$ -модели. В этом случае хорошо известно, что $(-1)^F = 2$ [6] и имеется ровно 2 вакуумных состояния, обеспечивающих нарушение 2-кратной дискретной киральной симметрии: $\psi \rightarrow \sigma_3 \psi$. Это в точности согласуется с предлагаемой классификацией, так как $\pi_1(SO(N)) = \mathbb{Z}_2, N > 2$. Эта формальная запись означает, что имеется ровно два элемента группы, требующих отождествления. В свою очередь это приводит к существованию двух вакуумных состояний, как объяснялось выше.

6. Калибровочная $SU(5)$ модель с киральной материей

Наше рассмотрение мы начнем с анализа несуперсимметричной $SU(5)$ -модели с полями $\bar{5}$ и 10 [9]. Как известно в этом случае аномалии отсутствуют. Нетривиальный момент, являющийся основным стимулом анализа этой модели, состоит в следующем. Модель содержит одно поле фундаментального представления - $\bar{5}$ и одно - 10, не инвариантные относительно преобразо-

ваний из центра. Но несмотря на это имеется ровно пять элементов группы, требующих отождествления. Как мы знаем это приводит в конечном счете к допустимости дробных топологических преобразований $\sim k/5$, и существованию пяти вакуумных состояний. К сожалению, решение модели отсутствует, и мы не имеем возможности проверить результат этой классификации. Однако можно рассмотреть суперсимметричное обобщение этой модели [10]. В этом случае имеются сильные аргументы [10] в пользу нарушения суперсимметрии в модели и отличии от нуля конденсата глюино $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$.

С другой стороны наша классификация дискретных свойств глобальной группы при переходе к $SUSY$ не изменяется, так как скалярные партнеры $\bar{5}, 10$ преобразуются по тем же представлениям. Физические проявления дискретных свойств группы, конечно, могут меняться. Мы покажем, что киральный заряд глюино принимает в точности подходящий набор значений, чтобы обеспечить $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$, нарушив при этом соответствующую дискретную симметрию \mathbb{Z}_5 . Ситуация в точности напоминает $SUSY$ -глюодинамику, с той лишь разницей, что $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$ означает нарушение суперсимметрии в данной модели [10]. Таким образом, единственное нетривиальное место состоит в том, что $\pi_1 \sim \mathbb{Z}_5$ в присутствии поля фундаментального представления. Именно этому пункту мы и уделим основное внимание в настоящем разделе.

Напомним основные свойства модели [9]. Обозначим фермионные поля: ψ_a - поле $\bar{5}$ и ψ^{ab} - поле 10, где $a, b = 1, \dots, 5$. Модель обладает двумя $U(1)$ наивными симметриями: $U(1)_{\bar{5}}, U(1)_{10}$. Обозначим соответствующие токи $a_\mu^{\bar{5}}$ и a_μ^{10} соответственно. Каждая симметрия в отдельности нарушается аномалией, однако комбинация $3a_\mu^{\bar{5}} - a_\mu^{10} \equiv V_\mu$ свободна от аномалий: $\partial_\mu V_\mu = 0$ [9]. Другая комбинация $A_\mu \equiv a_\mu^{\bar{5}} + 3a_\mu^{10}$ аномальна: $\partial_\mu A_\mu = 20\varrho$, но сохраняет дискретную подгруппу

$$\begin{aligned} \psi^{bc} &\rightarrow e^{i\frac{2\pi}{10} 3k} \psi^{bc} \\ \psi_a &\rightarrow e^{i\frac{2\pi}{10} k} \psi_a \end{aligned} \quad k = 0, \dots, 9 \quad (36)$$

Это находится в согласии с тем, что $SU(5)$ -синглетный оператор^ж:

$$A = \sum (\bar{5} \times 10) \sum (10 \times 10) \\ \sum (\bar{5} \times 10) = \psi_a \psi^{bc} \sum_{bc}^9, \sum (10 \times 10) = \sum_{abcd} \psi^{ab} \psi^{cd}, \quad (37)$$

инвариантный относительно произвольных $U(1)_A$ преобразований, сохраняет свой вид при преобразованиях (36).

Напомним также, что при калибровочных преобразованиях из центра поля $\bar{5}$, 10 изменяются следующим образом:

$$\bar{5}: \psi_a \rightarrow e^{-i \frac{2\pi}{5} k} \psi_a \\ 10: \psi^{bc} \rightarrow e^{+i \frac{2\pi}{5} k} \psi^{bc} \quad k=0,1,2,3,4 \quad (38)$$

Относительно не аномальных $U(1)_V$ -преобразованиях аналогичная формула имеет вид:

$$\bar{5}: \psi_a \rightarrow e^{3i\alpha} \psi_a \\ 10: \psi^{bc} \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^{bc} \quad (39)$$

Для классификации, как обычно, необходимо найти элементы группы, требующие отождествления. Это определит глобальные свойства группы. Легко убедиться, что пять элементов из группы $SU(5) \times U(1)_V$ должны быть отождествлены:

$$SU(5) \times U(1)_V \rightarrow (k, \frac{\alpha}{2\pi}) = (0,0); (1, \frac{2\pi}{5}); (2, \frac{4\pi}{5}); (3, \frac{6\pi}{5}); (4, \frac{8\pi}{5}). \quad (40)$$

Здесь запись $(k, \frac{\alpha}{2\pi}) =$ означает, что суперпозиция преобразований из центра (38) с данной величиной "к" и из (39) с данной величиной $\frac{\alpha}{2\pi}$ не изменяют вида полей ψ (и, конечно, A). Тем самым соответствующие преобразования должны быть отождествлены и глобальной группой инвариантности является: $SU(5) \times U(1) / Z_5, \tau, \sim Z_5$. Согласно стандартной идеологии (разделы 2,3) это означает, что допустимы периодические граничные условия на U лишь с точностью до дискретных поворотов (40). Как обычно, это приводит к существованию пяти вакуумных состояний с топологическими числами $\sim 1/5$ и киральными Q_A -зарядами $= 4k$ (в этом

ж) Здесь \sum_{bc}^9, \sum_{abcd} - численные коэффициенты подобраны таким образом, чтобы сформировать $SU(5)$ синглет. Это всегда возможно, так как $5 \times 10 = 5 + 45, (10 \times 10)_{sym} = 5 + 50$.

легко убедиться из аномалии). Физическими вакуумными состояниями будут, как и ранее, суперпозиции вида (20). Квантовые числа $|k\rangle$ - состояний в точности подходят, чтобы обеспечить ненулевое значение (37): $\langle \Omega_e | A | \Omega_e \rangle \sim \exp\{-2\pi i k/5\}$. Этой величиной и характеризуются пять физических вакуумов.

Несколько слов о суперсимметричном обобщении модели [10]. Кроме обсуждавшихся выше симметрий добавляется так называемая $U(1)_R$ -инвариантность, связанная с введением дополнительного фермиона - глюино. Этот факт не изменяет возможности отождествления (40), так как в теории не появляется полей новых представлений. Поэтому, соответствующие киральные заряды глюино $Q_{51} = 0, 2, \dots, 8$, как и в $SUSY$ -глюодинамике (раздел 3). Это обеспечивает существование конденсата глюино (23), что находится в согласии с [10].

Как уже отмечалось, единственный нетривиальный момент настоящего анализа состоит в том, что даже в присутствии полей фундаментального представления элементы центра Z_5 сохранили свою роль, которую они играли в $SUSY$ глюодинамике. Это и обеспечивает $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$.

7. СКУД

Модель подробно изучалась в работах [II-I4]. Основная цель настоящего анализа - выяснение глобальных свойств группы. Как и в предыдущих разделах мы укажем элементы, требующие отождествления. Это приведет, как мы увидим, к допустимости дробных топологических преобразований и существованию \mathcal{N} (для группы $SU(N)$) вакуумных состояний в полном согласии с [6].

Совершенно отдельный вопрос - как проявляют себя эти \mathcal{N} состояний? Этот вопрос, конечно, динамический и не имеет ответа в рамках классификаций^ж. Однако модель поддается количественному изучению в режиме слабой связи: $m \ll 1, N_f \leq N_c - 1$. В этом случае существование \mathcal{N}_c состояний демонстрируется яв-

ж) В частности, известно, что глюодинамика имеет \mathcal{N}_c состояний. Однако до сих пор неизвестно, как они себя проявляют. Имеются лишь спекуляции [4, 5] на эту тему.

но [I2-I4]. Кстати, в этом состоит одна из причин рассмотрения именно суперсимметричных теорий для подтверждения предлагаемой классификации - они проще для динамического анализа. Для классификации же наличие суперсимметрии несущественно.

Интересна физическая реализация найденных N состояний - они приводят к спонтанному нарушению дискретной симметрии, являющейся подгруппой трех симметрий: $SU(N_f)_L, U(1)_V, U(1)_R$, см. ниже.

Приступим к более последовательному изложению СКХД с N_c -цветами и N_f - ароматами [II-I4]. В безмассовом пределе Лагранжиан инвариантен относительно следующих преобразований:

$$G = SU(N_c) \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_R \quad (41)$$

Здесь все симметрии, кроме $U(1)_R$, те же, что и в обычной КХД. Как и в обычной КХД, имеется $U(1)_A$ -симметрия, нарушаемая аномалией. Кроме того, имеется специфичная для суперсимметрии, так называемая $U(1)_X$ -инвариантность, также нарушаемая аномалией. Некоторая суперпозиция $U(1)_X$ и $U(1)_A$ -преобразований - есть $U(1)_R$ -симметрия:

$$\lambda \rightarrow e^{-i\alpha} \lambda, \quad \psi \rightarrow \exp\{i\alpha \frac{N_c - N_f}{N_f}\} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp\{i\alpha \frac{N_c - N_f}{N_f}\} \bar{\psi} \quad (42)$$

$$\psi \rightarrow \exp\{i\alpha \frac{N}{N_f}\} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp\{i\alpha \frac{N}{N_f}\} \bar{\psi}$$

свободная от аномалий и вводимая в (41).

Введение массы в теорию разрушает симметрию до группы:

$$G = SU(N_c) \times SU(N_f)_V \times U(1)_V \quad (43)$$

Утверждение (43), однако, не совсем точное. Дело в том, что суперпозиция калибровочных преобразований из центра $Z_{N_c} \in SU(N_c)$ и из $U(1)_V$ группы $e^{i\alpha}$ с параметром $\alpha = -\frac{2\pi}{N} \kappa$ не меняет вида полей фундаментального представления $\psi, \bar{\psi}$.

*) Это явление аналогично рассмотренному в разделах 4,5, где существование дробных топологических чисел подтверждается точным решением.

Таким образом группой является $\frac{SU(N_c) \times SU(N_f)_V \times U(1)_V}{Z_{N_c}}$ и соответствующие преобразования должны быть отождествлены с единичным. Таким образом, мы приходим к выводу о существовании дробных топологических преобразований в соответствии с допустимостью граничных условий $U(\varphi) = Z_N U(-\varphi)$. Это обеспечивает N_c вакуумных состояний в согласии с формулой $\pi_1 \sim Z_{N_c}$.

Физическое проявление этих N_c состояний в данном случае хорошо известно. Вновь, как и в $SUSY$ -глюдинамике (раздел 3) легко вычислить киральные заряды этих состояний: $\varphi_{\text{кир}} = 0, 2, \dots$ Можно было бы думать, что суперпозиция (20) в точности подходит для конденсации глюино $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$ с нарушением дискретной симметрии $\lambda \rightarrow \exp\{-i\pi \kappa / N\} \lambda$. Рассматриваемый случай, однако, менее тривиальный, так Лагранжиан не инвариантен относительно отдельно взятых преобразований $\lambda \rightarrow \exp\{-i\pi \kappa / N\} \lambda$ из-за жаквских связей $\sim \psi^+ \lambda \psi$. Однако преобразования:

$$\tilde{Z}_{2N} : \begin{cases} \lambda \rightarrow \exp\{-i\pi \kappa / N\} \lambda \\ \psi \rightarrow \exp\{-i\pi \kappa / N\} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp\{-i\pi \kappa / N\} \bar{\psi} \end{cases} \quad (44)$$

являющиеся суперпозицией:

$$\tilde{Z}_{2N} : \begin{cases} Z_{N_f}(SU(N_f)_L) = \exp\{-i2\pi \kappa / N_f\} \\ U(1)_V = \exp\{-i\pi \kappa / N_f\} \\ U(1)_R(42), \text{ с } \alpha = \pi \kappa / N \end{cases} \quad (45)$$

не аномальны [I3] и являются дополнительной к G (43) группой симметрии. Эта дискретная группа симметрии, не нарушаемая аномалией, аналогична хорошо изученной в $SUSY$ -глюдинамике. Так что в данном случае спонтанное нарушение \tilde{Z}_{2N} (44) означает возможность конденсации не только $\langle \lambda^2 \rangle$, но и ψ - поля.

Условная запись, аналогичная (24), (29), (32), и демонстрирующая связь глобальных свойств группы с нарушением диск-

*) Строго говоря, у группы $SU(N_f)_V$ и $U(1)_V$ также имеется N_f общих элементов. Однако, так как это не "завязано" на калибровочную $SU(N_c)$ группу, мы не акцентируем здесь внимания.

ретной симметрии выглядит так:

$$\frac{SU(N_c) \times SU(N_f)_V \times U(1)}{Z_{N_c}} \times \tilde{Z}_{2N} \quad (46)$$

Причем, \tilde{Z}_{2N} нарушается, как обычно до $Z_2: \lambda \rightarrow -\lambda$

В заключении настоящего раздела, имея в виду в дальнейшем анализ КХД, обсудим возможность существования конденсата, построенного из кварков фундаментального представления $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Как видно из приведенного выше решения такой конденсат не возникает (хотя имеется остаточная калибровочная симметрия), точнее он мал $\sim m_q$. Для пояснения этого факта вычислим киральный $U(1)_A$ заряд обсуждавшихся выше вакуумных состояний с $Q \sim 1/N_c$. Используя аномалию легко убедиться, что $\varphi_5 = \frac{2N_f}{N_c} \kappa$ (см. следующий раздел) не принимает вакуумных значений 0, 2, 4 для произвольных N_f, N_c . Поэтому соответствующие вакуумные состояния не могут обеспечить $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$.

Ясно, что ситуация с $N_f = N_c$ выделенная. В этом случае спонтанное нарушение киральной симметрии в принципе допустимо (обсуждается теория с $m_q = 0$). Сингулярное по "m" поведение, характерное для теорий с $N_f < N_c$, в данном случае отсутствует; суперпотенциал не генерируется, режим слабой связи не реализуется. Вместе с тем, индекс Виттена $(-1)^F$ для $N_f = N_c$ $m_q = 0$ может быть вычислен Ξ с помощью так называемых "мультиплетированных" граничных условий [23]. Он равен N_c , в согласии с классификацией. Более того, приведены аргументы [24] в пользу нарушения киральной симметрии в СКХД при $N_f = N_c$.

8. КХД, $N_f = N_c$

Итак, главный итог, который мы вынесли из анализа SUSY-теорий состоит в том, что классификация, основанная на цент-

*) Причина, по которой индекс $(-1)^F$ не может быть вычислен при $m = 0$ и $N_f < N_c$ ясно видна из решения [12-14] - вакуумные состояния "уходят" на бесконечность и теория вообще не имеет низшего состояния.

ре, может быть обобщена и на теории с полями в фундаментальном представлении. Более того, классификация допускает нарушение киральной симметрии, если:

$$N_f = N_c \quad (47)$$

Нижее мы дадим дополнительные аргументы в пользу такой точки зрения. Первый и самый простой аргумент состоит в следующем. Предположим, что в вакууме формируется кварковый конденсат (как мы знаем, в КХД это действительно происходит), тогда киральные заряды вакуумных, чисто калибровочных состояний ($A_i = -i \bar{u} \gamma_5 u$) могут принимать только значения 0, 2, 4, Стандартные состояния (I) конечно удовлетворяют этому требованию, см. (I4). Легко убедиться, что в данном внешнем поле $A_i = -i \bar{u} \gamma_5 u$ с дробным индексом κ/N_c в теории с N_f - кварками в фундаментальном представлении, φ_5 имеет вид:

$$\varphi_5 = \frac{2N_f}{N_c} \kappa, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N_c - 1 \quad (48)$$

Результат (48) может быть получен аналогично тому, как это было сделано для присоединенного представления (I9). Из (48) видно, что условие $N_f = N_c$ (47) выделено допустимыми вакуумными значениями $\varphi_5 = 0, 2, 4, \dots$. Поэтому ниже будут обсуждаться только теории, удовлетворяющие требованию (47).

С точки зрения глобальных свойств группы ситуация сходна с анализом раздела 7. Именно суперпозиция калибровочных преобразований из центра $Z_{N_c} \in SU(N)$ и из $U(1)_V$ -группы $e^{i\alpha}$ с параметром $\alpha = -\frac{2\pi}{N} \kappa$ не изменяет вида полей фундаментального представления. Тем самым глобальная группа содержит фактор Z_N в знаменателе и соответствующие преобразования отождествляются с единичным. Также как и ранее мы приходим к выводу о допустимости граничных условий вида $U(\infty) = Z_N U(-\infty)$. Это обеспечивает $N_c = N_f$ вакуумных состояний (20) в согласии с формулой $\pi_1 \sim Z_N$. Наличие $N_f = N_c$ секторов можно было предвидеть и заранее исходя из аномалии $U(1)_A$ -аксиального тока:

$$\partial_\mu a_\mu \sim N_f \theta \tilde{F} \quad (49)$$

Легко убедиться, что дискретный киральный поворот $\bar{\psi}_k \psi_k \rightarrow \exp\{i 2\pi k / N_f\} \bar{\psi}_k \psi_k$, $k = 0, \dots, N_f - 1$ не нарушается аномалией. Если при этом $\langle \bar{\psi} \psi \rangle \neq 0$, то это отвечает нарушению соответствующей дискретной симметрии и наличию N_f вакуумных секторов, различающихся величиной кваркового конденсата:

$$\langle \bar{\psi}_k \psi_k \rangle \sim \exp\{-i 2\pi k / N_f\} \bar{\psi}_k \psi_k, \quad k = 0, \dots, N_f - 1 \quad (50)$$

Соотношение $N_f = N_c$ можно понять несколько иным путем, анализируя вопрос отождествления различных точек. Вернемся на мгновение к кваркам присоединенного представления и рассмотрим следующую величину $\psi^{adj}(\varphi = 2\pi) \psi^{adj}(\varphi = 0)$ в вакуумном поле (6). Эта величина является калибровочно-инвариантной, так как дополняющий до калибровочной инвариантности фактор $W_{adj} = \exp\{i \int \mathcal{F}_{adj} dx_\mu\} = 1$. Именно поэтому точки $\varphi = 2\pi$ и $\varphi = 0$ можно было отождествить и $(\psi(\varphi = 2\pi) \psi(\varphi = 0))^{adj} = \psi^2(0)^{adj}$ — явно калибровочно-инвариантная величина.

Вернемся к фундаментальному представлению. В этом случае $[\bar{\psi}_k(\varphi = 2\pi) \psi_k(\varphi = 0)]_{fund.}$ — не калибровочно-инвариантная величина, но преобразуется как $W_{fund}^{-1} = \exp\{i \int \mathcal{F}_{fund} dx_\mu\} = \exp\{i 2\pi k / N_f\}$. Но этот фактор есть в точности дискретный киральный поворот величины $\bar{\psi}_k \psi_k$, если $N_f = N_c$. Таким образом, точки $\varphi = 2\pi$, $\varphi = 0$ можно отождествить с точностью до дискретного кирального поворота. Возможность отождествления этих точек, с другой стороны, означает допустимость калибровочных преобразований с $W(9)$. Таким образом, к соотношению (47) мы подошли с совершенно иной стороны. Именно (47) означает, что фермионы могут быть наложены периодические граничные условия лишь с точностью до дискретного кирального поворота $\#$.

Наконец приведем еще один аргумент, поясняющий соотношение (47). Аргумент основан на рассуждениях, очень напоминающих механизм нарушения калибровочной симметрии [25, 26] в теориях типа Калуцы-Клайна. Мы преследуем прямо противоположную цель —

$\#$) Именно в этом месте проявляется непротиворечивость классификации и нарушения дискретной киральной симметрии.

сохранить $SU(N_c)$ -симметрию (нарушив при этом дискретную киральную). Однако формализм [25, 26] — введение граничных условий типа твистованных, оказывается вполне адекватным рассматриваемой проблеме.

Мы уже упоминали, что в теории с N_f в фундаментальном представлении, аксиальная $U(1)$ -аномалия (49) сохраняет дискретную подгруппу: $\bar{\psi}_k \psi_k \rightarrow e^{i\alpha} \bar{\psi}_k \psi_k$, $\alpha = 2\pi k / N_f$. На языке параметра кирального преобразования α это можно изобразить рис. 5 с отождествлением соответствующих точек. Действительно, если дискретная киральная симметрия не нарушена, то преобразования с параметром α и $\alpha + \frac{2\pi}{N_f}$ эквивалентны, то есть:

$$\begin{aligned} \varphi(g(\alpha)) &= \varphi(\alpha + \frac{2\pi}{N_f}) = \varphi(\alpha) \\ g(\alpha): \alpha &\rightarrow \alpha + \frac{2\pi}{N_f} \end{aligned} \quad (51)$$

где φ — любой локальный объект (например $\bar{\psi}_k^i \psi_k^j$), в общем случае цветной. Соотношение (51) напоминает выражение (4) в смысле отождествления точек $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{2\pi}{N_f}$ в (51) и $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ в (4). Соотношение (51) можно понимать как тип граничных условий. Вместо (51) можно рассмотреть более общий вид граничных условий:

$$\varphi(g(\alpha)) = \varphi(\alpha + \frac{2\pi}{N_f}) = U_g \varphi(\alpha) \quad (52)$$

где U_g — элемент группы $SU(N_c)$, то есть отождествление различных " α " происходит лишь с точностью до калибровочных преобразований (это напоминает условия типа твистованных). Зададимся вопросом — какие величины U_g допустимы, чтобы цветовая симметрия $SU(N_c)$ осталась ненарушенной? $\#$.

Во-первых очевидно, что преобразование g (51) определено

$\#$) В работе [26] ставился прямо противоположный вопрос — какова схема нарушения калибровочной симметрии с заданными граничными условиями. Заметим, что задание граничных условий вида (52) соответствует определенному выбору вакуумного состояния и фазы теории. Какая из возможных фаз будет реализована, есть вопрос динамический, и не имеет ответа ни в рамках настоящей работы, ни в [26]. Соотношение типа (52) есть лишь элегантный способ представить информацию о выборе допустимого вакуумного состояния.

лишь по модулю N_f , так что $g^{N_f} = I$; из (52) при этом следует, что $U_g^{N_f} = I$. Во-вторых, мы требуем сохранения калибровочной $SU(N_c)$ -симметрии, то есть $[U_g, \lambda] = 0$, так что U_g пропорциональна единичной матрице. Оба эти требования согласованы только в случае, если $N_f = N_c$ и $U_g = \exp\{2\pi i k/N_f\}$ есть центр $SU(N_c)$. Тем самым мы вновь воспроизводим соотношение (47) совершенно независимым образом.

Отметим, что выбор (52) с $U_g = \exp\{2\pi i k/N_f\}$ означает выбор вакуумного состояния со спонтанно нарушенной дискретной киральной симметрией. Таким образом, аккуратное выяснение глобальных свойств группы позволило дать более тонкую классификацию вакуумных состояний. Более грубая классификация (I) справедлива всегда, безотносительно к виду представлений и количеству ароматов в теории.

Итак, основной итог настоящего раздела состоит в том, что классификация калибровочных преобразований, описанная в разделах 1-3 и основанная на центре, может быть обобщена на теории с полями в фундаментальном представлении, при этом допускает нарушение киральной симметрии, если число ароматов N_f в точности равно числу цветов N_c . Мы постарались объяснить это с различных точек зрения. Но основная идея состоит в следующем. Имеющиеся в наличии N_c состояний (из-за $\pi_1 \sim Z_{N_c}$) обычно находят свою физическую реализацию в нарушении дискретной симметрий (см. (24), (29), (32), (46)). В данном случае такая возможность представляется только при $N_f = N_c$. В этом случае дискретная Z_{N_f} -симметрия, не нарушаемая аномалией, может быть нарушена благодаря существованию ровно $N_c = N_f$ вакуумных состояний (20) с нужными свойствами. Как проявляют себя эти N_c состояний в случае $N_c \neq N_f$ остается открытым вопросом (см. сноску на стр. 29).

9. Заключение

Основная идея работы состоит в следующем. Наличие центра в группе $SU(N)$ позволяет провести более тонкую (по сравне-

нию со стандартной, основанной на индексе (I)) классификацию вакуумных состояний в отсутствие фундаментального представления. В этом случае группой является $SU(N)/Z_N$ и нетривиальность первой гомотопической группы $\pi_1(SU(N)/Z_N) \sim Z_N$ означает существование дополнительной классификации. Величиной, характеризующей соответствующие состояния является Вильсоновская линия $W_k = P \cdot \exp \int A_\mu dx^\mu = \exp\{2\pi i k/N\}$, принимающая значения из центра. В этом смысле (как характеристика)

W является аналогом величины $n(1)$ - топологического индекса. Обсуждаемая классификация приводит к более широкому классу допустимых калибровочных преобразований, что связано с возможностью отождествления границ лишь с точностью до центра. Физический смысл дополнительной классификации легко понять приведя аналогию со струной. Если в теории имеются лишь частицы с зарядом, большим фундаментального, то струна с дробным потоком останется ненаблюдаемой. Кроме того, если такая струна переносит нулевую энергию и ненулевой поток - то это в точности дополнительное к тривиальному классическое вакуумное состояние.

Приведенная классификация позволяет рассматривать любые теории без полей фундаментального представления (о них ниже). В частности, в чистой глюодинамике имеется N различных вакуумных секторов. Включение кварков в присоединенном представлении не портит этой классификации, причем, в данном случае, вакуумные состояния различаются величиной конденсата $\langle \psi^2 \rangle \sim \exp\{i 2\pi k/N\}$. Такая теория оказывается суперсимметричной и может быть проанализирована совершенно иными методами. Согласованность результатов в этом случае является сильным аргументом в пользу справедливости обсуждаемой классификации.

Частный, но с практической точки зрения очень важный случай связан с возможностью сохранения классификации в теории с кварками в фундаментальном представлении. Грубо говоря, причина этого явления связана с появлением дополнительных глобальных симметрий при введении в теорию кварков. Причем, при определенных параметрах, суперпозиция калибровочных и глобальных преобразований не изменяет вида полей. Так что глобальная

группа симметрии содержит фактор Z_N в знаменателе (Z_N - число отождествленных элементов), групповое пространство становится неоднозначным: $\pi_1 \sim Z_N$ и мы возвращаемся к описанному выше случаю.

Соответствующие идеи апробированы в решаемых теориях: 2х-мерных калибровочных и $\mathcal{N}=1$ -моделях, $SUSY$ -теориях и т.д. Во всех случаях предлагаемая классификация согласуется с известными результатами.

Отдельный вопрос связан с выяснением физических проявлений этих \mathcal{N} состояний. В разобранных нами примерах эти \mathcal{N} состояний обеспечивают нарушение дискретных (чаще всего киральных) симметрий. Однако в некоторых случаях вопрос реализации этих \mathcal{N} состояний остается открытым. В частности это касается обычной $3+1$ глюодинамики [4,5], $2+1$ калибровочной $SU(N)$ -теории [27], не суперсимметричной $SU(N)$ -модели. Имеются лишь различные спекуляции [4,5,27] на эту тему в пользу важности соответствующей симметрии в анализе фазовых переходов и в явлении конфайнмента.

Одним из приложений классификации является анализ возможного нарушения суперсимметрии, см. раздел 6. Точнее, при определенных дополнительных предположениях существование $\langle \lambda^2 \rangle$ является триггером нарушения суперсимметрии. Топологический же анализ позволяет ответить на вопрос о допустимости классификации в присутствии киральных полей в фундаментальном представлении. Если такая классификация допустима и вакуумные состояния имеют нужные свойства, обеспечивающие $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$ то в этом случае суперсимметрия может нарушаться, см. раздел 6. Некоторые усилия в этом направлении уже предприняты [28]. В этой работе анализировалась возможность нарушения суперсимметрии в группе E_8 , играющей важную роль в суперструнных теориях [26].

И наконец, что касается КХД, оказалось, что классификация, основанная на центре, допускает нарушение киральной симметрии только в случае $N_f = N_c$ (в КХД это условие вы-

полнено! $N_f = N_c = 3$). Основная идея состоит в том, что дискретная Z_{N_c} -симметрия, не нарушаемая аномалией, может быть нарушена существованием $N_c = N_f$ вакуумных состояний (20) с нужными киральными зарядами.

В заключении автор выражает благодарность М.А.Шифману, Э.В.Шуряку, В.Л.Черняку и особенно А.И.Вайнштейну за полезные обсуждения и замечания.

Приложение

О связи классификации, основанной на центре, с проблемой неоднозначностей Грибова.

Настоящий анализ связан с наблюдением, что под классификацию разделов I-3 в точности подпадают изученные ранее вакуумные состояния Грибова [15]. Напомним, что существование таких вакуумов связано с явлением неоднозначности при введении кулоновской калибровки $A_0 = 0, \partial_i A_i = 0$. Именно, кроме тривиального решения $A_i = 0$ существует нетривиальное, всюду регулярное решение $A_i^r = -i u^r \partial_i u, u \neq 1$

Имея выражение для вакуумного потенциала A_i^r можно явно проверить на частном примере общие утверждения типа (48). Причем, благодаря сферической симметрии A_i^r , задача может быть значительно упрощена сведением ее к эффективно 2-х мерной.

Прежде всего напомним некоторые свойства вакуума Грибова [15]:

$$A_0 = 0, A_i^a \frac{\sigma^a}{2} = -i u^r \partial_i u, u = \exp\left\{i g(r) \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right\} \quad (A1)$$

Здесь $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули, $n^i = x^i/r$ - единичный орт. Условие поперечности $\partial_i A_i = 0$ приводит к следующему уравнению на $g(r)$:

* Вообщем говоря, неоднозначности Грибова имеют место не только для чисто калибровочных вакуумных полей, но и для полей с $G_{\mu\nu} \neq 0$. Однако здесь обсуждаются только вакуумные поля.

$$\partial_i A_i = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} (r^2 g') = 2 \sin g(r) \quad (A2)$$

$$r = \ln r \rightarrow \frac{d^2}{dr^2} g + \frac{d}{dr} g - 2 \sin g = 0 \quad (A3)$$

Уравнение (A3) можно интерпретировать как движение частицы с координатой $g(r)$ в потенциале $V = \cos g$. Член, пропорциональный dg/dr описывает трение. Наложим начальные условия: $g(r \rightarrow -\infty, r=0) = 0$. Очевидно, что при больших $r \rightarrow \infty (r \rightarrow \infty)$ частица остановится в яме с координатой $g(r \rightarrow \infty) = \pi$, рис. 6. Такому решению соответствует следующий асимптотический вид калибровочной матрицы:

$$U(r \rightarrow 0) = 1 \quad U(r \rightarrow \infty) \rightarrow \exp\{i \frac{\pi}{2} \vec{n} \vec{\sigma}\} \quad (A4)$$

Убедимся, что решение (A4) в точности подпадает под классификацию вакуумных состояний (9). Для этого напомним некоторые свойства Вильсоновской линии:

$$W = P \exp i \int_{-\infty}^{\infty} A_\mu dx_\mu \frac{\sigma^a}{2} \quad (A5)$$

взятой, например, вдоль Z -направления. Легко убедиться, что при калибровочных преобразованиях U , W (A5) преобразуются как напряженность, то есть следующим образом:

$$W' = U'(z \rightarrow \infty) W U(z \rightarrow -\infty) \quad (A6)$$

Для тривиального вакуумного поля $A = 0$ имеем $W = I$. Теперь сделаем калибровочное преобразование с U (A1), отвечающее вакуумному состоянию Грибова. В этом случае имеем:

$$W(A_i^n) = e^{i \frac{\pi}{2} \sigma_z} [W(A=0) = I] e^{i \frac{\pi}{2} \sigma_z} = -I \in Z_2 \quad (A7)$$

При получении (A7) было использовано асимптотическое выражение для калибровочной матрицы (A4). Из вывода (A7) ясно, что если калибровочные преобразования при $z = \pm \infty$ отличаются на элемент центра, то W принимает в точности значения из центра. С другой стороны, как уже объяснялось, глюон не чувствует Z_N , поэтому преобразования $U(z \rightarrow \infty)$ и $U(z \rightarrow -\infty) =$

$U(z \rightarrow \infty) \cdot Z_N$ должны быть отождествлены, также как и бесконечно удаленные точки.

Итак, вакуумное поле (A1) подпадает под классификацию разделов I-3. Поэтому для поля (A1) справедливы все общие утверждения, сделанные там. Цель настоящего Приложения проверить некоторые из них и, в частности, вычислить киральный заряд вакуумного состояния (A1). Напомним, что из общих соотношений следует, что для теории с N_f дираковскими кварками в фундаментальном представлении, киральный заряд Q_5 вакуумных состояний с нетривиальной величиной W (A5) равен:

$$Q_5 = \frac{2N_f}{N_c} \kappa, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N_c - 1 \quad (A8)$$

В нашем случае (A1), $N_c = 2$, поэтому при $N_f = 2$ мы должны получить $Q_5 = 2$. Проверим это утверждение явно.

Итак, постановка задачи стандартная. Задано внешнее классическое поле (A1). Предполагается стандартный вид взаимодействия кварков с этим полем: $\bar{\psi} \hat{A} \psi$, требуется вычислить киральный заряд $Q_5 = \int d^3x \bar{\psi} \gamma_5 \psi$ этого состояния. Такая постановка задачи является обычной для вычисления квантовых чисел топологически - нетривиальных солитонов (A_i^r в этом смысле может пониматься как статический солитон). Соответствующие методы хорошо изучены, см., например, обзор [21]. Наиболее наглядный, с нашей точки зрения, метод вычисления Q_5 состоит в эффективном сведении задачи к 2-мерной (благодаря сферической симметрии). В этом случае, как будет показано ниже, вычисление Q_5 в $d = 4$ сводится к вычислению дробного фермионного числа F в $d = 2$. Ответ для последней задачи хорошо известен.

Ввиду нетривиальной зависимости лишь от " z " удобно перейти к 2-х мерной записи, аналогично тому, как было сделано в [29]. Введем S -волновые фермионы:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{8\pi r^2}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^{\alpha i} = (g_1 \epsilon^{\alpha i} + i \vec{n} \vec{\sigma}^{\alpha i} \epsilon^{i j h_2}), \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{8\pi r^2}} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{\alpha i} = (g_2 \epsilon^{\alpha i} + i \vec{n} \vec{\sigma}^{\alpha i} \epsilon^{i j h_2}), \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} g_2 \\ -h_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A9)$$

С учетом (AI) приходим к следующему выражению для $L = \bar{\Psi} \hat{D} \Psi$:

$$S = \int L dx_0 dz, \quad L = \bar{\chi}_1 i \hat{\partial} \chi_1 + \bar{\chi}_2 i \hat{\partial} \chi_2 + \frac{1}{2} \cos g(z) (\bar{\chi}_1 i \delta_5 \chi_1 + \bar{\chi}_2 i \delta_5 \chi_2) - \frac{1}{2} \sin g(z) [\bar{\chi}_1 \chi_1 - \bar{\chi}_2 \chi_2] - \frac{1}{2} g'(z) [\bar{\chi}_1 i \delta_5 \chi_1 - \dots] \quad (AI0)$$

Здесь $\alpha(i)$ -спиновой (цветовой) индексы соответственно, δ_μ -матрицы действующие в 2х-мерном пространстве: $\delta_0 = \sigma_3$, $\delta_1 = -i\sigma_1$, $\delta_5 = \sigma_2$. Кроме того в (AI0) сохранены лишь существенные для дальнейшего факторы. Далее, легко убедиться, что фермионный и аксиальный заряды 4-хмерной теории следующим образом выражаются через двухмерные χ_i -поля:

$$B = \int \bar{\Psi} \delta_0 \Psi d^3x = \int dz (\bar{\chi}_1 \delta_0 \chi_1 + \bar{\chi}_2 \delta_0 \chi_2) \equiv F_1 + F_2 \quad (AI1)$$

$$Q_5 = \int \bar{\Psi} \delta_0 \delta_5 \Psi d^3x = \int dz (\bar{\chi}_1 \delta_0 \chi_1 - \bar{\chi}_2 \delta_0 \chi_2) \equiv F_1 - F_2$$

Таким образом, задача свелась к вычислению фермионных зарядов F_i в поле 2х-мерного солитона (AI0). Метод решения этой задачи хорошо известен, ответ имеет следующий вид [2I,30]:*

$$F_1 = -F_2 = \frac{1}{2\pi} \arctg \left(\frac{-\cos g(z)}{\sin g(z)} \right) \Big|_{z=0}^{z=\infty} = \frac{1}{2\pi} \left(g(z) \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=\infty} = \frac{1}{2} \quad (AI2)$$

$$B = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad Q_5 = F_1 - F_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Получим результат (AI2) сразу в 4х-мерной записи без перехода к (AI0).

Задача формулируется следующим образом: Задано взаимодействие кварков ψ_L, ψ_R с вакуумным полем $A_i = -i u^+ \partial_i u$:

$$L_{int} = \bar{\psi}_R \delta_i (\psi_R^+ i \partial_i \psi_R) \psi_R + \bar{\psi}_L \delta_i (\psi_L^+ i \partial_i \psi_L) \psi_L \quad (AI3)$$

необходимо вычислить Q_5 .

Решалась ли похожая (в формальном математическом плане) задача ранее? Ответ - да. Именно задача о нахождении барион-

* Наш пример является частным случаем общей формулы [30], когда скалярное φ_1 и псевдоскалярное φ_2 поля равны: $\varphi_2 \sim \cos g$, $\varphi_1 \sim \sin g$. Смена знака $\varphi_2 \sim \cos g$ при $0 < z < \infty$ может интерпретироваться как существование солитона ($\varphi(+)$ \neq $\varphi(-)$) в 2d теории.

ного заряда скирмиона сводится к лагранжиану, аналогичному (AI3) (см. [2I,3I] и ссылки там же). Различие лишь в том, что в случае со скирмионом, Ψ преобразуется по ароматной $SU(2)$ (у нас - по цветной); вместо барионного заряда B мы вычислим аксиальный Q_5 ; вместо π -мезонного внешнего поля $V = \exp\{-i\pi \sigma^a\}$, которое взаимодействует с разным знаком с левыми и правыми кварками, мы имеем глюонное, взаимодействующее одинаково.

Действительно, π -мезонные внешние поля $\pi^a(x)$ как δ_5 -фазы кварков, имеют следующий лагранжиан взаимодействия с кварками (см., например, [2I, 3I]):

$$L = \bar{\psi}_R \delta_i (\psi_R^+ i \partial_i \psi_R) \psi_R + \bar{\psi}_L \delta_i (\psi_L^+ i \partial_i \psi_L) \psi_L \quad (AI4)$$

$$\psi_R^+ = \psi_L = \exp\{-i\pi^a \sigma^a / 2f_\pi\}$$

Отметим, что аргумент матриц $V_{R,L}$, входящих в (AI4) в два раза меньше аргумента общепринятой матрицы $V' = V^2$, входящей в стандартный киральный лагранжиан:

$$S' = \frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \text{Tr} (\partial_\mu V' / V' \partial_\mu V' / V' + \dots) \quad (AI5)$$

Причина этого различия отмечалась в [3I] и связана с тем, что $V_{L,R}$ описывают фазы левого (правого) кварка, а V' описывает фазы конденсата $\psi_R^+ \psi_L$.

Математическая эквивалентность задач (AI3) и (AI4) сейчас очевидна. Различие состоит лишь в том, что в (AI4) $\psi_R^+ = \psi_L$ и отличен от нуля барионный заряд B , в то время как $Q_5 = 0$. В случае (AI3) $\psi_R = \psi_L$ и $B = 0$, $Q_5 \neq 0$. Этот факт легко проследить, проделав вычисления, аналогичные [2I, 3I]. Результат легко понять и качественно с помощью (AI1). В случае, когда взаимодействие с левыми и правыми кварками имеет разные знаки (как в (AI4)), легко убедиться, что $F_1 = F_2$, $B \neq 0$, $Q_5 = 0$. Вклад L и R кварков складывается в модели Скирми при вычислении B и вычитается при вычислении Q_5 - это хорошо известный результат [2I,3I].

Если мы имеем векторное взаимодействие, то $F_1 = -F_2$ и все происходит наоборот: $B = F_1 + F_2 = 0$, $Q_5 = F_1 - F_2 \neq 0$.

Мы не будем повторять выкладок [2I, 3I] с минимальными видоизменениями, а приведем результат, справедливый для калибровочных матриц, удовлетворяющих классификации разделов I-3:

$$Q_5 = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \text{Tr} (\Omega^+ \partial_i \Omega) (\Omega^+ \partial_j \Omega) (\Omega^+ \partial_k \Omega) \epsilon^{ijk} \quad (\text{AI6})$$

Здесь $\Omega = U^2$ - калибровочная матрица с удвоенной фазой π . Легко убедиться, что для вакуума (AI): $\Omega = U^2 = \exp\{ig(\tau) \bar{n} \bar{\sigma}\}$ и (AI6) воспроизводит результат (AI2):

$$Q_5 = \frac{1}{\pi} (g - \text{sig}) \Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = 1 \quad \begin{matrix} g(\tau=\infty) = \pi \\ g(\tau=0) = 0 \end{matrix} \quad (\text{AI7})$$

$$Q_5 (2 = N_f) = 2$$

Вычисления (AI7) можно было бы и не проделывать, так как (AI6) есть правильно нормированное выражение для отображения $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$. Причем, граничные условия в данном случае ($\Omega \rightarrow \exp\{i\pi \bar{n} \bar{\sigma}\}$) реализуют $Q_5 = 1$. В теории с $N_f = 2$ имеем, соответственно $Q_5 = 2$, в согласии с (A8), (48).

Сделаем еще несколько замечаний, подчеркивающих математическую аналогию между задачами о скирмионе и вакууме Грибова (AI). И "ежовый" анатц для скирмиона и вакуум (AI) характеризуются соотношением $g(\tau=\infty) - g(\tau=0) = \pm\pi$. Это не является случайным совпадением. Действительно, условие кулоновской калибровки для вакуума (AI) приводит к уравнению $\partial_i (U^+ \partial_i U) = 0$. Но это в точности экстремум действия $\int d^4x \text{Tr} (\partial_\mu U)^+ \partial_\mu U$ для стационарного (не зависящего от времени) поля U . Но точно такое действие имеет эффективная киральная теория (AI5) (без скирмовского члена). Поэтому утверждение о наличии солитона в киральной теории по существу эквивалентно существованию вакуума Грибова (AI). Далее наличие ненулевого барионного заряда солитона эквивалентно утверждению о ненулевом аксиальном заряде вакуума (AI). Конечно, энергетические вопросы в модели

* В выражение для барионного заряда [2I, 3I] в модели Скирма также входит матрица V' (AI5), имеющая удвоенную фазу по сравнению с матрицей V (AI4), входящей в лагранжиан.

Скирма ($E \sim \int d^3x u^+ \partial_i u$) и в КХД ($E \sim \int d^3x \epsilon_{\mu\nu}^2$) - разные. Очевидно, что калибровочное поле A_i' (AI) имеет $\epsilon_{\mu\nu} = 0$ и нулевую энергию, масса скирмиона - конечна.

Итак, для топологически нетривиального вакуумного состояния (AI) имеем $Q_5 = 2$ в $SU(2)$ теории с двумя дираковскими фермионами. Это согласуется с общим утверждением (48).

Последний пункт, который мы бы хотели коротко обсудить, связан с так называемой загадкой θ -периода [I6]. Происхождение проблемы связано с точным утверждением, следующим из аномальных тождеств Уорда, что киральный конденсат ведет себя как $\langle \bar{\psi} \psi \rangle \sim e^{i\theta/N_f}$ и имеет период по θ не 2π , а $2\pi N_f$. Точнее, для конденсата имеется N_f различных решений (в предположении равенства всех масс $m_i \ll 1$):

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle \sim e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{N_f}}, \quad k = 0, 1, \dots, N_f - 1 \quad (\text{AI8})$$

Каждое из решений имеет период $2\pi N_f$. Однако, если потребовать, чтобы решение реализовало абсолютный минимум гамильтониана $\sim m \bar{\psi} \psi$, то происходит явление перескока с одного режима на другой. Это приводит к тому, что зависимость $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ от θ будет не аналитической (изломы), но с периодом 2π [I6].

Наше замечание сводится к тому, что для решения проблемы θ -периода нет необходимости придумывать специальный механизм [I6]. Проблема автоматически решается в случае, когда нарушение дискретной киральной симметрии допускается классификацией (9). Это происходит при $N_f = N_c$ (47).

В этом случае оператор $T(2I)$ удовлетворяет соотношению $T^{N_c} = \tilde{T}$, $\tilde{T}|n\rangle = |n+1\rangle$, где $|n\rangle$ - стандартное вакуумное состояние (I). Допустимость T -преобразований означает, что периодом 2π характеризуется величина θ/N_c (а не θ), связанная с T -преобразованиями (а не \tilde{T}). Тем самым стандартная величина θ имеет период $2\pi N_c = 2\pi N_f$ и проблема [I6] автоматически решается.

Общие топологические аргументы о связи неоднозначности Грибова и нетривиальности π_1 -группы приведены в [32].

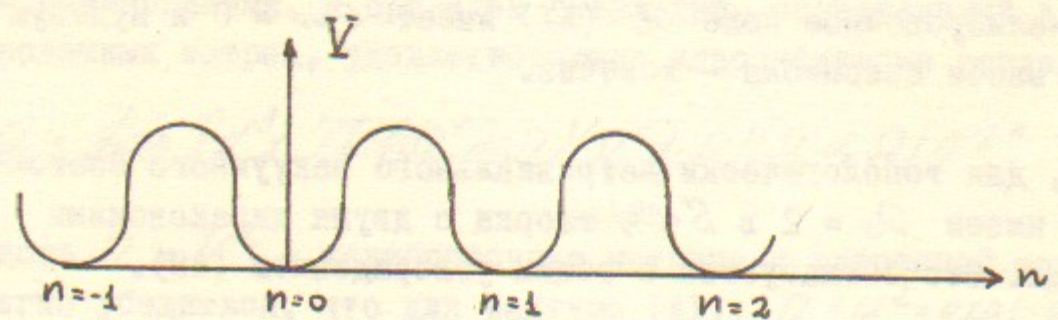


Рис. 1

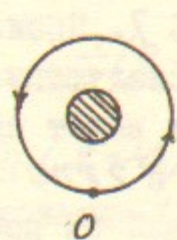


Рис. 2

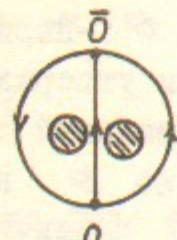


Рис. 3

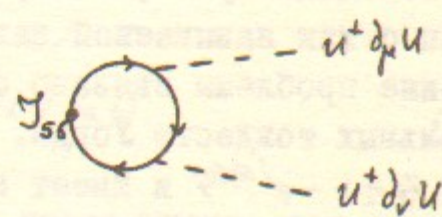


Рис. 4

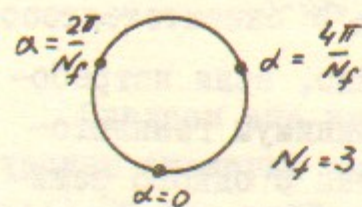


Рис. 5

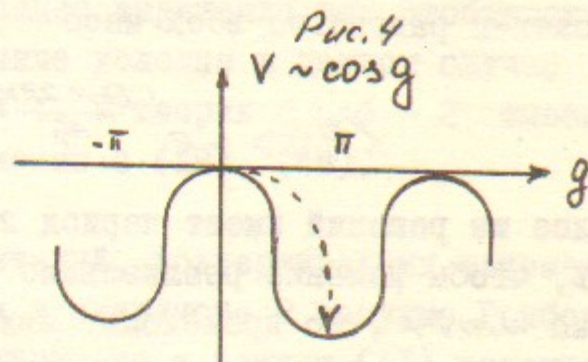


Рис. 6

Подписи к рисункам.

1. Классические вакуумные состояния, классифицируемые целым топологическим числом $n(I)$.
2. То-же что и на рис. 1, но здесь информация о вакуумных состояниях закодирована числом наматываний вокруг диска.
3. В группе $SU(2)$ имеется замкнутый путь $(0 \rightarrow \bar{0})$, не стягиваемый в точку.
4. Диаграмма, поясняющая адиабатический подход [30] к вычислению кирального заряда φ_5 вакуумных состояний $u^+ i d_\mu u$.
5. Отождествление различных элементов киральных $U(1)$ преобразований.
6. Механическая реализация уравнения для вакуума Гибова-движение частицы в поле $V \sim \cos g$

1. A.A.Belavin et al., Phys. Lett. B, 1975, 59, 85.
2. S.Coleman "The Uses of instantons", Plenum Press 1979, Ed. by A.Zichichi.
3. А.И. Вайнштейн, В.И. Захаров, В.А. Новиков, М.А. Шифман, УФН 136 (1982), 553.
4. G't Hooft, Nucl. Phys. B138 (1978), 1.
5. G't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979), 141.
6. E.Witten, Nucl. Phys. B202 (1982), 253.
7. K.D.Rothe, J.A.Swieca, Nucl. Phys. B168 (1980), 454.
8. E.Witten, Nucl. Phys. B149 (1979), 285.
9. S.Dimopoulos et al. Nucl. Phys. B173 (1980), 208.
10. I.Affleck, M.Dine, N.Seiberg, Phys. Lett. 137B (1984), 187; Phys. Rev. Lett. 52 (1984), 1677
Y.Meurice, G.Veneziano, Phys. Lett. 141B (1984), 69.
11. T.R.Taylor et al., Nucl. Phys. B218 (1983), 493.
12. V.Novikov et al., Nucl. Phys. B229, 407; B260 (1985), 157.
13. I.Affleck, M.Dine, N.Seiberg, Nucl. Phys. B241 (1984), 493.
14. D.Amati et al., Nucl. Phys. B249 (1985), 1; B263 (1986), 591.
15. V.N.Gribov, Nucl. Phys. B139 (1978), 1.
16. R.G.Crewther, Phys. Lett. 70B (1977), 349; 93B (1980), 75.
17. А.М.Поляков, ЖЭТФ 68(1975), 1975.
18. S.Mandelstam, Phys. Lett., 53B, 476 (1975).
19. T.T.Wu, C.N.Yang, Phys. Rev. D12 (1975), 3845.
20. Z.F.Ezawa, H.C.Tze, Nucl. Phys. B100 (1975), 1; Phys. Rev. D14 (1976), 1006.
21. A.Niemi, G.W.Semenoff, Phys. Rep. 135 (1986) n3.
22. K.Fujikawa, Phys. Rev. D21 (1980), 2848.
23. E.Cohen, C.Gomez, Nucl. Phys. B223 (1983), 183.

24. C.Gomez, Phys. Lett. 141B (1984), 336.
25. Y.Hosotani, Phys. Lett. 126B (1983), 309; 129B (1983), 193.
26. E.Witten, Nucl. Phys. B258 (1985), 75; B266 (1986), 245; B268 (1986), 79.
27. N.J.Snyderman, Nucl. Phys. B218 (1983), 381.
28. E.Cohen et al., Phys. Lett. 160B (1985), 62.
29. V.A.Rubakov, JETP Lett. 33 (1981), 644. Nucl. Phys. B203 (1982), 311.
G.G.Callan, Phys. Rev. D25 (1982), 2142; D26 (1982), 2058.
30. R.Jackiw, C.Rebby, Phys. Rev. D13 (1976), 3398.
J.Goldstone, F.Wilczek, Phys. Rev. Lett. 47 (1981), 986.
31. Д.И.Дьяконов, В.Ю.Петров, Препринт 967, 1984, Ленинград.
32. I.M.Singer, Comm. Math. Phys. 60 (1978), 7.

А.Р.Житницкий

НАРУШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КХД
И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВАКУУМА, ОСНОВАННАЯ
НА ОТОБРАЖЕНИИ $\pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$

Препринт
№ 86-152

Работа поступила - 23 декабря 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 10.X.86г. МН II824
Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.3,4 печ.л., 2,8 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 152.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90