

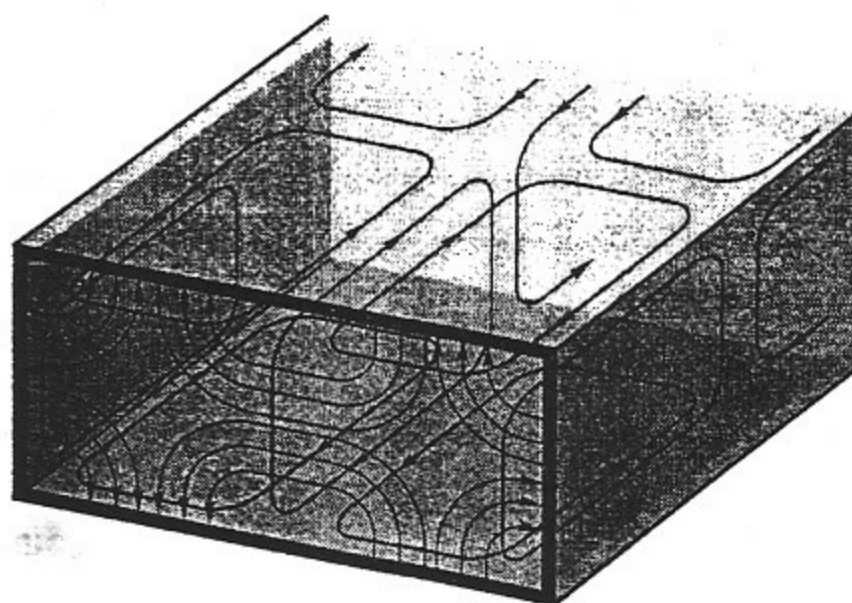
***В 331
Ш.54***

И.А.ШЕХТМАН

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

98-42

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



**ИЯФ - НГТУ
1998**

Основные уравнения электромагнитного поля

Векторы электромагнитного поля. Характеристики среды

Электромагнитное поле — векторное силовое поле, которое можно обнаружить по его действию на электрический заряд. В каждой точке пространства, где имеется поле, в заданный момент времени на пробный электрический заряд q [Кл] действует сила $\vec{F}$ [Н]:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Часть этой силы, не зависящая от скорости движения заряда, характеризует электрическое поле ($\vec{E} \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$ — напряженность электрического поля). Часть силы, зависящая от скорости заряда $\vec{v} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$, характеризует магнитное поле ($\vec{B} \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right]$ — магнитная индукция).

Как и всякое векторное поле, электромагнитное поле создается *истоками* и *вихрями*. Когда имеется несколько источников поля, то поле совокупности источников находится по принципу наложения, если среда, в которой возбуждено поле, — линейная (вакуум, воздух, большинство диэлектриков и проводников).

Среда, занимающая пространство, в котором возбуждается поле (в частности, диэлектрик, магнетик, проводник), характеризуется параметрами:

ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость,

μ — относительная магнитная проницаемость,

γ — удельная электропроводность, $\left[\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} \right]$.

В связи с тем, что среда сама содержит электрические заряды, при приложении поля в диэлектрике возникает поляризация, в магнетике — намагниченность, в проводнике — токи. Поэтому наряду с основными векторами поля, по которым определяется действие силового поля на заряды, вводятся векторы, которые характеризуют поле с учетом свойств среды:

$\vec{D} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$ — электрическое смещение;

$\vec{H} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$ — напряженность магнитного поля;

$\vec{J} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right]$ — плотность тока.

Эти векторы попарно связаны с основными векторами поля через параметры среды *материальными уравнениями*:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

Коэффициенты, входящие в эти соотношения:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8.85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\Phi}{\text{м}} \right],$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12.56 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right].$$

ϵ_0 , μ_0 — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ.

Параметры большинства известных сред в обычных условиях *скалярны и постоянны*. При этом соответствующие пары векторов *коллинеарны*, а их величины связаны *линейной* зависимостью. Такие среды называются *изотропными* и *линейными*. Среда называется *однородной*, если ее параметры одинаковы во всех точках, и *неоднородной*, если параметры меняются от точки к точке.

В дальнейшем изложении среды считаются линейными, изотропными и, если не сделано специальных оговорок, однородными.

Изучая ТОЭ в первых частях курса (Теория цепей), мы, по существу, уже имели дело с уравнениями связи между полем и средой. Однако в Теории цепей нас интересовали не свойства среды и поле в каждой точке, а некоторые интегральные характеристики элементов, запасавших или рассеивавших энергию электрического и магнитного поля: конденсаторов, катушек индуктивности, резисторов. Они характеризовались емкостью C [Ф], индуктивностью L [Гн] и сопротивлением R [Ом].

В качестве идеализированных элементов цепи можно представить себе конденсатор, катушку индуктивности и резистор, как элементы с однородными, постоянными во времени полями. Тогда из связи между векторами поля и параметрами среды легко получить хорошо известные интегральные характеристики элементов, применяемые в теории цепей.

1. Плоский ($a, b \gg d$) конденсатор.

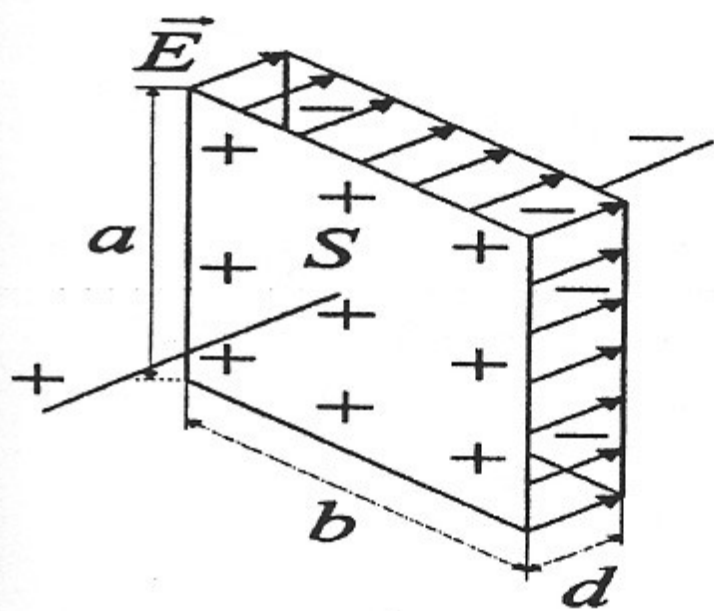


Рис. 1.1. Плоский конденсатор.

Заряд на каждой обкладке конденсатора Q [Кл].

Напряжение на конденсаторе U [В].

Площадь каждой пластины $S = ab$ [м²].

Расстояние между обкладками d [м].

По определению емкости конденсатора: $Q = C \cdot U$.

По размерности: $Q = D \cdot S$, $U = E \cdot d$.

То есть $D \cdot S = C \cdot E \cdot d$.

Но в теории поля $D = \epsilon \epsilon_0 E$.

Следовательно, $\epsilon \epsilon_0 E \cdot S = C \cdot E \cdot d$.

Отсюда $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 \cdot S}{d}$.

Соотношение между D и E ($D = \epsilon \epsilon_0 E$) в точке аналогично соотношению между Q и U для плоского конденсатора $Q = C \cdot U$. Ведь в малой окрестности точки любое поле можно рассматривать как однородное.

2. Одновитковая катушка (виток) из широкой ленты ($\ell \gg r$) с однородным магнитным полем.

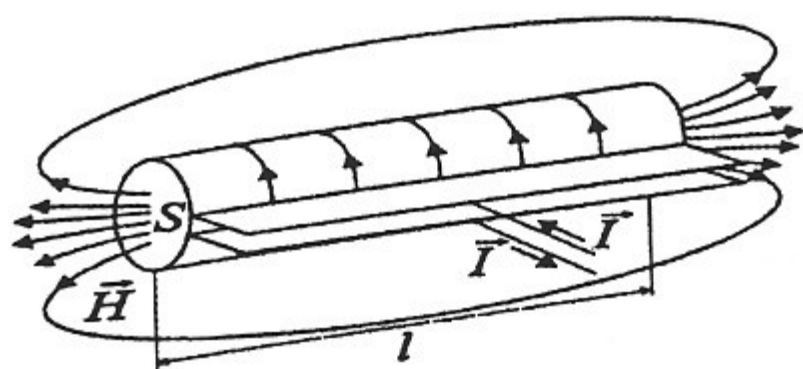


Рис. 1.2. Одновитковая катушка.

I — полный ток катушки, [А],
 ℓ — длина катушки, [м],
 r — радиус катушки, [м],
 S — площадь сечения катушки [м²].

$B \cdot S = \Phi$ [В·с] = Φ [Вб] — магнитный поток по определению. $H \cdot \ell = I$ [А] — по размерности.

По определению индуктивности катушки (витка) $\Phi = I \cdot L$, т.е. $I \cdot L = B \cdot S$. Учитывая, что $B = \mu \mu_0 H$, получаем $I \cdot L = \mu \mu_0 H \cdot S$. То есть

$$L = \frac{\mu \mu_0 \cdot S}{\ell}.$$

Заметим, что выражения $\Phi = L \cdot I$ и $B = \mu \cdot \mu_0 \cdot H$ аналогичны.

3. Провод (линейный проводник, $\ell \gg r$) с равномерным распределением тока по сечению.

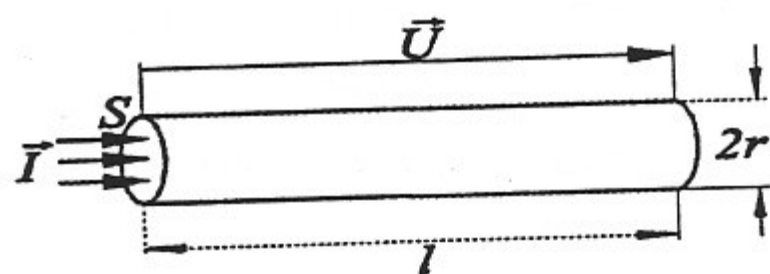


Рис. 1.3. Линейный проводник..

$I = J \cdot S$ — есть ток по определению.

$E \cdot \ell = U$ — падение напряжения на длине провода.

$I = \frac{U}{R}$ — по закону Ома. Но согласно теории

поля $J = \gamma \cdot E$ и, следовательно, $J \cdot S = \frac{E \cdot \ell}{R}$.

$$\text{То есть } \gamma \cdot E \cdot S = \frac{E \cdot \ell}{R}. \quad \text{Отсюда } R = \frac{\ell}{\gamma \cdot S}.$$

Таким образом, соотношение между J и E в точке есть, по-существу, дифференциальная форма закона Ома.

Рассмотрены идеализированные объекты — конденсатор, катушка и линейный проводник с указанными геометрическими ограничениями ($a, b \gg d, l \gg r$). Кроме того, в этом рассмотрении не учтено появление вихревых полей, возникающих при изменении исходных полей во времени.

В действительности поля, как правило, неоднородны в пространстве и переменны во времени. Расчет R, L, C должен производиться с учетом пространственного распределения поля. А изменение поля во времени при достаточно быстрых изменениях делает вообще неприемлемой теорию цепей к расчету электромагнитных устройств.

Уравнения Максвелла

Расчет электромагнитного поля и анализ работы любого устройства, содержащего поле, можно точно провести лишь с помощью решения полной системы уравнений Максвелла, которые являются основными законами электродинамики.

Уравнения Максвелла дают ответ на вопрос о том как распределены в пространстве и во времени *истоки* и *вихри* электромагнитного поля, а это все, что необходимо для определения векторного поля в целом.

Эти 4 уравнения выражают следующие основные законы и факты, многократно подтвержденные экспериментально:

- I. $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — обобщенный закон полного тока.
- II. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — закон электромагнитной индукции.
- III. $\text{div } \vec{B} = 0$ — отсутствие магнитных зарядов, создающих поле.
- IV. $\text{div } \vec{D} = \rho$ — существование электрических зарядов, создающих поле:
 $(Q = \int_V \rho dV, \text{ где } \rho \text{ — объемная плотность электрических зарядов, } \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right]).$

Рассмотрим подробнее каждое из этих уравнений.

I уравнение Максвелла — обобщенный закон полного тока.

Магнитное поле возбуждается *полным током*, т.е. как током, связанным с переносом зарядов (его плотность J), так и током смещения (его плотность $\frac{\partial D}{\partial t}$).

Плотность тока J складывается из двух составляющих:

$$J = J_{\text{пр}} + J_{\text{ст}},$$

где $J_{\text{пр}}$ — плотность тока проводимости, обусловленная электропроводностью среды, $J_{\text{ст}}$ — плотность стороннего тока, т.е. тока, заданного внешними условиями. Хотя все эти токи создают вихри магнитного поля совершенно одинаково, они физически представляют собой различные явления. Ток проводимости — это движение зарядов в среде, ток смещения связан лишь с изменением во времени электрического поля и может течь в вакууме, где зарядов нет. Если ток течет в диэлектрике, то меняется поляризация и в токе появляется составляющая, связанная со смещением зарядов диполей, образующихся в диэлектрике (отсюда и название — ток смещения). Обычно в хорошем диэлектрике током проводимости пренебрегают, а в хорошем металле пренебрегают током смещения.

I уравнение Максвелла в интегральной форме — наглядное выражение закона полного тока. Если уравнение (I) проинтегрировать по поверхности S , опирающейся на контур ℓ , то

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{J} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

По формуле Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell}.$$

Таким образом,

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = I + I_{\text{см}} = I_{\text{полн}},$$

здесь: $I = \int_S \vec{J} d\vec{S}$ — ток, связанный с переносом зарядов через охватываемую контуром

ℓ поверхность S ; $I_{\text{см}} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ — ток смещения через эту же поверхность.

II уравнение Максвелла — закон электромагнитной индукции.

Вихревое электрическое поле возбуждается изменением во времени магнитного поля.

Интегральная форма II уравнения Максвелла получается аналогично тому, как это сделано для I уравнения. Интегрирование ведется по поверхности S , опирающейся на контур ℓ .

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

По формуле Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = \oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell}.$$

Кроме того,

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

Φ — магнитный поток через поверхность S .

Таким образом,

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = e_{\text{инд}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$e_{\text{инд}}$ — ЭДС, индуцированная в контуре ℓ .

III. Магнитное поле не имеет истоков, т.е. является чисто вихревым.

Это уравнение, по-существу, формулирует факт отсутствия магнитных зарядов, которые могли бы возбуждать безвихревое поле. Этот экспериментальный факт в интегральной форме описывается следующим образом: для объема V , ограниченного поверхностью S

$$\int_V \text{div } \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} d\vec{S} \quad \text{— по формуле Остроградского.}$$

То есть $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ — магнитный поток через замкнутую поверхность всегда равен нулю. (Магнитные силовые линии всегда замкнуты — сколько их входит в S , столько и выходит.)

IV. Электрическое поле, наряду с вихрями, может иметь и истоки, которыми являются электрические заряды.

Это уравнение формулирует экспериментальный факт: электрическое поле создается также и зарядами, а не только изменением магнитного поля.

Интегральная форма:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} dS \text{ — по формуле Остроградского;}$$

то есть $\oint_S \vec{D} dS = Q = \int_V \rho dV$ — поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен заряду Q , находящемуся внутри этой поверхности (здесь ρ — объемная плотность заряда). Это — теорема Гаусса, а IV уравнение Максвелла иногда называют дифференциальной формой теоремы Гаусса.

Уравнения Максвелла обобщают все известные факты и соотношения в области электрических и магнитных явлений. Ни сами уравнения, ни их следствия не вступают в противоречие ни с одним экспериментальным фактом. Как для неподвижных сред, которые мы рассматриваем, так и для движущихся, в том числе с релятивистскими скоростями, уравнения Максвелла сохраняют свою применимость. *Границей их применения является переход от классической к квантовой электродинамике*, т.к. уравнения Максвелла не учитывают квантового характера электромагнитного поля.

Рассмотрим некоторые общие соотношения, вытекающие из уравнений Максвелла.

Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности).

Из I уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ следует $\operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$ (т.к.

$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$). То есть вектор плотности полного тока не имеет истоков, линии полного тока всегда замкнуты. Если линии тока проводимости имеют разрыв, например, на обкладках конденсатора при его зарядке или разряде, то их продолжением являются линии тока смещения внутри конденсатора. $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{D})$, что с учетом IV ($\operatorname{div} \vec{D} = \rho$) дает $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ — это закон сохранения заряда или уравнение непрерывности.

В интегральной форме это следствие уравнений Максвелла имеет вид:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{J} dV = \oint_S \vec{J} d\vec{S} = I \text{ — ток, вытекающий } (I > 0) \text{ из объема } V \text{ через поверхность } S.$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Таким образом, $I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$ — вытекающий через поверхность ток равен скорости уменьшения заряда в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Граничные условия для векторов электромагнитного поля

Уравнения Максвелла — это система дифференциальных уравнений в частных производных. И решения их содержат не произвольные постоянные как решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а произвольные функции. Для опреде-

ления этих функций необходимы дополнительные условия. В частности, условия, которым подчиняются векторы поля на границе раздела сред. Граничные условия являются следствиями уравнений Максвелла, учитывающими скачкообразное изменение параметров среды ϵ , μ , γ .

Граничное условие для $\vec{B}$.

Пусть граница aa' двух сред имеет толщину $d\ell$, в пределах которой параметры среды меняются от значения 1 до значения 2 плавно (рис. 1.4).

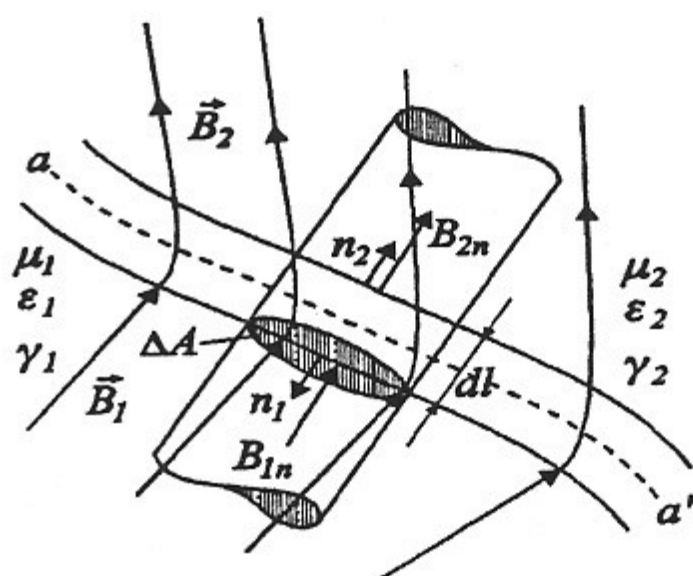


Рис. 1.4. К определению граничного условия для $\vec{B}$.

Представим, что поверхность в виде малого цилиндра с основаниями ΔA и высотой $d\ell$ пересекается границей раздела. Из III следует

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \text{т.е. } B_{2n} \cdot \Delta A - B_{1n} \cdot \Delta A + d\Phi = 0,$$

где $B_{1n} \cdot \Delta A$ — поток через основание 1;

$B_{2n} \cdot \Delta A$ — поток через основание 2;

$d\Phi$ — поток через боковую поверхность.

Если $d\ell \rightarrow 0$ (скачок параметров на границе), то $d\Phi \rightarrow 0$ и $B_{2n} - B_{1n} = 0$ — нормальная составляющая

вектора магнитной индукции непрерывна на границе раздела.

Граничное условие для $\vec{D}$.

Условия для $\vec{D}$ выводятся аналогично из IV: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV$, где ρ — объемная

плотность заряда в пограничном слое.

$$D_{2n} \cdot \Delta A - D_{1n} \cdot \Delta A + d\Psi = \rho \cdot \Delta A \cdot d\ell, \quad \text{где}$$

$D_{1n} \cdot \Delta A$ — поток через основание 1;

$D_{2n} \cdot \Delta A$ — поток через основание 2;

$d\Psi$ — поток через боковую поверхность;

$\rho \cdot \Delta A \cdot d\ell$ — заряд в объеме цилиндра на границе.

Если $d\ell \rightarrow 0$, то $d\Psi \rightarrow 0$ и $D_{2n} - D_{1n} = \lim_{d\ell \rightarrow 0} (\rho \cdot d\ell)$, где $\lim_{d\ell \rightarrow 0} (\rho \cdot d\ell) = \sigma \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$ —

поверхностная плотность свободных зарядов.

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$ — нормальная составляющая вектора электрического смещения либо непрерывна (при $\sigma = 0$), либо терпит скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов (при $\sigma \neq 0$).

Граничное условие для $\vec{H}$.

Пусть контур в виде малого прямоугольника со сторонами ℓ и $\Delta\ell$ пересекается границей раздела сред aa' (рис. 1.5). Предположим вначале, что граница имеет толщину и именно в ней параметры среды плавно меняются от значения 1 до значения 2.

Плоскость контура, лежащего "в границе", расположим перпендикулярно направлению тока (контур мал). Из I имеем $\int_l \vec{H} d\vec{\ell} = I + I_{\text{см}}$,

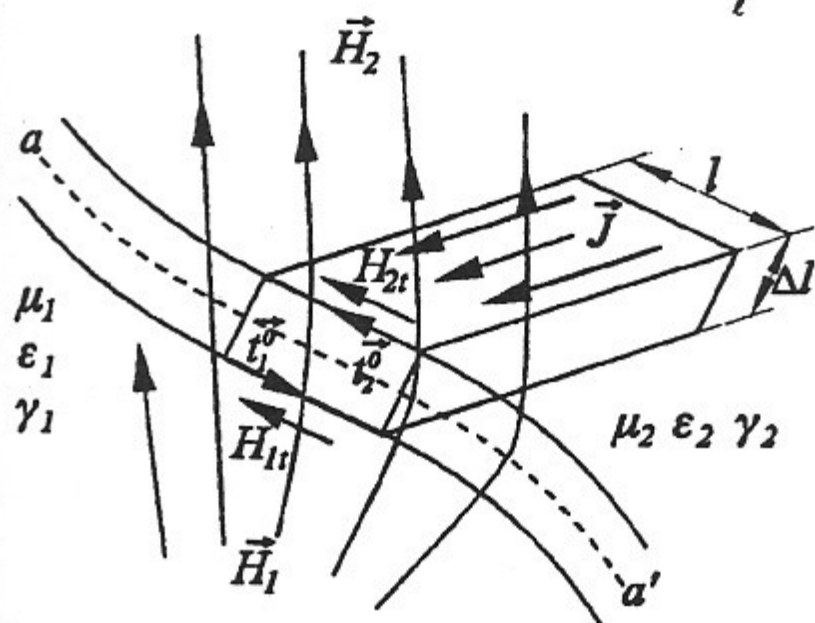


Рис. 1.5. К определению граничного условия для $\vec{H}$.

$$H_{2t} \cdot \ell - H_{1t} \cdot \ell + dF = J \cdot \ell \cdot \Delta\ell + \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \ell \cdot \Delta\ell,$$

где $dF = (H_{1n} - H_{2n}) \cdot \Delta\ell$,

H_{1n} и H_{2n} — нормальные составляющие магнитного поля на сторонах $\Delta\ell$.

При $\Delta\ell \rightarrow 0$ $\Delta F \rightarrow 0$ и $\frac{\partial D}{\partial t} \cdot \ell \cdot \Delta\ell \rightarrow 0$, т.к.

$$D \neq \infty \text{ и } \frac{\partial D}{\partial t} \neq \infty, \text{ а вот } \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} (J \cdot \Delta\ell) = K \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right].$$

— конечная величина — поверхностная плотность тока ("настил тока"). $H_{2t} - H_{1t} = K$ —

тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля либо непрерывна (при $K = 0$), либо терпит скачок, равный поверхностной плотности тока (при $K \neq 0$).

Граничное условие для $\vec{E}$.

Граничное условие для $\vec{E}$ выводится аналогично.

Из II $\oint_l \vec{E} d\vec{\ell} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow E_{2t} \cdot \ell - E_{1t} \cdot \ell + \Delta P = - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \ell \cdot \Delta\ell$, где ΔP также

связано с короткой стороной $\Delta\ell$.

При $\Delta\ell \rightarrow 0$ $\Delta P \rightarrow 0$ и $\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \ell \cdot \Delta\ell \rightarrow 0$, т.к. $B \neq \infty$ и $\frac{\partial B}{\partial t} \neq \infty \Rightarrow E_{2t} - E_{1t} = 0$ —

тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна на границе раздела сред.

Сторонние силы

Как уже было сказано, для расчета электромагнитного поля в некоторой области пространства необходимо решить систему дифференциальных уравнений в частных производных — уравнений Максвелла. Мы выяснили, каким условиям подчиняются векторы поля на границах раздела сред, т.е. как связаны поля в различных точках области. Этого, однако, недостаточно, так как необходимо определить, за счет чего создается электрическое поле.

Во всех случаях электромагнитное поле создается источником за счет энергии, получаемой извне. Поэтому эдс либо ток источника называются *сторонними*. Их величины определяются мощностью внешних ресурсов энергии: механической, химической, тепловой, ядерной либо электромагнитной энергией другого поля, и не являются функциями рассчитываемого поля.

Таким источником может быть, например, аккумулятор, пучок заряженных частиц с заданными током и энергией, напряжение на антенне, созданное удаленным передатчиком.

Поле в данном объеме может быть создано под влиянием различных электромагнитных величин, связанных между собой уравнениями Максвелла. Дадим теперь следующее определение.

Сторонняя сила — электромагнитная величина ($\vec{J}_{\text{ст}}$, $I_{\text{ст}}$, $\vec{E}_{\text{ст}}$, $\vec{H}_{\text{ст}}$, $\mathcal{E}_{\text{ст}}$ и т.д.), задается как функция координат и времени в качестве исходной при расчете данного электромагнитного поля. Сторонняя сила является источником данного поля и существует за счет внешних (для данного поля) энергетических ресурсов.

Сторонние силы вводятся в основные уравнения электромагнитного поля в виде дополнительных слагаемых. Для целей следующего раздела выберем в качестве источника поля плотность сторонних токов $\vec{J}_{\text{ст}}$. Сторонние токи подчиняются уравнению непрерывности $\text{div} \vec{J}_{\text{ст}} = -\partial \rho_{\text{ст}} / \partial t$, поэтому наряду с ними необходимо рассматривать плотность сторонних зарядов $\rho_{\text{ст}}$.

Теорема Умова-Пойнтинга.

Энергетические соотношения в электромагнитном поле

Рассмотрим объем V , ограниченный поверхностью S , в котором располагаются источники и приемники энергии электромагнитного поля. В объеме V и на поверхности S имеются электрическое поле $\vec{E}$ и магнитное поле $\vec{B}$, такие, что в диэлектриках, магнетиках и проводниках возбуждаются соответствующие величины:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} + \vec{J}_{\text{ст}}.$$

В последнем равенстве введено дополнительное слагаемое: плотность сторонних токов $\vec{J}_{\text{ст}}$, которая создается внешними источниками энергии.

Из I уравнения Максвелла, умноженного на $\vec{E}$, вычтем II уравнение, умноженное на $\vec{H}$, в результате получим

$$\vec{E} \text{ rot } \vec{H} - \vec{H} \text{ rot } \vec{E} = \vec{E} \vec{J} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

По формулам векторного анализа

$$\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H}.$$

Тогда, интегрируя по V , имеем

$$-\int_V \text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] dV = \int_V \vec{E} \vec{J} dV + \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV.$$

Преобразуем отдельные члены полученной формулы.

$$-\int_V \text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] dV = -\oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S} \quad \text{— по формуле Остроградского,}$$

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int_V (\gamma E^2 + \vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{ст}}),$$

$$\int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mu_0 \frac{H^2}{2} \right) \right] dV$$

— при условии, что $\epsilon, \mu = \text{const}$.

Возвращаясь к исходной формуле, с заменой — в соответствии с последними тремя уравнениями — получаем

$$-\int_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S} = \int_V (\gamma E^2 + \vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{ст}}) dV + \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mu_0 \frac{H^2}{2} \right) \right] dV.$$

Рассмотрим физический смысл правой части полученного соотношения (будем исходить из размерности получившейся величины — это проще всего).

$$P_{\text{уд}} = \gamma E^2 \left[\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3} \right]$$

— удельные потери на нагрев среды током (Джоулевы потери).

$$P = \int_V \gamma E^2 dV [\text{Вт}]$$

— полная мощность потерь ($P > 0$) на нагрев приемников энергии.

$$\int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{ст}}) dV \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Вт} \right]$$

— это либо мощность потерь (> 0), если $\vec{J}_{\text{ст}}$ и $\vec{E}$ имеют одинаковые знаки, либо мощность, отнимаемая у источника энергии, если $\vec{J}_{\text{ст}}$ и $\vec{E}$ направлены противоположно, например, мощность, отнимаемая у пучка заряженных частиц тормозящим полем, и тогда эта мощность отрицательна.

Остальные члены также имеют размерность мощности.

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon \epsilon_0 \cdot \frac{E^2}{2} dV$ — это мощность, представляющая собой скорость изменения

чего-то, зависящего только от $\vec{E}$ и ϵ . По определению мощность — это скорость изменения энергии, в данном случае — энергии электрического поля.

Следовательно

$$w_{\text{э}} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \epsilon_0 E^2 \left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right] \quad \text{— плотность энергии электрического поля.}$$

Аналогично

$$w_{\text{м}} = \frac{1}{2} \cdot \mu \mu_0 H^2 \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}^2}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right] \quad \text{— плотность энергии магнитного поля.}$$

С энергией поля, запасенной в объеме, в интегральной форме мы встречались в Теории цепей, когда рассматривали интегральные характеристики L , C и R :

$$P = I^2 \cdot R \quad \text{— мощность потерь в резисторе,}$$

$$W_{\text{с}} = \frac{C \cdot U^2}{2} \quad \text{— запас энергии в конденсаторе,}$$

$$W_{\text{л}} = \frac{L \cdot I^2}{2} \quad \text{— запас энергии в катушке.}$$

Эти соотношения могут быть просто выведены из плотности энергии и размеров для идеальных элементов цепи с однородными полями в них.

Таким образом, правая часть в полученном из уравнений Максвелла соотношении — это мощность потерь $\pm$ мощность источников сторонних ЭДС + мощность, идущая на создание электрического и магнитного полей в объеме. Левая часть — это поток вектора $[\vec{E} \times \vec{H}]$, втекающего через поверхность S , если правая часть положительна.

Этот вектор $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] \left[\frac{B}{M} \cdot \frac{A}{M} = \frac{B_T}{M^2} \right]$ — называется вектором Пойнтинга и указывает величину плотности потока мощности.

Итак, теорема Умова-Пойнтинга — это закон сохранения энергии для электромагнитного поля:

$$-\oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S} = \int_V \frac{J^2}{\gamma} dV + \int_V (-\vec{J} \cdot \vec{E}_{\text{ст}}) dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \cdot \epsilon \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \cdot \mu \mu_0 H^2 \right) dV.$$

Избыток мощности, потребляемой (или отдаваемой) внутри объема "втекает" (или "вытекает") в виде потока вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем.

Эта теорема важна как для понимания энергетических процессов, так и для непосредственных расчетов энергетических превращений в электромагнитном поле.

Рассмотрим в качестве примера систему передачи энергии от источника постоянного тока к нагрузке (рис. 1.6).

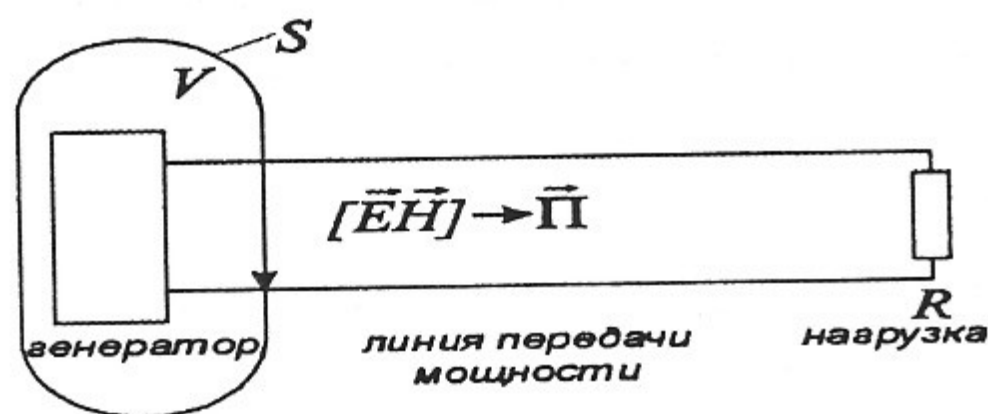


Рис. 1.6. Система передачи энергии от источника к нагрузке.

Представим себе линию передачи в виде двух плоских хорошо проводящих шин (потери в шинах малы), близко расположенных друг к другу (краевыми эффектами пренебрегаем). Стороннее поле $\vec{E}_{\text{ст}}$ на выходе из генератора и сопротивление нагрузки R будем считать равномерно распределенными по

торцам линии. ЭДС генератора заряжает шины и между шинами возникает электрическое поле $\vec{E}$. Так как $b \ll a$, шины можно рассматривать как две бесконечные заряженные пластины. Каждая из пластин в силу симметрии создает однородное поле снаружи и внутри линии и, т.к. $E_t = 0$ (нет падения напряжения вдоль линии), то поле перпендикулярно пластинам. Наружные поля практически уничтожаются (т.к. заряды пластин разноименные), а поля между пластинами — складываются, образуя поле $\vec{E} = 2\vec{E}_1$.

Напряжение между пластинами $U = b \cdot E$, ток нагрузки $I = \frac{U}{R}$; ЭДС источника $\mathcal{E} = b \cdot E_{\text{стор}} = U$. Ток I протекает по шинам. Вокруг каждой из них образуется магнитное поле $H_1 = \frac{I}{2a}$ и $H_2 = \frac{I}{2a}$. Наружные поля практически уничтожаются, а

между шинами — складываются: $H = \frac{I}{a}$. Окружим генератор и часть линии поверхностью S объемом V . В объеме выделяется мощность $\int_V (-\vec{J} \cdot \vec{E}_{\text{стор}}) dV = -P_{\text{ген}} = -I \cdot U$. Эта мощность вытекает из объема в виде вектора $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$, см. рис. 1.7. $-\oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] dS = -E \cdot H \cdot a \cdot b = -Eb \cdot Ha = -U \cdot I = -P$, т.е. $P = P_{\text{ген}}$.

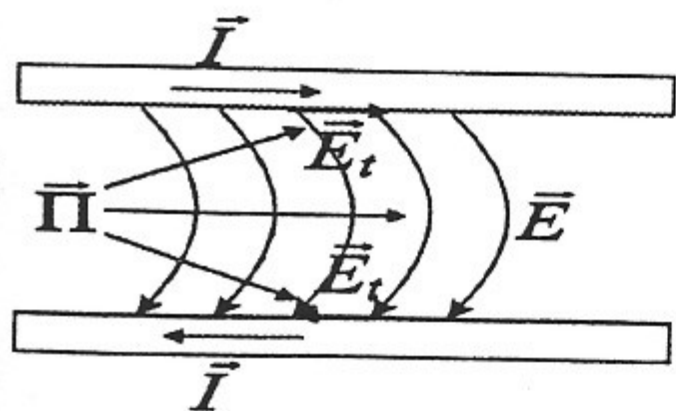


Рис. 1.7. Электрическое поле и вектор Пойнтинга между шинами.

Вытекает вся мощность, вырабатываемая генератором. Она течет от генератора к нагрузке не по проводникам, а между шинами, т.к. только там есть поле. Аналогично, окружив поверхностью нагрузку, увидим, что мощность P втекает в объем и рассеивается в нагрузке $P = P_{\text{нагр}} = U \cdot I$. Если в линии есть потери, то на поверхности линии $\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$, т.е. $E_t \neq 0$ и форма линий электрического поля несколько изменяется.

Направление $\vec{\Pi}$ — под обычно небольшим углом к плоскости шин. Таким образом, с учетом потерь в линии и краевых эффектов распределение вектора Пойнтинга имеет вид, схематически показанный на рис.1.8.

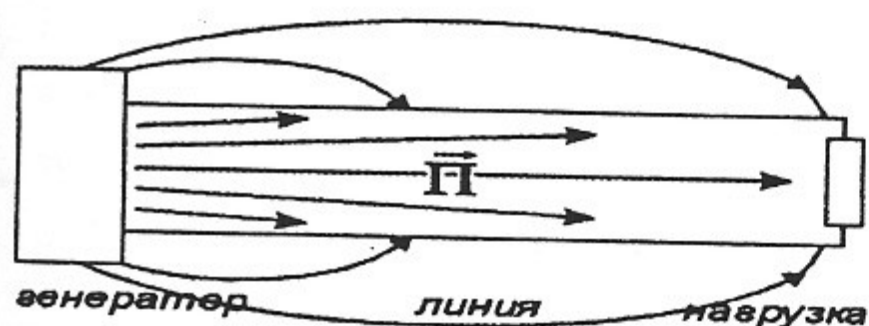


Рис. 1.8. Вектор Пойнтинга с учетом потерь и краевых эффектов.

Перемещение энергии поля в пространстве, а не внутри проводов, для нас сегодня естественный процесс (радио, например). Понятен поэтому подход к расчету излучения электромагнитной энергии антенной с помощью теоремы Умова-Пойнтинга.

О механических (пондеромоторных) силах, действующие на проводники в электромагнитном поле.

Сила, действующая на пробный заряд, рассматривалась вначале при определении электрического и магнитного полей:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Так как на поверхности проводника могут быть заряды, которые приобретают скорость при движении проводника и при протекании в нем тока, проводник должен испытывать механическое действие поля как электрического, так и магнитного. Эти представления естественным образом вытекают из уравнений Максвелла. При доказательстве теоремы Умова-Пойнтинга мы рассматривали член $\int_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV$, которым характеризовали тепловые потери в проводнике и работу сторонних ЭДС. Рассмотрим это выражение подробнее. Так как плотность тока проводимости можно представить как заряд с плотностью ρ , перемещающийся в проводнике со средней скоростью $\vec{v}$, то $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$.

Тогда $\int_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV = \int_V (\rho \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}) dV$. Этот интеграл — мощность, а мощность — сила · скорость. Следовательно $\rho \cdot \vec{E} = \vec{f}_e \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right]$ — плотность силы электрического поля,

что вполне соответствует определению поля ($\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$). Сила, действующая на движущийся заряд со стороны магнитного поля, может рассматриваться как сторонняя напряженность электрического поля $\vec{E}_{\text{ст}} = [\vec{v} \times \vec{B}]$ и тогда из $\vec{J} = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}})$ получим

$\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E} + \gamma \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$, т.е. $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} - [\vec{v} \times \vec{B}]$. При этом в уравнении Умова-Пойнтинга из $\int_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV$ появится член $-\int_V ([\vec{v} \times \vec{B}] \cdot \vec{J}) dV = \int_V ([\vec{J} \times \vec{B}] \cdot \vec{v}) dV$ — это мощность = сила ·

скорость и, следовательно, $\vec{f}_m = [\vec{J} \times \vec{B}] \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right]$ — объемная плотность сил магнитного

поля. Тогда рассмотренное слагаемое в теореме Умова-Пойнтинга может быть истолковано следующим образом. Если скорость движения зарядов $\vec{v}$ направлена по $\vec{f}_m$, то мощность положительна (поглощается), т.е. поле отдает свою энергию. Это бывает, например, в электродвигателе, где поле перемещает проводник с током. Если же наоборот, $\vec{v}$ направлена против $\vec{f}_m$ — то это генератор, сторонняя ЭДС (мощность отрицательна, выделяется).

Выражения для плотности электрических и магнитных сил поля, действующих на заряды и токи, позволяют просто оценить пондеромоторные силы, действующие на проводники в электромагнитном поле. Из граничных условий $D_{2n} - D_{1n} = \sigma \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$ и $H_{2t} - H_{1t} = K \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$. Будем полагать, что внутри проводника полей нет, а на поверхности имеются заряды и токи. Этот случай часто бывает весьма близким к реальным ситуациям, распространенным в практике. В любом поле сложной конфигурации всегда можно выделить объем (малый) в котором поле приблизительно однородно. Размещая в таком поле перпендикулярно $\vec{E}$ пластины из проводящего материала, можно рассмотреть элементарный плоский конденсатор с однородным полем (например часть линии передачи). Допустим, что этот участок — куб $1 \times 1 \times 1 \text{ м}^3$ (краевых эффектов нет), рис.1.9.

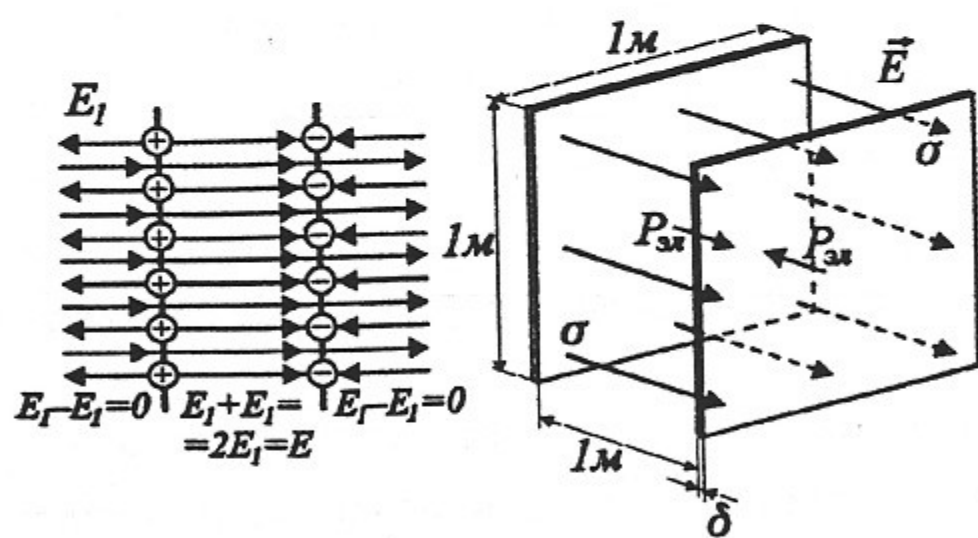


Рис. 1.9. К расчету давления электрического поля.

Вычислим $P_{\text{эл}}$ — давление электрического поля. На заряд $\sigma \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$ одной пластины действует объемная плотность сил $\vec{f}_e$ поля $E_1 \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$ заряда другой пластины. $\vec{f}_e = \rho \cdot \vec{E}_1 \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right]$. Полное поле E есть сумма полей, создаваемых каждой из пластин конденсатора. Заряды на пластинах равны по абсолютной

величине, поэтому $E_1 = \frac{E}{2}$.

По определению, $\sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\rho \cdot \delta)$, δ [м] — толщина поверхностного слоя зарядов.

$$P_{эл} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\rho \cdot E_1 \cdot \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (f_e \cdot \delta) = E_1 \cdot \sigma \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right],$$

то есть

$$P_{эл} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2}{2} \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$$

($\sigma = D$ из граничных условий).

Давление стягивает пластины. $P_{эл} = W_{эл} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]!!!$

Аналогично проводится расчет для магнитного поля (для участка между шинами

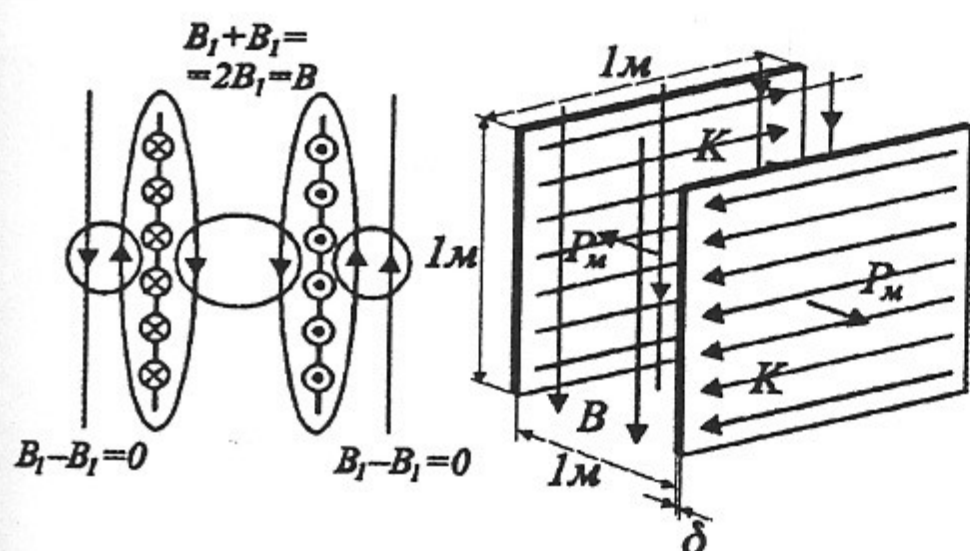


Рис. 1.10. К расчету давления магнитного поля.

с настилом тока $K \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$ и с однородным полем), рис. 1.10. Вычислим P_m — давление магнитного поля. Объёмная плотность

ность $\vec{f}_m = [\vec{J} \times \vec{B}_1] \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right]$. Поле одной

пластины $B_1 \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right]$ действует на ток

$K \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$ другой.

По определению $K = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J \cdot \delta)$, δ [м] — толщина поверхностного слоя тока.

$$P_m = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J \cdot B_1 \cdot \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (f_m \cdot \delta) = B_1 \cdot K \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right].$$

Полное поле B есть сумма полей, создаваемых каждой из пластин: $B = 2B_1$.

$$P_m \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] = \frac{B}{2} \cdot K = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot H^2}{2}. \quad P_m = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot H^2}{2} \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$$

($K = H_t = H$ — из граничных условий).

Давление расталкивает пластины. $P_m = W_m \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]!!!$

О единственности решений уравнений Максвелла при заданных начальных и граничных условиях

Этот вопрос помимо принципиального значения (однозначность $\rightarrow$ причинность) имеет и прикладное значение: если удалось из каких-либо соображений рассчитать поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, то это поле — единственное, т.е. оно будет соответствовать действительности, т.к. другого нет.

Теорема единственности.

Если для заданного момента времени t_0 известны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в любой точке объёма V , ограниченного поверхностью S , то с помощью уравнений Максвелла можно

рассчитать поле для любого последующего момента времени t , при следующих условиях: 1) известны $\vec{E}_t$ или $\vec{H}_t$ на границе S за все время от t_0 до t ; 2) $\epsilon, \mu, \gamma = \text{const}$ (среда линейная); 3) $\vec{E}_{\text{ст}}$ — заданы как функции координат и времени. Подсчитанное таким образом поле является единственным.

Доказательство:

Допустим, что существуют два решения $\vec{E}'_t, \vec{H}'_t$ и $\vec{E}''_t, \vec{H}''_t$, удовлетворяющие условиям, сформулированным ранее.

То есть при $t = t_0$ они совпадают и имеют заданную величину, а во всех точках поверхности S совпадают их тангенциальные составляющие и имеют заданные значения.

Образуем $\vec{E}_0 = \vec{E}' - \vec{E}''$ и $\vec{H}_0 = \vec{H}' - \vec{H}''$. По принципу наложения $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ удовлетворяют уравнениям Максвелла. Тогда по теореме Умова - Пойнтинга:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_0^2 \right) dV = \underbrace{\int_V \frac{J_0^2}{\gamma} dV}_{(1)} - \underbrace{\int_V (\vec{E}_{\text{ст}0} \cdot \vec{J}_0) dV}_{(2)} + \underbrace{\int_S [\vec{E}_0 \vec{H}_0] dS}_{(3)}.$$

(2) и (3) равны нулю, так как

(2): $E_{\text{ст}}$ в V заданы независимо, т.е. совпадают для первого и второго решения и $\vec{E}_{\text{ст}0} = \vec{E}'_{\text{ст}} - \vec{E}''_{\text{ст}} = 0$, и

(3): на поверхности S либо $\vec{E}_{0t} = \vec{E}'_t - \vec{E}''_t = 0$, либо $H_{0t} = H'_t - H''_t = 0$,

$$\text{т.е.} \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_0^2 \right) dV = \int_V \frac{J_0^2}{\gamma} dV.$$

Правая часть обязательно положительная (как из физических соображений: Джоулевы потери, так и чисто математически: $J_0^2 \geq 0$), следовательно, дифференцируемое выражение в левой части либо убывает, либо равно нулю, но в начальный момент $E_0 = H_0 = 0$ и интеграл $\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_0^2 \right) dV$ не может принимать отрицательные значения, т.е. убывать (как в физическом, так и в математическом смысле). Следовательно

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_0^2 \right) dV = 0.$$

А значит не только в начальный момент, но и во все моменты от t_0 до t $\vec{E}_0 \equiv 0$ и $\vec{H}_0 \equiv 0$, то есть

$$\vec{E}' = \vec{E}'' \text{ и } \vec{H}' = \vec{H}''.$$

Если включить в рассмотрение все пространство (а не только V), то вместо условий на S необходимо наложить на решение условие на бесконечности.

Если $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут убывать как $\frac{a}{R^2}$ ($a = \text{const}$) или быстрее при $R \rightarrow \infty$, то теорема единственности доказана, так как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_S [\vec{E} \vec{H}] dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a}{R^4} \int_S dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a}{R^4} 4\pi R^2 = 0.$$

В статических и в стационарных полях на значительных расстояниях от зарядов и токов (т.е. при $R \rightarrow \infty$) поле спадает как $\frac{1}{R^2}$ или быстрее. Это, например, иллюстрируется полем точечного заряда (а ведь из бесконечности все заряды одноименны и могут рассматриваться как один точечный заряд).

По теореме Гаусса для точечного заряда q $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$.

В силу симметрии линии $\vec{E}$ направлены по радиусам от q ,

$$\text{то есть } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{r}_0, \quad 4\pi R^2 \epsilon\epsilon_0 \vec{E} \vec{r}_0 = q,$$

$$\text{или } \vec{E} \sim \frac{1}{R^2}.$$

Для стационарного магнитного поля на бесконечности спад $\vec{H}$ быстрее чем $\frac{1}{R^2}$.

А вот для переменных полей (при излучении) возможен спад поля как $\frac{1}{R}$, однако учет конечной скорости распространения волн дает возможность и для этих условий доказать теорему единственности.

Итак, любая задача отыскания полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла при заданных граничных условиях и условиях возбуждения, имеет единственное решение.

Далее будут рассмотрены некоторые методы решения уравнений Максвелла, а главное, будут рассмотрены поля, которые имеют значение в технических приложениях.

Глава 2

Статические и стационарные поля

Для *стационарных* полей в уравнениях Максвелла следует принять:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = \vec{J} \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{array} \right. & \vec{J} = \gamma \vec{E} + \vec{J}_{\text{ст}} \\ \text{II} & \\ \text{III} & \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. & \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \\ \text{IV} & & \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \end{array}$$

Это уравнения электродинамики стационарных полей.

Еще более упрощаются уравнения Максвелла для *статических* полей:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{J} = 0,$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{array} \right. \\ \text{II} & \\ \text{III} & \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. & \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \\ \text{IV} & & \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \end{array}$$

В этом случае связь между магнитным и электрическим полем отсутствует, поэтому как электростатическое, так и магнитостатическое поле можно рассматривать независимо друг от друга.

Электростатическое поле. Потенциал. Уравнения Пуассона и Лапласа

Уравнения электростатики в дифференциальной форме имеют вид:

$$\begin{array}{ll} \text{II} & \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{IV} & \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$$

Условия на границе раздела сред:

$$\begin{array}{l} E_{1t} = E_{2t}, \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \end{array}$$

ρ — объёмная плотность свободных зарядов,

σ — поверхностная плотность свободных зарядов.

В интегральной форме уравнениями электростатики являются:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{\ell} = 0 \quad \text{— утверждение о безвихревом характере электростатического поля,}$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV \quad \text{— электростатическая теорема Гаусса.}$$

Одним из простейших приемов решения уравнений электростатики является непосредственное определение векторов поля с помощью теоремы Гаусса. Это воз-

можно лишь в тех случаях, когда форма заряженного проводника такова, что распределение поля определяется из соображений симметрии. (Например: бесконечный плоский лист, бесконечный цилиндр, сфера и — в пределе — поле заряженной плоскости, оси, точечного заряда).

Решение уравнений электростатического поля в общем случае существенно упрощается после введения *потенциала электрического поля* — φ .

Потенциал, как известно, определяется соотношением:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Введение потенциала в указанной форме возможно, т.к. тождество $\text{rot grad } \varphi = 0$ соответствует уравнению (II) $\text{rot } \vec{E} = 0$, указывающему на безвихревой характер электростатического поля.

Уравнение (IV) в таком случае принимает вид:

$$-\text{div grad } \varphi = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Это дифференциальное уравнение называется *уравнением Пуассона*.

В тех точках поля, где нет зарядов, $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет *уравнению Лапласа*:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = 0.$$

Граничные условия для векторов электростатического поля и потенциалов

1. На поверхности проводника.

Из общих граничных условий (так как внутри проводника в условиях электростатики поле отсутствует):

$$D_n = \sigma, \quad E_t = 0.$$

То есть, вектор напряженности электрического поля и вектор электрического смещения направлены по нормали к поверхности проводника, и смещение численно равно поверхностной плотности заряда на проводнике.

Из условия $\epsilon\epsilon_0 E_n = D_n = \sigma$ следует для потенциала:

$$-\epsilon\epsilon_0 \text{grad } \varphi = \sigma, \quad \text{т.е.} \quad -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma.$$

Из условия $E_t = 0$ получаем, что $(\text{grad } \varphi)_t = 0$, т.е. потенциал не меняется вдоль поверхности проводника. А так как потенциал не может меняться и в глубину проводника (электростатика — тока нет), то: $\varphi_{\text{пров}} = \text{const}$.

2. На границе раздела диэлектриков.

Свободный заряд не возникает: $\sigma = 0$, $D_{1n} = D_{2n}$, $E_{1t} = E_{2t}$.

С учетом $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ получаем также $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$, а отсюда — $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$.

Из равенства тангенциальных составляющих E следует, что степень изменения потенциала вдоль поверхности раздела в средах 1 и 2 одинакова, а это возможно, если принять $\varphi_1 = \varphi_2$.

Таким образом, решить уравнение Лапласа (или Пуассона) при заданных граничных условиях: $\varphi_{\text{гр}} = !$, $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{гр}} = !$ — это значит найти поле. (Обозначение " $\varphi_{\text{гр}} = !$ " читаем как " $\varphi_{\text{гр}}$ задано".) Действительно, найдя потенциал φ и дифференцируя его по различным направлениям, можно найти составляющие вектора $\vec{E}$. Например, в декартовых координатах:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i}^0 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}^0 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}^0.$$

Геометрия поля

Зная составляющие E_x , E_y , E_z , можно построить картину силовых линий поля.

Дифференциальное уравнение силовых линий в общем случае:

$$[\vec{E} \times d\vec{R}] = 0.$$

Дифференциальное уравнение силовых линий в декартовых координатах:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Поверхности равного потенциала ортогональны силовым линиям.

Уравнение эквипотенциалей в общем случае:

$$\vec{E} \cdot d\vec{R} = 0.$$

Дифференциальное уравнение эквипотенциалей в декартовых координатах:

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = 0.$$

Электростатическое поле возбуждается зарядами (ρ), распределение которых описывается правой частью уравнения Пуассона.

Однако на практике распределение заряда в пространстве бывает известно не всегда.

Формулировка типичных задач электростатики

1. Даны: форма, размеры и пространственное расположение проводников и значение их потенциалов. Найти поле во всех точках пространства.

2. Даны: форма, размеры и пространственное расположение проводников и полный заряд каждого из них. Найти потенциалы проводников и поле во всех точках пространства.

То есть, фактически речь идет о решении уравнения Лапласа при определенных граничных условиях.

В декартовых координатах уравнение Лапласа имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

В любой другой системе криволинейных ортогональных координат (U, V, W) :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right) + \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial V} \right) + \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial W} \right) \right] = 0,$$

где h_1, h_2, h_3 — метрические коэффициенты, смысл которых состоит в том, что перемещение вдоль координаты dU соответствует перемещению вдоль координатной линии $d\ell_U = h_1 dU$, и т.д.

Если известна связь между системой криволинейных ортогональных координат и декартовой системой координат:

$$\begin{aligned} x &= x(U, V, W), \\ y &= y(U, V, W), \\ z &= z(U, V, W), \end{aligned}$$

то:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)^2}, \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V} \right)^2}, \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial W} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial W} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial W} \right)^2}. \end{aligned}$$

Для цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned} U &= r, \quad V = \alpha, \quad W = z, \\ x &= r \cos \alpha, & h_1 &= 1, \\ y &= r \sin \alpha, & h_2 &= r, \\ z &= z, & h_3 &= 1. \end{aligned}$$

Для сферической системы координат:

$$\begin{aligned} U &= R, \quad V = \theta, \quad W = \alpha, \\ x &= R \sin \theta \cdot \cos \alpha, & h_1 &= 1, \\ y &= R \sin \theta \cdot \sin \alpha, & h_2 &= R, \\ z &= R \cos \theta, & h_3 &= R \sin \theta. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы воспользуемся и другими системами координат, важными для приложений.

Поле заряженной оси

Простейшим методом решения задач электростатики, как уже упоминалось, является применение теоремы Гаусса в интегральной форме. Пусть бесконечная заряженная ось, находящаяся в однородном диэлектрике, является координатной осью z в цилиндрической системе координат, и на ней равномерно расположен электрический заряд с линейной плотностью $+\tau$ [Кл/м], рис. 2.1.

Из соображений симметрии поле направлено по радиусу и не зависит от z и α .

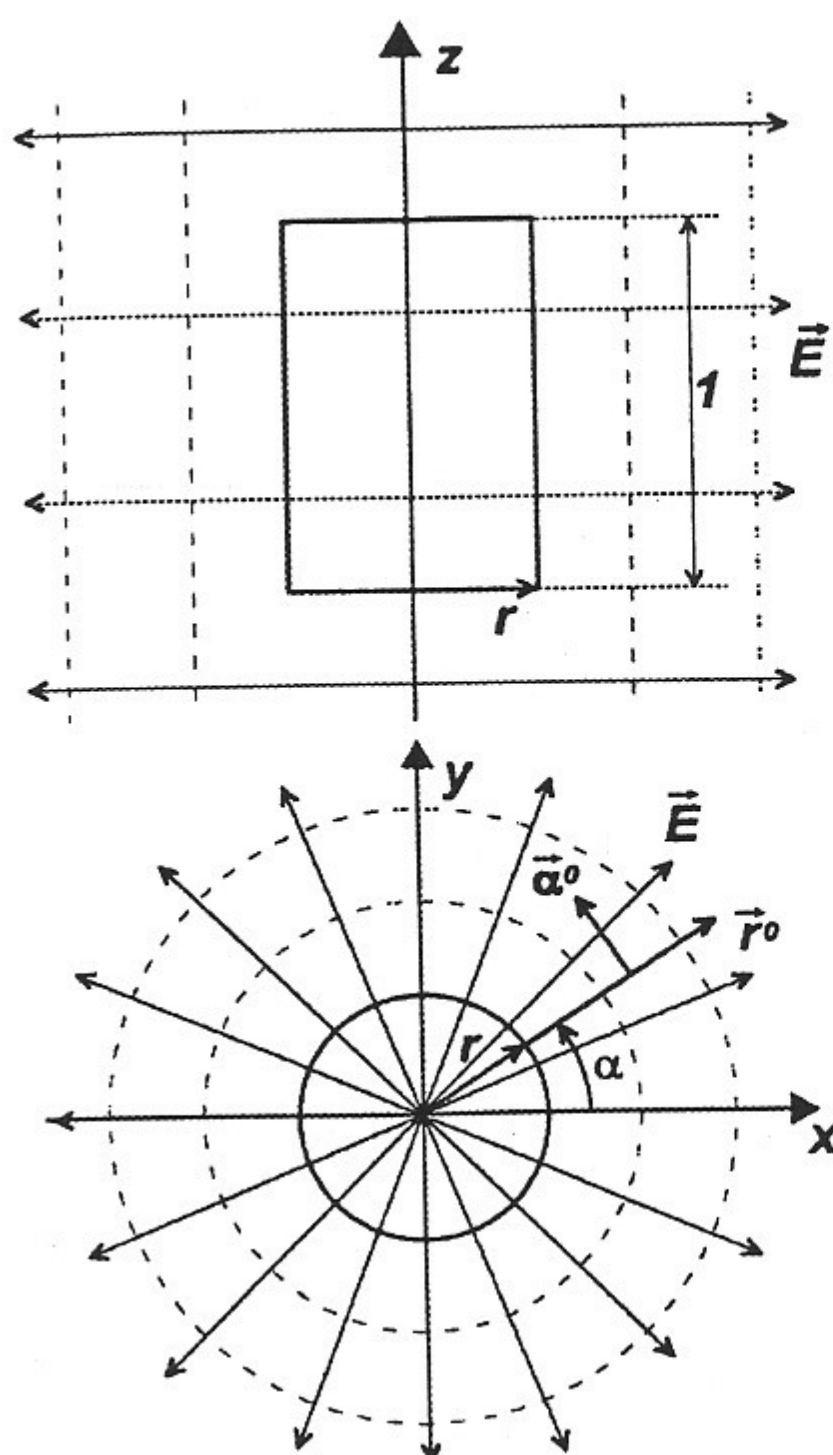


Рис. 2.1. К расчету поля заряженной оси.

Силовые линии этого поля направлены по $\vec{r}^0$, эквипотенциали — цилиндры с осью z .

Поле заряженных коаксиальных цилиндров

Так как, не нарушая граничных условий, любую эквипотенциаль можно заменить проводящей поверхностью, поле заряженных коаксиальных цилиндров (рис. 2.2.) тождественно полю заряженной оси.

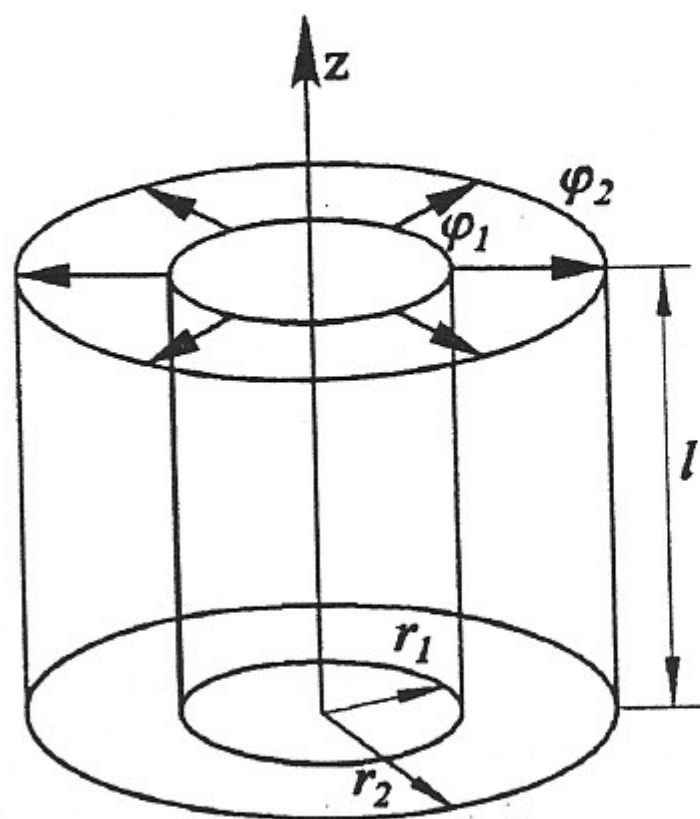


Рис. 2.2. Поле коаксиальных цилиндров.

Для определения величины $\vec{E}$ и её зависимости от r построим соосную с z цилиндрическую поверхность радиусом r и высотой 1.

По теореме Гаусса: $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q$, где $Q = \tau \cdot 1$ — полный заряд, охваченный поверхностью, поток $\vec{D}$ через основание цилиндра равен нулю. Он весь проходит через боковую поверхность $2\pi r \cdot 1$, т.е.:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = D \cdot 2\pi r \cdot 1 = \epsilon \epsilon_0 E \cdot 2\pi r;$$

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{r}^0.$$

Потенциал φ , который в этом простейшем случае для нахождения поля не потребовался, определяется интегрированием выражения $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \text{т.е. } \varphi = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \int \frac{dr}{r},$$

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \ln r + A.$$

Известная формула для ёмкости цилиндрического конденсатора с размерами r_1, r_2, l получается из определения ёмкости:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}; \quad Q = \tau l.$$

Здесь $\tau \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right]$ — линейная плотность заряда,

т.е. величина заряда, приходящаяся на единицу длины одного цилиндра.

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \ln r_2 = \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$\text{т.е. } C = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Электрическая прочность такого конденсатора (без учета краев и бесконечного по z) определяется по наибольшей напряженности поля (по наиболее слабому месту). Очевидно, что она — на внутреннем цилиндре:

$$E_{\text{внутр}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r_1}.$$

Выражая τ через U , получим: $\tau = 2\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$, и отсюда $E_{\text{внутр}} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}$.

При каком соотношении $\frac{r_2}{r_1}$ при $r_2 = \text{const}$ и $U = \text{const}$ электрическая прочность цилиндрического конденсатора (или коаксиального кабеля, или коаксиальной линии передачи) максимальна? Ответ — при максимуме знаменателя.

Действительно, если $r_1 \rightarrow r_2$, зазор мал: $\ln \rightarrow 0$ $E_{\text{внутр}} \rightarrow \infty$ — наступит пробой.

Если $r_1 \rightarrow 0$ — центральный проводник тонок (игла) и поле на нем растет: $E_{\text{внутр}} \rightarrow \infty$ — наступит пробой.

Между этими крайними случаями есть оптимум: максимальная электрическая прочность конденсатора будет при:

$$E_{\text{внутр}} = \min, \quad \frac{d}{dr_1} \left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = 0, \quad \frac{r_2}{r_1} = e = 2.718...$$

Электростатическое поле двухпроводной линии

Пользуясь принципом наложения и полученными частными решениями уравнения Лапласа для поля заряженной оси, можно рассчитать поле двухпроводной линии.

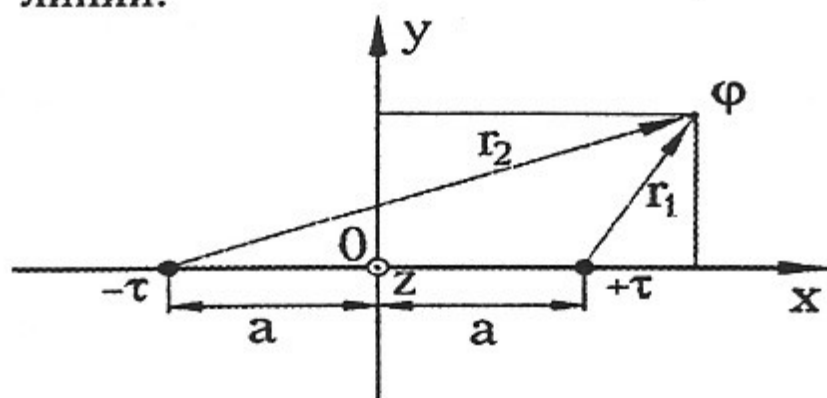


Рис. 2.3. К расчету поля двух заряженных осей.

Пусть в однородном диэлектрике по координатной оси x на расстоянии $2a$ друг от друга расположены параллельно две заряженные оси с зарядом $\pm\tau$ [Кл/м].

Потенциал ϕ в произвольной точке, отстоящей от заряженных осей на расстояниях r_1 и r_2 (рис. 2.3), будет равен сумме потенциалов каждой из осей в отдельности:

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_2 + A, \quad \text{т.е. } \phi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + A.$$

Положим потенциал в плоскости yz равным нулю: $\phi_{yz} = 0$. Тогда $A = 0$, и, если учесть, что $r_1^2 = (x - a)^2 + y^2$, а $r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$, то

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}.$$

Поле — плоскопараллельное — не зависит от z .

Следы эквипотенциальных поверхностей $\varphi = \text{const}$ в плоскости, параллельной xy ($\perp z$), удовлетворяют условию $\frac{r_2}{r_1} = \text{const} = K$, т.е. уравнение эквипотенциалей:

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = K^2,$$

или иначе:

$$\left(x - \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \cdot a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2aK}{K^2 - 1}\right)^2,$$

$$(x-s)^2 + y^2 = r_0^2.$$

Это уравнение окружностей с центрами на оси абсцисс, рис. 2.4. От параметра K зависит как радиус, так и расположение центра окружности. Так, например, для $K = 1$ ($r_1 = r_2$), что соответствует эквипотенциалу $\varphi = 0$, $x = 0$, радиус окружности $r = \infty$ и абсцисса ее центра $x = \infty$.

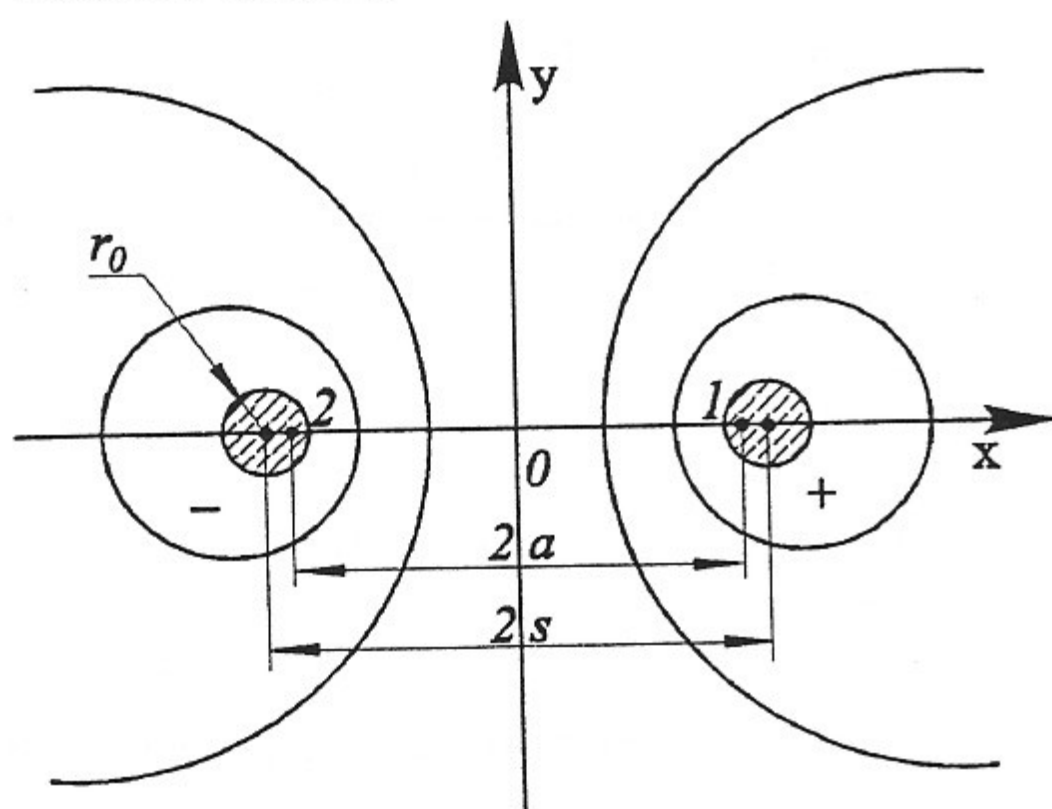


Рис. 2.4. Эквипотенциали поля двух заряженных осей.

Для любого другого значения $K = K_0$, т.е. $\varphi = \varphi_0$, получится своя окружность.

Для $\varphi_0 > 0$, соответствующего постоянной $K_0 = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon\epsilon_0\varphi_0}{\tau}\right) > 1$, эта окружность имеет радиус $r_0 = \frac{2aK_0}{K_0^2 - 1}$ и абсциссу центра $s = a \frac{K_0^2 + 1}{K_0^2 - 1}$.

Окружность охватывает провод с $+\tau$.

Для $\varphi_0 < 0$ рассуждения аналогичны, $K_0 < 1$, окружность охватывает провод с $-\tau$. Абсцисса центра s связана с радиусом r_0 и расстоянием между осями $2a$.

Так (исключая K_0), $\sqrt{s^2 - r_0^2} = a$.

Заметим, что отсюда $r_0^2 = (s-a)(s+a)$ для любого r_0 , т.е. произведение расстояний от заряженных осей до центра окружности эквипотенциали равно квадрату радиуса окружности эквипотенциали.

Такие точки являются инверсными (взаимно обратными) относительно окружности. Это очевидно, например, для $\varphi = 0$ — это отражение оси 1 в плоском зеркале.

В соответствии с граничными условиями эквипотенциали можно заменить проводящими поверхностями, т.е. заряженными поверхностями цилиндров кругового сечения или двумя проводами с радиусом r_0 .

Поле между такими проводами останется неизменным, т.е. тождественным полю двух заряженных осей. Положение этих "электрических осей" $\pm a$ не совпадает с геометрическими осями проводов $\pm s$.

Если даны τ , r_0 , s , то можно найти расположение электрических осей $\pm a = \sqrt{s^2 - r_0^2}$, затем $K_0 = \frac{s}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{s}{r_0}\right)^2 - 1}$ и $\pm \varphi_0 = \frac{\pm \tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln K_0$ — потенциалы проводов.

Это дает возможность рассчитать погонную (на единицу длины) емкость двухпроводной линии:

$$C_1 = \frac{\tau}{2\varphi_0}, \quad \text{т.к. } U = 2\varphi_0, \quad C_1 = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln K_0}.$$

Учитывая, что $K_0 = \frac{s}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{s}{r_0}\right)^2 - 1}$, получим:

$$C_1 = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \left[\frac{s}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{s}{r_0}\right)^2 - 1} \right]}.$$

Если расстояние между проводами много больше их радиуса $\left(\frac{s}{r_0}\right)^2 \gg 1$,

$$C_1 = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2s}{r_0}}.$$

Напряженность электрического поля двух заряженных осей (и цилиндров круглого сечения) определяется из $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{2(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right],$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\frac{2y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{2y}{(x+a)^2 + y^2} \right].$$

Дифференциальное уравнение силовой линии $\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x}$, т.е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}.$$

Можно показать, что этому дифференциальному уравнению удовлетворяет семейство окружностей с центром на оси ординат:

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2.$$

Силовые линии ортогональны эквипотенциалам, и, как видно из уравнения, проходят через точки 1 и 2 (следы осей на координатной плоскости), рис. 2.5.

Пользуясь полученным частным решением уравнения Лапласа $\varphi(x, y)$ для двух заряженных осей можно вычислить

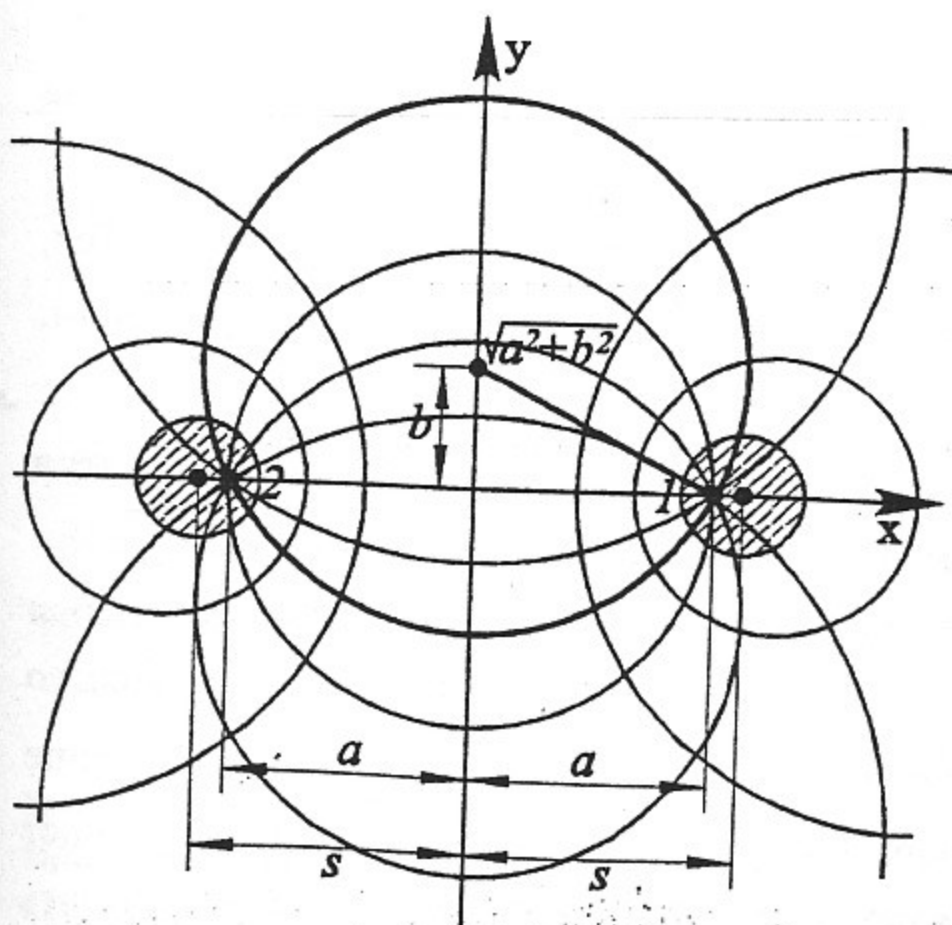


Рис. 2.5. Силовые линии и эквипотенциалы поля двух заряженных цилиндров.

ёмкость и напряженность поля для следующих двухпроводных линий с сечением (см. рис. 2.6 – случаи I, II, III) проводов в виде круговых цилиндров (представляя плоскость как цилиндр бесконечного радиуса – случай III).

Решения этих задач имеют большое практическое значение.

Например, погонная ёмкость линии "провод над плоскостью" — $C_1 = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2s}{r_0}}$, т.е.

вдвое больше ёмкости соответствующей двухпроводной линии.

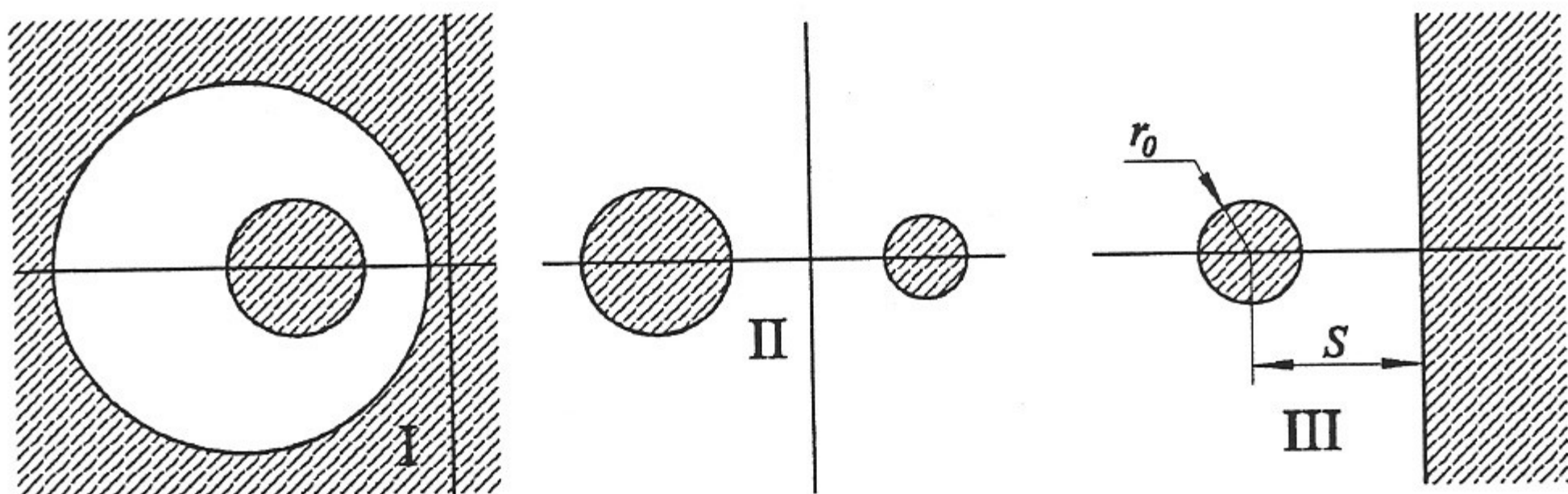


Рис. 2.6. Варианты двухпроводных линий.

Понятие о ёмкостной связи двух линий

Рассмотрим два проводящих цилиндра, оси которых параллельны проводящей плоскости. Каждый такой цилиндр образует линию типа "провод над плоскостью". Если эти цилиндры расположены на большом расстоянии друг от друга (значительно большем, чем расстояние от провода до плоскости), то поле линий определено — поле заряженных осей — и все силовые линии проводов замыкаются на плоскость. Электрической (ёмкостной) связи между линиями практически нет.

Если расстояния между проводами становятся сравнимыми с расстояниями от них до плоскости, то заряд на одном проводе будет индуцировать заряд противоположного знака на другом проводе.

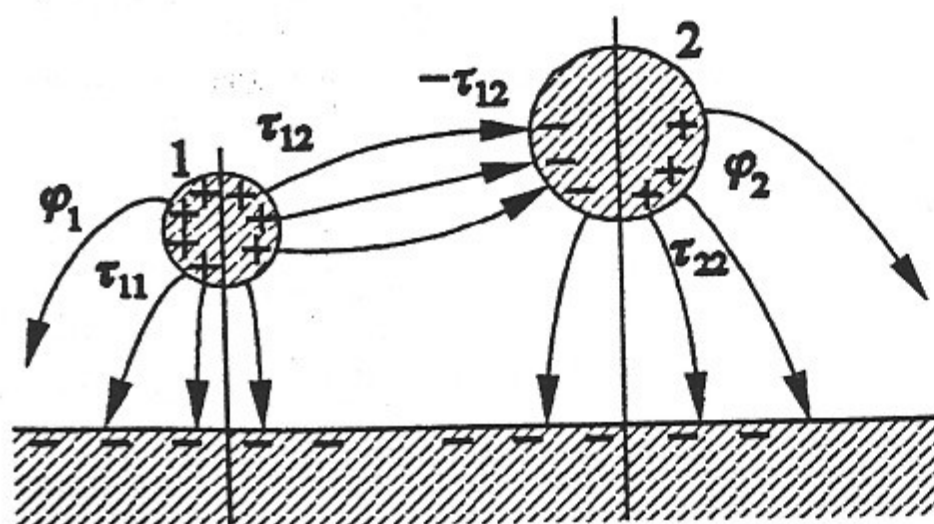


Рис. 2.7. Поле двух цилиндров над проводящей плоскостью.

Конфигурация поля усложняется, хотя оно и остается плоскопараллельным, рис. 2.7.

Если потенциал проводящей плоскости положить равным 0, а заряды (например, положительные) на единицу длины каждой линии τ_1 и τ_2 , то можно представить себе такое распределение зарядов на проводах: часть зарядов будет

связана с зарядами противоположного знака на плоскости (τ_{11} и τ_{22}), а другая часть будет связана силовыми линиями, расположенными между проводами (τ_{12}).

$$\tau_1 = \tau_{11} + \tau_{12}, \quad \tau_2 = \tau_{22} + \tau_{21}, \quad \tau_{21} = -\tau_{12}.$$

Между этими зарядами и потенциалами проводов существует следующая связь:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= C_{11}\varphi_1, & \tau_{22} &= C_{22}\varphi_2, \\ \tau_{12} &= C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), & \tau_{21} &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned}$$

здесь C_{11} , C_{22} — собственные частичные ёмкости проводов, C_{12} , C_{21} — взаимные частичные ёмкости. В рассматриваемом случае — это ёмкости на единицу длины, т.е. погонные ёмкости.

Таким образом, по определению:

$$\tau_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \tau_2 = C_{22}\varphi_2 + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Частичную собственную ёмкость можно определить также экспериментально, если соединить провода 1 и 2 между собой ($\varphi_1 = \varphi_2$), как $C_{11} = \frac{\tau_1}{\varphi_1}$. Аналогично,

$$C_{22} = \frac{\tau_2}{\varphi_2}.$$

Взаимная частичная ёмкость $C_{12} = C_{21} = -\frac{\tau_1}{\varphi_2} = -\frac{\tau_2}{\varphi_1}$ определяется, когда один

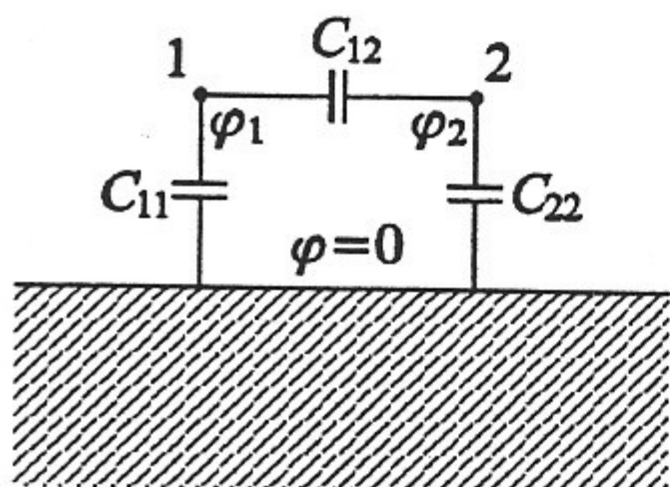


Рис. 2.8. К расчету частичных ёмкостей.

провод соединен с "землей" — $\varphi_1 = \varphi = 0$, или, соответственно, другой провод — $\varphi_2 = \varphi = 0$.

Схема соединения этих ёмкостей приведена на рис. 2.8.

Приведенные выше рассуждения относятся не только к погонным ёмкостям $[\Phi/\text{м}]$, бесконечных линий, но и к проводникам любой формы над проводящей плоскостью $[\Phi]$, а также к ёмкости любых трёх проводников. Знание частичных ёмкостей позволяет

определить влияние одной линии на другую (ёмкостную связь).

Полученное выше решение уравнения Лапласа для двух заряженных осей

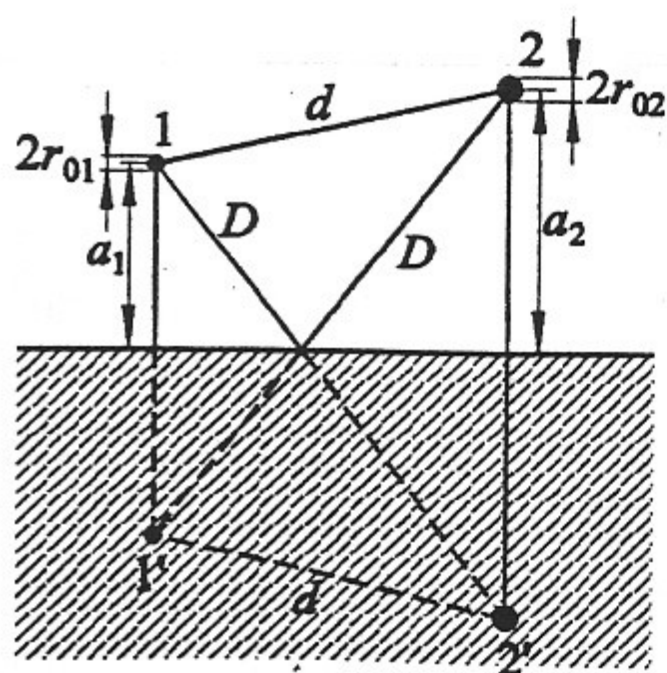


Рис. 2.9. К расчету полей и частичных ёмкостей двух заряженных осей, параллельных проводящей плоскости.

позволяет приблизительно (для тонких проводов $\frac{r_0}{s} \ll 1$) рассчитать частичные ёмкости, а значит найти связь двух линий. При этом приблизительном расчете предполагается, что геометрическая и электрическая оси проводов совпадают.

Электростатическое поле такой системы проводов по принципу наложения соответствует сумме полей двух линий типа "провод над плоскостью". А поле каждой из них — это поле двух заряженных осей, 1-1', 2-2', рис 2.9.

Таким образом, вблизи каждого провода потенциал рассчитывается как сумма потенциала собственного поля и потенциала поля соседней пары осей:

$$\varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{2a_1}{r_{01}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}, \quad \varphi_2 = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{2a_2}{r_{02}} + \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}.$$

Решая эту систему относительно τ_1 и τ_2 получим (см. также определение частичной ёмкости):

$$\tau_1 = \varphi_1(C_{11} + C_{12}) - C_{12}\varphi_2, \quad \tau_2 = \varphi_2(C_{22} + C_{12}) - C_{12}\varphi_1.$$

$$C_{12} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 \ln \frac{D}{d}}{\ln \frac{2a_1}{r_{01}} \cdot \ln \frac{2a_2}{r_{02}} - \left(\ln \frac{D}{d} \right)^2}.$$

Если связи между линиями нет (провода разнесены так далеко, что $D \approx d$, $\ln \frac{D}{d} \rightarrow 0$, $C_{12} \rightarrow 0$), то значение частичной собственной ёмкости приближается к значению ёмкости провода над плоскостью:

$$C_{11} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2a_1}{r_{01}}}, \quad C_{22} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2a_2}{r_{02}}}.$$

Поле электрического диполя

Рассмотренное частное решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах — поле заряженной оси — послужило основой для построения многих других решений этого уравнения, важных для практики. Рассмотрим теперь еще одно известное решение — поле точечного заряда q :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{R}^0.$$

Оно, как известно, получается из соображений симметрии путем применения теоремы Гаусса в интегральной форме и, как нетрудно показать, удовлетворяет уравнению Лапласа, записанному в сферической системе координат. Действительно, потенциал такого поля определяется из $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, т.е.:

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial R},$$

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int \frac{dR}{R^2} + B = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R} + B.$$

Из этого частного решения легко "конструируется" поле электрического диполя. Пусть заряды $+q$ и $-q$ расположены на расстоянии h друг от друга в однородном диэлектрике, рис. 2.10.

Если нас интересует поле вдали от зарядов, при $R \gg h$, то с этой точки зрения совокупность двух разноименных равных точечных зарядов образует диполь.

Расположим начало сферической системы координат (R, θ, α) в центре диполя, а полярную ось z , определяющую начало отсчета угла θ , направим по линии плеча h .

По принципу наложения:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Учитывая, что $h \ll R$, можно принять $R_2 - R_1 \approx h \cos \theta$ и $R_1 R_2 \approx R^2$. Отсюда

$$\varphi = \frac{qh \cos \theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}.$$

Величина $qh = p$ — называется электрическим моментом диполя. Направление его — от $-q$ к $+q$, т.е.: $\varphi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}$.

Составляющие напряженности поля:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3}.$$

Поле зависит только от R и θ , но не зависит от α — плоскомеридианное поле.

Силовые линии и эквипотенциали поля электрического диполя показаны на рис. 2.11.

Прикладное значение данного решения, например, в его применении в теории элементарных излучающих вибраторов.

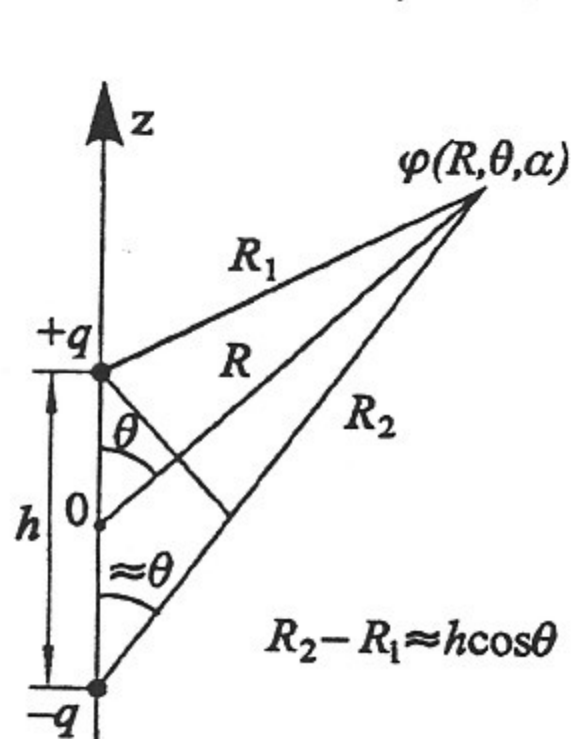


Рис. 2.10. Электрический диполь в сферической системе координат.

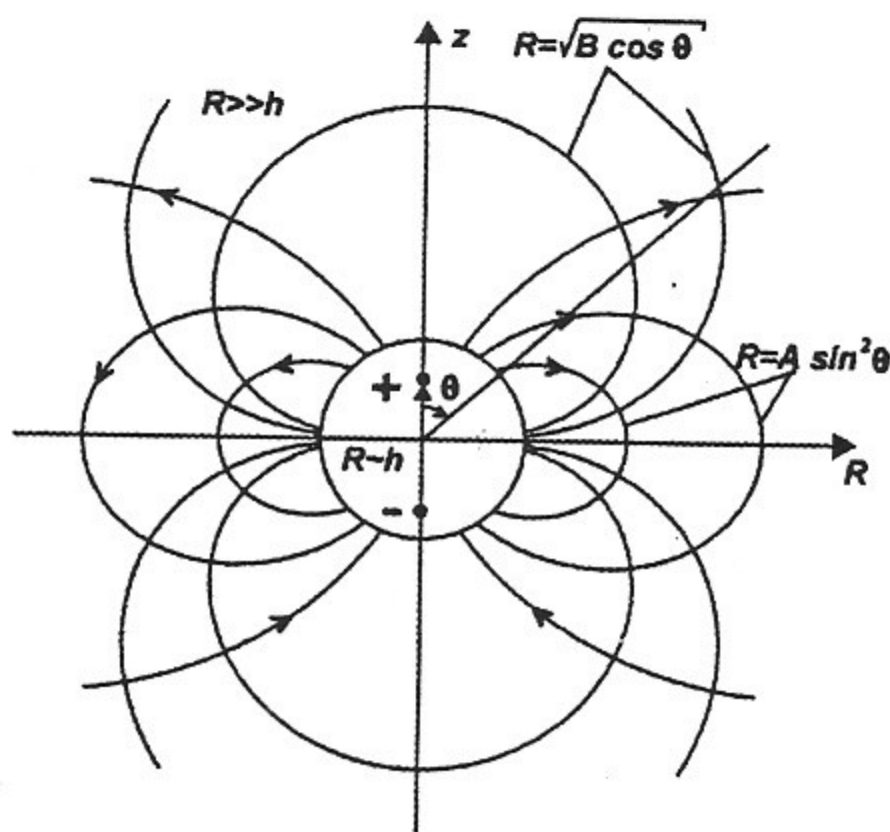


Рис. 2.11. Силовые линии и эквипотенциали поля электрического диполя.

Поляризация диэлектриков

Другая область, где полезно понятие "электрический диполь" — элементарная теория диэлектриков. До сих пор рассматривалось поле, создаваемое т.н. свободными зарядами (например зарядами, расположенными на поверхности проводников). Роль диэлектрика учитывалась введением $\epsilon > 1$ в знаменателе выражений, определявших поле заряда, оси и т.д., то есть ослаблением поля в ϵ раз по сравнению с полем в вакууме. Это — экспериментальный факт, открытый ещё Фарадеем. Простейшая модель линейной диэлектрической среды может быть построена на основе представления о поляризации диэлектриков, т.е. о появлении в них диполей, электрический момент которых пропорционален действующему на них полю. В действительности устройство многих диэлектриков сложнее. Но указанная модель

вполне соответствует действительности, если не входить в микроструктуру диэлектрика и не рассматривать нелинейных сред.

Итак, рассматривая диэлектрик, как совокупность диполей, можно ввести средний электрический момент единицы объёма, который в линейной среде пропорционален $\vec{E}$. Этот средний момент называют *вектором поляризации*:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V} = \epsilon_0 \kappa \vec{E},$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика. Таким образом, в диэлектрике появляются заряды, входящие в состав диполей — связанные заряды.

Диэлектрик, как среда, в теории поля характеризовался проницаемостью ϵ , такой, что $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, в вакууме $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$.

В соответствии с представлениями о поляризации диэлектриков можно полагать

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \text{т.е. } \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} \text{ и } \epsilon = 1 + \kappa.$$

Если диэлектрик однороден и линеен, связанные заряды появляются только на его границах, и это как раз уточнено введением ϵ и $\vec{D}$, поэтому в теореме Гаусса, которая сформулирована для потока вектора смещения:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dv, \quad \text{учитываются только } \rho \text{ — свободные заряды.}$$

Если диэлектрик нелинеен или неоднороден, соотношение $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ теряет свои преимущества. Тогда можно рассматривать поля только в вакууме ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$) и пользоваться вектором $\vec{P}$ с его сложной зависимостью от $\vec{E}$. При этом заряды диполей могут и не компенсироваться в объёме, и придется учитывать все, а не только свободные заряды.

В технике высоких частот и больших мощностей такие диэлектрики применяются редко и мы будем рассматривать здесь только линейные и однородные диэлектрические среды.

Метод зеркальных отображений

Известные частные решения уравнения Лапласа (поле точечного заряда и заряженной оси) могут служить для построения новых решений, если пользоваться методом изображений, который предложил Кельвин и развил другой английский физик Сирл.

Рассмотрим проводящую плоскость, перпендикулярную оси y , т.е. в плоскости xz должно быть $\varphi = \text{const}$.

Пусть в верхнем полупространстве имеются произвольно заданное распределение зарядов $+ \rho(x, y, z)$.

В качестве простейшей иллюстрации возьмем точечный заряд $+q$ на расстоянии y_0 от плоскости xz , рис. 2.12.

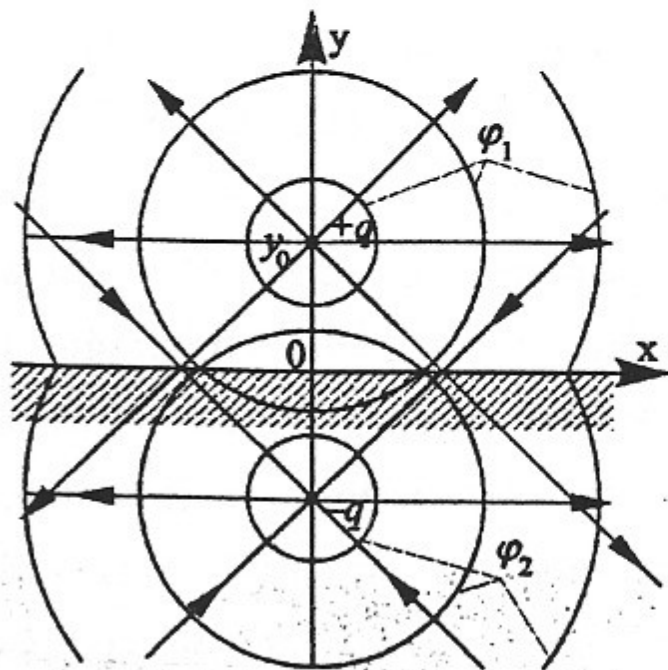


Рис. 2.12. Отображение заряда над проводящей плоскостью.

Найдем сначала решение уравнения Пуассона $\varphi_1(x, y, z)$, удовлетворяющее граничным условиям только на ∞ (т.е. $\varphi_1 \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$), но не на плоскости $y = 0$ (т.е. $\varphi_1 \neq \text{const}$ при $y = 0$):

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Построим зеркальное отображение зарядов: $-\rho(x, -y, z)$ (для точечного заряда $+q$ это $-q$) и найдем решение φ_2 дифференциального уравнения Пуассона, удовлетворяющее граничным условиям при $\varphi_2 \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, но не удовлетворяющее граничным условиям на проводящей плоскости $\varphi_2 \neq \text{const}$ при $y = 0$.

Это решение будет отличаться от φ_1 только знаком при заряде и при y (в силу симметрии), т.е.

$$\nabla^2 \varphi_2 = +\frac{\rho(x, -y, z)}{\epsilon \epsilon_0}, \quad \varphi_2(x, y, z) = -\varphi_1(x, -y, z).$$

Для принятой иллюстрации φ_2 — сферы вокруг заряда $-q$, силовые линии идут по радиусам.

По принципу наложения сумма этих решений $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ также удовлетворяет уравнению Пуассона, условиям на ∞ и, как нетрудно видеть, удовлетворяет граничному условию $\varphi = 0$ на проводящей плоскости $y = 0$. Действительно, при $y = 0$: $\varphi_2(x, 0, z) = -\varphi_1(x, 0, z)$, т.е. $\varphi(x, 0, z) = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1(x, 0, z) - \varphi_1(x, 0, z) = 0$. Следовательно, поле произвольного распределения зарядов над проводящей плоскостью тождественно полю двух систем зарядов в пространстве без плоскости, если одна система является зеркальным изображением другой.

Заметим, что силовые линии поля двух точечных зарядов $\pm q$ (рис. 2.13.) — не окружности, как в случае двух заряженных осей $\pm \tau$. Применяя дважды прием зеркальных изображений к двум плоскостям, образующим прямой угол, мы сведем решение уравнения Лапласа для поля точечного заряда вблизи проводящего двугранного угла к сумме решений для четырех точечных зарядов, рис. 2.14.

Этим приемом зеркального изображения мы уже по существу пользовались, "отражая" следы заряженных осей над плоскостью, так как из решения уравнения Лапласа было видно, что плоскость симметрии — эквипотенциаль.

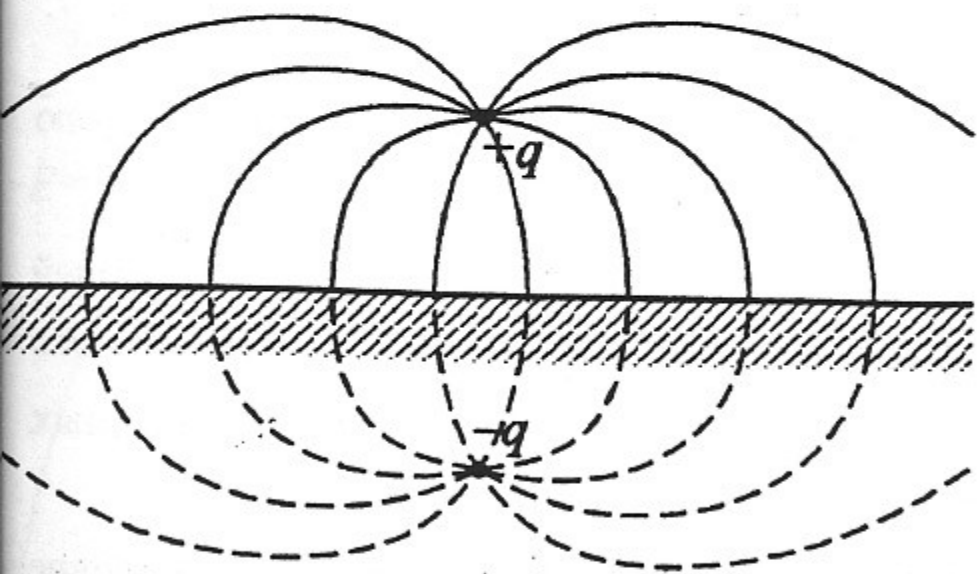


Рис. 2.13. Поле заряда над проводящей плоскостью.

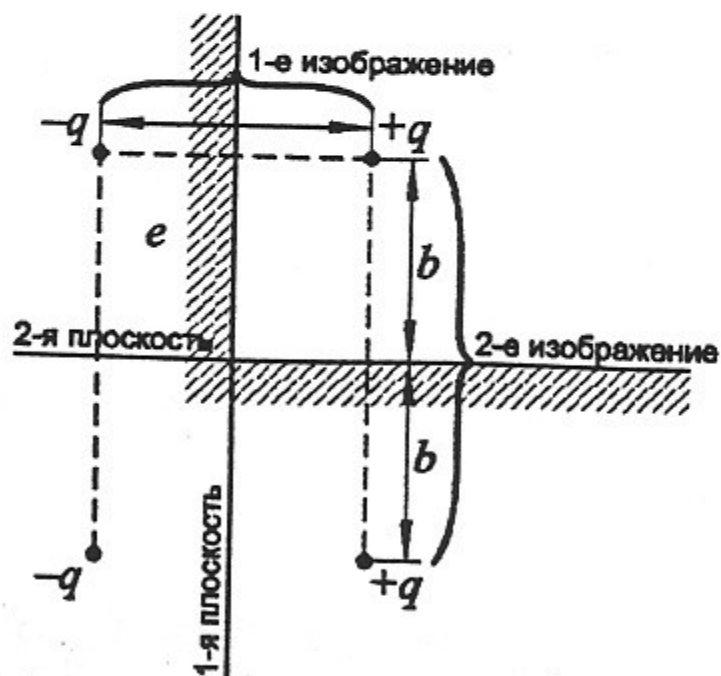


Рис. 2.14. Двухкратное отображение точечного заряда.

Анализируя поле двух заряженных осей мы обнаружили, что эквипотенциали — цилиндрические поверхности, а следы осей $+ \tau$ и $- \tau$ являются инверсными точками относительно следов эквипотенциалей, т.е. $r_0^2 = (s - a)(s + a)$, или $r_0^2 = bS$, где $b = s - a$, $S = s + a$.

Таким образом, ось 1 — зеркально (по правилам инверсии) отражается в поверхности проводящего цилиндра $\varphi = \text{const}$, переходя в ось 2 (рис. 2.15).

Правило зеркального изображения заряженной оси в проводящем цилиндре — инверсия: $+ \tau$ в $- \tau$, расстояние от оси цилиндра до $- \tau$:

$$b = \frac{r_0^2}{S},$$

где S — расстояние от $+ \tau$ до оси цилиндра, r_0 — радиус цилиндра.

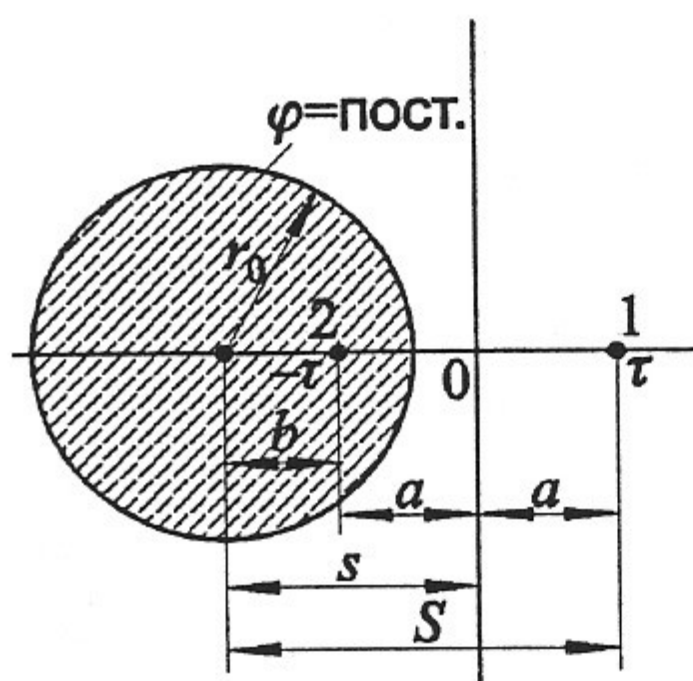


Рис. 2.15. Отображение заряженной оси в проводящем цилиндре.

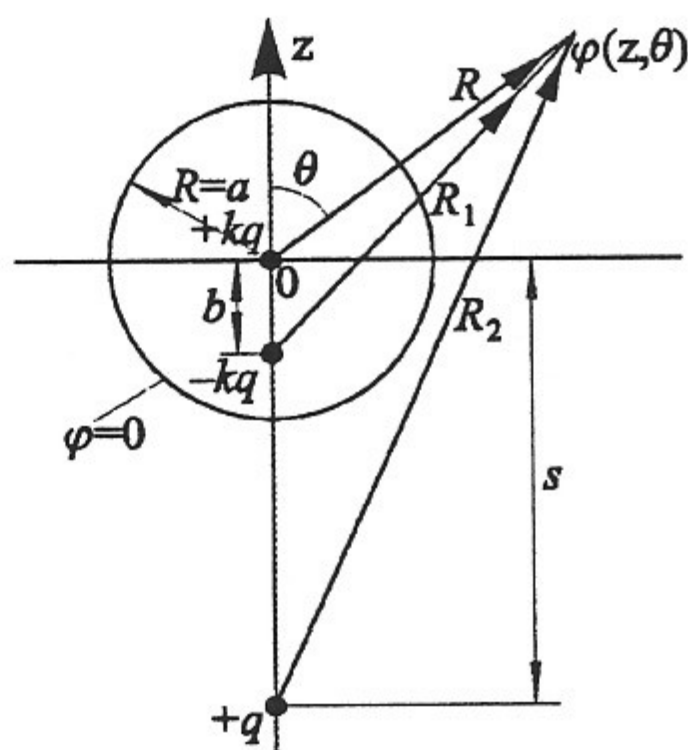


Рис. 2.16. Отображение заряда в проводящей сфере.

Изображение точечного заряда возможно не только в проводящей плоскости или в проводящем цилиндре, но и в проводящей сфере. Этот случай сложнее предыдущих, ибо заряд $+q$ (рис. 2.16) изображается в сфере не как $-q$, а зарядом другой величины. Дело в том, что ни одна эквипотенциаль поля двух одинаковых зарядов — не сфера, тогда как в поле двух различных по величине и знаку зарядов, можно найти одну эквипотенциаль сферической формы.

Рассмотрим поле зарядов $+q$ и $-kq$, расположенных на полярной оси z сферической системы координат так, что расстояние до заряда $+q$ от начала координат равно s , а заряд $-kq$ находится от начала координат на расстоянии b .

Подберем b и $-kq$ так, чтобы для заданного s и $+q$ потенциал был равен нулю на сфере заданного радиуса $R = a$.

Поставленная таким образом задача есть сведение задачи о проводящей заземленной сфере $R = a$ ($\varphi = \text{const} = 0$) в поле точечного заряда $+q$, расположенного на расстоянии s от центра сферы, к уже рассмотренной задаче о поле двух точечных зарядов.

Требуется определить k и b — расстояние до зеркального изображения. Условие $\varphi = 0$ приведет к соотношению:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_2} - \frac{kq}{R_1} \right) = 0,$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{q}{\sqrt{R^2 + s^2 + 2Rs \cos \theta}} = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + b^2 + 2Rb \cos \theta}},$$

$$\text{или} \quad R^2 + b^2 + 2Rb \cos \theta = k^2 R^2 + k^2 s^2 + 2k^2 Rs \cos \theta.$$

Так как последнее должно выполняться для любого θ ($\varphi = 0$ на всей сфере), то

$$\begin{cases} R^2 + b^2 = k^2(R^2 + s^2). \\ k^2 s = b. \end{cases}$$

Исключая b , имеем:

$$k^4 - k^2 \left(\frac{R^2}{s^2} + 1 \right) + \frac{R^2}{s^2} = 0; \quad k = \frac{R}{s}, \quad b = \frac{R^2}{s}.$$

Для $R = a$ получаем $k = \frac{a}{s}$, $b = \frac{a^2}{s}$.

Таким образом, изображение точечного заряда $+q$ в проводящей сфере $R = a$ неполное ($-kq$, где $k = \frac{a}{s}$), и этот заряд-изображение отстоит от центра сферы на расстоянии $b = \frac{a^2}{s}$.

Если $\varphi = \text{const} \neq 0$, т.е. сфера не заземлена, то при её внесении в поле точечного заряда q суммарный заряд сферы $Q = 0$ — сохраняется, и кроме $-kq$ необходимо в центре сферы расположить заряд $+kq$, что не нарушит $\varphi = \text{const}$.

Таким образом, внесение изолированной проводящей сферы в поле точечного заряда $+q$ приводит к индуцированию в ней зарядов $+kq$ в центре и $-kq$ — на расстоянии b от центра.

Проводящая сфера во внешнем однородном электростатическом поле

Рассмотрим изображение точечного заряда в проводящей сфере в предельном случае $q \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$. Тогда в области, куда вносится сфера, до её внесения имеется

однородное поле E_0 :

$$E_0 = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 s^2}.$$

Для этого представим, что $q \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$ необходимым образом так, что $E_0 = \text{const}$.

Так как вносимая сфера $R = a$ изолирована, в ней появляются изображения двух зарядов $-kq = -\frac{a}{s}q$ на расстоянии $b = \frac{a^2}{s}$ от центра и $+kq = \frac{a}{s}q$ в центре (рис. 2.17). При

$s \rightarrow \infty$ $b \rightarrow 0$, т.е. все заряды близко распо-

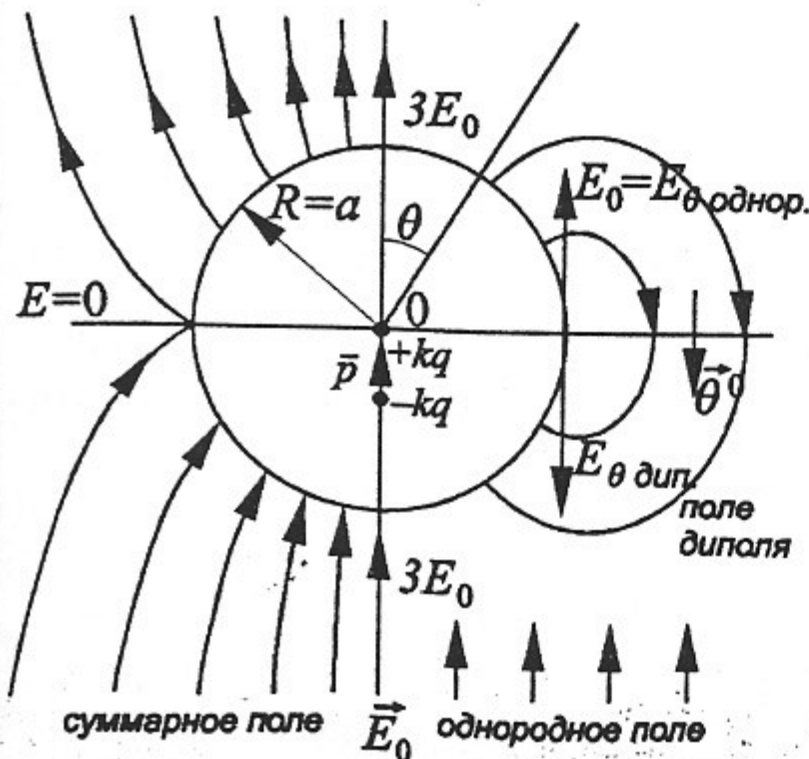


Рис. 2.17. Проводящая сфера во внешнем однородном поле.

ложены друг к другу (в сравнении с радиусом сферы) и, следовательно, образуют диполь с моментом $p = kqb = q \frac{a^3}{s^2}$, где $q = 4\pi\epsilon_0 s^2 E_0$, параллельным вектору $\vec{E}_0$, т.е.

$$\vec{p} = E_0 4\pi\epsilon_0 s^2 \frac{a^3}{s^2} \vec{k}^0 = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3 \vec{k}^0.$$

Таким образом, кроме однородного поля появляется поле диполя с моментом p .

Напряженность этого поля:

$$E_R = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 2E_0 \frac{a^3}{R^3} \cos \theta,$$

$$E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} = E_0 \frac{a^3}{R^3} \sin \theta.$$

На поверхности $R = a$ сферы из граничных условий $E_t = E_\theta|_{R=a} = 0$. Действительно, например, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $E_\theta = E_0$, но противоположной направленности. В произвольной точке $E = E_{\text{однор}} + E_{\text{диполя}}$, где однородное поле дает при $R = a$ $E_\theta = -E_0 \sin \theta$, диполь дает $E_\theta = E_0 \sin \theta$, т.е. $E_t = E_\theta|_{R=a} = 0$: E_R на поверхности сферы наибольшее, если $\theta = 0$, $E_{R\text{max}} = E_0 + 2E_0 = 3E_0$.

Внесение проводящей сферы в однородное поле приводит к увеличению поля на поверхности втрое, независимо от радиуса сферы.

Аналогично решаются задачи о проводящем цилиндре, вносимом в однородное электрическое поле. Изображение в нем индуцируется в виде двумерного диполя с моментом $p_t = \tau b$, где $b = \frac{r_0^2}{s}$; $\pm \tau$ — заряды, расположенные на электрической и геометрической осях цилиндра, b — расстояние между этими осями.

Задачи Сирла

Зеркальные отображения точечных зарядов и заряженных осей возможны не только в проводящих поверхностях, но и в поверхностях, разделяющих диэлектрики. Оказывается возможным подобрать такие величины зарядов, расположенных в местах зеркальных изображений, что выполняются граничные условия на поверхности раздела диэлектриков.

1. Точечный заряд над плоской поверхностью раздела диэлектриков.

Покажем, что поле в среде I(ϵ_1) при наличии среды II(ϵ_2) (расстояние от q до плоской границы равно a , рис. 2.18) можно рассчитать как поле двух точечных зарядов в однородной среде I(ϵ_1), причем заряд $q_1 = k_1 q$ является неполным (несовершенным) зеркальным отображением заряда в плоскости раздела.

Первая схема расположения зарядов для расчета поля в среде I(ϵ_1) (решение для верхнего полупространства) представлена на рис. 2.19.

Поле во второй среде можно также рассчитывать, как поле в однородной среде II (ϵ_2) от одного точечного заряда $q_2 = k_2 q$, расположенного на месте заряда q .

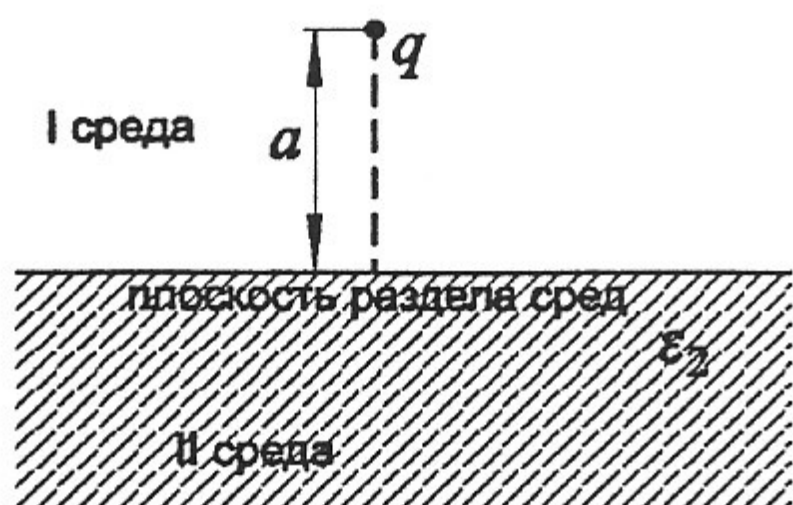


Рис. 2.18. Заряд над поверхностью раздела сред.

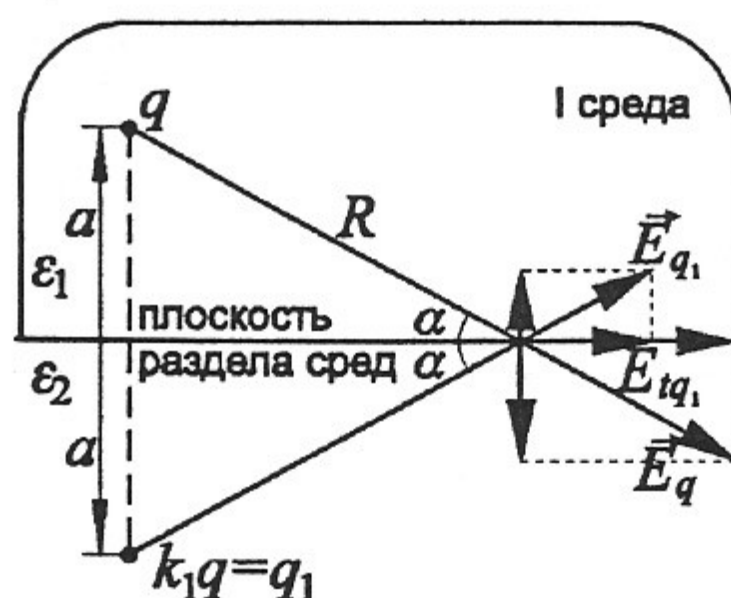


Рис. 2.19. К расчету поля в среде I.

Вторая схема расположения зарядов — для расчета поля в среде II (ϵ_2) (решение для нижнего полупространства) представлена на рис. 2.20.

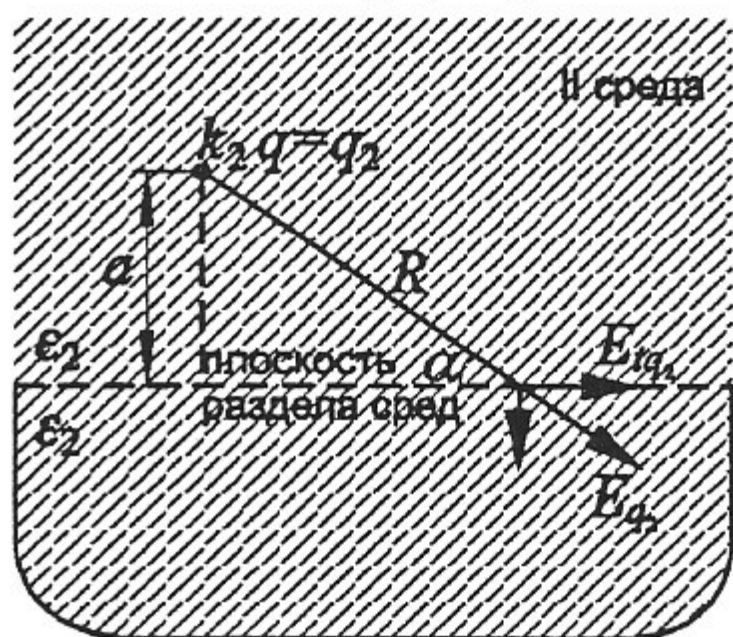


Рис. 2.20. К расчету поля в среде II.

Сирл заметил, что этих зарядов достаточно для того, чтобы удовлетворить граничным условиям. Ну а в остальной части пространства — поле точечных зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа.

Найдем коэффициенты k_1 и k_2 для так называемых несовершенных изображений.

Для любой точки плоскости, лежащей на границе раздела, в первой схеме расположения зарядов: $E_{t(q)} + E_{t(q_1)} = E_{t(I)}$. Во второй схеме $E_{t(q_2)} = E_{t(II)}$.

Из граничных условий:

$$1) \quad E_{t(I)} = E_{t(II)}.$$

$$E_{t(q)} + E_{t(q_1)} = E_{t(q_2)}, \quad \text{или} \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 R^2} \cos \alpha + \frac{k_1 q}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 R^2} \cos \alpha = \frac{k_2 q}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 R^2} \cos \alpha,$$

отсюда $\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{k_1}{\epsilon_1} = \frac{k_2}{\epsilon_2}.$

$$2) \quad D_{n(I)} = D_{n(II)}.$$

$$D_{n(I)} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{n(q)} - \epsilon_0 \epsilon_1 E_{n(q_1)}, \quad D_{n(II)} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{n(q_2)}, \quad \text{т.е.} \quad 1 - k_1 = k_2.$$

Из этих граничных условий определяются коэффициенты k_1 и k_2 :

$$\begin{cases} 1 + k_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} k_2, \\ 1 - k_1 = k_2 \end{cases} \quad 2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + 1 \right) k_2, \quad k_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad k_1 = 1 - \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad k_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Таким образом, определены величины неполных изображений заряда q : $k_1 q$ и $k_2 q$. Если, например, $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$, то $k_1 \rightarrow -1$, что соответствует зеркальному отображению q в проводящей плоскости.

2. Заряженная ось, параллельная плоской поверхности раздела диэлектриков (ϵ_1, ϵ_2).

τ — линейная плотность заряда на оси, a — расстояние до плоскости раздела, рис. 2.21.

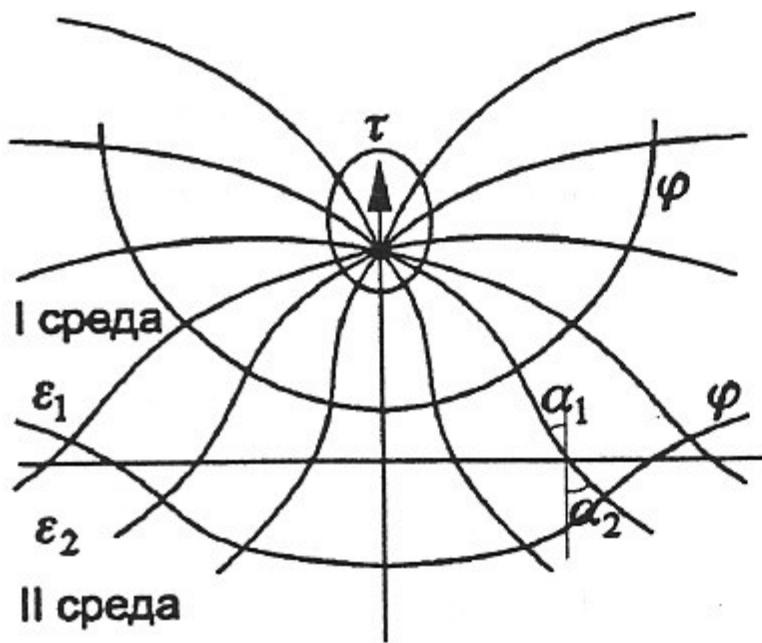


Рис. 2.21. Поле заряженной оси над поверхностью раздела диэлектриков.

Решение совершенно аналогично.

Поле над плоскостью (в среде I(ϵ_1)) рассчитывается как поле заряженных осей с плотностями зарядов τ и $\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \tau$, расположенных на расстоянии a над и под плоскостью в однородной среде I(ϵ_1).

Поле под плоскостью (в среде II(ϵ_2)) рассчитывается как поле заряженной оси с линейной плотностью заряда $\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \tau$.

В этой плоской задаче наглядно иллюстрируется закон преломления силовых линий электрического поля (рис. 2.22). Из $E_{t1} = E_{t2}$ и $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$ следует

$$\frac{E_{t1}}{\epsilon_1 E_{n1}} = \frac{E_{t2}}{\epsilon_2 E_{n2}}; \quad \text{т.е.} \quad \frac{\frac{E_{t1}}{E_{n1}}}{\frac{E_{t2}}{E_{n2}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

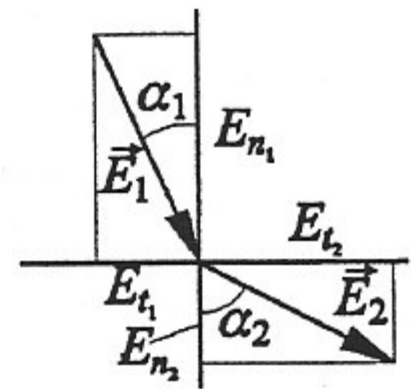


Рис. 2.22. Преломление силовых линий на границе раздела.

При $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ ("металл") $\alpha_1 \rightarrow 0$.

3. Заряженная ось (O', τ) внутри цилиндрической поверхности раздела диэлектриков (ϵ_1, ϵ_2).

Для расчета полей в среде I(ϵ_1), как в однородной с ϵ_1 , следует расположить вторую заряженную ось по линии O'' — инверсной по отношению к оси O' ($bs = r_0^2$); линейная плотность заряда в O'' — $\tau_1 = k_1 \tau$, рис. 2.23. А для расчета поля в среде II(ϵ_2), как в однородной с ϵ_2 следует располагать электрические оси по линиям O' и O ; линейные плотности зарядов следует взять — в O' — $\tau_2 = k_2 \tau$, в O — $\tau_3 = k_3 \tau$.

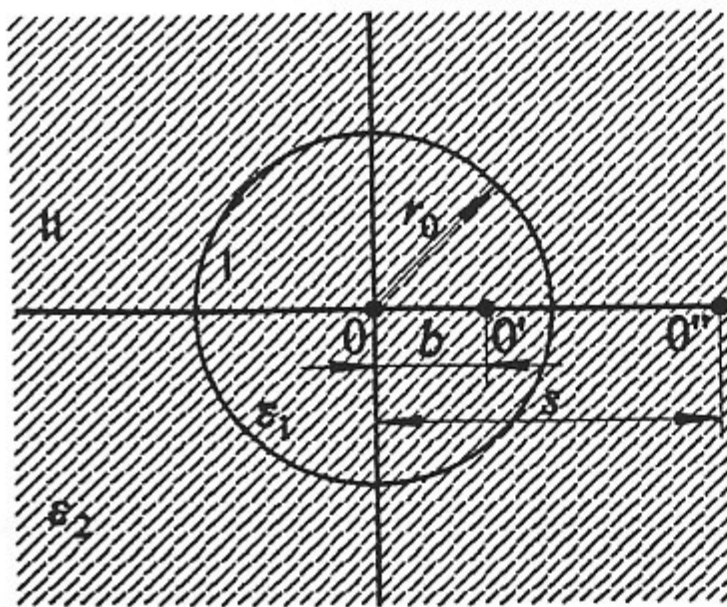


Рис. 2.23. Заряженная ось внутри цилиндрической границы раздела диэлектриков.

Из граничных условий на цилиндрической поверхности определяются:

$$k_1 = k_3 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Запишем эти граничные условия для произ-

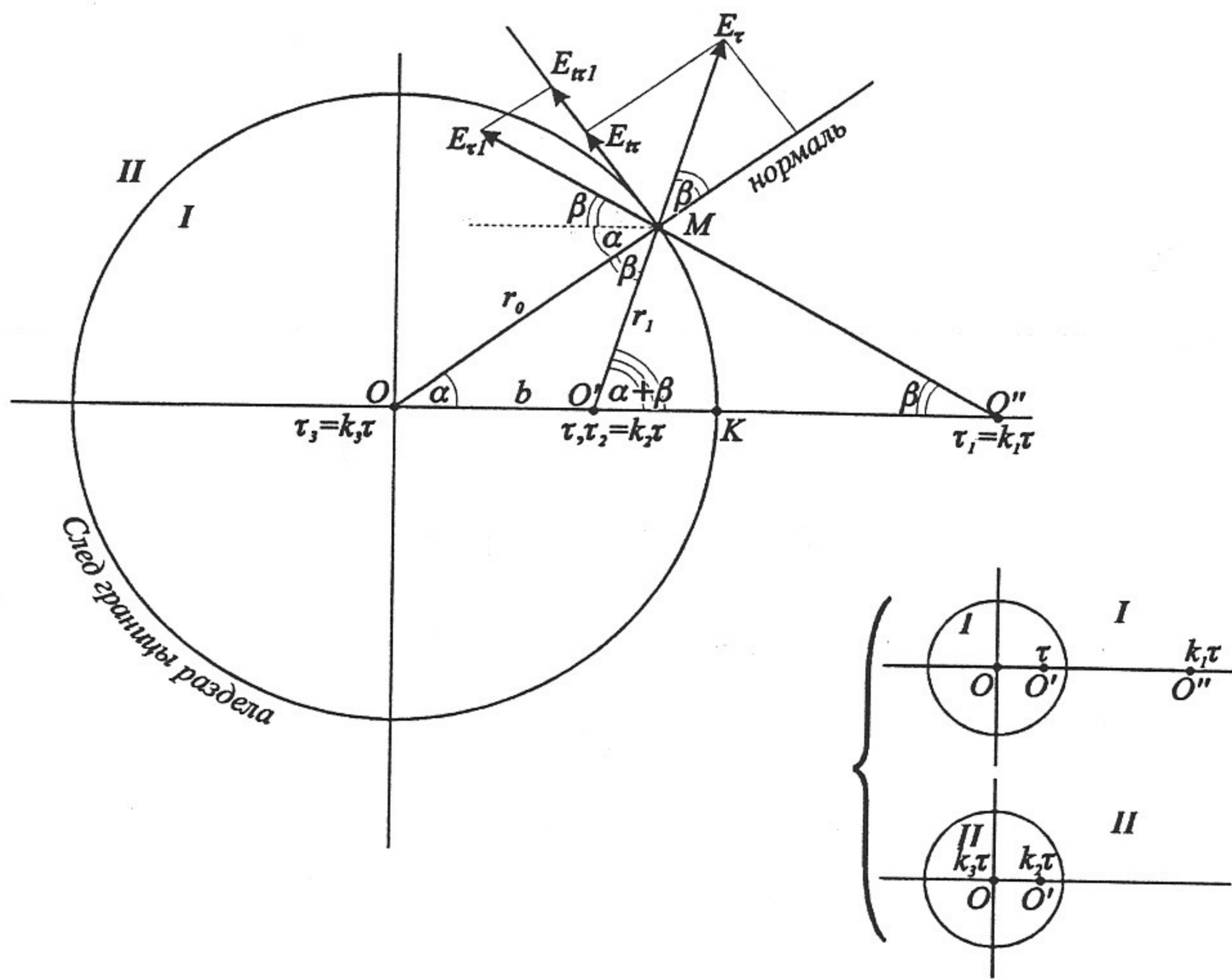


Рис. 2.24. К расчету поля заряженной оси внутри цилиндрической поверхности раздела.

вольной точки M (см. рис. 2.24) на границе раздела диэлектриков. Можно записать:

$$E_{tI} = E_{t\tau} + E_{t\tau1}, \quad E_{tII} = E_{t\tau2} \quad (\text{т.к. } E_{t\tau3} = 0).$$

Из инверсности осей O' и O $\left(\frac{b}{r_0} = \frac{r_0}{s}\right)$ и наличия общего угла α следует подобие треугольников OMO' и OMO'' и равенство соответствующих углов.

$$\text{Отсюда} \quad E_{t\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r_1} \sin \beta, \quad E_{t\tau1} = \frac{k_1 \tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r_2} \sin(\alpha + \beta), \quad E_{t\tau2} = \frac{k_2 \tau}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 r_1} \sin \beta,$$

и, кроме того, $r_1 \sin(\alpha + \beta) = r_2 \sin \beta$.

Из граничного условия $E_{tI} = E_{tII}$ следует:

$$\frac{1 + k_1}{\epsilon_1} = \frac{k_2}{\epsilon_2}. \quad (a)$$

Вместо условия $D_{nI} = D_{nII}$ в данном случае удобно записать условие равенства потоков вектора $\vec{D}$ через участок поверхности MK :

$$\int_{MK} D_{nI} ds = \int_{MK} D_{nII} ds.$$

Так как поле каждой из заряженных осей радиально, потоки через $МК$ пропорциональны соответствующим углам и зарядам:

$$\int_{МК} D_{nI} ds = \frac{\alpha + \beta}{2\pi} \tau - \frac{\beta}{2\pi} k_1 \tau,$$

$$\int_{МК} D_{nII} ds = \frac{\alpha + \beta}{2\pi} k_2 \tau + \frac{\alpha}{2\pi} k_3 \tau.$$

Отсюда $\alpha + \beta - \beta k_1 = (\alpha + \beta) k_2 + \alpha k_3.$ (6)

Кроме того, при расчете поля в среде II полный поток вектора $\vec{D}$ из единицы длины цилиндрической поверхности в соответствии с теоремой Гаусса должен быть равен τ , т.е.

$$k_2 \tau + k_3 \tau = \tau,$$

$$k_2 + k_3 = 1. \quad (в)$$

Частные решения уравнения Лапласа и соответствующие им поля

Решения, зависящие от одной координаты

В криволинейных ортогональных координатах (u, v, w) уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) = 0. \quad (I)$$

Если искать частные решения этого уравнения, зависящие только от одной координаты $\varphi = \varphi(v)$, $\varphi = \varphi(u)$ или $\varphi = \varphi(w)$, то каждое слагаемое равно нулю по отдельности, т.е. задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Для декартовой, цилиндрической и сферической системы координат некоторые из этих решений нам уже известны:

1. Декартова система координат: x, y, z ; $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Если $\varphi = \varphi(x)$, то $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$, (для $\varphi = \varphi(y)$, $\varphi = \varphi(z)$ — то же самое),

$\varphi = C_1 x + C_2$ — потенциал электрического поля плоского конденсатора.

2. Цилиндрическая система координат: $u = r, v = \alpha, w = z, h_2 = r, h_1 = h_3 = 1$.

Если $\varphi = \varphi(r)$, то $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$,

$\varphi = C_1 \ln r + C_2$ — потенциал электрического поля заряженной оси и цилиндрический конденсатор.

Если $\varphi = \varphi(\alpha)$, то $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$,

$\varphi = C_1 \alpha + C_2$, — это поле конденсатора, состоящего из пластин, расположенных под углом друг к другу (см. рис. 3.1).

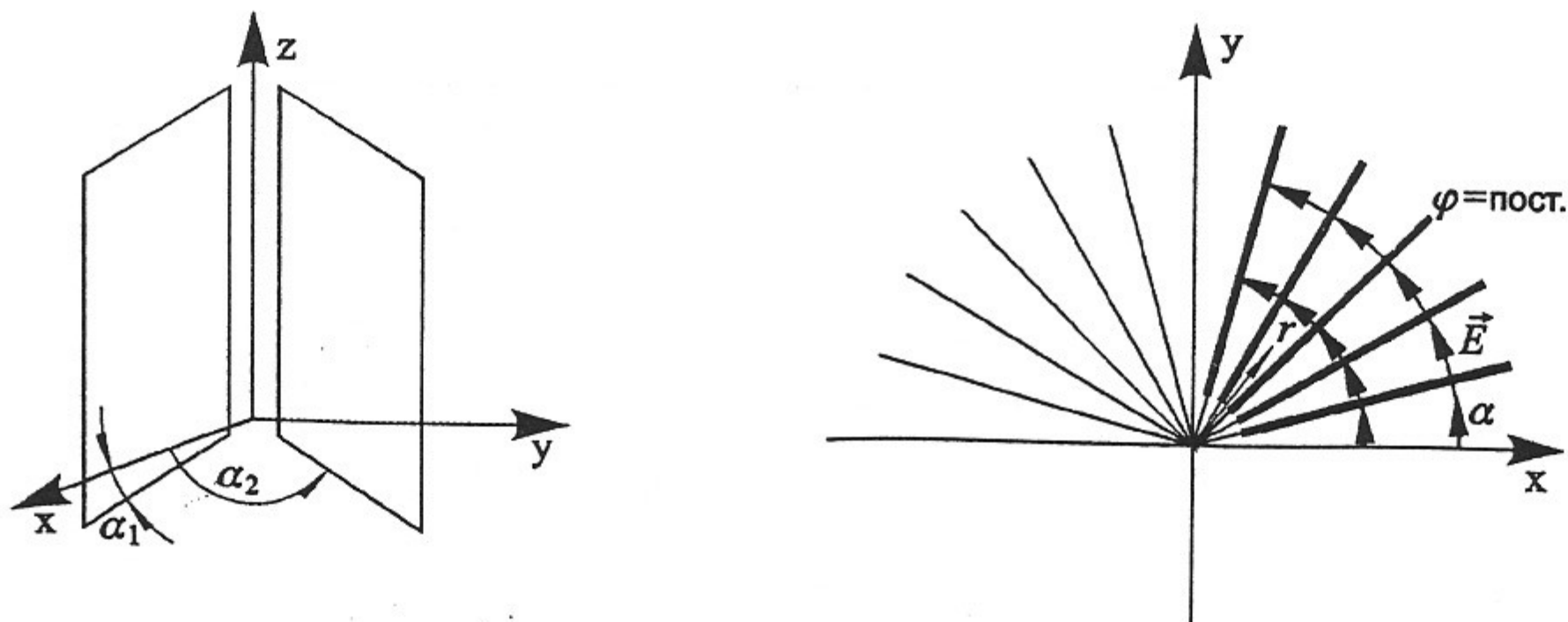


Рис. 3.1. Пластины, расположенные под углом друг к другу.

3. Сферическая система координат: $u = R$, $v = \theta$, $w = \alpha$, $h_1 = 1$, $h_2 = R$, $h_3 = R \sin \theta$.

Если $\varphi = \varphi(R)$, то $\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = 0$,

$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2$ — потенциал электрического поля точечного заряда и сферического конденсатора. Эквипотенциали — концентрические сферы.

Если $\varphi = \varphi(\theta)$, то $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$,

$$\varphi = \int \frac{C_1}{\sin \theta} d\theta = C_1 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + C_2.$$

Эквипотенциали — поверхности коаксиальных полукусов, один из которых при $\theta = \pi/2$ вырождается в плоскость, рис. 3.2. Вершины конусов изолированы друг от друга.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} \vec{\theta}^0,$$

т.е. силовые линии — окружности.

Так как $E \neq \infty$, то $R = 0$ и $\theta = 0$ и π — исключаются из рассмотрения:

$$\vec{E} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{C_1}{R \sin \theta}.$$

На элемент поверхности в виде кольца $dS = 2\pi R \sin \theta dR$ приходится заряд

$$dQ = \sigma dS = \epsilon \epsilon_0 E_\theta dS = -C_1 \epsilon \epsilon_0 \cdot 2\pi dR.$$

Линейная (по образующей конуса) плотность заряда

$$\tau = \frac{\partial Q}{\partial R} = -2\pi \epsilon \epsilon_0 C_1 = \operatorname{const}.$$

Если $\varphi = \varphi(\alpha)$, то $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$ — это поле плоских пластин, расположенных под углом α друг к другу.

4. Система координат сжатого эллипсоида вращения.

Связь с цилиндрической системой координат:

$$r = c \cdot \operatorname{ch} U \cdot \cos V,$$

$$z = c \cdot \operatorname{sh} U \cdot \sin V,$$

$$\alpha = W, \quad c = \operatorname{const}.$$

Выясним форму координатных поверхностей: $U = \operatorname{const}$ и $V = \operatorname{const}$ (рис. 3.3).

$$\frac{r}{c \cdot \operatorname{ch} U} = \cos V, \quad \frac{z}{c \cdot \operatorname{sh} U} = \sin V,$$

$$\frac{r^2}{(c \cdot \operatorname{ch} U)^2} + \frac{z^2}{(c \cdot \operatorname{sh} U)^2} = 1,$$

$$\frac{r^2}{\operatorname{ch}^2 U} + \frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 U} = c^2.$$

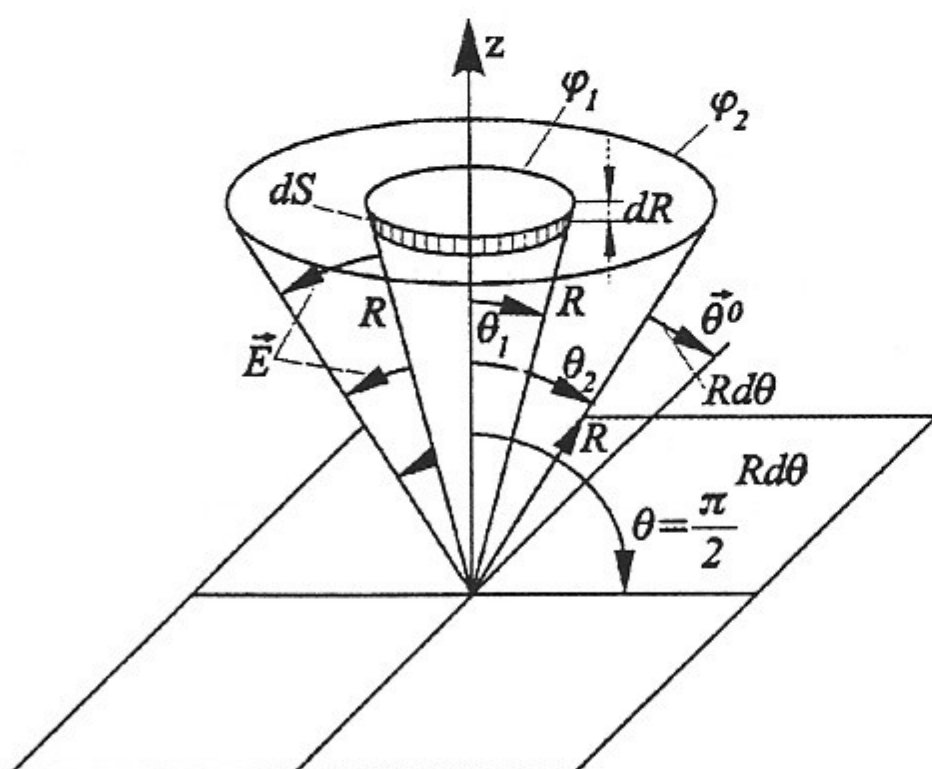


Рис. 3.2. Коаксиальные полукусы в сферической системе координат сжатого эллипсоида.

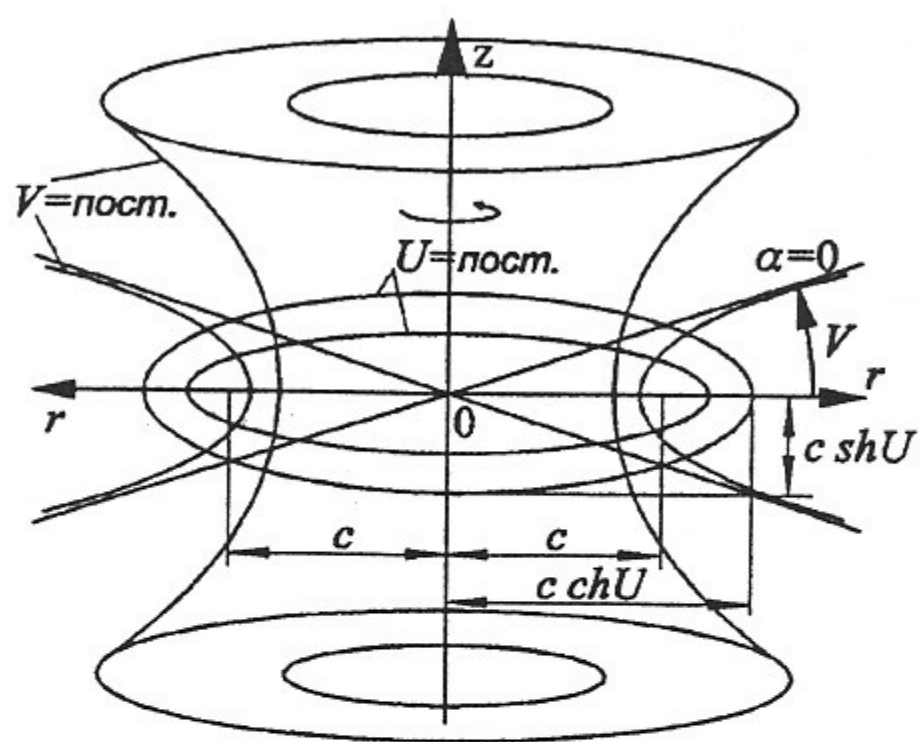


Рис. 3.3. Координатные поверхности в системе координат сжатого эллипсоида.

Получили уравнение для эллипсов с полуосями $a = c \cdot \text{ch } U$, $b = c \cdot \text{sh } U$, следовательно поверхности $U = \text{const}$ — эллипсы в плоскости rz . Для эллипса $a^2 - b^2 = c^2$. $c \cdot \text{ch } U > c \cdot \text{sh } U$, поэтому большая полуось направлена по r , малая — по z . При $\alpha = 0$ полуплоскость rz меридиана расположена справа, при $\alpha = \pi$ — слева. Расстояние между фокусами эллипса — $2c$, таким образом поверхность $U = \text{const}$ — сжатый эллипсоид вращения вокруг оси z .

Различным U соответствуют различные

эллипсоиды, сечения которых плоскостью меридиана — конфокальные эллипсы. След поверхности $V = \text{const}$ найдем аналогично:

$$\frac{r}{c \cdot \cos V} = \text{ch } U, \quad \frac{z}{c \cdot \sin V} = \text{sh } U,$$

$$\frac{r^2}{(c \cdot \cos V)^2} - \frac{z^2}{(c \cdot \sin V)^2} = 1.$$

Получили уравнение гипербол с расстоянием между фокусами $2c$. Таким образом, сечения поверхностей $V = \text{const}$ — конфокальные гиперболы, а сами поверхности — однополостные гиперболоиды вращения. Поверхности $\alpha = \text{const}$ — плоскости меридиана.

Определим метрические коэффициенты этой координатной системы (по аналогии с переходом к декартовой системе):

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{r \partial \alpha}{\partial U}\right)^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial U} = c \cdot \text{sh } U \cos V,$$

$$\frac{\partial z}{\partial U} = c \cdot \text{ch } U \sin V,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial U} = 0,$$

$$h_1 = c \sqrt{\text{sh}^2 U \cdot (1 - \sin^2 V) + \sin^2 V \cdot (1 + \text{sh}^2 U)},$$

$$h_1 = c \sqrt{\text{sh}^2 U + \sin^2 V},$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{r \partial \alpha}{\partial V}\right)^2} = h_1,$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial W}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial W}\right)^2 + \left(\frac{r \partial \alpha}{\partial W}\right)^2},$$

$$\begin{matrix} = 0 & = 0 & = 1 \end{matrix}$$

$$h_3 = r = c \cdot \text{ch } U \cos V.$$

Если искать частное решение уравнения Лапласа, зависящее только от координаты U , т.е $\varphi = \varphi(U)$, то:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial U} \left(ch U \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right) = 0,$$

$$\varphi = \int \frac{C_1}{ch U} dU + C_2 = - \int C_1 dt + C_2 = -C_1 t + C_2,$$

$$\varphi = -C_1 \arcsin \left(\frac{1}{ch U} \right) + C_2.$$

Интеграл взят с помощью подстановки: $\frac{1}{ch U} = \sin t$, поскольку

$$-\frac{sh U}{ch^2 U} dU = \cos t dt, \quad sh U = \sqrt{ch^2 U - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t},$$

$$-\frac{dU}{ch U} \cdot \frac{sh U}{ch U} = -\frac{dU}{ch U} \cdot \cos t, \quad \frac{dU}{ch U} = -dt.$$

Рассмотрим эквипотенциаль $\varphi = \text{const}$, т.е. $U = \text{const}$. Это эллипсоид вращения (см. рис. 3.4), в любом сечении меридиана плоскостью он — эллипс с полуосями: большая полуось $a = c \cdot ch U$; малая $b = c \cdot sh U$; при $U \rightarrow 0$ эквипотенциаль вырождается в диск диаметром $2c$. Все семейство эквипотенциалей получается однозначно, если менять U от 0 до ∞ . Таким образом, полученное частное решение описывает поле "заряженного диска", сжатого эллипсоида вращения и конденсатора, образованного обкладками соответствующей формы, напряженность поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

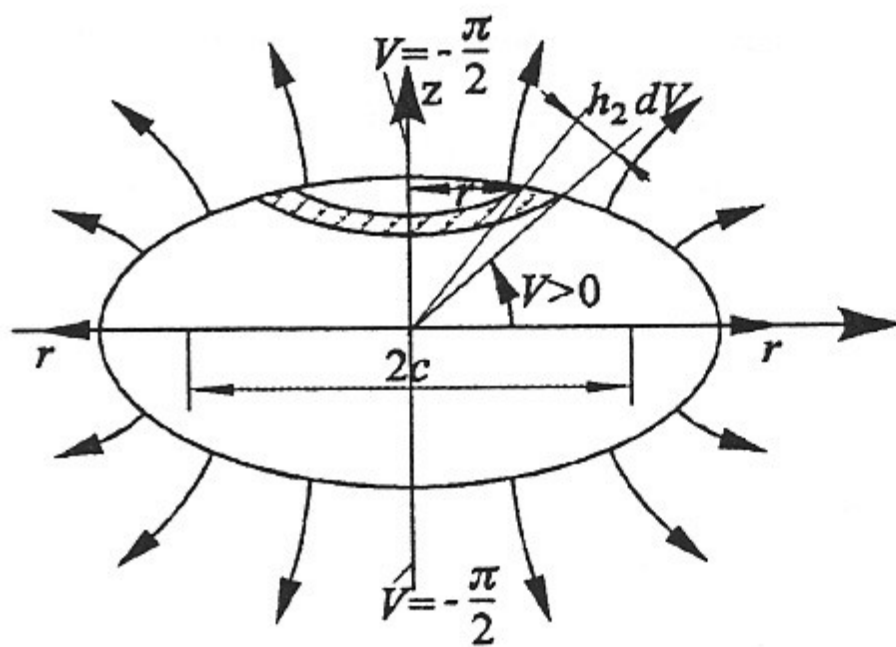


Рис. 3.4. К расчету поверхностной плотности заряда на эллипсоиде.

имеет единственную составляющую:

$$E_U = -\frac{\partial \varphi}{h_1 \partial U}, \quad \text{где } \frac{\partial \varphi}{\partial U} = \frac{C_1}{ch U},$$

$$h_1 = c \sqrt{sh^2 U + \sin^2 V},$$

$$\text{т.е. } E_U = -\frac{1}{c \sqrt{sh^2 U + \sin^2 V}} \frac{C_1}{ch U}.$$

Силовые линии в сечении соответствуют $V = \text{const}$ и ортогональны кривым $U = \text{const}$. Поверхностная плотность заряда на заряженном эллипсоиде при $U = U_0$:

$$\sigma = \epsilon \epsilon_0 E_{U_0} = -\frac{\epsilon \epsilon_0 C_1}{c \cdot ch U_0 \cdot \sqrt{sh^2 U_0 + \sin^2 V}}.$$

Она постоянна во всех точках элементарного пояса шириной $h_2 \partial V$. Площадь этого пояса:

$$\partial S = 2\pi \cdot \underbrace{c \cdot ch U_0}_{r} \cos V \cdot \underbrace{c \sqrt{sh^2 U_0 + \sin^2 V}}_{h_2} \partial V.$$

Весь заряд эллипсоида:

$$Q = \oint \sigma \partial S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\epsilon \epsilon_0 C_1 2\pi c \cdot \cos V \partial V = -4\pi \epsilon \epsilon_0 c C_1 \quad (\text{этим определяется } C_1).$$

Отсюда

$$E_U = -\frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 c \sqrt{sh^2 U + \sin^2 V}} \frac{1}{c \cdot ch U}.$$

- 1) При $U = 0$ эллипсоид превращается в диск диаметром $2c$. Поверхностная плотность заряда на диске:

$$\sigma = \epsilon \epsilon_0 E|_{U=0} = \frac{Q}{4\pi c^2 \sin V} = \frac{Q}{4\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - c^2 \cos^2 V}},$$

а так как $r = c \cdot \operatorname{ch} U \cos V$, то при $U = 0$ $r = c \cdot \cos V$, т.е. на диске радиуса c

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - r^2}}.$$

- 2) При $2c \rightarrow 0$ (или при $R \gg c$) эллипсоид приближается по форме к шару с радиусом $R = c \cdot \operatorname{sh} U \approx c \cdot \operatorname{ch} U$ (т.к. $a = b = R$ при $\operatorname{ch} U \approx \operatorname{sh} U \rightarrow \infty$) и

$$E_U = E_R = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{c^2 \operatorname{sh}^2 U + c^2 \sin^2 V}} \frac{1}{c \cdot \operatorname{ch} U} \rightarrow \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 R^2}.$$

Найдем частное решение уравнения Лапласа, зависящее только от V : $\varphi = \varphi(V)$. Тогда $\nabla^2 \varphi = 0$ записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\cos V \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial V} \right) = 0,$$

$$\varphi = \int \frac{C_1}{\sin \left(V + \frac{\pi}{2} \right)} \partial V = C_1 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{V}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_2.$$

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \operatorname{const}$, соответствующие $V = \operatorname{const}$, имеют форму однополостных гиперболоидов вращения (рис. 3.5). При $V = 0$ — это плоскость с

круглым вырезом диаметром $2c$ (рис. 3.6), при $V = \frac{\pi}{2}$ — это ось z . Таким образом, найденное

решение описывает поле заряженной оси, проходящей через круглое отверстие в проводящей плоскости. Напряженность поля имеет одну составляющую:

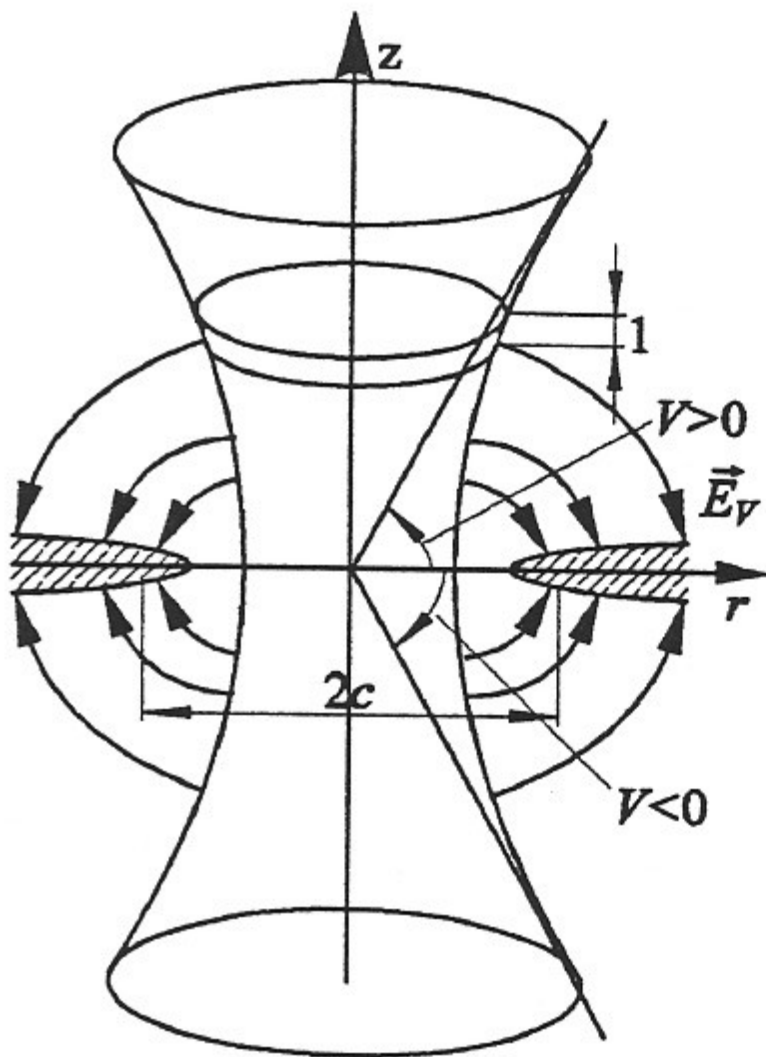


Рис. 3.5. Поле электродов, имеющих форму гиперболоидов вращения.

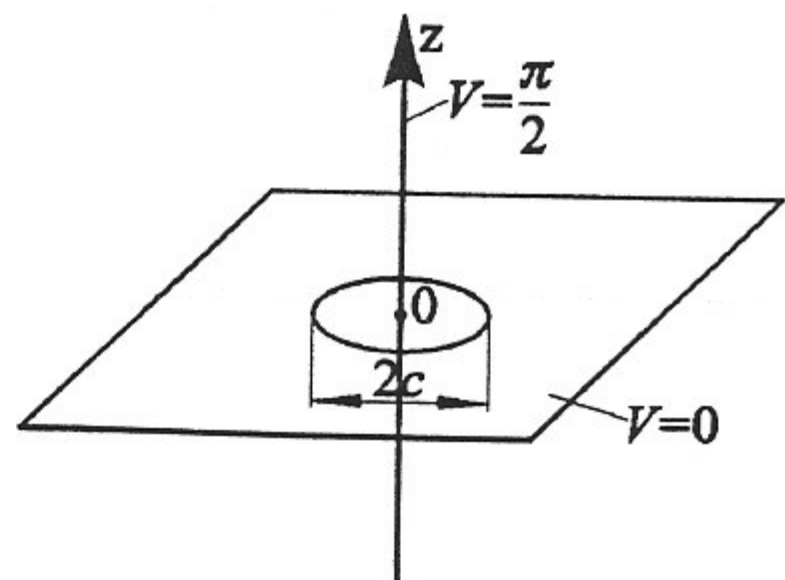


Рис. 3.6. Предельный случай гиперболоида — плоскость с круглым отверстием.

$$E = E_V = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial V} = -\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{sh}^2 U + \sin^2 V}} \cdot \frac{C_1}{\cos V},$$

силовые линии $U = \operatorname{const}$ в сечении ортогональны V .

Линейная плотность заряда на единицу высоты гиперboloида:

$$\tau = 2\pi r \cdot \sigma \cdot 1 = 2\pi \cdot c \cdot \operatorname{ch} U \cos V \cdot \epsilon \epsilon_0 E_V = -2\pi \epsilon \epsilon_0 C_1 \frac{\operatorname{ch} U}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 U + \sin^2 V}}.$$

На заряженной оси $\left(V \rightarrow \frac{\pi}{2}\right)$ линейная плотность постоянна ($\operatorname{sh}^2 U + 1 = \operatorname{ch}^2 U$), отсюда определим C_1 и

$$E_V = \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0 c \sqrt{\operatorname{sh}^2 U + \sin^2 V} \cos V}.$$

Метод комплексного потенциала

Рассмотрим метод нахождения решений уравнения Лапласа для плоскопараллельных полей. Ищем функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Если учесть, что $-1 = j^2$, ($j = \sqrt{-1}$), то последнее равенство можно записать так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (jy)^2}.$$

Решением этого уравнения в частных производных является произвольная дважды дифференцируемая функция $W(z)$, аргумент которой имеет форму $z = x + jy$ или $z^* = x - jy$, т.е. $\varphi = W = W(x + jy)$ или $\varphi = W^* = W(x - jy)$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 W}{dz^2} \cdot 1 \cdot 1, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{d^2 W}{dz^2} j^2, \\ \text{т.е. } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, & \text{или } \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, любая дважды дифференцируемая функция комплексного переменного $z = x + jy$ является решением уравнения Лапласа.

Выделим из этой функции $W(z)$ действительную и мнимую часть:

$$W(z) = W(x + jy) = U(x, y) + jV(x, y).$$

Подставим результат в уравнение Лапласа. Очевидно, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Каждая из этих функций $U(x, y)$ и $V(x, y)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ связаны между собой. Действительно, из того, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = j \frac{dW}{dz},$$

получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial (jy)}.$$

Поскольку $W = U + jV$, то

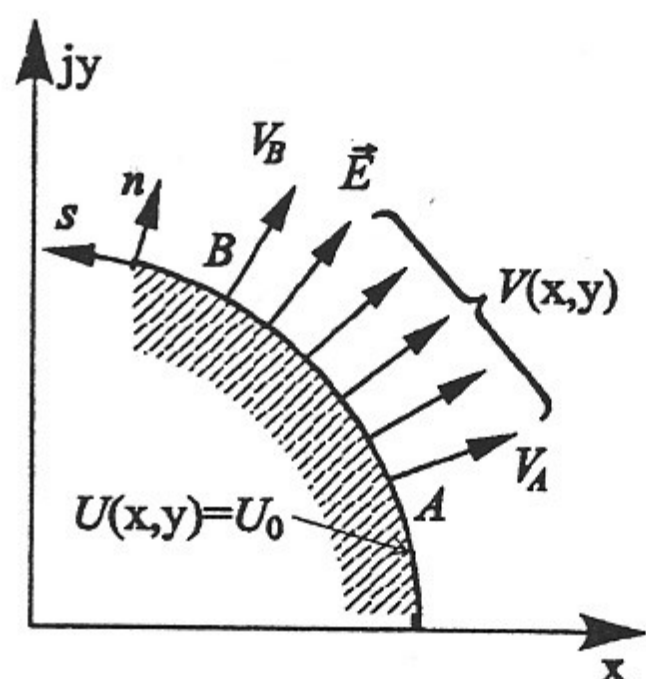
$$\frac{\partial}{\partial x}(U + jV) = \frac{\partial}{\partial(jy)}(U + jV).$$

Это соотношение называется условием связи. Из него следует:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Полученные уравнения носят название *условий Коши-Римана*. Этим условиям должны удовлетворять две функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$, чтобы из них можно было образовать так называемую аналитическую функцию $W(z)$ комплексного переменного $z = x + jy$. Так как $U(x, y)$ и $V(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, они являются решением некоторой электростатической задачи, т.е. $U(x, y) = \text{const}$ или $V(x, y) = \text{const}$ можно рассматривать как поверхности заряженных цилиндрических проводников, имеющих в сечении форму $U(x, y) = \text{const}$ или $V(x, y) = \text{const}$.

Функция $W = U + jV$ называется *комплексным потенциалом*. Если поверхности равного потенциала описываются функцией $\phi = \text{const} = U(x, y)$ (функция



потенциала), то функция $V(x, y)$ описывает уравнения силовых линий того же поля (т.н. *функция потока*), см. рис. 3.7. И наоборот, если $V(x, y)$ — функция потенциала, то $U(x, y)$ — функция потока. Это следует из ортогональности линий $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$.

Условие ортогональности $\text{grad } U \text{ grad } V = 0$ следует из определения градиента:

$$\text{grad } U = \bar{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{grad } V = \bar{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial V}{\partial y},$$

Рис. 3.7. Комплексный потенциал $W = U + jV$ откуда получаем:

$$\text{grad } U \text{ grad } V = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Применяя условия Коши-Римана, устанавливаем равенство последнего выражения нулю.

Напряженность электрического поля $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ определяется либо из $\text{grad } U$ (если U — функция потенциала), либо из $\text{grad } V$ (если V — функция потенциала). С помощью условий Коши-Римана можно найти ее абсолютную величину:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y};$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{dW}{dz}\right|,$$

где $\frac{\partial W}{\partial z}$ — комплексная напряженность поля.

Аналогично из

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

получаем

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \left|\frac{dW}{dz}\right|.$$

Зная $|E|$, можно определить заряд на поверхности равного потенциала (на единицу длины по z):

$$q_1 = \int_A^B \epsilon \epsilon_0 E ds = - \int_A^B \epsilon \epsilon_0 \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| ds = - \epsilon \epsilon_0 \int_A^B \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right| ds = \epsilon \epsilon_0 (V_A - V_B),$$

$$\left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| = \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right|.$$

Производная не зависит от направления, по которому дифференцируют, так как функция W — аналитическая. Таким образом, погонный заряд на участке AB проводящей поверхности ($U_0 = \text{const}$) определяется значениями функции потока $V(x, y)$ в граничных точках.

Аналитическая функция комплексного переменного $W = U + jV = W(z) = W(x + jy)$ определяет не только плоскопараллельное электростатическое поле какой-нибудь конкретной задачи (с определенными границами), т.е. ее эквипотенциали $U(x, y)$, силовые линии $V(x, y)$, напряженность поля $E = \left| \frac{dW}{dz} \right|$ и заряды на проводниках $q = \epsilon \epsilon_0 (V_A - V_B)$. Функция $W(z)$ определяет также отображение всех точек плоскости $z = x + jy$ (или части ее) на точки другой плоскости $W = U + jV$ (или часть ее), см. рис. 3.8. Это отображение обладает одним замечательным свойством — свойством сохранения углов (или консерватизма углов).

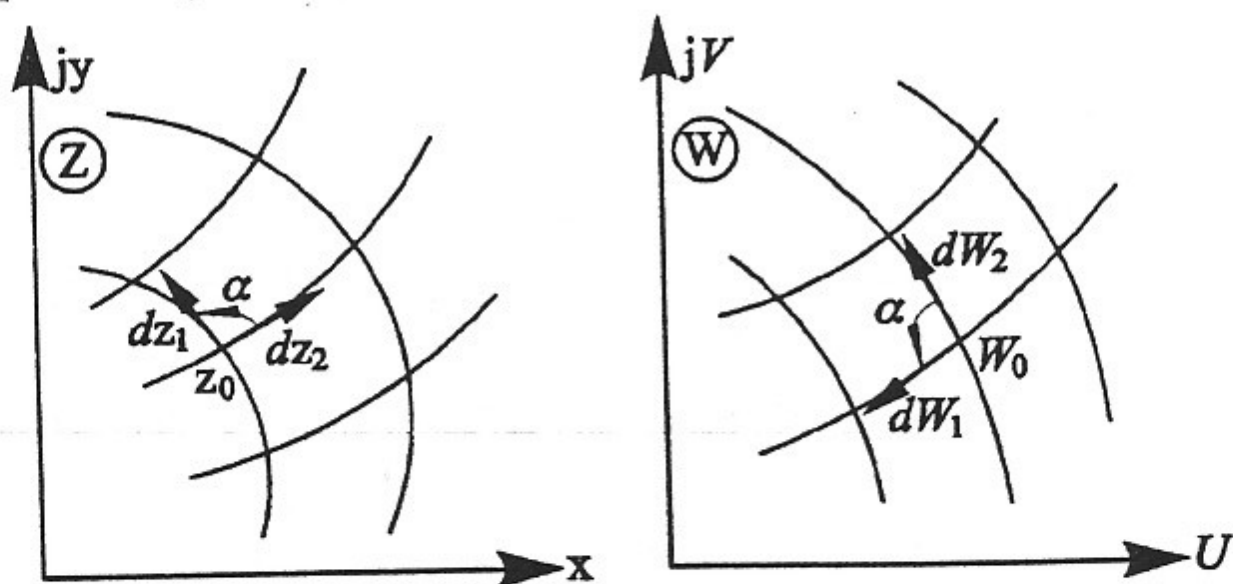


Рис. 3.8. Конформное отображение плоскости Z на плоскость W .

Угол α сохраняется при преобразовании $z \rightarrow W$. Такое отображение, осуществляемое аналитической функцией комплексного переменного, называется конформным отображением. Если нам известно какое-либо плоскопараллельное поле между двумя проводящими пластинами (плоский конденсатор), т.е. известна ортогональная сетка следов эквипотенциальной и силовых линий, то с помощью преобразования $W(z)$ мы можем получить другое поле (с другими границами), т.е. новую (тоже ортогональную) сетку силовых линий и следов эквипотенциалей.

Например:

1) $W(z) = z^2$. $U + jV = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$, т.е. $U(x, y) = x^2 - y^2$, $V = 2xy$.

Это преобразование (рис. 3.9) переводит сетку $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$ плоскости W ($V = \text{const}$ — следы эквипотенциалей, $U = \text{const}$ — силовые линии плоского конденсатора) в гиперболы $x^2 - y^2 = \text{const}$ и $2xy = \text{const}$ в плоскости z . Отображение конформно, т.е. гиперболы ортогональны друг другу. Если $V = 2xy$ — следы эквипотенциалей, то прямой $V = 0$ соответствует $2xy = 0$ — граница 1-го квадранта, причем $x \geq 0, y \geq 0$ при $V \geq 0$, а прямой $V = V_0$ — гиперболическая граница $V_0 = 2xy$. Силовые линии такого конденсатора $x^2 - y^2 = U = \text{const}$ (например линии $U = 0$ соответствует линия $x = y$).

Напряженность поля:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2y, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2x.$$

При удалении от начала координат поле стремится быть параллельным либо оси x , либо оси y .

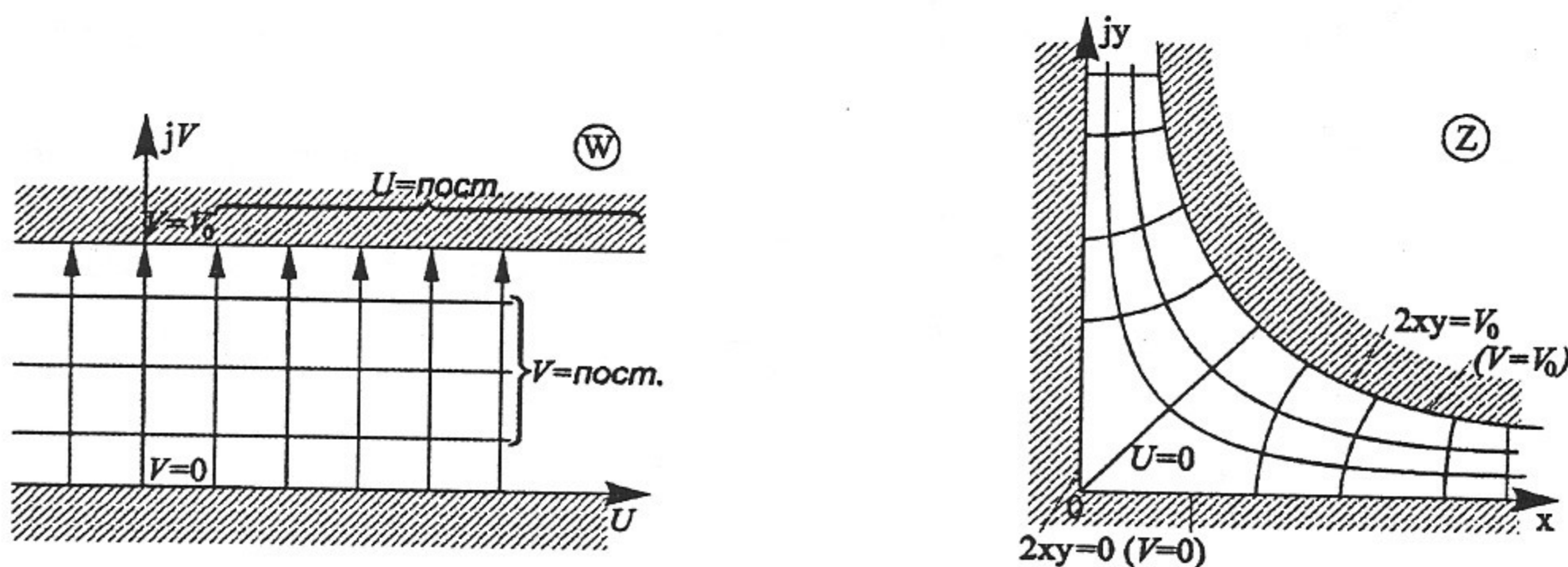


Рис. 3.9. Конформное отображение $W = z^2$.

2) Рассмотрим другой пример конформного отображения (рис. 3.10):

$$W(z) = \ln z \text{ или, поскольку } z = x + jy = r \cdot e^{j\alpha},$$

$$W = U + jV = \ln z = \ln(r \cdot e^{j\alpha}) = \ln r + j\alpha,$$

$$\text{т.е. } U = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad V = \alpha = \arctg \frac{y}{x}.$$

Пусть $V = \text{const}$ — следы эквипотенциалей (V — функция потенциала):

- при $V = 0$ $\alpha = 0$, т.е. положительная полуось — след пластины $V = 0$;
- при $V = \pi$, $\alpha = \pi$, т.е. отрицательная полуось — след пластины $V = \pi$.

$U = \text{const}$ — силовые линии (U — функция потока) при этом $x^2 + y^2 = \text{const}$ — силовые линии представляют собой окружности.

Таким образом, $W(z) = \ln z$ отображает поле плоского конденсатора (с бесконечными пластинами), т.е. поле полосы в W , на полуплоскость z в виде поля двух рядом лежащих полуплоскостей, находящихся под разными потенциалами.

Если, наоборот, принять $U = \text{const}$ за функцию потенциала, а $V = \text{const}$ за функцию потока, то преобразованием $W(z) = \ln z$ поле плоского конденсатора отображается в поле цилиндрического конденсатора.

Изучая свойства различных аналитических функций W , применяемых в качестве

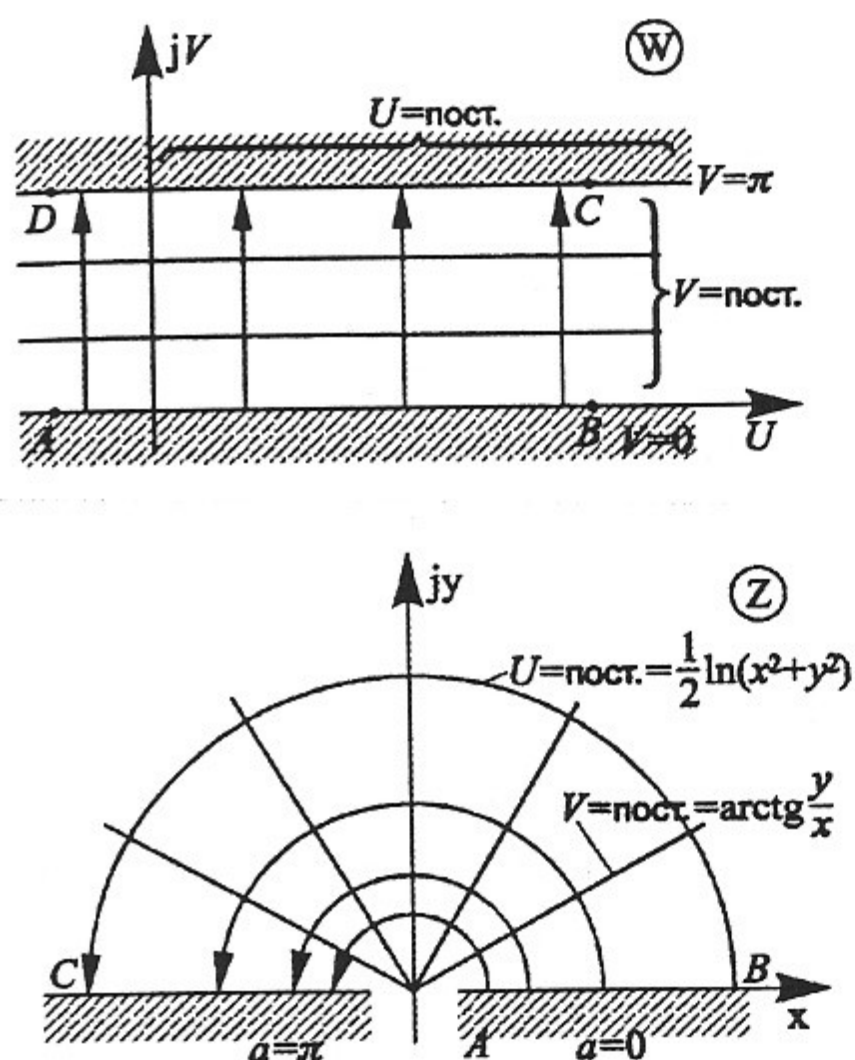


Рис. 3.10. Конформное отображение $W = \ln z$.

плоскости W ($V = 0$) в ломаную линию на плоскости z . Точнее, верхняя полуплоскость $V \geq 0$ плоскости W отображается на внутренность многоугольника в плоскости z (рис. 3.11):

$$z = f(W) = A \int (W - U_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \cdot (W - U_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (W - U_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dW + B.$$

Это — формула Кристоффеля - Шварца.

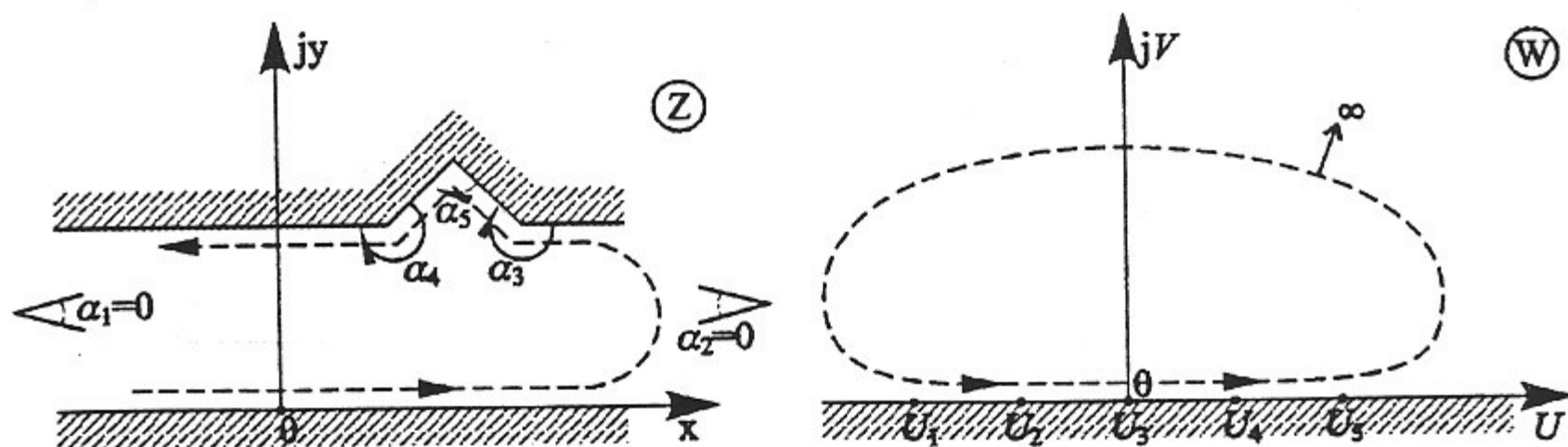


Рис. 3.11. Отображение полуплоскости на внутренность многоугольника.

Здесь A и B — комплексные постоянные, $U_1, U_2, \dots, U_n$ — действительные числа — точки на оси $V = 0$ в плоскости W , в которые преобразуются вершины многоугольника. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — углы (внутренние) при вершинах в плоскости z .

Расчет поля у края плоского конденсатора

Расположим пластины определенным образом, см. рис. 3.12 ($d = 1, a = 1$) и будем считать, что их потенциалы известны ($\phi_1 - \phi_2 = U_0 = 1, \phi = 0$ при $y = 0$). Найдем комплексный потенциал $W(z)$, или, что то же самое, преобразование $z = f(W)$, переводящее известное поле (например, конденсатор с бесконечными пластинами

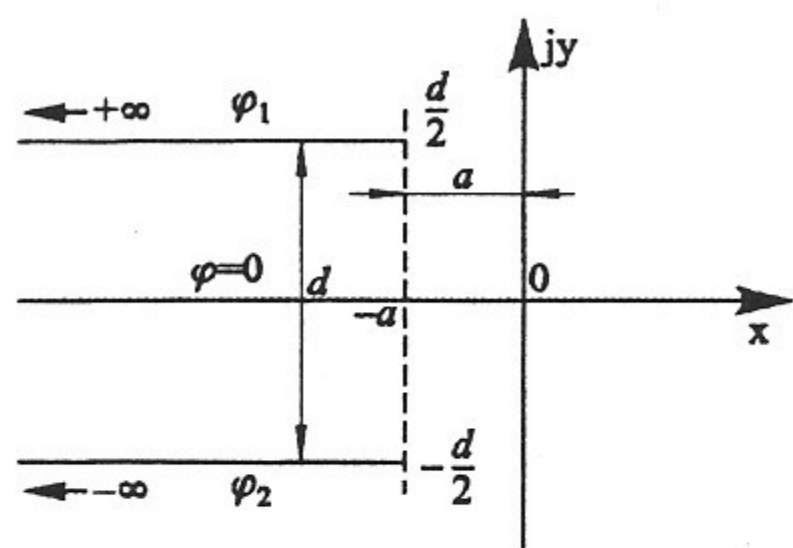


Рис. 3.12. Конденсатор с краевым полем.

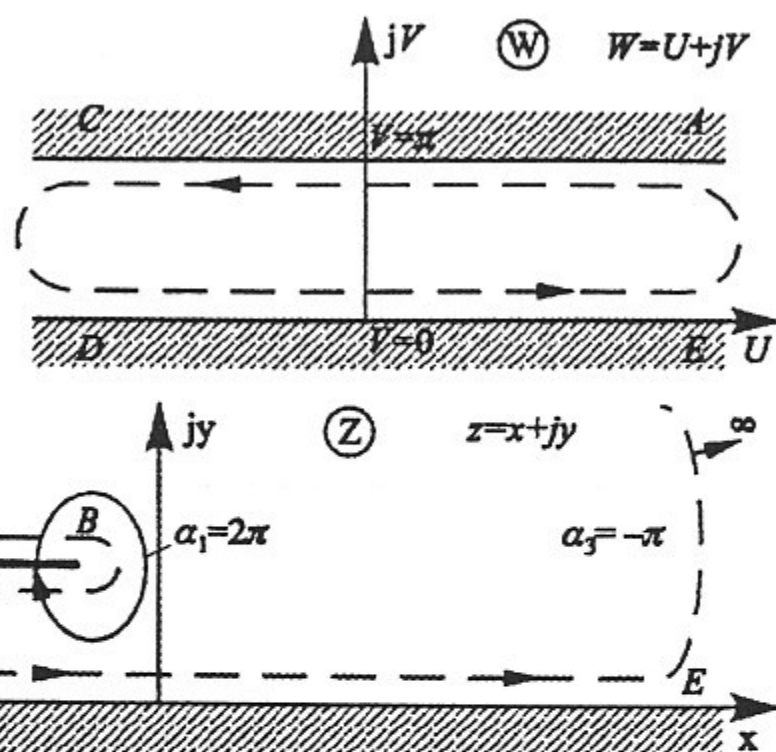


Рис. 3.13. Отображение конденсатора с бесконечными пластинами на конденсатор с краевым полем.

(W)), на внутренность многоугольника (Z), представляющего конденсатор с краевым полем (рис. 3.13). В силу симметрии относительно оси X рассматриваем половину такого конденсатора.

Так как формула Кристоффеля-Шварца преобразует внутренность многоугольника $ABCDE$ на полуплоскость, а не на полосу $ACDE$, введем вспомогательную плоскость t (рис. 3.14). Как известно, преобразование полосы $ACDE$ из плоскости W на верхнюю полуплоскость в t осуществляется функцией $W = \ln t$.

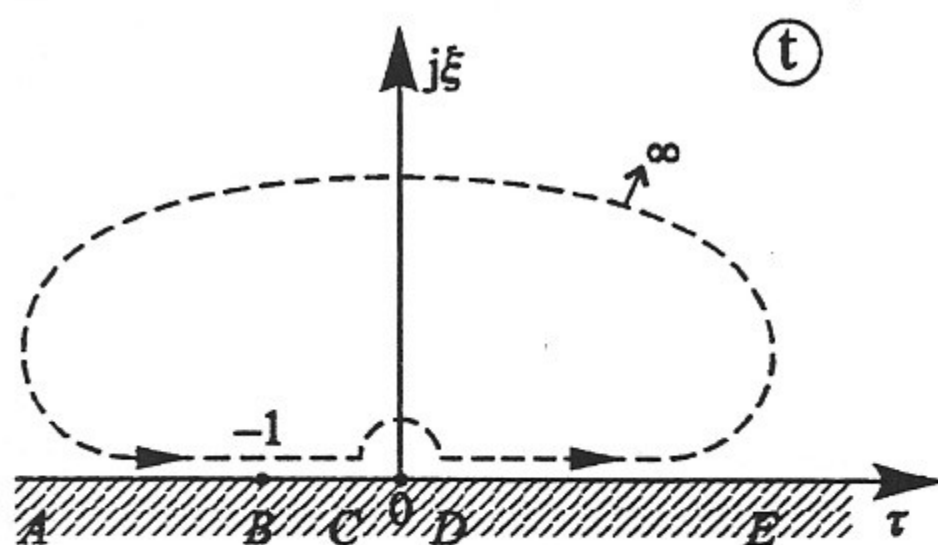


Рис. 3.14. Вспомогательная плоскость t .

Следы эквипотенциалей $V = 0$ и $V = \pi$ преобразуются в положительную полуось (DE) и в отрицательную полуось (AC) в плоскости t : $t = \tau + j\xi$. Направление обхода обозначено $\dots \rightarrow \dots$ (область слева). Преобразование же t в z найдем по формуле Кристоффеля-Шварца. Предварительно выберем точку, соответствующую B в плоскости t . Пусть это будет -1 .

Тогда точке $\tau_1 = -1$ соответствует угол в плоскости Z — $\alpha_1 = 2\pi$;

точке $\tau_2 = 0$ (соприкосновение пластин в C и D) соответствует в Z — $\alpha_2 = 0$;

точке $\tau_3 \rightarrow \infty$ ("соприкосновение" E и A) соответствует в Z угол $\alpha_3 = -\pi$.

Таким образом,

$$z = A \int (t - \tau_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \cdot (t - \tau_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \cdot (t - \tau_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} dt + B.$$

В теории конформных отображений доказывается, что если одна из точек при отображении многоугольника на полуплоскость лежит в бесконечности (в данном случае точка τ_3), то соответствующий множитель при интегрировании выпадает.

Поэтому интеграл принимает вид

$$z = A \int (t + 1)t^{-1} dt + B = A \int dt + A \int \frac{dt}{t} + B.$$

Учитывая, что $\ln t = W$, т.е. $t = e^W$, получаем искомое преобразование:

$$z = A(W + e^W) + B, \quad z = f(W),$$

где U — функция потенциала, V — функция потока, или $x + jy = A(U + jV + e^U e^{jV}) + B$.

Примем $A = a$ — вещественным числом и $B = 0$ и проверим, соответствует ли это расположению края конденсатора и заданному потенциалу на нем. При этом

$$x = a(U + e^U \cos V), \quad y = a(V + e^U \sin V).$$

Кроме того, поскольку $0 \leq V \leq \pi$, а потенциал $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, примем $V = k\varphi$, где k — вещественная постоянная (размерный коэффициент).

1. При $\varphi = 0$ ($V = 0$) должно быть $y = 0$. Действительно:

$$y = a(0 + e^U \cdot 0), \quad x = a(U + e^U) < \infty, \quad \text{при } -\infty < x < \infty, -\infty < U < \infty.$$

2. При $\varphi = \varphi_1 = \frac{U_0}{2}$ ($V = \pi$) должно быть $y = \frac{d}{2}$ (это означает, что $\pi = k \frac{U_0}{2}$,

$$\text{т.е. } k = \frac{2\pi}{U_0}).$$

Действительно: $y = a\pi$, т.е. для принятого расстояния между пластинами выбор соответствует $y = a\pi = \frac{d}{2}$, если определяющее расположение начала координат относительно края связано с d так: $a = \frac{d}{2\pi}$.

Кроме того, на пластине, имеющей край, при изменении U в пределах $-\infty < U < \infty$ необходимо, чтобы $-\infty < x < -a$, это также выполняется: при $V = \pi$, $\cos V = -1$ и $x = a(U - e^U)$, т.е.:

- если $U \rightarrow -\infty$, то $x \rightarrow -\infty$;
- если $U = 0$, то $x = -a$;
- если $U \rightarrow +\infty$, то $x \rightarrow -\infty$, оставаясь $< -a$.

Таким образом, найденное преобразование и выбранные постоянные соответствуют условиям на границах, в том числе на краю верхней пластины. В силу симметрии будет аналогичное соответствие условиям и на краю нижней пластины.

Таким образом, из $z = a(W + e^W)$ и $\varphi_2 = -\frac{U_0}{d}$, получим:

$$x = \frac{d}{2\pi} \left(U + e^U \cos \left(\frac{2\pi}{U_0} \varphi \right) \right);$$

$$y = \frac{d}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{U_0} \varphi + e^U \sin \left(\frac{2\pi}{U_0} \varphi \right) \right).$$

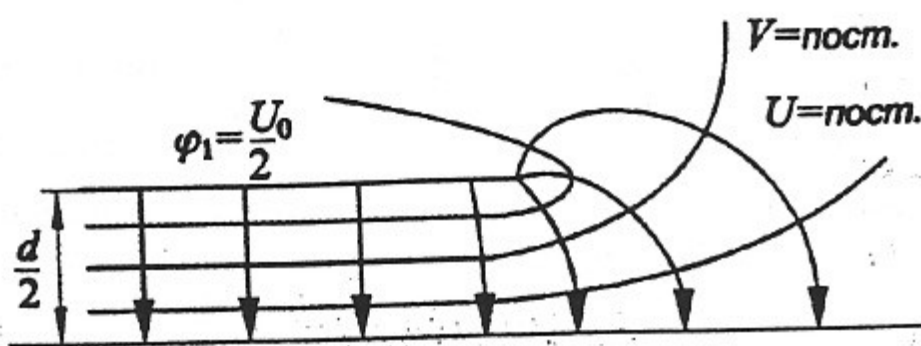


Рис. 3.15. Эквипотенциалы и силовые линии у края конденсатора.

По этим уравнениям преобразования, задавая $\frac{\varphi}{U_0} = \text{const}$, можно построить следы эквипотенциалей, а задавая значениями $U = \text{const}$ — силовые линии (рис. 3.15).

Найдем напряженность поля. Учитывая, что функция потенциала $U = k\varphi$ безразмерна, добавим размерный коэффициент $\frac{1}{k}$ в формулу для комплексной напряженности: $|E| = \frac{1}{k} \left| \frac{dW}{dz} \right|, \left[\frac{В}{м} \right] \left(k = \frac{2\pi}{U_0} \right)$. Продифференцируем комплексный потенциал W по z :

$$1 = a \left(\frac{dW}{dz} + e^W \frac{dW}{dz} \right),$$

$$\text{т.е. } |E| = \frac{1}{k} \left| \frac{dW}{dz} \right| = \frac{1}{k} \left| \frac{1}{a(1 + e^U e^{jV})} \right|,$$

$$\text{или } |E| = \frac{U_0}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2U} + 2e^U \cos\left(\frac{2\pi}{U_0} \varphi\right)}}.$$

При $\varphi = \frac{U_0}{2}$ и $U = 0$, $\cos \pi = -1$ — т.е. на краю пластины:

$$|E| = \frac{U_0}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2U} - 2e^U}} = \frac{U_0}{d} \frac{1}{\sqrt{(1 - e^U)^2}} = \frac{U_0}{d} \frac{1}{1 - e^U} \rightarrow \infty.$$

На краю пластины напряженность велика: $|E| \rightarrow \infty$, т.к. на краю концентрируются заряды. Следует пластину сделать толстой. Если форму края сделать в соответствии с той эквипотенциалью, на которой напряженность не возрастает вблизи края по сравнению с напряженностью внутри конденсатора, то потери электрической прочности на краю не будет. Электрод такой формы называется электродом Роговского. Зная эту эквипотенциаль, можно вычислить необходимый радиус кривизны закругления края пластины. По $|E|$ можно определить заряд, который концентрируется на внешней стороне пластины у ее края, и тот заряд, который дополнительно появляется с внутренней стороны пластины вблизи её края, и таким образом оценить насколько изменится погонная емкость за счет краевого эффекта.

Метод разделения переменных.

Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

Метод разделения переменных для решения уравнений Лапласа рассмотрим на примере задачи о диэлектрическом шаре, помещенном во внешнее однородное электрическое поле.

Введем сферическую систему координат (R, θ, α) с началом в центре шара (рис. 3.16). Однородное поле E_0 направлено вдоль полярной оси. Диэлектрические проницаемости: для шара — $\epsilon_{ш}$, для окружающего пространства — ϵ , радиус шара — a . Запишем уравнение Лапласа в сферической системе координат, учитывая что в силу осевой симметрии искомое поле — плоскосимметричное $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

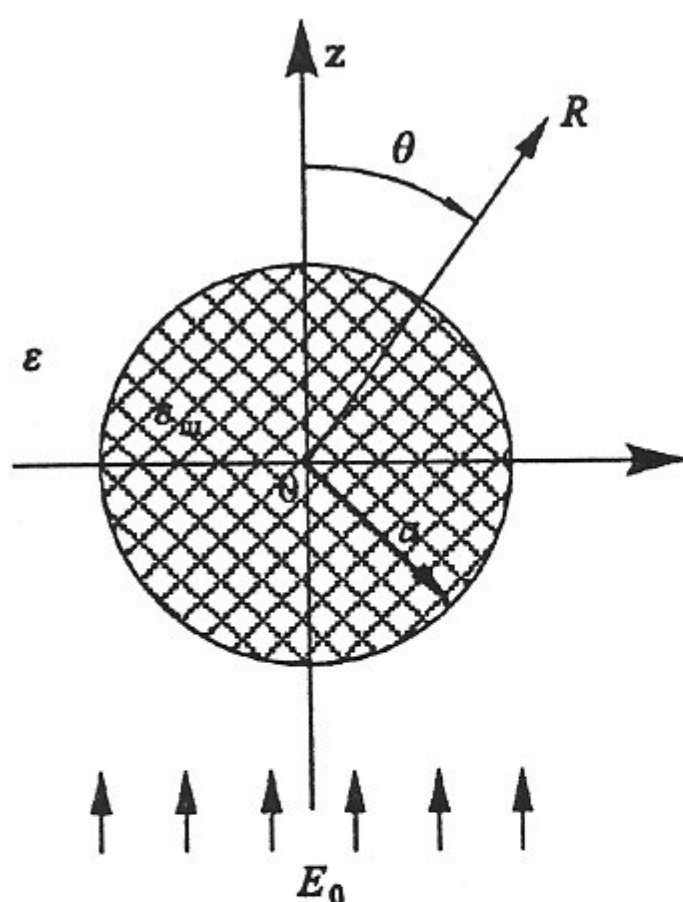


Рис. 3.16. Сферическая система координат для шара в однородном поле.

В соответствии с методом разделения переменных ищем решение в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты:

$$\varphi = M(R)N(\theta).$$

(Если задача 3-мерная, то в данном методе используют произведение 3-х функций). Подставив это решение в уравнение Лапласа, получим

$$N \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) + \frac{M}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = 0,$$

и далее, умножая на $\frac{1}{MN}$:

$$\frac{1}{M} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = - \frac{1}{N \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right).$$

Переменные разделились. Так как левая и правая части равны друг другу при любых значениях независимых переменных (R и θ), каждая часть должна быть равна некоторой общей постоянной величине — т.н. постоянной разделения p :

$$-\frac{1}{N \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = p, \quad (1)$$

$$\frac{1}{M} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = p. \quad (2)$$

Таким образом, метод сводит уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. От величины p зависит вид частного решения. Например, для $p = 0$:

$$N_0 = A_1 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + A_2, \quad M_0 = \frac{B_1}{R} + B_2.$$

Эти частные решения нам знакомы (поле заряда конусов, поле заряда сфер и точечного заряда). Но в таком виде N_0 применить к описанию поля задачи о диэлектрическом шаре нельзя, т.к. при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ получим $N \rightarrow +\infty$, что не соответствует физическому смыслу задачи. Следовательно, $A_1 = 0$. Частное решение M_0 может быть применено для описания поля только в области, не содержащей центра ($R = 0$), т.е. вне шара, где $M_0 N_0 = C_1 + \frac{C_2}{R}$. Следует рассмотреть частные решения для других $p \neq 0$.

Уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2 N}{d\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{dN}{d\theta} + pN = 0. \quad \text{Это — уравнение Лежандра.}$$

Из физических соображений в рассматриваемой задаче потенциал должен меняться периодически при обходе вдоль меридиана. Кроме того, на бесконечности,

где влияние шара пропадает, а остается лишь однородное поле, $\varphi = \varphi_0 = -ER \cos \theta + C_0$ (получили из: $E_0 = -\frac{d\varphi_0}{dz}$; $\varphi_0 = -Ez + C_0$; $z = R \cos \theta$), т.е. решение уравнения

Лежандра для задачи с заданными граничными условиями следует искать в виде:

$$N(\theta) = N = A_3 \cos \theta.$$

Подстановкой можно убедиться, что такое решение удовлетворяет уравнению Лежандра лишь при $p = 2$. Следовательно, и в уравнении (2) надо принять $p = 2$ т.е.:

$$\frac{R^2}{M} \frac{d^2 M}{dR^2} + 2 \frac{R}{M} \frac{dM}{dR} = 2.$$

Это уравнение для $M(R)$ решается подстановкой Эйлера: $M = B_3 R^n$. Отсюда получим уравнение для n : $n(n-1) + 2n = 2$, т.е. $n_1 = 1$, $n_2 = -2$. Решения:

$$M(R) = B_3 R + B_4 R^{-2},$$

$$MN = \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta.$$

Таковы решения уравнения Лапласа, соответствующие условиям на бесконечности в задаче о шаре. Внутри шара следует считать $C_4 = 0$, т.к. $\varphi \neq \infty$. Таким образом, для потенциала вне шара решением уравнения Лапласа будет

$$\varphi = C_1 + \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta,$$

внутри шара

$$\varphi_{\text{ш}} = K_1 + K_3 R \cos \theta.$$

Определение постоянных из условий на границе шара и на бесконечности.

1. На бесконечности $\varphi|_{R \rightarrow \infty} = \varphi_0$, поле однородно, т.е.

$$C_1 + C_3 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + C_0,$$

$$C_1 = C_0, \quad C_3 = -E_0.$$

2. На поверхности шара

- а) $\varphi|_{R=a} = \varphi_{\text{ш}}|_{R=a}$, т.е.

$$C_1 + \left(C_3 \cdot a + \frac{C_4}{a^2} \right) \cos \theta = K_1 + K_3 a \cos \theta,$$

$$K_1 = C_1 = C_0, \quad K_3 = C_3 + \frac{C_4}{a^3} = -E_0 + \frac{C_4}{a^3}.$$

- б) $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial R} \Big|_{R=a} = \varepsilon_{\text{ш}} \frac{\partial \varphi_{\text{ш}}}{\partial R} \Big|_{R=a}$, т.е.

$$\varepsilon \left(C_3 - \frac{2C_4}{a^3} \right) \cos \theta = \varepsilon_{\text{ш}} K_3 \cos \theta, \quad \varepsilon_{\text{ш}} K_3 = \varepsilon \left(-E_0 - \frac{2C_4}{a^3} \right),$$

отсюда:

$$K_3 - \frac{C_4}{a^3} = -E_0, \quad K_3 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} \frac{C_4}{a^3} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} E_0, \quad \text{т.е.} \quad K_3 \left(2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} + 1 \right) = \left(2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} \right) (-E_0),$$

$$K_3 = \frac{-3\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon} E_0;$$

$$\frac{C_4}{a^3} \left(2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} + 1 \right) = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}}} \right),$$

$$C_4 = a^3 \frac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon} E_0.$$

Таким образом, найдено решение задачи о распределении потенциала шара, внесенного в однородное поле:

$$\varphi = \left(\frac{\varepsilon_{\text{ш}} - \varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon} \frac{a^3}{R^2} - R \right) E_0 \cos \theta + C_0,$$

$$\varphi_{\text{ш}} = -\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon} R E_0 \cos \theta + C_0.$$

При $\varepsilon_{\text{ш}} \rightarrow \infty$ получим $\varphi \rightarrow \left(\frac{a^3}{R^2} - R \right) E_0 \cos \theta + C_0$ — потенциал проводящей сферы в однородном поле.

Поле внутри шара (если учесть, что $z = R \cos \theta$) однородно и направлено вдоль

E_0 :

$$E_{\text{ш}} = -\frac{\partial \varphi_{\text{ш}}}{\partial z} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon} E_0.$$

На полюсе шара (вне него) ($R = a$, $\theta = 0$; $D_{1n} = D_{2n}$):

$$\varepsilon E = \varepsilon_{\text{ш}} E_{\text{ш}} \rightarrow E = \frac{\varepsilon_{\text{ш}}}{\varepsilon} E_{\text{ш}} = \frac{3\varepsilon_{\text{ш}}}{\varepsilon_{\text{ш}} + 2\varepsilon} E_0.$$

Картина поля (распределение силовых линий E) показана на рис. 3.17. В среде с большим значением ε напряженность поля становится меньше E_0 , а в среде с меньшим ε она, наоборот, увеличивается.

Поле в окрестности шара можно представить как суперпозицию внешнего поля и поля зарядов, индуцированных на поверхности диэлектрика, см. рис. 3.18.

Энергия электростатического поля

Всю энергию электростатического поля $W_{\text{эл}}$, создаваемого зарядами, расположенными на проводниках, можно вычислить, проинтегрировав объёмную плотность энергии по всему объёму поля.

$$W_{\text{эл}} = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 dV.$$

Далее, учитывая, что в электростатике $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ и что мы не рассматриваем в данном вычислении объёмные заряды (на проводниках — заряд поверхностный, т.е. $\text{div } \vec{D} = 0$ во всём рассматриваемом объёме), получим:

$$\varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \vec{D} \vec{E} = -\vec{D} \text{grad } \varphi = -\text{div}(\varphi \vec{D}).$$

Это следует из $\text{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \text{div } \vec{D} + \vec{D} \text{grad } \varphi$, но $\text{div } \vec{D} = 0$.

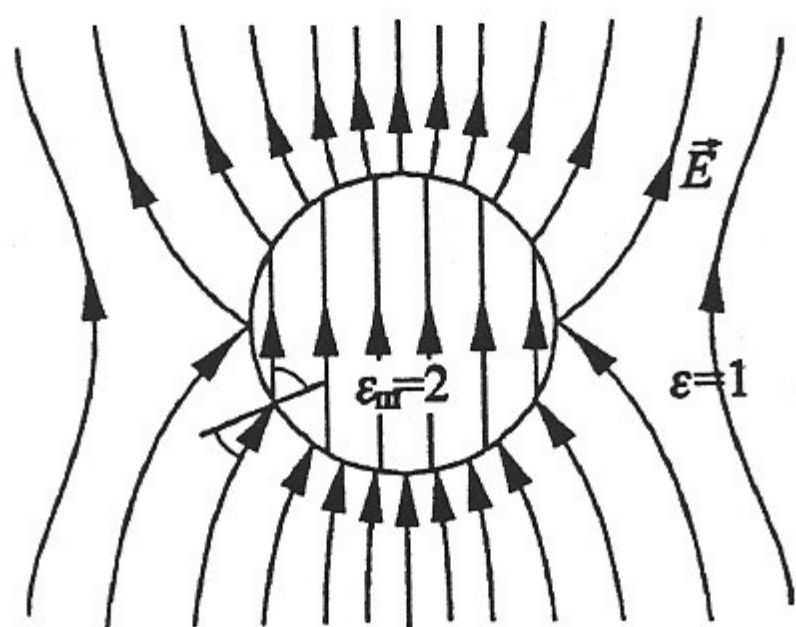


Рис. 3.17. Поле в окрестности диэлектрического шара.

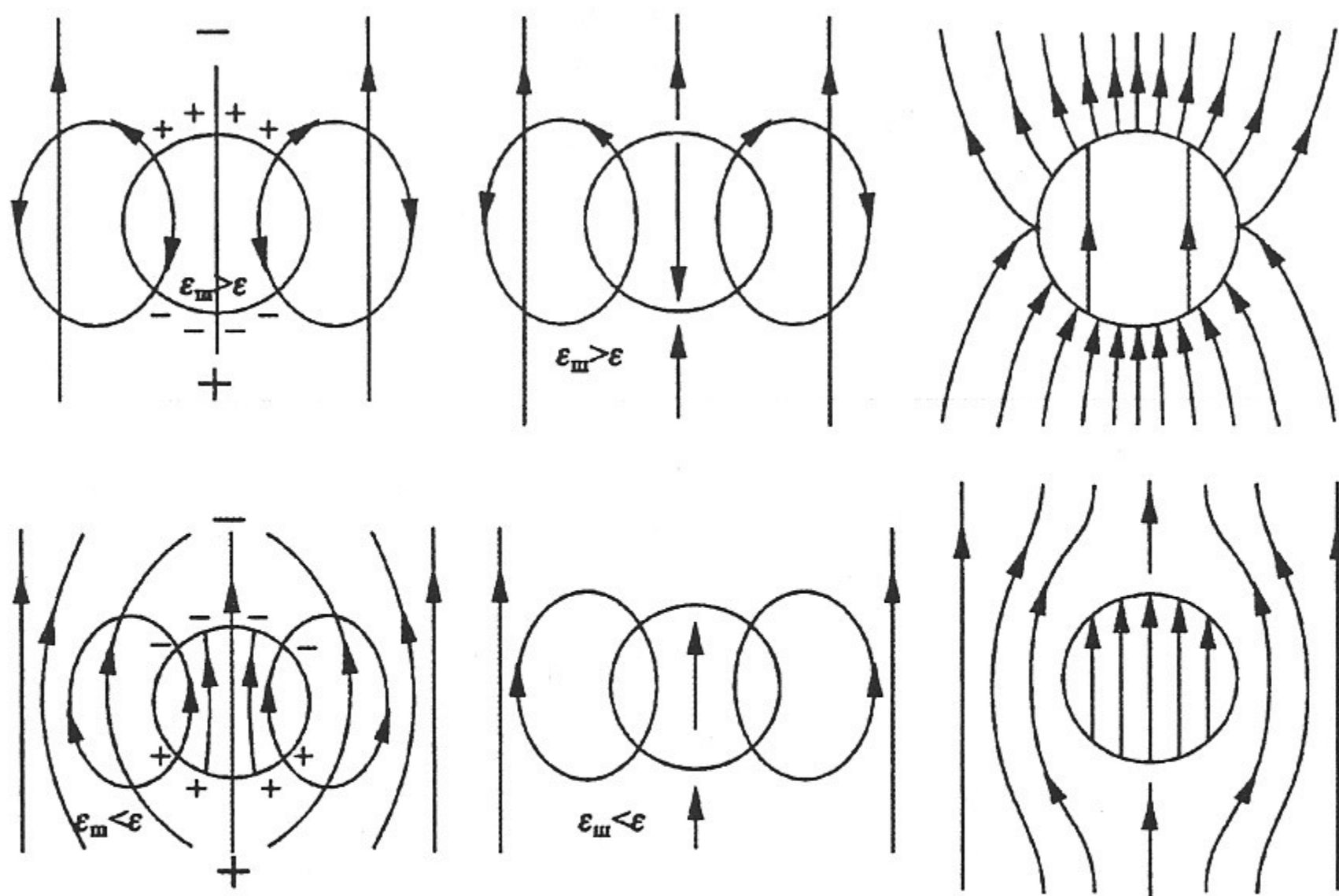


Рис. 3.18. Поле в окрестности шара как суперпозиция внешнего поля и поля индуцированных зарядов.

Таким образом, по формуле Остроградского,

$$W_{эл} = -\frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV = -\frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} dS = -\frac{1}{2} \oint_S \varphi D_n dS.$$

Интеграл следует брать по поверхности, ограничивающей все поле, т.е. по поверхности бесконечно большого радиуса и по поверхности всех проводников, т.е.

$$W_{эл} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \epsilon_0 E^2 dV = -\frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \varphi_\infty D_{n_\infty} dS + \frac{1}{2} \sum \left(\oint_{S_{пр}} \varphi_{пр} D_{n_{пр}} dS \right).$$

Первое слагаемое выглядит как поле точечного заряда $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R} \frac{1}{R^2} R \right) \rightarrow 0$, второе — полный заряд $Q_{пр} = -\oint_{S_{пр}} D_{n_{пр}} dS$, так как $\varphi_{пр} = \text{const}$ (знак "—" означает направление

внутри проводника, т.к. интеграл берется по объёму поля).

Итак,

$$W_{эл} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \sum (\varphi_{пр} Q_{пр}).$$

Энергия электростатического поля заряженных проводников равна полусумме произведений заряда каждого проводника на его потенциал. Если имеются заряды, распределенные в пространстве с объёмной плотностью ρ , то, рассматривая отдельные их элементы ρdV_i как точечные заряды Q_i , можно обобщить предыдущее выражение $W_{эл} = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$, интегрируя по объёму, где ρ и V отличны от нуля. Рассмотрим связь между изменением энергии электрического поля и механической работой, совершаемой

полем при медленном (сохраняющем условие электростатики, т.е. без потерь энергии, связанных с токами в проводниках) изменении положения проводников.

1А) Проводники соединены с источниками энергии, так что все их потенциалы — на постоянном уровне, перемещение проводников происходит под действием сил поля.

Из закона сохранения энергии: $dW = dW_{\text{эл}} + dA$, где dW — энергия, получаемая от источников, $dW_{\text{эл}}$ — энергия электростатического поля, dA — механическая работа по перемещению проводников, совершаемая полем. Так как $\varphi_i = \text{const}$ на каждом проводнике, а заряд увеличивается на dq_i , то от источников поступает энергия $dW = \sum_i \varphi_i dq_i$. Изменение энергии электрического поля

$$dW_{\text{эл}} = d\left(\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i\right) = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i,$$

следовательно:

$$dA = dW - dW_{\text{эл}} = \sum_i \varphi_i dq_i - \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i = \frac{1}{2} dW = dW_{\text{эл}}.$$

Совершаемая силами поля при $\varphi_i = \text{const}$ механическая работа по перемещению проводников равна увеличению энергии поля, т.е. половина энергии, получаемой извне, тратится на покрытие механической работы, а другая половина переходит в энергию электростатического поля.

1Б) Если (обратный процесс) при $\varphi_i = \text{const}$ перемещение проводников происходит не под действием поля, а в результате работы посторонних сил, то работа этих сил равна и противоположна работе сил поля:

$$dA_{\text{внеш}} = -dA.$$

Процесс идет в обратном направлении.

$$-dW = -dW_{\text{эл}} - dA,$$

$$-\sum_i \varphi_i dq_i = -\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i - dA,$$

или

$$-dA = -\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i = -dW_{\text{эл}}.$$

В результате работы внешних сил происходит возвращение энергии источникам, состоящее из двух частей: из работы внешних сил и из уменьшения на ту же величину энергии электрического поля.

2А) Если проводники не связаны с внешними источниками энергии, то $dW = 0$, заряды постоянны — $q_i = \text{const}$. В результате:

$$0 = dW_{\text{эл}} + dA,$$

$$dA = -dW_{\text{эл}} = -d\left(\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i\right) = -\frac{1}{2} \sum_i q_i d\varphi_i.$$

Работа сил поля происходит за счет уменьшения его энергии, т.е. сводится к уменьшению потенциала всех точек поля.

2Б) Если, наоборот, в такой системе ($dW = 0$, $q_i = \text{const}$) перемещение зарядов происходит за счет работы внешних сил, то затраченная работа равна приращению энергии поля:

$$dA_{\text{вн}} = -dA = dW_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i d\varphi_i.$$

Пондеромоторные силы в электростатическом поле

Для электрического поля в общем случае по определению $\vec{F} = q\vec{E}$ — сила, действующая на точечный заряд, и $\rho\vec{E} = \vec{f}_e$ — объёмная плотность сил, действующих на объёмный заряд. Электрическое поле точечного заряда q в условиях электростатики $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \vec{R}^0$ (получено из уравнений Максвелла), отсюда — сила взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 :

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R^2} \vec{R}_{12}^0 \text{ — закон Кулона.}$$

Пондеромоторная сила, действующая на проводники в электрическом поле, вычисляется, как сила, действующая на поверхностные заряды, сила на единицу поверхности:

$$p_{\text{эл}} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}, \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right] = [\text{Па}].$$

Сила, действующая на диэлектрики в электростатическом поле, может быть вычислена по сумме сил, действующих на диполи вещества, составляющие диэлектрик. На диполь с моментом $d\vec{p} = q \cdot d\vec{h}$ действуют силы, равные алгебраической сумме сил, действующих на его заряды. Плечо $d\vec{h}$:

$$d\vec{h} = \vec{i}^0 dx + \vec{j}^0 dy + \vec{k}^0 dz.$$

Мы считаем плечо диполя малым и поэтому действующая на положительный заряд напряженность поля мало отличается от действующей на отрицательный, т.е. отличается на $d\vec{E}$, так что сила (не момент, а сила) действующая на диполь:

$$d\vec{F} = qd\vec{E} = q(dE_x \vec{i}^0 + dE_y \vec{j}^0 + dE_z \vec{k}^0) = q \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz + \right) \cdot \vec{i}^0 + \\ + q \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz + \right) \cdot \vec{j}^0 + q \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} dx + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz + \right) \cdot \vec{k}^0.$$

Это скалярное произведение $d\vec{h} \cdot \nabla = dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} = d\vec{h} \cdot \text{grad}$, приложенное к $\vec{E}$, т.е.

$$d\vec{F} = q(d\vec{h} \cdot \text{grad})\vec{E} = (d\vec{p} \cdot \text{grad})\vec{E}.$$

Учитывая, что средний электрический момент единицы объёма — вектор

поляризации $\bar{P} = \frac{\sum \bar{p}}{V}$, т.е. $d\bar{p} = \bar{P}dV$, найдем, что в диэлектрике

$$d\bar{F} = (\bar{P} \cdot \text{grad}) \bar{E} dV.$$

По этой формуле можно рассчитать пондеромоторные силы, действующие в электростатическом поле. Если поле однородно: $d\bar{E} = 0$ и $d\bar{F} = 0$, то $\bar{M} = [\bar{p}\bar{E}]$ — на диполи действует только вращающий момент $\bar{M}$, диполи стремятся повернуться, а не сместиться. Если же поле неоднородно, то диэлектрик втягивается в область с большей напряженностью. Действительно, например, для линейного диэлектрика ($\bar{P} = \epsilon\kappa\bar{E}$):

$$d\bar{F} = \epsilon\kappa (\bar{E} \cdot \text{grad}) \bar{E} dV,$$

далее из

$$\text{grad}(\bar{a}\bar{b}) = \nabla(\bar{a}\bar{b}) = (\bar{a}\nabla)\bar{b} + (\bar{b}\nabla)\bar{a} + [\bar{a}[\nabla\bar{b}]] + [\bar{b}[\nabla\bar{a}]],$$

полагая $\bar{a} = \bar{b} = \bar{E}$ и учитывая, что в электростатике $[\nabla\bar{E}] = \text{rot } \bar{E} = 0$, получим:

$$\text{grad}(\bar{E} \cdot \bar{E}) = 2(\bar{E} \cdot \text{grad}) \bar{E} = \text{grad } E^2,$$

$$d\bar{F} = \epsilon_0\kappa \text{grad} \frac{E^2}{2} dV.$$

Сила, действующая на диэлектрик, пропорциональна изменению квадрата абсолютной величины поля и направлена в сторону роста E^2 (в область сильного поля).

Пондеромоторные силы бывает удобно вычислить из энергетических соображений. Если потенциалы проводников поддерживаются постоянными за счет внешних источников ($\varphi_i = \text{const}$), то, как было показано, работа пондеромоторных сил:

$$dA = \bar{F}_s d\bar{s} = dW_{\text{эл}},$$

где $d\bar{s}$ — перемещение, $\bar{F}_s$ — пондеромоторная сила. Отсюда:

$$F_s = \frac{\partial W_{\text{эл}}}{\partial s}.$$

Если же остаются постоянными заряды на проводниках $q_i = \text{const}$, то:

$$dA = \bar{F}_s d\bar{s} = -dW_{\text{эл}}, \quad F_s = -\frac{\partial W_{\text{эл}}}{\partial s}.$$

Для переменных конденсаторов, например, удобно при этом пользоваться выражением:

$$W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2}.$$

Аналогичные формулы выражают связь энергии с работой пондеромоторных сил, затрачиваемой на перемещение диэлектриков в электростатическом поле.

Электрическое поле постоянных токов в проводящей среде

Основные уравнения

Постоянный ток, т.е. ток, неизменный во времени, может быть получен как решение системы уравнений Максвелла, если производные полей по времени равны нулю: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Тогда из первого уравнения, поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$, получим для постоянного тока

- I $\operatorname{div} \vec{J} = 0$ — уравнение непрерывности (закон сохранения заряда).
II $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ — второе уравнение Максвелла для постоянного тока упрощается: электрическое поле, создающее постоянный ток, не имеет вихрей.

В качестве третьего уравнения возьмем то материальное уравнение, которое устанавливает связь между полем и током. Если в некоторой части проводящего контура имеются сторонние силы, например, гальванический элемент, то эти силы следует учесть:

- III $\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}})$ — уравнение непрерывности (закон сохранения заряда).

Из II следует $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В точках, где сторонние напряженности поля отсутствуют, $\vec{E}_{\text{ст}} = 0$, следовательно:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

Это закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{J} = -\gamma \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div}(-\gamma \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0.$$

При $\gamma = \text{const}$ (однородная линейная среда: электропроводность постоянна, выполняется закон Ома)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \text{т.е.} \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Итак, потенциал электрического поля в однородной проводящей среде, в областях, где нет сторонней напряженности, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Граничные условия

1. Граница проводник - диэлектрик (рис. 4.1).

В непроводящей среде ток равен нулю, $J_n = 0$. Следовательно, на границе внутри проводника $J_n = 0$ (т.к. $\text{div } \vec{J} = 0$ и в $abcd$ не может втекать ток, если он не вытекает) $ac = bd \rightarrow 0$.

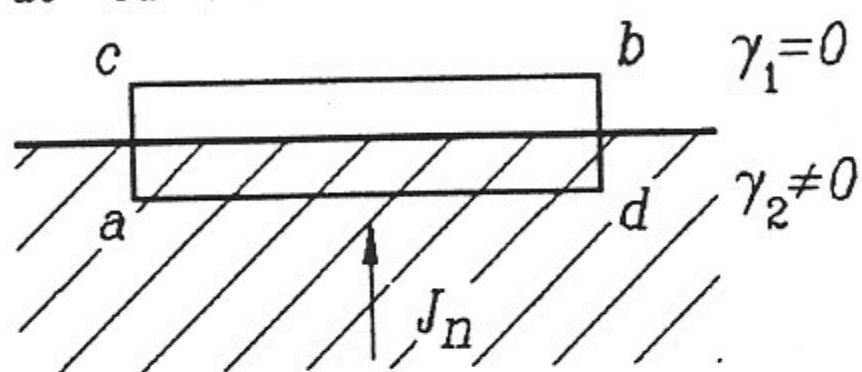


Рис. 4.1. Граница проводник - диэлектрик.

Отсюда в проводнике на границе с диэлектриком $E_n = 0$.
Условие $E_{1t} = E_{2t}$, выведенное ранее из уравнений Максвелла для границы любых двух сред, остается, естественно, в силе и в данном случае.

Заметим, что в отличие от электростатики в проводнике $E_{2t} \neq 0$, т.к. в нем протекает ток, а $\gamma \neq \infty$. Это значит, что граница проводника не является эквипотенциалью. Напряженность поля $\vec{E}$ в диэлектрике при обтекании проводника током имеет направление, отличное от нормали к поверхности. Величина тангенциальной составляющей E_{2t} зависит от плотности тока в проводнике и его удельной электропроводности.

Например, линия из двух параллельных медных шин (рис. 4.2, сечение шин 150 мм^2 , расстояние между ними 0.05 м ; $\gamma_2 = 58 \frac{\text{М}}{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}$), обтекаемых током 300 А , имеет при напряжении 100 В между шинами:

$$E_{1n} = \frac{100 \text{ В}}{0.05 \text{ м}} = 2000 \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad E_{1t} = E_{2t} = \frac{J}{\gamma_2} = \frac{300}{150} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{30} = 0.033 \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

т.е. $E_{1t} \ll E_{1n}$.

В цепях высокого напряжения различие между нормальными и тангенциальными составляющими электрического поля выражено еще сильнее. Таким образом, картину электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянным током, можно с высокой точностью считать тождественной картине электростатического поля.

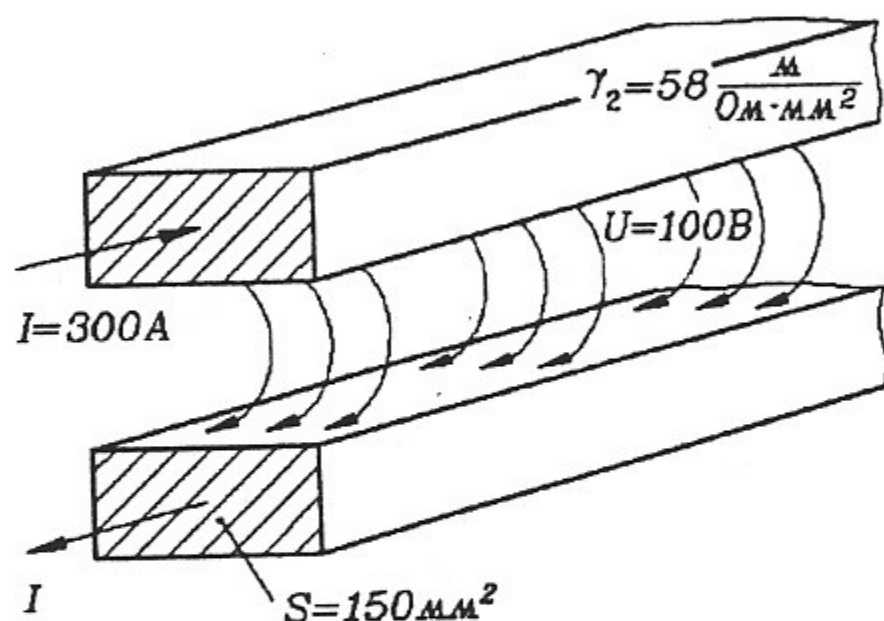


Рис. 4.2. Силовые линии электрического поля между проводящими шинами (составляющая E_t сильно преувеличена).

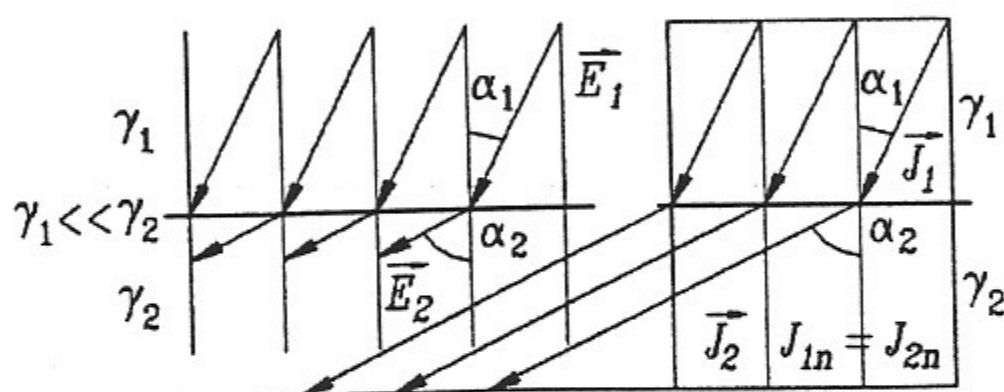


Рис. 4.3. Преломление силовых линий электрического поля и линий тока на границе двух проводников.

2. Граница раздела проводников.

При отсутствии на границе сторонних ЭДС $E_{1t} = E_{2t}$, т.е.:

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \quad (a)$$

Кроме того, поскольку $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, то $J_{1n} = J_{2n}$, откуда и из $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ следует, что

$$\gamma_1 E_1 \cos \alpha_1 = \gamma_2 E_2 \cos \alpha_2. \quad (б)$$

Разделив (а) на (б) получим:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{ — закон "преломления" линий тока (рис. 4.3).}$$

При $\gamma_1 \rightarrow 0$ линии тока в "плохом" проводнике перпендикулярны поверхности хорошего проводника $\alpha_1 = 0$, или линии тока в "хорошем" проводнике параллельны линии раздела $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Из основных уравнений и граничных условий видно, что в тех областях электрического поля, где нет сторонних сил, $\vec{E}_{\text{ст}} = 0$, может быть проведена аналогия между электростатическим полем в диэлектрике и электрическим полем в проводнике.

Действительно, в обоих случаях $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ — поле является потенциальным.

$$\begin{array}{l|l} \vec{J} = \gamma \vec{E} & \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \\ \text{в проводнике} & \text{в диэлектрике} \end{array}$$

То есть, $\vec{J}$ — аналог $\vec{D}$, а γ — аналог $\epsilon \epsilon_0$.

Аналогия полная, если кроме уравнений совпадают источники и границы.

Источники:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

то есть, аналогия имеет место, если $\rho = 0$.

Границы:

Если на границе проводника γ_1 с другим проводником $\gamma_1 \ll \gamma_2$, $\operatorname{tg} \alpha_1 \ll \operatorname{tg} \alpha_2$, тогда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и линии тока $\vec{J}$ в среде γ_1 перпендикулярны поверхности раздела, а линии $\vec{J}$ в среде с γ_2 параллельны поверхности раздела. Также и линии $\vec{D}$ в диэлектрике перпендикулярны поверхности проводника.

О моделировании электростатических полей

Выполняя электроды из металла γ_2 и пользуясь в качестве проводящей среды водопроводной водой (электролит, $\gamma_1 \ll \gamma_2$), мы получаем модель проводника в диэлектрике. Поля $\vec{J}$ в проводнике и $\vec{D}$ в диэлектрике совпадут. Распределение потенциалов также будет одинаковым. Это метод аналогового поля в электролитической ванне.

$$\vec{J} = -\gamma \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{D} = -\epsilon \epsilon_0 \cdot \operatorname{grad} \varphi.$$

Емкость конденсатора сложной формы может быть определена по проводимости его модели:

$$C = G \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\gamma}.$$

Доказательство:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\int \sigma ds}{\int \vec{E} d\vec{\ell}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \int \vec{E} d\vec{s}}{\int \vec{E} d\vec{\ell}}, \quad G = \frac{I}{U} = \frac{\int \vec{J} d\vec{s}}{\int \vec{E} d\vec{\ell}} = \frac{\gamma \int \vec{E} ds}{\int \vec{E} d\vec{\ell}}.$$

Интегралы берутся по длине силовых линий между электродами ℓ и по поверхности электродов s .

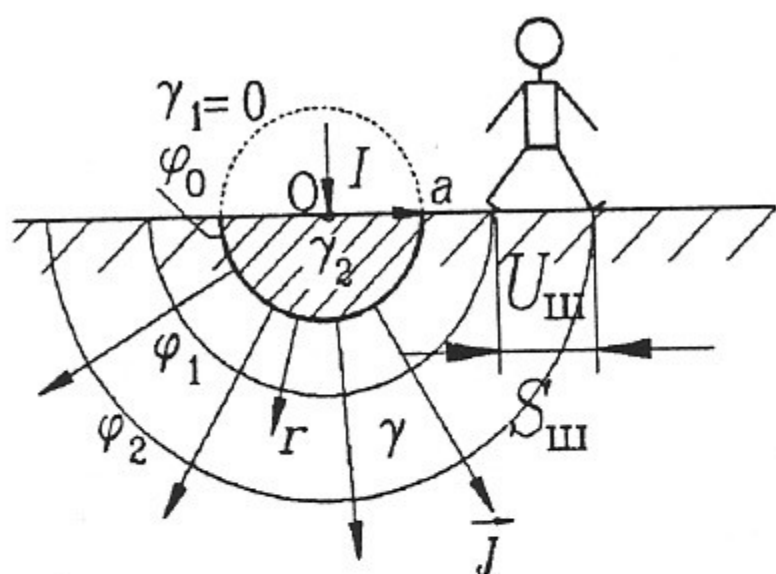
Расчет электрических полей постоянного тока

Примером расчета поля постоянного тока, является расчет сопротивления заземлителя. Заземлитель — металлический электрод, погруженный в землю. Так как проводимость металла много больше проводимости земли: $\gamma_2 \gg \gamma$, то поверхность заземлителя можно считать эквипотенциалью, и линии тока $\vec{J}$ перпендикулярны к этой поверхности. Поле токов в земле рассчитывается подобно электростатическому полю (решается уравнение Лапласа, определяется φ , затем $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, а затем $\vec{J} = -\gamma \vec{E}$).

Рассмотрим полусферический заземлитель (см. рис. 4.4).

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

1. На поверхности сферы: $r = a$, $\varphi = \varphi_0$.
2. На поверхности земли $J_n = 0$, т.е. $E_n = 0$ (граница раздела земли и воздуха).



Этим условиям удовлетворяет поле точечного заряда, помещенного в точку O .

Электростатический аналог:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \quad \text{т.е. } \varphi = \varphi_0 \frac{a}{r} \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{\varphi_0 a}{r^2} \vec{r}^0.$$

Если таково поле в проводящей среде (в земле), то для его поддержания должен течь ток плотностью:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} = \frac{\varphi_0 a \gamma}{r^2} \vec{r}^0.$$

Рис. 4.4. К расчету шагового напряжения вблизи заземлителя.

Так как эквипотенциали — полусферы, площадь произвольной эквипотенциальной поверхности $2\pi r^2$ и ток I , создающий в земле рассчитанное поле, будет:

$$I = \int \vec{J} d\vec{s} = \varphi_0 a \gamma \frac{2\pi a^2}{a^2} = 2\pi a \gamma \varphi_0.$$

Этот ток I — ток короткого замыкания в том устройстве, которое защищает заземлитель.

Сопротивление заземлителя:

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{2\pi a \gamma}.$$

При протекании тока J на поверхности земли появляется распределение потенциала. Падение напряжения при этом пропорционально току. Мерой опасности считается "шаговое напряжение", т.е. падение напряжения между точками поверхности земли на длине $s_{\text{ш}} = 80$ см (длина человеческого шага).

Так как, $\varphi = \varphi_0 \frac{a}{r}$, а $\varphi_0 = R \cdot I$, $\varphi = \frac{IRa}{r}$.

Шаговое напряжение: $U_{\text{ш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = IR \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + s_{\text{ш}}} \right)$.

Условие безопасности: $U_{\text{ш}} < U_0$, где U_0 — допустимое напряжение шага $U_0 = 150$ В. Зона на определенном расстоянии от заземлителя $r = r_0$, где возможна опасность и переходить в эту зону нельзя, определится из уравнения:

$$U_{\text{ш}} = IRa \left(\frac{1}{r_0 - s_{\text{ш}}} - \frac{1}{r_0} \right) \approx \frac{IRas_{\text{ш}}}{r_0^2}, \quad \text{т.е.} \quad r_0 = \sqrt{\frac{IRas_{\text{ш}}}{U_0}}.$$

Правила Кирхгофа для расчета цепей постоянного тока — следствие уравнений поля

I. $\sum I = 0$ — первое правило Кирхгофа (рис. 4.5).

Из $\text{div } \vec{J} = 0$ следует $\oint_s \vec{J} d\vec{s} = 0$.

$$\oint_s \vec{J} d\vec{s} = - \oint_{s_1} \vec{J} d\vec{s} - \oint_{s_2} \vec{J} d\vec{s} + \oint_{s_3} \vec{J} d\vec{s}; \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0 = \sum I.$$

В интегралах обозначено через s полное сечение проводов, через s_1 , s_2 и s_3 — сечение 1-го, 2-го и 3-го провода, соответственно. Знаками "плюс" или "минус" учтено направление тока.

II. $\sum \mathcal{E} = \sum IR$ — второе правило Кирхгофа (рис. 4.6).

- 1) $\text{rot } \vec{E} = 0$;
- 2) $\vec{J} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}})$.

Из 2) следует $\frac{\vec{J}}{\gamma} - \vec{E} = \vec{E}_{\text{ст}}, \quad \oint \frac{\vec{J}}{\gamma} d\vec{\ell} - \oint \vec{E} d\vec{\ell} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{\ell}.$

Из 1) следует, что второй интеграл в этом уравнении равен нулю:

$$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \quad \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{\ell} = \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ — ЭДС в контуре (или сумма ЭДС).

Далее (см. рис.), обозначая через s площадь сечения, нормального к вектору $\vec{J}$,

$$\oint \frac{\vec{J}}{\gamma} d\vec{\ell} = \oint \frac{\vec{J} \cdot \vec{s}}{\gamma \cdot s} d\vec{\ell} = \vec{I} \int_{2a1} \frac{1}{\gamma \cdot s} d\vec{\ell} + \vec{I} \int_{2a2} \frac{1}{\gamma \cdot s} d\vec{\ell} = IR_a + IR_{\phi} \text{ (или } \sum IR \text{)}.$$

То есть, $\sum \mathcal{E} = \sum IR$.

Поле вектора сторонней напряженности не является потенциальным.

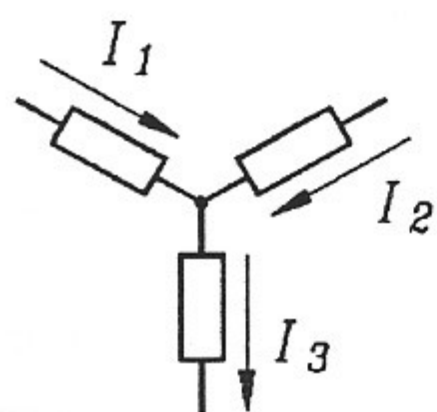


Рис. 4.5. К выводу I правила Кирхгофа.

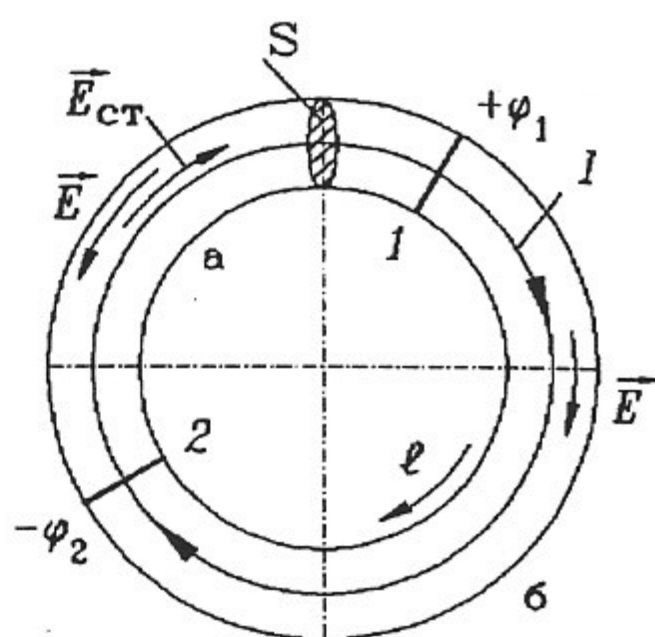
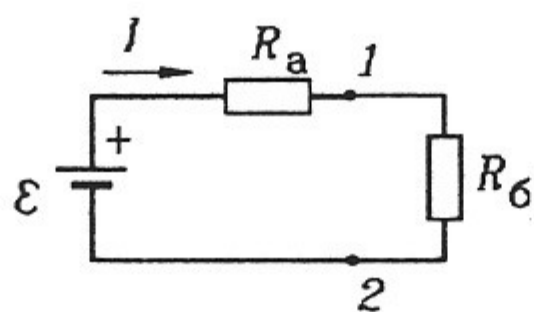


Рис. 4.6. К выводу II правила Кирхгофа.

Магнитное поле постоянных токов

Основные уравнения

Если в уравнениях Максвелла положить производные по времени равными нулю и считать токи постоянными, то можно отдельно рассмотреть только те уравнения, в которые входит магнитное поле:

$$\text{I. } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}.$$

$$\text{III. } \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

а) $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ и из I получим $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0\vec{J}$. Считаем среду линейной, однородной и изотропной: $\mu = \text{const}$.

Граничные условия:

$$\text{б) } H_{2t} - H_{1t} = 0,$$

$$\text{в) } B_{2n} - B_{1n} = 0.$$

Поверхностных токов нет, т.е. полагаем, что ток течет в слое конечной толщины.

Нетрудно показать, что из а), б) и в), точно также как в предыдущей главе для линий тока, следует закон преломления силовых линий магнитного поля:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Векторный потенциал магнитного поля

Для решения уравнений магнитного поля вводят векторный потенциал $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Это возможно, т.к. удовлетворяет уравнению III: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0$.

Если будет найдено $\vec{A}$, то $\vec{B}$ — определяется дифференцированием, если задано $\vec{B}$, то $\vec{A}$ определяется не однозначно, а с точностью до произвольной векторной функции $\operatorname{grad} \varphi$.

Действительно:

$$\operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} \varphi) \equiv \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \text{т.к. } \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0.$$

Кроме вихрей надо знать истоки.

Для стационарных полей положим $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Из первого уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0\vec{J}$, отсюда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu\mu_0\vec{J}, \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu\mu_0\vec{J}, \quad \text{т.е. } \nabla^2 \vec{A} = -\mu\mu_0\vec{J}.$$

Дифференциальное уравнение для векторного потенциала в декартовых координатах (в других системах координат много сложнее) распадается на 3 аналогичных скалярных уравнения:

$$\nabla^2 A_x = -\mu\mu_0 J_x,$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu\mu_0 J_y,$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu\mu_0 J_z.$$

Это уравнения Пуассона для составляющих векторного потенциала. Ранее для точечного заряда был найден электростатический потенциал $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R}$. Если принять $dq = \rho dv$ — заряд элементарного объема, то потенциал, создаваемый всем объемным распределением зарядов $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv}{R}$. Это выражение является решением уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$.

Аналогичным образом, последовательно заменяя φ на A_x, A_y, A_z , а $\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$ на $\mu\mu_0 J_x$ и т.д., находим решения уравнения Пуассона для векторного потенциала:

$$A_x = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x dv}{R}, \quad A_y = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_y dv}{R}, \quad A_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_z dv}{R}.$$

Или, объединяя все три составляющих — $\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dv}{R}$.

Интеграл берется по всему объему с токами, создающими векторный потенциал. Векторный потенциал направлен в направлении вектора создающей его плотности тока. Если ток I линейный (т.е. течет по тонкому проводу), то $dv = s \cdot d\vec{\ell}$; $I = Js$; $\vec{J} \cdot dv = I \cdot d\vec{\ell}$, и, следовательно, для контура с током $\vec{A} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}}{R}$. (Интеграл берется по контуру с током.)

Магнитная индукция линейного проводника с током:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \oint \text{rot } \frac{d\vec{\ell}}{R};$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{R} \cdot d\vec{\ell} \right) = \left[\nabla \times \frac{1}{R} d\vec{\ell} \right] = \left[\nabla \frac{1}{R} \times d\vec{\ell} \right] + \frac{1}{R} [\nabla \times d\vec{\ell}] = \left[\text{grad } \frac{1}{R} \times d\vec{\ell} \right] + \frac{1}{R} \text{rot } d\vec{\ell}.$$

Величина $d\vec{\ell}$ не зависит от координаты точки наблюдения: $\text{rot } d\vec{\ell} = 0$. $\text{grad } \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}^0}{R^2}$ поле точечного заряда, следовательно, $\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}^0]}{R^2}$.

Это выражение может быть получено из закона Био-Савара для магнитного поля элемента тока, рис. 5.1:

$$d\vec{H} = \frac{I [d\vec{\ell} \times \vec{R}^0]}{4\pi R^2},$$

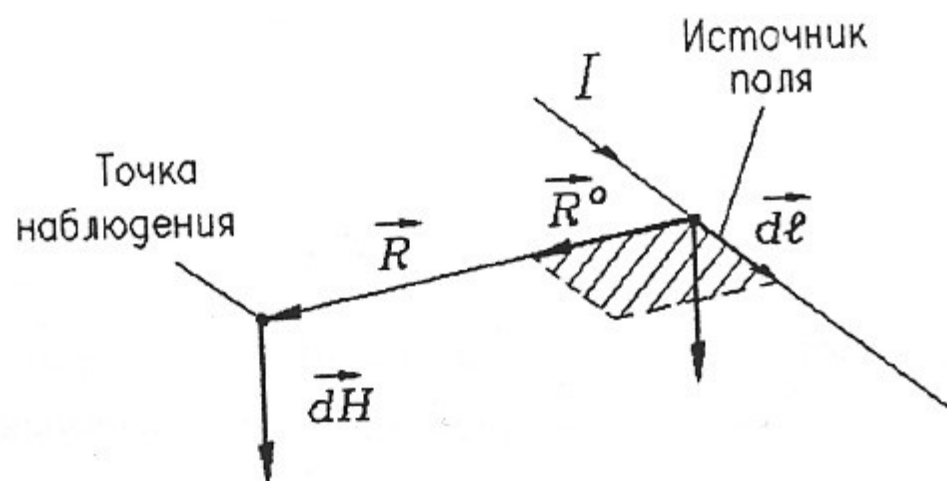


Рис. 5.1. Магнитное поле, создаваемое элементом тока.

Расчет магнитного поля постоянного тока в простейших случаях ведется непосредственно применением уравнений Максвелла: закона полного тока в интегральной форме

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = I,$$

если из соображений симметрии известна геометрия линий поля.

Например — поле прямолинейного провода с током. Из соображений симметрии силовые линии — окружности, $H_\alpha = \text{const}$. $\int \vec{H} d\vec{\ell} = 2\pi r H_\alpha$, и из $\int \vec{H} d\vec{\ell} = I$ следует $2\pi r H_\alpha = I$, $H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}$.

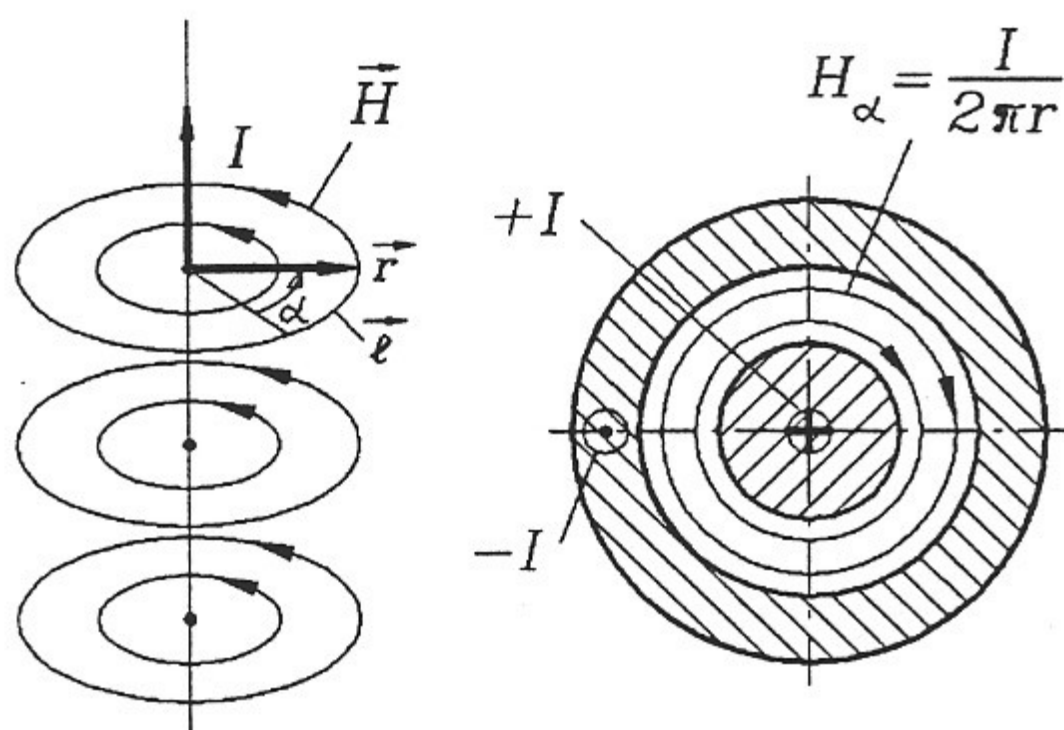


Рис. 5.2. Магнитное поле прямого провода и при наличии токов, параллельных коаксиала.

Для более сложных конфигураций проводов и для поля внутри проводников удобно применить векторный потенциал. Так, для плоскопараллельных полей (зависимость только от x и y в декартовой системе координат) оси z , имеется лишь одна составляющая вектора $\vec{A}$: составляющая A_z . Для нее уравнение поля $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$ — это уравнение Пуассона, а там, где нет токов, $\nabla^2 A_z = 0$ — уравнение Лапласа. То есть, полностью пригодны все решения электростатических задач, полученные для соответствующих граничных условий.

Следует обратить внимание, что решения для векторного потенциала будут аналогами решений для электростатического потенциала только в том случае, когда аналогичны функциональные зависимости плотности заряда ρ , с одной стороны, и плотностей тока J_x, J_y, J_z , с другой стороны. Практически, даже при одинаковой геометрии, это не всегда так, потому что, например, в электростатике свободные заряды находятся на поверхности проводников, а в магнитостатике плотности тока обычно распределены равномерно по сечению. Решения для $\vec{A}$ будут аналогами решений для ϕ в некотором приближении, если этим различием можно пренебречь, например, если рассматривать поля вдали от создающих их проводников с током, когда нет большого различия — создается ли поле током, текущим по поверхности или по всему сечению проводника.

Граничные условия

Для $\vec{A}$ граничные условия следуют из $B_{1n} = B_{2n}$: поскольку $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, то $\vec{B} \perp \vec{A}$. Из непрерывности B_n следует непрерывность A_t на границе раздела сред, т.е. $A_{1t} = A_{2t}$ (рис. 5.3).

Таким образом, магнитное поле проводов с током I_z , перпендикулярных плоскости xy , определяется лишь одной составляющей векторного потенциала: A_z , причем на границе "проводник с током — диэлектрик" $A_{z1} = A_{z2}$, т.е. те же граничные

условия, что и для электростатического потенциала (однако внутри провода с током, в отличие от электростатики ($\varphi = \text{const}$), A_z может меняться).

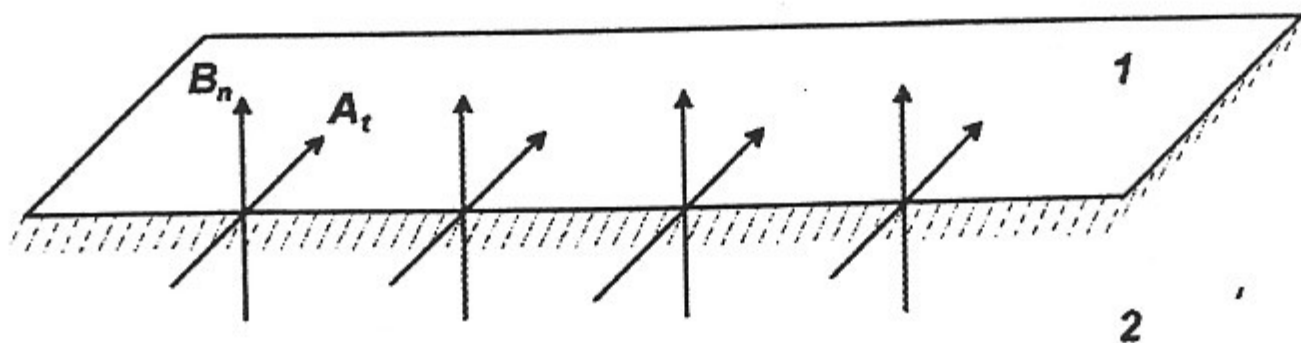


Рис. 5.3. Непрерывность B_n и A_t на границе сред.

Но плоскопараллельная задача о поле z -составляющей векторного потенциала "оси с током", т.е. тонких проводов с током, полностью аналогична задаче о поле электростатически заряженных осей.

Прежде, чем решать эту задачу, найдем связь между векторным потенциалом $\vec{A}$ и магнитным потоком Φ .

По определению:

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s} = \int_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s} \quad [B \cdot c = B6].$$

По формуле Стокса:

$$\int_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s} = \oint_l \vec{A} d\vec{l}, \quad \text{т.е.} \quad \Phi = \oint_l \vec{A} d\vec{l}.$$

Поток через площадку, охватываемую контуром, определяется значением векторного потенциала на этом контуре.

Отношение $\frac{\Phi}{I} = L$ — индуктивность контура с током, создающим магнитное поле.

А если в контуре не один виток ($\Psi = \Phi(n)$, $n > 1$), создающий магнитный поток, или поток сцеплен не с полным током ($\Psi = \Phi\eta$, $\eta < 1$), говорят о потокоцеплении Ψ .

Тогда $L = \frac{\Psi}{I}$ [Гн].

Как известно, индуктивность — мера запаса энергии магнитного поля: $W = \frac{LI^2}{2}$.

Определяя магнитное поле проводов с током с помощью векторного потенциала, легко определить поток Φ и индуктивность L этих проводов.

Магнитное поле токов в длинных параллельных проводах круглого сечения

1. Один тонкий провод (ось с током, рис. 5.4).

В точках, где есть ток, $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$; $I = \int_s J_z ds$ — ток провода. В остальных

точках $\nabla^2 A_z = 0$ — уравнение Лапласа.

Его решение в цилиндрических координатах, при независимости поля от α :

$$A_z = C_1 \ln r + C_2,$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}_\alpha, \quad \vec{B}_\alpha = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -C_1 \frac{1}{r},$$

$$H_\alpha = \frac{B_\alpha}{\mu\mu_0} = -\frac{C_1}{\mu\mu_0} \frac{1}{r}.$$

Из закона полного тока известно, что $H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}$, т.е. $C_1 = -\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}$, а $A_z = -\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C_2$ — аналогично электростатическому потенциалу.

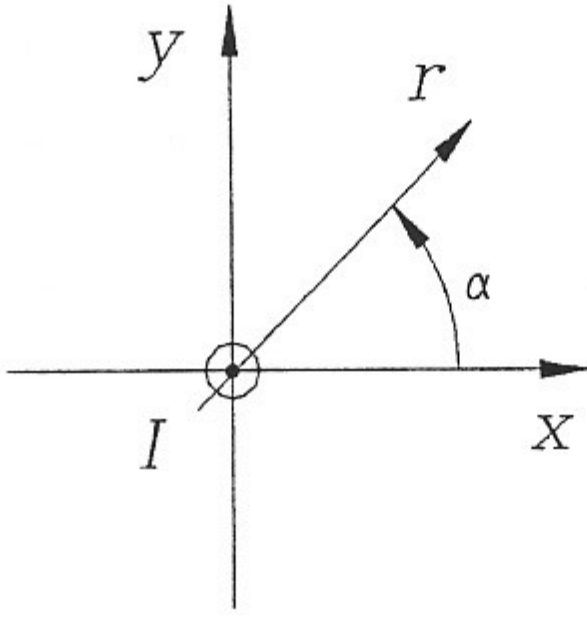


Рис. 5.4. К расчету поля тока в тонком проводе.

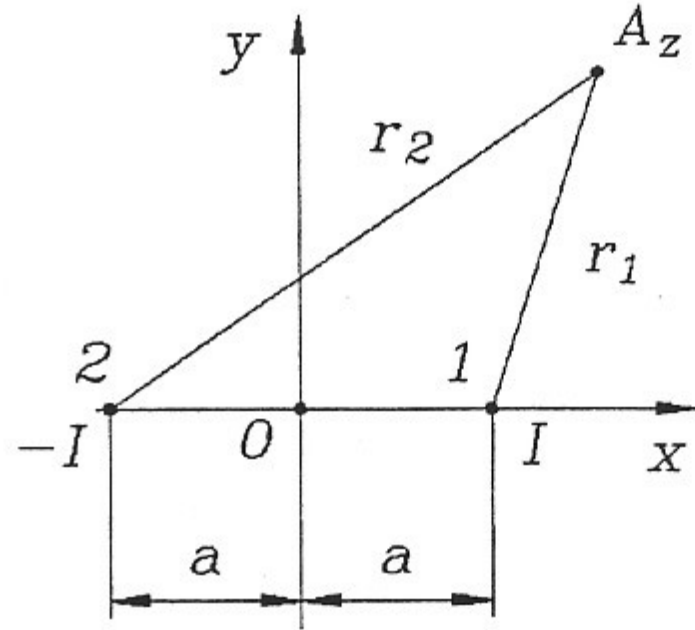


Рис. 5.5. К расчету векторного потенциала, созданного двумя прямыми проводами.

2. Двухпроводная линия (2 тонкие оси, рис. 5.5).

По принципу наложения векторные потенциалы от двух проводов суммируются:

$$A_z(x, y) = A_{z1} + A_{z2} = -\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln r_1 + \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln r_2 + C,$$

$$A_z(x, y) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + C.$$

Положим $A_z(0, 0) = 0$, тогда $C = 0$ при $r_1 = r_2$, и, с учетом $r_1^2 = (x - a)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$,

$$A_z(x, y) = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2},$$

что полностью соответствует скалярному потенциалу в электростатической задаче о поле двух заряженных осей.

Линии поля (т.е. силовые линии) определяются из

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}; \quad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Уравнение силовых линий: $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y}$, т.е. $B_x dy - B_y dx = 0$, следовательно

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} dy + \frac{\partial A_z}{\partial x} dx = dA_z = 0.$$

Оказывается, что уравнение силовых линий в таком поле совпадает с $dA_z = 0$, т.е. с линиями $A_z(x, y) = \text{const}$, значит следы эквипотенциалей в электростатической задаче — это и есть линии магнитного поля.

Такова картина линий $\vec{B}$ для поля двух линейных токов (рис. 5.6).

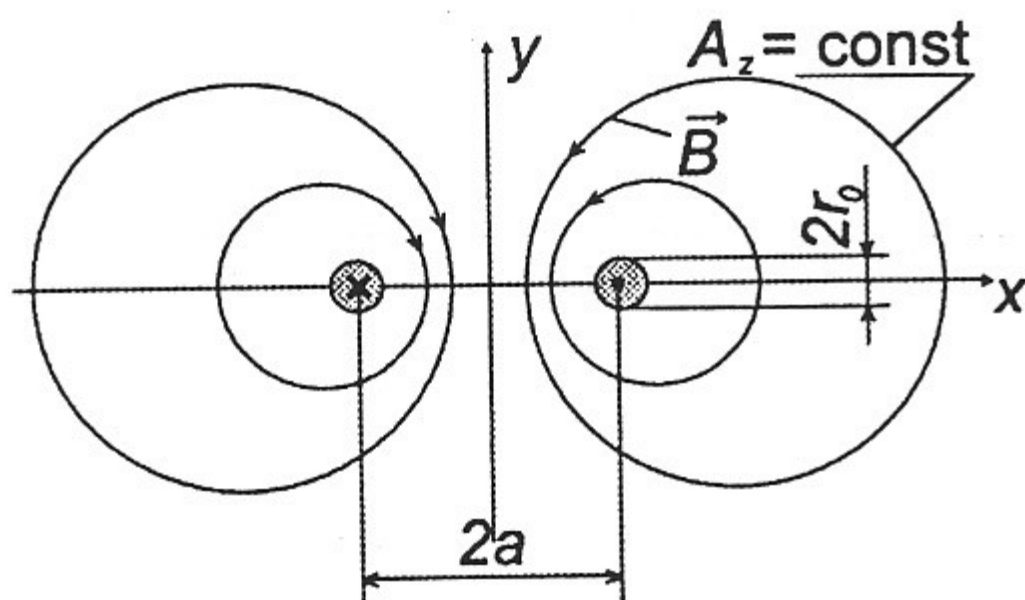


Рис. 5.6. Силовые линии магнитного поля совпадают с эквипотенциалами $A_z = \text{const}$.

Если граничное условие для A на границе раздела сред имеет вид $A_z(x, y) = \text{const}$, то эквипотенциаль с достаточно малыми поперечными размерами: $r_0 \ll s$ (или соответствующую магнитную силовую линию) можно рассматривать, как сечение провода с током (радиус r_0 , расстояние между геометрическими осями $2s$). Однако расположение электрических осей относительно геометрических — в

принципе другое, т.к. внутри проводника текут токи и $A_z \neq \text{const}$. Все варианты двухпроводных линий, рассмотренные в электростатических задачах, действительны и для магнитных задач при $r_0 \ll s$. Уравнения силовых линий магнитного поля имеют вид $A_z(x, y) = \text{const}$, в электростатике аналогичные уравнения являются уравнениями эквипотенциалей.

Индуктивность двухпроводной линии

Уравнения для погонной ёмкости позволяют аналогично записать уравнения для так называемой *внешней погонной индуктивности линии*.

Действительно, по определению $L_1 = \frac{\Phi}{I} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right]$, $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{\ell}$.

Выберем контур для расчета потока по оси z — единицу длины, а по оси x — от поверхности провода 1, до поверхности провода 2 (рис. 5.7).

$$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{\ell} = A_{z1} \cdot 1 - A_{z2} \cdot 1 = A_{z1} - A_{z2}.$$

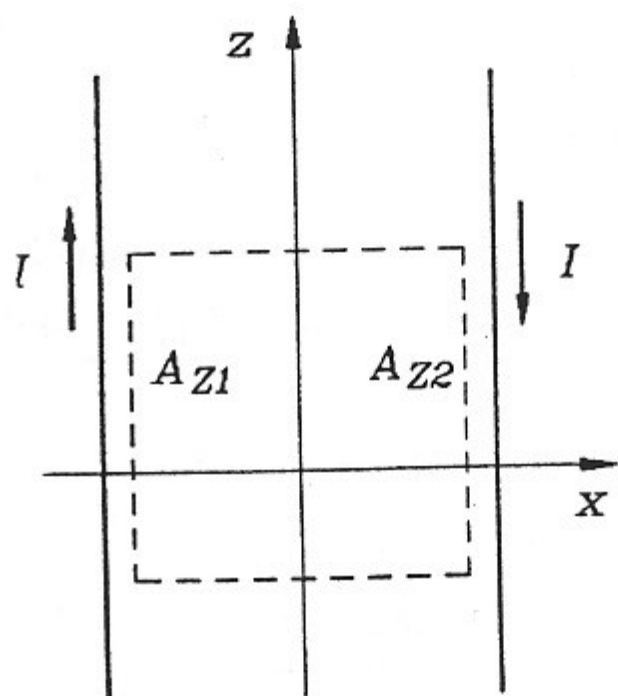


Рис. 5.7. Контур для расчета потока магнитной индукции.

При интегрировании по оси x — $\vec{A}$ и $d\vec{\ell}$ — взаимно перпендикулярны и следовательно $\vec{A} d\vec{\ell} = 0$, т.е.

$$L_1 = \frac{A_{z1} - A_{z2}}{I}, \text{ точно также как в электростатике}$$

$$C_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\tau}. \text{ Используя записанное выше выражение для}$$

$$A_z, \text{ получим } L_1 = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{2s}{r_0}. \text{ Ранее для } C_1 \text{ при } \frac{s}{r_0} \gg 1$$

$$\text{было найдено } C_1 = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2s}{r_0}}. \text{ Сопоставляя эти формулы,}$$

$$\text{получим } L_1 = \frac{1}{C_1} \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0.$$

Название "внешняя" связано с тем, что не учтен магнитный поток внутри проводов, частично сцепленный с током.

Если его учесть, то будет получено: $L_1 = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{2s}{r_0} + \frac{1}{4} \right)$.

Поле и индуктивность коаксиальной линии

Из соображений симметрии магнитное поле между проводами описывается уравнением $B_\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$, векторный потенциал этого поля

$$A_z = -\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C_2.$$

Магнитный поток между проводами на единицу длины

$$\Phi_1 = A_z(r_1) - A_z(r_2) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Внешняя погонная индуктивность

$$L_{\text{внеш}_1} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Учтем потокоцепление внутри проводника с током. В цилиндрических координатах уравнение Пуассона для области 1 (рис. 5.8) запишется в виде

$$\nabla^2 A_z = -\mu\mu_0 J_z, \quad \frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} = -\mu\mu_0 \frac{I}{\pi r_1^2}, \quad J_z = \frac{I}{\pi r_1^2}.$$

Как известно, решением будет сумма общего решения однородного уравнения $\nabla^2 A_z = 0$, т.е. $A_{z(\text{однор})} = C_1 \ln r + C_2$ и частного решения неоднородного уравнения, т.е. в данном случае $A_{z(\text{неоднор})} = -\frac{\mu\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2}$.

В итоге получим $A_z = C_1 \ln r + C_2 - \frac{\mu\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2}$.

Если положить при $r=0$ $A_z(r)=0$, то $C_1=0$, $C_2=0$ и $A_z = -\frac{\mu\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2}$. Потокосцепление на единицу длины (по z) $\Psi_1 = \int \eta d\Phi$, где $d\Phi$ — поток через элементарную трубку тока (рис. 5.9):

$$d\Phi = B \cdot 1 \cdot dr = -\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_1} \frac{r}{r_1} dr.$$

$\eta = \frac{s}{s_1}$ — относительная часть тока, охваченная трубкой. s_1 — сечение провода; s — часть сечения провода, ограниченная элементарной трубкой тока.

$$\eta = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \Psi_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_1^4} \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\mu\mu_0 I}{8\pi}, \quad L_{1(\text{внутр})} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi}.$$

Аналогично, хотя и более громоздко, рассчитывается потокоцепление во внешнем проводе. Если внешняя оболочка тонка (как обычно бывает в коаксиальных кабелях, т.е. $r_2 \approx r_{\text{наружн}}$), этой частью внутренней индуктивности можно пренебречь.

Тогда

$$L_1 = L_{1(\text{внешн})} + L_{1(\text{внутр})} \approx \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{4} \right).$$

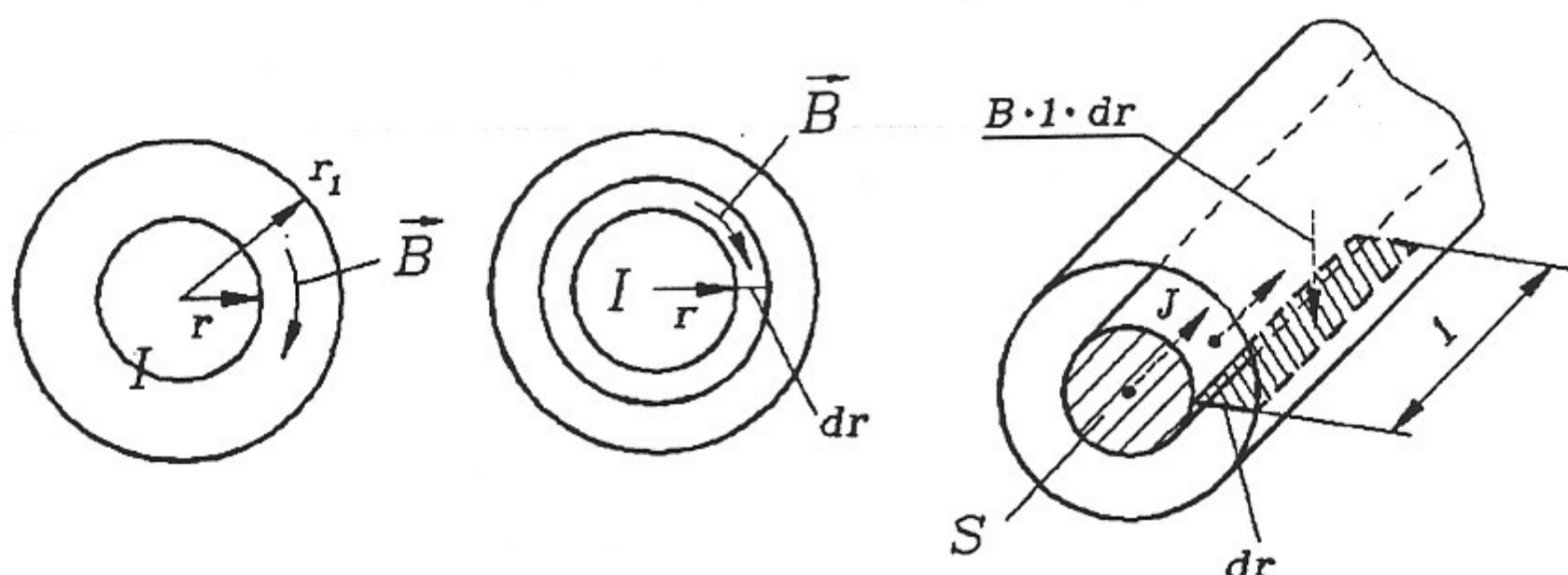


Рис. 5.9. К расчету потокоцепления внутри проводника с током.

Расчет взаимных индуктивностей линий и контуров с током

Если с каким нибудь контуром тока сцеплен не только его собственный магнитный поток, но и магнитный поток другого контура, то такие контура называются магнитосвязанными.

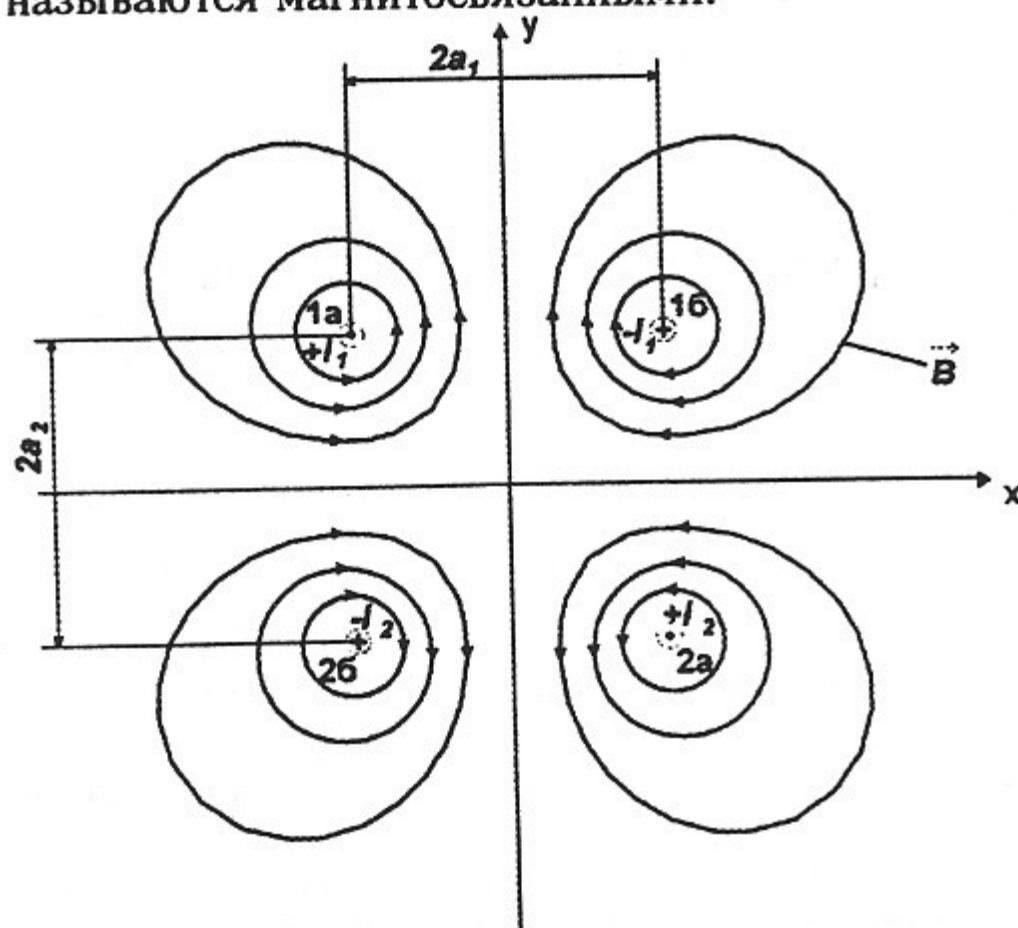


Рис. 5.10. К расчету взаимной индуктивности двух контуров с током.

То же относится к параллельным проводам с током. Магнитное поле создано как токами $\pm I_1$, так и токами $\pm I_2$. (Рис. 5.10 относится к частному случаю $I_1 = I_2$, $a_1 = a_2$.)

Если в линии 2 ток $I_2 = 0$, то магнитный поток от линии 1 пересекает контур, охватываемый линией 2. Точнее, каждый провод с током охвачен как своим магнитным потоком, так и потоками соседнего провода. Пусть векторный потенциал на поверхности проводов A_{z1a} , A_{z2a} , A_{z1b} , A_{z2b} , (A — постоянные, провода тонкие), тогда:

$$\text{индуктивность линии 1} \rightarrow L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{A_{z1a} - A_{z1b}}{I_1} = L_{11} \Big|_{\text{при } I_2=0},$$

$$\text{индуктивность линии 2} \rightarrow L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{A_{z2a} - A_{z2b}}{I_2} = L_{22} \Big|_{\text{при } I_1=0}.$$

Взаимная индуктивность линий 1 и 2 — отношение магнитного потока линии 1, сцепленного с линией 2, к току I_1 , и наоборот:

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = M_{21} = \frac{A_{z2a} - A_{z2b}}{I_1} = L_{21} \Big|_{\text{при } I_2=0},$$

$$\frac{\Phi_{12}}{I_2} = M_{12} = \frac{A_{21a} - A_{21b}}{I_2} = L_{12} \quad \text{при } I_1 = 0.$$

Когда есть токи в обеих линиях, то по принципу наложения:

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2,$$

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2.$$

Это аналогично уравнениям между зарядами и напряжениями в системе частичных ёмкостей двух линий. Такое простое определение взаимной индуктивности через векторный потенциал возможно лишь для параллельных тонких проводов с током (плоская задача), где $\Phi_{12} = A_{21} - A_{22}$.

В общем (не плоском) случае двух связанных контуров расчет сложнее. Все методы расчета плоскопараллельных электростатических полей (в том числе метод зеркальных изображений и комплексного потенциала) применимы с указанными ограничениями — тонкие провода или поверхностные токи — к расчету плоскопараллельных магнитных полей.

Пусть даны два произвольных линейных (из тонких проводов) контура ℓ_1 и ℓ_2 с токами I_1 и I_2 . Для поля первого тока $A_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}_1}{R}$, и чтобы получить ту часть потока, которая сцеплена со вторым контуром, следует вычислять интеграл $\Phi_{12} = \oint \vec{A}_1 d\vec{\ell}_2$ от $\vec{A}_1$ по второму контуру.

Таким образом,

$$\Phi_{12} = \oint \left(\frac{\mu\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}_1}{R} \right) d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{R}.$$

Следовательно,

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{R} = M.$$

Отсюда видно, что $M_{12} = M_{21}$.

Взаимная индуктивность концентрических колец

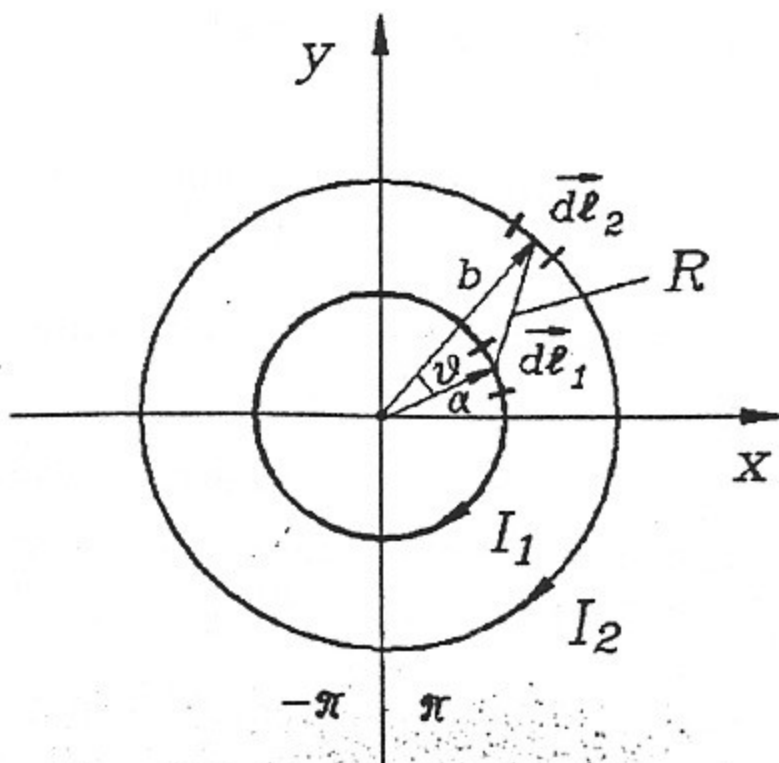


Рис. 5.11. Два концентрических круговых контура.

В качестве примера вычислим взаимную индуктивность двух концентрических круговых контуров, лежащих в одной плоскости (рис. 5.11). Если радиусы контуров a и b , то расстояние между двумя точками на этих контурах: $R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$. Из-за симметрии векторный потенциал первого контура имеет на втором контуре одно и то же значение, поэтому проинтегрировать по ℓ_2 — значит умножить на $2\pi b$. Если обозначить $d\ell_1 = a d\theta$ и учесть, что $d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2 = d\ell_1 d\ell_2 \cos \theta$,

то:

$$M_{12} = \frac{1}{2} ab\mu\mu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{b^2 - 2ab \cos \theta + a^2}}.$$

Полагая $k = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$; $\theta = \pi - 2\beta$, получим:

$$M_{12} = \mu\mu_0 \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы, являющиеся функциями

параметра k ; $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода;

$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Эти интегралы табулированы. Для k , близких к 1, $E \rightarrow 1$, $K \approx \ln \left(\frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \right)$.

О намагниченности среды.

Формальная аналогия магнитостатических и электростатических полей

Величина магнитного поля, создаваемого контуром с током I , пропорциональна магнитной проницаемости среды μ :

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}^0]}{R^2}.$$

Физически это означает тот факт, что магнитное поле $\vec{B}$ создается не только током I , но и так называемыми "молекулярными" токами вещества. В ферромагнетиках (Fe, Co, Ni и ряд сплавов) $\mu \gg 1$ и этот эффект увеличения поля за счет "внутренних токов" вещества имеет большое практическое значение.

Хотя внутреннее устройство ферромагнетиков весьма сложно, мы для "макроскопического" анализа будем представлять себе наличие в веществе некоторых микроскопических замкнутых контуров с током, циркулирующим без внешнего источника. Как сейчас известно — это магнитные моменты электронов в атомах вещества ("вульгарное" неквантовое представление — токи, образованные вращением заряда электрона вокруг оси, т.е. связанные с наличием у него механического момента — спина).

Рассмотрим магнитное поле малого контура с током на больших расстояниях от контура.

Так как рассматриваемая область, т.е. область, где $\vec{I} = 0$, находится вдали от контура с током проводимости, то для такой области в ограниченном смысле вместо $\text{rot } \vec{H} = \vec{I}$ или $\oint \vec{H} d\vec{s} = \vec{I}$ можно записать $\text{rot } \vec{H} = 0$ и $\oint \vec{H} d\vec{s} = 0$. Но в этом случае возможно введение скалярного потенциала (он "втрое" проще векторного) — φ_m :

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m,$$

т.е. проекция вектора $\vec{H}$ на любое направление есть $H_s = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial s}$, или $\vec{H} d\vec{s} = -d\Phi_m$.

Конечно, таким потенциалом надо пользоваться осторожно, не допуская, чтобы контур интегрирования был сцеплен с контуром тока, так как скалярный потенциал магнитного поля будет в этом случае неоднозначен ($\oint \vec{H} d\vec{s} = nI$, где n — число сцеплений пути обхода с контуром тока). Для анализа поля вдали от контура нам это не грозит. Для расчета Φ_m малого контура найдем сначала $\vec{H} d\vec{s} = -d\Phi_m$.

Для контура с током I в вакууме:

$$\vec{H} d\vec{s} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\mu_0} \oint \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}^0]}{R^2} d\vec{s},$$

где $d\vec{\ell}$ — элемент контура с током I в точке "И" источника поля (см. рис. 5.12), $d\vec{s}$ — элемент пути вдали от тока (в точке, где ищется поле $\vec{B}$ — в точке наблюдения "Н").

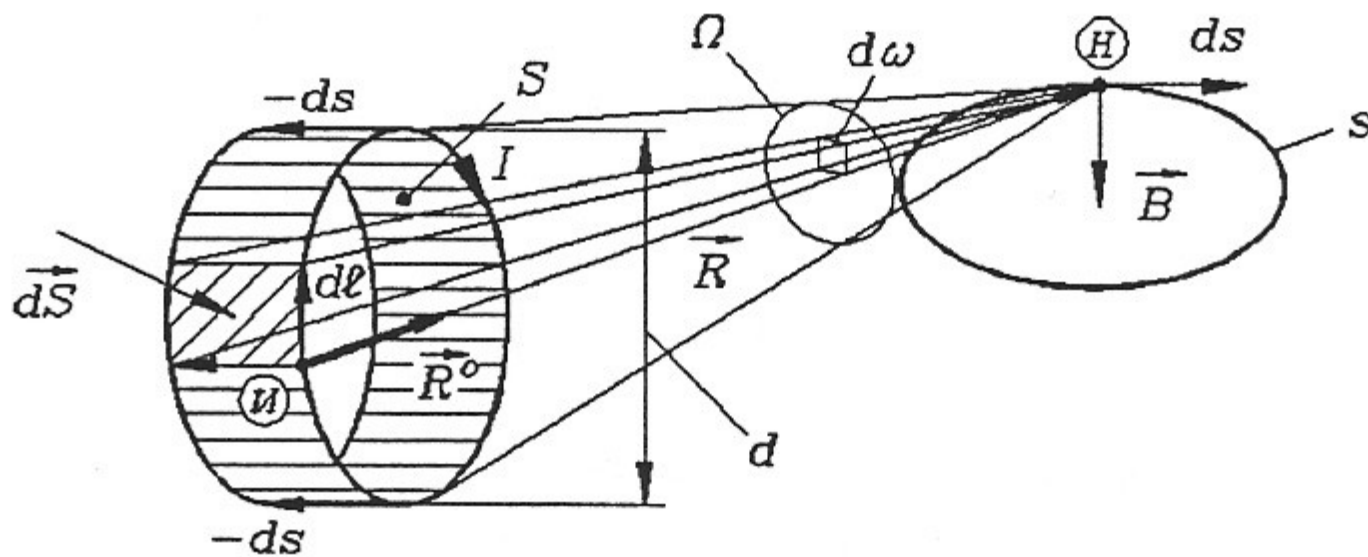


Рис. 5.12. К расчету магнитного поля, созданного малым контуром.

Результат интегрирования не изменится, если перемещение точки наблюдения на $d\vec{s}$ заменить перемещением контура с током на $-d\vec{s}$:

$$\vec{H} d\vec{s} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{[d\vec{s} \times d\vec{\ell}]}{R^2} \vec{R}^0 = -\frac{I}{4\pi} \oint \frac{[-d\vec{s} \times d\vec{\ell}]}{R^2} \vec{R}^0.$$

Площадка $[-d\vec{s} \times d\vec{\ell}] = d\vec{S}$ видна из точки наблюдения под телесным углом $\frac{d\vec{S} \vec{R}^0}{R^2} = d\omega$, а весь контур — под телесным углом Ω .

При перемещении контура на $-d\vec{s}$ телесный угол, под которым он виден, изменится на $d\Omega = \sum d\omega$, где $\sum d\omega$ — это телесный угол, опирающийся на площадку заштрихованного кольца.

$$\begin{aligned} \text{Т.е. } \vec{H} d\vec{s} &= -\frac{I}{4\pi} \sum d\omega = -\frac{I}{4\pi} d\Omega, \\ \text{или } -d\Phi_m &= -d\left(\frac{I\Omega}{4\pi}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, скалярный потенциал контура с током (если обеспечена однозначность потенциала):

$$\Phi_m = \frac{I\Omega}{4\pi} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{R}^0 d\vec{S}}{R^2}.$$

Для малого контура (т.е. далекого от точки наблюдения и если максимальный размер контура $d \ll R$) R и $\vec{R}^0$ не меняются и

$$\varphi_m = \frac{I \vec{S} \vec{R}^0}{4\pi R^2}.$$

Если назвать $\mu_0 I \vec{S} = \vec{p}_m^*$ магнитным моментом контура с током (рис. 5.13), то

$$\varphi_m = \frac{\vec{p}_m^* \cos \theta}{4\pi \mu_0 R^2}.$$

Это выражение совпадает с формулой электростатического потенциала диполя с моментом $\vec{p}_m^*$.

Таким образом, намагничиваемую среду можно представить, как и диэлектрик, состоящей из магнитных диполей с моментами $\vec{p}_m^* = q_m^* h$, где h — плечо, а q_m^* — магнитный заряд диполя.

Были проведены многочисленные эксперименты по поиску магнитных зарядов ("монополей"), однако обнаружить их в природе не удалось.

Рис. 5.13. К определению магнитного момента контура с током.

Несмотря на расчетное удобство формальной аналогии между φ_m и φ , $H = -\text{grad } \varphi_m$ и $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, $\vec{p}_m^*$ и $\vec{p}$, магнитное поле следует рассматривать не как статическое, а как электрокинетическое, т.е. как поле движущихся зарядов. Поэтому при определении электрического момента $\vec{p}$ принято идти от величины заряда и плеча диполя, т.е. определять $\vec{p}$ как $\vec{p} = q\vec{h}$, а магнитным моментом малого контура с током (магнитного "диполя") принято называть величину $\vec{P}_m = I \vec{S}$ [А · м²], а не $\vec{p}_m^* = q_m^* h$. Определения выбраны так, чтобы в правой части равенств стояли физически реальные величины: заряд, плечо, ток, площадь.

Магнитный момент единицы объема $\vec{M} = \frac{\sum \vec{P}_m}{V}$ [А/м] характеризует намагниченность среды.

Таким образом, реальное магнитное поле, создаваемое в среде как токами проводимости, так и молекулярными токами, должно рассматриваться как сумма двух полей:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}),$$

где $\vec{B}$ — магнитная индукция, характеризующая реальное поле (сила, действующая на движущийся заряд); $\vec{H}$ — вектор напряженности поля, характеризует поле, создаваемое токами проводимости; $\vec{M}$ — вектор намагниченности, характеризует поле, создаваемое молекулярными токами среды.

Для неферромагнитных сред или в слабых полях для ферромагнетиков, т.е. для линейных изотропных сред ($\mu = \text{const}$): можно считать $\vec{M} = \kappa_m \vec{H}$, где $\kappa_m = \text{const}$ — магнитная восприимчивость. В этом случае $\vec{B} = \mu_0 (1 + \kappa_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$.

В сильных полях для ферромагнетиков $\mu \neq \text{const}$ и расчет полей усложняется.

Итак, наряду с отмеченной выше формальной аналогией, связанной с вводом магнитных зарядов, между магнитостатическим (т.е. созданным только молекулярными токами) и электростатическим полем существует более глубокое соответствие между векторами электрического и магнитного поля, обоснованное физически.

Так, поле в пустоте характеризовалось силой, действующей на заряды: на неподвижный — вектор $\vec{E}$, на движущийся — вектор $\vec{B}$. Переход к полю в веществе сделал необходимым учет поля зарядов поляризации и молекулярных токов — векторами $\vec{P}$ и $\vec{M}$, соответственно. И, наконец, для электрического и магнитного полей был построен вектор, также характеризующий поле в среде, но определяемый расположением только свободных зарядов (вектор $\vec{D}$), или только токов проводимости (вектор $\vec{H}$).

Энергия магнитного поля постоянных токов. Пондеромоторные силы в магнитном поле

Как известно (из уравнений Максвелла) энергия магнитного поля

$$W_m = \int_V w_m dV,$$

где $w_m = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ — плотность энергии магнитного поля.

Рассмотрим другие способы выражения энергии магнитного поля.

1. Пусть магнитное поле создано двумя токами I_1 и I_2 , текущими в контурах 1 и 2. Разобьём магнитное поле на элементы dV по силовым линиям и поперек них, т.е. так, чтобы $dV = d\ell ds$, где ds — сечение малой магнитной трубки, ограниченной линиями магнитной индукции, а $d\ell$ — малый отрезок такой трубки. Тогда

$$W_m = \frac{1}{2} \int_s \int_{\ell} BH d\ell ds.$$

Выполним сперва интегрирование по ℓ , после чего подынтегральная функция окажется равной энергии, содержащейся в элементарной магнитной трубке. Произведение $B ds$ — это поток сквозь сечение этой трубки, и он при интегрировании вдоль ℓ не меняется, т.е.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_s B ds \int_{\ell} H d\ell.$$

Но $\int_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = I_1$, если элементарная магнитная трубка сцеплена только с этим током. Или $\int_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = I_2$, если с током I_2 . И в общем случае $\int_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = I_1 + I_2$ — если с обоими токами.

Таким образом, после интегрирования по ℓ , а затем по s в каждой группе (I_1 , I_2 и $I_1 + I_2$), энергия может быть представлена в виде суммы трёх слагаемых:

$$W_m = \frac{1}{2} I_1 \Phi_{11} + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \Phi_{\text{общ}} + \frac{1}{2} I_2 \Phi_{22},$$

где Φ_{11} — поток, сцепленный только с первым контуром, Φ_{22} — поток, сцепленный только со вторым контуром, $\Phi_{\text{общ}} = \Phi_{12} = \Phi_{21}$ — поток, сцепленный с обоими контурами.

По определению, полные потокосцепления для 1 и 2 контуров

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2, \\ \Psi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_2 I_2 + M I_1, \\ \text{т.е. } W_m &= \frac{1}{2} I_1 \Psi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Psi_2, \\ \text{или } W_m &= \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2.\end{aligned}$$

При обобщении этого вывода на k контуров получим $W_m = \frac{1}{2} \sum I_k \Psi_k$.

II. Так как подсчет энергии по основному соотношению $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV$ связан с интегрированием по всему объёму поля V (т.е. и по объёму без токов, и по объёму, занятому токами), можно указать способ подсчета энергии поля путем интегрирования только по объёму с токами.

Из известного соотношения

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{H}] &= \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{B}, \text{ и } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J},\end{aligned}$$

получим

$$\vec{B} \vec{H} = \vec{A} \vec{J} + \operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{H}].$$

Интегрируя его по всему объёму поля, получим

$$\int_V \operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{H}] dV = \oint_s [\vec{A} \times \vec{H}] ds = 0.$$

Равенство нулю последнего интеграла вытекает из следующих соображений.

Здесь граница объема может быть удалена на большое расстояние. На такой границе $s \sim R^2$; $H \leq \frac{1}{R^2}$, т.к. каждый контур с током — магнитный диполь:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m, \quad \varphi_m \sim \frac{1}{R^2}; \quad A \sim \frac{1}{R}.$$

Следовательно $\frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{J} dV$, т.е. интеграл по объёму, занятому токами

(поскольку в других точках $J = 0$):

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{J} dV.$$

Энергетический баланс при медленном перемещении контуров с током

Будем перемещать контуры с током настолько медленно, чтобы можно было пренебречь токами смещения.

Для поддержания токов на постоянном уровне в контурах должна действовать ЭДС $\mathcal{E}_k = r_k I_k$ (где r_k — сопротивление контура), кроме того, даже при медленном

перемещении возникает ЭДС само- и взаимоиндукции $\mathcal{E}_{Lk} + \mathcal{E}_{Mk} = -\frac{d\Psi_k}{dt}$, т.е. полная ЭДС в контуре при его перемещении

$$\mathcal{E}_k = r_k I_k + \frac{d\Psi_k}{dt}.$$

Работа этой ЭДС идет на покрытие тепловых потерь, изменение энергии магнитного поля и на механическую работу, связанную с перемещением контуров:

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{E}_k I_k dt &= \sum I_k^2 r_k dt + dW_m + \bar{F} d\bar{s}, \\ \text{т.е. } \sum I_k^2 r_k dt + \sum I_k d\Psi_k &= \sum I_k^2 r_k dt + dW_m + \bar{F} d\bar{s}, \\ \text{или } \sum I_k d\Psi_k &= dW_m + \bar{F} d\bar{s}. \end{aligned}$$

Таким образом, та часть работы, производимой источниками ЭДС, которая связана с изменением магнитного потока, превращается как в энергию поля, так и в механическую работу.

1. Если токи в контурах неизменны, то т.к. $W_m = \frac{1}{2} \sum I_k \Psi_k$, при изменении положения контуров

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum I_k d\Psi_k.$$

Отсюда

$$\bar{F} d\bar{s} = \frac{1}{2} \sum I_k d\Psi_k = dW_m.$$

То есть механическая работа может производиться магнитным полем лишь при условии увеличения запаса его энергии на ту же величину.

2. Если при перемещении контуров потокосцепление поддерживается неизменным, т.е. $d\Psi_k = 0$, то $-dW_m = \bar{F} d\bar{s}$. Механическая работа может производиться магнитным полем только за счет уменьшения энергии магнитного поля.

Указанные соотношения полезны для вычисления пондеромоторных сил.

Так, если $I_k = \text{const}$, то $F_s = \frac{\partial W_m}{\partial s}$.

А если $\Psi_k = \text{const}$, то $F_s = -\frac{\partial W_m}{\partial s}$.

При этом энергия поля может быть вычислена любым путем, например:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Кроме того, как было показано ранее, давление поля на проводник с током вычисляется в соответствии с $p_m = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$ (в случае поверхностного тока, компенсирующего поле внутри проводника), или через $\bar{f}_m = [\bar{J}\bar{B}] \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right]$ — объёмную плотность сил магнитного поля.

Переменное электромагнитное поле

Основные уравнения электродинамики — это полная система уравнений Максвелла. Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.

Дифференциальная форма

Интегральная форма

I. $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \vec{I} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ — обобщенный закон полного тока.
II. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ — закон электромагнитной индукции.
III. $\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ — отражает факт отсутствия магнитных зарядов, создающих поле.
IV. $\text{div } \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q$ — отражает факт существования электрических зарядов, создающих поле: $(Q = \int_V \rho dV, \rho \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right])$.

В этих уравнениях:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \cdot \mu_0}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред:

$B_{2n} - B_{1n} = 0$ — нормальная составляющая вектора магнитной индукции непрерывна на границе раздела.

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$ — нормальная составляющая вектора электрического смещения либо непрерывна (при $\sigma = 0$), либо терпит скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов (при $\sigma \neq 0$).

$H_{2t} - H_{1t} = K$ — тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля либо непрерывна (при $K = 0$), либо терпит скачок, равный поверхностной плотности тока (при $K \neq 0$).

$E_{2t} - E_{1t} = 0$ — тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна на границе раздела сред.

Потенциалы электромагнитного поля

Так как $\text{div } \vec{B} = 0$, то $\vec{B}$ — вихревое поле, и можно ввести магнитный вектор-потенциал:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

(пока мы не определяем, чему равна $\text{div } \vec{A}$ и, соответственно, определяем вектор $\vec{A}$ с точностью до grad некоторого скаляра). Из II-го уравнения Максвелла следует

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t},$$

откуда получаем

$$\operatorname{rot} \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

т.е. вектор $\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$ описывает *потенциальное* поле и, значит, $\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi$,

где φ — некоторый скалярный потенциал — *скалярный электрический потенциал*. Так как, вектор $\bar{A}$ был определен не полностью, а с точностью до grad некоторого скаляра, определим его полностью, связав $\bar{A}$ и φ . Подставим в уравнения Максвелла введенные потенциалы $\bar{A}$ и φ : из I-го уравнения Максвелла (с учетом связи между $\bar{B}$ и $\bar{H}$, и между $\bar{D}$ и $\bar{E}$) получим

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{J} + \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Подставим в полученное выражение вместо $\bar{B}$ и $\bar{E}$ потенциалы $\bar{A}$ и φ :

$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}, \quad \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \mu\mu_0 \bar{J} - \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \varphi).$$

Переход от уравнений для векторов поля к уравнениям для потенциалов означает, что теперь нам надо найти не 6 компонент векторов поля: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$, а всего 4 — A_x, A_y, A_z и φ . Заметим, что $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, где $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость света в вакууме; $\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 = \frac{1}{v^2}$, где $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ также имеет размерность скорости, т.к. μ и ϵ — безразмерные величины. Очевидно, что $v \leq c$, т.к. $\mu \geq 1$ и $\epsilon \geq 1$. Таким образом,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \mu\mu_0 \bar{J} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Как известно из векторного анализа,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}.$$

Таким образом, уравнение для потенциалов приобретает вид:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu\mu_0 \bar{J} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Полагая, что $\operatorname{div} \bar{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, мы можем упростить последнее уравнение и в результате придем к следующему:

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \bar{J}.$$

Это *неоднородное векторное волновое уравнение* (векторное уравнение Д'Аламбера). В тех точках поля, где токов проводимости нет ($\bar{J} = 0$), оно переходит в *однородное волновое уравнение*

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Волновое уравнение в *одномерном случае* мы уже получали непосредственно для *векторов поля* из уравнений Максвелла и его решениями были плоские волны, распространяющиеся со скоростью v (в вакууме — со скоростью c) вдоль оси координат x :

$$f(x \pm vt).$$

Итак, мы получили волновое уравнение для векторного потенциала $\vec{A}$. Для скалярного электрического потенциала φ получается аналогичное уравнение.

Из IV уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Учитывая, что

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi,$$

получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Но

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

— неоднородное *скалярное* волновое уравнение. В тех точках, где объемных зарядов нет, уравнение превращается в однородное скалярное волновое уравнение

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Таким образом, из уравнений Максвелла следуют волновые уравнения для потенциалов $\vec{A}$ и φ . Граничные условия для потенциалов выглядят так:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad A_{1t} = A_{2t}$$

(если на границе раздела нет сторонних полей).

Следует учесть, что для нахождения переменного электромагнитного поля достаточно знать только распределение токов проводимости $\vec{J}$, т.к. плотность заряда ρ связана с $\vec{J}$ уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

которое также является следствием уравнений Максвелла (действительно, достаточно взять div от I-го уравнения Максвелла и учесть, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$; тогда, с учетом IV-го уравнения Максвелла, и получится уравнение непрерывности). Эта связь как раз и учитывается соотношением

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Таким образом, задача расчета переменного электромагнитного поля сведена к решению векторного волнового уравнения при определенных граничных условиях

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \bar{J}.$$

Затем из

$$\operatorname{div} \bar{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

определяется скалярный потенциал φ . Далее вектора поля определяются дифференцированием:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi.$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \bar{A}.$$

Уравнения Максвелла и теорема Умова-Пойтинга в комплексной форме

Так как уравнения поля линейны (разумеется, при условии $\epsilon, \mu, \gamma = \text{const}$), то из принципа наложения и теории рядов Фурье следует, что токи, заряды, поля и потенциалы, которые являются, вообще говоря, произвольными функциями времени, могут быть представлены в виде суммы постоянных и синусоидальных составляющих. Поэтому, изучив синусоидальные поля одной частоты, мы сможем построить любое реальное решение методом спектральных функций. Итак, для синусоидальных полей, пользуясь методом комплексных амплитуд, запишем

$$\bar{E} = \dot{\bar{E}} \cdot e^{j\omega t},$$

$$\bar{H} = \dot{\bar{H}} \cdot e^{j\omega t},$$

Тогда I и II уравнения Максвелла можно придать вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{J}} + j\omega\epsilon\epsilon_0 \dot{\bar{E}},$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -j\omega\mu\mu_0 \dot{\bar{H}}.$$

Здесь $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ комплексные амплитуды, а дифференцирование по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ заменяется умножением на $j\omega$, где ω — круговая частота поля.

Для комплексных амплитуд потенциалов уравнения запишутся так:

$$\nabla^2 \dot{\bar{A}} + \frac{\omega^2}{v^2} \dot{\bar{A}} = -\mu\mu_0 \dot{\bar{J}}, \quad \operatorname{div} \dot{\bar{A}} = -\frac{j\omega}{v^2} \dot{\varphi},$$

$$\dot{\bar{E}} = -j\omega \dot{\bar{A}} - \operatorname{grad} \dot{\varphi}, \quad \dot{\bar{H}} = \frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \dot{\bar{A}}.$$

Метод комплексных амплитуд широко применяется в теории переменных токов, только там в комплексы тока и напряжения подставляются не амплитудные, а эффективные значения. Например, мощность в цепи переменного тока

$$\dot{U} \dot{I} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \dot{I}_m = P + jQ,$$

где P — активная, Q — реактивная мощности. (Звездочкой над символами будем обозначать величину, сопряженную соответствующей комплексной амплитуде.)

Для электромагнитного поля, где энергетический баланс характеризуется теоремой Умова-Пойнтинга, для комплексных амплитуд поля можно ввести комплексный вектор Пойнтинга, характеризующий как активную, так и реактивную мощность:

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}].$$

Комплексный вектор Пойнтинга характеризует плотность потока мощности $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$.

Действительно,

$$\oint_S \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}] d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_V \text{div} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}] dV = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\vec{H}} \text{rot} \dot{\vec{E}} - \dot{\vec{E}} \text{rot} \dot{\vec{H}}) dV.$$

Из уравнений поля в комплексной форме получаем

$$\dot{\vec{E}} \text{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{E}} \left(\dot{\vec{J}} - j\omega\epsilon\epsilon_0 \dot{\vec{E}} \right) = \frac{J^2}{\gamma} - j\omega\epsilon\epsilon_0 E^2,$$

$$\dot{\vec{H}} \cdot \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\mu_0 H^2$$

(здесь учтено, что $\dot{\vec{J}} = \gamma \dot{\vec{E}}$ ($\dot{\vec{E}}_{\text{ст}} = 0$), $\dot{\vec{J}} \cdot \dot{\vec{J}} = J^2$, $\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{E}} = E^2$ и $\dot{\vec{H}} \cdot \dot{\vec{H}} = H^2$). В полученных выражениях

H — амплитуда напряженности магнитного поля,

E — амплитуда напряженности электрического поля.

Таким образом,

$$-\oint_S \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}] d\vec{S} = \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{J^2}{\gamma} \right) dV + j\omega \int_V \left(\frac{\mu\mu_0 H^2}{2} - \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \right) dV.$$

В правой части первый член — это средняя за период мощность, поглощаемая в объеме V , т.е. активная мощность P ; второй член — разность максимальных значений энергии, запасенной в магнитном и электрическом полях этого объема.

Разность этих значений энергии характеризует реактивную мощность Q .

Приходим к соотношению:

$$-\oint_S \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}] d\vec{S} = P + j2\omega (W_{\text{мср}} - W_{\text{элср}}) = P + jQ.$$

Здесь $2W_{\text{мср}} = W_{\text{мтах}}$, $2W_{\text{элср}} = W_{\text{элтах}}$.

Итак, поток комплексного вектора Пойнтинга, втекающий сквозь поверхность S , равен комплексной мощности в объеме V .

Расчет электромагнитного поля, возбуждаемого элементом переменного тока

Если длина элемента тока $\vec{h}$, а ток по определению $i = \frac{\partial q}{\partial t}$, то

$$i\vec{h} = \frac{\partial q}{\partial t} \vec{h} = \frac{\partial(q\vec{h})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}; \text{ где } \vec{p} = q\vec{h} \text{ — момент электрического диполя, с плечом, рав-$$

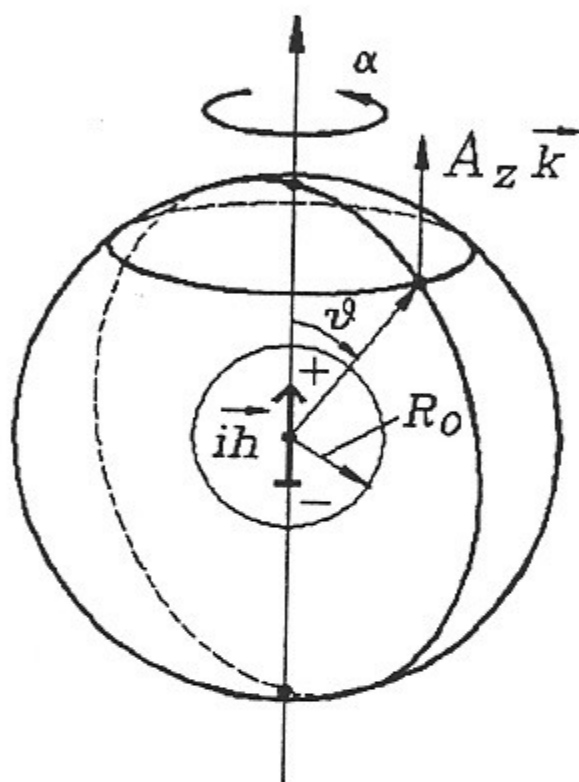
ным длине элемента тока. Таким образом, элемент переменного тока эквивалентен

элементарному электрическому вибратору (или т.н. диполю Герца — диполю с переменными зарядами). Вне диполя ($i = 0$, $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu\mu_0 \vec{H}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \nabla^2 \vec{A} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{A} &= 0,\end{aligned}$$

где ω — круговая частота тока $i(t) = I \sin \omega t$.

Введем наряду с декартовой (x, y, z) сферическую систему координат (R, θ, α) , в начале которой расположен диполь (рис. 6.1). Полярную ось направим по $\vec{h}$. Так как $\vec{h} = h_z \vec{z}^0$, направление векторного потенциала, совпадающее с направлением тока, также будет параллельно оси z , т.е. $\vec{A} = A_z \vec{z}^0$. Граничными условиями для A_z будут условия на бесконечности (спад поля $A_z \rightarrow 0$), а также условия вблизи начала координат $R \approx R_0$, где диполь еще можно считать диполем $h \ll R_0$ (т.е. элемент тока — малым).



Условия вблизи начала координат можно сформулировать, например, для $\omega \rightarrow 0$. Тогда поле должно совпадать с полем элемента постоянного тока. Для векторного потенциала элемента тока при $\omega = 0$ получаем

Рис. 6.1. Диполь в сферической системе координат.

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0 i \vec{h}}{4\pi R}.$$

Так как вектор $\vec{A}$ имеет только одну отличную от нуля компоненту A_z , то волновое векторное уравнение примет вид скалярного:

$$\nabla^2 \dot{A}_z + \frac{\omega^2}{v^2} \dot{A}_z = 0.$$

A_z зависит только от R ($\dot{A}_z = \dot{A}_z(R)$). Выражая лапласиан скаляра A_z в сферических координатах, получим

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d \dot{A}_z}{dR} \right) + k^2 \dot{A}_z = 0,$$

здесь $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2 \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0$.

Запишем тождество:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d \dot{A}_z}{dR} \right) = \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R \dot{A}_z).$$

В его справедливости можно убедиться непосредственным дифференцированием. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R \dot{A}_z) &= \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(\dot{A}_z + R \frac{d \dot{A}_z}{dR} \right) = \frac{1}{R} \left(2 \frac{d \dot{A}_z}{dR} + R \frac{d^2 \dot{A}_z}{dR^2} \right) = \\ &= \frac{1}{R^2} \left(2R \frac{d \dot{A}_z}{dR} + R^2 \frac{d^2 \dot{A}_z}{dR^2} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d \dot{A}_z}{dR} \right).\end{aligned}$$

Пользуясь этим тождеством, преобразуем волновое уравнение (умножим на R):

$$\frac{d^2}{dR^2} (R \dot{A}_z) + k^2 R \dot{A}_z = 0.$$

Это — линейное дифференциальное уравнение относительно $R \dot{A}_z$. Его решение имеет вид

$$R \dot{A}_z = \dot{C}_1 e^{-jkR} + \dot{C}_2 e^{+jkR}.$$

$\dot{C}_1 = C_1 e^{j\psi_1}$, $\dot{C}_2 = C_2 e^{j\psi_2}$ — комплексные постоянные интегрирования.

$$\dot{A}_z = \dot{C}_1 \frac{e^{-jkR}}{R} + \dot{C}_2 \frac{e^{+jkR}}{R}.$$

Перейдем к мгновенным значениям: умножим последнее выражение на $e^{j\omega t}$ и возьмем мнимую часть. Тогда

$$A_z = \frac{C_1}{R} \sin(\omega t - kR + \psi_1) + \frac{C_2}{R} \sin(\omega t + kR + \psi_2),$$

первый член — это волна, распространяющаяся в сторону возрастания R .

Положим $\omega t - kR + \psi_1 = \text{const} = \frac{\pi}{2}$ — т.е. рассмотрим как движется гребень волны. Очевидно,

$$\omega dt - k dR = 0.$$

И, следовательно,

$$\frac{dR}{dt} \equiv v_\phi = \frac{\omega}{k} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

— это фазовая скорость волны в среде (в пустоте она равна c).

Очевидно, что в каждый момент времени поверхности равной фазы представляют собой набор вложенных сфер $R = \text{const}$, таким образом, мы имеем сферическую волну, расходящуюся в пространстве.

Длина волны в пустоте

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega},$$

в среде

$$\lambda = v_\phi T = \frac{v_\phi}{f} = \frac{2\pi v_\phi}{\omega} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}.$$

Амплитуда волны пропорциональна $\frac{C_1}{R}$ и убывает на бесконечности.

Второй член в выражении для A_z описывает волну, распространяющуюся из бесконечности к началу координат с возрастающей амплитудой. Исходя из физического смысла, такой волны быть не может. Поэтому $C_2 = 0$. Таким образом, мы

учли граничное условие на ∞ . Его называют условием излучения: поле может представлять на ∞ только расходящуюся волну.

Из другого граничного условия найдем $\dot{C}_1$. Выберем радиус граничной сферы R_0 , для которого элемент тока еще можно считать малым и перейдем к $\omega \rightarrow 0$. Тогда $k = \frac{\omega}{v} \rightarrow 0$ и $kR_0 \ll 1$, т.е. ток в проводе можно считать постоянным. Для элемента постоянного тока $A_z = \frac{\mu\mu_0 i h}{4\pi R_0}$. Из решения для комплексной амплитуды $\dot{A}_z$ при $\omega \rightarrow 0$ получаем $A_z = \frac{\dot{C}_1}{R_0}$. Отсюда $\dot{C}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} i h$.

Следовательно, искомый потенциал

$$\dot{A}_z = \frac{\mu\mu_0 \dot{I} h}{4\pi R} e^{-jkR}.$$

Перейдем к мгновенным значениям. Если элемент тока

$$i = i(t) = I \sin \omega t \leftrightarrow \dot{I}$$

(току $i(t)$ соответствует комплексная амплитуда $\dot{I}$), то

$$A_z(t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R} I h \sin(\omega t - kR) = \frac{\mu\mu_0 I h}{4\pi R} \sin\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\right] = \frac{\mu\mu_0 h}{4\pi R} i\left(t - \frac{R}{v}\right).$$

Величина векторного потенциала в момент t определяется значением тока $i\left(t - \frac{R}{v}\right)$, т.е. значением тока в более ранний момент времени $t_1 = t - \frac{R}{v}$. Разница $t - t_1 = \frac{R}{v}$ как раз такая, чтобы сферическая волна прошла путь от элемента тока до точки R со скоростью $v = v_\phi$. Чем дальше точка наблюдения, тем позже до нее дойдет влияние изменения тока. Поэтому векторный потенциал электромагнитного поля $\vec{A}$ и

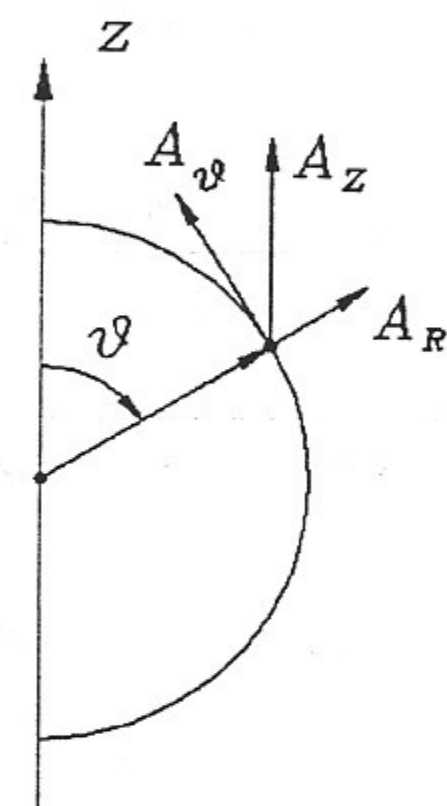


Рис. 6.2. Разложение вектора A_z .

связанный с ним скалярный потенциал ϕ ($\text{div } \vec{A} = -\frac{j\omega}{v^2} \phi$) являются запаздывающими потенциалами.

Найдем поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в сферической системе координат по известному $\dot{A}_z(R)$, см. рис. 6.2. Очевидно, что

$$\dot{A}_R = \dot{A}_z \cos \theta = \frac{\dot{C}_1 \cos \theta \cdot e^{-jkR}}{R},$$

$$\dot{A}_\theta = -\dot{A}_z \sin \theta = -\frac{\dot{C}_1 \sin \theta \cdot e^{-jkR}}{R},$$

$$\dot{A}_\phi = 0.$$

Так как $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, а $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$, то получим следующее

выражение для $\vec{H}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot } \dot{\vec{A}} = \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{1}{1 \cdot R \cdot R \cdot \sin \theta} \cdot \begin{vmatrix} \bar{R}^0 & R \bar{\theta}^0 & R \sin \theta \cdot \bar{\alpha}^0 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \dot{A}_R & R \dot{A}_\theta & R \sin \theta \cdot \dot{A}_\alpha \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \frac{1}{R^2 \cdot \sin \theta} \cdot \begin{vmatrix} \bar{R}^0 & R \bar{\theta}^0 & R \sin \theta \cdot \bar{\alpha}^0 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\dot{C}_1 \cos \theta \cdot e^{-jkR}}{R} & -\frac{\dot{C}_1 \sin \theta \cdot e^{-jkR}}{R} & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{R \sin \theta}{R^2 \sin \theta} \cdot \left(-\dot{C}_1 \sin \theta \cdot e^{-jkR} \cdot (-jk) - \frac{\dot{C}_1 \cdot (-\sin \theta) \cdot e^{-jkR}}{R} \right) \cdot \bar{\alpha}^0 = \dot{H}_\alpha \cdot \bar{\alpha}^0. \\
\dot{H} &= \dot{H}_\alpha = \frac{\dot{C}_1 k^2}{\mu\mu_0} \sin \theta \cdot e^{-jkR} \cdot \left(\frac{1}{k^2 R^2} + j \frac{1}{k R} \right).
\end{aligned}$$

Магнитное поле электрического тока имеет только азимутальную составляющую ($H_R = 0$, $H_\theta = 0$).

Электрическое поле найдем из уравнения

$$\begin{aligned}
\text{rot } \dot{\vec{H}} &= j\omega\epsilon\epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \\
\text{rot } \dot{\vec{H}} &= \frac{1}{1 \cdot R \cdot R \cdot \sin \theta} \cdot \begin{vmatrix} \bar{R}^0 & R \bar{\theta}^0 & R \sin \theta \cdot \bar{\alpha}^0 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ 0 & 0 & R \sin \theta \cdot \dot{H}_\alpha \end{vmatrix} = \\
&= \frac{R}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \dot{H}_\alpha) \cdot \bar{R}^0 - \frac{R \sin \theta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} (R \cdot \dot{H}_\alpha) \cdot \bar{\theta}^0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\dot{E}_R &= \frac{2 \dot{C}_1 k^3 \cos \theta}{\mu\mu_0 \cdot j\omega\epsilon\epsilon_0} e^{-jkR} \left(\frac{1}{k^3 R^3} + j \frac{1}{k^2 R^2} \right), \\
\dot{E}_\theta &= -\frac{\dot{C}_1 k^3 \sin \theta}{\mu\mu_0 \cdot j\omega\epsilon\epsilon_0} e^{-jkR} \left(\frac{1}{k^3 R^3} + j \frac{1}{k^2 R^2} - \frac{1}{k R} \right), \\
\dot{C}_1 &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \dot{I} h.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее поля при $kR \gg 1$ или $R \gg \frac{1}{k}$, т.е. $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$. Это т.н. волновая зона или дальняя зона. При описании полей в дальней зоне мы пренебрегаем членами, содержащими $\frac{1}{k^2 R^2}$ и $\frac{1}{k^3 R^3}$ в сравнении с $\frac{1}{k R}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\dot{H}_\alpha &= j \frac{\dot{C}_1 k \sin \theta}{\mu\mu_0 R} e^{-jkR} = \frac{\dot{I} h k \sin \theta}{4\pi R} e^{-j(kR - \frac{\pi}{2})}, \\
\dot{E}_R &= 0,
\end{aligned}$$

$$\dot{E}_\theta = j \frac{\dot{C}_1 k^2 \sin \theta}{\mu \mu_0 \omega \epsilon \epsilon_0 R} e^{-jkR} = \frac{j h k^2 \sin \theta}{4 \pi R \omega \epsilon \epsilon_0} e^{-j(kR - \frac{\pi}{2})}.$$

Из полученных выражений видно, что амплитуда поля убывает, как $\frac{1}{R}$; электрическое и магнитное поля синфазны и перпендикулярны друг другу ($\vec{H}_\alpha \perp \vec{E}_\theta$).

Комплексный вектор Пойнтинга $\dot{P}_R = \frac{1}{2} \dot{E}_\theta \dot{H}_\alpha$ направлен по радиусу и имеет активную составляющую, характеризующую плотность потока активной мощности P , отличную от нуля. Это — плотность потока мощности излучения

$$P_\Sigma = \text{Re}[\dot{P}] = \frac{1}{2} \frac{\dot{I} \cdot \dot{I}^* h^2 k^3 \sin^2 \theta}{(4 \pi R)^2 \omega \epsilon \epsilon_0}.$$

Таким образом, в дальней (волновой) зоне остается заметным только излучение элемента тока. Поле излучения убывает как $\frac{1}{R}$, $P_\Sigma \propto \frac{1}{R^2}$. С другой стороны, $P_\Sigma \propto \frac{k^3}{\omega} = \frac{\omega^3}{v^3} \frac{1}{\omega} \propto \omega^2$ — при одном и том же токе в излучающей антенне мощность излучения растет $\propto \omega^2$, т.е. на коротких волнах требуется меньшая мощность для передачи сообщения на то же расстояние, чем на длинных волнах.

Рассмотрим поле излучения элемента тока подробнее. Перейдем к мгновенным значениям:

$$i = I \sin \omega t,$$

$$H_\alpha = \frac{I h k \sin \theta}{4 \pi R} \sin\left(\omega t - \frac{2 \pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I h \sin \theta}{2 \lambda R} \sin\left(\omega t - \frac{2 \pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I h k^2 \sin \theta}{4 \pi R \omega \epsilon \epsilon_0} \sin\left(\omega t - \frac{2 \pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I h \frac{2 \pi}{\lambda} \frac{\omega}{v} \sin \theta}{4 \pi R \omega \epsilon \epsilon_0} \sin\left(\omega t - \frac{2 \pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{I h \sin \theta}{2 \lambda R v \epsilon \epsilon_0} \sin\left(\omega t - \frac{2 \pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I h \sin \theta}{2 \lambda R} \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \sin\left(\omega t - \frac{2 \pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Отношение

$$\frac{E_\theta}{H_\alpha} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}$$

— это *характеристическое (волновое) сопротивление* свободного пространства. Для вакуума

$$Z_0 = \frac{E_\theta}{H_\alpha} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi [\text{Ом}] = 377 [\text{Ом}].$$

Из соотношения $\frac{E_\theta}{H_\alpha} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}$ следует, что $\frac{E_\theta^2}{H_\alpha^2} = \frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}$ и, значит, $\frac{\epsilon \epsilon_0 E_\theta^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 H_\alpha^2}{2}$.

В единице объема содержится одинаковое количество энергии электрического и магнитного поля. Вся удельная энергия

$$\omega = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{м}} = \epsilon \epsilon_0 E_\theta^2 = \mu \mu_0 H_\alpha^2.$$

Вектор Пойнтинга в любой момент времени равен

$$E_{\theta} H_{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} H_{\alpha}^2 = \frac{\mu\mu_0 H_{\alpha}^2}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}} = (\omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{м}}) v = p_{\Sigma}$$

и меняется $\propto \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. пульсирует с двойной частотой, а его среднее значение за период характеризует плотность потока активной мощности — мощности излучения.

Полная мощность излучения элемента тока

$$P_{\Sigma} = \oint_S p_{\Sigma} dS = \int_0^{\pi} \frac{I^2 h^2 k^3 \sin^2 \theta}{2(4\pi R)^2 \omega \epsilon \epsilon_0} 2\pi \cdot R \cdot R \cdot \sin \theta d\theta = \frac{I^2 h^2 k^3}{16\pi \omega \epsilon \epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = -\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = -\left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3}\right)_0^{\pi} = -\left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{I^2 h^2 k^3}{16\pi \omega \epsilon \epsilon_0} = \frac{I^2 h^2 (2\pi)^3 \lambda}{16\pi \lambda^3 2\pi \nu \epsilon \epsilon_0} = \frac{I^2 h^2 \pi \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}{4\lambda^2 \epsilon \epsilon_0} = \frac{I^2 h^2 120\pi^2}{4\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

$$P_{\Sigma} = \frac{I^2 h^2 120\pi^2}{4\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4}{3} = \frac{I^2}{2} 80\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{I^2}{2} r_{\Sigma},$$

r_{Σ} — т.н. сопротивление излучения элемента тока длиной $h \ll \lambda$, оно является параметром излучателя.

$$r_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} [\text{Ом}].$$

Мощность излучения $\propto \frac{1}{\lambda^2}$ и становится заметной лишь при достаточно высоких

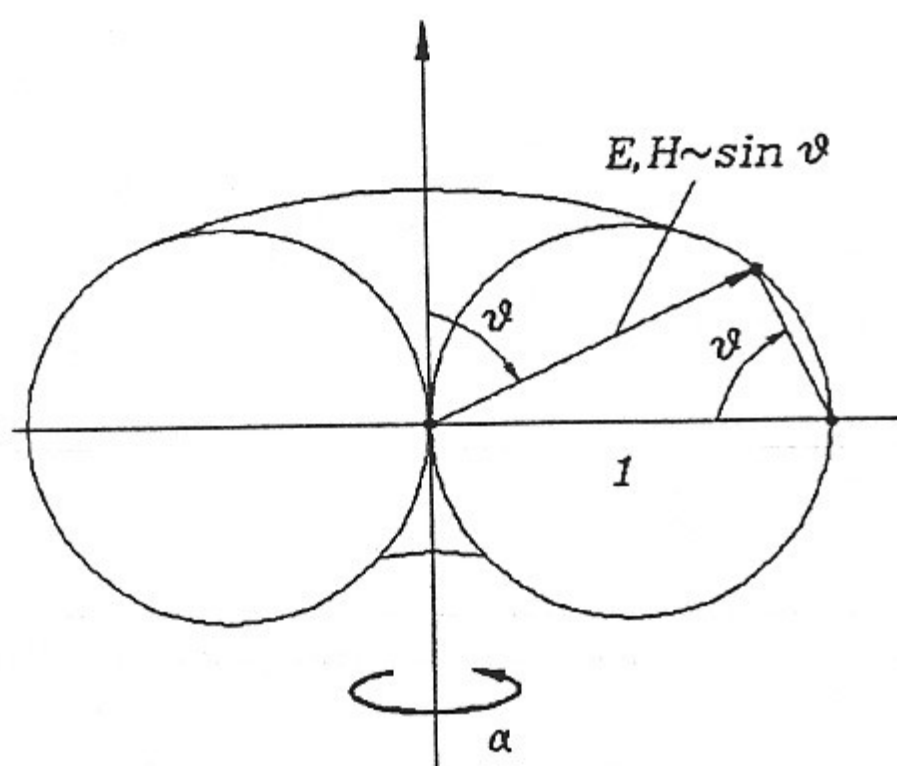


Рис. 6.3. Диаграмма направленности излучения диполя.

частотах (радиочастоты). Зависимость поля от направления (от угла θ) называется направленностью излучателя. Для элемента тока $E, H \propto \sin \theta$, и мы можем построить для него диаграмму направленности в плоскости меридиана, рис. 6.3.

Заметим, что речь до сих пор шла о дальней зоне, где выполняется условие $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$.

Рассмотрим теперь поля в ближней зоне.

$$R \ll \frac{\lambda}{2\pi} \text{ или } k \cdot R \ll 1, R \ll \frac{1}{k}.$$

Здесь можно положить $e^{-jkR} \rightarrow 1$ и пренебречь членами, содержащими $\frac{1}{kR}$ и $\frac{1}{k^2 R^2}$ в сравнении с $\frac{1}{k^3 R^3}$, и $\frac{1}{kR}$ в сравнении с $\frac{1}{k^2 R^2}$. При этом

$$\dot{H}_{\alpha} = j \frac{\dot{C}_1 \sin \theta}{\mu\mu_0 R^2} = \frac{j h \sin \theta}{4\pi R^2} j,$$

$$\dot{E}_R = \frac{2\dot{C}_1 \cos \theta}{\mu\mu_0 j\omega\epsilon\epsilon_0 R^3} = \frac{2\dot{I}h \cos \theta}{j\omega 4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3} = \frac{2\dot{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3},$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{\dot{C}_1 \sin \theta}{\mu\mu_0 j\omega\epsilon\epsilon_0 R^3} = \frac{\dot{p} \sin \theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3},$$

$$\dot{C}_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \dot{I}h, \quad \dot{I}h = \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} h = j\omega \dot{q} h = j\omega \dot{p}.$$

Мы видим, что выражение для $\dot{H}_\alpha$ аналогично выражению для поля элемента постоянного тока i длиной h . Поле $\dot{E}$ — это поле электрического диполя с переменными зарядами и дипольным моментом $\dot{p} = \frac{\dot{I}h}{j\omega}$. Таким образом, в ближней зоне поля совпадают с полями электростатического диполя и элемента стационарного тока. Сдвиг фаз между $\dot{E}$ и $\dot{H}$ равен 90° (j), т.е. комплексный вектор Пойнтинга будет чисто мнимым, и активная, в сравнении с реактивной, мощность $P = 0$ (мала), т.е. поля в ближней зоне определяются по тем же законам, что и стационарные поля, никакого запаздывания можно не учитывать. Конечно, излучаемая мощность проходит и сквозь ближнюю зону, но она относительно настолько мала, что мы ею пренебрегаем в сравнении с квадратами стационарных полей, создающими пульсирующие запасы энергии в виде реактивной мощности.

Таким образом, если поле элемента переменного тока рассматривать на расстояниях $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ (это условие называется *условием квазистационарности*), то запаздыванием полей можно пренебречь и рассчитывать их как поля стационарного тока и статического диполя. Это означает, что если все части электрической цепи переменного тока расположены близко друг от друга, т.е. не выходят за пределы зоны квазистационарности, то поля в элементах цепи можно рассчитывать как статические и стационарные, не учитывая запаздывание и пренебрегая эффектами излучения.

Линии передачи СВЧ

Характерная особенность диапазона СВЧ состоит в том, что размеры радиоустройств соизмеримы с длиной электромагнитной волны. Это значит, что в устройстве есть хотя бы один размер, сравнимый с длиной волны: $L \approx \lambda$, в отличие от радиотехнических и электротехнических цепей, где $L \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ (это условие называют условием квазистационарности), и оптики, где $L \gg \lambda$. Обычно к диапазону СВЧ относят волны длиной от десятков метров до десятых долей миллиметров. Для расчета устройств СВЧ нельзя напрямую использовать теорию цепей с сосредоточенными параметрами. Разумеется, любое СВЧ устройство можно рассчитать, используя уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями. Однако во многих случаях такой способ является весьма трудоемким. Оказывается, что в некоторых случаях и в СВЧ диапазоне возможно применение теории цепей.

Одномерная линия передачи. Уравнения линии и их решения

Рассмотрим случай, когда лишь один размер нашего устройства соизмерим с длиной волны, а остальные — много меньше λ . Такие устройства, для которых выполняются условия *поперечной квазистационарности*

$$L_x, L_y \ll \frac{\lambda}{2\pi}, \quad L_z \approx \lambda,$$

называются *одномерными линиями передачи*.

Рассмотрим малый отрезок dz нашей линии передачи (рис. 7.1).

$$dz \ll \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Вследствие малой длины для каждого такого отрезка можно пользоваться законами Кирхгофа, не принимая во внимание конечную скорость распространения электромагнитных волн в области с размерами L_x, L_y, dz .

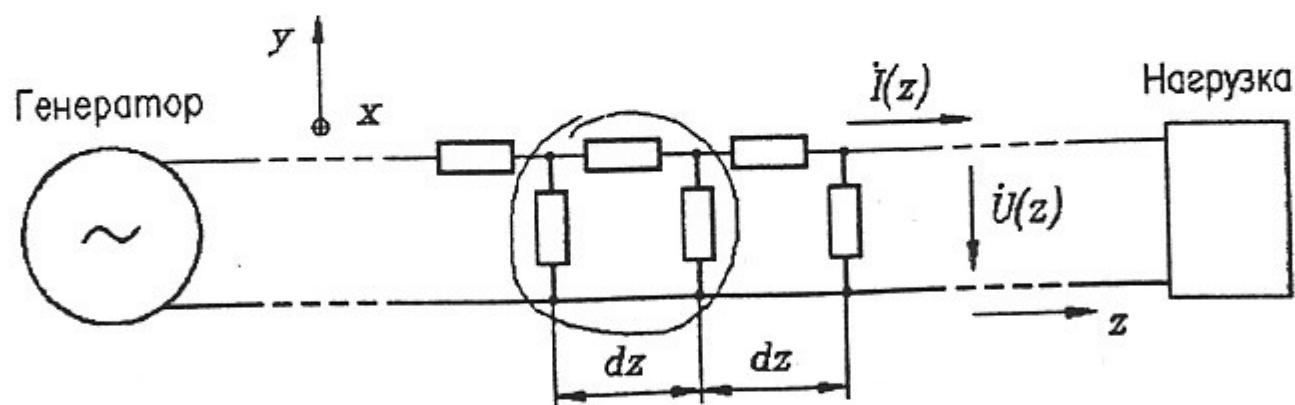


Рис. 7.1. Одномерная линия передачи.

Итак, пусть у нас имеется линия передачи, возбуждаемая генератором на частоте f . Ей соответствует круговая частота $\omega = 2\pi f$. Пусть линия нагружена на некоторое

сопротивление $\dot{Z}_1$. (Точка сверху обозначает комплексное число, а для величин, переменных во времени — комплексную амплитуду, комплексное сопряжение обозначается заменой точки — звездочкой над символом.) Элементарная ячейка линии длиной $dz \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ состоит из продольного сопротивления и поперечной проводимости, соединенных Г-образно, рис. 7.2.

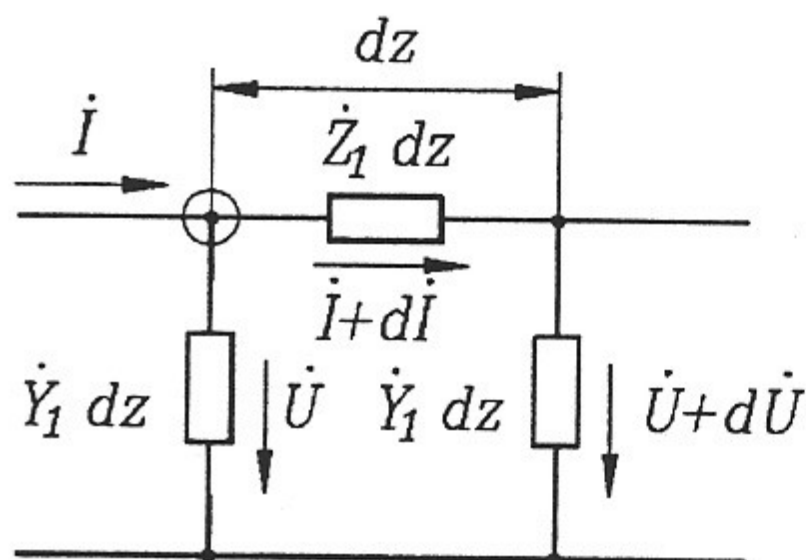


Рис. 7.2. Элементарная ячейка линии передачи.

Рассмотрим элементарную ячейку более подробно. Линия характеризуется погонным сопротивлением $\dot{Z}_1$ и погонной проводимостью $\dot{Y}_1$, т.е. сопротивлением и проводимостью на единицу длины. Размерность $\dot{Z}_1$ — $\left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}}\right]$, $\dot{Y}_1$ — $\left[\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}\right]$. Заметим, что мы говорим о

комплексных $\dot{Z}_1$ и $\dot{Y}_1$, т.е. рассматриваем общий случай.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\dot{U}(z) &= \dot{I}(z) \dot{Z}_1 dz + \dot{U}(z + dz), \\ \dot{I}(z) &= \dot{U}(z) \dot{Y}_1 dz + \dot{I}(z + dz).\end{aligned}$$

Заменим

$$\begin{aligned}\dot{U}(z + dz) &= \dot{U}(z) + d\dot{U}, \\ \dot{I}(z + dz) &= \dot{I}(z) + d\dot{I}.\end{aligned}$$

Полагая, что $dz \rightarrow 0$, запишем

$$\begin{aligned}d\dot{U} &= -\dot{I} \dot{Z}_1 dz, \\ d\dot{I} &= -\dot{U} \dot{Y}_1 dz.\end{aligned}$$

Первое соотношение описывает падение напряжения на сопротивлении $\dot{Z}_1 dz$, а второе — утечку тока через проводимость $\dot{Y}_1 dz$.

Перепишем полученные выражения в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{U}}{dz} &= -\dot{I} \dot{Z}_1, \\ \frac{d\dot{I}}{dz} &= -\dot{U} \dot{Y}_1.\end{aligned}$$

Продифференцируем эти выражения еще раз:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \dot{U}}{dz^2} &= -\frac{d\dot{I}}{dz} \dot{Z}_1, \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dz^2} &= -\frac{d\dot{U}}{dz} \dot{Y}_1.\end{aligned}$$

В результате, заменяя $\frac{d\dot{U}}{dz}$ и $\frac{d\dot{I}}{dz}$ на $-\dot{I}\dot{Z}_1$ и $-\dot{U}\dot{Y}_1$, соответственно, получим

$$\frac{d^2\dot{U}}{dz^2} - \dot{U}\dot{Z}_1\dot{Y}_1 = 0,$$

$$\frac{d^2\dot{I}}{dz^2} - \dot{I}\dot{Z}_1\dot{Y}_1 = 0.$$

Обозначим $\dot{Z}_1\dot{Y}_1 = \dot{\gamma}^2$. Тогда последние уравнения запишутся в виде

$$\frac{d^2\dot{U}}{dz^2} - \dot{\gamma}^2\dot{U} = 0,$$

$$\frac{d^2\dot{I}}{dz^2} - \dot{\gamma}^2\dot{I} = 0.$$

Мы получили частный случай телеграфных уравнений. Фактически, мы пришли к обыкновенным дифференциальным уравнениям с нулевой правой частью. На самом деле переход от телеграфных уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям здесь произошел благодаря использованию комплексных амплитуд. Если бы мы записали уравнения Кирхгофа для мгновенных значений, то неизбежно получили бы производную $\frac{d}{dt}$.

Рассмотрим первое из полученных уравнений. Частные решения этого уравнения имеют вид

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_0 e^{\pm \dot{\gamma} z},$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. Эти решения описывают волны напряжения, распространяющиеся вдоль линии. $\dot{\gamma}$ — постоянная распространения, она является одним из характеристических параметров линии передачи.

Перейдем к мгновенным значениям.

$$u(z, t) = \text{Im} \left\{ \dot{U}_0 e^{\pm \dot{\gamma} z} e^{j\omega t} \right\},$$

здесь ω — круговая частота колебаний питающего генератора.

$\dot{\gamma}$ представим в виде

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta,$$

здесь α — постоянная затухания, β — фазовая постоянная.

В общем случае

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad \dot{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1.$$

В этих выражениях R_1 — погонное сопротивление линии;

L_1 — погонная индуктивность линии;

G_1 — погонная проводимость линии;

C_1 — погонная емкость линии.

Соответственно для $\dot{\gamma}$ получим

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}.$$

Пусть в линии отсутствуют потери, т.е. $R_1 = 0$, $G_1 = 0$. Тогда

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 = \sqrt{j\omega L_1 j\omega C_1} = j\omega \sqrt{L_1 C_1},$$

то есть $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0 = \omega \sqrt{L_1 C_1}$. Для мгновенных значений напряжения в линии без потерь получим

$$u(z, t) = \text{Im} \left\{ \dot{U}_0 e^{\pm j\beta_0 z + j\omega t} \right\} = U_0 \sin(\omega t \pm \beta_0 z).$$

Знак "—" соответствует волне напряжения, бегущей в сторону возрастающих значений z . Будем наблюдать за тем, как движется точка с какой-нибудь определенной фазой, например, $\frac{\pi}{2}$ (что соответствует гребню волны).

$$\omega t - \beta_0 z = \text{const} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\omega dt - \beta_0 dz = 0.$$

И, следовательно,

$$\frac{dz}{dt} \equiv v_\phi = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

v_ϕ — фазовая скорость волны. Она не зависит от частоты и, следовательно, в линии без потерь отсутствует дисперсия.

Итак, мы получили частные решения для линии без потерь в виде

$$\begin{aligned} u_{\text{пад}}(z, t) &= U_0 \sin(\omega t - \beta_0 z) \quad \text{— прямая (падающая) волна,} \\ u_{\text{отр}}(z, t) &= U_0 \sin(\omega t + \beta_0 z) \quad \text{— обратная (отраженная) волна.} \end{aligned}$$

Для комплексных амплитуд решения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пад}}(z) &= \dot{U}_0 e^{-j\beta_0 z}, \\ \dot{U}_{\text{отр}}(z) &= \dot{U}_0 e^{j\beta_0 z}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь общее решение, представляющее собой суперпозицию двух волн — падающей и отраженной. В общем случае, т.е. для линии с потерями,

$$\dot{U}(z) = \dot{A} e^{-\dot{\gamma}_0 z} + \dot{B} e^{\dot{\gamma}_0 z}.$$

Постоянные $\dot{A}$ и $\dot{B}$ определяются из условий на концах линии. Заметим, что т.к.

$$\dot{I} = -\frac{1}{\dot{Z}_1} \frac{d\dot{U}}{dz}, \text{ то}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{Z}_1} \left(\dot{A} e^{-\dot{\gamma}_0 z} - \dot{B} e^{\dot{\gamma}_0 z} \right).$$

Очевидно, что отраженная волна в линии отсутствует ($\dot{B} = 0$), если линия имеет бесконечную длину. При этом

$$\frac{\dot{U}(z)}{\dot{I}(z)} = \frac{\dot{A} e^{-\dot{\gamma}_0 z} \dot{Z}_1}{\dot{A} e^{-\dot{\gamma}_0 z} \dot{\gamma}_0} = \frac{\dot{Z}_1}{\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}} = \dot{Z}_0$$

— отношение напряжения к току в любой точке линии одинаково; это отношение называется *характеристическим сопротивлением*. Другими словами, $\dot{Z}_0$ — это такое сопротивление, которое надо включить на конце линии в качестве нагрузки, чтобы в линии не было отраженной волны. Такая линия называется *согласованной* (или *нагруженной на согласованную нагрузку*).

Итак, в общем случае

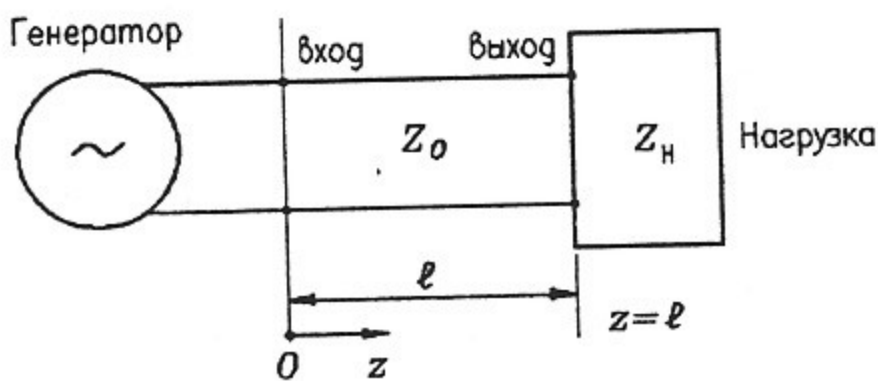
$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}.$$

Для линии без потерь

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

$\dot{Z}_0$ — это второй характеристический параметр линии передачи. Обычно для характеристики линии используют именно $\dot{Z}_0$ и $\dot{\gamma}_0$, а не $\dot{Z}_1$ и $\dot{Y}_1$.

Рассмотрим теперь случай, когда линия



нагружена на произвольную нагрузку $\dot{Z}_н$ (рис. 7.3). Очевидно, что в данном случае распределение напряжения и тока зависит от величины нагрузки. В линии появляется отраженная волна. Пусть рассматривается

Рис. 7.3. Линия, нагруженная на нагрузку Z_n . линия без потерь ($\dot{Z}_0 = Z_0$).

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_{\text{пад}}(z) + \dot{U}_{\text{отр}}(z) = \dot{U}_{\text{пад}}(z) \left[1 + \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(z)}{\dot{U}_{\text{пад}}(z)} \right],$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_{\text{пад}}(z) + \dot{I}_{\text{отр}}(z) = \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_{\text{пад}}(z) - \dot{U}_{\text{отр}}(z)) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(z)}{Z_0} \left[1 - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(z)}{\dot{U}_{\text{пад}}(z)} \right].$$

Рассмотрим напряжение и ток в линии в месте подключения нагрузки, $z = l$.

$$\dot{U}_н = \dot{U}(l) = \dot{U}_{\text{пад}}(l) \left[1 + \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(l)}{\dot{U}_{\text{пад}}(l)} \right] = \dot{U}_{\text{пад.н}} [1 + \dot{\Gamma}],$$

$$\dot{I}_н = \dot{I}(l) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(l)}{Z_0} \left[1 - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(l)}{\dot{U}_{\text{пад}}(l)} \right] = \frac{\dot{U}_{\text{пад.н}}}{Z_0} [1 - \dot{\Gamma}].$$

Здесь $\dot{\Gamma} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(l)}{\dot{U}_{\text{пад}}(l)} = \frac{\dot{U}_{\text{отр.н}}}{\dot{U}_{\text{пад.н}}}$ — коэффициент отражения от нагрузки. Разделив первое

уравнение на второе, получим

$$\dot{Z}_H = \frac{\dot{U}_H}{\dot{I}_H} = Z_0 \frac{1 + \dot{\Gamma}}{1 - \dot{\Gamma}}.$$

Отсюда легко получить выражение для $\dot{\Gamma}$:

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{Z}_H - Z_0}{\dot{Z}_H + Z_0} = \frac{\frac{\dot{Z}_H}{Z_0} - 1}{\frac{\dot{Z}_H}{Z_0} + 1}.$$

Таким образом, $\dot{\Gamma}$ — это величина, характеризующая нагрузку линии. В технике СВЧ очень часто $\dot{\Gamma}$ используется вместо $\dot{Z}_H$.

Вычислим $\dot{\Gamma}$ для некоторых характерных нагрузок.

1. Линия, закороченная на конце.

$$\dot{Z}_H = 0, \quad \dot{\Gamma} = -1.$$

2. Разомкнутая линия.

$$\dot{Z}_H = \infty \quad (\dot{Z}_H \gg Z_0), \quad \dot{\Gamma} = 1.$$

3. Согласованная нагрузка.

$$\dot{Z}_H = Z_0, \quad \dot{\Gamma} = 0.$$

4. Чисто реактивная нагрузка.

$$\dot{Z}_H = jX_H, \quad |\dot{\Gamma}| = 1.$$

Заметим, что во всех остальных случаях $0 < |\dot{\Gamma}| < 1$.

Модуль коэффициента отражения может быть найден опытным путем по распределению напряжения или тока вдоль линии (мы по-прежнему говорим о линии без потерь).

$$\dot{U}(z) = \dot{A} e^{-j\beta_0 z} + \dot{B} e^{j\beta_0 z} = \dot{A} \left(1 + \frac{\dot{B}}{\dot{A}} e^{j2\beta_0 z} \right) e^{-j\beta_0 z}.$$

Величина $\dot{A} \left(1 + \frac{\dot{B}}{\dot{A}} e^{j2\beta_0 z} \right)$ является комплексной амплитудой напряжения в линии.

Двигаясь вдоль линии мы будем наблюдать изменение амплитуды в пределах от $U_{\min} = |\dot{A}| - |\dot{B}|$ до $U_{\max} = |\dot{A}| + |\dot{B}|$. Учитывая, что для линии без потерь

$$|\dot{\Gamma}| = \frac{|\dot{B}|}{|\dot{A}|},$$

запишем

$$\frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|\dot{A}| + |\dot{B}|}{|\dot{A}| - |\dot{B}|} = \frac{1 + |\dot{\Gamma}|}{1 - |\dot{\Gamma}|} = \rho.$$

Величина ρ называется коэффициентом стоячей волны напряжения или сокращенно КСВН.

При отсутствии отражений в линии ($\dot{\Gamma} = 0$) $\rho = 1$, при полном отражении ($|\dot{\Gamma}| = 1$) $\rho = \infty$. Таким образом, пределы изменения ρ есть $1 \div +\infty$.

Рассмотрим распределение напряжения в линии для случая полного отражения ($|\dot{A}| = |\dot{B}|$, $|\dot{\Gamma}| = 1$, $\rho = \infty$). Пусть для определенности $\dot{A} = A$. Комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}(z) = Ae^{-j\beta_0 z} + Ae^{j\beta_0 z} = 2A \frac{e^{j\beta_0 z} + e^{-j\beta_0 z}}{2} = 2A \cos \beta_0 z.$$

Мгновенное значение напряжения

$$u(z, t) = \text{Im} \left\{ 2A \cos \beta_0 z e^{j\omega t} \right\} = 2A \cos \beta_0 z \cdot \sin \omega t = 2A \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right) \sin \omega t.$$

Полученное выражение описывает чисто стоячую волну напряжения.

При измерениях СВЧ сигнал обычно детектируется. Сигнал на выходе детектора представляет собой огибающую СВЧ сигнала. Для рассмотренного случая полного отражения форма продетектированного сигнала показана на рис. 7.4.

В общем случае произвольной нагрузки картина будет несколько иной — рис. 7.5.

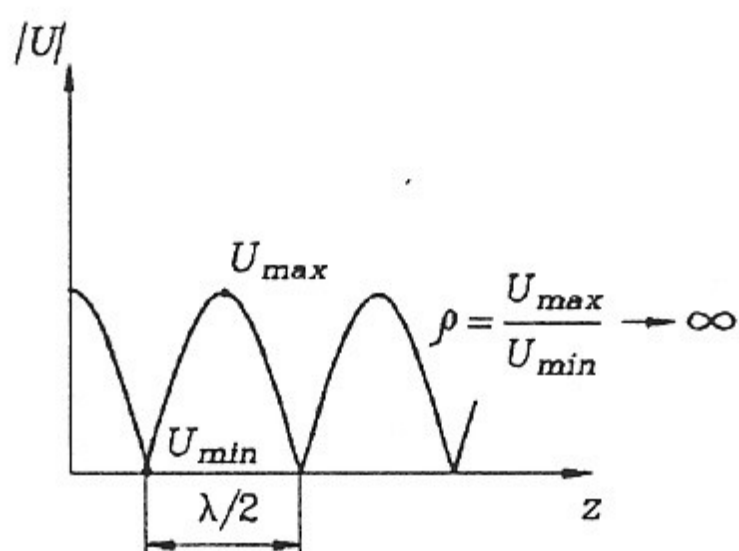


Рис. 7.4 Огибающая СВЧ сигнала при полном отражении.

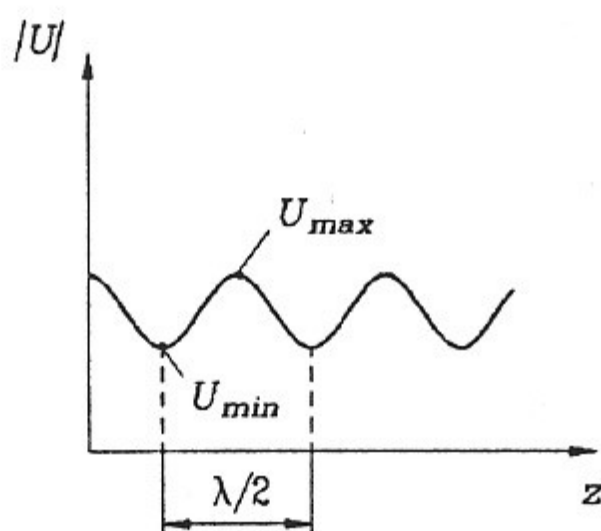


Рис. 7.5. Огибающая СВЧ сигнала при неполном отражении.

Для определения величины КСВН надо найти $U_{\min}$ и $U_{\max}$. После этого КСВН рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}.$$

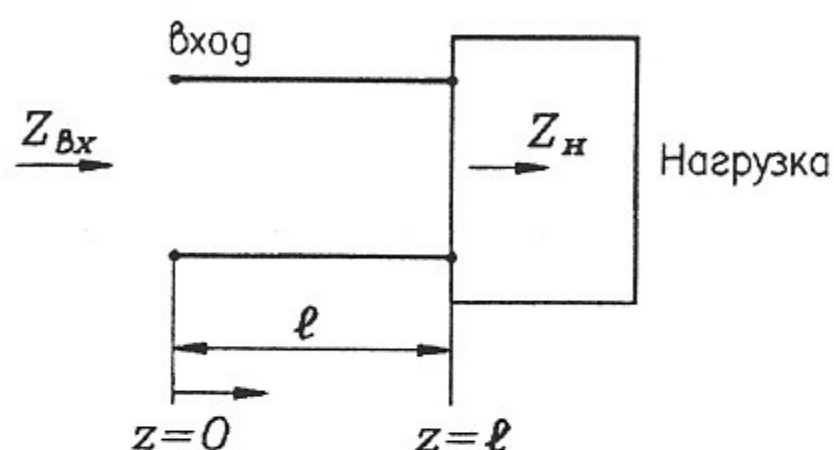
Зная величину КСВН, легко определить значение $|\dot{\Gamma}|$:

$$|\dot{\Gamma}| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}.$$

Трансформационные свойства линий

Найдем входное сопротивление $\dot{Z}_{\text{вх}}$ линии длиной ℓ , нагруженной на произвольную нагрузку $\dot{Z}_n$ (рис. 7.6). Сразу заметим, что оно может существенно отличаться от сопротивления самой нагрузки вследствие того, что линия является трансформатором сопротивлений. Покажем это.

В плоскости подключения нагрузки



$$\begin{aligned} \dot{U}(\ell) &= \dot{A} e^{-\dot{\gamma}_0 \ell} + \dot{B} e^{\dot{\gamma}_0 \ell}, \\ \dot{I}(\ell) &= \frac{1}{\dot{Z}_0} \left(\dot{A} e^{-\dot{\gamma}_0 \ell} - \dot{B} e^{\dot{\gamma}_0 \ell} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\dot{Z}_n = \frac{\dot{U}(\ell)}{\dot{I}(\ell)}.$$

Рис. 7.6. К расчету входного сопротивления нагруженной линии.

В начале линии

$$\dot{U}(0) = \dot{A} + \dot{B}, \quad \dot{I}(0) = \frac{1}{\dot{Z}_0} (\dot{A} - \dot{B}) \quad \text{и} \quad \dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)}.$$

Таким образом, найдя $\dot{A}$ и $\dot{B}$ из первой пары уравнений и подставив их во вторую, получим связь между $\dot{Z}_{\text{вх}}$ и $\dot{Z}_n$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\dot{U}(\ell) + \dot{I}(\ell) \dot{Z}_0}{2} e^{\dot{\gamma}_0 \ell}, \\ \dot{B} &= \frac{\dot{U}(\ell) - \dot{I}(\ell) \dot{Z}_0}{2} e^{-\dot{\gamma}_0 \ell}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(\ell) \text{ch}(\dot{\gamma}_0 \ell) + \dot{I}(\ell) \dot{Z}_0 \text{sh}(\dot{\gamma}_0 \ell), \\ \dot{I}(0) &= \frac{1}{\dot{Z}_0} \dot{U}(\ell) \text{sh}(\dot{\gamma}_0 \ell) + \dot{I}(\ell) \text{ch}(\dot{\gamma}_0 \ell). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{Z}_n + \dot{Z}_0 \text{th}(\dot{\gamma}_0 \ell)}{\frac{\dot{Z}_n}{\dot{Z}_0} \text{th}(\dot{\gamma}_0 \ell) + 1} = \dot{Z}_0 \frac{\dot{Z}_n + \dot{Z}_0 \text{th}(\dot{\gamma}_0 \ell)}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_n \text{th}(\dot{\gamma}_0 \ell)}.$$

Для линии без потерь $\dot{\gamma}_0 \ell = j\beta_0 \ell = j \frac{2\pi \ell}{\lambda}$ и выражение для $\dot{Z}_{\text{вх}}$ приобретает вид

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_0 \frac{\dot{Z}_n + j\dot{Z}_0 \text{tg} \frac{2\pi \ell}{\lambda}}{\dot{Z}_0 + j\dot{Z}_n \text{tg} \frac{2\pi \ell}{\lambda}}.$$

Рассмотрим некоторые важные частные случаи трансформации сопротивления.

1. Короткозамкнутая линия длиной ℓ , рис. 7.7.

$$\dot{Z}_n = 0, \quad \dot{Z}_{\text{вх}} = j\dot{Z}_0 \text{tg} \frac{2\pi \ell}{\lambda}.$$

При $\frac{n\lambda}{2} < \ell < \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ $\dot{Z}_{\text{вх}}$ имеет индуктивный характер,

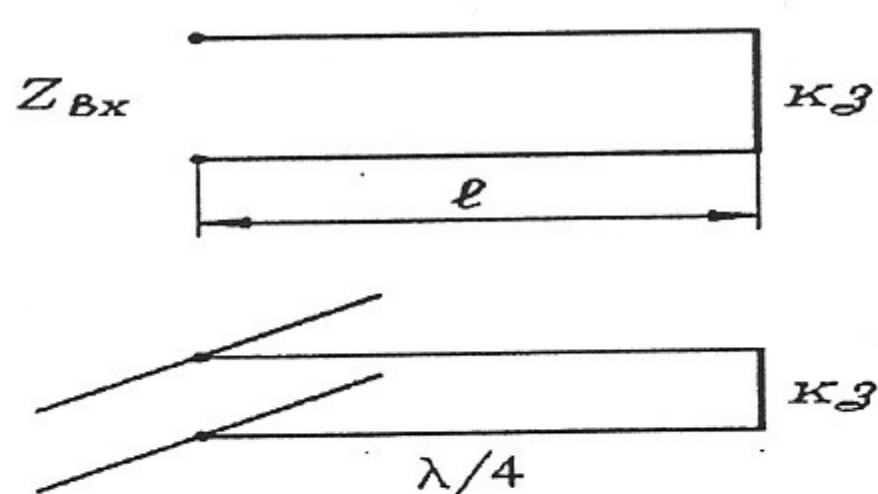


Рис. 7.7. Короткозамкнутая линия.
Металлический изолятор.

при $\frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{n+1}{2}\lambda$ $\dot{Z}_{\text{вх}}$ имеет емкостный характер,
при $\ell = \frac{2n+1}{4}\lambda$ $\dot{Z}_{\text{вх}} = \infty$ (закороченный четвертьволновый отрезок линии представляет собой "металлический" изолятор).
 n принимает значения 0, 1, 2, ...

2. Разомкнутая линия длиной ℓ , рис. 7.8.

$$\dot{Z}_{\text{н}} = \infty \quad (\dot{Z}_{\text{н}} \gg Z_0), \quad \dot{Z}_{\text{вх}} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \frac{2\pi\ell}{\lambda}.$$

При $\frac{n\lambda}{2} < \ell < \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ $\dot{Z}_{\text{вх}}$ имеет емкостный характер,

при $\frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{n+1}{2}\lambda$ $\dot{Z}_{\text{вх}}$ имеет индуктивный характер,

при $\ell = \frac{2n+1}{4}\lambda$ $\dot{Z}_{\text{вх}} = 0$ (четвертьволновый отрезок линии преобразует ХХ в КЗ).

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Отрезок линии длиной $\ell = \frac{\lambda}{2}$.

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_{\text{н}}.$$

Очевидно, что то же самое происходит и при длине линии $\ell = n\frac{\lambda}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. То есть через $\frac{\lambda}{2}$ сопротивление нагрузки трансформируется само в себя.

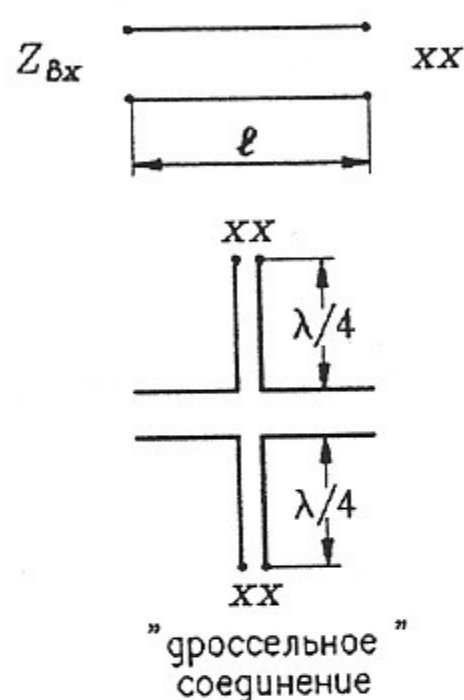


Рис. 7.8. Линия, разомкнутая на конце.

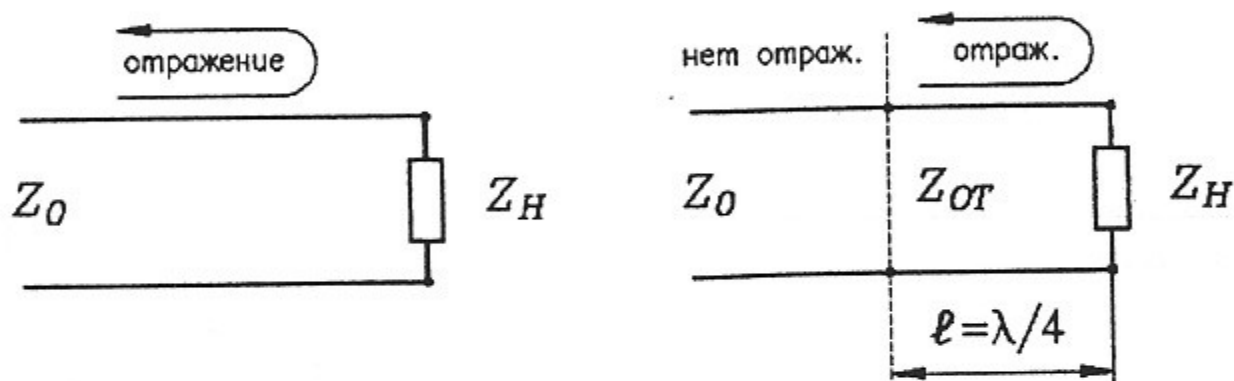


Рис. 7.9. Четвертьволновый трансформатор.

4. Отрезок линии длиной $\ell = \frac{\lambda}{4}$ — четвертьволновый трансформатор, рис. 7.9.

$$\text{При } \ell = \frac{\lambda}{4} \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi\ell}{\lambda} \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{Z_0^2}{\dot{Z}_{\text{н}}}.$$

линии, выраженных в относительных единицах. Радиус такой окружности очевидно всегда ≤ 1 , т.к. $|\dot{\Gamma}|$ не может быть > 1 . Таким образом, любые возможные значения нормированных значений тока и напряжения в линии расположены в пределах единичной окружности с центром в точке $(1 + j0)$. Заметим, что полный оборот вектора $|\dot{\Gamma}|e^{j(\varphi - 2\beta_0 z')}$ происходит при перемещении вдоль линии на расстояние $z' = \frac{\lambda}{2}$.

Действительно, поскольку фазовая постоянная $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, то $2\beta_0 \cdot \frac{\lambda}{2} = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = 2\pi$.

Рассмотрим векторную диаграмму подробнее. Модули напряжения и тока периодически меняются вдоль линии, образуя стоячую волну. На векторной диаграмме точка А соответствует минимумам тока и напряжения, точка В — максимумам.

Отметим следующие важные свойства стоячих волн:

- Расстояние вдоль линии между максимумами стоячей волны (или между ее минимумами) составляет $\frac{\lambda}{2}$.
- Минимумы тока и напряжения сдвинуты друг относительно друга на $\frac{\lambda}{4}$. То есть в точках максимума стоячей волны напряжения имеется минимум стоячей волны тока и наоборот.
- В максимумах и минимумах стоячей волны ток и напряжение синфазны, т.е. входное сопротивление линии в этих точках имеет чисто активный характер.
- Вообще говоря, каждой точке в пределах области большого круга на диаграмме сопротивлений соответствует вполне определенное значение входного сопротивления в данном сечении линии.
- Точка $(1 + j0)$ соответствует случаю $|\dot{\Gamma}| = 0$, т.е. режиму согласованной нагрузки.
- Точка $(2 + j0)$ характеризуется синфазным сложением падающей и отраженной волн напряжения при $|\dot{\Gamma}| = 1$, т.е. это режим холостого хода.
- В начале координат $(0 + j0)$ вектора напряжения падающей и отраженной волн противофазны при $|\dot{\Gamma}| = 1$, а ток максимален. Это соответствует режиму КЗ.
- Прямая, соединяющая начало координат $(0 + j0)$ и точку $(2 + j0)$, т.е. точки КЗ и ХХ, является геометрическим местом точек, где ток и напряжение синфазны, т.е. геометрическим местом чисто активных входных сопротивлений. Причем на отрезке $[0 + j0; 1 + j0]$ располагаются входные сопротивления в минимумах стоячей волны напряжения, а на отрезке $[1 + j0; 2 + j0]$ — входные сопротивления в максимумах стоячей волны напряжения. Очевидно, что

$$R_{\min} = \frac{|\dot{U}|_{\min}}{|\dot{I}|_{\max}}, \quad R_{\max} = \frac{|\dot{U}|_{\max}}{|\dot{I}|_{\min}},$$

но

$$|\dot{U}|_{\min} = |\dot{U}|_{\text{пад}} - |\dot{U}|_{\text{отр}}, \quad |\dot{I}|_{\min} = \frac{|\dot{U}|_{\text{пад}}}{Z_0} - \frac{|\dot{U}|_{\text{отр}}}{Z_0},$$

$$|\dot{U}|_{\max} = |\dot{U}|_{\text{пад}} + |\dot{U}|_{\text{отр}}, \quad |\dot{I}|_{\max} = \frac{|\dot{U}|_{\text{пад}}}{Z_0} + \frac{|\dot{U}|_{\text{отр}}}{Z_0}$$

и, значит

$$R_{\min} = \frac{Z_0}{\rho}, \quad R_{\max} = Z_0 \rho.$$

- Большая окружность единичного радиуса с центром в точке $(1 + j0)$ соответствует случаю $|\dot{\Gamma}| = 1$, т.е. соответствует чисто реактивным входным сопротивлениям. Заметим, что верхняя полуокружность соответствует положительным реактивностям, т.е. индуктивным сопротивлениям, а нижняя — отрицательным (емкостным) сопротивлениям. Сдвиг фаз между током и напряжением в точках большой окружности составляет 90° .
- Окружности с центром в точке $(1 + j0)$ являются линиями постоянного модуля коэффициента отражения или, что то же самое, постоянного КСВН.

Круговая диаграмма

Теперь перейдем собственно к построению круговой диаграммы полных сопротивлений, или т.н. диаграммы Смита, рис. 7.11. Нанесем на комплексной плоскости большого круга линии постоянных входных активных сопротивлений $R = \text{const}$ и постоянных входных реактивных сопротивлений $X = \text{const}$. Сначала перепишем выражение для сопротивления $\dot{Z} = R + jX$ в нормированном виде

$$\frac{\dot{Z}}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + j \frac{X}{Z_0}.$$

Нормированные на Z_0 величины полного, активного и реактивного сопротивлений будем обозначать знаком " $\sim$ ".

$$\dot{\tilde{Z}} = \tilde{R} + j\tilde{X}.$$

Тогда, рассматривая $\dot{\tilde{Z}}$ как нагрузку линии, получим

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{\tilde{Z}} - 1}{\dot{\tilde{Z}} + 1} = \frac{\tilde{R} - 1 + j\tilde{X}}{\tilde{R} + 1 + j\tilde{X}}.$$

Выделим отсюда действительную и мнимую части

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' + j\Gamma'' = \frac{\tilde{R}^2 - 1 + \tilde{X}^2}{(\tilde{R} + 1)^2 + \tilde{X}^2} + j \frac{2\tilde{X}}{(\tilde{R} + 1)^2 + \tilde{X}^2}.$$

Выразим $\tilde{R}$ и $\tilde{X}$ через Γ' и Γ'' . Опуская промежуточные преобразования, запишем сразу результат

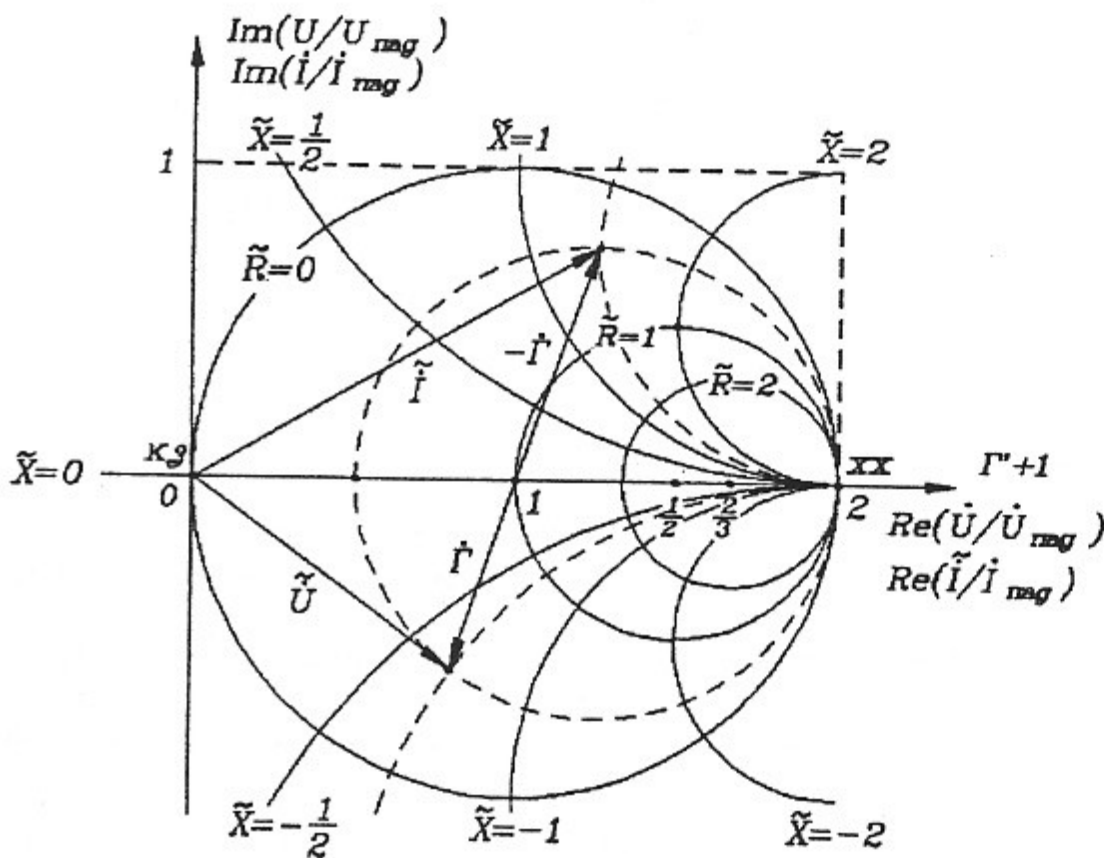


Рис. 7.11. Построение диаграммы Смита.

$$\left(\Gamma' - \frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+1}\right)^2 + (\Gamma'')^2 = \frac{1}{(\tilde{R}+1)^2},$$

$$(\Gamma' - 1)^2 + \left(\Gamma'' - \frac{1}{\tilde{X}}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{X}^2}.$$

Полученные выражения являются уравнениями окружностей на комплексной плоскости $(\Gamma', j\Gamma'')$. На плоскости нормированных напряжений и токов (рис. 7.11) координаты $\Gamma' + j\Gamma''$ следует отсчитывать от точки $(1+j0)$. Плоскость комплексного коэффициента отражения $(\Gamma', j\Gamma'')$ получается из плоскости нормированных напряжений и токов переносом начала координат на +1 в направлении действительной оси (рис. 7.12а). В первом уравнении параметром является $\tilde{R}$, во втором — $\tilde{X}$. Окружность $\tilde{R} = \text{const}$ имеет центр в точке $\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+1} + j0\right)$ и радиус $\frac{1}{\tilde{R}+1}$. Окружность $\tilde{X} = \text{const}$ имеет центр в точке $\left(1 + j\frac{1}{\tilde{X}}\right)$ и радиус $\frac{1}{\tilde{X}}$. Эти окружности взаимно

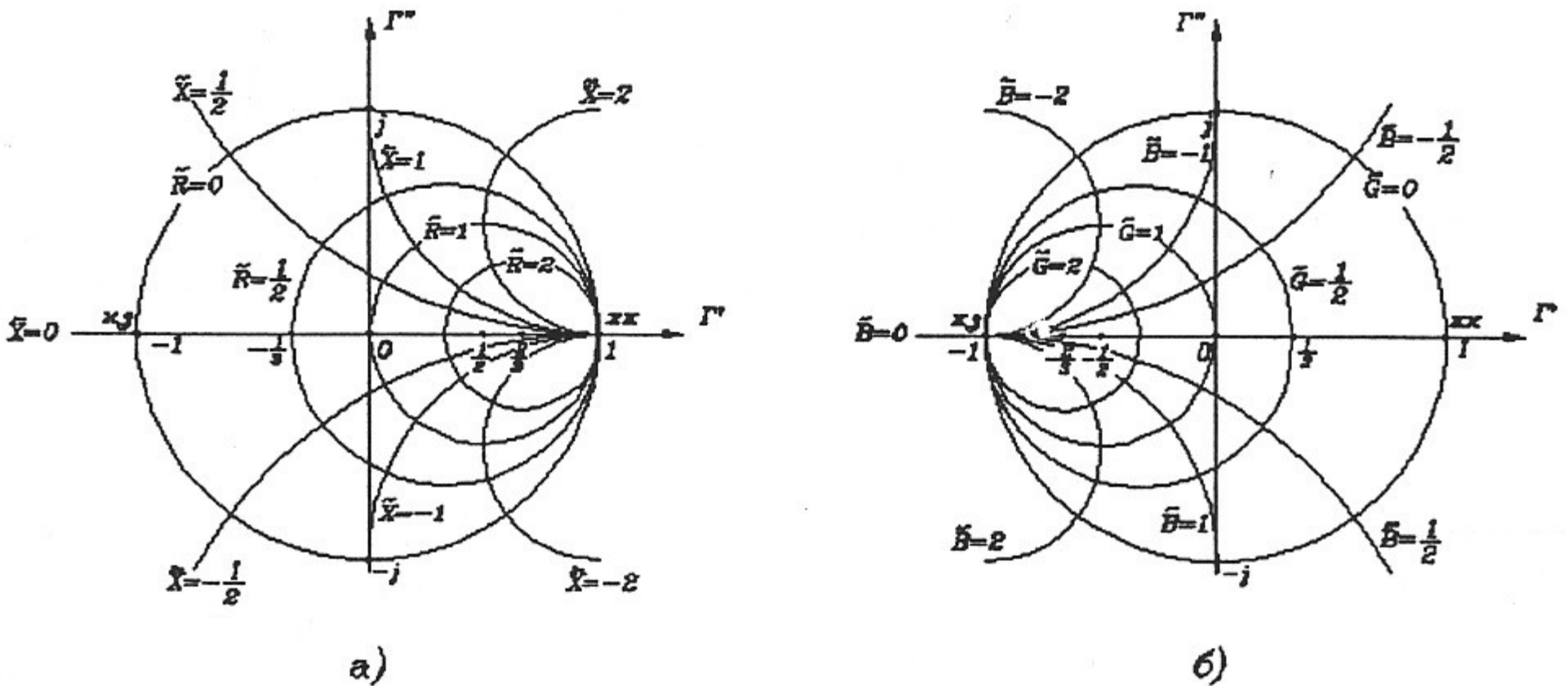


Рис. 7.12. Круговые диаграммы сопротивления и проводимости.

ортогональны. Действительно, если рассмотреть точку пересечения двух окружностей $\tilde{R} = \text{const}$ и $\tilde{X} = \text{const}$, то расстояние от этой точки до центра окружности $\tilde{R} = \text{const}$, очевидно, равно радиусу этой окружности, а именно $\frac{1}{\tilde{R}+1}$; расстояние от точки пересечения окружностей до центра окружности $\tilde{X} = \text{const}$ соответственно равно $\frac{1}{\tilde{X}}$.

Расстояние же между центрами окружностей равно

$$\sqrt{\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+1} - 1\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{\tilde{X}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(\tilde{R}+1)^2} + \frac{1}{\tilde{X}^2}},$$

т.е. точка пересечения окружностей постоянного $\tilde{R}$ и постоянного $\tilde{X}$ образует вместе с центрами этих окружностей прямоугольный треугольник. А это и означает, что окружности взаимно ортогональны.

Окружности $\tilde{R} = \text{const}$ имеют одну общую касательную в точке $XX (1 + j0)$, перпендикулярную действительной оси. Центры окружностей $\tilde{R} = \text{const}$ лежат на действительной оси на отрезке $[0 + j0, 1 + j0]$.

Центры окружностей $\tilde{X} = \text{const}$ лежат на прямой, перпендикулярной действительной оси и также проходящей через точку XX .

Сетку окружностей $\rho = \text{const}$ на диаграмме обычно не показывают. Заметим однако, что окружности $\rho = \text{const}$ пересекают действительную ось в точках, через которые проходят окружности $\tilde{R} = \text{const}$, причем в относительных единицах $\rho = \tilde{R}$ или $\rho = \frac{1}{\tilde{R}}$.

Как мы уже говорили, движению вдоль линии передачи на круговой диаграмме соответствует движение по дуге постоянного радиуса вокруг центра большой окружности. За начало отсчета углов обычно принимают точку КЗ, т.е. минимум стоячей волны напряжения. Шкалу углов наносят с внешней стороны большой окружности, причем углы выражают в единицах $\frac{\ell}{\lambda}$. Движению от нагрузки к генератору соответствует поворот по часовой стрелке, от генератора к нагрузке — против. При пользовании круговой диаграммой во избежание ошибок всегда следует иметь ввиду векторную диаграмму токов и напряжений в линии, с которой мы и начали построение круговой диаграммы.

Плоскость комплексного коэффициента отражения $\dot{\Gamma}$ получена в результате конформного преобразования $\dot{\Gamma} = \frac{\dot{Z} - 1}{\dot{Z} + 1}$ плоскости нормированного комплексного сопротивления $\dot{Z} = \tilde{R} + j\tilde{X}$. Аналогично можно рассмотреть нормированную проводимость линии $\dot{Y} = \frac{\dot{Y}}{Y_0} = \tilde{G} + j\tilde{B}$, где $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ — характеристическая проводимость линии, $\tilde{G} = \frac{G}{Y_0}$, $\tilde{B} = \frac{B}{Y_0}$ — нормированные активная и реактивная части полной проводимости.

Поскольку $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$, нетрудно показать, что $\tilde{G} = \frac{\tilde{R}}{\tilde{R}^2 + \tilde{X}^2}$, $\tilde{B} = -\frac{\tilde{X}}{\tilde{R}^2 + \tilde{X}^2}$.

Если в уравнении для $\dot{\Gamma}$ сделать замену $\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}}$, то получим конформное

отображение $\dot{\Gamma} = \frac{1 - \dot{Y}}{1 + \dot{Y}}$ плоскости нормированной комплексной проводимости на плоскость коэффициента отражения.

Построение линий постоянных значений $\tilde{G}$ и $\tilde{B}$ делается аналогично тому, как это сделано выше для линий постоянных $\tilde{R}$ и $\tilde{X}$. Результат представлен на рис. 7.126.

Диаграмма проводимостей получается из диаграммы сопротивлений поворотом вокруг центра на 180° при сохранении положения осей Γ' и $j\Gamma''$. Таким образом,

одна и та же сетка диаграммы может быть использована как для изображения полных нормированных сопротивлений, так и для изображения полных нормированных проводимостей.

Рассмотрим несколько примеров практического использования круговой диаграммы.

1. Пусть на конце линии с волновым сопротивлением Z_0 [Ом] включена нагрузка с сопротивлением $\dot{Z}_H = R_H + jX_H$ [Ом]. Требуется найти КСВН.

Решение.

Прежде всего переходим к нормированным сопротивлениям

$$\dot{\tilde{Z}}_H = \tilde{R}_H + j\tilde{X}_H = \frac{R_H}{Z_0} + j\frac{X_H}{Z_0}.$$

Затем на круговой диаграмме находим окружности, соответствующие $\tilde{R}_H$ и $\tilde{X}_H$. Их пересечение дает точку, соответствующую $\dot{\tilde{Z}}_H$ (рис. 7.13). Расстояние от этой точки до центра круговой диаграммы равно модулю коэффициента отражения от нагрузки. Зная $|\dot{\Gamma}|$, легко вычислить КСВН. Но обычно и этого не приходится делать, т.к. круговая диаграмма снабжается

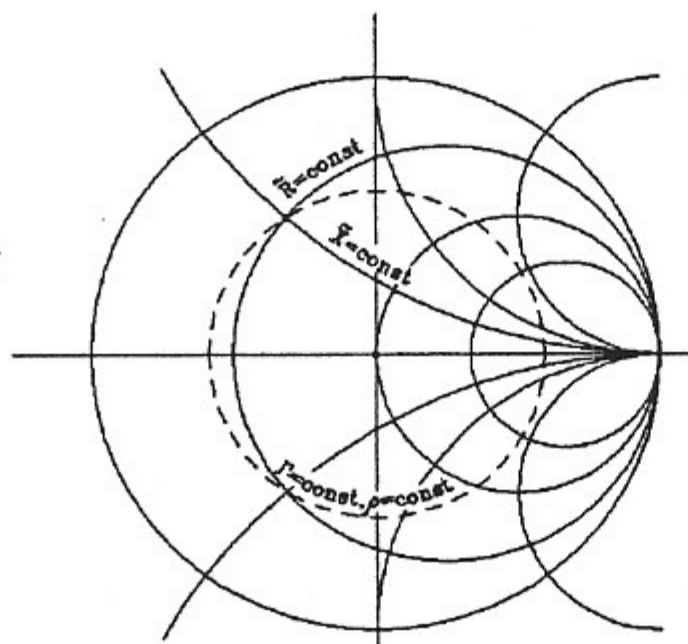
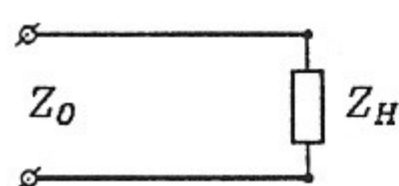


Рис. 7.13. Определение КСВН с помощью круговой диаграммы.

прозрачным движком, вращающимся вокруг центра, на котором нанесены шкалы как модуля коэффициента отражения, так и КСВН. Поэтому значение КСВН можно получить непосредственно без дополнительных вычислений.

2. Пусть на конце линии длиной ℓ [м] с волновым сопротивлением Z_0 [Ом] включена нагрузка с сопротивлением $\dot{Z}_H = R_H + jX_H$ [Ом]. Требуется найти $\dot{Z}_{вх}$.

Решение.

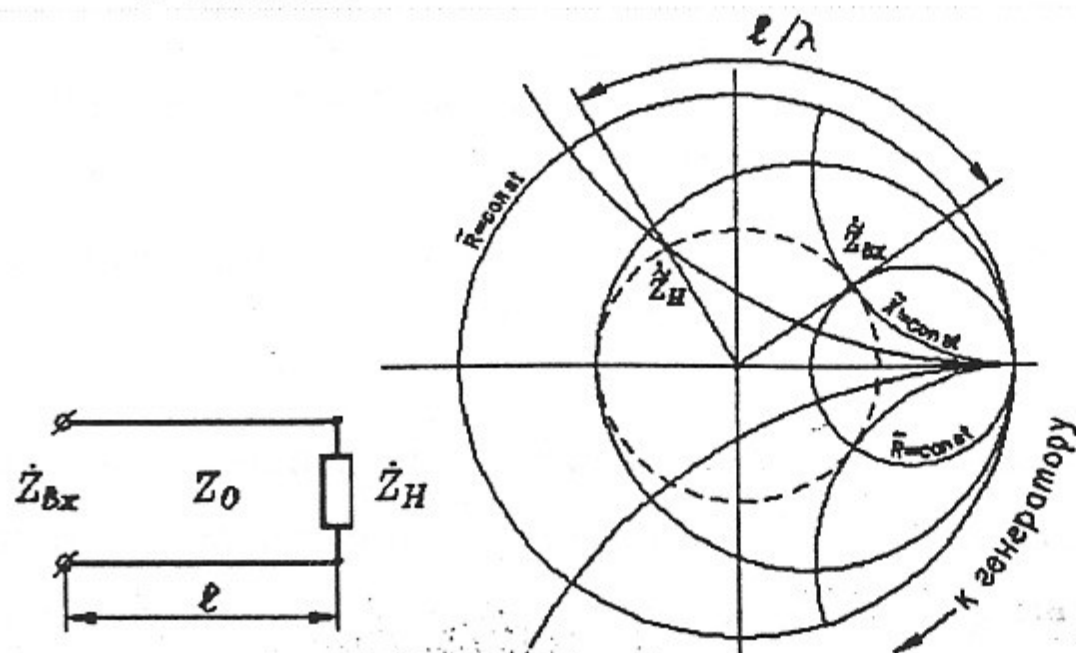


Рис. 7.14. Определение $Z_{вх}$.

Как и в первом примере, прежде всего переходим к нормированным сопротивлениям. Затем на круговой диаграмме находим точку, соответствующую $\dot{\tilde{Z}}_H$ (рис. 7.14). Делаем поворот по окружности постоянного КСВН, проходящей через точку $\dot{\tilde{Z}}_H$, на угол, соответствующий $\frac{\ell}{\lambda}$ в направлении "к генератору", т.е. по часовой стрелке.

В результате получаем точку на круговой диаграмме, соответствующую $\dot{\tilde{Z}}_{\text{вх}}$. Теперь, чтобы определить $\tilde{R}_{\text{вх}}$ и $\tilde{X}_{\text{вх}}$, достаточно посмотреть на пересечении каких окружностей $\tilde{R} = \text{const}$ и $\tilde{X} = \text{const}$ находится эта точка. И в заключение, для определения величины $\dot{\tilde{Z}}_{\text{вх}}$ [Ом] следует умножить найденные $\tilde{R}_{\text{вх}}$ и $\tilde{X}_{\text{вх}}$ на Z_0 .

3. Пусть известно полное сопротивление $\dot{Z} = R + jX$ [Ом] некоторой нагруженной линии с волновым сопротивлением Z_0 [Ом]. Требуется найти полную проводимость $\dot{Y}$.

Решение.

По определению

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$$

Рассмотрим входное сопротивление линии длиной $\frac{\lambda}{4}$.

$$\dot{\tilde{Z}}_{\text{вх}} = \frac{\dot{\tilde{Z}}_{\text{н}} + j \operatorname{tg} \frac{2\pi \ell}{\lambda}}{1 + j \dot{\tilde{Z}}_{\text{н}} \operatorname{tg} \frac{2\pi \ell}{\lambda}} \bigg|_{\ell = \frac{\lambda}{4}} = \frac{1}{\dot{\tilde{Z}}_{\text{н}}} = \dot{Y}_{\text{н}}$$

То есть входное сопротивление линии длиной в четверть волны равно проводимости нагрузки. Отсюда вытекает простой графический способ решения, рис. 7.15. Достаточно на круговой диаграмме найти точку, соответствующую $\dot{\tilde{Z}}$, и сделать поворот по окружности постоянного КСВН, проходящей через точку $\dot{\tilde{Z}}$, на 180° .

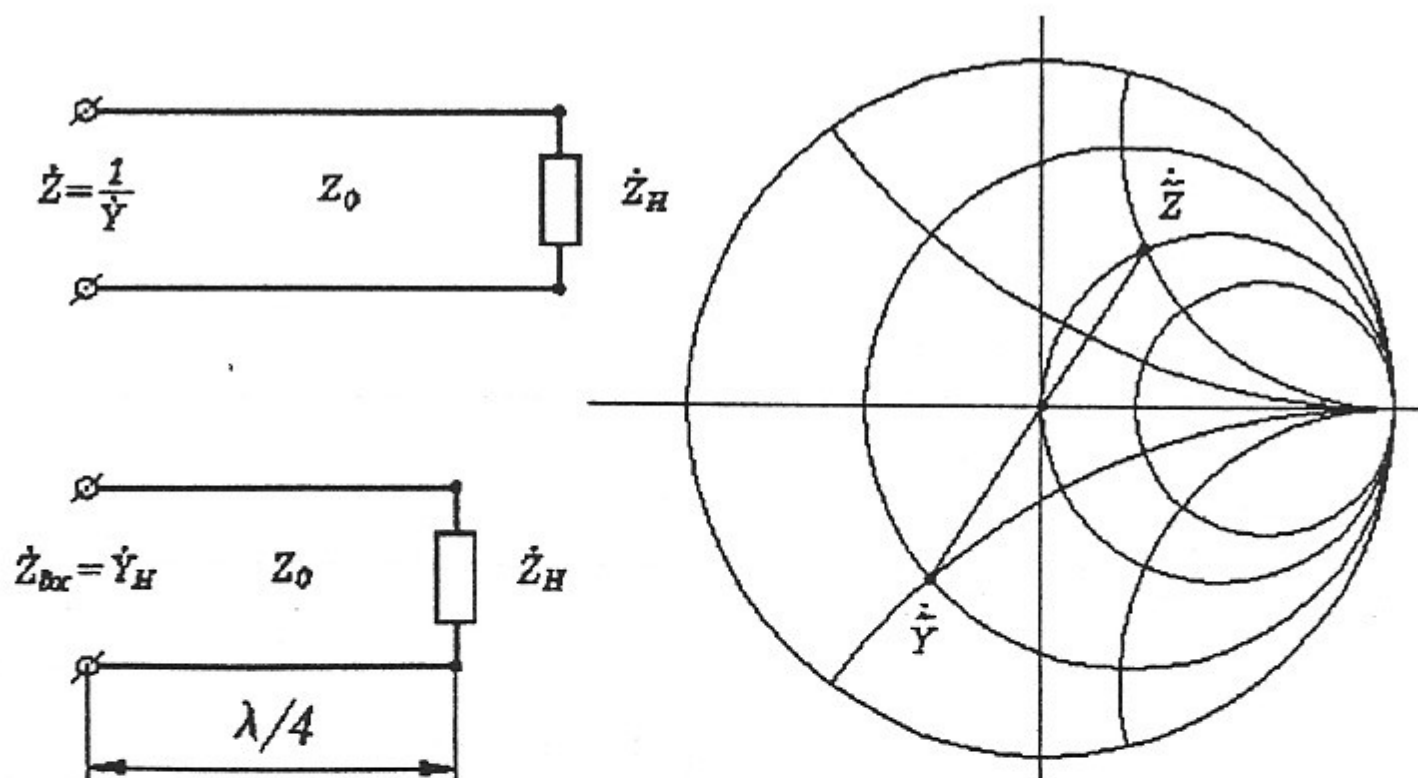


Рис. 7.15. Определение полной проводимости.

4. Пусть на конце линии с волновым сопротивлением Z_0 [Ом] включена нагрузка с сопротивлением $\dot{Z}_{\text{н}} = R_{\text{н}} + jX_{\text{н}}$ [Ом]. Требуется определить на каком расстоянии от нагрузки и какой длины надо параллельно основной линии подключить короткозамкнутый отрезок для того, чтобы в основной линии не было отраженной волны.

Решение.

Так как заданная цепь представляет собой параллельное разветвление, то, очевидно, необходимо суммировать проводимости ветвей. Следовательно, нужно будет использовать круговую диаграмму как сопротивлений, так и проводимостей.

Запишем условие отсутствия отраженной волны во входной линии

$$|\dot{\Gamma}| = 0 \Leftrightarrow \rho = 1 \Leftrightarrow \tilde{R}_{\text{вх}} = 1, \tilde{X}_{\text{вх}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{G}_{\text{вх}} = 1, \tilde{B}_{\text{вх}} = 0.$$

Очевидно, что в нашем случае

$$\tilde{Y}_{\text{вх}} = \tilde{Y}_{\text{вх.1}} + \tilde{Y}_{\text{вх.2}} = \tilde{G}_{\text{вх}} + j(\tilde{B}_{\text{вх.1}} + \tilde{B}_{\text{вх.2}}).$$

и условие согласования принимает вид

$$\tilde{G}_{\text{вх}} = 1, \tilde{B}_{\text{вх.1}} = -\tilde{B}_{\text{вх.2}}.$$

1) Отложим на диаграмме (рис. 7.16) точку $\dot{\tilde{Z}}_H$ — нормированное сопротивление нагрузки первой ветви. 2) На окружности равных КСВН найдем как диаметрально противоположную — точку $\dot{\tilde{Y}}_H$ нормированной проводимости той же нагрузки. 3) По окружности равных КСВН отложим от этой точки по часовой стрелке дугу до пересечения с окружностью $\tilde{G} = 1$ и найдем ее угловое расстояние, равное $\frac{\ell_1}{\lambda}$. Тем самым находим длину линии ℓ_1 от нагрузки до разветвления. Точка пересечения соответствует входной проводимости первой ветви в точках разветвления. Эта проводимость равна $\dot{\tilde{Y}}_{\text{вх.1}} = 1 + j\tilde{B}_{\text{вх.1}}$. 4) Проводимость второй, короткозамкнутой, ветви должна быть для компенсации реактивной составляющей равна $\dot{\tilde{Y}}_{\text{вх.2}} = -j\tilde{B}_{\text{вх.1}}$. Находим эту точку на большой окружности. 5) Определяем расстояние до этой точки от точки ХХ (закоротка имеет бесконечно большую проводимость) на диаграмме в единицах $\frac{\ell_2}{\lambda}$. Отсюда находим ℓ_2 .

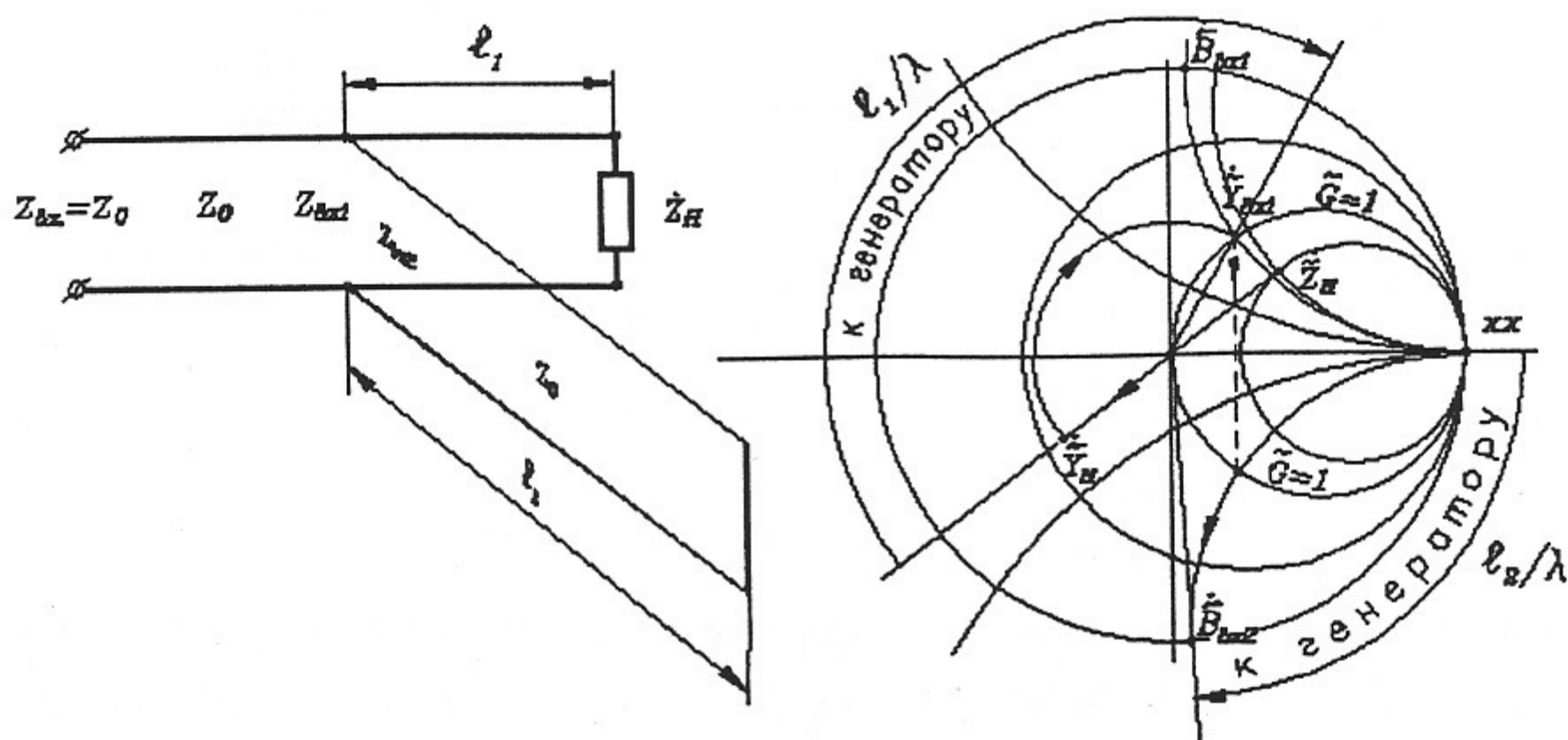


Рис. 7.16. Определение места включения и длины согласующего шлейфа.

Линии передачи с малыми потерями

Перейдем к вопросу о передаче мощности по линиям СВЧ. Найдем активную мощность в произвольном поперечном сечении линии (z — расстояние от генератора).

$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}(z) \dot{I}^*(z) \right\}.$$

Но

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}_{\text{пад}}(z) + \dot{U}_{\text{отр}}(z), \\ \dot{I}(z) &= \frac{1}{Z_0} \left(\dot{U}_{\text{пад}}(z) - \dot{U}_{\text{отр}}(z) \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(z) \dot{U}_{\text{пад}}^*(z)}{Z_0} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(z) \dot{U}_{\text{отр}}^*(z)}{Z_0} + \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(z) \dot{U}_{\text{отр}}^*(z) - \dot{U}_{\text{отр}}(z) \dot{U}_{\text{пад}}^*(z)}{Z_0} \right\}.$$

В случае отсутствия потерь Z_0 вещественно. Тогда последний член в скобках равен разности двух комплексно сопряженных величин и, значит, его действительная часть равна нулю. Таким образом,

$$P(z) = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}(z)|^2}{2Z_0} - \frac{|\dot{U}_{\text{отр}}(z)|^2}{2Z_0} = P_{\text{пад}}(z) - P_{\text{отр}}(z).$$

Для линии без потерь из последнего выражения исчезнет зависимость от z :

$$P = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}|^2}{2Z_0} - \frac{|\dot{U}_{\text{отр}}|^2}{2Z_0} = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}}.$$

Можно ввести коэффициент отражения по мощности

$$\frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{пад}}} = \frac{|\dot{U}_{\text{отр}}|^2}{|\dot{U}_{\text{пад}}|^2} = |\dot{\Gamma}|^2.$$

Мощность, которая поглощается нагрузкой, есть

$$P_{\text{н}} = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}},$$

т.к. нагрузка — это одно из сечений линии. И, следовательно,

$$P_{\text{н}} = P_{\text{пад}} \left(1 - |\dot{\Gamma}|^2 \right).$$

То есть рассогласование нагрузки с линией приводит к тому, что не вся мощность проходит в нагрузку. Уменьшается активная мощность, проходящая вдоль линии — появляется дополнительный запас энергии в узлах и пучностях стоячих волн. По сравнению с режимом полного согласования, ток и напряжение в пучностях стоячих волн возрастают в два, а потери — в четыре раза, что может привести к локальным перегревам линии. Относительная величина мощности, отражаемой от нагрузки, иногда выражается в децибелах (дБ):

$$P_{\text{отр}} [\text{дБ}] = 20 \lg |\dot{\Gamma}|.$$

В этом случае применяют специальный термин — "обратные потери".

До сих пор мы рассматривали линии без потерь. Рассмотрим теперь линию с малыми потерями.

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 \quad \dot{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1.$$

Пусть $R_1 \ll \omega L_1$ и $G_1 \ll \omega C_1$. Тогда постоянная распространения

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = \alpha + j\beta &= \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \sqrt{j\omega L_1 \left(1 - j\frac{R_1}{\omega L_1}\right) j\omega C_1 \left(1 - j\frac{G_1}{\omega C_1}\right)} = \\ &= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{1 - \frac{R_1}{\omega L_1} \frac{G_1}{\omega C_1} - j\left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1}\right)}. \end{aligned}$$

Учитывая малость R_1 по сравнению с ωL_1 и G_1 по сравнению с ωC_1 , разложим $\dot{\gamma}$ в ряд. Будем пренебрегать членами выше второго порядка малости.

Из теории рядов известно, что

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}, \quad \text{при } \alpha \ll 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &\approx j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{\omega L_1} \frac{G_1}{\omega C_1} + j \left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right) \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{\omega L_1} \frac{G_1}{\omega C_1} + j \left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right) \right)^2 \right] \approx \\ &\approx j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R_1}{\omega L_1} \frac{G_1}{\omega C_1} - j \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right)^2 \right] = \\ &= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{\omega L_1} - \frac{G_1}{\omega C_1} \right)^2 - j \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right) \right] = \\ &= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{Z_0} + \frac{G_1}{Y_0} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{Z_0} + \frac{G_1}{Y_0} \right)$ с точностью до второго порядка по $\frac{R_1}{Z_0}$, $\frac{G_1}{Y_0}$, где

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{1}{Y_0}$$

— по-прежнему, волновое сопротивление линии без потерь.

$$\beta = j\omega \sqrt{L_1 C_1} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right]$$

— поправка для β , во-первых, второго порядка, во-вторых — разностная, т.е. и во втором порядке может быть невелика.

Возвращаясь к началу главы, запишем снова выражение для напряжения в произвольной точке линии:

$$u(z, t) = \text{Im} \left\{ \dot{U}_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t + \beta_0 z)} \right\}.$$

Знак перед α из физических соображений выбран "минус", т.к. в пассивной линии волна не может усиливаться. Величина α называется коэффициентом затухания.

Для мощности учёт затухания приводит к формуле:

$$P(z) = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}(z)|^2}{2Z_0} - \frac{|\dot{U}_{\text{отр}}(z)|^2}{2Z_0} = P_{\text{пад}0} e^{-2\alpha z} - P_{\text{отр.н}} e^{-2\alpha(\ell-z)},$$

здесь $P_{\text{пад}0}$ — величина падающей мощности в начале линии ($z = 0$), $P_{\text{отр.н}}$ — отраженная мощность у нагрузки, $\ell - z$ — расстояние от нагрузки до точки, в которой определяется мощность $P(z)$, $2\alpha = \frac{R_1}{Z_0}$ — коэффициент затухания по мощности.

Величиной $\frac{G_1}{C_1}$ в выражении для 2α часто пренебрегают, так как поперечные потери в линии (в диэлектрике) обычно существенно меньше продольных (в проводах). В выражении $P(z)$ пренебрегается мнимой частью волнового сопротивления линии, то есть считается, что Z_0 действительно. Это справедливо, если потери малы.

Электродинамическая теория длинных линий

Рассмотрим вопрос о волнах, которые в принципе *могут* распространяться вдоль линии передач СВЧ. При этом не будем вводить ограничение поперечной квазистационарности, т.е. поперечные размеры линии — любые.

Запишем уравнения Максвелла с учётом токов смещения в точках вне проводов линии (где $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$) для линейной однородной среды (ϵ и μ постоянны):

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H} &= j\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu\mu_0\vec{H}, \\ \text{div } \vec{H} &= 0, \\ \text{div } \vec{E} &= 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть сведены к однородному волновому уравнению для векторного потенциала:

$$\vec{E} = \frac{\omega^2}{v^2} \frac{\vec{A} + \text{grad div } \vec{A}}{j\frac{\omega}{v^2}}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot } \vec{A}.$$

Выберем направление оси z параллельно проводам линии передачи и предположим, что токи, текущие вдоль проводов линии, имеют только z -составляющую.

Следовательно, векторный потенциал $\vec{A} = A_z(x, y)\vec{k}^0$ также имеет только z -составляющую, и волновое уравнение для него становится скалярным:

$$\nabla^2 \dot{A}_z + k^2 \dot{A}_z = 0,$$

где $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны электромагнитных колебаний с частотой ω , распространяющихся со скоростью света $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ в неограниченной среде (см., например, излучение элемента тока, или решение уравнений Максвелла в виде плоской волны в неограниченном пространстве с характеристиками μ и ϵ). Иначе,

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{A}_z = 0.$$

Пусть линия не имеет потерь, и волны, которые распространяются в ней, имеют фазовую постоянную β , вообще говоря, отличную от k , т.е.

$$A_z(x, y) = A_{z0}(x, y)e^{-j\beta z}.$$

Найдём составляющую поля H_z и E_z для таких волн и проследим их связь с величиной β . Из условия

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{i}^0 & \vec{j}^0 & \vec{k}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} \quad \text{получим } H_z = 0.$$

Для z -составляющей поля $\vec{E}_z$ получаем

$$\vec{E}_z = \frac{k^2 \vec{A}_z + \text{grad}_z \text{div } \vec{A}}{j \frac{\omega}{v^2}}.$$

В рассматриваемом случае $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \right),$

$$\text{grad}_z \left(\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \vec{A}_z}{\partial z^2} = A_{z0}(x, y)e^{-j\beta z}(-\beta^2) = -\beta^2 \vec{A}_z, \quad \text{т.е. } \vec{E}_z = \frac{\vec{A}_z}{j \frac{\omega}{v^2}}(k^2 - \beta^2).$$

В то же время волновое уравнение для $\vec{A}_z$ — при отыскании решения в форме волны с произвольным β — может быть (для $\vec{A}_z = \vec{A}_{z0}e^{-j\beta z}$) сведено к двумерному:

$$\frac{\partial^2 A_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z(x, y)}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)A_z(x, y) = 0.$$

Сравнивая это уравнение с выражением для продольного $\vec{E}_z$ поля мы видим:

А. Если $\beta = k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, т.е. если волна в линии распространяется со скоростью света в среде, заполняющей линию, то

1. $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0$: z -составляющая вектор-потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа.

2. $\vec{E}_z = 0$ (и т.к. $H_z = 0$): такая волна является чисто поперечной.

3. Учитывая, что $\vec{\phi} = -\frac{v^2}{j\omega} \text{div } \vec{A} = -\frac{v^2}{j\omega} \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{v^2}{j\omega} j\beta e^{-j\beta z} = \frac{v^2}{\omega} \beta \vec{A}_z,$

т.е. $\vec{\phi} \sim \vec{A}_z$, получим $\frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial y^2} = 0$: скалярный потенциал такой волны

также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, в длинной линии любых поперечных размеров могут распространяться волны со скоростью света и такие волны обязательно поперечны ($\vec{E}_z = 0, H_z = 0$). Они называются ТЕМ-волны. Как раз их мы получили при условии поперечной квазистационарности. Электромагнитные потенциалы полей этих волн удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 \vec{A}_z = 0$ и $\nabla^2 \vec{\phi} = 0$, т.е. поля ТЕМ-волн могут рассчитываться как электростатические и магнитные поля постоянных токов.

Отсюда следует, что число проводников линии для того, чтобы в ней распространялись волны типа ТЕМ, должно быть не менее двух (сечение двух- или многосвязно), т.к. если проводник один (например, полая металлическая труба), то вдоль него (в частности, внутри трубы) ТЕМ-волна распространяться не может. А именно: внутри области с условием на границе $\varphi_{\text{гр}} = \text{const} = 0$ уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ имеет лишь одно решение: $\varphi = 0$ (нет электростатического поля).

Б. Если же $\beta \neq k$, т.е. скорость распространения волны $\dot{A}_z e^{-\beta z}$ не равна скорости света: $\frac{\omega}{\beta} = v_{\phi} \neq v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, то поле такой волны обязательно содержит продольную составляющую $E_z = \frac{A_z}{j\omega}(k^2 - \beta^2)$, и потенциалы этого поля удовлетворяют не уравнению Лапласа, а волновому уравнению. $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2) = 0$.

Такие волны, имеющие составляющую $E_z \neq 0$, называются E -волнами.

Аналогичное рассмотрение при допущении наличия поперечных токов приводит к H -волнам, т.е. к волнам, имеющим составляющую $H_z \neq 0$.

Итак, в длинной линии, если её поперечные размеры $\ell \approx \lambda$, могут распространяться кроме ТЕМ-волн поперечно-электрические: ТЕ-, или H -волны и поперечно-магнитные: ТМ-, или E -волны. Свойства этих волн отличны от свойств ТЕМ-волн. Для E -волн $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, а для H -волн $H_z \neq 0$, $E_z = 0$.

В следующей главе будет показано, что для возможности существования незатухающих волн величина $k^2 - \beta^2$ должна быть больше нуля. Это приведет к понятию о критических частотах для E - и H -волн, то есть о минимальных частотах, ниже которых распространение этих типов волн невозможно.

Волноводы

В связи с тем, что поперечные размеры линий передачи в технике СВЧ обычно соизмеримы с длиной волны, применение открытых двухпроводных линий практически исключается, из-за излучения. Применяются закрытые линии — коаксиальные или двухпроводные в экране (иногда многопроводные в экране). Однако и эти линии имеют крупный недостаток, связанный с необходимостью изоляции внутренних проводников. Это снижает электрическую прочность и вносит дополнительные, диэлектрические потери. Наиболее употребительны на СВЧ полые металлические трубы — волноводы. Волновод — это, вообще говоря, любая система для передачи электромагнитных волн, поперечные размеры которой сравнимы с длиной волны в этой системе, например, та же коаксиальная линия при $L_x, L_y \approx \lambda$ проявляет свойства волновода (т.е. в ней возможны волны типов E и H кроме ТЕМ), диэлектрический стержень — также волновод. Но обычно волноводом называют полую металлическую трубу, предназначенную для передачи СВЧ-энергии. “Обратный провод” в такой трубе отсутствует, поперечное сечение является односвязным, ТЕМ (поперечные) волны в такой трубе распространяться не могут. Волноводы обычно имеют прямоугольное, круглое, П- или Н-образное сечение.

Анализ распространения волн в такой системе ($L_x \approx \lambda, L_y \approx \lambda$) не может быть строго проведен с помощью телеграфных уравнений длинной линии, т.к. условия поперечной квазистационарности не выполняются. Необходимо решить уравнения Максвелла с граничными условиями, определенными формой и материалом волновода.

Рассмотрим распространение свободных колебаний в трубах с идеально проводящими стенками, свободные заряды и токи внутри трубы отсутствуют, а имеются только на поверхности стенок. Колебания считаем синусоидальными установившимися — пользуемся методом комплексных амплитуд. Считаем, что внутри трубы могут быть диэлектрики, а ферромагнитными свойствами среда не обладает: $\mu = 1$, $\epsilon \neq 1$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu_0 \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0.\end{aligned}$$

Граничные условия, достаточные для нахождения решения: $E_t = 0$, $H_n = 0$. Для расчета токов в стенках вводится также поверхностная плотность тока в стенках: $K = H_t$ [А/м]. $\vec{H}(x, y, z)$, $\vec{E}(x, y, z)$ — комплексные амплитуды векторов магнитного и электрического полей.

Электрические и магнитные типы волн в волноводе

Для однородных линий передачи, в соответствии с электродинамической теорией длинных линий, возможны три класса частных решений уравнений Максвелла в виде волн, распространяющихся в направлении z .

1) ТЕМ-волны, для которых $H_z \equiv 0$, $E_z \equiv 0$. Эти поперечные волны получаются и при решении телеграфных уравнений длинной линии (в односвязных системах — трубах они невозможны).

2) H -волны (или ТЕ-волны — т.н. поперечно-электрические волны) для которых характерно $E_z \equiv 0$.

3) E -волны (или ТМ-волны — т.н. поперечно-магнитные волны), для них характерно $H_z \equiv 0$.

Если мы ищем H -волны, необходимо из уравнений исключить $\vec{E}$ и наоборот.

Исключение $\vec{E}$:

Из 1-го уравнения: $\vec{E} = \frac{\text{rot } \vec{H}}{j\omega\epsilon\epsilon_0}$, $\text{rot } \vec{E} = \frac{\text{rot rot } \vec{H}}{j\omega\epsilon\epsilon_0}$.

Из 2-го: $-j\omega\mu_0\vec{H}j\omega\epsilon\epsilon_0 = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$.

Отсюда $\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$. Здесь $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0$.

Аналогично можно получить для поиска E -волн:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0.$$

H -волны в прямоугольном волноводе

Уравнение для комплексных амплитуд

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0$$

— это трехмерное векторное волновое уравнение. Так как решение ищем в виде H -волн, то $E_z \equiv 0$ и неизвестными являются комплексные амплитуды E_x, E_y, H_x, H_y, H_z . Все они функции x, y, z и t — через $e^{j\omega t}$.

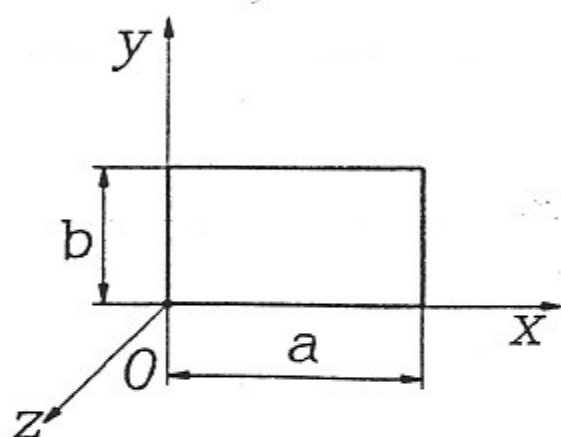


Рис. 8.1. Система координат для расчета волн в прямоугольном волноводе.

Граничные условия: на стенках $H_n = 0$, т.е. $H_x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, $H_y = 0$ при $y = 0$ и $y = b$ (рис. 8.1).

Решение ищем в виде свободных волн, распространяющихся вдоль z , т.е. любая составляющая поля ищется в виде $N = N_0 e^{-\Gamma z + j\omega t}$. Γ — неизвестная постоянная

распространения волн. Ее определение дает ответ на вопрос — возможно ли существование искомых волн и с какой скоростью по z они распространяются. Кроме того, неизвестно распределение полей внутри трубы. Векторное волновое уравнение — это совокупность трех скалярных уравнений, среди них и

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0.$$

H_z — единственная продольная составляющая поля в искомом решении. Если найти $H_z(x, y, z)$, а затем выразить E_x, E_y, H_x, H_y через H_z , то распределение поля в волноводе будет найдено.

Найдем связь между каждой поперечной компонентой и H_z . Для этого воспользуемся исходными уравнениями Максвелла, заметим что

$$\text{rot } \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i}^0 & \vec{j}^0 & \vec{k}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}^0 & \vec{j}^0 & \vec{k}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\Gamma \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix},$$

т.к. $\frac{\partial}{\partial z} = -\Gamma$.

Из $\text{rot } \vec{H} = j\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ следует

$$j\omega\epsilon\epsilon_0 E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - (-\Gamma)H_y,$$

$$j\omega\epsilon\epsilon_0 E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \Gamma H_x.$$

Из $\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$ следует

$$-j\omega\mu_0 H_x = \Gamma E_y,$$

$$-j\omega\mu_0 H_y = -\Gamma E_x.$$

Отсюда:

$$j\omega\epsilon\epsilon_0 E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\Gamma^2}{j\omega\mu_0} E_x,$$

$$j\omega\epsilon\epsilon_0 E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\Gamma^2}{j\omega\mu_0} E_y,$$

т.е.

$$E_x = -\frac{j\omega\mu_0}{\Gamma^2 + k^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma^2 + k^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$H_x = -\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + k^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$H_y = -\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + k^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

(*)

Таким образом, если найти $H_z(x, y, z)$, то мы сможем найти E_x, E_y, H_x, H_y .

$$H_z = H_z(x, y)e^{-\Gamma z},$$

т.к. мы ищем решение в виде волн, распространяющихся вдоль z . Тогда трехмерное скалярное волновое уравнение переходит в двухмерное, ибо

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = -\Gamma H_z, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \Gamma^2 H_z.$$

Следовательно, из

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0$$

имеем т.н. уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} + (k^2 + \Gamma^2) H_z(x, y) = 0.$$

К решению этого уравнения и сводится задача о распространении H -волн в прямоугольном волноводе. Решение $H_z = H_z(x, y)e^{-\Gamma z}$ ищем методом разделения переменных (Фурье):

$$H_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Неизвестными являются $H_z(x, y)$ и Γ . После подстановки в уравнение и деления всех его членов на $X Y$ имеем:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \Gamma^2 + k^2 = 0,$$

или, выделяя функцию только от x или только от y и константу:

$$f_1(x) + f_2(y) + k_c^2 = 0.$$

Здесь обозначено $k_c^2 = \Gamma^2 + k^2$, k_c — неизвестная постоянная разделения, или критическое волновое число, определяющее Γ .

Последнее равенство — с функциями f_1 и f_2 — возможно лишь при условиях:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2, \quad k_c^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

т.к. $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — независимые слагаемые. k_x и k_y — константы, подлежащие определению из граничных условий. Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка имеют следующие частные решения:

$$X = \begin{cases} \sin(k_x x) \\ \cos(k_x x) \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \sin(k_y y) \\ \cos(k_y y) \end{cases}.$$

Выбор того или иного частного решения определяется из граничных условий. В данном случае $H_n = 0$, т.е. $H_x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, $H_y = 0$ при $y = 0$ и $y = b$. Было показано, что

$$H_x \sim \frac{\partial H_z}{\partial x} \sim \frac{\partial X}{\partial x} \text{ и } H_y \sim \frac{\partial H_z}{\partial y} \sim \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Таким образом, из граничных условий

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ означает выбор } X = \cos(k_x x),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ означает выбор } Y = \cos(k_y y),$$

Постоянная разделения k_c определяется через связанные с ней коэффициенты k_x и k_y из условий на второй границе:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \text{ при } x = a; \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = b; \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, $k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, откуда $\Gamma^2 = k_c^2 - k^2$ и искомое решение

$$H_z = H_{z0} \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{-\Gamma z},$$

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu_0}.$$

Отсюда определяются остальные компоненты поля (H_x, H_y, E_x, E_y) .

Рассмотрим свойства постоянной распространения волн в волноводе Γ . Вообще говоря, $\Gamma = \alpha + j\beta$. Если частота возбужденных колебаний ω достаточно высока, то $\Gamma = j\beta$, т.к. в этом случае $\Gamma^2 < 0$, и $H_z \sim e^{-j\beta z}$ — волны распространяются вдоль волновода ($H_z \sim e^{j\omega t - j\beta z}$) с фазовой скоростью $v_\phi = \omega/\beta$, т.е. длина волны в волноводе $\Lambda = v_\phi T = v_\phi/f = 2\pi v_\phi/\omega = 2\pi/\beta$. Отметим, что

$$\beta = 2\pi/\Lambda, v_\phi = \Lambda f.$$

Если частота ниже некоторой т.н. критической частоты, так что $\Gamma^2 > 0$, то колебания такой частоты не могут распространяться вдоль волновода ($H_z \sim e^{-\alpha z}$) и ослабляются (затухают) несмотря на то, что потерь в стенках нет. Причина ослабления становится ясной, если рассматривать поле вместе с его источником, спадающее поле — это т.н. поле “ближней зоны”.

Критическая частота определяется из условия $\Gamma = 0$. При этом $\beta \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty$,

$$\omega_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}}.$$

Распространение волн возможно при $\omega > \omega_c$ и невозможно при $\omega < \omega_c$. Критической частоте соответствует т.н. критическая длина волны:

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}.$$

По определению, это длина волны в пустом ($\epsilon = 1$) свободном (нет стенок) пространстве при $\omega = \omega_c$. Чем больше ϵ диэлектрика и чем меньше числа m и n , тем более длинная волна может распространяться в трубе.

Начиная с некоторых m и n , если их увеличивать, λ_c становится меньше любой наперед заданной величины. Тип колебаний определяется совокупностью m и n . Тип колебаний (H_{mn}), имеющий наибольшую критическую волну (наименьшую критическую частоту) называется главным. В рассмотренном случае — прямоугольный волновод, H -волны, размер $a \times b$, причем $a > b$ — главный тип — H_{10} (TE_{10}), при $m = 1, n = 0$. Одновременное равенство $m = 0$ и $n = 0$ невозможно, т.к. поля, например, E_y , по сечению волновода не будут меняться и для выполнения граничных условий ($E_t = 0$) поля должны быть всюду равны нулю.

Пусть $\lambda < \lambda_c$ ($\omega > \omega_c$). Рассмотрим связь между Λ и λ_c , т.е. найдем выражение для длины волны в волноводе через длину волны в свободном пространстве (λ) и λ_c .

Поскольку

$$\Gamma^2 = k_c^2 - k^2, \Gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\Lambda}, k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}\sqrt{\epsilon} \text{ и } k = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\epsilon},$$

$$\text{то } -\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \epsilon - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \epsilon, \text{ или } \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{\epsilon}{\lambda^2} - \frac{\epsilon}{\lambda_c^2} = \frac{\epsilon}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right).$$

Отсюда

$$\Lambda = \frac{\lambda/\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}.$$

Для воздуха $\epsilon = 1$ и

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}.$$

Для волны H_{10} в прямоугольном волноводе с учетом ϵ

$$m = 1, n = 0, \lambda_c = 2a\sqrt{\epsilon}, \Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon - (\lambda/2a)^2}}.$$

Для воздуха

$$\lambda_c = 2a, \Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}.$$

Постоянная распространения (далее $\epsilon = 1$)

$$\Gamma = j\frac{2\pi}{\Lambda} = j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} = j\beta.$$

Найдем составляющие полей (см. выше (*)). Положим $H_{z0} = 1$ (амплитудный коэффициент — [А/м]).

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \quad (\text{т.к. } k_x = \frac{\pi}{a}, k_y = 0, k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{\pi}{a})$$

$$H_y = 0, H_x = \frac{j\beta}{k^2 - \beta^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} = j \frac{2a}{\Lambda} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$E_x = 0, E_y = -\frac{j\omega\mu_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

Для перехода к мгновенным значениям укажем явно зависимость комплексных векторов от времени и запишем эти мгновенные значения при $t = 0$ для ненулевых составляющих поля волны H_{10} :

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\frac{2\pi z}{\Lambda} + j\omega t},$$

$$H_x = j \frac{2a}{\Lambda} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\frac{2\pi z}{\Lambda} + j\omega t},$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\frac{2\pi z}{\Lambda} + j\omega t};$$

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} \sin \left(-\frac{2\pi z}{\Lambda} \right),$$

$$H_x = \frac{2a}{\Lambda} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \left(-\frac{2\pi z}{\Lambda} \right),$$

$$E_y = -\frac{\omega\mu_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \left(-\frac{2\pi z}{\Lambda} \right).$$

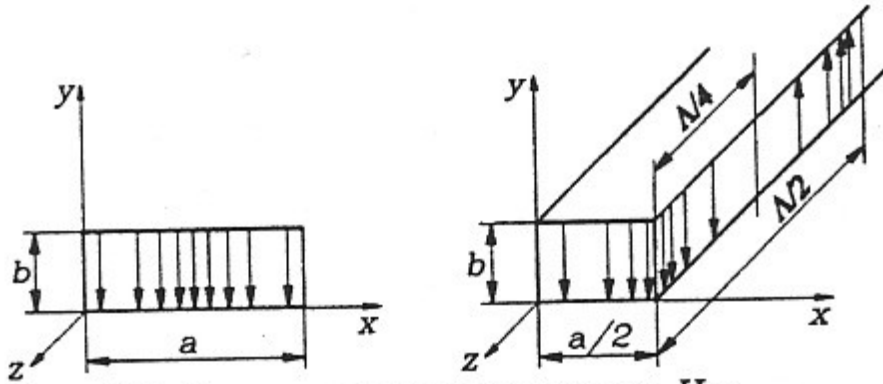


Рис. 8.2. Электрическое поле волны H_{10} .

2) Для H уравнение силовых линий (рис. 8.3)

$$\frac{dz}{H_z} = \frac{dx}{H_x};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Lambda}{2a} \cdot \frac{\operatorname{tg}(-2\pi z/\Lambda)}{\operatorname{tg}(\pi x/a)}.$$

Вектор Пойнтинга $\Pi_z = E_y H_x$ — бегущая вдоль z волна. Эпюры поля (распределение интенсивности) в разных сечениях показаны на рис. 8.4.

Построим мгновенную картину поля ($t = 0$).

1) Для $\vec{E}$ силовые линии параллельны y ($E = E_y$). Покажем густотой силовых линий распределение напряженности поля, см. рис. 8.2.

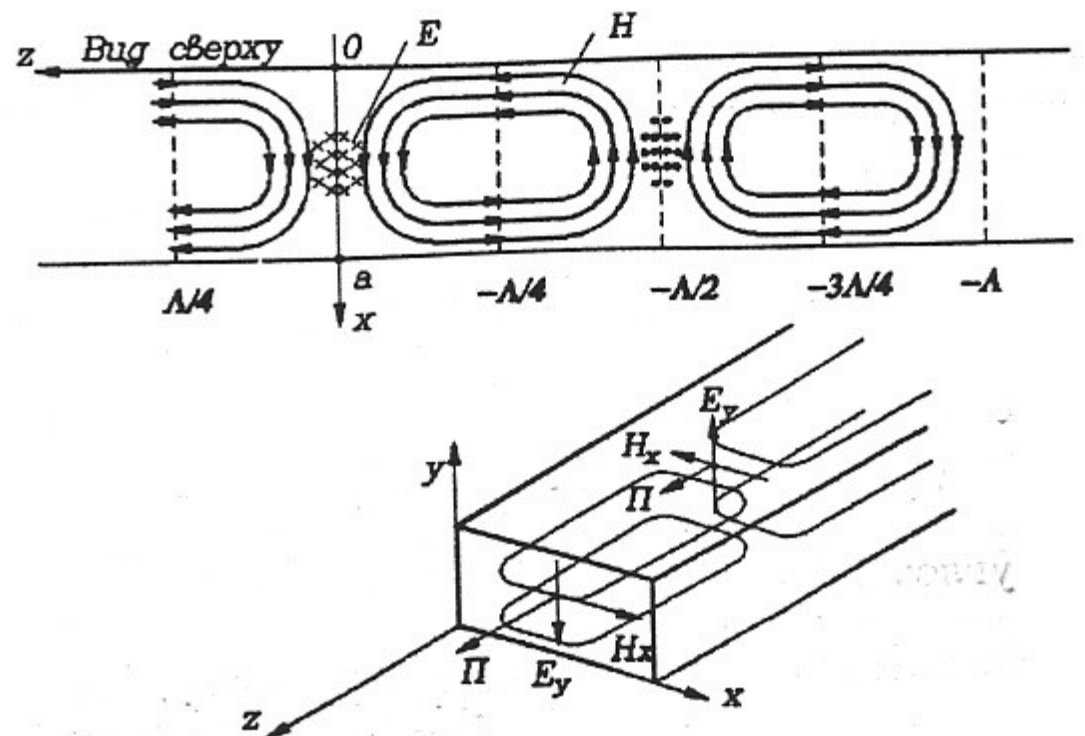


Рис. 8.3. Поля и вектор Пойнтинга волны H_{10} .

Аналогично рассматриваются высшие типы волн, например, H_{20} , H_{11} , H_{21} и др. (рис. 8.5).

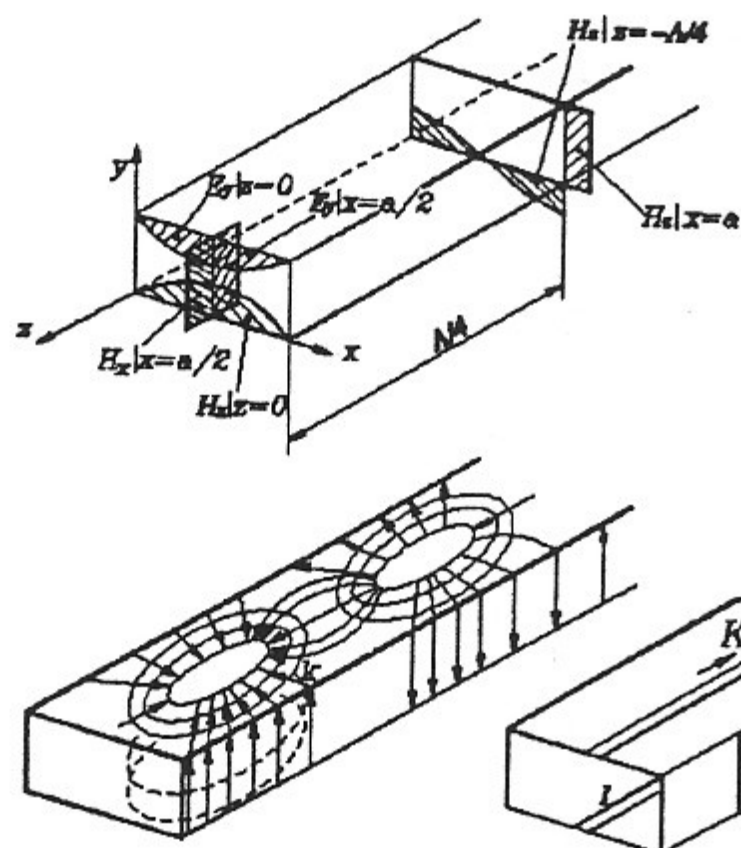


Рис. 8.4. Эпюры поля, токи и неизлучающие щели в прямоугольном волноводе с волной H_{10} .

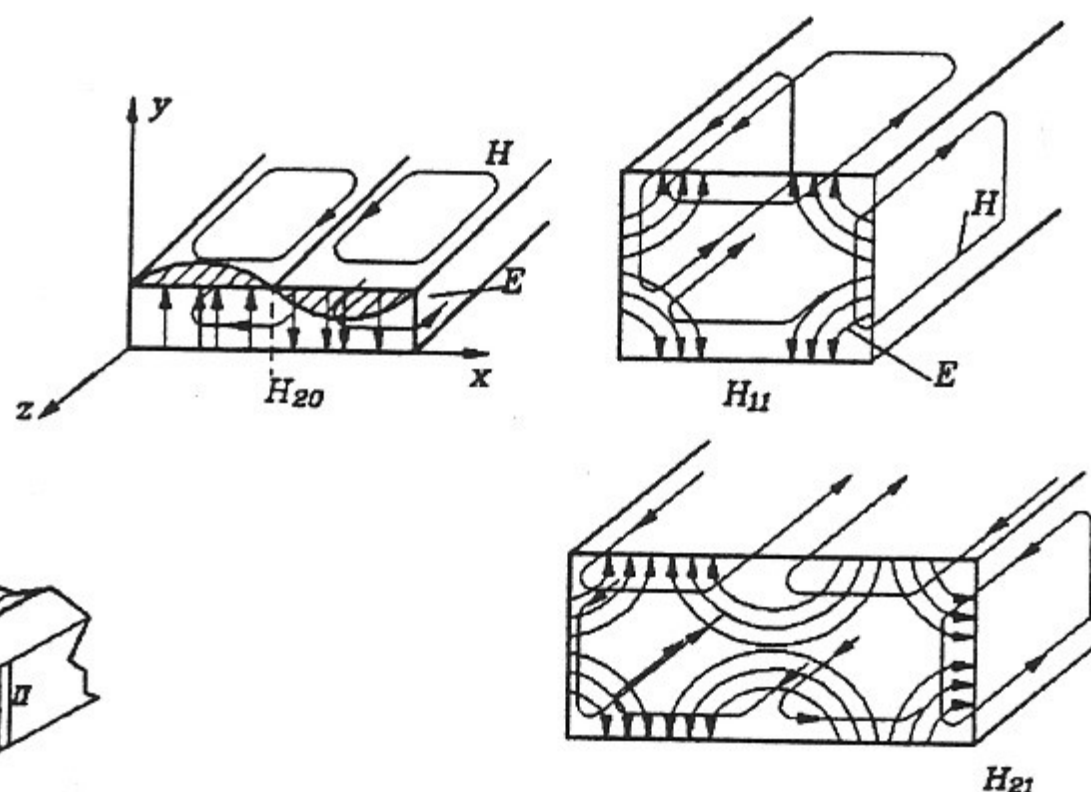


Рис. 8.5. Конфигурация полей для волн H_{20} , H_{11} , H_{21} .

Видны общие правила построения: следы линий E и H в поперечном сечении ортогональны. m — число вариаций поля (полуволн) вдоль x , n — число вариаций поля вдоль y .

Фазовая скорость волн в волноводе

Выражение $\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$ верно не только для H -волны в прямоугольном волноводе, но и для любых волн в однородном волноводе, как следствие определения постоянной распространения $\Gamma^2 = k_c^2 - k^2$. Фазовая скорость определяется из соотношения $\Lambda = v_\phi T$. Поскольку $\lambda = cT$, то

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (\lambda < \lambda_c, v_\phi > c).$$

Фазовая скорость волны в гладком (однородном) волноводе больше скорости света (рис. 8.6). Это становится понятным, если учесть, что распространение в волноводе происходит путем отражения от стенок плоских волн, распространяющихся со скоростью света.

Рассмотрим результат наложения двух плоских волн, распространяющихся под углом 2θ друг к другу в свободном пространстве (рис. 8.7).

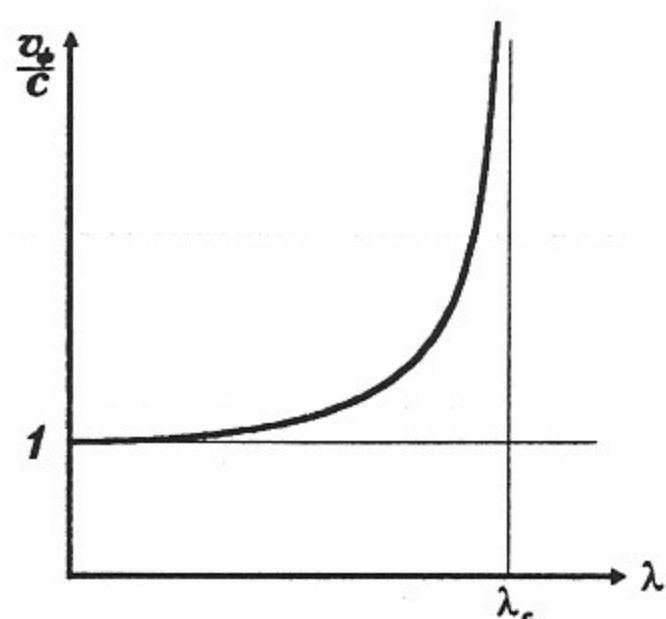


Рис. 8.6. Зависимость фазовой скорости от длины волны в однородном волноводе.

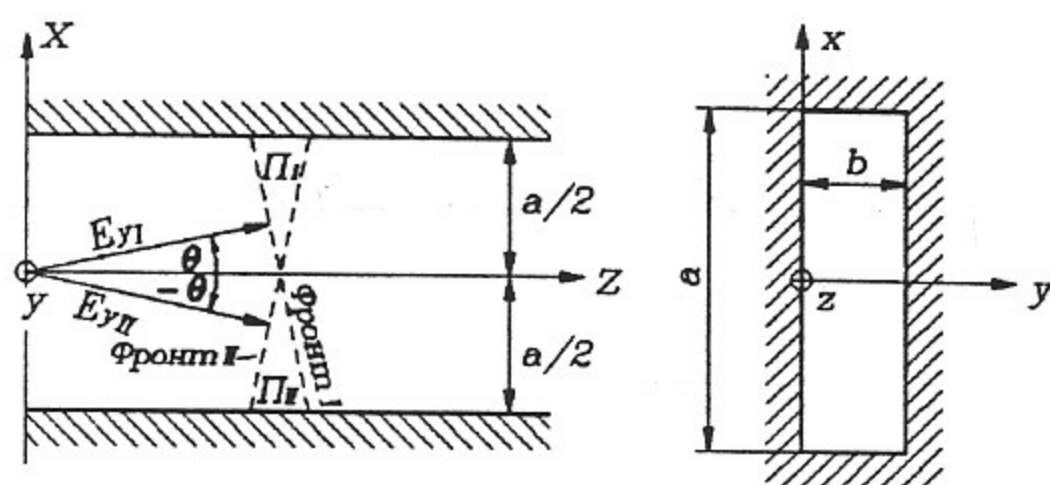


Рис. 8.7. Две плоские волны, распространяющиеся под углом друг к другу.

Как известно, уравнения Максвелла могут быть сведены к волновым уравнениям

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0,$$

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0.$$

При $\mu = \epsilon = 1$ $k = 2\pi/\lambda$.

В декартовых координатах эти волновые уравнения справедливы для составляющей поля по любой координате. В частности

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0.$$

Функция $E_y = E_{y0} e^{-jk(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$ является решением этого уравнения, если $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, а E_{y0} — постоянная амплитуда. Такое частное решение называется обобщенной плоской волной. Коэффициенты α , β и γ , если они вещественны, играют роль направляющих косинусов для вектора, показывающего направление распространения (направление вектора Пойнтинга). Действительно, вводя новую координату $z' = \alpha x + \beta y + \gamma z$, получим $E_y = E_{y0} e^{-jkz'}$ — обычную плоскую волну, распространяющуюся вдоль z' со скоростью света, $k = \omega/c$.

Если выбрать угол между z' и z равным θ , т.е. $\gamma = \cos \theta$, а угол между z' и осью y принять равным $\pi/2$, т.е. $\beta = \cos \pi/2 = 0$ (следовательно, $\cos^2 \theta + \alpha^2 = 1$ и $\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta$), то плоская волна, распространяющаяся так, что вектор Пойнтинга лежит в плоскости xz и направлен под углом θ к z , примет вид

$$E_y = E_{y0} e^{-jk(x \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)}.$$

Допустим, что амплитуда $E_{y0} = 1$, и одна из волн направлена под углом θ , а другая под углом $-\theta$ к оси z , т.е.

$$E_{y1} = e^{-jk(x \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)}$$

и

$$E_{y2} = e^{-jk(-x \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)}.$$

Если наблюдать за суммой этих полей на линии $x = 0$, т.е. в плоскости zy , то

$$E_{y1} + E_{y2} = E_y = 2e^{-jkz \cdot \cos \theta}.$$

2 — это амплитуда суммарной волны. Если проследить за этой суммой в плоскостях, параллельных плоскости zy , но отстоящих от нее на расстоянии $x = \pm \frac{a}{2}$, то

$$E_{y1} + E_{y2} = E_y|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 2e^{-jkz \cdot \cos \theta} \cdot \frac{e^{-jk \sin \theta (\pm \frac{a}{2})} + e^{+jk \sin \theta (\pm \frac{a}{2})}}{2} = 2e^{-jkz \cdot \cos \theta} \cdot \cos \left[\pm \frac{a}{2} k \sin \theta \right].$$

Если затем подобрать расстояние a так, чтобы

$$\frac{ak}{2} \sin \theta = \frac{\pi}{2},$$

т.е.

$$a = \frac{\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta},$$

то $\cos \pi/2 = 0$ и $E_y|_{x=\pm a/2} = 0$.

Таким образом, в плоскостях, параллельных плоскости zy и отстоящих от нее

на $\pm \frac{a}{2} = \frac{\lambda}{4 \sin \theta}$, можно разместить идеально проводящие поверхности. Граничные

условия $E_y = 0$ на них ($E_t = 0$) будут удовлетворены.

Если разместить такие проводящие поверхности, расположенные параллельно плоскости zy на любом расстоянии друг от друга (например b), то — так как E_y нормально к этим поверхностям — граничные условия ($E_t = 0$) также выполняются. Следовательно, две волны с полем E_y могут распространяться в прямоугольной проводящей трубе сечением $a \times b$ между плоскостями, т.е. образуют поле, распространяющееся в прямоугольном волноводе. В каждой из плоских волн, кроме E_{y1} и E_{y2} , имеется, естественно, и $\vec{H}$ -составляющая, ортогональная $\vec{E}$, и вектор $\vec{P}$. Если в плоскостях,

отстоящих от zy на $\pm \frac{a}{2}$, $E_{y1} + E_{y2} = 0$, то (см. рис. 8.8) $[\vec{H}_1 + \vec{H}_2]_{x=\pm a/2} = H_z \cdot \vec{k}^0$

и граничные условия для $\vec{H}$ ($H_n = 0$) также выполняются на этих поверхностях.

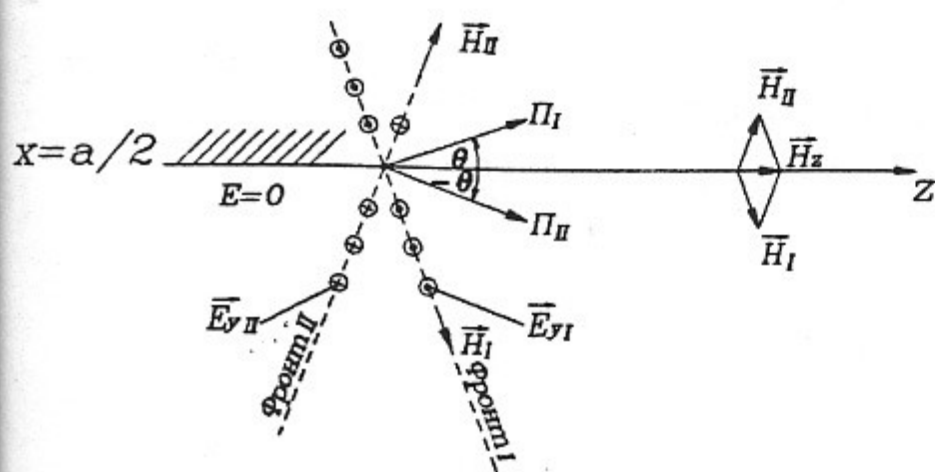


Рис. 8.8. Граничные условия для суммы двух плоских волн.

Фазовая скорость такой суммы двух волн, отсчитываемая в направлении z , определяется фазовой постоянной волны

$$E_y = 2e^{-jkz \cdot \cos \theta}$$

в этом направлении, т.е. величиной

$$k \cos \theta = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{\Lambda}.$$

Вспоминая определение k , получаем

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta = \frac{2\pi}{\Lambda}, \text{ т.е. } \Lambda = \frac{\lambda}{\cos \theta}, v_{\phi} = \frac{\omega \Lambda}{2\pi} = f \Lambda.$$

Λ в этих выражениях — длина волны в волноводе. Поскольку в свободном пространстве $\Lambda > \lambda$, то и $v_{\phi} > c$.

Таково физическое объяснение неравенства $v_{\phi} > c$: наклон волнового фронта к направлению распространения. Из граничных условий было получено $\sin \theta = \frac{\lambda}{2a}$.

Отсюда

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}},$$

т.е. мы имеем дело с волной H_{10} .

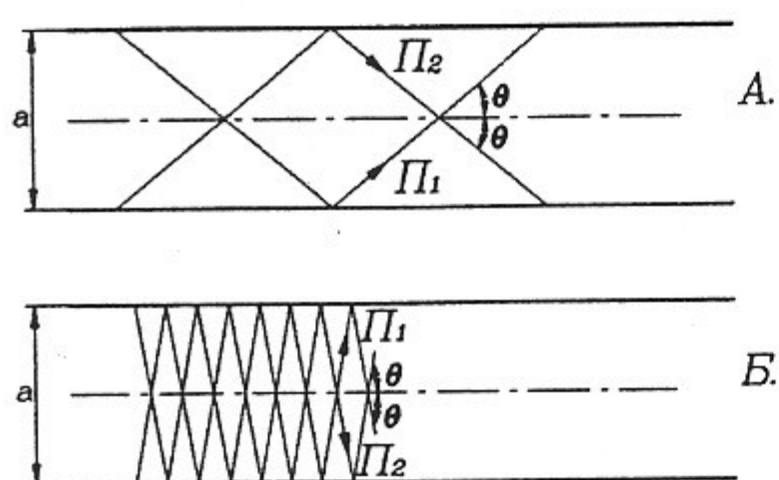


Рис. 8.9. Положение вектора Пойнтинга при разных углах θ .

Сравним скорость движения энергии вдоль оси z . Рассмотрим два крайних случая (см. рис. 8.9).

А. $\sin \theta \ll 1$, $\theta \ll \pi/2$, $\lambda \ll 2a$, $\Lambda \approx \lambda$ — далеко от критического режима, волна распространяется почти как в свободном пространстве. Скорость распространения энергии близка к скорости света.

Б. $\sin \theta \approx 1$, $\theta \approx \pi/2$, $\lambda \approx 2a$, $\Lambda \gg \lambda$ — волна, поступающая от генератора, близка к критической волне для данного волновода. Скорость распространения энергии вдоль волновода в критическом режиме стремится к нулю.

Понятие о групповой скорости волн в волноводе

Если в волноводе нет потерь, то групповая скорость совпадает со скоростью распространения энергии:

$$v_{гр} = \frac{P[\text{Дж/с}]}{W_1[\text{Дж/м}]},$$

где P — мощность волны, бегущей вдоль волновода, W_1 — запас энергии, на единицу длины волновода.

Другое определение: $v_{гр}$ — скорость распространения сигнала — волнового пакета: $v_{гр} = \frac{d\omega}{d\beta}$, в отличие от $v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}$. Для волновода

$$\beta = \frac{2\pi}{\Lambda}, d\beta = -\frac{2\pi}{\Lambda^2} d\Lambda;$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}.$$

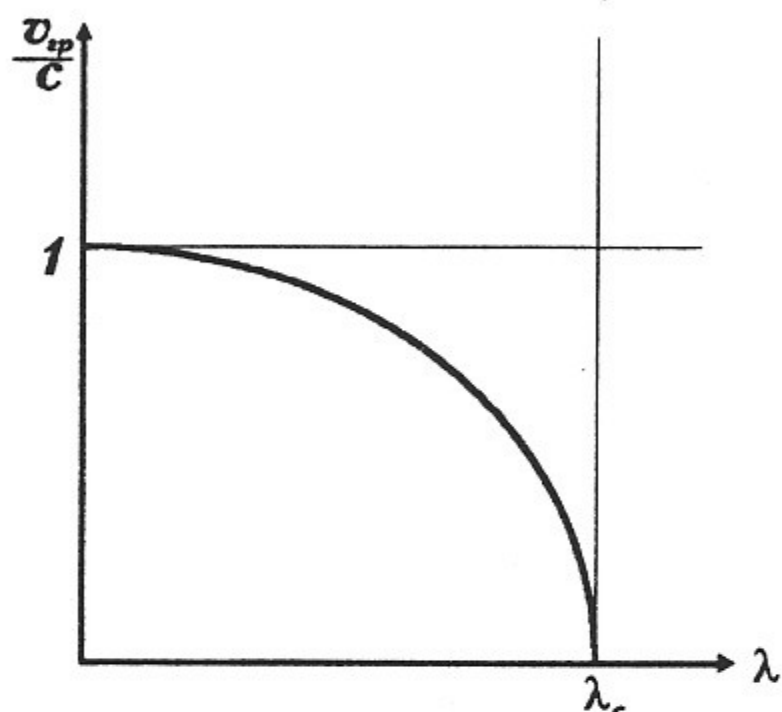


Рис. 8.10. Зависимость групповой скорости от длины волны в однородном волноводе.

Так как $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, то $d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda$.
 Отсюда $\frac{d\omega}{d\beta} = v_{gp} = \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \cdot \frac{c}{d\Lambda/d\lambda}$.
 Далее, $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{\Lambda^3}{\lambda^3}$, следовательно, $v_{gp} = \frac{c\lambda}{\Lambda} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$, см. рис. 8.10. Групповая скорость, естественно, всегда меньше скорости света и $v_{gp} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_c$ (в соответствии с концепцией парциальных волн $\theta \rightarrow \pi/2$). Заметим, что $v_{ф} \cdot v_{gp} = c^2$. Физический смысл — наклон фронта волны

по отношению к проводящей плоскости.

Мощность бегущей волны в волноводе. Продольный ток. Волновое сопротивление

Проведем вычисления для волны H_{10} в прямоугольном ($a \times b$) волноводе. По теореме Пойнтинга (для комплексных амплитуд) мощность бегущей волны

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [E H^*]_z dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [E_x H_y^* - E_y H_x^*] dS,$$

где S — поперечное сечение волновода.

Для H_{10} с точностью до амплитудного множителя, как было получено ранее,

$$E_x = 0,$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$H_x^* = -j\frac{2a}{\Lambda} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

В выражениях для полей опущена единичная, но размерная амплитуда $H_{z0} = 1$ [А/м]. Интегрируем:

$$P = \frac{1}{2} \frac{2a}{\Lambda} \frac{\omega\mu_0 a}{\pi} b \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a^2}{\Lambda} \frac{\omega\mu_0 b}{\pi} \frac{a}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi c \mu_0 a^3 b}{\lambda \pi \Lambda^2},$$

$$P = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{a^3 b}{\Lambda \lambda} \left[\frac{\text{А}^2 \text{Ом} \cdot \text{м}^4}{\text{м}^2 \text{м}^2} = \text{Вт} \right].$$

Добавленная размерность $[\text{А}^2/\text{м}^2]$ связана с опущенной единичной амплитудой магнитного поля H_{z0} .

Рассчитаем величину продольного тока, текущего в широкой стенке. Настил тока

$$|K_z| = |H_x| = \frac{2a}{\Lambda} \sin \frac{\pi x}{a} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right].$$

$$I = \int_0^a |K_z| dx = \frac{2a}{\Lambda} \cdot \frac{a}{\pi} \cdot 2,$$

$$I = \frac{4a^2}{\pi \Lambda} \left[\frac{\text{А м}^2}{\text{м м}} = \text{А} \right].$$

По аналогии с одномерной линией передачи определим волновое (характеристическое) сопротивление по току и мощности:

$$Z_{0I} = \frac{2P}{I^2} = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{a^3 b}{\Lambda \lambda} \left(\frac{\pi \Lambda}{4a^2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{a} \frac{\Lambda}{\lambda} [\text{Ом}],$$

Рассчитаем напряжение в центре поперечного сечения волновода:

$$U = b|E_y| = \frac{\omega \mu_0 a b}{\pi} = \frac{2ab}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[\frac{\text{А м}^2}{\text{м м}} \text{Ом} = \text{В} \right].$$

Волновое сопротивление по напряжению и мощности определяется так:

$$Z_{0U} = \frac{U^2}{2P} = \frac{4a^2 b^2}{\lambda} \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\Lambda \lambda}{a^3 b} = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{a} \frac{\Lambda}{\lambda} [\text{Ом}].$$

Неоднозначность ($Z_{0I} \neq Z_{0U}$) — следствие поперечной двумерности волновода.

***E*-волны в прямоугольном волноводе**

Для *E*-волн в прямоугольном волноводе $a \times b$ рассуждения аналогичны. *E*-волны, или ТМ-волны, характеризуются условием $H_z \equiv 0$. Удобно все компоненты поля выразить через E_z :

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H},$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0), \text{ т.е. } \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = k^2 \vec{E}.$$

Поскольку $\text{div } \vec{E} = 0$, то $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$; отсюда

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0, \text{ т.е. } E_z = f(x, y) e^{-\Gamma z}.$$

Обозначено, как прежде, $\Gamma^2 = k_c^2 - k^2$, $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Из граничных условий на стенках $E_t = 0 = E_z$ при $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$.

Опуская множители $e^{-\Gamma z}$, $e^{j\omega t}$ и полагая, что амплитуда $E_{0z} = 1$ [В/м], получаем

$$E_z = \sin k_x x \sin k_y y, \text{ где } k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b},$$

$$E_x = -\frac{\Gamma k_x}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y, \quad H_x = j \frac{\omega \epsilon \epsilon_0 k_y}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_x x \cos k_y y,$$

$$E_y = -\frac{\Gamma k_y}{k_x^2 + k_y^2} \sin k_x x \cos k_y y, \quad H_y = -j \frac{\omega \epsilon \epsilon_0 k_x}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y.$$

Здесь не может обратиться в нуль ни одно из чисел m и n (они характеризуют число полуволн, укладываемых вдоль a и b), т.к. при этом все компоненты становятся равными нулю. Это естественно, ибо отсутствие изменения поля E_z вдоль какой-либо стенки означает, что на соседней стенке $E_t \neq 0$ (т.к. всегда есть E_z) — т.е. нарушены граничные условия.

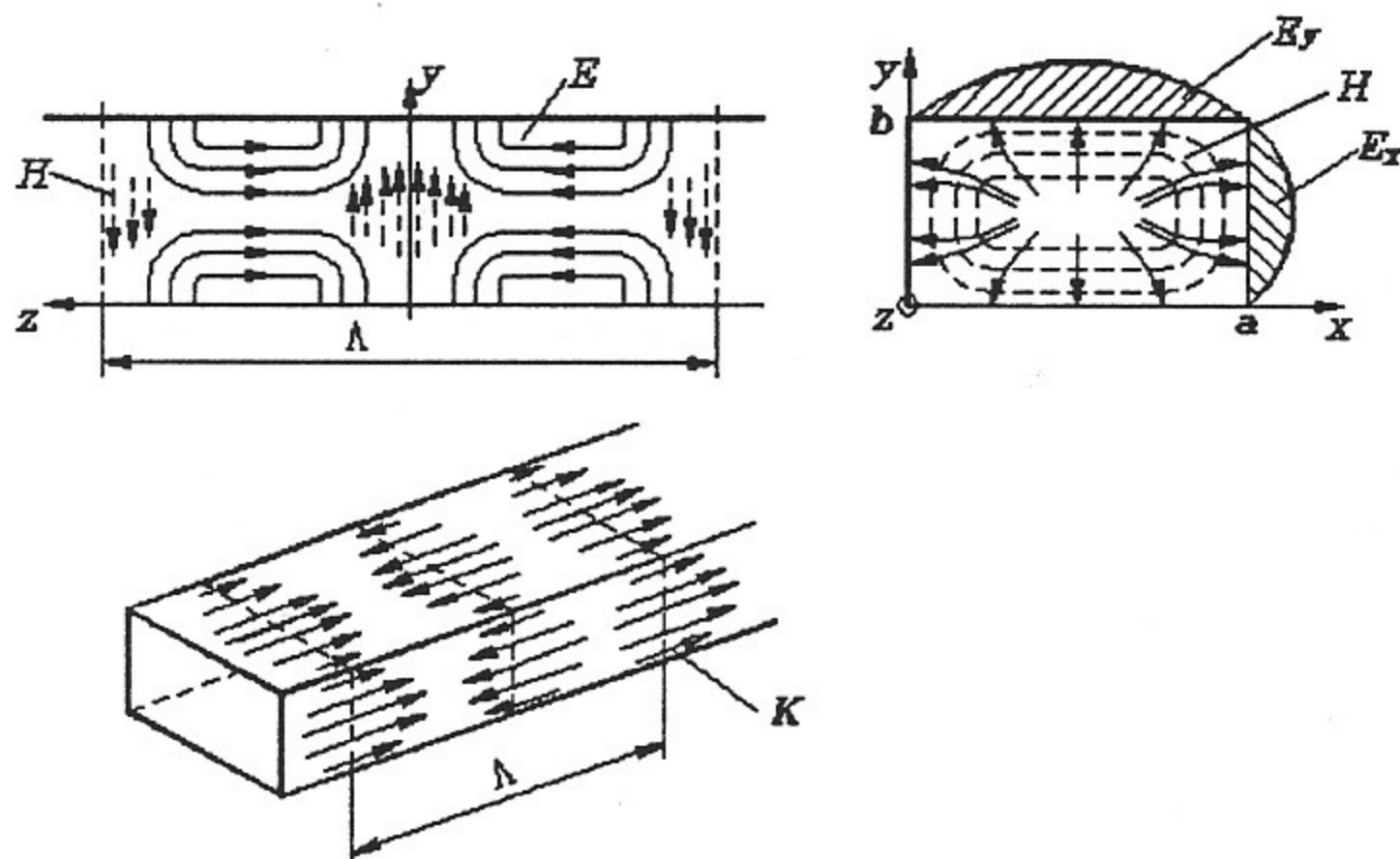


Рис. 8.11. Поля и токи волны E_{11} .

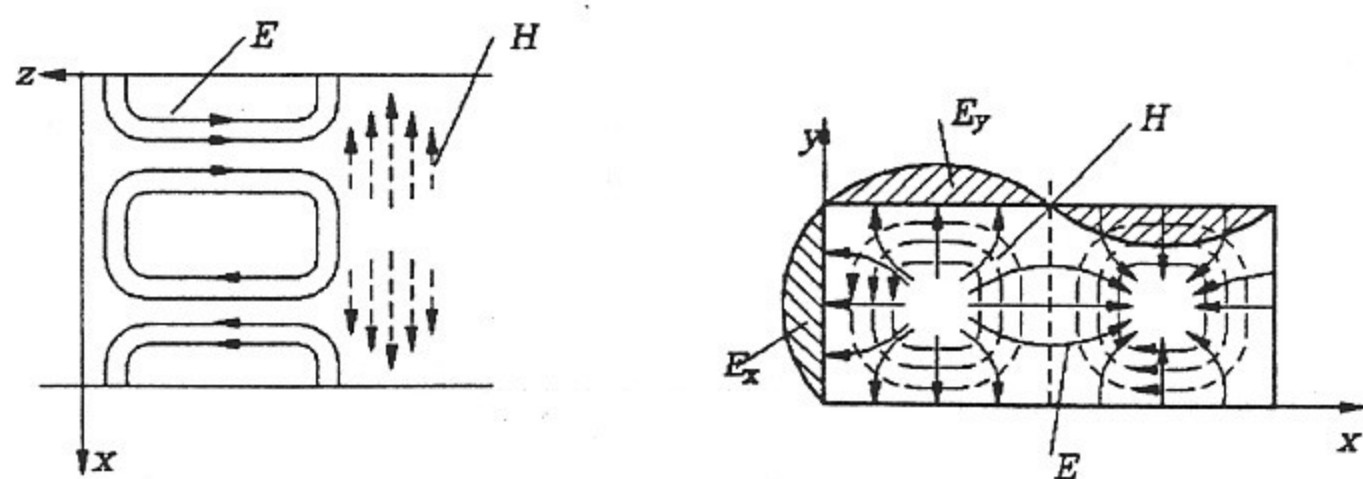


Рис. 8.12. Поля волны E_{21} .

Главный тип (главная мода) колебаний — E_{11} . Для воздушного заполнения

$$\lambda_c = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}.$$

Распределение полей представлено на рис. 8.11. Токи в стенках направлены только вдоль оси z .

На рис. 8.12 показано распределение полей для моды E_{21} .

Типы волн в круглых волноводах

H -волны (ТЕ-волны), $E_z \equiv 0$

Исключая $\vec{E}$ из уравнений Максвелла, получаем

$$\text{rot rot } \vec{H} = k^2 \vec{H}, \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам, выбрав в качестве оси z ось волновода, рис. 8.13.

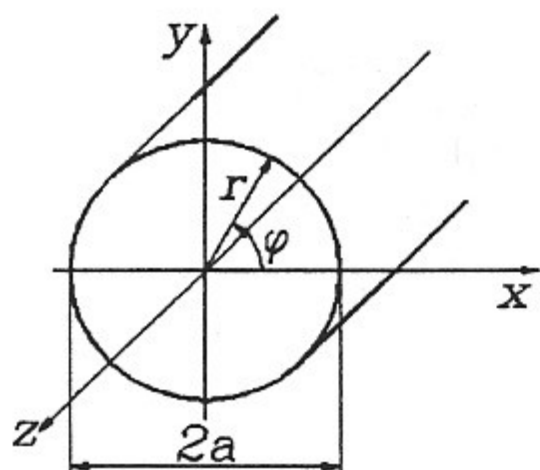


Рис. 8.13. Система координат для расчета волн в круглом волноводе.

Ищем $H_r, H_\varphi, H_z, E_r, E_\varphi$.

Тождество

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$$

справедливо в любой системе координат.

Как и ранее, для составляющей H_z ищем

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0.$$

Учитывая выражение для лапласиана от скаляра, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0.$$

Как и ранее, все составляющие поля выражаются через H_z ;

$$H_z = H_z(r, \varphi) e^{-\Gamma z}$$

— искомое решение для продольной компоненты. Из уравнений Максвелла, пользуясь выражением $\text{rot } \vec{H}$ и $\text{rot } \vec{E}$ в цилиндрических координатах и учитывая, что

$\frac{\partial}{\partial z} = -\Gamma, E_z \equiv 0$, получим связь между $H_r, H_\varphi, E_r, E_\varphi$ и H_z :

$$\begin{aligned} \Gamma E_\varphi &= -j\omega\mu_0 H_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} &= -\frac{\Gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0}{\Gamma} H_\varphi, \\ \Gamma E_r &= j\omega\mu_0 H_\varphi, & \frac{\partial H_z}{\partial r} &= -\frac{\Gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0}{\Gamma} H_r, \end{aligned}$$

аналогично тому, что было получено для прямоугольного волновода.

Далее, обозначив $\Gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0 = \Gamma^2 + k^2 \equiv k_c^2$, т.е. $\Gamma^2 = k_c^2 - k^2$, ищем решение

$$H_z(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi):$$

$$\Phi \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \Phi \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k_c^2 R \Phi = 0;$$

умножая на $\frac{r^2}{R\Phi}$, получаем

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k_c^2 r^2 = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\kappa^2; \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_c^2 - \frac{\kappa^2}{r^2} \right) R = 0.$$

$$\text{Частные решения: } \Phi = \frac{\cos \kappa \varphi}{\sin \kappa \varphi},$$

Второе уравнение называется уравнением Бесселя. Одно из его частных решений: $R = J_\kappa(k_c r)$ — функция Бесселя 1-го рода порядка κ .

$$\text{Таким образом, } H_z = \frac{\cos \kappa \varphi}{\sin \kappa \varphi} J_\kappa(k_c r) e^{-\Gamma z}.$$

Отсюда могут быть найдены остальные составляющие поля. Учтем граничные условия:

а) Φ — периодическая функция: $\Phi[\kappa(\varphi + 2\pi)] = \Phi(\kappa\varphi + 2\pi\kappa) = \Phi(\kappa\varphi)$, что возможно, если $2\pi\kappa = 2\pi m$ — в силу цилиндрической симметрии при полном обходе (или чаще) все повторяется.

$$\kappa = m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Оба выражения для Φ удовлетворяют этому условию периодичности:

$$\Phi = \frac{\cos \kappa \varphi}{\sin \kappa \varphi}.$$

Отсюда следует также, что $R(r) = J_m(k_c r)$, т.е. Бесселевы функции — целого порядка.

б) $H_n = 0$, или $H_r = 0$ на стенке волновода, т.е. при $r = a$. Но

$$H_r \sim \frac{\partial H_z}{\partial r}, \quad \text{т.е.} \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_a \sim \left. \frac{dR}{dr} \right|_a = \left. \frac{dJ_m(k_c r)}{dr} \right|_{r=a}.$$

Если обозначить производную по аргументу $J'_m = \frac{dJ_m}{d(k_c r)}$, то $\frac{dJ_m}{dr} = J'_m k_c$, и из граничного условия б) следует

$$J'_m(k_c a) = 0.$$

Это условие определяет критическую длину волны волновода, т.к.

$$k_c = \frac{t'_{mn}}{a},$$

где $k_c a = t'_{mn}$ — n -й нуль 1-ой производной функции Бесселя m -го порядка.

Для воздушного заполнения волновода

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi a}{t'_{mn}}$$

$$\text{и } \Gamma = j \frac{2\pi}{\Lambda}, \text{ где } \Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}.$$

Таким образом, для H -волн

$$H_z = \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} J_m(k_c r) e^{-\Gamma z}$$

с точностью до множителя, который в данном случае мы положим равным $H_{z0}[\text{А/м}] = 1$. По вышеприведенным формулам рассчитываются H_r , H_φ , E_r , E_φ .

Типы волн H_{mn} определяются числами:

m — число полных вариаций волн при обходе по азимуту,

n — номер нуля производной по r , т.е. число экстремумов (полуволн) по радиусу — от 0 до a .

Наибольший интерес представляют волны типа H_{11} и H_{01} .

Для H_{11} $t'_{11} = 1.841$ — первый ($n = 1$) нуль производной функции Бесселя 1-го ($m = 1$) порядка (см. рис. 8.14).

Для H_{01} $t'_{01} = 3.832$ — первый ($n = 1$) нуль производной функции Бесселя 0-го ($m = 0$) порядка.

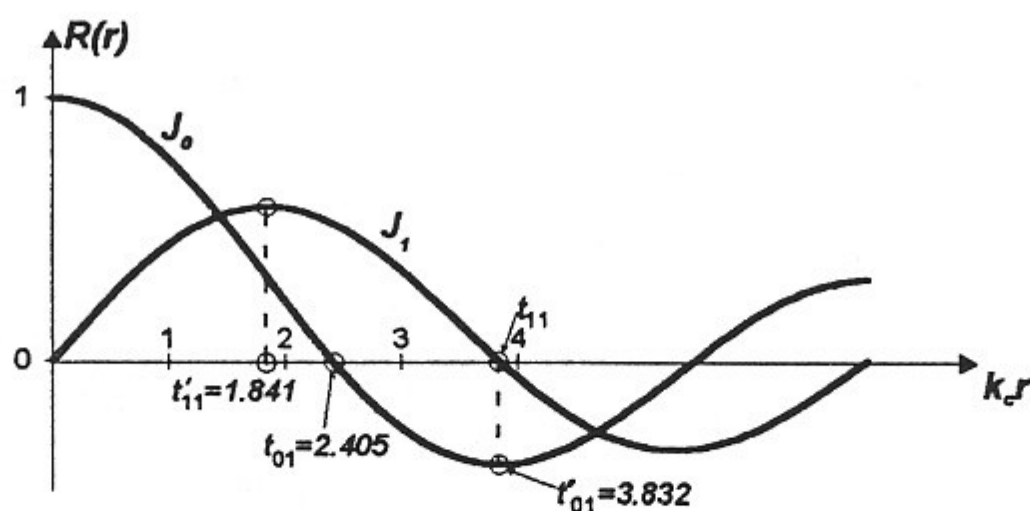


Рис. 8.14. Корни и экстремумы функций Бесселя J_0 и J_1 .

Следовательно, для H_{11}

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{t'_{11}} = 3.41a$$

— это главный тип H -волны в цилиндрическом волноводе, у него самая большая критическая длина волны λ_c .

Для волны H_{01}

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{t'_{01}} = 1.64a.$$

На рис. 8.15 показано распределение полей для волн H_{11} и H_{01} .

Волна H_{11} в круглом волноводе — аналог волны H_{10} в прямоугольном волноводе.

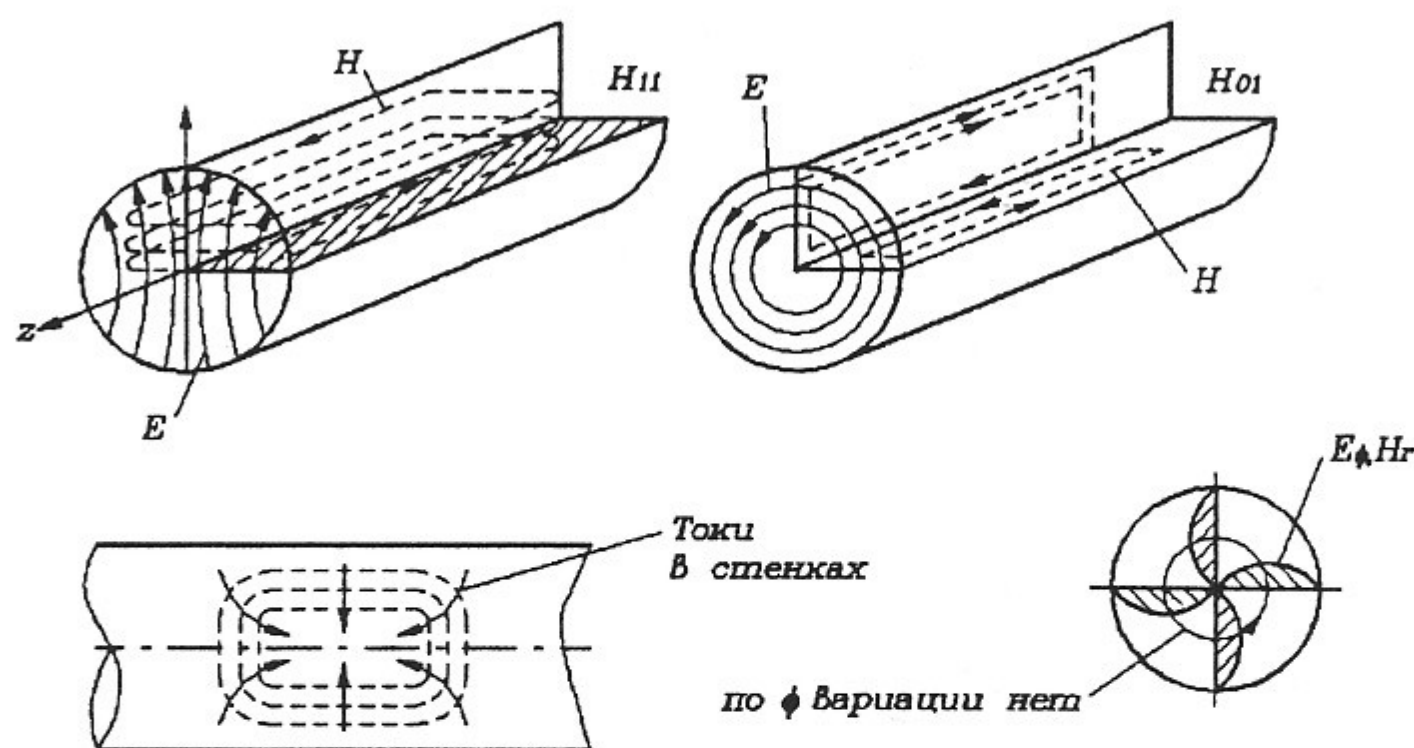


Рис. 8.15. Поля волн H_{11} и H_{01} в круглом волноводе.

Для волны H_{01} токи в стенках — круговые, продольных нет. Если эта волна может распространяться, то она на неоднородностях (изгибы и пр.) может переходить в волну H_{11} , т.к. H_{11} также может распространяться: $\lambda_{cH11} > \lambda_{cH01}$.

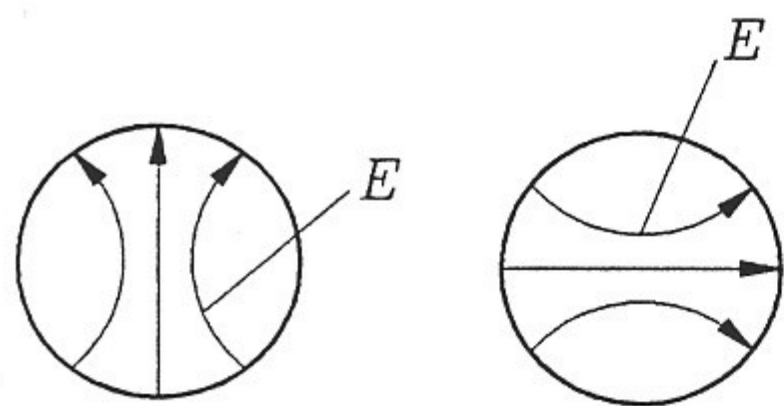


Рис. 8.16. Поляризационное вырождение волны H_{11} .

Волна H_{11} — главный тип, токи — и продольные и поперечные (как в H_{10} прямоугольного волновода). Но в силу цилиндрической симметрии эта волна двукратно вырождена — и $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ удовлетворяют граничным условиям ($m=1$), см. рис. 8.16.

Оба решения — с одной v_ϕ (одной λ_c) — могут существовать. При небольшой эллиптичности волновода вырождение снимается, т.к. для каждой ориентации становятся несколько различными λ_c (т.е. v_ϕ).

E -волны в круглом волноводе: $H_z \equiv 0$

Все уравнения и решения аналогичны вышеприведенным, но $E_t = E_z|_{r=a}$.

Из граничных условий следует $J_{mn}(k_c a) = 0$, т.к.

$$E_z = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} J_m(k_c r) e^{-\Gamma z}.$$

Для воздушного заполнения волновода

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi a}{t_{mn}},$$

где t_{mn} — n -й корень (нуль) функции Бесселя m -го порядка.

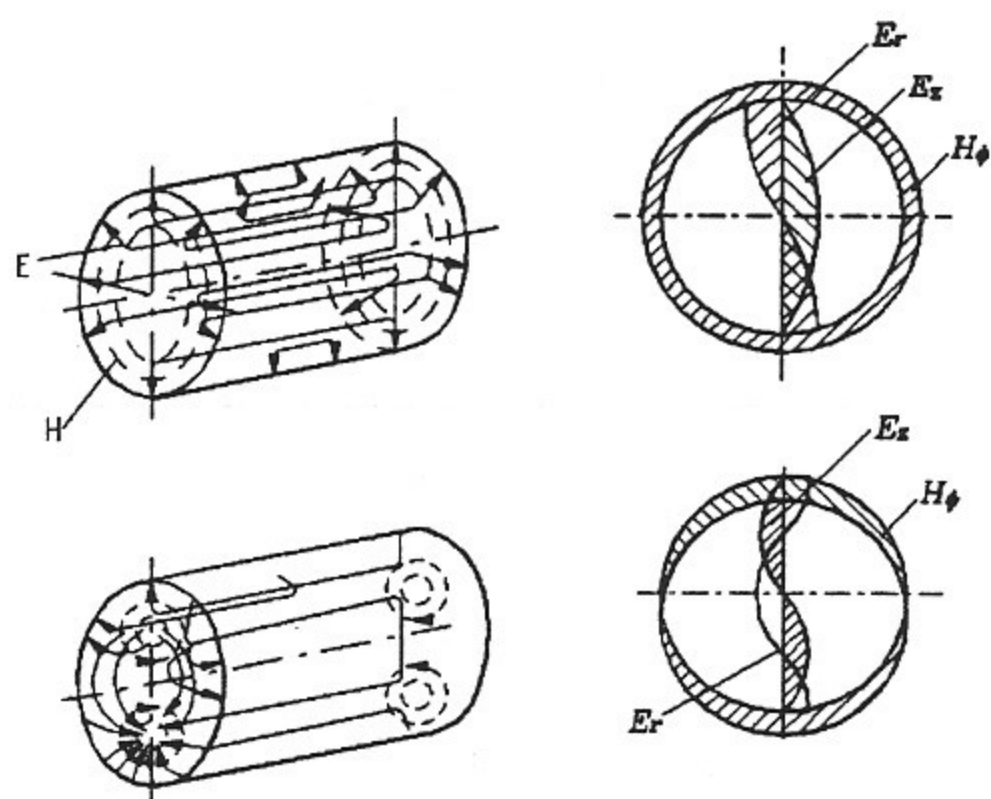


Рис. 8.17. Поля волн E_{01} и E_{11} в круглом волноводе.

Волна E_{01} является главным типом E -волн в круглом волноводе, т.к. $t_{01} = 2.405$ — минимальный нуль функций вида $J_m(k_c r)$, $\lambda_c = \frac{2\pi a}{t_{01}} = 2.61a$.

Для волны E_{11} $t_{11} = t'_{01} = 3.832$, $\lambda_c = 1.64a$. На рис. 8.17 представлены картины полей волн E_{01} и E_{11} .

Волновод как линия передачи

Обычно размеры волновода выбираются такими, чтобы мог распространяться лишь один (главный) тип колебаний. В этом случае волновод может быть представлен эквивалентной линией передачи. Покажем это на примере H -волн в прямоугольном волноводе.

$$(E_z \equiv 0) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = j\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E} & (1) \\ \text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Из (1)} \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon\epsilon_0 E_x \quad (a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon\epsilon_0 E_y.$$

$$\text{Из (2)} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_x \quad (б)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_y.$$

Для бегущей волны (один тип) $\frac{\partial}{\partial z} = -\Gamma$, т.е.

$$-\Gamma E_y = j\omega\mu_0 H_x, \quad \Gamma E_x = j\omega\mu_0 H_y,$$

или

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \eta, \quad (\Gamma = j\beta).$$

Введем эквивалентное поперечное напряжение $U(z)$ и продольный ток $I(z)$ для произвольного поперечного сечения z так, что:

$$E_x = U(z)f_1(x, y); \quad E_y = U(z)f_2(x, y);$$

$$H_x = I(z)g_1(x, y); \quad H_y = I(z)g_2(x, y).$$

Учтем, что

$$\frac{f_1}{g_2} = -\frac{f_2}{g_1} = \frac{I}{U}\eta = \eta_1 = \text{const},$$

т.к. для бегущей волны $\frac{I(z)}{U(z)} = \text{const}$.

Тогда из (б)

$$\frac{dU(z)}{dz} = -j\omega\mu_0 I(z) \frac{g_1(x, y)}{f_2(x, y)},$$

т.е.

$$\frac{dU(z)}{dz} = \frac{-j\omega\mu_0}{\eta_1} I.$$

Далее, из (а)

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\omega\epsilon\epsilon_0 E_x.$$

Ранее было получено для H -волн:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\Gamma^2 + k^2}{-j\omega\mu_0} \cdot E_x.$$

Таким образом, можно выразить E_x через H_z :

$$E_x = -\frac{j\omega\mu_0}{\Gamma^2 + k^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

Последние три уравнения дают

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \left(\frac{\Gamma^2 + k^2}{-j\omega\mu_0} - j\omega\epsilon\epsilon_0 \right) E_x = \frac{\Gamma^2}{-j\omega\mu_0} E_x,$$

или

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{\Gamma^2}{j\omega\mu_0} U(z) \frac{f_1(x, y)}{g_2(x, y)},$$

т.е.

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{\Gamma^2 \eta_1}{j\omega\mu_0} U.$$

Получены уравнения длинной линии с постоянной распространения

$$\sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\eta_1} \cdot \frac{\Gamma^2 \eta_1}{j\omega\mu_0}} = \Gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\Lambda}$$

и с характеристическим сопротивлением

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\eta_1} \cdot \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma^2 \eta_1}} = \frac{\omega\mu_0}{\eta_1 \beta} = Z_0,$$

которое зависит от η_1 и определяется поперечным распределением полей, т.е. зависит от функций f_1, f_2, g_1, g_2 .

Выше показано:

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{g_2}{g_1} \quad (\text{I}).$$

Кроме того, если принять нормировку по мощности бегущей волны

$$\frac{1}{2} \text{Re} UI^* = P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S [\vec{E} \vec{H}^*] dS = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dS,$$

то

$$\int_S (f_1 g_2^* - f_2 g_1^*) dS = 1 \quad (\text{II}).$$

$\eta_1 = \frac{f_1}{g_2}$, т.е. Z_0 зависит от отношения функций. Для четырех функций их отношение определяется тремя уравнениями, — имеются (I) и (II).

Следовательно, η_1 не определено однозначно, а с точностью до множителя — не хватает одного уравнения. Таким образом, и Z_0 не определено однозначно, что мы видели на примере волны H_{10} , для которой

$$Z_{0I} = \frac{2P}{I^2} = \frac{\pi^2}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{a} \frac{\Lambda}{\lambda},$$

$$Z_{0U} = \frac{U^2}{2P} = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{a} \frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Таким образом, имеет смысл лишь отношение волновых сопротивлений различных волноводов. Но именно этим определяется отражение.

Как только произвольный множитель в Z_0 выбран (например, $Z_0 = Z_{0I}$), можно однозначно рассчитать параметры длинной линии, эквивалентной волноводу с H -волной данного типа. Эквивалентная линия для волны H_{10} прямоугольного волновода показана на рис. 8.18.

Она имеет элементарные ячейки, образованные погонными элементами $L_{\text{прод}1}$, $L_{\text{поп}1}$, C_1 . Их величины предлагается определить самостоятельно.

Эта линия — фильтр верхних частот. Если $\lambda < \lambda_c = 2a$, то волновод прозрачен (волны распространяются), т.к.

$$\frac{1}{\omega^2 L_{1\text{нон}} C_1} < 1.$$

и поперечная реактивность эквивалентна емкости (см. рис. 8.19).

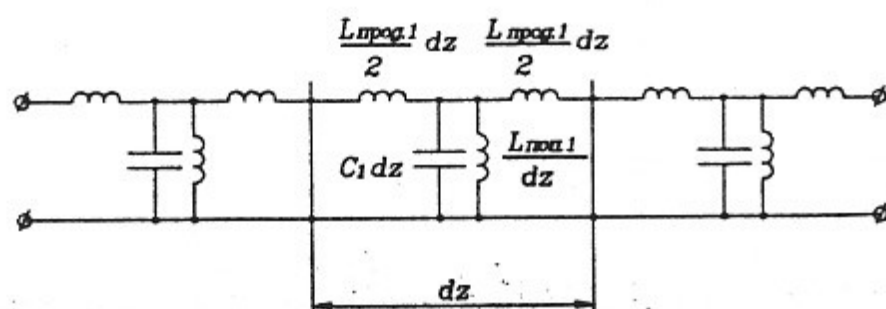


Рис. 8.18. Эквивалентная линия для волны H_{11} в прямоугольном волноводe.

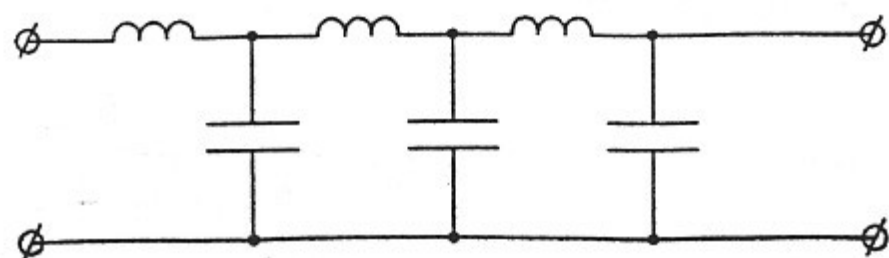


Рис. 8.19. Эквивалентная линия в области прозрачности.

При $\lambda > \lambda_c$ ($\omega < \omega_c$) поперечная реактивность эквивалентна индуктивности. Ослабление сигнала происходит по закону $e^{-\alpha z}$, рис. 8.20.

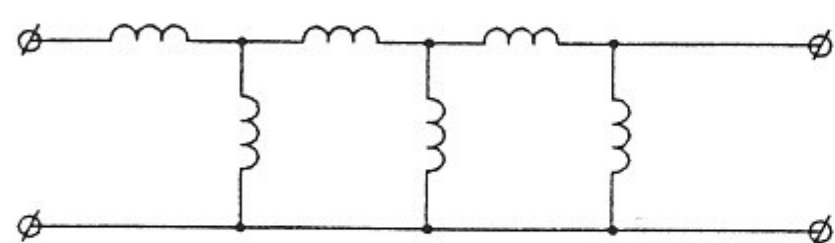


Рис. 8.20. Эквивалентная линия в области непрозрачности.

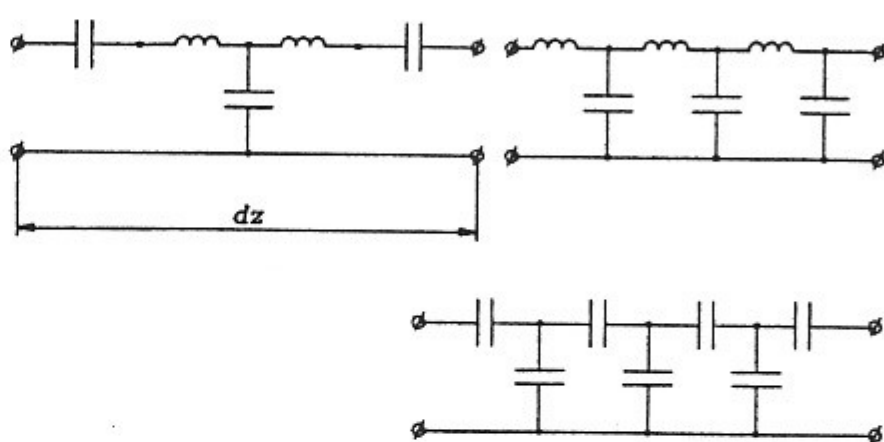


Рис. 8.21. Элементарная ячейка эквивалентной линии, области прозрачности и непрозрачности для волны E_{01} .

Аналогичная ситуация имеет место для E -волн, см. рис. 8.21.

Так иллюстрируется пригодность расчетного аппарата длинных линий для волноводов с одним типом волн. Все понятия применимы, Z_0 определяется неоднозначно.

Поверхностный эффект и потери в волноводах

Для идеального проводника на поверхности $E_t = 0$, $H_n = 0$.

Для реальных проводников проводимость велика, но конечна, поэтому $E_t \neq 0$ на поверхности, т.к. есть падение напряжения при протекании тока в стенке. На поверхности также отлично от нуля магнитное поле, $H_t \neq 0$. Следовательно внутрь стенки уходит часть энергии: $E_t H_t = P_n \neq 0$. Вектор Умова-Пойнтинга направлен нормально к поверхности стенки — это потери в стенке.

Вычислить энергию потерь можно приближенно, полагая, что поля в волноводе (в том числе H_t на стенках) имеют ту же конфигурацию и величину, что и в отсутствие потерь. Основанием для такого предположения является очень большая проводимость металлических стенок волновода — такая, что $E_t \ll E_n$.

Итак, полагаем, что на поверхности магнитное поле (H_t) задано — из решения для идеально проводящих стенок. Решим задачу о распространении электромагнитного поля в металле с удельной электропроводностью γ [1/Ом·м] и магнитной проницаемостью $\mu \neq 1$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м).

Уравнения Максвелла в этом случае (для синусоидальных изменений поля с частотой ω) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{J}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu\mu_0 \vec{H}. \end{aligned}$$

Током смещения в металле пренебрегаем по сравнению с током проводимости, т.к. $\gamma \gg \omega\epsilon\epsilon_0$.

Учтем закон Ома: $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ [$\text{А/м}^2 = (1/\text{Ом} \cdot \text{м}) \cdot (\text{В/м})$].

Тогда

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\mu_0 \vec{H}.$$

Рассмотрим плоскую задачу. Ось z направим перпендикулярно стенке волновода: поток $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ направлен по z (рис. 8.22).

Пусть $E_y = E_z = E_x = H_z = 0$; $H_t = H_y$, $E_t = E_x$ — условия на поверхности стенок (граничные условия). Пусть H_t задано. E_t определим ниже.

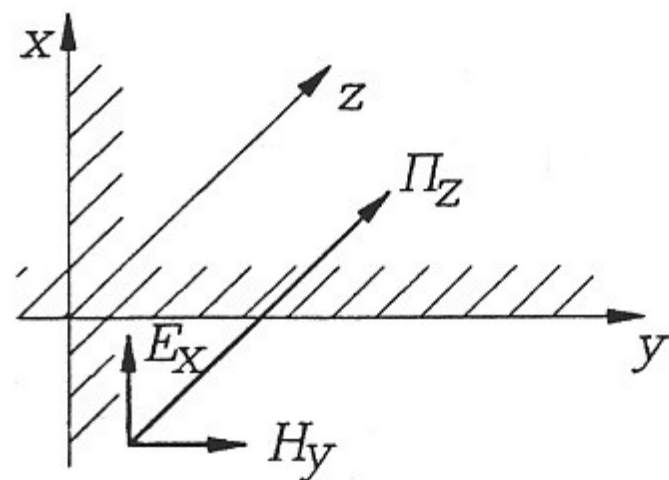


Рис. 8.22. К расчету скин-эффекта.

Тогда из

$$\text{rot} \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i}^0 & \vec{j}^0 & \vec{k}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ N_x & N_y & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{где } \vec{N} = \vec{E} \text{ или } \vec{N} = \vec{H},$$

получаем $\text{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial z}$, $\text{rot}_y \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$, то есть

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu\mu_0 H_y.$$

Ищем решение в виде $Ne^{-\Gamma_m z}$, т.е. $\frac{\partial}{\partial z} = -\Gamma_m$, тогда

$$\Gamma_m H_y = \gamma E_x, \tag{1}$$

$$\Gamma_m E_x = j\omega\mu\mu_0 H_y. \tag{2}$$

Перемножая, получаем

$$\Gamma_m = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \sqrt{j}.$$

$$j = e^{j\pi/2}; \quad \sqrt{j} = \pm e^{j\pi/4} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\text{т.е. } \Gamma_m = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} (1 + j) = \alpha_m + j\alpha_m.$$

$$E_x, H_y = Ne^{-\alpha_m z} e^{-j\alpha_m z}.$$

Последнее равенство означает, что поле в металле с глубиной ослабевает с коэффициентом затухания

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}},$$

т.е. амплитуда полей E и H уменьшается в e раз на глубине

$$z_1 = \delta = \frac{1}{\alpha_m} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\gamma}}.$$

δ — это глубина проникновения поля в металл, так называемая толщина скин-слоя. Резкое ослабление поля с глубиной носит название поверхностный эффект, или скин-эффект, от английского skin — кожа. Толщина скин-слоя для некоторых металлов приведена в таблице 8.1.

Табл. 8.1. Толщина скин-слоя на частоте 10 ГГц.

Материал	Проводимость γ [МСм/м]	Толщина скин-слоя δ [мкм] на частоте $f = 10^{10}$ Гц ($\lambda = 3$ см)
Серебро	61.7	0.64
Медь	58	0.66
Алюминий	37.2	0.82
Латунь	15.7	1.27

Таким образом, какова бы ни была форма поперечного сечения волновода, результат решения плоской задачи, которую мы рассмотрели, применим с высокой точностью, так как $\delta < R_{min}$ (см. рис. 8.23).

Длина волны в металле

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\alpha_m} = 2\pi\delta;$$

на этом расстоянии от начала отсчета амплитуда поля убывает в $e^{2\pi} = 535$ раз, а его мощность в 287000 раз (затухание равно 54.6 дБ). При таком поглощении уже нельзя говорить о волновом гармоническом процессе. Колебания становятся аperiodическими затухающими.

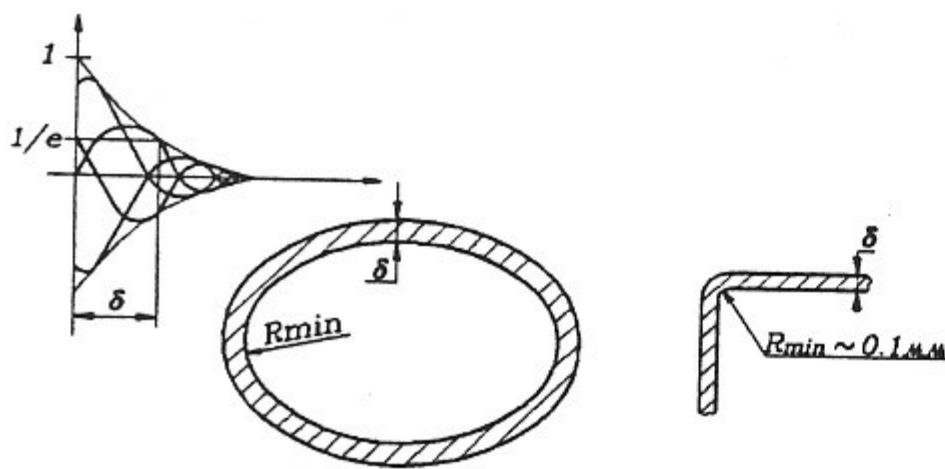


Рис. 8.23. Толщина скин-слоя в сравнении с размерами волновода.

Для вычисления потерь важно знать так называемое поверхностное сопротивление металла

$$Z_m = \frac{E_x}{H_y}.$$

Это сопротивление квадрата поверхности (любого размера)

$$Z_m = \frac{U}{I} = \frac{E_x l}{H_y l}.$$

Из уравнений (1) и (2)

$$Z_m = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu\mu_0}{\Gamma_m} = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}}(1+j) [\text{Ом}].$$

Поверхностное сопротивление позволяет найти E_t по известному H_t :

$$E_t = Z_m H_t.$$

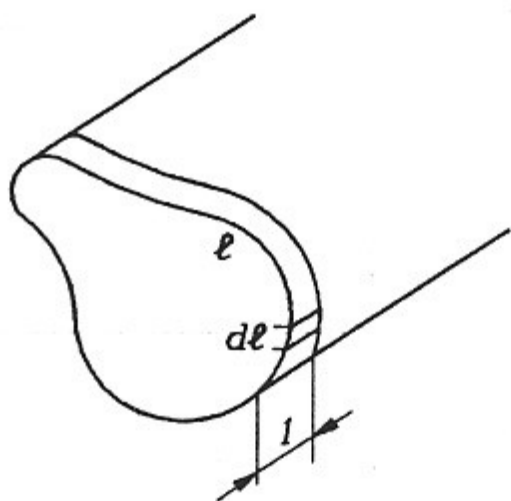
Для волноводов с малыми потерями ($E_t \ll E_n$; $\gamma \gg \omega\epsilon\epsilon_0$) это условие заменяет граничное условие $E_t = 0$ и называется граничным условием Леонтовича.

По известному значению H_t нетрудно найти мощность потерь:

а) на единицу площади стенки:

$$\begin{aligned} P_{n0} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{P}] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}(E_t H_t^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(Z_m |H_t|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}} |H_t|^2 = \frac{1}{2} |K|^2 \frac{1}{\delta\gamma} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]. \end{aligned}$$

б) на единицу длины волновода (интеграл по периметру сечения, рис. 8.24.):



$$P_{n1} = \int_l \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{2\gamma}} |H_t|^2 dl.$$

Отсюда вычисляется α — постоянная затухания, связанная с потерями в стенках:

$$dP = -P_{n1} dz, \text{ или } \frac{dP}{dz} = -P_{n1},$$

Рис. 8.24. К расчету потерь на единицу длины волновода.

с другой стороны $P = P_0 e^{-2\alpha z}$ ($U = U_0 e^{-\alpha z}$),

где P — мощность бегущей волны, т.е.

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_{n1}}{P} = \frac{1}{4P} \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{2\gamma}} \int_l |H_t|^2 dl.$$

Пользуясь решениями уравнений Максвелла для волноводов без потерь (H_t задано), вычислим α для некоторых типов волн (положим $\mu = 1$ для материала стенки), рис. 8.25.

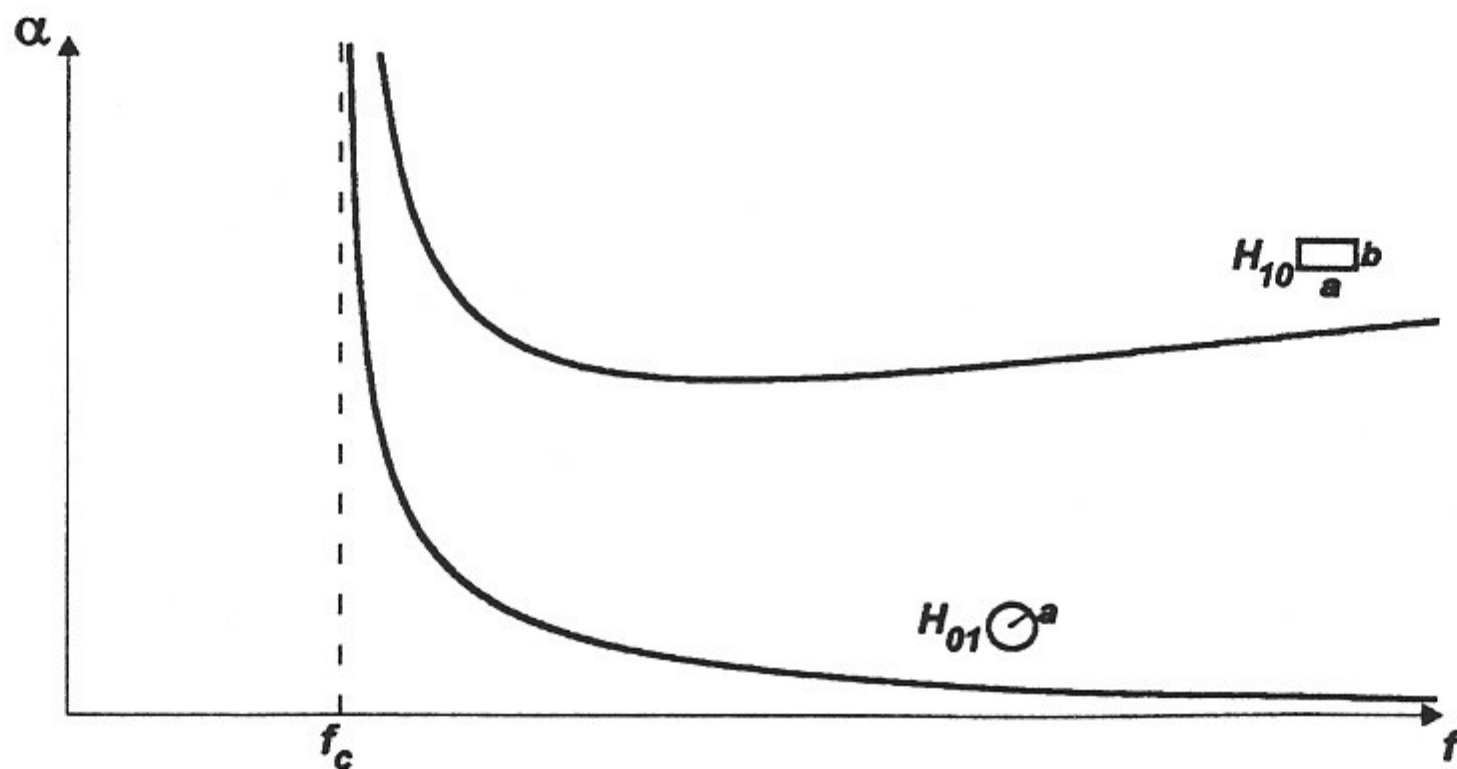


Рис. 8.25. Затухание для волн H_{10} прямоугольного и H_{01} круглого волноводов в зависимости от частоты.

1) Волна H_{10} в прямоугольном волноводе сечением $a \times b$:

$$\alpha = \frac{1}{\delta \gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{b} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}.$$

Характер зависимости $\alpha(\lambda)$ такой же для всех других типов H и E , кроме волн типа H_{0m} в круглом волноводе.

2) Волна H_{01} в круглом волноводе с радиусом a :

$$\alpha = \frac{1}{\delta\gamma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}}.$$

Здесь ход $\alpha(\lambda)$ другой, затухание уменьшается с ростом частоты (рис. 8.25).

Физическое объяснение — наличие только круговых токов в волне H_{01} круглого волновода, т.е. только поперечных токов, а они с ростом частоты уменьшаются, т.к. удаление от λ_c ведет к преобладанию продольных токов.

На рис. 8.26 показано изменение формы прямоугольного волновода с волной H_{10} , преобразующее его в круглый волновод с волной H_{01} . Обратите внимание, что продольные токи в стенках a при смыкании взаимно погашаются.

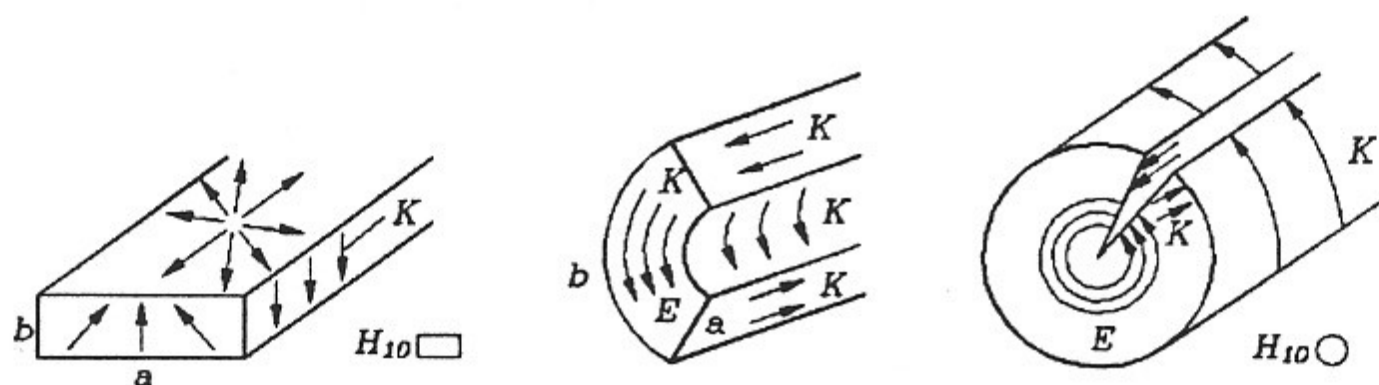


Рис. 8.26. Деформация, преобразующая прямоугольный волновод с волной H_{10} в круглый с волной H_{01} .

Затухание α зависит также от размеров волновода и, естественно, от δ — толщины скин-слоя.

Коэффициент затухания часто выражают в дБ/м. Связь между двумя вариантами представления коэффициента затухания:

$$A \left[\frac{\text{дБ}}{\text{м}} \right] = 8.686 \alpha \left[\frac{1}{\text{м}} \right].$$

Так для волновода сечением $a \times b = 23 \times 10$ мм затухание составляет 0.1 дБ/м (около 2 % по мощности на 1 м длины) на частоте 12 ГГц ($\lambda = 2.5$ см).

Как показано выше, мощность потерь на единицу площади

$P_{n0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}} |H_t|^2$, но $|H_t| = K$ ($\left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$ — настил тока), $\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}} = \frac{1}{\delta\gamma}$ — из определения δ . Отсюда

$$P_{n0} = \frac{1}{2} |K|^2 \frac{1}{\delta\gamma},$$

т.е. удельная (на единицу площади) мощность потерь на СВЧ равна мощности потерь синусоидального тока с амплитудой K , протекающего в слое толщиной δ . Величина

$$\frac{1}{\delta\gamma} = R_n$$

является сопротивлением квадратного участка поверхности. Это сопротивление не зависит от размера квадрата.

Полые резонаторы

В СВЧ диапазоне применяются резонансные системы, представляющие собой объемы, ограниченные хорошо проводящими металлическими стенками. Если внутри такого объема создано электромагнитное поле, то оно затем существует в течение некоторого времени в виде затухающих электромагнитных колебаний.

Чаще всего резонатор — это отрезок линии (или волновода), замкнутый на концах, хотя последнее не обязательно (например, сферический резонатор).

Параметры полых резонаторов

Параметры полых резонаторов: собственная частота f_p (частота собственных свободных колебаний), собственная добротность Q_0 , сопротивление (проводимость) при резонансе $R_{0e} = 1/G$, — соответствуют аналогичным параметрам радиотехнических колебательных контуров с сосредоточенными постоянными (L, C, r) и связаны с эквивалентными параметрами ($L_{эkv}, C_{эkv}, r_{эkv}$) теми же формулами. Однако для полых резонаторов эти параметры ($L_{эkv}, C_{эkv}, r_{эkv}$) сложно измерить, так как они имеют распределенный характер — и обычно полые резонаторы описываются теми параметрами, которые можно измерить (f_0, Q_0, R_{0e}).

1. Частота собственных колебаний f_p определяется из решения уравнений Максвелла для определенных граничных условий на стенках резонатора (так называемая задача о собственных значениях), зависит от формы и размеров резонатора.

2. Добротность определяют из энергетических соображений:

$$Q_0 = 2\pi \frac{W}{W_T} = \frac{\omega_p W}{P},$$

где W — запас энергии в резонаторе,

W_T — потери энергии за период,

P — активная мощность, поглощаемая стенками резонатора,

ω_p — круговая частота собственных колебаний.

3. Сопротивление при резонансе

$$R_{0e} = \frac{U^2}{2P} = 1/G,$$

где $U = \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$ — эквивалентное напряжение между так называемыми “точками включения”. Последний параметр определен с точностью до множителя (как и Z_0 волновода), множитель зависит от выбора точек a и b .

Поскольку резонаторы часто используются для ускорения пучков заряженных частиц, точки включения a и b обычно выбираются там, где пучок входит в резонатор и выходит из него, испытывая при проходе воздействие эквивалентного напряжения.

Резонатор в виде отрезка длинной линии

Пусть заданы L_1, C_1, R_1 , т.е. параметры длинной линии:

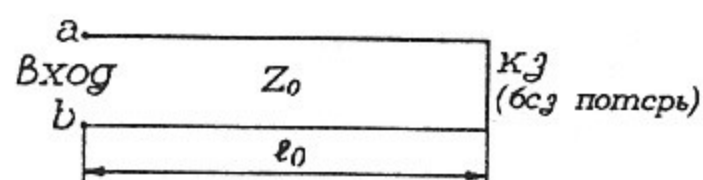


Рис. 9.1. Резонатор, образованный короткозамкнутой длинной линией.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \alpha = \frac{R_1}{2Z_0}, \Gamma = j\omega\sqrt{L_1 C_1} = j\frac{2\pi}{\Lambda} = j\frac{\omega}{v_\phi}.$$

Найдем параметры резонатора, образованного отрезком длинной линии, замкнутой на конце: ω_p, Q_0, R_{0e} .

1. Резонансная частота

Для отыскания ω_p полагаем $\alpha = 0$ (пока считаем, что линия не имеет потерь). Условия существования свободных колебаний — отсутствие источника энергии.

Если бы на входе был ток I , то $U = \frac{I}{Y_{ex}}$. Колебания при $I = 0$ ($U \neq 0$) возможны лишь при $Y_{ex} = 0$; таким образом, условие существования свободных колебаний:

$$Y_{ex} = 0.$$

Но $Y_{ex} = 1/Z_{ex} = \frac{1}{jZ_0 \tan \frac{\omega_p l_0}{v_\phi}}$; $Y_{ex} = 0$ при $\tan \frac{\omega_p l_0}{v_\phi} = \tan \frac{\pi}{2}$ (или $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Отсюда $\omega_p = \frac{\pi v_\phi}{2l_0}$; при $v_\phi = c$

$$\omega_p = \frac{\pi c}{2l_0}, f_p = \frac{c}{4l_0}, \lambda_p = \frac{c}{f_p} = 4l_0, l_0 = \frac{\lambda_p}{4}.$$

Таким образом, резонансная частота — та, при которой отрезок линии является четвертьволновым (если $n > 0$, то $\frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$, и т.д.).

2. Собственная добротность W — запас энергии. Если выбрать соответствующий момент времени, то $W = W_{M \max}$ или $W = W_{E \max}$, т.е. вся энергия может быть сосредоточена либо только в магнитном, либо только в электрическом поле.

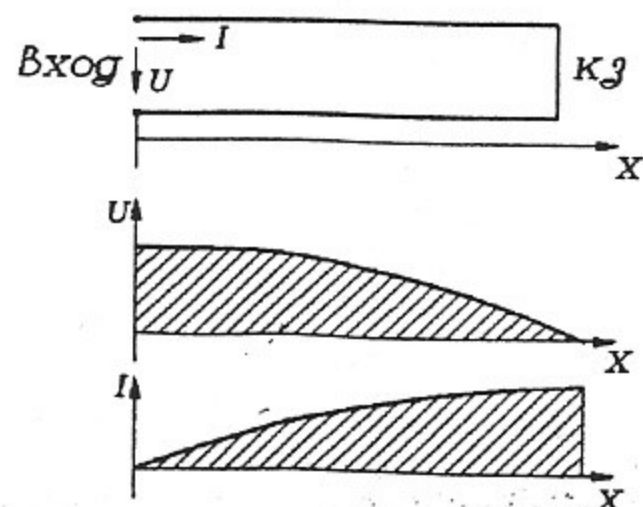


Рис. 9.2. Распределение напряжения и тока в короткозамкнутой линии.

$$Q_0 = \frac{2\pi f_p W}{P} = \frac{\omega_p W}{P}.$$

Необходимо знать распределение полей в резонаторе (в данном случае достаточно знать напряжение U и ток I).

В соответствии с рис. 9.2, распределение напряжения вдоль линии

$$U = U_{ex} \cos \frac{2\pi x}{\lambda_p},$$

а полный запас электрической энергии

$$W = W_{\text{Э max}} = \int_0^{\lambda_p/4} \frac{C_1 U^2}{2} dx = \int_0^{\lambda_p/4} \frac{C_1 U_{\text{ex}}^2}{2} \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda_p} dx = \frac{\lambda_p C_1 U_{\text{ex}}^2}{2\pi \cdot 2} \left[\frac{1}{2} \frac{2\pi x}{\lambda_p} \right]_0^{\lambda_p/4} = \frac{C_1 U_{\text{ex}}^2 \lambda_p}{2 \cdot 8}.$$

Поскольку $P = \frac{U_{\text{ex}}^2}{2R_{0e}}$, то

$$Q_0 = \frac{\omega_p W}{P} = \frac{\omega_p C_1 \lambda_p}{8} R_{0e} = \frac{2\pi c \lambda_p}{\lambda_p \cdot 8} C_1 R_{0e} = \frac{2\pi C_1}{8\sqrt{C_1 L_1}} R_{0e} = \frac{\pi}{4} \frac{R_{0e}}{Z_0}.$$

Заметим, что при воздушном заполнении линии

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}.$$

Для вычисления Q_0 здесь удобно определить вначале R_{0e} .

3. Шунтовое сопротивление

$$R_{0e} = Z_{\text{ex}}|_{\omega=\omega_p} = Z_0 \operatorname{th} \Gamma l_0; \Gamma = \alpha + j\beta.$$

Здесь потерями пренебрегать нельзя — они все определяют.

$$R_{0e} = Z_0 \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l) = Z_0 \frac{\operatorname{th} \alpha l_0 + j \operatorname{tg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_p}}{1 + j \operatorname{th} \alpha l_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_p}} \Big|_{l=\frac{\lambda_p}{4}} = \frac{Z_0}{\operatorname{th} \alpha l_0} \approx \frac{Z_0}{\alpha l_0}.$$

Поскольку потери малы, то и $\alpha l_0 \ll 1$. Но $\alpha = \frac{R_1}{2Z_0}$, откуда

$$R_{0e} = \frac{Z_0}{\alpha l_0} = \frac{2Z_0^2}{R_1 l_0}, \quad Q_0 = \frac{\pi}{4} \frac{2Z_0^2}{R_1 l_0 Z_0} = \frac{2\pi Z_0}{\lambda_p R_1}.$$

Таким образом, все параметры резонатора определены. На входных клеммах (a , b) при $\omega \approx \omega_p$ резонатор ведет себя относительно внешней цепи аналогично параллельному контуру с параметрами

$$f_p \text{ (или } \omega_p), Q_0, R_{0e}.$$

Связь с эквивалентной индуктивностью и емкостью дается формулами

$$\frac{1}{\omega_p C_{\text{экв}}} = \omega_p L_{\text{экв}} = \rho,$$

где ρ — характеристическое сопротивление контура:

$$\rho = \frac{4}{\pi} Z_0, \quad Q_0 = \frac{R_{0e}}{\rho}.$$

Для резонаторов в виде *полуволновой линии* (см. рис. 9.3.)

$$\lambda_p = 2l = 4l_0,$$

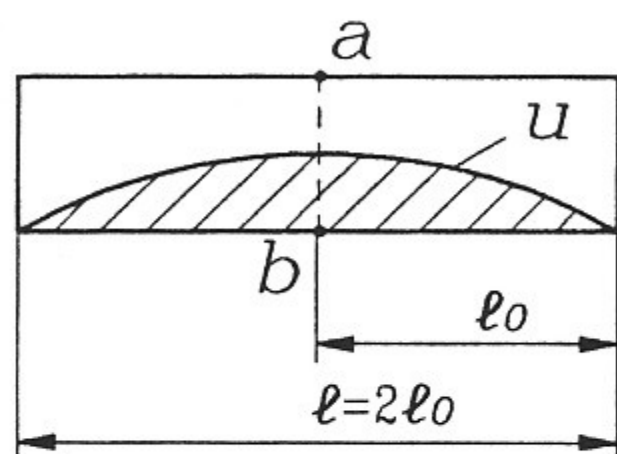


Рис. 9.3. Резонатор на основе полу-
волновой линии.

Полуволновый резонатор можно рассматривать как параллельное соединение двух четвертьволновых линий.

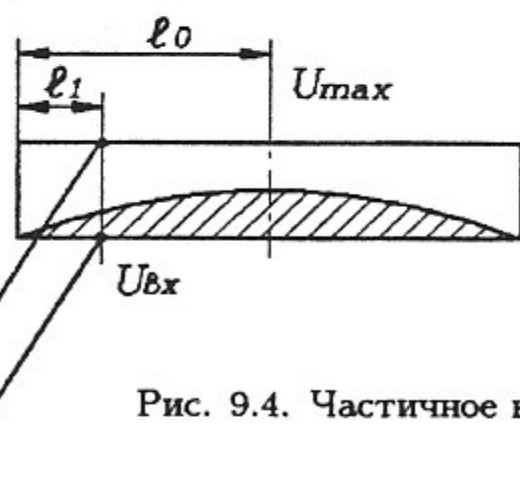


Рис. 9.4. Частичное включение резонатора.

Если входные клеммы резонатора находятся не в пучности напряжения, то говорят о частичном включении (рис. 9.4). При этом

$$\frac{U_{вх}}{U_{max}} = m = \frac{\sin \frac{2\pi l_1}{\lambda_p}}{\sin \frac{2\pi l_0}{\lambda_p}} = \sin \frac{2\pi l_1}{\lambda_p}.$$

Коаксиальные резонаторы

Конструктивно резонаторы рассмотренного типа выполняются в виде коаксиальных резонаторов.

а) Коаксиальный полуволновый резонатор. На рис. 9.5 представлены силовые линии и эпюры полей. Величины E и H определяют напряжение и ток. Возможен резонатор с целым числом полуволн:

$$\lambda_p = \frac{2l}{n}, \quad \omega_p = \frac{2\pi c}{\lambda_p}, \quad l = \frac{n\lambda_p}{2}.$$

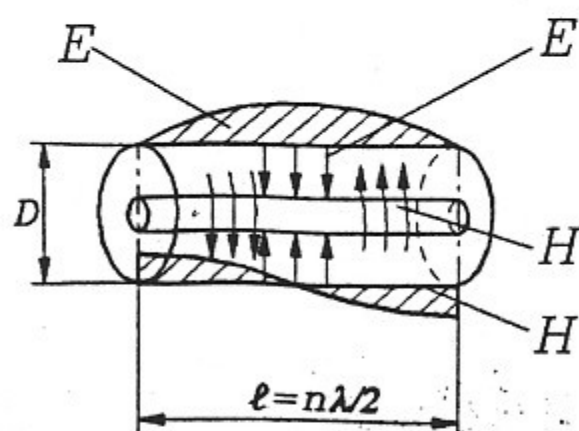


Рис. 9.5. Поля в коаксиальном
полуволновом резонаторе.

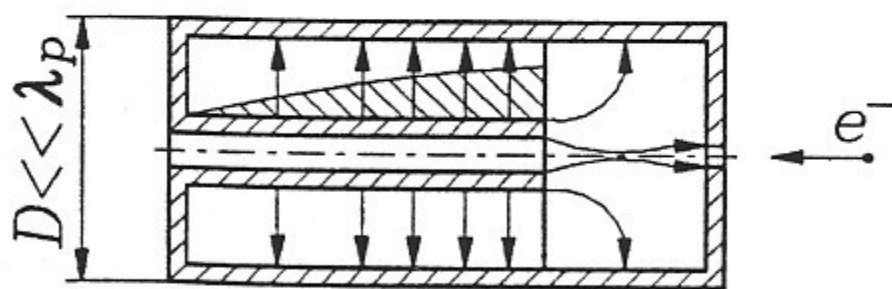
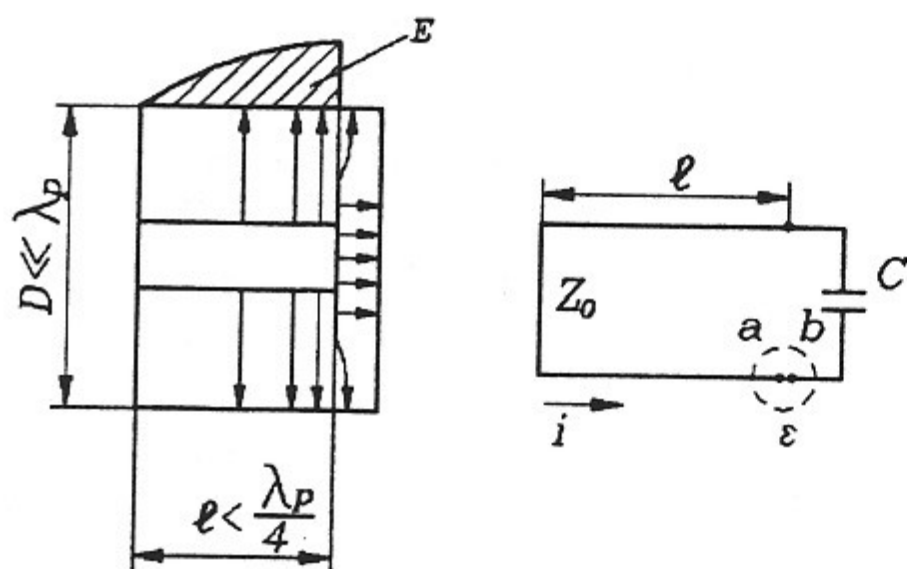


Рис. 9.6. Поля в коаксиальном четверть-
волновом резонаторе.

б) Коаксиальный четвертьволновый резонатор (рис. 9.6). В нем есть место, где возможно взаимодействие с электромагнитным пучком. В пучности напряжения может ускоряться частица. Аналогичен четвертьволновому резонатору длиной $l = \frac{\lambda_p}{4} + \frac{n\lambda_p}{2}$.

в) Коаксиальный резонатор, нагруженный емкостью (рис. 9.7). Условие существования собственных колебаний



$$i = \frac{U}{Z_{ab}} \neq 0 \text{ при } U = 0 \text{ и } Z_{ab} = 0.$$

Отсюда

$$Z_{ab} = Z_{ex} + \frac{1}{j\omega C} = 0,$$

$$jZ_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda_p} - j\frac{1}{\omega_p C} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda_p} = \frac{1}{Z_0 \omega_p C}.$$

Рис. 9.7. Коаксиальный резонатор, нагруженный емкостью.

Последнее уравнение определяет при заданной резонансной длине волны (или частоте) резонансную длину $l_{\text{рез}}$, его графическое решение показано на рис. 9.8. При $l_{\text{рез}} \ll \lambda_p/4$ получаем так называемые квазистационарные резонаторы. (При этом C велико и прямая постоянного значения $\frac{1}{Z_0 \omega_p C}$ пересекается с тангенсоидой вблизи ее начала.) В таких резонаторах области C и L явно разделены (рис. 9.9), $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$. Добротность и R_{0e} определяются по токам в стенках, напряжение — на емкостном зазоре.

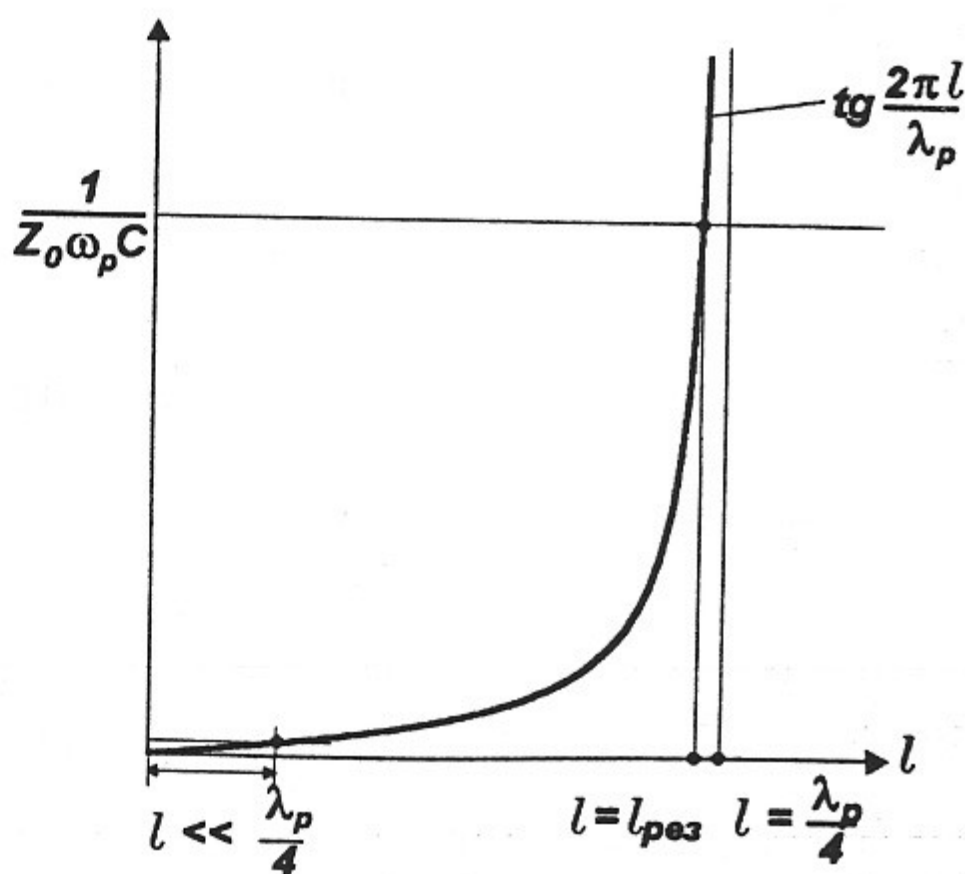


Рис. 9.8. К расчету резонансной длины волны.

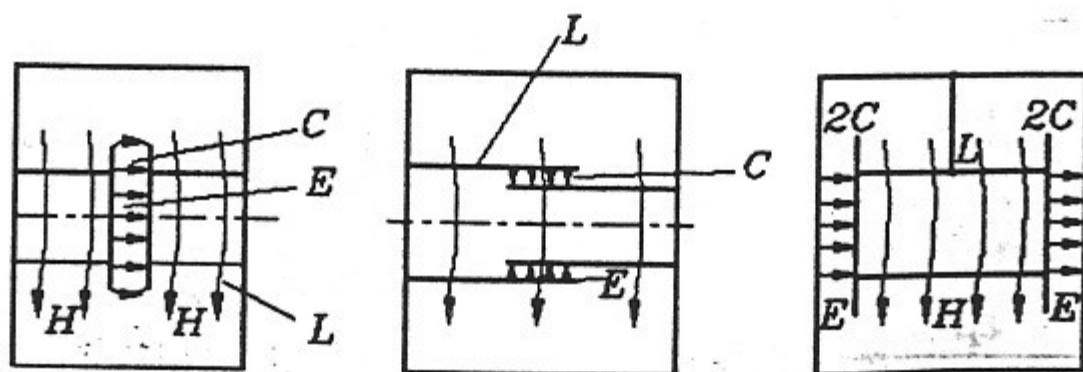


Рис. 9.9. Квазистационарные резонаторы.

Волноводные резонаторы

а) Прямоугольный резонатор с волной H_{10} (тип колебаний H_{101} , рис. 9.10).

$l_p = n\Lambda/2$ для резонанса H_{10n} .

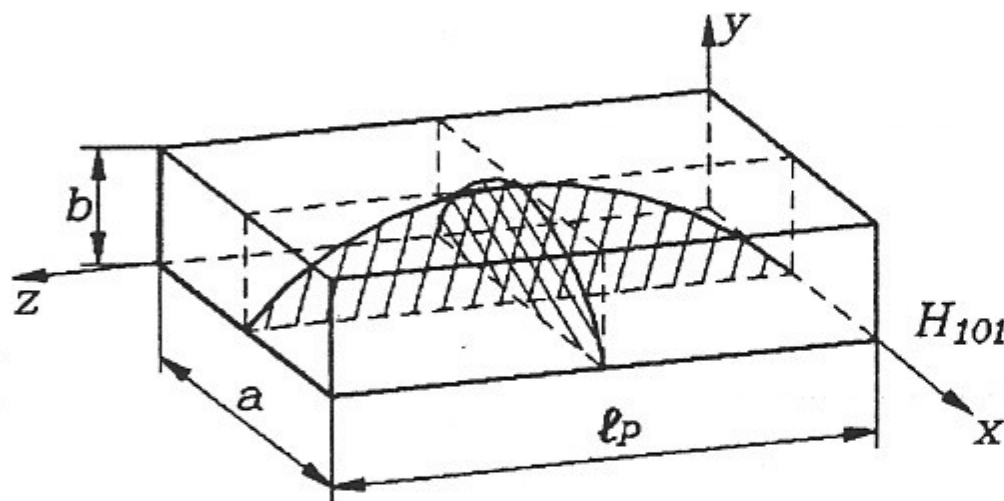


Рис. 9.10. Резонатор на основе прямоугольного волновода.

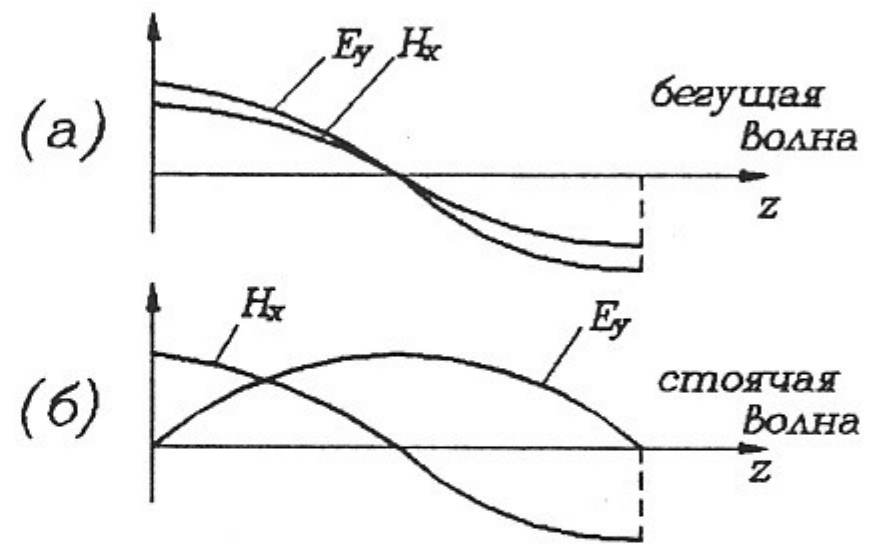


Рис. 9.11. Распределение полей в прямоугольном волноводе (а) и в резонаторе (б).

Для $n = 1$

$$l_p = \frac{\lambda_p}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_p}{2a}\right)^2}}.$$

Распределение E и H полей такое же как в прямоугольном волноводе (H_{10}) со стоячей волной. Отличие от предыдущих результатов — сдвиг пучности E относительно H . В бегущей волне E_y и H_x находятся в фазе (рис. 9.11).

Вектор $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ в бегущей волне в среднем направлен в одном направлении (распространения) — вдоль z .

В стоячей волне максимумы E_y и H_x сдвинуты по z на 90 градусов. Вектор $\vec{P}$ меняет направление со временем: от периферии к центру и наоборот.

б) Цилиндрические резонаторы.

1. С волной H_{11} . $l_p = n\Lambda/2$. Для $n = 1$ имеем резонанс типа H_{111} (рис. 9.12), при этом длина резонатора

$$l_p = \frac{\lambda_p}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_{крH_{11}}}\right)^2}}, \quad \lambda_{крH_{11}} = 3.41a.$$

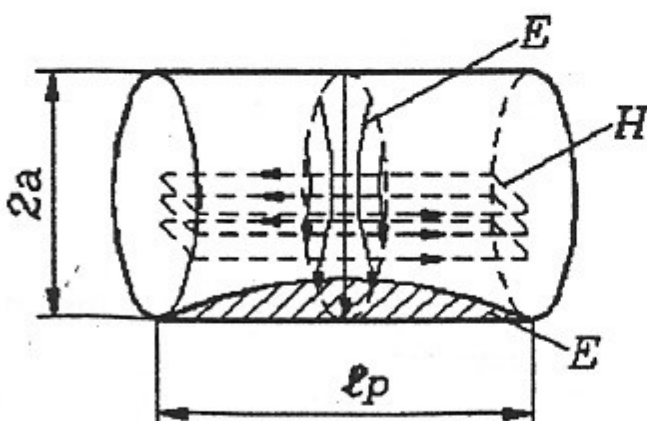


Рис. 9.12. Поле в цилиндрическом резонаторе с волной H_{111} .

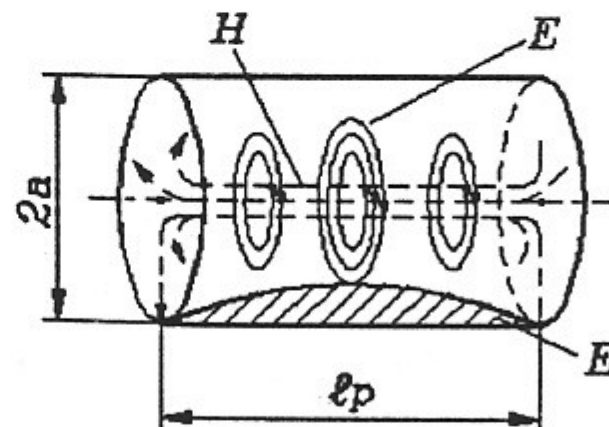
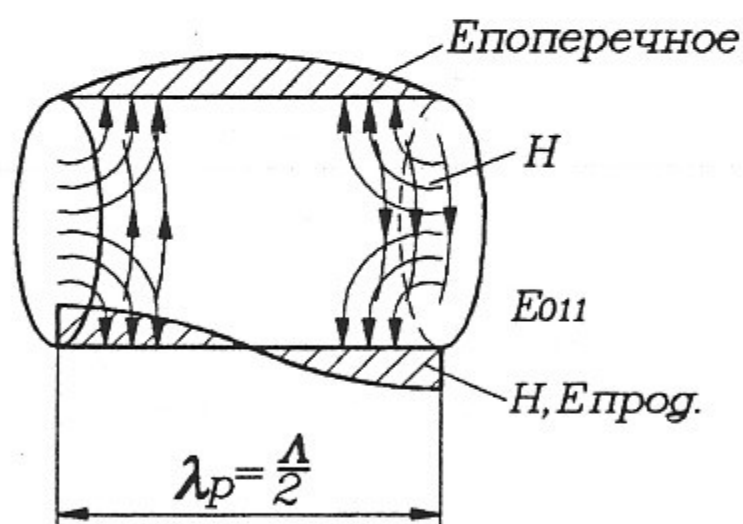


Рис. 9.13. Поле в цилиндрическом резонаторе с волной H_{011} .

2. С волной H_{01} . $l_p = n\Lambda/2$. Для $n = 1$ имеем H_{011} (рис. 9.13), длина резонатора

$$l_p = \frac{\lambda_p}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_{крH_{01}}}\right)^2}}, \quad \lambda_{крH_{01}} = 1.64a.$$

в) Резонаторы с E -волнами могут быть прямоугольными и цилиндрическими. Цилиндрический резонатор (рис. 9.14).



$$\lambda_{крE_{01}} = 2.61a,$$

$$l_p = \frac{\lambda_p}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_{крE_{01}}}\right)^2}}.$$

Рис. 9.14. Мода E_{011} в цилиндрическом резонаторе.

г) Резонатор с волной E_{010} . Для E -волн в волноводе возможен и иной путь образования резонатора (отличный от $l_p = n\Lambda/2$). Точнее — здесь возможен вариант $n = 0$, $\Lambda = \infty$.

Например, для цилиндрического резонатора — рассмотрим круглый волновод с волной E_{01} . Если $\lambda \rightarrow \lambda_{кр}$, то картина поля изменяется как показано на рис. 9.15.

В этом случае короткозамыкающие стенки не искажают поле при любом l . Резонансная частота определяется только диаметром $\lambda_p = \lambda_{крE_{01}}$.

$$\lambda_{крE_{01}} = 2.61a, \text{ т.е. } 2a = \frac{\lambda_p}{1.3} \approx \frac{3}{4}\lambda_p$$

Этот тип резонатора наиболее часто применяется в ускорителях (E_{010} , рис. 9.16).

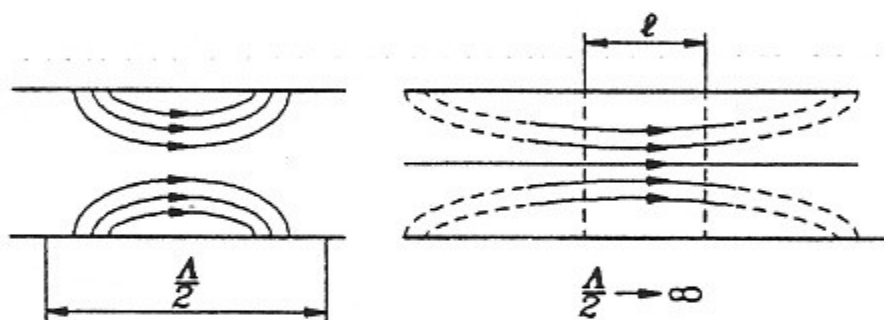


Рис. 9.15. Построение моды E_{010} в цилиндрическом волноводе.

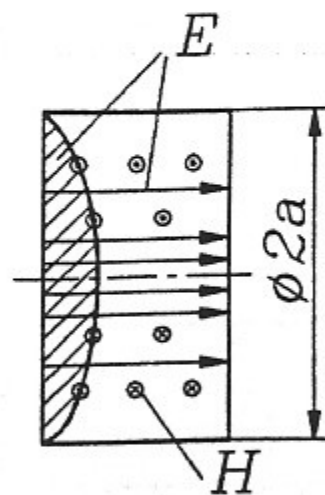


Рис. 9.16. Мода E_{010} в цилиндрическом резонаторе.

д) Резонатор типа радиальной линии (разомкнутая линия, рис. 9.17).

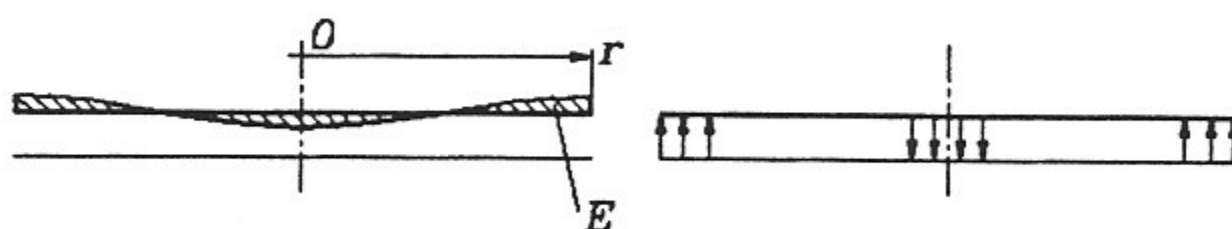


Рис. 9.17. Резонанс в разомкнутой радиальной линии.

е) Прочие резонаторы (не связанные с линией или волноводом) – сферический, биконический, тороидальный – рис. 9.18.

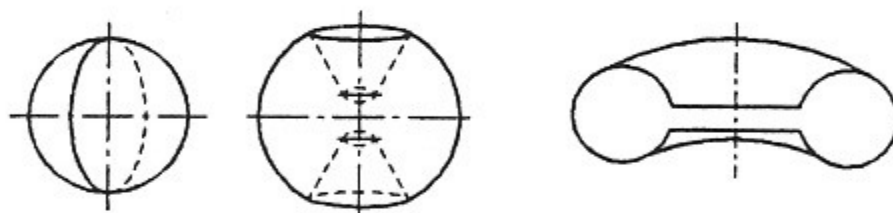


Рис. 9.18. Сферический, биконический и тороидальный резонаторы.

О расчете и оценках параметров резонаторов

1. $f_p(\lambda_p)$. Решение задачи о собственных значениях. Для разомкнутой или короткозамкнутой линии, в том числе и волноводной, может быть сделано по длине (l_p).
2. $Q_0 = \frac{\omega_p W}{P}$ — по распределению поля в резонаторе.
 $P_1 = \frac{1}{2\delta\gamma} |H_t|^2$ — потери на единицу площади.

Потери могут быть рассчитаны исходя из выражений для полей (в данном случае — магнитного поля), полученных для волноводов. Следует только иметь в виду, что поле в резонаторе есть сумма падающей и отраженной волн в короткозамкнутом или разомкнутом волноводе. Из условия на концах резонатора (кз или хх) определяется знак, с которым входит поле отраженной волны в выражение для полного поля. Например, при отражении от короткозамкнутого торца напряжение, т.е. интеграл электрического поля по поверхности закоротки, должно быть равно нулю. При этом плотность тока и связанное с ним магнитное поле максимальны в торцевой поверхности.

$P = \frac{1}{2\delta\gamma} \oint_S |H_t|^2 dS$ — интеграл по внутренней поверхности резонатора дает полную мощность потерь в стенках.

$W = \frac{\mu_0}{2} \int_V |H|^2 dV$ — интеграл по всему объему резонатора дает запас энергии (в данном случае магнитной).

$$Q_0 = \omega_p \mu_0 \delta \gamma \frac{\int_V |H|^2 dV}{\oint_S |H_t|^2 dS};$$

учитывая, что $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu \mu_0}}$, где μ — магнитная проницаемость материала стенки, получим $\omega_p \mu_0 \gamma = \frac{2}{\delta^2 \mu}$ и, далее:

$$Q_0 = \frac{2}{\delta \mu_{cm}} \frac{\int_V |H|^2 dV}{\oint_S |H_t|^2 dS}.$$

Для ориентировочных оценок удобно следующее соотношение:

$$Q_0 = \frac{2}{\delta \mu} \frac{V}{S} \frac{\overline{|H|_V^2}}{\overline{|H|_S^2}}.$$

Среднее значение квадрата напряженности магнитного поля на поверхности $\overline{|H|_S^2}$ приблизительно вдвое больше среднего $\overline{|H|_V^2}$ по объему:

$$\frac{\overline{|H|_V^2}}{\overline{|H|_S^2}} \approx \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$Q_0 = \frac{1}{\delta \mu} \frac{V}{S}.$$

Для выпуклых форм резонаторов средний линейный размер

$$a \approx 6 \frac{V}{S},$$

например, для куба $V = a^3$, $S = 6a^2$, $\frac{V}{S} = \frac{a}{6}$;

для шара $V = \frac{\pi d^3}{6}$, $S = \pi d^2$, $\frac{V}{S} = \frac{d}{6}$.

Следовательно, при $\mu = 1$

$$Q_0 \approx \frac{1}{6} \frac{a_{cp}}{\delta}.$$

Например, медный резонатор с длиной волны $\lambda_p = 1$ м имеет $a_{cp} \approx 0.5$ м, $\delta = 3.8$ мкм

и

$$Q_0 \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{0.5}{3.8 \cdot 10^{-6}} \approx 22000.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Векторы электромагнитного поля. Характеристики среды (5). Уравнения Максвелла (7). Граничные условия для векторов электромагнитного поля (10). Сторонние силы (12). Теорема Умова-Пойнтинга. Энергетические соотношения в электромагнитном поле (13). О механических (пондеромоторных) силах, действующих на проводники в электромагнитном поле (16). О единственности решений уравнений Максвелла при заданных начальных и граничных условиях (18).

Глава 2. СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ.

Электростатическое поле. Потенциал. Уравнения Пуассона и Лапласа (21). Граничные условия для векторов электростатического поля и потенциалов (22). Геометрия поля (23). Формулировка типичных задач электростатики (23). Поле заряженной оси (24). Поле заряженных коаксиальных цилиндров (25). Электростатическое поле двухпроводной линии (26). Понятие о емкостной связи двух линий (29). Поле электрического диполя (31). Поляризация диэлектриков (32). Метод зеркальных отображений (33). Проводящая сфера во внешнем однородном электростатическом поле (36). Задачи Сирла (37).

Глава 3. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПОЛЯ.

Решения, зависящие от одной координаты (42). Метод комплексного потенциала (47). Расчет поля у края плоского конденсатора (51). Метод разделения переменных. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле (54). Энергия электростатического поля (57). Пондеромоторные силы в электростатическом поле (60).

Глава 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ.

Основные уравнения (62). Граничные условия (62). О моделировании электростатических полей (64). Расчет электрических полей постоянного тока (65). Правила Кирхгофа для расчета цепей постоянного тока - следствие уравнений поля (66).

Глава 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ.

Основные уравнения (68). Векторный потенциал магнитного поля (68). Граничные условия (70). Магнитное поле токов в длинных параллельных проводах круглого сечения (71). Индуктивность двухпроводной линии (73). Поле и индуктивность коаксиальной линии (74). Расчет взаимных индуктивностей линий и контуров с током (75). Взаимная индуктивность концентрических колец (76). О намагниченности среды.

Формальная аналогия магнитостатических и электростатических полей (77). Энергия магнитного поля постоянных токов. Пондеромоторные силы в магнитном поле (80).

Глава 6. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

Потенциалы электромагнитного поля (83). Уравнения Максвелла и теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме (86). Расчет электромагнитного поля, возбуждаемого элементом переменного тока (87).

Глава 7. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ СВЧ.

Одномерная линия передачи. Уравнения линии и их решения (95). Трансформационные свойства линий (101). Круговая диаграмма (106). Линии передачи с малыми потерями (112). Электродинамическая теория длинных линий (114).

Глава 8. ВОЛНОВОДЫ.

Электрические и магнитные типы волн в волноводах (118). Н-волны в прямоугольном волноводе (118). Фазовая скорость волн в волноводе (124). Понятие о групповой скорости волн в волноводе (127). Мощность бегущей волны в волноводе. Продольный ток. Волновое сопротивление (128). Е-волны в прямоугольном волноводе (129). Типы волн в круглых волноводах (131). Волновод как линия передачи (135). Поверхностный эффект и потери в волноводах (138).

Глава 9. ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ.

Параметры полых резонаторов (143). Резонаторы в виде отрезка длинной линии (144). Коаксиальные резонаторы (146). Волноводные резонаторы (148). О расчете и оценках параметров резонаторов (150).

ИЯФ — НГТУ

1998

И.А. ШЕХТМАН

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *А.М. Кудрявцев*

Работа поступила 10.01. 1998 г.

Подписано в печать 28. 05. 1998

Формат бумаги 60×90 1/8 Объем 9,5 печ.л., 7,6 уч. изд.л.

Тираж 300 экз. Бесплатно. Заказ №42

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротаприте "ИЯФ им. Г.И. Будкера" СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11