

**МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное агентство
по образованию**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

физический факультет

**Квалификационная работа на соискание
степени магистра**

Чащин Максим Сергеевич

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ГДЛ

**Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук,
с.н.с. ИЯФ СО РАН
А.Д. Беклемишев**

Новосибирск – 2005 год

Содержание

Введение	III
1 Уравнение желобковых колебаний	1
2 Анализ уравнения желобковых колебаний	4
2.1 Область устойчивости (без учета КЛР-эффектов)	4
3 Устойчивость локализованных желобков	7
3.1 Плазма с малым широм азимутальной скорости	7
3.2 Плазма с заметным широм азимутальной скорости	9
4 Устойчивость $m = 1$ моды	13
4.1 Собственная функция	13
4.2 Инкремент неустойчивости для $m = 1$ моды	14
Выводы	17
Благодарности	18
Приложение А	18
Список литературы	31

Введение

Газодинамическая Ловушка (ГДЛ) является открытой ловушкой для удержания плазмы [1, 2]. Магнитное поле в ней обладает азимутальной симметрией (рис.1). Благодаря этому в ловушке нет неоклассических потерь плазмы поперек магнитного поля. С точки зрения термоядерных перспектив ГДЛ заметно отстает от ТОКАМАКОВ. Однако она может быть использована в качестве прототипа источника термоядерных нейтронов большой мощности ($W_n \sim 2 \text{ MWt/m}^2$) для испытания материалов первой стенки термоядерного реактора. Было предложено несколько схем нейтронного источника на основе ГДЛ [3-5].

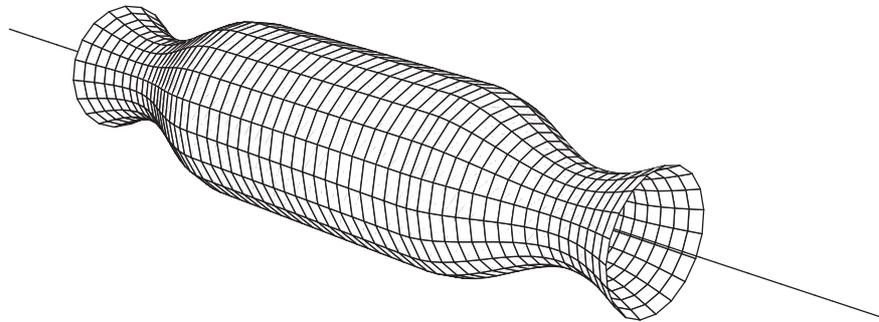


Рис. 1: Качественный вид магнитной поверхности в ГДЛ. Магнитное поле в пробках может превосходить поле центрального соленоида в 30-50 раз. Характерное значение поля в центральной ячейке $B_{min} \sim 3 \cdot 10^3 \text{ Gs}$

Плазма ГДЛ содержит два сорта ионов. Основная компонента - относительно холодная плазма удерживаемая в газодинамическом режиме (“мишенная” плазма). Для этих ионов эффективная длина рассеяния в конус потерь существенно меньше размеров системы. Другая компонента возникает при наклонной инжекции в плазму мощных пучков нейтральных атомов высокой энергии (“быстрые частицы”). Эти частицы осцилируют между точками остановки. Положение точек остановки определяется величиной пинтч-угла в момент инжекции. В окрестности этих точек наблюдается резкий пик плотности плазмы и заметный выход термоядерных нейтронов.

Характерные значения концентрации и температуры “мишенной” плазмы в ГДЛ составляют $5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ и 100 eV соответственно. “Быстрые” частицы име-

ют среднюю энергию порядка 10^4 eV и концентрацию $5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Мощность инъекции атомарных пучков достигает 4 MWt , длительность импульса инъекции около 1 ms . Основной вклад в энергосодержание вносят “быстрые” частицы, а инерция плазмы определяется “мишенной” составляющей.

Согласно предсказаниям теории и экспериментальным исследованиям в такой плазме развиваются МГД неустойчивости, приводящие к быстрой “гибели” плазмы. Наибольшую опасность представляет желобковая неустойчивость, которая приводит к макроскопическим выбросам плазмы на стенку вакуумной камеры. Возникновение этой неустойчивости связано с особенностями геометрии магнитного поля в ловушке. В работах [6, 7] был получен достаточный критерий устойчивости плазмы. Он выглядит следующим образом

$$\int dl \frac{\pi_{\perp} + \pi_{\parallel}}{r(l)B^2} \kappa > 0, \quad (1)$$

где π_{\perp} и π_{\parallel} - поперечная и продольная составляющие тензора потока импульса, $r(l)$ - расстояние от оси системы до магнитной поверхности, B - величина магнитного поля, κ - кривизна силовой линии магнитного поля. Интегрирование ведется вдоль силовой линии. Согласно этому условию в плазме будет развиваться неустойчивость если “средняя” кривизна магнитного поля отрицательна. Интегрирование кривизны производится с весом, пропорциональным давлению плазмы. Поскольку определяющее значение имеет интегральная характеристика, не обязательно всюду в ловушке иметь “благоприятную” кривизну (как это делается в ловушках с минимумом B). В ГДЛ вытекание плазмы осуществляется в газодинамическом режиме. То есть плазма имеет заметное давление и в запробочной области, что положительно сказывается на устойчивости.

В плазме ГДЛ также наблюдается быстрое азимутальное вращение, вызванное дрейфом частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Электрическое поле возникает из-за неоднородности распределения температуры электронов по радиусу. Перепад потенциала на радиусе плазмы (радиус плазменного столба порядка 10 cm) при имеющихся параметрах составляет около 200 V . Как известно, вращение порождает центробежную силу, направленную по радиусу. Наличие этой силы в присутствии градиента плотности, как и неблагоприятная кривизна, приводит к возникновению неустойчивости желобкового типа.

Вообще говоря, вращение плазмы не обязано быть твердотельным. Соседние слои могут проскальзывать друг относительно друга. Такое дифференциальное вращение наблюдается и в ГДЛ. При этом можно ожидать возникновения неустойчивости сдвиговых течений. Эта неустойчивость хорошо изучена в гидродинамике обычной жидкости [8–10].

Для обеспечения устойчивости плазмы были изучены различные стабилизирующие механизмы. Одним из таких механизмов является эффект конечного ларморовского радиуса (КЛР) частиц [11]. Качественно этот эффект хорошо описан в [12]. Стабилизация коротковолновых желобков в ГДЛ осуществляется КЛР-эффектом “быстрых” частиц. КЛР стабилизация тем сильнее, чем выше азимутальный номер моды возмущения. В работе [11] также показано, что так называемая “первая мода”, для которой электрическое поле в плазме постоянно, не может быть стабилизирована КЛР эффектом. Поэтому остается открытым вопрос об устойчивости “первой моды” возмущения.

В работе [13] разработана схема МГД стабилизатора для ГДЛ. Благодаря добавочному концевому элементу в установке экспериментально были созданы условия, при которых достаточный критерий устойчивости (1) выполнен. Магнитное поле в МГД стабилизаторе-касепе имеет конфигурацию антипробкотрона, благодаря чему “средняя” кривизна становится благоприятной для устойчивости.

Особый интерес вызвали экспериментальные результаты, опубликованные в [14]. В эксперименте не использовался МГД стабилизатор-касеп, силовые линии магнитного поля в запробочной области имели нулевую кривизну, а критерий (1) не выполнялся. Все же был достигнут режим, в котором время удержания плазмы в ловушке становится порядка времени продольных потерь. Эффект возникал при изменении профиля радиального распределения электростатического потенциала в плазме. Экспериментальная зависимость приведена на рис. 2. Предполагается, что в этом режиме нет МГД активности, приводящей к сильному переносу поперек магнитного поля.

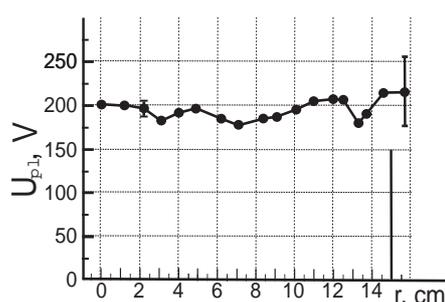


Рис. 2: Распределение потенциала в плазмы ГДЛ в устойчивом режиме

Возможно несколько интерпретаций результата в [14]. Из рис. 2 видно что в устойчивом режиме среднее поле в ловушке мало. Дестабилизирующий эффект, связанный с вращением плазмы становится несущественным. Это благоприятно сказывается на устойчивости. Однако таким образом невозможно объяснить почему плазма в ГДЛ остается устойчивой, когда условие (1) не выполнено. С

другой стороны, при изменении потенциала плазмы модифицируется режим ее истечения в зазубочной области. Еще один из механизмов стабилизации может быть связан с сильным сдвиговым течением плазмы. Существуют качественные соображения почему дифференциальное вращение может благоприятно влиять на устойчивость плазмы по отношению к желобковым возмущениям [15]. Этот механизм становится существенным когда всплывающий в плазме желобок попадает в область с сильным сдвиговым течением, а характерное время, за которое слои плазмы успевают провернуться друг относительно друга на угол порядка единицы, сравнимо с временем развития неустойчивости. В таком течении искажается форма желобка, который “размазывается” течением по азимуту. При этом можно ожидать уменьшение инкремента неустойчивости.

Стабилизация плазмы неоднородным дрейфом в скрещенных электрическом и магнитном поле изучалась в экспериментах на установках ПСП-2 (Новосибирск, ИЯФ СО РАН, Россия) [16] и ZaP (University of Washington, Seattle, U.S.A.) [17]. Однако постановка эксперимента и параметры плазмы в ГДЛ принципиально отличаются от этих экспериментов.

Главная цель представленной работы - теоретически изучить влияние вращения на устойчивость плазмы в ГДЛ. Для этого рассмотрены различные режимы удержания плазмы и показано, что в широком диапазоне параметров КЛР-эффект дает основной вклад в устойчивость коротковолновых возмущений. Найден спектр заведомо устойчивых гармоник и получена мажоранта для инкремента желобковой неустойчивости в плазме со сдвиговым вращением. Показано, что инкремент желобковой неустойчивости в плазме с дифференциальным вращением меньше, чем в случае когда такого вращения нет.

Работа разбита на четыре части. В первой части продемонстрирован вывод уравнения желобковых колебаний в неоднородной плазме ГДЛ со сдвиговым вращением. Там же обсуждается используемая модель. Во втором разделе делается качественный анализ полученного уравнения без КЛР-эффекта в соответствии с подходом, применяемым для изучения устойчивости сдвиговых течений обычной жидкости. Третья часть посвящена изучению устойчивости коротковолновых возмущений. В пункте 3.2 показано, что инкремент неустойчивости становится тем меньше чем сильнее сдвиговое вращение. В четвертом разделе обсуждается возможность стабилизации первой моды.

1 Уравнение желобковых колебаний двухкомпонентной плазмы ГДЛ

В этом разделе приведены рассуждения, которые позволяют получить уравнение описывающее желобковые колебания в плазме ГДЛ. Уравнение должно содержать эффекты, связанные с “конечностью” ларморовского радиуса “горячих” частиц, а также с наличием дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Требуемый результат можно получить, воспользовавшись уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha}n_{\alpha}, \quad (2)$$

где φ - величина электростатического потенциала в плазме, q_{α} и n_{α} - заряд и плотность частиц сорта α . Суммирование производится по всем сортам частиц (два сорта ионов и электроны). Уравнение (2) описывает эволюцию потенциала плазмы при изменении ее параметров. Параметры плазмы находятся из уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики. Величина n_{α} выражается из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \text{div}(n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}) = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{V}_{α} - гидродинамическая скорость частиц сорта α . Ее можно найти из уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{V}_{\alpha}}{dt} = -\frac{T_{\alpha}\bar{\nabla}n_{\alpha}}{M_{\alpha}n_{\alpha}} + \frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}'_{\alpha} \times \mathbf{B}]) - \frac{\mathbf{S}(\mathbf{V}_{\alpha}, n_{\alpha})}{M_{\alpha}n_{\alpha}}, \quad (4)$$

где T_{α} - температура соответствующей компоненты плазмы ($T_{\alpha} = \text{const}$), M_{α} - масса частиц сорта α . Последнее слагаемое в правой части (4) описывает диссипацию импульса за счет эффективной вязкости, учитывающей КЛР-эффекты [18]. Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями Максвелла. Тогда они образуют замкнутую систему. При решении этих уравнений предполагается, что кривизна силовых линий магнитного поля мала (ловушка параксиальная), а также $\beta \ll 1$.

Выражение для поперечной компоненты скорости $\mathbf{V}_{\perp\alpha}$ из уравнения (4) находится методом последовательных приближений. Слагаемые описывающие инерцию, а также вязкость плазмы малы и ими можно пренебречь. В этом приближении уравнение (4) принимает вид

$$-\frac{T_{\alpha}\bar{\nabla}n_{\alpha}}{M_{\alpha}n_{\alpha}} + \frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}'_{\perp\alpha} \times \mathbf{B}]) = 0,$$

а скорость $\mathbf{V}'_{\perp\alpha}$ определяется соотношением

$$\mathbf{V}'_{\perp\alpha} = \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \frac{T_\alpha}{M_\alpha} \frac{\bar{\nabla} n_\alpha}{n_\alpha} - \frac{q_\alpha}{M_\alpha} \mathbf{E} \right], \quad (5)$$

где \mathbf{b} - единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. В следующем приближении можно учесть инерцию и вязкость. Тогда для $\mathbf{V}_{\perp\alpha}$ справедливо

$$\mathbf{V}_{\perp\alpha} = \mathbf{V}'_{\perp\alpha} + \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} + \frac{\mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, n_\alpha)}{M_\alpha n_\alpha} \right], \quad (6)$$

где используется обозначение

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{V}'_{\perp\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, \bar{\nabla}) \mathbf{V}'_{\perp\alpha}.$$

Если воспользоваться выражением для $\mathbf{V}_{\perp\alpha}$ из (6) и подставить его в (3), тогда можно получить уравнение описывающее эволюцию плотности частиц сорта α

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{V}'_{\perp\alpha}) + \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[n_\alpha \frac{\mathbf{b}}{B} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} \right] + \\ + \frac{c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, n_\alpha) \right] + \operatorname{div} \frac{1}{q_\alpha} \mathbf{j}_{\parallel\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Это уравнение можно проинтегрировать вдоль силовой линии магнитного поля. В качестве граничного условия считается, что ток не замыкается через торцевые элементы установки, т.е.

$$\mathbf{j}_{\parallel}(l = l_w) = 0,$$

тогда из (7) можно получить усредненное уравнение

$$\begin{aligned} \int dl \left\{ \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{V}'_{\perp\alpha}) + \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[n_\alpha \frac{\mathbf{b}}{B} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} \right] + \right. \\ \left. + \frac{c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, n_\alpha) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $l = l_w$ - координата плазмпоглотителя. Если считать электростатический потенциал постоянным вдоль силовой линии, то возмущение магнитного поля можно не рассматривать, а решать электростатическую задачу. Это приближение обосновано в подробном выводе в Приложении А.

Для рассмотрения линейной стадии развития неустойчивости считается, что параметры плазмы возмущаются слабо, т.е.

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t)_\alpha = n_{\alpha 0}(r) + \delta n_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(r) + \delta\varphi(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\delta n_\alpha}{n_{0\alpha}} \ll 1, \quad \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \ll 1, \end{aligned}$$

После линеаризации в (8) можно связать изменение плотности δn_α с возмущением потенциала $\delta\varphi$. Уравнение, описывающее эволюцию азимутальной и временной компоненты потенциала $\delta\varphi$ получается, если подставить этот результат в линеаризованное уравнение Пуассона

$$\Delta\delta\varphi = -4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha}\delta n_{\alpha}, \quad (9)$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{d\psi}{dr} + \frac{1 - m^2}{r^4} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \psi + \\ & + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right) \psi = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где под r подразумевается расстояние от оси до магнитной поверхности в центральном сечении установки, B_0 - равновесное магнитное поле. Величина

$$\omega_0 = \omega - m\omega_E \quad (11)$$

представляет собой частоту волны возмущения, сдвинутую на величину дрейфовой частоты

$$m\omega_E = \frac{mc}{B_0 r} \frac{d\varphi_0}{dr}.$$

Здесь m - азимутальное волновое число, ω^* - средняя (вдоль силовой линии) частота диамагнитного дрейфа,

$$\begin{aligned} \omega^* &= \left\langle \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^* n_{0\alpha} / \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \right\rangle_l, \\ \omega_{\alpha}^* &= \frac{mcT_{\alpha}}{q_{\alpha} B_0 n_{0\alpha} r} \frac{dn_{0\alpha}}{dr}, \end{aligned} \quad (12)$$

n_0 - плотность ионов в плазме, γ_0^2 определяется соотношением

$$\gamma_0^2 = \frac{ern_0\omega^*}{mM_i c} \left(\hat{e}_{\phi}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right) / \left(\frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right),$$

где \hat{e}_{ϕ} - единичный вектор, направленный по азимуту, e - заряд протона. Если принять, что кривизна силовых линий $\kappa \propto r$, тогда

$$\gamma_0^2 \propto \sum_{\alpha} \frac{T_{\alpha} dn_{0\alpha}/dr}{dn_0/dr} \approx const.$$

Функция ψ - нормированный потенциал возмущения

$$\psi = \frac{\delta\varphi}{\omega_0 r}. \quad (13)$$

Все слагаемые в (10) имеют простую физическую интерпретацию. Первые два члена описывают инерцию плазмы, третье слагаемое, пропорциональное ω^2 , - центробежная сила. Последнее слагаемое описывает эффекты возникающие при наличии ненулевой средней кривизны силовых линий магнитного поля в ловушке.

2 Анализ уравнения желобковых колебаний

2.1 Область устойчивости (без учета КЛР-эффектов)

Для качественного анализа устойчивости плазмы в этом разделе используется метод, ранее примененный к анализу устойчивости сдвиговых течений обычной жидкости [9]. Чтобы разделить влияние различных эффектов здесь предполагается, что $\omega^* = 0$. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} n_0 r^3 \omega_0^2 \frac{d}{dr} \psi + \frac{1-m^2}{r^4} n_0 r^3 \omega_0^2 \psi + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{dn_0}{dr} \right) \psi = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r n_0 \frac{d}{dr} \delta\varphi + \left(\frac{1}{r\omega_0} \frac{d}{dr} n_0 r^3 \omega_0^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r\omega_0} + \frac{1-m^2}{r} n_0 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{\omega_0^2} \frac{dn_0}{dr} \right) \delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Домножая (14) на $\delta\varphi^*$ и интегрируя результат по радиусу плазменного шнура можно получить следующее интегральное соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} r n_0 \left| \frac{d\delta\varphi}{dr} \right|^2 dr = \int_0^{r_0} \left(\frac{1}{r\omega_0} \frac{d}{dr} n_0 r^3 \omega_0^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r\omega_0} + \frac{1-m^2}{r} n_0 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{\omega_0^2} \frac{dn_0}{dr} \right) |\delta\varphi|^2 dr. \end{aligned} \quad (15)$$

При этом учтены граничные условия

$$\begin{cases} \delta\varphi(r = r_0) = 0, \\ \delta\varphi'(r = 0) = 0. \end{cases}$$

Мнимая часть уравнения (15) имеет вид

$$\int_0^{r_0} |\delta\varphi|^2 \text{Im} \left(\frac{1}{r\omega_0} \frac{d}{dr} n_0 r^3 \omega_0^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r\omega_0} + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{\omega_0^2} \frac{dn_0}{dr} \right) dr = 0. \quad (16)$$

Интегральное соотношение (16) может быть выполнено только если подынтегральное выражение проходит через ноль внутри интервала интегрирования. В противном случае уравнение (14) не имеет решений, а диапазон параметров ω , при которых условие (16) нарушается, соответствует частотам гармоник, которые не возбуждаются в плазме. В таком случае достаточное условие устойчивости имеет вид

$$\text{Im} \left(\frac{1}{r\omega_0} \frac{d}{dr} n_0 r^3 \omega_0^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r\omega_0} + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{\omega_0^2} \frac{dn_0}{dr} \right) \Big|_{r=r_s} \neq 0,$$

$\forall r_s \in [0, r_0]$. Это условие аналогично требованию отсутствия точки перегиба профиля скорости в сдвиговом течении жидкости. Оно может быть переписано в виде

$$\omega_{r_0}^2 - 2\Gamma\omega_{r_0} + \gamma^2 \neq 0,$$

где обозначено $\omega = \omega_r + i\gamma$ и соответственно $\omega_0 = \omega_{r_0} + i\gamma$, а также

$$\Gamma = - \left. \frac{(\gamma_0^2 + \omega_E^2) \frac{m^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr}}{\frac{r}{n_0} \frac{d}{dr} \frac{n_0}{r} \frac{d}{dr} (r^2 m \omega_E)} \right|_{r=r_s}.$$

Решения уравнения

$$\omega_{r_0}^2 - 2\Gamma\omega_{r_0} + \gamma^2 = 0$$

имеют вид

$$\omega_{r_{\pm}} = m\omega_E(r_s) + \Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \gamma^2}. \quad (17)$$

Из условия вещественности γ возникает ограничение на величину инкремента

$$\gamma^2 \leq \Gamma^2. \quad (18)$$

Возмущения, частоты которых не удовлетворяют условию (17) не будут возбуждаться, а инкремент для неустойчивых возмущений, согласно (18), ограничен. Значения r_s ограничены размером плазмы, поэтому существует только ограниченный частотный диапазон для потенциально неустойчивых возмущений.

Для иллюстрации можно рассмотреть модельный профиль потенциала в плазме с малой средней скоростью вращения и с ненулевым широм. Согласно экспериментальным результатам (см. рис.2) величина среднего поля должна быть мала, при этом его градиенты могут быть велики. Этот потенциал складывается из потенциала плазмы, обусловленного неоднородностью профиля температуры электронов, а так же потенциала лимитера, который уменьшает среднее поле. Качественно эта зависимость изображен на рис.3. Профиль, используемый в расчетах, представлен на рис.4. Для него можно вычислить значения функций $\Gamma(r)$ и $\omega_{r_{\pm}}(r)$ (см. рис 5). Функция $\Gamma(r)$ является мажорантаой для инкремента неустойчивости. При этом оказывается, что $\Gamma/\gamma_0 \leq 1$ практически всюду в плазме ($\Gamma/\gamma_0 = 1$ соответствует значению инкремента в отсутствии сдвигового вращения). Подобные качественные рассуждения иллюстрируют возможность уменьшения величины инкремента желобковой неустойчивости сдвиговым течением.

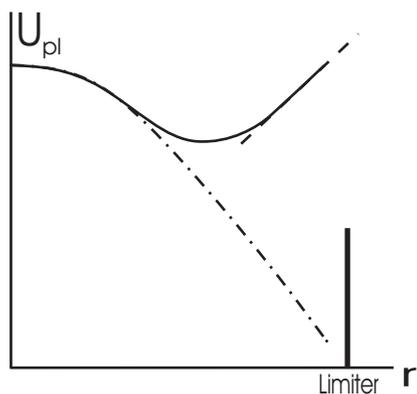


Рис. 3: Распределения электростатического потенциала в плазме. Штрихпунктирная линия - распределение потенциала в плазме, определяемое профилем температуры электронов; пунктирная линия - потенциал вблизи лимитера; сплошная линия - результирующий профиль

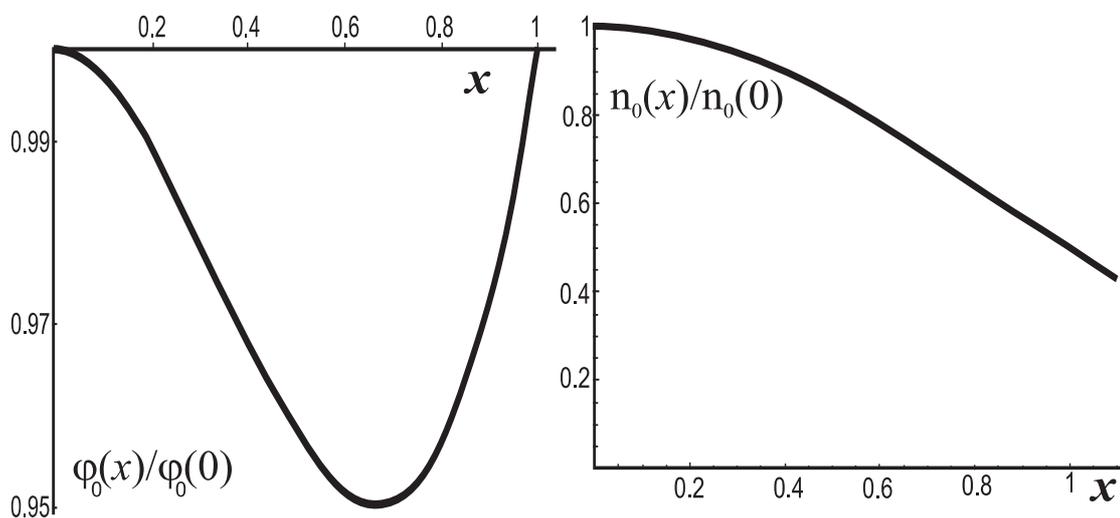


Рис. 4: Радиальный профиль электростатического потенциала, а также плотности ионов. Точка $x = 1$ соответствует положению лимитера

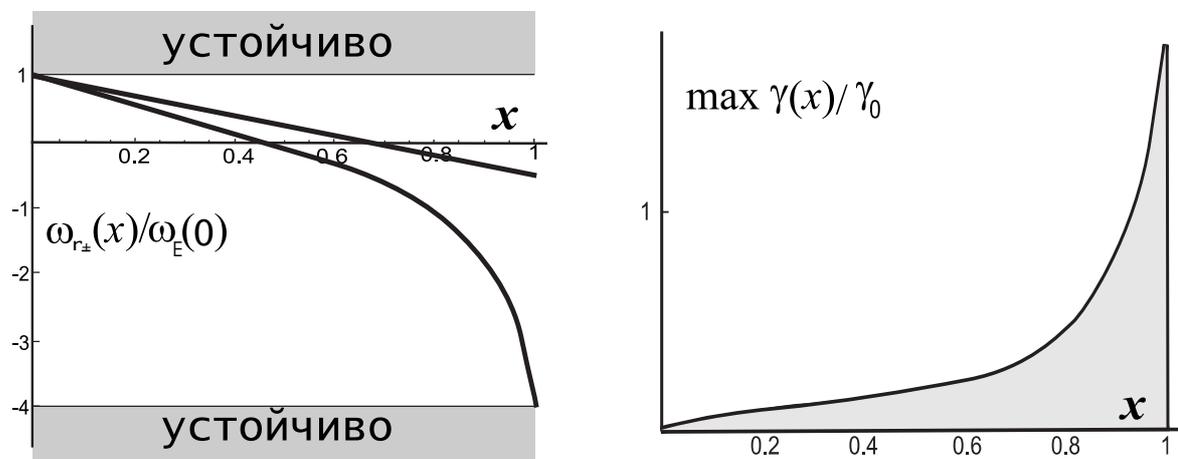


Рис. 5: Спектр заведомо устойчивых гармоник и верхняя граница для инкремента

3 Устойчивость локализованных желобков

Этот раздел посвящен решению уравнения желобковых колебаний в пределе, когда длина волны возмущения много меньше размеров системы, то есть

$$m \gg 1, \quad \left. \frac{d \ln \delta \varphi}{d \ln r} \right|_{r=r_s} \gg 1. \quad (19)$$

Такие желобки локализованы по радиусу и по азимуту. Далее рассматриваются случаи слабого и сильного сдвигового вращения.

3.1 Плазма с малым широм азимутальной скорости

В этом подразделе изучается устойчивость локализованных желобков в отсутствии сдвигового вращения. Условие (19) позволяет довести задачу об устойчивости до конца - получить дисперсионное уравнение. Это уравнение должно описывать три важных эффекта:

- Эффект, являющийся с неоднородностью магнитного поля,
- Центробежный эффект,
- КЛР-эффект.

Конкуренция этих эффектов определяет устойчивость плазмы без сдвигового вращения.

Если принять условие (19), тогда можно пренебречь геометрическими эффектами. В таком случае уравнение (14) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \delta \varphi + \left(-m^2 + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{\omega_0 (\omega_0 - \omega^*)} \frac{d \ln n_0}{dx} \Big|_{x=1} \right) \delta \varphi = 0,$$

где $x = r/r_s$, r_s - расстояние от оси ловушки до магнитной поверхности где локализован желобок. В этом приближении коэффициенты перестают зависеть от r и в уравнении можно сделать преобразование Фурье по x . Результат выглядит следующим образом

$$-k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{(\omega_0 - \frac{\omega^*}{2})^2 - (\frac{\omega^*}{2})^2} \frac{d \ln n_0}{dx} \Big|_{x=1} = 0,$$

где $k_{\perp}^2 = k_r^2 + m^2$. Предполагается, что $\omega \propto m$, в то время как $\omega_0 - \omega^*/2 \propto 1$. Тогда в случае монотонно спадающего профиля плотности дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\omega_0 - \frac{\omega^*}{2} \right)^2 = \left(\frac{\omega^*}{2} \right)^2 - (\omega_E^2 + \gamma_0^2) \left(\frac{m}{k_{\perp}} \right)^2 \Big|_{x=1} \frac{d \ln n_0}{dx}. \quad (20)$$

Первое слагаемое в правой части (20) описывает стабилизирующий эффект конечного ларморовского радиуса ионов. Второе слагаемое - центробежная сила. Последний член в (20) связан с наличием неоднородного магнитного поля. Именно это слагаемое определяет устойчивость плазмы в критерии Розенблюта-Лонгмайра [6].

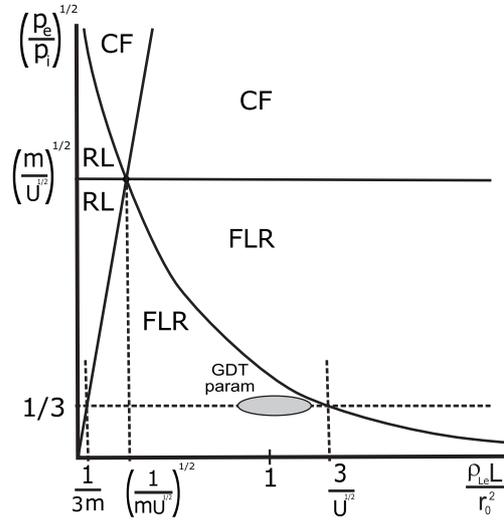


Рис. 6: Режимы удержания плазмы при различных ее параметрах. Области, обозначенные символом RL - характеризуются тем, что дестабилизирующий член с кривизной силовых линий магнитного поля играет здесь определяющую роль, в областях CF доминирует центробежная сила, в областях FLR все устойчиво за счет КЛР-эффекта. Параметры плазмы в ГДЛ попадают в серую область

Конкуренцию этих трех эффектов можно проиллюстрировать на диаграмме (см. рис.6). По горизонтальной оси отложена величина $\rho_{Le}L/r_0^2$, где ρ_{Le} - ионный ларморовский радиус, вычисленный по электронной температуре, L - длина ловушки, r_0 - радиус плазмы. По вертикальной оси отложен корень из отношения энергосодержания в электронах к энергосодержанию в ионах. Параметр U введен для того, чтобы описать дополнительные эффекты, связанные с изменением потенциала плазмы внешними устройствами.

Согласно рис.6 в ГДЛ доминирует КЛР-эффект быстрых ионов. Его достаточно, чтобы обеспечить устойчивость локализованных желобков, в том числе и при неблагоприятной кривизне силовых линий. Однако в дальнейшем, если удастся увеличить электронную температуру, роль этого эффекта может уменьшиться.

3.2 Плазма с заметным широм азимутальной скорости

В этом разделе анализируются эффекты, возникающие при наличии шира азимутальной скорости вращения плазмы. Для простоты считается, что $\omega^* = 0$. Желобки, которые локализованы около магнитной поверхности с $r = r_s$ и вращаются вместе с плазмой наиболее неустойчивы. Для них выполнено условие

$$Re \omega_0 = 0,$$

или

$$\omega(r_s) = m\omega_E(r_s) + i\gamma.$$

Разложение функции $\omega_0(r)$ в окрестности точки r_s имеет вид

$$\omega_0(r) = \omega - m\omega_E \approx -m \frac{d\omega_E}{dx} \Big|_{x=1} \left(\frac{r - r_s}{r_s} \right) + i\gamma = -m\omega'_E(\zeta - i\zeta_0),$$

где используются обозначения

$$\zeta = \frac{r - r_s}{r_s}, \quad \zeta_0 = \frac{\gamma}{m\omega'_E}, \quad \omega'_E \equiv \frac{d\omega_E}{dx} \Big|_{x=1}.$$

Если произвести разложение коэффициентов уравнения (10) в окрестности точки r_s , тогда с учетом условия (19) можно получить

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\zeta - i\zeta_0)} \frac{d}{d\zeta} (\zeta - i\zeta_0)^2 \frac{d}{d\zeta} \frac{\delta\varphi}{(\zeta - i\zeta_0)} - m^2 \delta\varphi + \\ & + \frac{(\omega_E^2 + \gamma_0^2)/(\omega'_E)^2}{(\zeta - i\zeta_0)^2} \left(\frac{d \ln n_0}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} \delta\varphi = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \delta\varphi}{d\zeta^2} - m^2 \delta\varphi = \frac{x_0}{(\zeta - i\zeta_0)^2} \delta\varphi, \quad (21)$$

где введено обозначение

$$x_0 \equiv \frac{\omega_E^2 + \gamma_0^2}{(\omega'_E)^2} \Big|_{\zeta=0} \frac{d \ln n_0}{d\zeta}.$$

Уравнение (21) с граничными условиями

$$\begin{cases} \delta\varphi\left(\frac{r-r_s}{r_s} \rightarrow \infty\right) \rightarrow 0, \\ \delta\varphi\left(\frac{r-r_s}{r_s} \rightarrow -\infty\right) \rightarrow 0. \end{cases}$$

можно записать в интегральной форме через функцию Грина $G(\zeta|\zeta')$

$$\delta\varphi(\zeta) = x_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta|\zeta') \frac{\delta\varphi(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta'. \quad (22)$$

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$G''(\zeta, \zeta') - m^2 G(\zeta, \zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \quad (23)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} G(\zeta \rightarrow \pm\infty|\zeta') = 0, \\ G(\zeta' + 0|\zeta') = G(\zeta' - 0|\zeta'), \\ G'(\zeta' + 0|\zeta') - G'(\zeta' - 0|\zeta') = 1. \end{cases} \quad (24)$$

Решение уравнения (23) с граничными условиями (24) имеет вид

$$G(\zeta|\zeta') = -\frac{1}{2m} \begin{cases} e^{m(\zeta-\zeta')}, & \zeta < \zeta', \\ e^{-m(\zeta-\zeta')}, & \zeta > \zeta'. \end{cases}$$

В таком случае (22) перепишется в виде интегрального уравнения

$$\delta\varphi(\zeta) = -\frac{x_0}{2m} \left[\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\delta\varphi(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta-\zeta')} d\zeta' + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\delta\varphi(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta-\zeta')} d\zeta' \right]. \quad (25)$$

Решение уравнение (25) находится методом последовательных приближений. Для этого функцию $\delta\varphi(\zeta)$ необходимо представить в виде ряда

$$\delta\varphi(\zeta) = \delta\varphi_0(\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} [\delta\varphi_{n+1}(\zeta) - \delta\varphi_n(\zeta)],$$

при этом

$$\frac{\delta\varphi_{n+1}(\zeta) - \delta\varphi_n(\zeta)}{\delta\varphi_n(\zeta)} \ll 1.$$

Итерационная последовательность имеет вид

$$\delta\varphi_{n+1}(\zeta) = -\frac{x_0}{2m} \left[\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\delta\varphi_n(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta-\zeta')} d\zeta' + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\delta\varphi_n(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta-\zeta')} d\zeta' \right].$$

В качестве функции нулевого приближения можно использовать

$$\delta\varphi_0(\zeta) = A \begin{cases} 1, & |\zeta| \leq \Delta\zeta, \\ 0, & |\zeta| \geq \Delta\zeta, \end{cases}$$

где A комплексная константа, а $\Delta\zeta$ - ширина возмущения, которую можно рассматривать как вариационный параметр. Тогда функция следующего приближения имеет вид

$$\delta\varphi_1(\zeta) = -A \frac{x_0}{2m} \begin{cases} \int_{-\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta-\zeta')}, & \zeta \leq -\Delta\zeta, \\ \int_{-\Delta\zeta}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta-\zeta')} + \int_{\zeta}^{\Delta\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta-\zeta')}, & -\Delta\zeta \leq \zeta \leq \Delta\zeta, \\ \int_{-\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta-\zeta')}, & \zeta \geq \Delta\zeta \end{cases}$$

Если в качестве нормировки выбрать условие

$$\delta\varphi(\zeta = 0) = A,$$

тогда можно получить условие для определения инкремента неустойчивости. Оно выглядит следующим образом

$$1 = -\frac{x_0}{2m} \left[\int_{-\Delta\zeta}^0 \frac{e^{m\zeta'}}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta' + \int_0^{\Delta\zeta} \frac{e^{-m\zeta'}}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta' \right]. \quad (26)$$

Второе слагаемое в (26) комплексно сопряжено к первому. Поэтому (26) переписывается в виде

$$1 = -\frac{x_0}{m} \operatorname{Re} \int_0^{\Delta\zeta} \frac{e^{-m\zeta'}}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta' = x_0 \frac{\omega'_E}{\gamma} \int_0^{z_0} \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} e^{-\frac{\gamma}{\omega'_E} z} dz. \quad (27)$$

В (27) используются обозначения

$$z = \zeta/\zeta_0, \quad z_0 = \frac{\Delta\zeta}{\zeta_0} = \frac{m \omega'_E}{k_r \gamma},$$

$$k_r = 1/\Delta\zeta.$$

Условие (27) представляет собой дисперсионное соотношение, связывающее значение инкремента неустойчивости с компонентами волнового вектора возмущения. Величина шира скорости входит в (27) как параметр. При этом условие (27) не изменяется при замене

$$\omega'_E \rightarrow -\omega'_E.$$

Тогда его можно переписать в виде

$$\frac{\gamma}{|\omega'_E|} = \left(\frac{\Gamma}{\omega'_E} \right)^2 \int_0^{|z_0|} \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} e^{-\frac{\gamma}{|\omega'_E|} z} dz, \quad (28)$$

где Γ - величина инкремента в отсутствии шира скорости

$$\Gamma = (\omega_E^2 + \gamma_0^2) \left| \frac{d \ln n_0}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}.$$

Варьируя инкремент γ по параметру $\epsilon = \frac{m}{k_r}$ и приравнявая вариацию к нулю

$$\delta\gamma = 0 \quad (29)$$

можно получить значение инкремента наиболее неустойчивых возмущений. Вариация имеет вид

$$\frac{\delta\gamma}{\omega'_E} = \left(\frac{\Gamma}{\omega'_E} \right)^2 \left\{ \omega'_E \delta \left(\frac{\epsilon}{\gamma} \right) \frac{1 - z_0^2}{(1 + z_0^2)^2} e^{-\epsilon} - \frac{\delta\gamma}{\omega'_E} \int_0^{|z_0|} \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} e^{-\frac{\gamma}{\omega'_E} z} z dz \right\}.$$

Из условия (29) возникает требование

$$z_0 = 1,$$

то есть

$$\Delta\zeta = \zeta_0 = \frac{\gamma}{m\omega'_E}$$

В результате из (28) можно получить уравнение на максимум инкремента γ_{ex}

$$\frac{\gamma_{ex}}{|\omega'_E|} = \left(\frac{\Gamma}{\omega'_E}\right)^2 \int_0^1 \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} e^{-\frac{\gamma_{ex}}{|\omega'_E|}z} dz.$$

На рис.7 построена зависимость γ_{ex}/Γ от значения нормированного шира скорости $|\omega'_E|/\Gamma$. Из представленной зависимости видно, что эффект проскальзывания

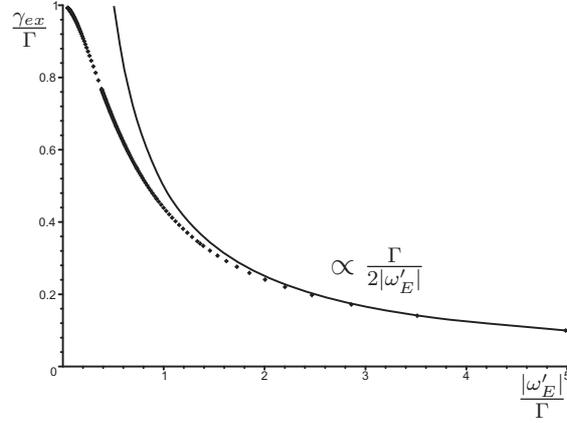


Рис. 7: Зависимость инкремента неустойчивости от модуля шира скорости. Сплошная линия - асимптотика для больших ω'_E

слоев плазмы становится существенным когда

$$|\omega'_E| \sim \Gamma.$$

Для больших значений шира скорости, когда

$$|\omega'_E|/\Gamma \gg 1,$$

можно найти асимптотику для γ_{ex}

$$\frac{\gamma_{ex}}{\Gamma} \stackrel{|\omega'_E| \gg 1}{\approx} \frac{\Gamma}{|\omega'_E|} \int_0^1 \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} dz = \frac{\Gamma}{|\omega'_E|} \left. \frac{z}{1+z^2} \right|_0^1 = \frac{\Gamma}{2|\omega'_E|}.$$

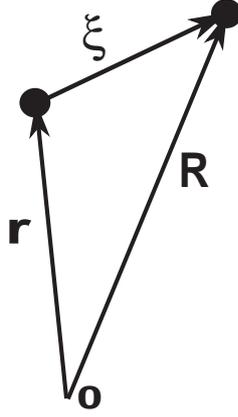


Рис. 8: Смещение плазменной “капли” при наложении возмущения $\xi(\mathbf{r}, t)$

4 Устойчивость $m = 1$ моды

В предыдущем разделе рассмотрена устойчивость мелкомасштабных желобков. Для ГДЛ наиболее актуален вопрос устойчивости первой моды возмущения. Это связано с тем, что старшие моды устойчивы за счет сильного КЛР-эффекта быстрых ионов. В данном разделе рассмотрен вопрос устойчивости $m = 1$ моды в присутствии азимутального вращения плазмы.

4.1 Собственная функция для твердотельного смещения плазмы

Исходя из простых физических соображений, можно получить выражение для возмущения потенциала, приводящего к смещению плазмы как целого. В отсутствии вращения электрическое поле всюду в плазме должно быть однородно. Если плазма еще и вращается, тогда электрическое поле возмущения не однородно.

Согласно рассуждениям, приведенным в [19] в линейном приближении возмущение гидродинамической скорости имеет вид

$$\delta\mathbf{V} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + (\mathbf{V}_0, \bar{\nabla})\xi - (\xi, \bar{\nabla})\mathbf{V}_0, \quad (30)$$

где ξ - вектор смещения. Такой вид $\delta\mathbf{V}$ связан с тем, что возмущение скорости из точки \mathbf{r} течением переносится в точку $\mathbf{r} + \xi$ (см рис. 8).

Результат (30) можно получить из следующих соображений. Если зафиксировать точку \mathbf{r} , тогда возмущение скорости в ней определяется соотношением

$$\delta\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_0(\mathbf{r}),$$

где \mathbf{V}_0 - равновесное значение скорости. В линейном приближении по возмущению можно посчитать значение функции \mathbf{V} в точке $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\xi(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial\xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_0(\mathbf{r}), \bar{\nabla})\xi(\mathbf{r}, t).$$

С другой стороны

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) + (\xi(\mathbf{r}, t), \bar{\nabla})\mathbf{V}_0.$$

При сравнении этих выражений воспроизводится результат (30)

$$\delta\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\partial\xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_0(\mathbf{r}), \bar{\nabla})\xi(\mathbf{r}, t) - (\xi(\mathbf{r}, t), \bar{\nabla})\mathbf{V}_0.$$

Пользуясь азимутальной симметрией и стационарностью равновесия, можно рассматривать устойчивость только Фурье гармоник возмущения

$$\xi \propto \exp(i\phi - i\omega t).$$

Смещение плазмы возникает из-за дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном поле. Радиальная компонента смещения

$$\delta V_r = -\frac{ic}{Br} \delta\varphi.$$

С другой стороны из (30) можно написать

$$\delta V_r = -i\omega\xi_r + \frac{iV_0}{r}\xi_r.$$

При твердотельном смещении $\xi_r = const$ или

$$\frac{\delta\varphi}{\omega_0 r} = \psi_1 = const. \quad (31)$$

4.2 Инкремент неустойчивости для $m = 1$ моды

В этом подразделе обсуждается устойчивость первой моды возмущения. Для этого необходимо воспользоваться уравнением (10). Это уравнение имеет самосопряженный вид. Умножив его слева на функцию ψ^* и проинтегрировав по радиусу плазмы, можно получить интегральное соотношение

$$\int_0^{r_0} dr \left\{ \psi^* \frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{d}{dr} \psi + \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) |\psi|^2 + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) r^2 \left(\frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right) |\psi|^2 = 0 \right\}.$$

Если “унести” стенки камеры установки на бесконечность, т.е. $r_0 \rightarrow \infty$, тогда это уравнение преобразуется к виду

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \left| \frac{d\psi}{dr} \right|^2 + \frac{m^2 - 1}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) |\psi|^2 + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) r^2 \left| \frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right| |\psi|^2 \right\} dr = 0. \quad (32)$$

Выделение мнимой части частоты в (32) в явном виде приводит к результату

$$\gamma^2 - 2i\gamma D - C = 0. \quad (33)$$

Соответствующие коэффициенты имеют вид

$$D = \left\langle \omega_{0r} - \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_m + \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1,$$

$$C = m^2 \left\langle \gamma_0^2 \right\rangle_1 + \left\langle \omega_{0r}(\omega_{0r} - \omega^*) \right\rangle_m + 2\omega_r \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1 -$$

$$- \left\langle \left(m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right)^2 \right\rangle_1 + \left\langle \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1.$$

Угловые скобки соответствуют усреднению с весовой функцией

$$\left\langle F(r) \right\rangle_m \equiv \left[\int_0^\infty P_m(r) dr \right]^{-1} \int_0^\infty P_m F(r) dr,$$

где для $m > 1$

$$P_m(r) \equiv n_0 r^3 \left| \frac{d\psi_m}{dr} \right|^2 + (m^2 - 1) r n_0 |\psi_m|^2 + r^2 \left| \frac{dn_0}{dr} \right| |\psi_m|^2.$$

Функция P_1 определяется следующим образом

$$P_1(r) = r^2 \left| \frac{dn_0}{dr} \right| |\psi_m|^2.$$

Если учесть (31), то справедлив предельный переход

$$\lim_{m \rightarrow 1} P_m(r) = \lim_{m \rightarrow 1} P_1(r).$$

Поскольку γ по определению вещественное, в уравнении (33) мнимое слагаемое должно обращаться в ноль. Это возможно если

$$D = 0.$$

Тогда вещественная часть частоты определяется соотношением

$$\omega_r = \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_m - \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1,$$

а инкремент неустойчивости

$$\gamma^2 = C = m^2 \left\langle \gamma_0^2 \right\rangle_1 - \left[\left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_m - \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1 \right]^2 +$$

$$+ \left[\left\langle m\omega_E(m\omega_E + \omega^*) \right\rangle_m - \left\langle m\omega_E(m\omega_E + \omega^*) \right\rangle_1 \right]. \quad (34)$$

Первое слагаемое в правой части (34) описывает эффекты, связанные с неоднородностью магнитного поля в ловушке. Второе слагаемое - стабилизирующий

эффект конечного ларморовского радиуса. Последнее слагаемое - дестабилизирующая центробежная сила.

Если в (34) перейти к пределу $m \rightarrow 1$, тогда инкремент неустойчивости для твердотельного смещения плазмы имеет вид

$$\gamma^2 = \langle \gamma_0^2 \rangle_1.$$

Таким образом можно утверждать, что сдвиговое течение, как и КЛР-эффект, не влияет на устойчивость твердотельного смещения плазменного столба. При таких возмущениях плазма смещается вместе со своей внутренней вращающейся структурой.

Наличие проводящего кожуха камеры установки сильно меняет ситуацию. Появление границы приводит к искажению собственной функции для первой моды возмущения. Она перестает быть твердотельной. Это связано с необходимостью удовлетворить граничным условиям на стенке, например

$$\psi_1(r = r_0) = 0.$$

Тогда можно ожидать образование переходного слоя (см. рис 9), в котором $\psi_1 \neq const$. В этой области работают все эффекты, описанные в предыдущих разделах.

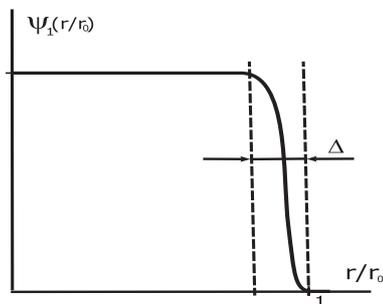


Рис. 9: Качественный вид собственной функции $\psi_1(r)$ в плазме, ограниченной проводящей стенкой. Δ - ширина переходного слоя

Выводы

В представленной работе рассмотрено влияние сдвигового течения на устойчивость желобковых мод в двухкомпонентной плазме ГДЛ. При этом

- Продемонстрирован вывод уравнения желобковых колебаний неоднородной замагниченной плазмы в присутствии начального азимутального течения. Эффект конечного ларморовского радиуса “быстрых” частиц учтен в рамках двухжидкостной МГД теории через введение ионной вязкости. Этот результат согласуется с тем, что был получен Тимофеевым [21] из кинетической теории.
- Рассмотрено влияние центробежной силы и КЛР-эффекта на устойчивость плазмы ГДЛ. Получено дисперсионное уравнение для мелкомасштабных мод. Прделаны оценки, согласно которым устойчивость плазмы с параметрами ГДЛ определяется сильным КЛР-эффектом. Показано, что если стабилизация конечным ларморовским радиусом “быстрых” частиц не работает, тогда при достаточном сдвиговом вращении плазмы инкремент желобковой неустойчивости уменьшается, при этом порог неустойчивости не сдвигается. Для больших значений шира скорости инкремент убывает по закону

$$\gamma \propto 1/|\omega'_E|.$$

- Показано, что сдвиговое течение не влияет на устойчивость жесткой моды возмущения ($m = 1$). При этом, если учесть граничные условия для этой моды, тогда стабилизирующие эффекты могут работать в области вблизи проводящей стенки вакуумной камеры.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

1. *Беклемишев А.Д., Чащин М.С.* Влияние невозмущенного течения плазмы на желобковую неустойчивость в Газодинамической ловушке // Тезисы XXXII Звенигородской конференции по физике плазмы и УТС, Звенигород, С.58 (2005)
2. *Beklemishev A.D., Chaschin M.S.* Effect of differential rotation on plasma stability in the Gas-Dynamic Trap // Proceedings of Fifth International Conference on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement, Novosibirsk (July 5-9), Transactions of Fusion Science and Technology V.47, 1T, P.279 (2004)

3. *Чащин М.С.* Влияние дифференциального вращения плазмы на устойчивость желобковых мод в ГДЛ // Тезисы ХLI Международной Научной Студенческой Конференции “студент” и научно-технический прогресс”, Новосибирск, С.133 (2003)

Благодарности

Автор выражает благодарность Беклемишеву А.Д. за руководство и помощь при выполнении и написании работы, а также Котельникову И.А. и Цидулко Ю.А. за советы и замечания.

Приложение А

Приложение посвящено выводу уравнения (10). Для этого возмущение плотности частиц каждого сорта δn_α необходимо связать с возмущением потенциала $\delta\varphi$. Поскольку для каждого сорта частиц вывод эквивалентен индекс α будет опускаться.

Линеаризованное уравнение (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -i\omega\delta n + \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0^2} \times \left(\frac{T}{M} \bar{\nabla} \delta n + \frac{q}{M} \delta n \bar{\nabla} \varphi_0 + \frac{q}{M} n_0 \bar{\nabla} \delta \varphi - i \frac{q\omega}{Mc} n_0 A_{\parallel} \mathbf{b}_0 \right) \right] + \\
 & + \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[\delta n \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right] + \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)' \right] + \\
 & + \frac{c}{q} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B} \times \delta \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp}, n) \right] + \frac{c}{q} \operatorname{div} \left[\delta \left(\frac{\mathbf{b}}{B} \right) \times (T \bar{\nabla} n_0 + q n_0 \bar{\nabla} \varphi_0) \right] + \operatorname{div} \frac{\delta \mathbf{j}_{\parallel}}{q} = 0 \quad (35)
 \end{aligned}$$

В уравнении (35) члены, описывающие эффекты связанные с возмущением магнитного поля, всюду учтены в главном порядке, поэтому их нет в слагаемых с вязкостью и инерцией. Вообще говоря возмущение магнитного поля в поперечном токе тоже можно не рассматривать, поскольку соответствующие слагаемые малы в β раз по сравнению с другими и часть из них исчезают после подстановки в уравнение условия квазинейтральности. Однако для последовательности изложения мы их учтем.

Наличие возмущения магнитного поля связано с неоднородностями плазмы вдоль ловушки. В частности, вблизи точек останова “быстрых” ионов имеется пик поперечного давления плазмы. К тому же пробочное отношение в ГДЛ может достигать нескольких десятков (до $B_{max}/B_{min} \sim 50$). Важно принять во внимание, что подобные неоднородности компенсируются за счет продольного

электронного тока. Этот ток возмущает магнитное поле. Поэтому неустойчивости плазмы перестают быть электростатическими. Для описания этого эффекта в первом приближении можно считать, что возмущаются только поперечные компоненты магнитного поля, т.е.

$$(\mathbf{B}_0, \delta\mathbf{B}) = 0,$$

где \mathbf{B}_0 - магнитное поле в равновесии. Это предположение оправдано [20], поскольку при возмущениях такого рода энергия магнитного поля изменяется квадратично по $\delta\mathbf{B}$

$$\delta \frac{B^2}{8\pi} = \frac{(\mathbf{B}_0, \delta\mathbf{B})}{4\pi} + \frac{\delta\mathbf{B}^2}{8\pi} = O(\delta\mathbf{B}^2).$$

Такое возмущение магнитного поля можно описать одной компонентой векторного потенциала $\mathbf{A} = A_{\parallel} \mathbf{b}_0$, где \mathbf{b}_0 - единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{B}_0

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}.$$

Величину A_{\parallel} можно выразить через возмущение электростатического потенциала $\delta\varphi$ из уравнения движения электронов

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] = 0.$$

В этом уравнении пренебрегается инерцией электронов, а так же их давлением. Продольная компонента этого уравнения выглядит следующим образом

$$E_{\parallel} = 0. \quad (36)$$

Линеаризованное уравнение (36) имеет вид

$$(\delta\mathbf{b}, \bar{\nabla}\varphi_0) + (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}\delta\varphi) - \frac{i\omega}{c} A_{\parallel} = 0.$$

Поскольку

$$\delta\mathbf{b} = \delta\mathbf{B}/B_0 = A_{\parallel} \mathbf{rot}\mathbf{b}_0 + \left[\bar{\nabla} A_{\parallel} \times \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right]$$

это условие переписывается в виде

$$A_{\parallel} (\mathbf{rot}\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}\varphi_0) + \left(\left[\bar{\nabla} A_{\parallel} \times \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right], \bar{\nabla}\varphi_0 \right) + (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}\delta\varphi) - \frac{i\omega}{c} A_{\parallel} = 0.$$

Первое слагаемое в этом уравнении обращается в ноль, поскольку вектор $\mathbf{rot}\mathbf{b}_0$ направлен по азимуту. Тогда справедливо следующее соотношение

$$A_{\parallel} = -\frac{ic}{\omega_0} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \delta\varphi.$$

Слагаемое с возмущением магнитного поля в (35) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \left[\delta \left(\frac{\mathbf{b}}{B} \right) \times (T_\alpha \bar{\nabla} n_{\alpha 0} + q_\alpha n_{\alpha 0} \bar{\nabla} \varphi_0) \right] = \operatorname{div} \left[\frac{\delta \mathbf{B}}{B_0^2} \times (T_\alpha \bar{\nabla} n_{\alpha 0} + q_\alpha n_{\alpha 0} \bar{\nabla} \varphi_0) \right]. \quad (37)$$

Для дальнейших вычислений магнитное поле можно вынести за скобку, поскольку его градиенты малы. Первое слагаемое в (37) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\delta \mathbf{B} \times \bar{\nabla} n_{\alpha 0}) &= \operatorname{div}[\bar{\nabla} n_{\alpha 0} \times [\mathbf{b}_0 \times \bar{\nabla} A_{\parallel}]] = \\ &= (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla})(\bar{\nabla} n_{\alpha 0}, \bar{\nabla}) A_{\parallel} = -ic(\mathbf{b}_0, \bar{\nabla})(\bar{\nabla} n_{\alpha 0}, \bar{\nabla})(\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \frac{\delta \varphi}{\omega_0}. \end{aligned}$$

В таком случае (35) переписывается

$$\begin{aligned} -i\omega \delta n + \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0^2} \times \left(\frac{T}{M} \bar{\nabla} \delta n + \frac{q}{M} \delta n \bar{\nabla} \varphi_0 + \frac{q}{M} n_0 \bar{\nabla} \delta \varphi \right) \right] + \frac{c}{q} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B} \times \delta \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp}, n) \right] + \\ + \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[\delta n \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right] + \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)' \right] + \\ + c \operatorname{div} \left[\frac{\delta \mathbf{B}}{B_0} \times n_0 \bar{\nabla} \varphi_0 \right] - i \frac{c^2 T}{q B_0^2} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla})(\bar{\nabla} n_0, \bar{\nabla})(\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \frac{\delta \varphi}{\omega_0} + \operatorname{div} \frac{1}{q} \delta \mathbf{j}_{\parallel} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку ловушка осесимметричная, можно сделать преобразование Фурье по азимутальному углу. Тогда азимутальные производные сводятся к умножению на волновое число m . Слагаемое

$$\operatorname{div} \left[\delta n \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right]$$

преобразуется следующим образом

$$\operatorname{div} \left[\delta n \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right] = \left(\bar{\nabla} \delta n, \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right] \right) = im \delta n \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right]^{\phi}.$$

При этом принято во внимание то обстоятельство, что вектор

$$\left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right]$$

имеет только азимутальную компоненту.

Введя новые обозначения, линеаризованное уравнение непрерывности можно переписать в виде

$$\begin{aligned} i\omega_0 \delta n \left(1 - a \frac{mcT}{q\omega_0} \right) &= -i \frac{n_0 q}{T} \omega^* \delta \varphi + imc n_0 \delta \varphi + \\ &+ c \operatorname{div} \left[\frac{\delta \mathbf{B}}{B_0} \times n_0 \bar{\nabla} \varphi_0 \right] - i \frac{c^2 T}{q B_0^2} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla})(\bar{\nabla} n_0, \bar{\nabla})(\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \frac{\delta \varphi}{\omega_0} \\ &+ \frac{Mc}{q} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)' \right] + \frac{Mc}{q} im \delta n \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right]^{\phi} + \\ &+ \frac{c}{q} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp}, n) \right] + \operatorname{div} \frac{1}{q} \delta \mathbf{j}_{\parallel}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{a} = \text{rot}\left(\frac{\mathbf{b}_0}{B_0}\right) = a\hat{e}_\phi,$$

ω_0 и ω^* соответствуют определениям (11) и (12).

Поскольку $\beta \ll 1$ величина a пропорциональна значению кривизны силовых линий магнитного поля $\kappa = |(\mathbf{b}_0, \bar{\nabla})\mathbf{b}_0|$. Поэтому слагаемые, пропорциональные a малы и учитываются только в линейном по a приближении. В инерции и вязкости нет необходимости сохранять малые члены, содержащие a . Тогда возмущение плотности δn можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta n = & -\frac{n_0 q \omega^*}{T} \delta\varphi + n_0 \frac{mca}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0}\right) \delta\varphi - i \frac{Mc}{q\omega_0} \text{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} \right)' \right] - \\ & - i \frac{Mc}{q\omega_0} im \delta n \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp 0}}{dt} \right)' \right]^\phi - i \frac{c}{q\omega_0} \text{div} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \mathbf{S}(\mathbf{V}'_\perp, n) \right] - \\ & - i \frac{c}{\omega_0} \text{div} \left[\frac{\delta \mathbf{B}}{B_0} \times n_0 \bar{\nabla} \varphi_0 \right] - \frac{c^2 T}{q B_0^2 \omega_0} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} n_0, \bar{\nabla}) (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \frac{\delta\varphi}{\omega_0} - \\ & - \frac{i}{q\omega_0} \text{div} \delta \mathbf{j}_\parallel. \end{aligned} \quad (38)$$

Слагаемые с инерцией, а также с вязкостью зависят от возмущения гидродинамической скорости $\delta \mathbf{V}'_\perp$. Эту скорость можно получить из (5)

$$\delta \mathbf{V}'_\perp \approx \frac{Mc}{q} \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{T}{M} \frac{\bar{\nabla} \delta n}{n_0} - \frac{T}{M} \frac{\bar{\nabla} n_0}{n_0} \frac{\delta n}{n_0} + \frac{q}{M} \bar{\nabla} \delta\varphi \right) \right].$$

Из (38) для δn в пренебрежении малыми слагаемыми, связанными с кривизной силовых линий магнитного поля, а также поправок из-за инерции и вязкости можно написать

$$\delta n \approx -\frac{n_0 q \omega^*}{T} \delta\varphi.$$

Тогда справедливо

$$n_0 \bar{\nabla} \delta n - \delta n \bar{\nabla} n_0 \approx -n_0^2 \bar{\nabla} \frac{q \omega^*}{T} \delta\varphi.$$

В таком случае выражение для $\delta \mathbf{V}'_\perp$ принимает вид

$$\delta \mathbf{V}'_\perp \approx c \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \bar{\nabla} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi \right].$$

Этого приближения достаточно, чтобы адекватно описать эффекты, связанные с инерцией плазмы, а также с ее вязкостью.

Четвертое слагаемое в правой части (38) может быть расписано следующим образом

$$\left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} \right)' \right]^\phi \approx \frac{1}{r B_0} \left[(\mathbf{V}'_{\perp 0}, \bar{\nabla}) \mathbf{V}'_{\perp 0} \right]_r = -\frac{V'_{\perp 0}{}^2}{r^2 B_0} = -\frac{\omega_{dr}^2}{B_0},$$

где принято что скорость невозмущенного дрейфа может быть представлена в виде

$$\mathbf{V}'_{\perp 0} = \left(\omega_E + \frac{\omega^*}{m} \right) r \hat{e}_\phi = \omega_{dr} \hat{e}_\phi.$$

В таком случае справедливо

$$im\delta n \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left(\frac{d\mathbf{V}'_{\perp}}{dt} \right)' \right]^\phi = im \frac{n_0 q \omega^* \omega_{dr}^2}{T \omega_0 B} \delta\varphi. \quad (39)$$

Возмущение полной производной по времени от гидродинамической скорости \mathbf{V}'_{\perp} имеет вид

$$\delta \left(\frac{d\mathbf{V}'_{\perp}}{dt} \right)' = \delta \left(\frac{\partial \mathbf{V}'_{\perp}}{\partial t} + (\mathbf{V}'_{\perp}, \bar{\nabla}) \mathbf{V}'_{\perp} \right) = \quad (40)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{V}'_{\perp} + \bar{\nabla}(\mathbf{V}'_{\perp 0}, \delta \mathbf{V}'_{\perp}) - [\delta \mathbf{V}'_{\perp} \times \mathbf{rot} \mathbf{V}'_{\perp 0}] - [\mathbf{V}'_{\perp 0} \times \mathbf{rot} \delta \mathbf{V}'_{\perp}]. \quad (41)$$

Тогда третье слагаемое в правой части (38) может быть расписано следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}'_{\perp}}{dt} \right)' \right] &= -i\omega c \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \bar{\nabla} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi \right] \right] + \\ &+ \left(\mathbf{rot} \left(n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right), \bar{\nabla} \right) (\mathbf{V}'_{\perp 0}, \delta \mathbf{V}'_{\perp}) - \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times [\delta \mathbf{V}'_{\perp} \times \mathbf{rot} \mathbf{V}'_{\perp 0}] \right] - \\ &- \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times [\mathbf{V}'_{\perp 0} \times \mathbf{rot} \delta \mathbf{V}'_{\perp}] \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Первое слагаемое в правой части (42) можно переписать в виде

$$-i\omega c \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \left[\frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \bar{\nabla} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi \right] \right] = i\omega c \operatorname{div} \frac{n_0}{B_0^2} \bar{\nabla}_{\perp} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi$$

Три последних слагаемых в (42) удобно преобразовывать вместе. Если ввести обозначение

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{rot} \left(n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right),$$

тогда

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}_i, \bar{\nabla})(\mathbf{V}'_{\perp 0}, \delta \mathbf{V}'_{\perp}) - \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times [\delta \mathbf{V}'_{\perp} \times \mathbf{rot} \mathbf{V}'_{\perp 0}] \right] - \\ &- \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times [\mathbf{V}'_{\perp 0} \times \mathbf{rot} \delta \mathbf{V}'_{\perp}] \right] = (\mathbf{a}_i, \bar{\nabla})(\mathbf{V}'_{\perp 0}, \delta \mathbf{V}'_{\perp}) - \\ &- \operatorname{div} \left(\delta \mathbf{V}'_{\perp} \frac{n_0}{B_0} (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \mathbf{V}'_{\perp 0}) \right) - \operatorname{div} \left(\mathbf{V}'_{\perp 0} \frac{n_0}{B_0} (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \delta \mathbf{V}'_{\perp}) \right). \end{aligned}$$

Если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \left(\mathbf{V}'_{\perp 0} \frac{n_0}{B_0} (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \delta \mathbf{V}'_{\perp}) \right) = (\mathbf{V}'_{\perp 0}, \bar{\nabla}) \frac{n_0}{B_0} (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \delta \mathbf{V}'_{\perp}) = \\ &= (\mathbf{V}'_{\perp 0}, \bar{\nabla}) \left(\operatorname{div} \left[\delta \mathbf{V}'_{\perp} \times n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right] + (\mathbf{a}_i, \delta \mathbf{V}'_{\perp}) \right) = \\ &= (\mathbf{V}'_{\perp 0}, \bar{\nabla}) \left(c \operatorname{div} \frac{n_0}{B_0^2} \bar{\nabla}_{\perp} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi + (\mathbf{a}_i, \delta \mathbf{V}'_{\perp}) \right), \end{aligned}$$

тогда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} \right)' \right] &= i\omega c \operatorname{div} \frac{n_0}{B_0^2} \bar{\nabla}_\perp \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi + \\ &+ (\mathbf{a}_i, \bar{\nabla})(\mathbf{V}'_{\perp 0}, \delta\mathbf{V}'_{\perp}) - (\mathbf{V}'_{\perp 0}, \bar{\nabla}) \left(c \operatorname{div} \frac{n_0}{B_0^2} \bar{\nabla}_\perp \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi + (\mathbf{a}_i, \delta\mathbf{V}'_{\perp}) \right) - \\ &- c \operatorname{div} \left[\frac{n_0}{B_0^2} (\mathbf{b}_0, \operatorname{rot} \mathbf{V}'_{\perp 0}) \mathbf{b}_0 \times \bar{\nabla} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку вектора $\mathbf{V}'_{\perp 0}$ и \mathbf{a}_i сонаправлены, второе и четвертое слагаемые в (43) точно сокращаются

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} \right)' \right] &= ic(\omega_0 - \omega^*) \operatorname{div} \frac{n_0}{B_0^2} \bar{\nabla}_\perp \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi - \\ &- icm \operatorname{rot} \left(\frac{n_0}{B_0^2} \mathbf{b}_0 (\mathbf{b}_0, \operatorname{rot} \mathbf{V}'_{\perp 0}) \right)^\phi \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi. \end{aligned}$$

Если воспользоваться определением (13) и расписать полученное выражение с учетом малости кривизны силовых линий магнитного поля, тогда результат принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[n_0 \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \times \delta \left(\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} \right)' \right] &= \frac{ic}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 (\omega_0 - \omega^*)^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi + \right. \\ &+ \left. \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 (\omega_0 - \omega^*)^2 \psi + (\omega^2 - m^2 \omega_{dr}^2) r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} \right) \psi \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Для описания вязких эффектов, был введен вектор \mathbf{S} , который выражается через тензор потока импульса π_{ik}

$$S_i = \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}.$$

Поскольку плазма ГДЛ находится в сильном магнитном поле, то циклотронная частота больше частоты ионных столкновений

$$\omega\tau \gg 1,$$

где Ω - ионная циклотронная частота, τ - частота ионных столкновений. В этом приближении компоненты тензора потока импульса в декартовой системе координат имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \pi_{xx} &= -\pi_{yy} = -\eta W_{xx}, \\ \pi_{xy} &= \pi_{yx} = \frac{\eta}{2} (W_{xx} - W_{yy}), \end{aligned}$$

где W_{ik} - бесследовый симметричный тензор, имеющий вид

$$W_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Коэффициент η равен $nT/2\Omega$. Декартовы компоненты вектора \mathbf{S} имеют вид

$$\begin{aligned}
S_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,y)\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\eta(x,y)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) = \\
&= -\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) - \eta\Delta_{\perp}V_y, \\
S_y &= \frac{\partial}{\partial x}\eta(x,y)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\eta(x,y)\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) = \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \eta\Delta_{\perp}V_x.
\end{aligned} \tag{45}$$

В дальнейшем удобно пользоваться вектором \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_0 \\ B_0 \end{array} \times \mathbf{S} \right]. \tag{46}$$

При переходе в цилиндрическую систему координат следует иметь ввиду следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \cos\phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi, \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi}, \\
\{V_x, V_y\} &= \{V_r \cos\phi - V_{\phi} \sin\phi, V_r \sin\phi + V_{\phi} \cos\phi\}.
\end{aligned}$$

Тогда можно написать

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) &= \cos 2\phi \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\phi}}{\partial\phi}\right) - \sin 2\phi \left(\frac{\partial V_{\phi}}{\partial r} - \frac{V_{\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right), \\
\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) &= \cos 2\phi \left(\frac{\partial V_{\phi}}{\partial r} - \frac{V_{\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right) + \sin 2\phi \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\phi}}{\partial\phi}\right).
\end{aligned}$$

После линеаризации вектор \mathbf{R} удобно разделить на два слагаемых

$$\delta\mathbf{R}(\eta, \mathbf{V}'_{\perp}) = \mathbf{R}(\eta_0, \delta\mathbf{V}'_{\perp}) + \mathbf{R}(\delta\eta, \mathbf{V}'_{\perp 0}) = \delta\mathbf{R}_1 + \delta\mathbf{R}_2.$$

Из (45) и (46) для компонент $\delta\mathbf{R}_1$ можно написать

$$\begin{aligned}
\delta R_{1x} &= -\frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial\eta_0}{\partial r} [\delta\beta' \cos\phi - \delta\alpha' \sin\phi] + \eta_0 \Delta_{\perp} \delta\mathbf{V}'_x \right), \\
\delta R_{1y} &= -\frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial\eta_0}{\partial r} [\delta\beta' \sin\phi + \delta\alpha' \cos\phi] + \eta_0 \Delta_{\perp} \delta\mathbf{V}'_y \right),
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\delta\alpha' &= \frac{\partial\delta V'_{\phi}}{\partial r} - \frac{\delta V'_{\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\delta V'_r}{\partial\phi}, \\
\delta\beta' &= \frac{\partial\delta V'_r}{\partial r} - \frac{\delta V'_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\delta V'_{\phi}}{\partial\phi}.
\end{aligned}$$

Тогда радиальная и азимутальная компоненты вектора $\delta\mathbf{R}_1$ имеют вид

$$\begin{aligned}\delta R_{1r} &= -\frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial r} \delta\beta' + \eta_0 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r \right), \\ \delta R_{1\phi} &= -\frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial r} \delta\alpha' + \eta_0 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_{\phi} \right).\end{aligned}$$

Дивергенция вектора $\delta\mathbf{R}_1$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \delta\mathbf{R}_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \delta R_{1r} + \frac{im}{r} \delta R_{1\phi} = \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{1}{B_0} \left(\eta_0' \delta\beta' + \eta_0 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r \right) - \frac{im}{r} \frac{1}{B_0} \left(\eta_0' \delta\alpha' + \eta_0 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_{\phi} \right) = \\ &= -\frac{1}{B_0 r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \eta_0' \delta\beta' + \eta_0 \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r - r (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + imr (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_{\phi} \right] + \eta_0' \left[r^2 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r - r \delta\beta' + imr \delta\alpha' \right] \right),\end{aligned}\quad (47)$$

где использовано обозначение

$$\eta_0' = \frac{\partial \eta_0}{\partial r} = \omega^* \frac{2Mrn_0}{m}.$$

После вычислений

$$\begin{aligned}\delta\alpha' &= \frac{c}{B_0} \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\omega_0 - \omega^*) \psi + \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi + \frac{1 - m^2}{r} (\omega_0 - \omega^*) \psi \right), \\ \delta\beta' &= -2 \frac{imc}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r &= \Delta_{\perp} \delta V'_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \delta V'_{\phi}}{\partial \phi} - \frac{\delta V'_r}{r^2} = \\ &= \left(\frac{imc}{B_0} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 - 1}{r^2} (\omega_0 - \omega^*) \psi \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_{\phi} &= \Delta_{\perp} \delta V'_{\phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \delta V'_r}{\partial \phi} - \frac{\delta V'_{\phi}}{r^2} = \\ &= \left(\frac{c}{B_0} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi + \frac{m^2 - 1}{r^2} (\omega_0 - \omega^*) \psi \right),\end{aligned}$$

можно получить, что слагаемые в (47) равны соответственно

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \eta_0' \delta\beta' = -\frac{iMc}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \omega^* n_0 \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r - r (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_r + imr (\Delta_{\perp} \delta \mathbf{V}'_{\perp})_{\phi} = 0,$$

$$r^2(\Delta_{\perp}\delta\mathbf{V}'_{\perp})_r - r\delta\beta' + imr\delta\alpha' = 2\left(\frac{imc}{B_0}\right)(m^2 - 1)(\omega_0 - \omega^*)\psi,$$

а выражение для $\text{div}\delta\mathbf{R}_1$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \text{div}\delta\mathbf{R}_1 &= \frac{iMc}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega^* \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*) \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega^* (\omega_0 - \omega^*) \psi \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Аналогичным образом вычисляется и $\text{div}\delta\mathbf{R}_2$. Используя (45) и (46), компоненты вектора $\delta\mathbf{R}_2$ можно переписать через компоненты скорости дрейфа и возмущение плотности плазмы

$$\begin{aligned} \delta R_{2x} &= -\frac{1}{B_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \delta\eta \left(\frac{\partial V'_{0x}}{\partial x} - \frac{\partial V'_{0y}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \delta\eta \left(\frac{\partial V'_{0y}}{\partial x} + \frac{\partial V'_{0x}}{\partial y} \right) \right\}, \\ \delta R_{2y} &= -\frac{1}{B_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \delta\eta \left(\frac{\partial V'_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial V'_{0y}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \delta\eta \left(\frac{\partial V'_{0x}}{\partial x} - \frac{\partial V'_{0y}}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\delta\eta = \frac{T}{2\Omega} \delta n \approx -\frac{M_i c}{2B_0} n_0 \omega^* r \psi.$$

То же можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta R_{2x} &= -\frac{1}{B} \left\{ -\mu_0 \frac{\partial \delta\eta}{\partial r} \sin \phi + \mu_0 \frac{im}{r} \delta\eta \cos \phi + \delta\eta \Delta_{\perp} V'_{0x} \right\}, \\ \delta R_{2y} &= -\frac{1}{B} \left\{ \mu_0 \frac{\partial \delta\eta}{\partial r} \cos \phi + \mu_0 \frac{im}{r} \delta\eta \sin \phi + \delta\eta \Delta_{\perp} V'_{0y} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_0 = r \frac{d\omega_{dr}}{dr}.$$

Тогда радиальная и азимутальная компоненты вектора $\delta\mathbf{R}_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \delta R_{2r} &= -\frac{1}{B_0} \left\{ \mu_0 \frac{im}{r} \delta\eta + \delta\eta (\Delta_{\perp} \mathbf{V}'_{\perp 0})_r \right\}, \\ \delta R_{2\phi} &= -\frac{1}{B_0} \left\{ \mu_0 \frac{\partial \delta\eta}{\partial r} + \delta\eta (\Delta_{\perp} \mathbf{V}'_{\perp 0})_{\phi} \right\}. \end{aligned}$$

Соответственно, для $\text{div}\delta\mathbf{R}_2$ получается следующее соотношение

$$\begin{aligned} \text{div}\delta\mathbf{R}_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \delta R_{2r} + \frac{im}{r} \delta R_{2\phi} = \\ &= -\frac{1}{B_0} \left\{ \frac{im}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mu_0 \delta\eta + \frac{im}{r} \left(\mu_0 \frac{\partial \delta\eta}{\partial r} + \delta\eta (\Delta_{\perp} \mathbf{V}'_{\perp 0})_{\phi} \right) \right\} = \\ &= -\frac{i}{B_0 r^2} \left\{ 2mr \mu_0 \frac{\partial \delta\eta}{\partial r} + mr \delta\eta \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial r} + (\Delta_{\perp} \mathbf{V}'_{\perp 0})_{\phi} \right) \right\} = \\ &= -\frac{iM_i c}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega^* \psi \frac{\partial}{\partial r} (\omega_0 - \omega^*). \end{aligned} \quad (49)$$

Теперь выражение для $\text{div}\delta\mathbf{R}$ прямо следует из (48) и (49)

$$\begin{aligned} \text{div}\delta\mathbf{R} = & \frac{iM_i c}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega^* (\omega_0 - \omega^*) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega^* (\omega_0 - \omega^*) \psi \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Собрав вместе (39), (44) и (50), можно переписать выражение (38) в виде

$$\begin{aligned} \delta n = & -n_0 \frac{q}{T} \frac{\omega^*}{\omega_0} \delta\varphi + n_0 \frac{mca}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi + \\ & + \frac{Mc^2}{q\omega_0 r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{\partial}{\partial r} \psi + \right. \\ & + \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \psi + \omega^2 r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} \right) \psi \left. \right) - \\ & - i \frac{c}{\omega_0} \text{div} \left[\frac{\delta\mathbf{B}}{B_0} \times n_0 \bar{\nabla} \varphi_0 \right] - \frac{c^2 T}{q B_0^2 \omega_0} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} n_0, \bar{\nabla}) (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \frac{\delta\varphi}{\omega_0} - \\ & - \frac{i}{q\omega_0} \text{div} \delta \mathbf{j}_{\parallel}. \end{aligned}$$

В таком случае уравнение Пуассона (9) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \Delta \delta\varphi = & \sum_{\alpha} \left[-n_0 \frac{q_{\alpha}^2}{T_{\alpha}} \frac{\omega_{\alpha}^*}{\omega_0} \delta\varphi + q_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{mca}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega_{\alpha}^*}{\omega_0} \right) \delta\varphi + \right. \\ & + \frac{M_{\alpha} c^2}{\omega_0 r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_{0\alpha}}{B^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega_{\alpha}^*) \frac{\partial}{\partial r} \psi + \right. \\ & + \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_{0\alpha}}{B^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega_{\alpha}^*) \psi + \omega^2 r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_{0\alpha}}{B^2} \right) \psi \left. \right) - \\ & - i \frac{q_{\alpha} c}{\omega_0} \text{div} \left[\frac{\delta\mathbf{B}}{B_0} \times n_{0\alpha} \bar{\nabla} \varphi_0 \right] - \frac{c^2 T_{\alpha}}{B_0^2 \omega_0} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} n_{0\alpha}, \bar{\nabla}) (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \frac{\delta\varphi}{\omega_0} - \\ & \left. - \frac{i}{\omega_0} \text{div} \delta \mathbf{j}_{\parallel\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Выражение для $\text{div}\delta\mathbf{j}_{\parallel}$ можно получить, воспользовавшись уравнениями Максвелла

$$\sum_{\alpha} \text{div} \delta \mathbf{j}_{\alpha\parallel} = \text{div} \delta \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{c}{4\pi} \text{div} \left[\mathbf{b}_0 (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \delta \mathbf{B}) \right] = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \delta \mathbf{B}).$$

Далее удобно воспользоваться явным видом для $\delta\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_0, \mathbf{rot} \delta \mathbf{B}) &= (\mathbf{b}_0, A_{\parallel} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{b}_0 + \bar{\nabla} A_{\parallel} \times \mathbf{rot} \mathbf{b}_0 + \mathbf{rot} [\bar{\nabla} A_{\parallel} \times \mathbf{b}_0]) \sim \\ &\sim (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla} A_{\parallel} \times \mathbf{rot} \mathbf{b}_0) + \text{div} [[\bar{\nabla} A_{\parallel} \times \mathbf{b}_0] \times \mathbf{b}_0] = -\bar{\nabla}_{\perp}^2 A_{\parallel}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\text{div} \delta \mathbf{j}_{\parallel} = -\frac{c}{4\pi} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \bar{\nabla}_{\perp}^2 A_{\parallel}.$$

Левой частью линеаризованного уравнения Пуассона (9) можно пренебречь, поскольку она мала в сравнении с остальными слагаемыми как

$$c_a^2/c^2 \ll 1,$$

где c_a - альфвеновская скорость, c - скорость света. Суммирование в (51) производится по всем сортам частиц (электроны и два сорта ионов). В отношении электронов предполагается, что они холодные, то есть $T_e \rightarrow 0$. При этом согласно определению (12) предел

$$\lim_{T_e \rightarrow 0} \frac{\omega_e^*}{T_e} \propto \frac{1}{n_{0e}} \frac{dn_{0e}}{dr}$$

конечен. Если принять во внимание уравнением квазинейтральности плазмы

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha} = 0,$$

а так же отбросив малые слагаемые (порядка β), то после суммирования из (51) можно получить искомое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1 - m^2}{r^3} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \psi + \\ & + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} \right) r \psi + \frac{r}{4\pi M_i} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \bar{\nabla}_{\perp}^2 (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) r \psi = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь использовано обозначение

$$\omega^* = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^* n_{0\alpha} / \sum_{\alpha} n_{0\alpha},$$

а остальные обозначения соответствуют тем, что используются в (10). Инерцией электронов пренебрегается поскольку она мала. Уравнение (52) описывает электромагнитные колебания в плазме. В нем учтены эффекты конечности ларморовского радиуса быстрых ионов, а также неоднородность азимутального дрейфа частиц плазмы. Это уравнение надо дополнить граничными условиями по r и по z . Поскольку плазма окружена проводящим кожухом, можно считать, что на границе ($r = r_0$)

$$\psi(r = r_0) = 0.$$

Граничные условия по z зависят от свойств плазмопоглотителя, в который упираются силовые линии. Если считать его не проводящим, тогда выполнено $\delta j_{\parallel}(z = L/2) = 0$ ($z = l$ соответствует положению плазмопоглотителя). В терминах $\delta\varphi$ это условие переписется

$$\bar{\nabla}_{\perp}^2 (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) r \psi = 0.$$

Уравнение (52) можно переписать в виде

$$\hat{L}_{\perp} \psi + \hat{L}_{\parallel} \psi = 0,$$

где введены обозначения

$$\hat{L}_\perp = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - m^2}{r^3} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_0}{B_0^2} \right) r,$$

$$\hat{L}_\parallel = \frac{r}{4\pi M_i} (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) \bar{\nabla}_\perp^2 (\mathbf{b}_0, \bar{\nabla}) r.$$

Оператор \hat{L}_\parallel самосопряженный, другими словами выполнено

$$\hat{L}_\parallel^{-1} = \hat{L}_\parallel.$$

Уравнение (52) можно решать методом последовательных приближений. Поскольку последнее слагаемое самое большое, функция нулевого приближения ψ_0 удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}_\parallel \psi_0 = 0.$$

Это означает, что функция ψ_0 зависит только от r . Уравнение на функцию ψ_1 следующего приближения имеет вид

$$\hat{L}_\perp \psi_0 + \hat{L}_\parallel \psi_1 = 0.$$

Если его умножить слева на ψ_0 и проинтегрировать вдоль силовой линии, тогда можно получить

$$\int dl \psi_0 \hat{L}_\perp \psi_0 + \int dl \psi_0 \hat{L}_\parallel \psi_1 = \psi_0 \int dl \hat{L}_\perp \psi_0 + \int dl \psi_1 \hat{L}_\parallel^{-1} \psi_0 = 0.$$

Таким образом условие разрешимости первого приближения имеет вид

$$\langle \hat{L}_\perp \rangle_l \psi_0 = 0,$$

где введено усреднение вдоль силовой линии

$$\langle (\dots) \rangle_l = \left[\int dl \right]^{-1} \int dl (\dots).$$

При усреднении оператора \hat{L}_\perp необходимо учитывать, что параметры плазмы зависят от расстояния вдоль силовой линии магнитного поля. Поскольку давление плазмы β мало, тогда уравнение силовой линии можно записать в виде

$$r(\rho, l) = \rho g(l),$$

где ρ - расстояние от оси ловушки до магнитной поверхности в центральной части ГДЛ. Функция $g(l)$ задает форму силовой линии. С точностью до слагаемых порядка β , справедливо

$$B_0 r^2 = \text{const}.$$

Тогда B_0 можно представить в виде

$$B_0(\rho, l) = B_0(\rho)g^{-2}(l),$$

где $B_0(\rho)$ профиль магнитного поля в центральном сечении установки. Частота электрического дрейфа на каждой магнитной поверхности не зависит от положения вдоль ловушки поскольку электронный ток выравнивает потенциал вдоль силовой линии

$$\left(\frac{\partial \omega_E}{\partial l}\right)_\rho = \left(\frac{\partial}{\partial l} \frac{c}{Br} \left(\frac{\partial \varphi_0(\rho)}{\partial r}\right)_z\right)_\rho = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{c}{Bg^2(l)} \frac{d\varphi_0}{\rho d\rho} \left[1 - \frac{\rho}{g(l)} \frac{dg(l)}{dl} \frac{(\partial z/\partial \rho)_l}{(\partial z/\partial l)_\rho}\right]^{-1}\right)_\rho \approx 0.$$

Тогда оператор \hat{L}_\perp можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{L}_\perp \approx & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{n_0(\rho, l)}{B_0^2(\rho)} g^4(l) \rho^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{\partial}{\partial \rho} + \\ & + (1 - m^2) \frac{n_0(\rho, l)}{B_0^2(\rho)} g^4(l) \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{n_0(\rho, l)}{B_0^2(\rho)} g^4(l)\right) \rho. \end{aligned}$$

После усреднения можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_\perp \rangle_l = & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\bar{n}_0(\rho)}{B_0^2(\rho)} \rho^3 \omega_0 (\omega_0 - \bar{\omega}^*) \frac{d}{d\rho} + \\ & + (1 - m^2) \frac{\bar{n}_0(\rho)}{B_0^2(\rho)} \omega_0 (\omega_0 - \bar{\omega}^*) + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{d}{d\rho} \frac{\bar{n}_0(\rho)}{B_0^2(\rho)}\right) \rho, \end{aligned} \quad (53)$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^* &= \frac{\langle \chi g^4 \omega^* \rangle_l}{\langle \chi g^4 \rangle_l}, \\ \bar{n}_0(\rho) &= n_0(\rho) \langle \chi g^4 \rangle_l, \\ \chi(\rho, l) &= n_0(\rho, l)/n_0(\rho), \end{aligned}$$

а $n_0(\rho)$ - профиль плотности в центральном сечении. Воспользовавшись (53) можно получить искомое уравнение, усредненное вдоль силовых линии магнитного поля

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\bar{n}_0(\rho)}{B_0^2(\rho)} \rho^3 \omega_0 (\omega_0 - \bar{\omega}^*) \frac{d}{d\rho} \psi_0 + (1 - m^2) \frac{\bar{n}_0(\rho)}{B_0^2(\rho)} \omega_0 (\omega_0 - \bar{\omega}^*) \psi_0 + \\ & + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{d}{d\rho} \frac{\bar{n}_0(\rho)}{B_0^2(\rho)}\right) \rho \psi_0 = 0. \end{aligned}$$

Далее в тексте, для простоты записи, опускается значок усреднения “ $\langle \dots \rangle_l$ ”, а вместо ρ использовано r , что надо интерпретировать как расстояние до магнитной поверхности в центральном сечении.

Это уравнение находится в согласии с результатом, полученным Тимофеевым А.В. разложением функции распределения по малости ларморовского радиуса частиц [21].

Список литературы

- [1] *Мирнов В.В., Рютов Д.Д.* Газодинамическая линейная ловушка для удержания плазмы // Письма в ЖТФ 1979. Т.5(11). С.678
- [2] *Мирнов В.В., Рютов Д.Д.* Газодинамическая ловушка // Вопросы атомной науки и техники (серия “Термоядерный синтез”) 1980. Вып.1(5). С.57
- [3] New results of gas-dynamic trap research / *Kotel'nikov I.A., Mirnov V.V., Nagornij V.P., Ryutov D.D.* // Proc. of Tenth Int. Conf. on PlasmaPhysics and Controled Nuclear Fusion Research., London, 1984. V.2, P.309
- [4] *Мирнов В.В., Нагорный В.П.* Кинетика высокоэнергетичных ионов в газодинамической ловушке // Вопросы атомной науки и техники (серия “Термоядерный синтез”) 1984. Вып.3(16). С.40
- [5] Математическая модель источника нейтронов на основе газодинамической ловушки / *Котельников И.А., Рютов Д.Д., Цидулко Ю.А., и др.* // Препринт/Ин-т ядерной физики СО АН СССР 90-105, Новосибирск 1990
- [6] *Rosenbluth M.N., Longmire C.L.* Stability of plasmas confined by magnetic fields // Annals of Physics. 1957. V.1, P.210
- [7] *Кадомцев Б.Б.* // В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. - М.: АН СССР, 1958. Т.4. С.353
- [8] *Rayleigh (J.W.Strutt)* // Scientific Papers. Cambr. Univ. Press. 1880. V.1. P.474
- [9] *Линь Цзя-Цзяо.* Теория плазменных неустойчивостей. - М.: ИЛ, 1958.
- [10] *Тимофеев А.В.* Резонансные явления в колебаниях плазмы. - М.: Физматлит, 2000. С.153.
- [11] Finite Larmor Radius Stabilization of “Weakly” Unstable Confined Plasmas. / *Rosenbluth M.N., Krall N.A., Rostoker N.* // Nuclear Fusion: Supplement, Part 1. 1962. P.143
- [12] *Hoh F.S.* Simple picture of the finite Larmor radius stabilization effect. // Phys. Fluids. 1963. V.6, P.1359
- [13] Observation of magnetohydrodynamic stability limit in cusp-anchored Gas-Dynamic Trap. / *Anikeev A.V., Bagryansky P.A., Deichuli P.P., e.a.* // Physics of Plasmas. 1997. V.4, P.347

- [14] Experiments with controllable application of radial electric field in GDT central cell. / *Bagryansky P.A., Lizunov A.A., Zuev A.A., e.a.* // Transactions of Fusion Science and Technology. 2002. V.1T, P.152
- [15] *Рухадзе А.А., Шпигель И.С.* Стабилизация желобковой неустойчивости плазмы неоднородным электрическим полем. // ЖЭТФ 1965. Т.48(1), С.151
- [16] *Безтенева А.А., Волосов В.И.* О некоторых особенностях желобковых колебаний в открытой ловушке с радиальным электрическим полем. // ЖТФ 1977. Т.47(7), С.1450
- [17] The ZaP Flow Z-Pinch: Plasma Flow Shear and Stability. / *Den Hartog D.J., Golingo R.P., Jackson S.L., e.a.* // Transactions of Fusion Science and Technology. 2004. V.1T P.134
- [18] *Kaufman A.N.* Plasma Viscosity in a Magnetic Field. // The Phys. Fluids. 1960. V.3, P.610.
- [19] *Нагорный В.П., Рютков Д.Д., Ступаков Г.В.* Влияние течения плазмы на желобковую неустойчивость. // Препринт/Ин-т ядерной физики СО АН СССР 83-74
- [20] *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* - Докл. АН СССР. 1966, Т.170, С.811
- [21] *Тимофеев А.В.* Влияние резонансов между волной и невозмущенным движением плазмы на устойчивость желобковых колебаний. // Ядерный Синтез 1966. Т.6, С.93