

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет: **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра: **ФИЗИКА ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки: **03.02.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **МАГИСТРАТУРА**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА**

**ГОРН АЛЕКСАНДР АНДРЕЕВИЧ**

Тема работы: **ИНЖЕКЦИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В КИЛЬВАТЕРНУЮ ВОЛНУ В  
ОГРАНИЧЕННОЙ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЕ**

**«К защите допущен»**

Заведующий кафедрой,

д. ф-м н., профессор

Иванов А. А. /

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

**Научный руководитель**

д. ф-м н., профессор

г. н. с, ИЯФ СО РАН

Лотов К. В. /

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Дата защиты: «19» июня 2018г.

# Оглавление

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>                                          | <b>2</b>  |
| 1.1      | Литературный обзор . . . . .                             | 2         |
| 1.2      | Постановка задачи и режимы взаимодействия . . . . .      | 4         |
| <b>2</b> | <b>Линейный режим</b>                                    | <b>7</b>  |
| <b>3</b> | <b>Нелинейный режим</b>                                  | <b>14</b> |
| <b>4</b> | <b>Проблема инъекции электронов в кильватерную волну</b> | <b>23</b> |
| <b>5</b> | <b>Заключение</b>                                        | <b>26</b> |
| <b>6</b> | <b>Благодарности</b>                                     | <b>28</b> |

# 1. Введение

## 1.1 Литературный обзор

Реакция плазмы на ультрарелятивистские пучки заряженных частиц — это классическая проблема физики плазмы, активно изучаемая с начала 1970х [1–5]. С появлением концепции плазменного кильватерного ускорения (PWFA) [6–9] интерес к этой проблеме возобновился [10–17]. Сейчас PWFA считается одним из перспективных путей к ускорителям будущего, применяемым в физике высоких энергий [18–27]. Развитие этого направления дало толчок к подробным исследованиям различных вариантов этой задачи, одним из которых является реакция радиально ограниченной плазмы на ультрарелятивистские пучки заряженных частиц.

Изучение радиально-ограниченной плазмы в контексте PWFA также началось в 1970х [28, 29]. Реакция плазмы была подробно изучена только в линейном приближении для однородной плазмы и пучков с плотностью, много меньшей плотности плазмы. Дальнейшие исследования были сконцентрированы на эффектах радиально-неоднородной плазмы [30, 31], длительной временной эволюции нелинейных плазменных волн [32] и пучковых неустойчивостях [33].

С недавнего времени эксперимент AWAKE [23] в ЦЕРН возобновил интерес к изучению взаимодействия плотных протонных пучков с плазмой низкой плотности. В AWAKE три сопутствующих пучка (лазерный, протонный и электронный) распространяются внутри 10-метровой газовой ячейки, наполненной парами рубидия (Рис. 1.1). [35, 36] Фемтосекундный лазерный импульс однократно ионизует весь газ на своем пути, оставляя позади однородный плазменный столб с резкой

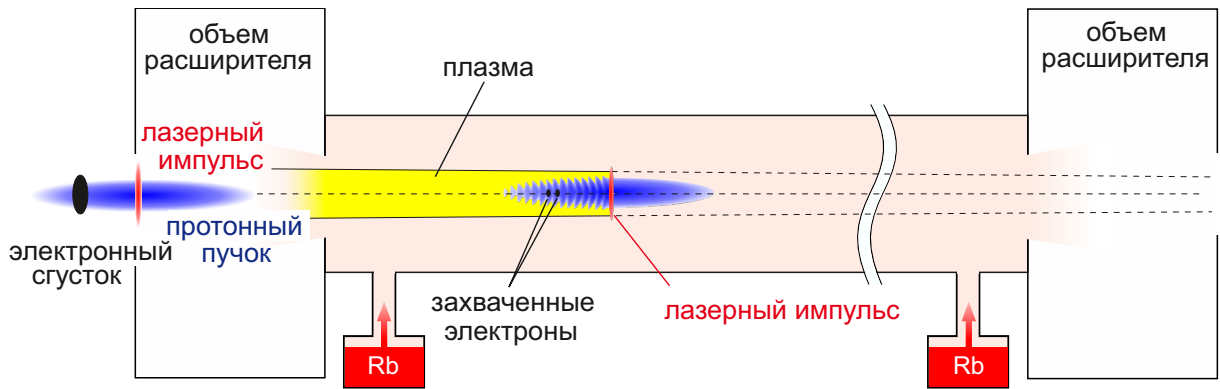


Рис. 1.1: Схема эксперимента AWAKE.

границей. [37] Протонный пучок, взаимодействуя с плазмой, разбивается на микросгустки [38, 39] и резонансно возбуждает плазменную волну с амплитудой  $\sim 2$  ГэВ/м, в которую затем захватывается электронный пучок [40, 41]. Так как лазерный импульс не может проникать сквозь фольги, отверстия в вакуумной камере между газовой ячейкой и высоковакуумным объемом открыты [41]. Рубидиевый пар свободно вытекает в расширительные вакуумные камеры, прикрепленные к торцам газовой ячейки. Потери пара компенсируются двумя рубидиевыми источниками, установленными вблизи концов ячейки [42]. В этой области лазерный импульс также ионизует пар, создавая плазменный столб примерно постоянного сечения, однородный по радиусу, с продольным профилем, имеющим плавные переходы плотности к нулю по мере удаления от отверстий газовой ячейки. Поля, возбуждаемые в этой переходной области пучками, слишком слабы, чтобы как-то повлиять на протонный пучок с энергией 400 ГэВ, однако существенно изменяют траектории низкоэнергичных электронов (16 МэВ), меняя тем самым условия захвата частиц в кильватерную волну [40, 41].

В данной работе основное внимание уделяется полям, создаваемым в радиально-ограниченной плазме низкой плотности пучками обоих знаков заряда, так как они имеют огромное значение для инжекции электронов в кильватерную волну для последующего ускорения. Токи и возмущения плотности исследуются по мере необходимости интерпретации тех или иных эффектов. Реакция плазмы прослежена, начиная с линейного режима и заканчивая сильно-нелинейным по мере уменьшения плотности плазмы. Пучковые неустойчивости выходят за рамки данной

работы.

## 1.2 Постановка задачи и режимы взаимодействия

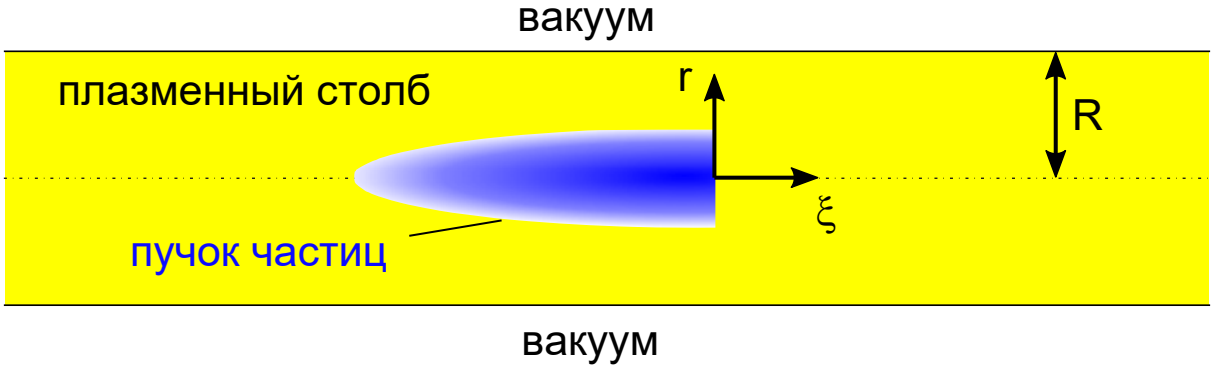


Рис. 1.2: Геометрия проблемы.

Рассмотрим осесимметричный пучок заряженных частиц в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$ . Введем также сопутствующую координату  $\xi = z - ct$ , где  $c$  — скорость света. Плазменный столб имеет радиус  $R$  и постоянную плотность  $n_0$  (Рис. 1.2). Плазма бесстолкновительная, и ионы неподвижны. Плотность пучка  $n_b(r, \xi)$  не эволюционирует в сопутствующем окне. Такое приближение называется квазистатическим и работает для ультррелятивистских пучков, когда характерное время эволюции пучка много больше его длительности. Заострим внимание на кильватерном потенциале  $\Phi$ , который описывает как фокусирующие, так и ускоряющие свойства плазменной волны. Компоненты силы, действующей на ультррелятивистскую частицу с элементарным зарядом  $e > 0$ , описываются через производные от этой величины

$$e(E_r - B_\phi) = -e \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad eE_z = -e \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — электрическое и магнитное поля. Также сфокусируем внимание на плотности плазменных электронов  $n_e$ , так как она явно отображает реакцию плазмы. Остальные величины рассмотрим по мере необходимости.

Таблица 1.1: Основные параметры моделирования.

| Параметр, обозначение                   | Величина                           |
|-----------------------------------------|------------------------------------|
| Максимальная плотность плазмы, $n_{e0}$ | $7 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$ |
| Радиус плазмы, $R$ ,                    | 1.4 мм                             |
| Максимальная плотность пучка, $n_{b0}$  | $4 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ |
| Полная длина пучка, $L$                 | 30 см                              |
| Размер пучка, $\sigma_r$                | 0.2 мм                             |

Некоторые из упомянутых режимов взаимодействия не описываются аналитически. Для изучения их свойств проведена серия численных расчетов с помощью двухмерного осесимметричного кинетического кода LCODE [43, 44], использующего квазистатическое приближение. Так как эта работа мотивирована AWAKE [40], в моделировании использованы базовые параметры (Табл. 1.1) этого эксперимента. Однако плотность плазмы варьируется в пределах, внутри которых реакция плазмы представляет практический интерес. В рассматриваемом случае пиковый ток пучка много меньше  $mc^3/e \approx 17 \text{ кА}$ , где  $m$  — масса электрона, и существует иерархия пространственных масштабов

$$L \gg R \gg \sigma_r. \quad (1.2)$$

Для больших значений тока пучка и других отношений  $\sigma_r/R$  режимы взаимодействия могут отличаться.

Конкретная плотность пучка, используемая в работе,

$$n_b(r, \xi) = \begin{cases} n_{b0} e^{-r^2/2\sigma_r^2} (1 + \cos(\pi\xi/L))/2, & -L < \xi < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Такой продольный профиль содержит как медленно меняющуюся (длинный хвост), так и быстро меняющуюся (резкий передний фронт) части, тем самым давая информацию о реакции плазмы на пучки различных временных масштабов. В то время как основное внимание в работе уделяется положительно заряженным пучкам, электронные пучки также рассматриваются в случаях, когда плазма по-разному

Таблица 1.2: Границы между режимами взаимодействия и отвечающие им эффекты.

| Равенство                      | Эффект                  | Плотность плазмы                     | $n_0/n_{b0}$ |
|--------------------------------|-------------------------|--------------------------------------|--------------|
| $k_p R = 1$                    | граница плазмы          | $1.5 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ | 3.6          |
| $n_{b0} = n_0$                 | нелинейность плазмы     | $4 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$   | 1.0          |
| $n_0 R^2 = 2n_{b0} \sigma_r^2$ | собственные поля плазмы | $4 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$   | 0.01         |

реагирует на пучки обоих знаков заряда.

Для выбранного соотношения масштабов можно выделить четыре режима пучково-плазменного взаимодействия (Табл. 1.2). Первый режим соответствует высокой плотности плазмы, для которой радиус плазмы  $R$  много больше толщины скин-слоя  $k_p^{-1} = c/\omega_p$ , где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$  — плазменная частота. В этом режиме нет различий между ограниченной и бесконечной плазмой.

Во втором режиме эффекты границы плазмы существенны ( $k_p R \lesssim 1$ ), но, тем не менее,  $n_0 \gg n_{b0}$ , и нелинейные эффекты слабы. Эти два первых режима поддаются аналитическому описанию (Раздел 1.2).

В третьем режиме  $n_0 \lesssim n_{b0}$ , и реакция плазмы сильно нелинейна (Глава 2). Однако плазменный столб все еще содержит достаточно плазменных электронов, чтобы нейтрализовать заряд и ток пучка.

Четвертый режим соответствует очень низкой плотности плазмы. В этом случае (также описано в Главе 2) линейный заряд пучка превосходит таковой электронов плазмы,  $n_b \sigma_r^2 > n_0 R^2$ , и собственные поля плазмы пренебрежимо мало влияют на движение плазменных электронов.

Переход между режимами происходит плавно, и равенства, представленные в Табл. 1.2 показывают переходные границы лишь приближенно.

## 2. Линейный режим

Выражения для полей, создаваемых в радиально ограниченной однородной плазме пучком частиц низкой плотности, имеют удобный вид [33, 34], если плотность пучка зависит от  $r$  и  $\xi$  по отдельности, что верно в нашем случае (1.3),

$$n_b(r, \xi) = n_{b0} f(r) g(\xi). \quad (2.1)$$

Тогда потенциал также факторизуется:

$$\Phi(r, \xi) = \begin{cases} q \frac{mc^2 n_{b0}}{en_0} F(r) G(\xi), & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$G(\xi) = k_p \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \sin(k_p(\xi' - \xi)) g(\xi'), \quad (2.3)$$

$$F(r) = k_p^2 \int_0^R \left[ \frac{K_0(k_p R)}{I_0(k_p R)} I_0(k_p r_{>}) - K_0(k_p r_{>}) \right] \\ \times I_0(k_p r_{<}) f(r') r' dr', \quad (2.4)$$

где

$$r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r'), \quad (2.5)$$

$q = \pm 1$  — знак заряда пучка, а  $I_0$  и  $K_0$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода. Примечательно, что продольная периодичность потенциала во всех точках вдоль радиуса одинакова, и граница не оказывает воздействия на частоту колебаний плазмы в области вблизи  $r = R$ .

Свойства продольной функции (2.3) наилучшим образом видны после



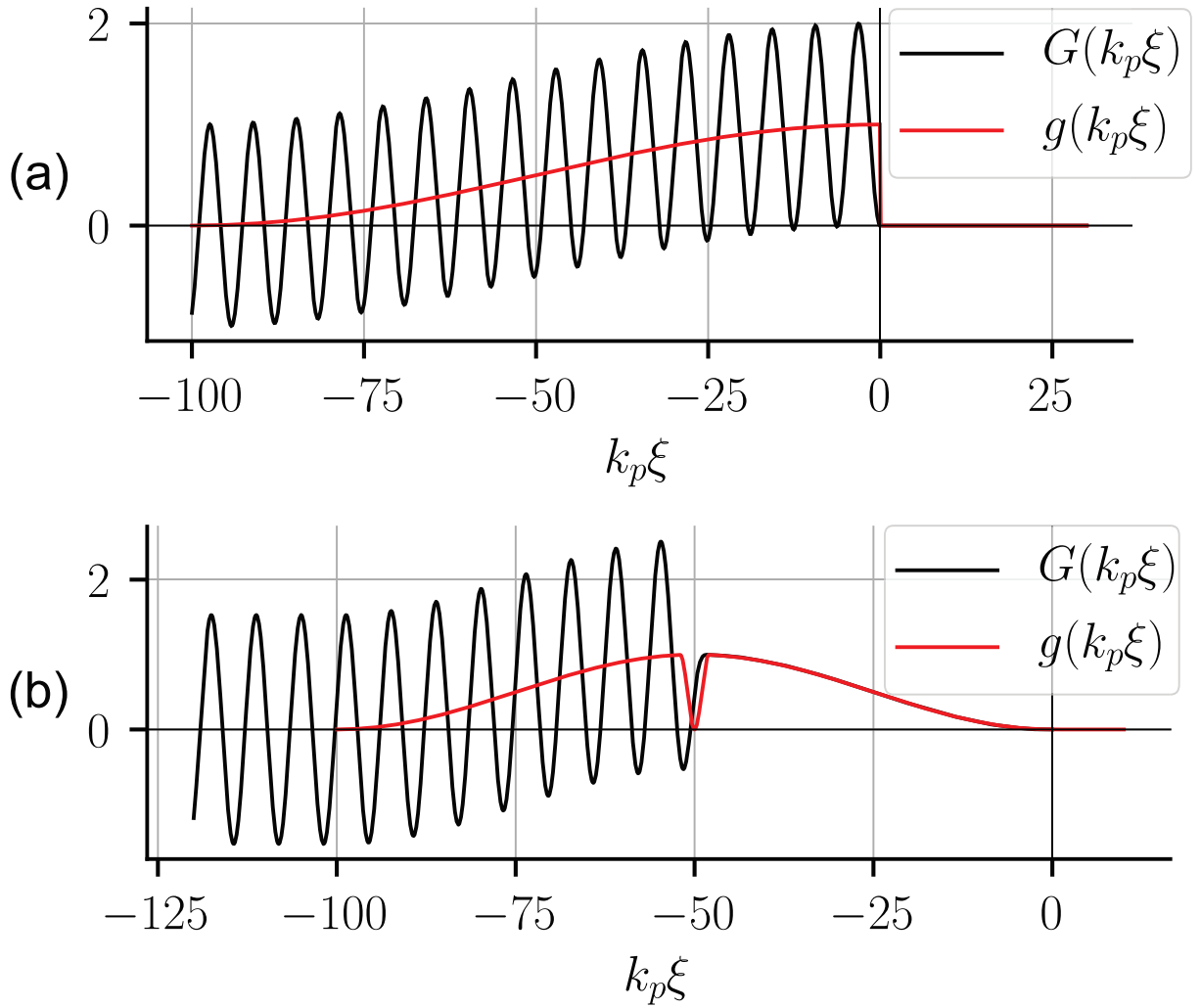


Рис. 2.1: Продольные функции  $g(\xi)$  (форма пучка) и  $G(\xi)$  (кильватерный потенциал) для пучков с (а) резким передним фронтом и (б) локальным мелкомасштабным фрагментом.

интегрирования по частям:

$$G(\xi) = g(\xi) + \sin(k_p \xi) \int_{\xi}^{\infty} \sin(k_p \xi') \frac{dg(\xi')}{d\xi'} d\xi' + \cos(k_p \xi) \int_{\xi}^{\infty} \cos(k_p \xi') \frac{dg(\xi')}{d\xi'} d\xi'. \quad (2.6)$$

Первое слагаемое повторяет продольную форму пучка и может быть медленно меняющимся. Второе и третье слагаемые осциллируют с плазменной частотой, и их амплитуда пропорциональна Фурье-образу производной  $dg/d\xi$  при этой плотности. Если пучок имеет резкий передний фронт [Рис. 2.1(а)], то амплитуда осциллирующей части всегда равна  $g(\xi)$  в месте скачка плотности. В общем случае мелкомасштабный фраг-

мент плотности может возбудить колебания с произвольной амплитудой [Рис. 2.1(b)].

Осциллирующая часть кильватерной волны возникает благодаря ленгмюровским волнам, которые потенциальны и не создают магнитных полей. Соответственно, выражение для магнитного поля  $B_\phi$  не содержит колебаний на плазменной частоте:

$$B_\phi(r, \xi) = -qE_{b0}k_p g(\xi) \int_0^R dr' r' \frac{df(r')}{dr'} \times \begin{cases} [\alpha I_1(k_p r_>) + K_1(k_p r_>)] I_1(k_p r_<), & r < R, \\ I_1(k_p r') (\alpha I_1(k_p R) + K_1(k_p R)) R/r, & r > R, \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$\alpha = \frac{K_0(k_p R)}{I_0(k_p R)}, \quad (2.8)$$

и

$$E_{b0} = \frac{mc\omega_p n_{b0}}{en_0} \quad (2.9)$$

— является удобной единицей измерения поля в нашей задаче. Формула (2.7) получается тем же методом, что и в случае неограниченной плазмы [5], но с двумя дополнительными граничными условиями на непрерывность  $B_\phi$  и  $\partial B_\phi/\partial r$  при  $r = R$ . Выражение (2.7) верно для ультрарелятивистских пучков и, следовательно, отличается от приведенного в статье [28], где рассмотрен случай умеренно релятивистского пучка.

В отличие от кильватерного потенциала магнитное поле (2.7) не зануляется снаружи плазмы. Тогда из (1.3) следует, что для произвольной формы и размера пучка радиальное электрическое поле во всей внешней области равняется по величине магнитному полю (Рис. 2.2). Таким образом, поля в плазме могут считаться состоящими из двух частей. Первая часть — это плазменная волна, возбуждаемая неоднородностями в продольном профиле плотности пучка. Ее частота равняется плазменной, а поля чисто электрические и не выходят за границу плазмы. Другая часть является частично нейтрализованными электрическим и магнитным собственными полями пучка, которые могут по-разному вести себя в плазме, но снаружи нее равны друг другу. Обе части

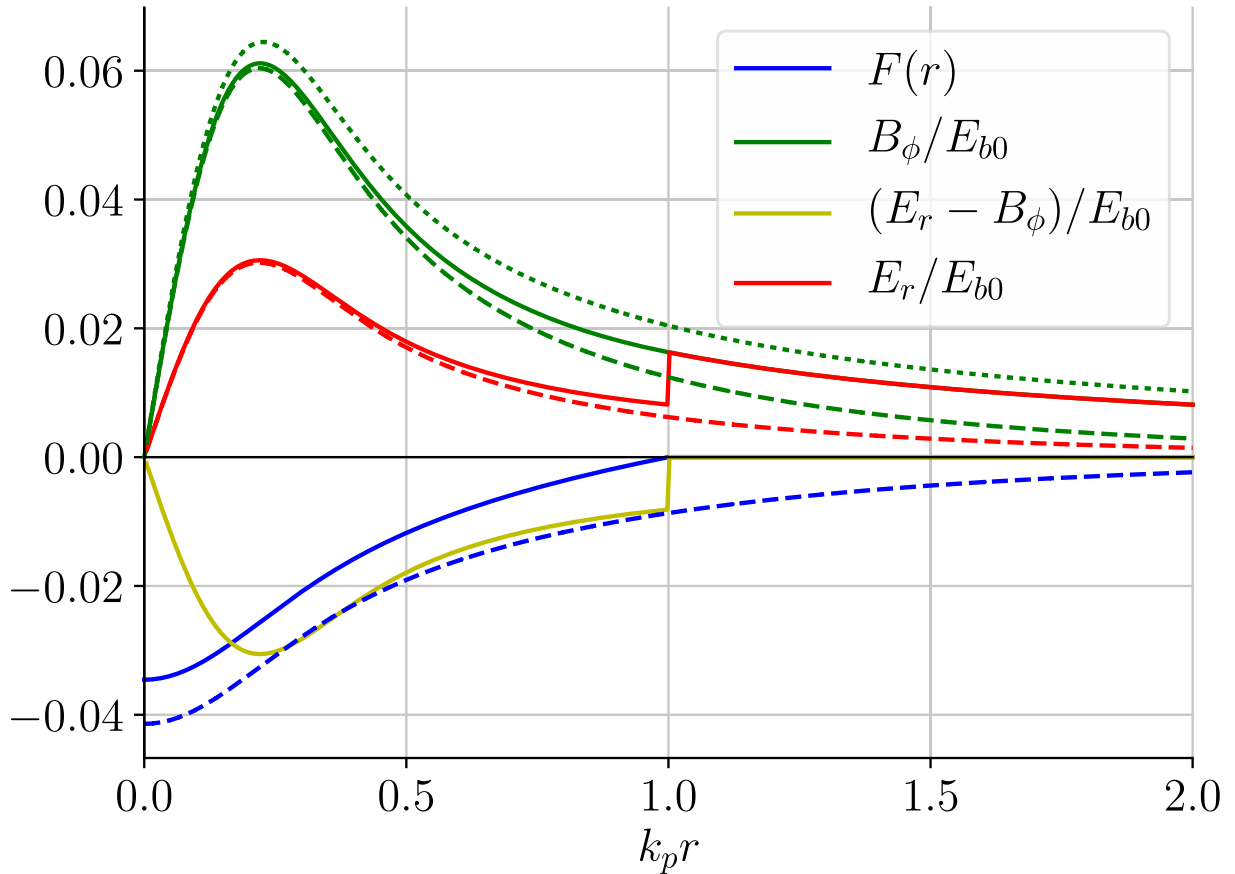


Рис. 2.2: Радиальные зависимости компоненты кильватерного потенциала  $F(r)$ , поперечной силы  $E_r - B_\phi$ , и полей  $E_r$  и  $B_\phi$  для  $k_p R = 1$ ,  $G(\xi) = 0.5$ ,  $g(\xi) = 1$ . Линии с длинным пунктиром показывают соответствующие зависимости для неограниченной плазмы. Линия с коротким пунктиром показывает магнитное поле пучка в вакууме.

имеют одинаковую зависимость кильватерного потенциала от радиуса. Поверхностная волна [28, 45] в нашем случае не возбуждается, так как ее фазовая скорость меньше скорости пучка (света).

Равенство  $E_r$  и  $B_\phi$  снаружи плазмы достигается благодаря сохранению потока электронов в сопутствующем окне (Рис. 2.3), которое заведомо имеет место в контексте квазистатического приближения. Число электронов, проходящих через черные кольца на Рис. 2.3 в единицу времени, постоянно и равняется

$$\int_0^{r_e} n_e (c - v_z) 2\pi r dr = \int_0^R n_0 c 2\pi r dr, \quad (2.10)$$

где  $v_z(r, \xi)$  и  $n_e(r, \xi)$  — продольная скорость и плотность плазменных электронов,  $n_0$  — невозмущенная плотность электронов, равная плот-

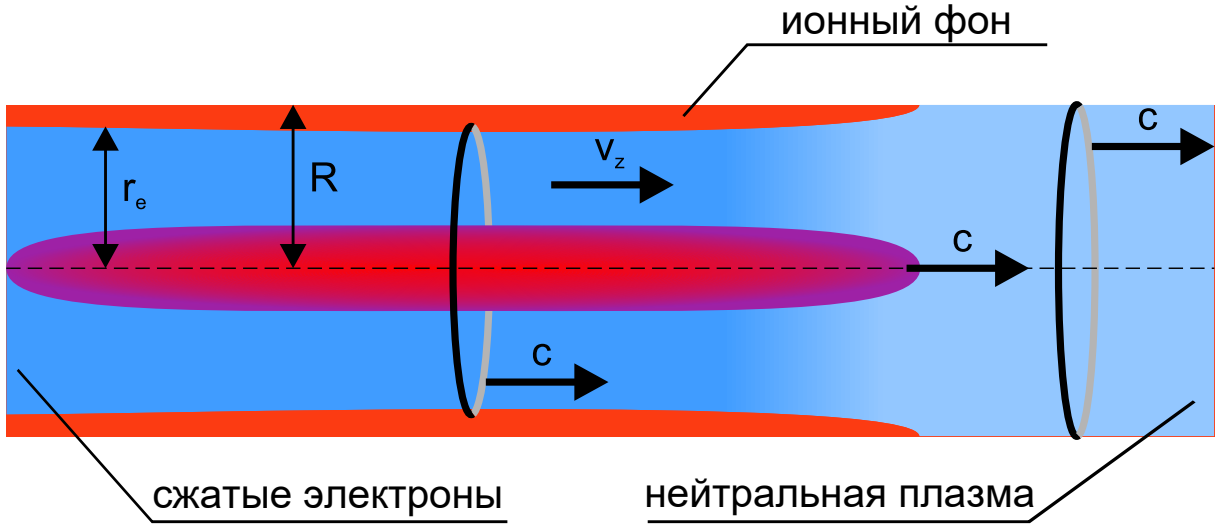


Рис. 2.3: Иллюстрация к возникновению равенства полей снаружи плазмы.

ности ионов  $n_i$ , и  $r_e$  — радиус самого удаленного от оси электрона. Так как плотность тока пучка  $j_{bz} = en_b c$ , из уравнений Максвелла и Пуассона имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} r(E_r - B_\phi) = 4\pi e r \left( n_i - n_e + n_e \frac{v_z}{c} \right), \quad (2.11)$$

что после интегрирования и использования (2.10) дает  $E_r(r) = B_\phi(r)$  при  $r > r_e$  и  $r > R$ . Это также работает в случае нелинейной реакции плазмы и доказывает равенство  $E_r$  и  $B_\phi$  за пределами области, ограниченной траекторией самого отдаленного от оси электрона.

Величина кильватерных полей изменяется с уменьшением плотности плазмы по-разному в ограниченной и неограниченной плазме. Амплитуда продольной функции (2.6) для нашего пучка не зависит от плотности плазмы, за разницу отвечает продольная функция  $F(r)$ . В неограниченной плазме предел низкой плотности соответствует  $k_p \sigma_r \ll 1$ , в этом случае [46]

$$F(0) \approx k_p^2 \sigma_r^2 [0.05797 - \ln(k_p \sigma_r)], \quad (2.12)$$

и абсолютное значение потенциала на оси растет с уменьшением плотности плазмы (Рис. 2.4) согласно

$$\Phi(0) \propto 0.05797 - \ln(k_p \sigma_r). \quad (2.13)$$

В результате, чем ниже плотность плазмы, тем больше должен быть эмиттанс пучка, чтобы он оставался в равновесии с кильватерной волной в неограниченной плазме [47]. Именно по этой причине частицы, инжектируемые в волну с некоторого расстояния от оси [41, 48], набирают в плазме низкой плотности больший поперечный импульс, чем в плотной. Ускоряющее электрическое поле  $E_z$ , в свою очередь, при низкой плотности ниже, так как падение производной  $\partial/\partial z \approx k_p \propto \sqrt{n_0}$  в (1.1) превалирует над медленным логарифмическим ростом (2.13).

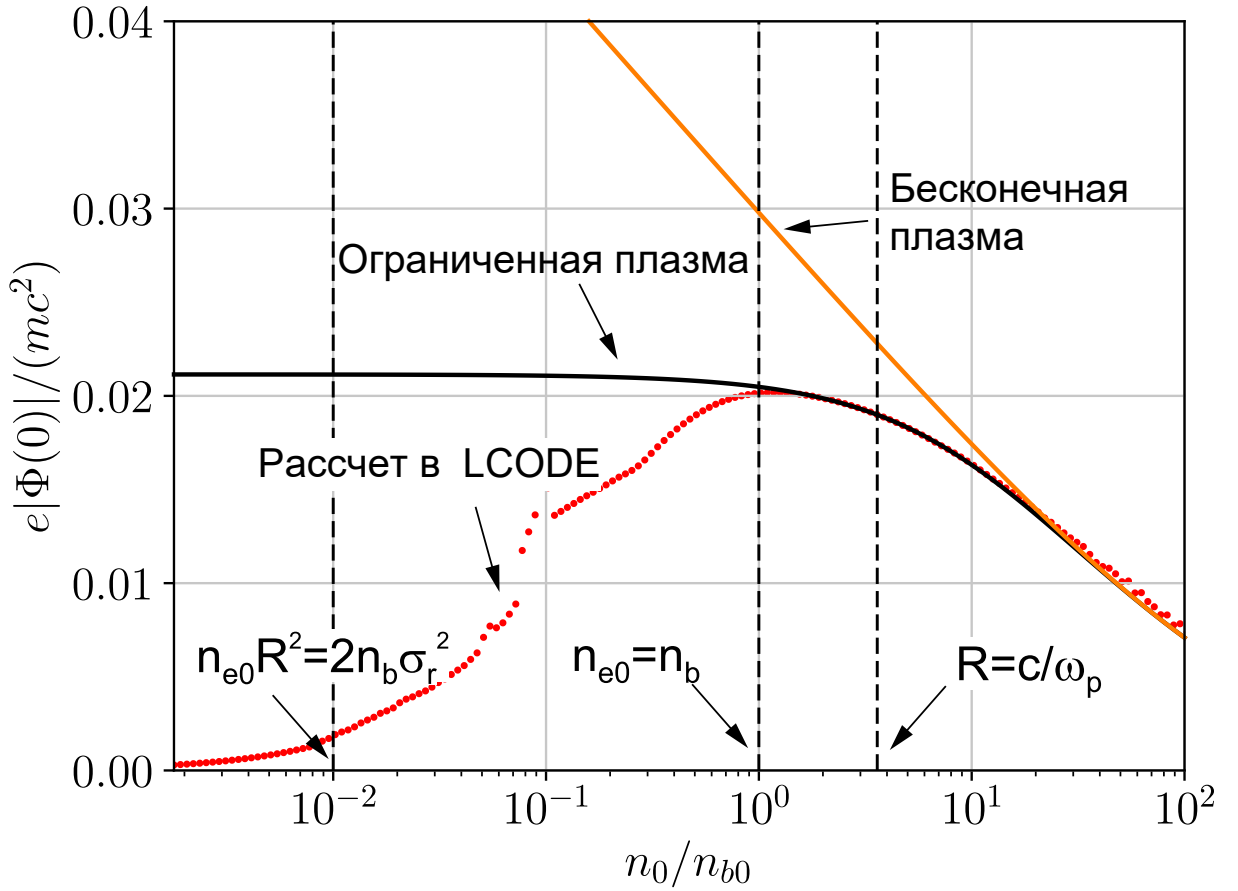


Рис. 2.4: Зависимость абсолютного значения кильватерного потенциала на оси от плотности плазмы, рассчитанная в линейном приближении для ограниченной и неограниченной плазмы (сплошные линии) и с помощью численного моделирования LCODE (точки) для ограниченной плазмы. Вертикальные пунктирные линии показывают границы режимов взаимодействия из Табл. 1.2.

В ограниченной плазме первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (2.4) доминирует при  $k_p R \ll 1$ , и радиальная функция кильватерного потенциала масштабируется в пределе низкой плотности

ПЛАЗМЫ КАК

$$F(0) \approx -\frac{k_p^2 \sigma_r^2}{2} \left( \ln \frac{R^2}{2\sigma_r^2} + \Gamma(0, R^2/(2\sigma_r^2)) + \gamma \right), \quad (2.14)$$

где

$$\Gamma(0, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt, \quad \gamma \approx 0.577215, \quad (2.15)$$

то есть глубина потенциальной ямы на оси стремится в постоянному значению (Рис. 2.4). При еще более низких плотностях, для которых уже не применима линейная аналитическая теория, потенциальная яма постепенно исчезает (Рис. 2.4). Видно, что линейная теория для ограниченной плазмы дает корректное значение глубины потенциальной ямы на оси вплоть до проявления нелинейности при  $n_0 \sim n_{b0}$ .

### 3. Нелинейный режим

Обычно считается, что линейная аналитическая теория реакции плазмы на ультрарелятивистские пучки полностью применима, если плотность плазмы много больше плотности пучка:

$$n_0 \gg n_b. \quad (3.1)$$

Учет всех слагаемых, которыми пренебрегают в линейной теории [5, 13], формально дает более жесткое ограничение:

$$n_0 \gg n_b k_p^2 L^2, \quad (3.2)$$

но, по факту, слабо влияет на применимость аналитики, так как вклад нелинейных слагаемых лишь незначительно меняет реакцию плазмы. Однако, если пучок имеет несколько временных масштабов (как в нашем случае), условия применимости линейной теории оказываются гораздо жестче:

$$n_0 \gg n_b k_p L, \quad (3.3)$$

где  $L$  — наибольший пространственный масштаб. Ограничение обусловлено локальным изменением плазменной частоты из-за нейтрализации плазмой заряда тока пучка, который создает возмущения плотности электронов и их продольной скорости

$$\delta n = q n_{b0} f(r) G(\xi), \quad v_z = qc \frac{n_{b0}}{n_0} F(r) G(\xi). \quad (3.4)$$

Эти величины, усредненные по периоду плазменной волны, определяют сдвиг частоты плазменных колебаний. Для пучков с гладким продольным профилем  $|dg(\xi)/d\xi| \ll k_p$  усреднение принимает простой

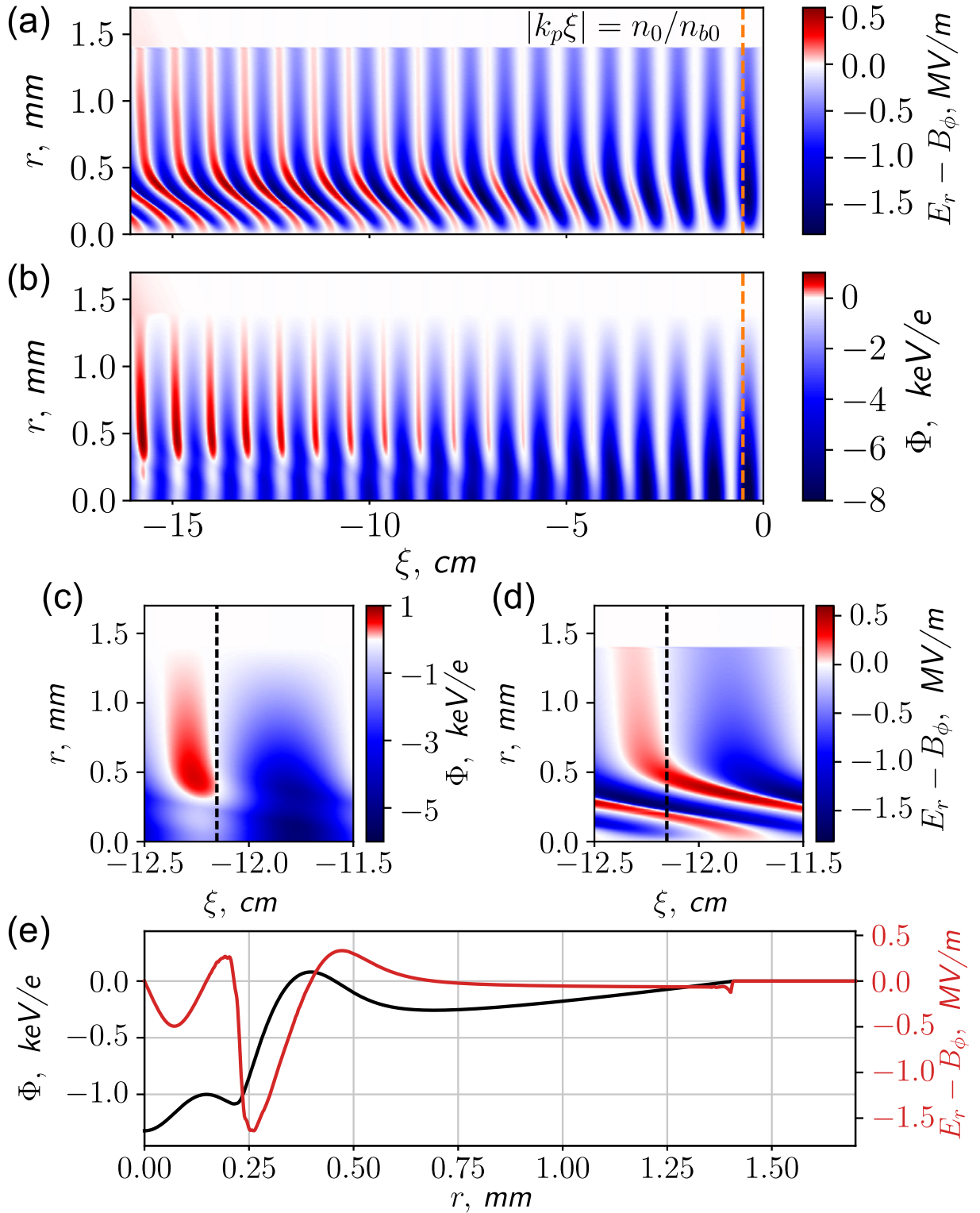


Рис. 3.1: Карты поперечной силы  $E_r - B_\phi$  и кильватерного потенциала  $\Phi$  в широкой (a), (b) и увеличенной (c), (d) областях и их радиальные профили (e) в  $\xi = -12.15$  см (черная пунктирная линия) для плотности плазмы  $n_0 \approx 3.6n_{b0}$  (при которой  $k_p R = 1$ ).



вид:

$$\langle G(\xi) \rangle = g(\xi). \quad (3.5)$$

В этом случае среднее возмущение плотности повторяет продольную форму пучка, а среднее возмущение скорости плазменных электронов (3.4) — форму кильватерного потенциала.

Если отношение  $n_b/n_0$  мало, плазменная частота меняется на  $\delta\omega_p \sim q\omega_p n_b/(2n_0)$  в районе максимума плотности пучка. Плазменные электроны движутся со средней скоростью  $v_z \sim cn_b/n_0$  (в случае локальной нейтрализации, когда  $k_p\sigma_r \gg 1$ ) или меньшей (если ток течет в более широкой области, когда  $k_p\sigma_r \lesssim 1$ ). Движение электронов вызывает доплеровский сдвиг частоты колебаний не больше, чем на  $q\omega_p n_b/n_0$ . Два эффекта складываются и в результате вызывают искажение фронтов волны, которое накапливается по мере удаления от головы пучка [Рис. 3.1(а)]. Искривление зависит от знака заряда пучка. Ограничение (3.3) определяется требованием малости накопленного сдвига фазы волны, что аналогично ограничению по расстоянию  $|\xi|$  от фрагмента пучка, возбуждающего колебания плазмы:

$$|\xi| \ll k_p^{-1} n_0/n_{b0}. \quad (3.6)$$

На этом расстоянии (оранжевая линия на Рис. 3.1) линейная теория дает правильные значения полей, скоростей и плотности электронов.

Неожиданным образом искажение волновых фронтов не отражается на картине кильватерного потенциала [Рис. 3.1(б)]. Потенциал  $\Phi$  и его продольная производная  $E_z$  осциллируют точно с плазменной частотой, в то время как продольная сила  $E_r - B_\phi$  и плотность электронов плазмы  $n_e$  искажены, и период их колебаний меняется вдоль радиуса в большую либо меньшую сторону в зависимости от знака заряда пучка. Этот необычный эффект объясняется низкоамплитудной мелкомасштабной рябью потенциала [Рис. 3.1(с)] и нарушением предположения о факторизации всех величин по продольной и поперечной координатам (2.2). В результате такая рябь приводит к появлению мелких потенциальных ям на различном расстоянии от оси, что негативно сказывается на качестве пучка ускоряемых электронов. В процессе захвата частицы взаимодей-

ствуют с ямами и набирают большой угловой разброс.

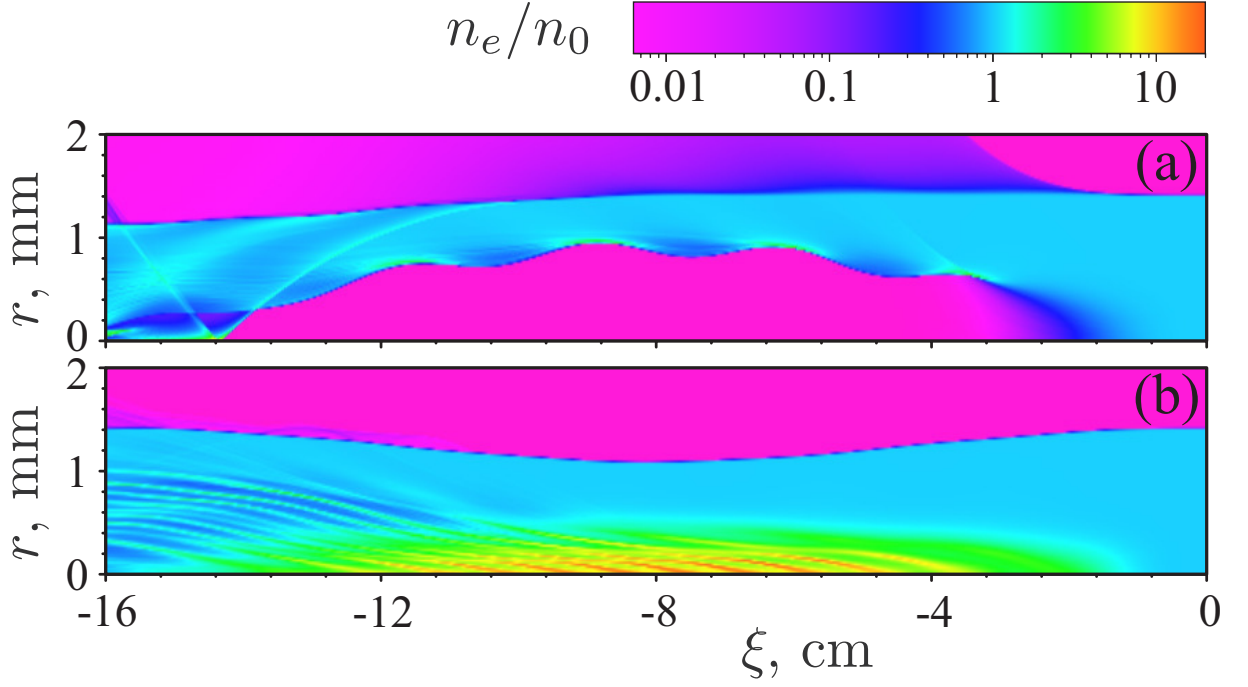


Рис. 3.2: Карты плотности электронов плазмы  $n_e$  для гладких электронного (a) и протонного (b) пучков с профилем плотности (3.7). Невозмущенная плотность плазмы  $n_0 = 0.1n_{b0}$ .

При плотностях  $n_0 \lesssim n_{b0}$  реакция плазмы сильно нелинейна. В данном режиме исследовалось взаимодействие с плазмой гладких пучков обоих знаков заряда с распределением плотности

$$n_b(r, \xi) = \begin{cases} n_{b0} e^{-r^2/2\sigma_r^2} (1 - \cos(2\pi\xi/L))/2, & -L < \xi < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Для электронных пучков главное отличие от случая неограниченной плазмы заключается в том, что электроны среды выталкиваются из внешних слоев плазмы, пока ток пучка возрастает, и покидают ее, унося с собой отрицательный заряд [Рис. 3.2(a)]. Когда затем ток пучка падает, эти электроны не могут мгновенно вернуться обратно, поэтому плазма положительно заряжается и начинает создавать электрическое поле. Столб плазменных электронов сжимается по радиусу, чтобы сохранить внутри квазинейтральность, поэтому полный положительный заряд столба определяется некомпенсированными ионами на его границе. Небольшие колебания поперечного электрического поля на плазменной

частоте, которые всегда присутствуют в такой системе, заставляют некоторую часть электронов набирать значительный импульс в направлении оси и формировать многопоточное течение внутри плазмы. Формирование ионного канала (или каверны) вблизи оси не отличается от случая неограниченной плазмы. [14] При протонном драйвере электроны не покидают плазму [Рис. 3.2(b)], и излишний положительный заряд пучка собирается в “ионную трубу” во внешних слоях плазменного столба.

Если пучок эффективно генерирует как низкочастотные возмущения, так и возмущения на плазменной частоте, число покидающих плазму электронов становится еще больше. Для электронного пучка нелинейные колебания электронной плотности плазмы возле оси вызывают колебания границы [Рис. 3.3(a)]. Внутри каждого периода колебаний группы электронов отделяются от границы и либо покидают плазменный столб, либо двигаются к оси, формируя многопоточное течение. Вылетающие электроны появляются также в результате опрокидывания кильватерной волны в приосевой области. Для протонного пучка вылетающие электроны появляются только в следствие опрокидывания волны [Рис. 3.3(b)].

Электроны, покидающие плазменный столб, выносят ненулевой кильватерный потенциал в область, ограниченную их траекториями, и, следовательно, создают в этой области силу, дефокусирующую протонные пучки и фокусирующую электронные [Рис. 3.3(c)]. Эффект отсутствия поперечных сил, действующих на ультрарелятивистские пучки, снаружи узкого плазменного столба исчезает при низкой плотности плазмы.

Появление вылетающих электронов напрямую связано с искажением волновых фронтов, описанным ранее. Как только разность фаз колебаний электронов на разных радиусах достигает некоторого критического значения, их траектории начинают пересекаться: внешний электрон становится внутренним и наоборот. Покидающие плазму электроны изначально имели меньший радиус. После пересечения траекторий такие электроны начинают испытывать выталкивающую поперечную силу, вызванную увеличением суммарного отрицательного заряда частиц с меньшим радиусом, вследствие чего вероятнее покидают плазму, чем продолжают колебаться вокруг положения равновесия на некотором

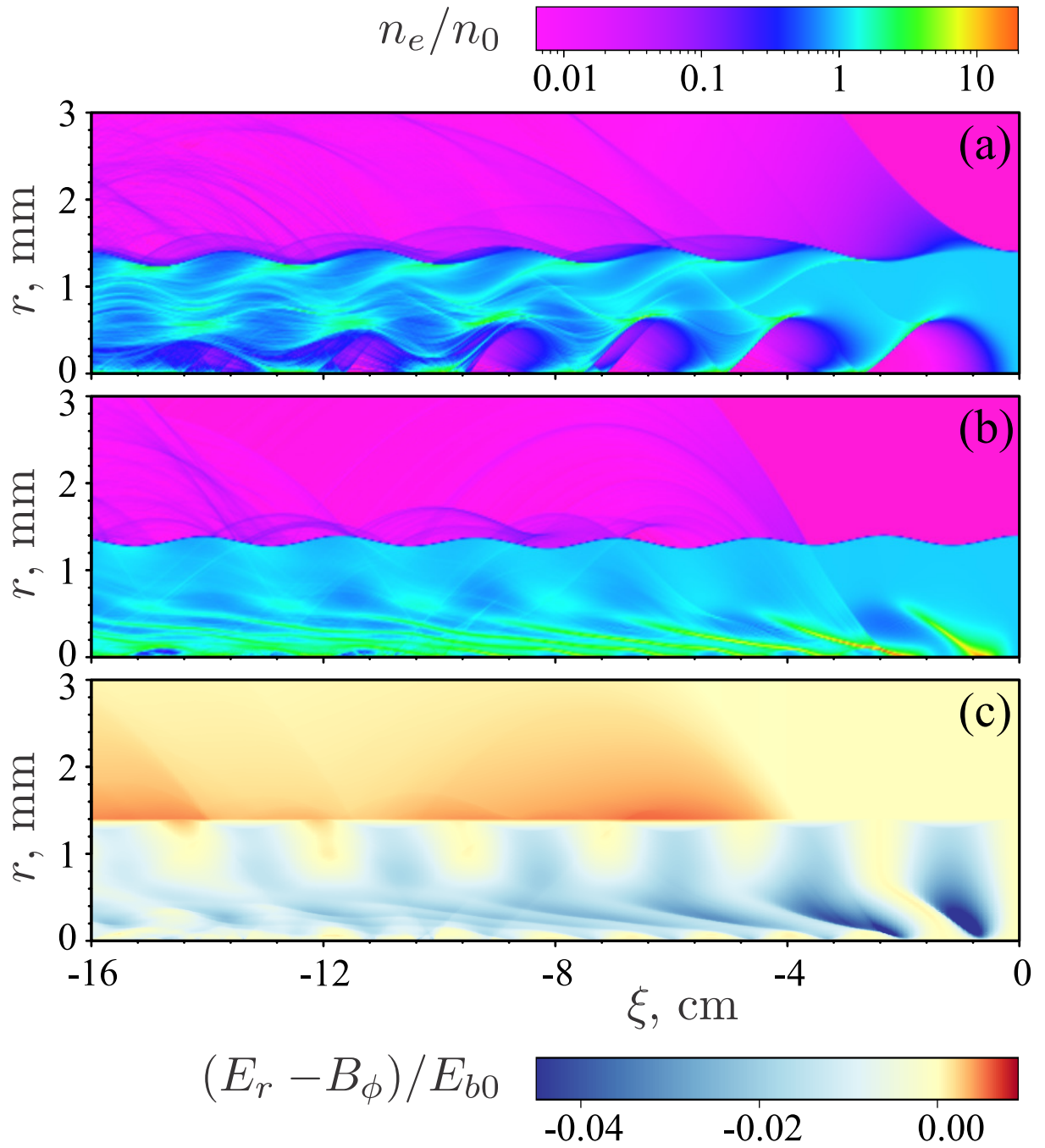


Рис. 3.3: Карты плотности электронов плазмы  $n_e$  для электронного (а) и протонного (б) пучков с профилем плотности (1.3). Карта радиальной силы  $E_r - B_\phi$  для случая протонного пучка (с). Невозмущенная плотность плазмы  $n_0 = 0.5n_{b0}$ .

расстоянии от оси. Чем меньше плотность плазмы, тем сильнее искажение волновых фронтов, и тем раньше настает опрокидывание волны (Рис. 3.4). Примечательно, что осциллирующая компонента поперечной силы практически исчезает в точке опрокидывания [Рис. 3.3(с)], остается только медленно меняющаяся компонента.

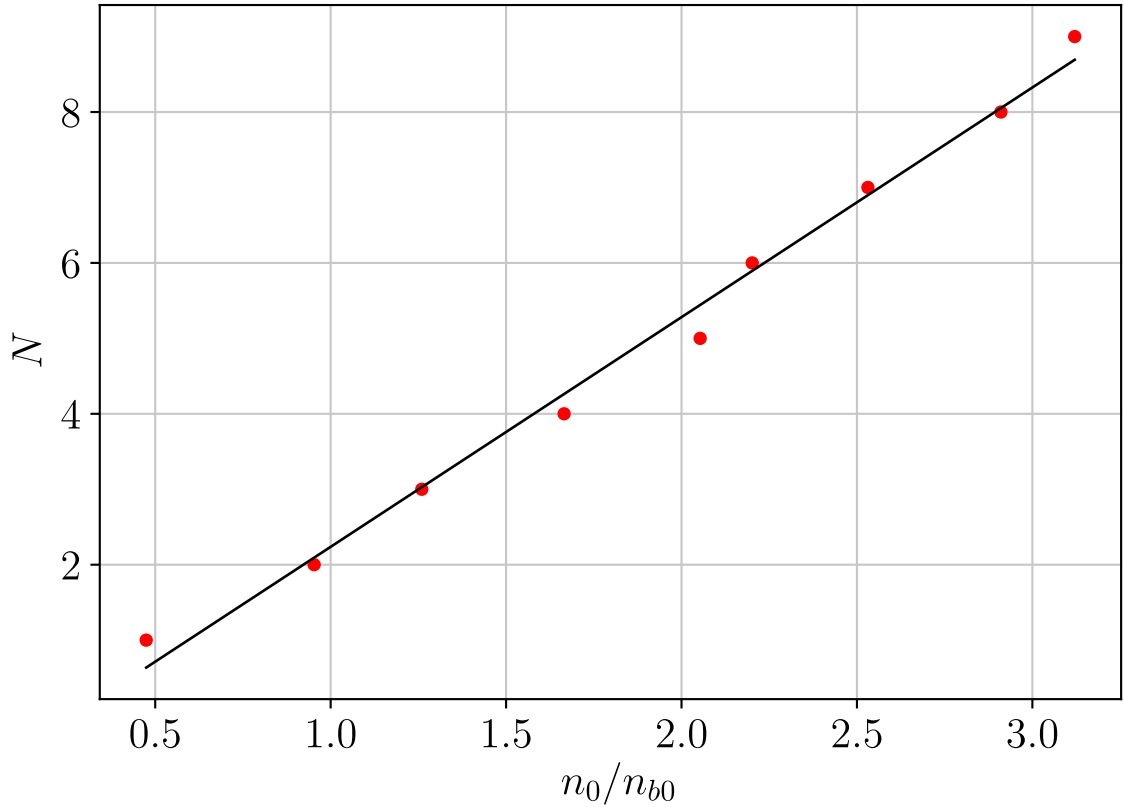


Рис. 3.4: Зависимость номера периода плазменных колебаний  $N$ , на котором впервые происходит опрокидывание волны, от плотности плазмы (точки). Сплошная линия помогает проследить линейную зависимость.

Для плотностей плазмы, удовлетворяющих условиям  $n_{b0} \gg n_0 \gg n_{b0}\sigma_r^2/R^2$ , на картах плотности видны два характерных масштаба колебаний (Рис. 3.5). Помимо колебаний на плазменной частоте, здесь также присутствуют радиальные колебания электронов, вылетевших за пределы плазмы. Временной масштаб последних зависит от линейного заряда плазменного столба и тока пучка. Два типа колебаний не переходят друг в друга непрерывно, поэтому если они оба присутствуют в системе и ярко выражены, реакция плазмы выглядит хаотичной.

При совсем низких плотностях плазмы поведение плазменных электронов полностью определяется собственными полями пучка (Рис. 3.6). В случае электронных пучков все плазменные электроны выбрасываются за пределы плазмы и возвращаются обратно значительно позже полного прохождения пучка. В случае протонных драйверов плазменные электроны осциллируют вокруг оси пучка. Режим взаимодействия переходит

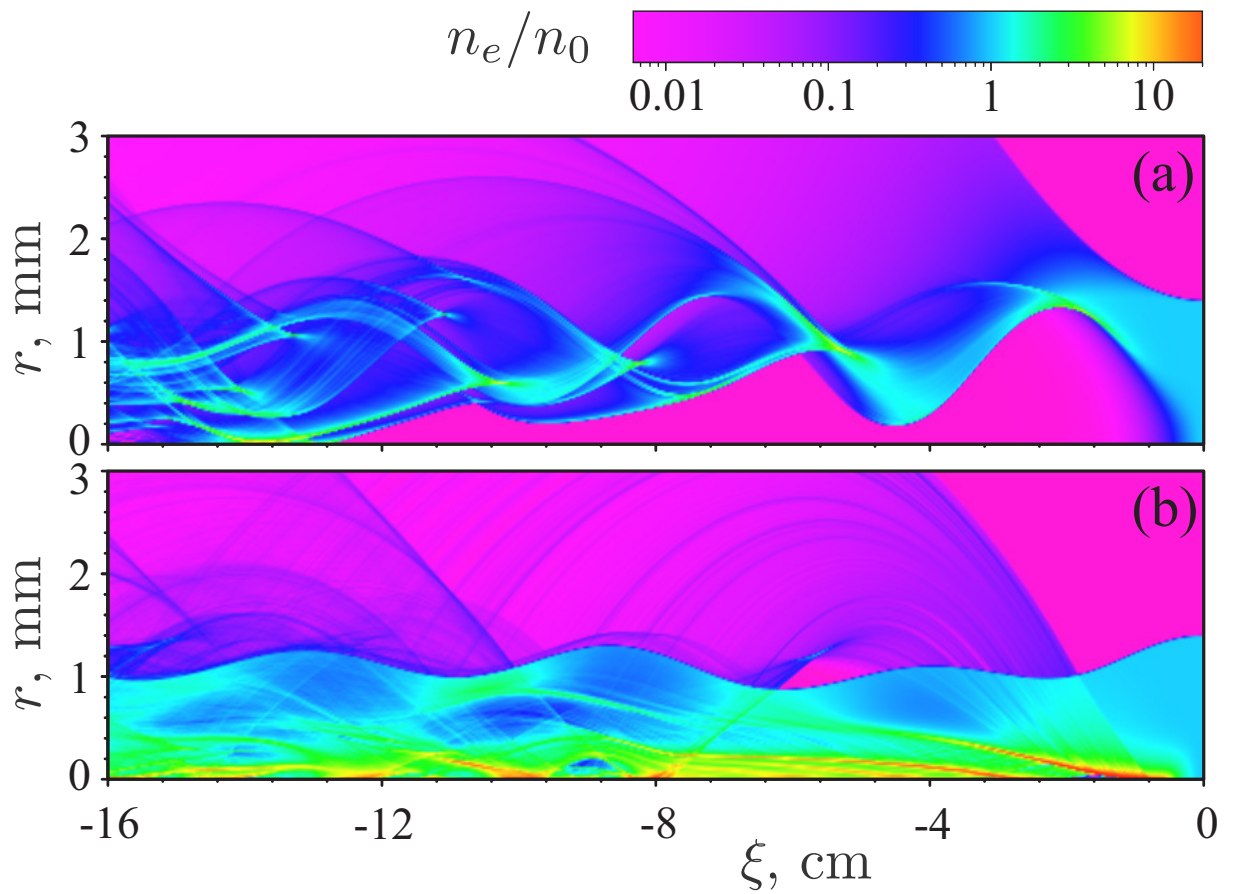


Рис. 3.5: Карты плотности электронов плазмы  $n_e$  для электронного (a) и протонного (b) пучков и невозмущенной плотности плазмы  $n_0 = 0.14n_{b0}$ .

к такой “моде низкой плотности” значительно раньше, чем линейный заряд плазменного столба сравнивается с линейной плотностью пучка, что иллюстрирует Рис. 3.6.

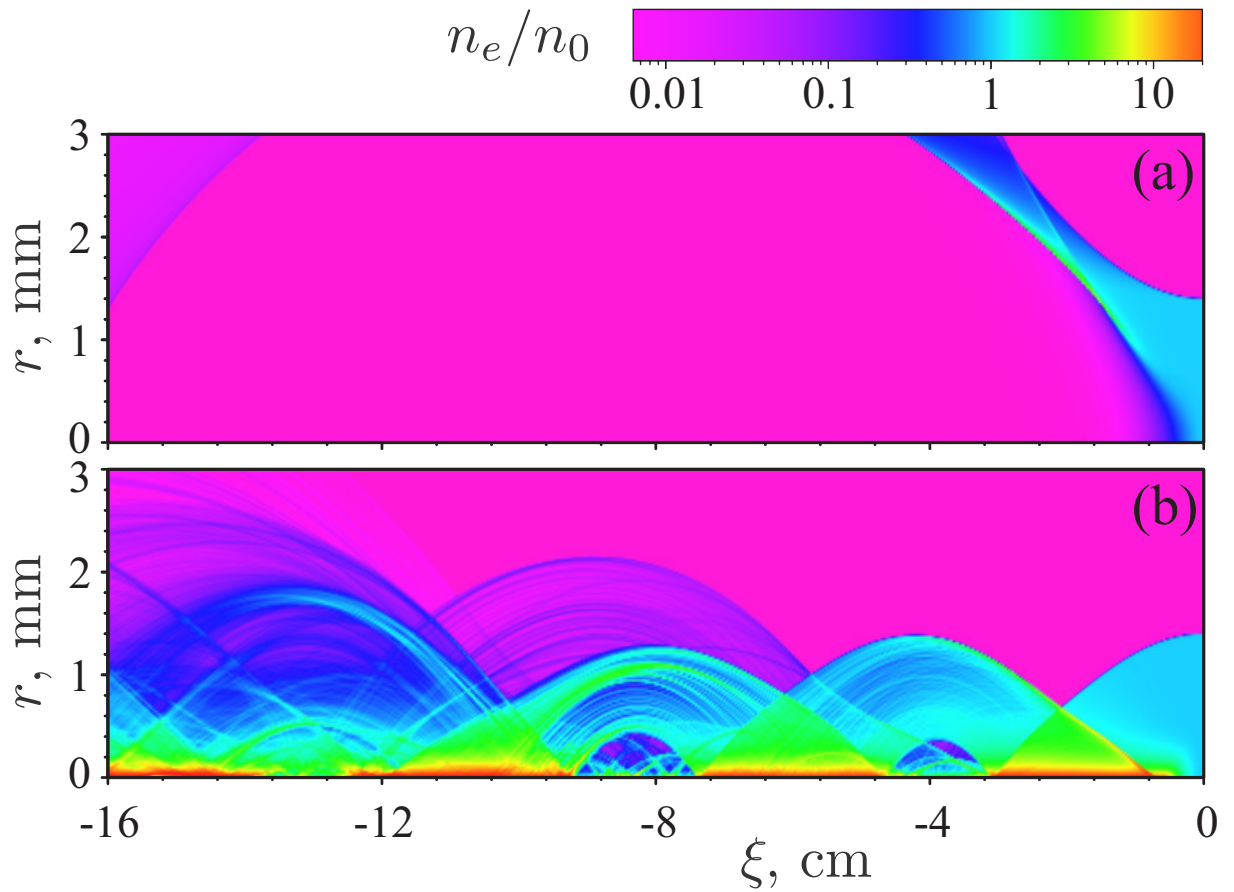


Рис. 3.6: Карты плотности электронов плазмы  $n_e$  для электронного (а) и протонного (b) пучков и невозмущенной плотности плазмы  $n_0 = 0.05n_{b0}$ .

## 4. Проблема инжекции электронов в кильватерную волну

Количественные характеристики реакции плазмы зависят от конкретных параметров пучка и плазмы. По этой причине в предыдущем разделе обсуждались главным образом качественные эффекты. В этом же разделе количественно исследуется влияние плавной переходной области плотности плазмы вблизи входного отверстия в плазменную секцию на движение ускоряемого электронного пучка в эксперименте AWAKE. Изучаемый продольный профиль плотности плазмы [41, 42]

$$n_0 = \frac{n_{e0}}{2} \left( 1 - \frac{\delta z / D}{\sqrt{(\delta z / D)^2 + 0.25}} \right), \quad (4.1)$$

где  $\delta z$  — расстояние до отверстия, разделяющего плазменную ячейку и объем расширителя в точке  $z = 0$ , и  $D = 1$  см — диаметр этого отверстия.

Оптимальные параметры инжекции [41] были получены в результате моделирования движения пучка электронов сквозь всю плазменную камеру, включая области переходной плотности. В данной Главе опишем менее точное, но более интуитивно понятное объяснение, почему оптимум выглядит так, а не иначе. Для этого сожмем полные карты поперечных сил, соответствующих каждому отдельному значению плотности плазмы, [Рис. 4.1(а)] до простых радиальных зависимостей  $F_{r,\text{int}}(r)$ , показывающих суммарный эффект воздействия поперечной силы [Рис. 4.1(б)]. “Интегральная” радиальная сила  $F_{r,\text{int}}(r)$  является полусуммой максимальной и минимальной силы при данном радиусе. Если кильватерная волна осциллирует как функция  $\xi$ , что типично для  $r < R$ , тогда “интегральная” сила представляет собой среднюю



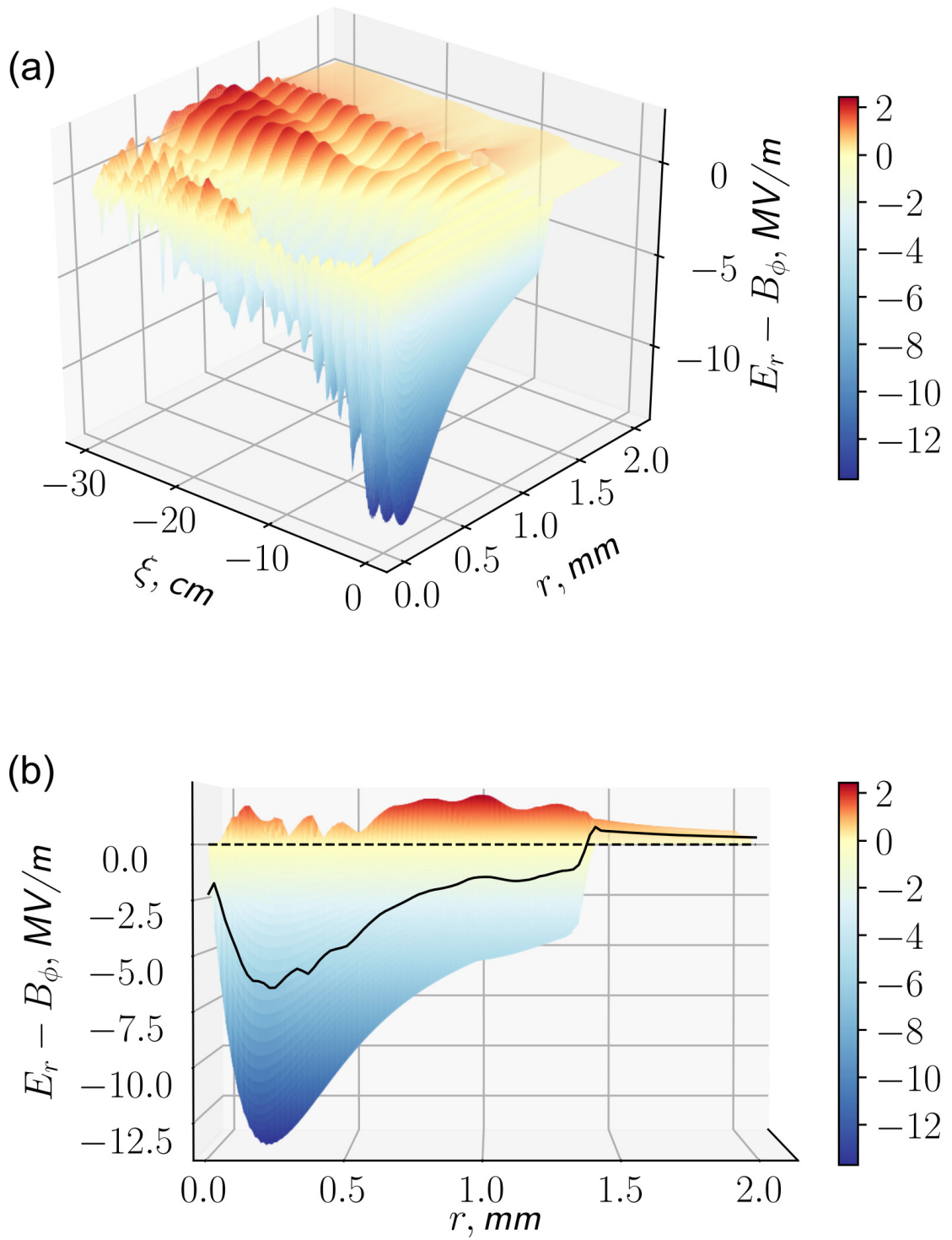


Рис. 4.1: Продольная сила  $E_r - B_\phi$  (a) и “интегральная” радиальная сила  $F_{r,\text{int}}(r)$  (b) для протонного пучка и плазмы с плотностью  $n_0 = n_{b0}$ .

медленно меняющуюся компоненту силы. Если же сила имеет определенный одинаковый во всех точках знак, как, например, в области  $r > R$ , тогда “интегральная” сила — это половина максимальной силы при данном радиусе.

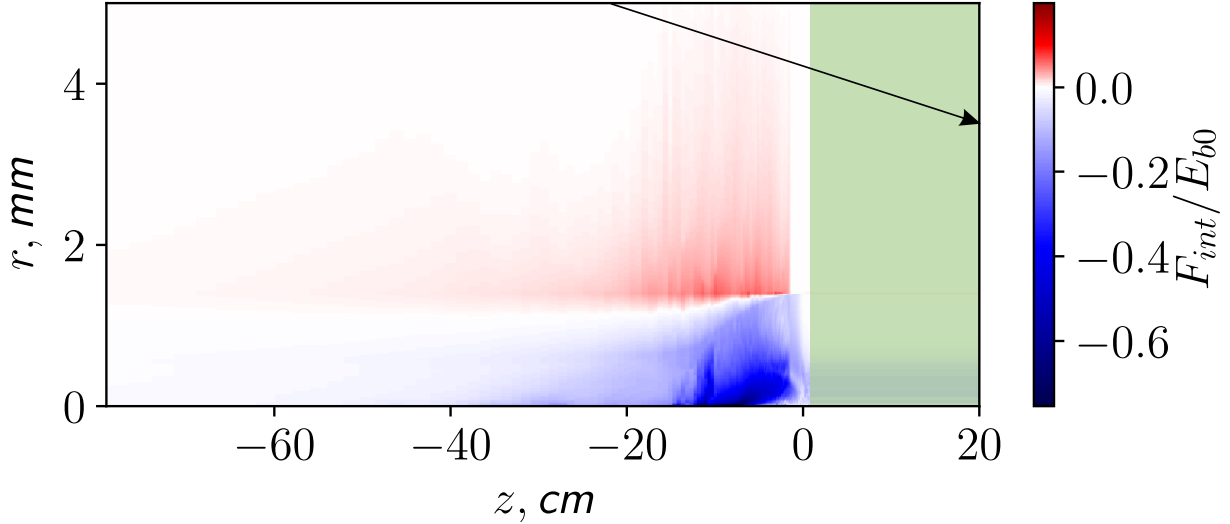


Рис. 4.2: “Интегральная” радиальная сила  $F_{r,int}(r)$  в области переходной плотности вблизи отверстия плазменной секции. Стрелкой показана оптимальная траектория ускоряемых электронов для лучшей эффективности инжекции (из [41]). Зеленая заливка показывает область с постоянной плотностью плазмы, в которую электроны могут быть захвачены кильватерной волной со стационарной фазой.

Карта “интегральной” радиальной силы (Рис. 4.2) показывает, что плазменный столб всегда дефокусирует электроны, движущиеся вдоль оси. Характерная величина дефокусирующего поля — несколько МВ/м, чего хватает, чтобы существенно отклонить электроны с энергией 16 МэВ (базовые параметры AWAKE) на 1.4 мм (радиус плазмы) всего за несколько сантиметров плазмы. Следовательно, инжектированные вдоль оси электроны не могут пересечь синие области на Рис. 4.2 и захватиться в стационарную кильватерную волну, создаваемую драйвером в зоне постоянной плотности внутри плазменной ячейки.

## 5. Заключение

Использование в данной работе комбинации линейной аналитической теории и численных расчетов позволило исследовать реакцию аксиально-симметричной ограниченной плазмы на ультрарелятивистские пучки заряженных частиц в широком диапазоне плотностей плазмы.

Обнаружено, что кильватерный потенциал отсутствует снаружи плазменного столба. Это утверждение верно для любой плотности плазмы, так как является прямым следствием осевой симметрии и закона сохранения заряда. В случае сильно нелинейной реакции плазмы некоторые электроны могут покидать плазму и выносить с собой ненулевой потенциал, тогда потенциал отсутствует за пределами траектории самого внешнего электрона.

Кильватерный потенциал принимает наибольшее абсолютное значение при плотностях плазмы, близких к пиковой плотности пучка ( $n_0 \sim n_b$ ). При более высоких плотностях плазмы кильватерные поля в ограниченной плазме описываются аналитически. Они слабее, чем в бесконечной плазме той же плотности, если толщина скин-слоя больше или порядка радиуса плазменного столба. При меньших плотностях плазмы аналитические выражения дают завышенное значение амплитуды кильватерной волны, которая с понижением плотности падает до нуля.

В случае длинных пучков низкой плотности ( $n_b \ll n_0$ ) нелинейность плазмы проявляет себя в виде искажения волнового фронта, вызванного эффектами нейтрализации заряда и тока пучка в плазме. Это накладывает строгие ограничения (3.3) или (3.6) на применимость линейной теории. Однако картины кильватерного потенциала и продольного электрического поля при этом не искажаются и сохраняют период колебаний,

как в невозмущенной плазме.

Даже при низких плотностях ( $n_0 \lesssim n_b$ ) плазма сохраняет квазинейтральность в большей части своего объема. В случае электронных пучков это достигается выбрасыванием определенного числа плазменных электронов за границу плазменного столба. Положительно заряженные пучки стягивают все электроны из внешних слоев и оставляют внешний слой ионов в виде “трубы” некомпенсированным. Плазменные колебания, возбуждаемые пучком, создают струи плазменных электронов, которые формируют внутри и снаружи плазмы многопоточное течение. Струи берут начало либо на поверхности плазмы, либо в точках опрокидывания волны вблизи оси, которые привязаны к определенным фазам колебаний. Характерные временные масштабы динамики струй отличаются от периода плазменных колебаний, поэтому многопоточное течение в присутствии струй плазменных электронов выглядят хаотично. Реакция плазмы при очень низких плотностях плазмы ожидаемо полностью определяется собственными полями пучка.

Поля, создаваемые пучком в плазме, в среднем являются фокусирующими для самого пучка и дефокусирующими для частиц противоположного знака заряда. Если некоторая часть электронов покидает плазменный столб, то поля, выносимые ими за границу столба, всегда являются фокусирующими для электронных пучков. Это делает ясным выбор кривой инжекции в базовом сценарии эксперимента AWAKE. [41]

## 6. Благодарности

Автор выражает благодарность за помощь в написании данной работы своему научному руководителю Лотову Константину Владимировичу. Автор также признателен Петренко Алексею Васильевичу за введение в основы физики ускорителей и совет как рассчитать траектории электронов в плазме. Отдельное спасибо Соседкину Александру Павловичу за техническую поддержку, эффективную организацию работы в нашем коллективе, помощь в освоении языка Python и прививание правильной культуры программирования.

# Литература

- [1] J.L.Cox, W.H.Bennett, Phys. Fluids **13**, 182 (1970).
- [2] D.A.Hammer, N.Rostoker, Phys. Fluids **13**, 1831 (1970).
- [3] A.A. Rukhadze, V.G. Rukhlin, Sov. Phys. JETP **34**, 93 (1972).
- [4] S.E.Rosinskii, A.A.Rukhadze, Sov. Phys. Tech. Phys. **16**, 1989 (1972).
- [5] G. Küppers, A. Salat, H. K. Wimmel, Plasma Physics **15**, 429-439 (1973).
- [6] P.Chen, J.M.Dawson, R.W.Huff, and T.Katsouleas, Phys. Rev. Lett. **54**, 693 (1985); Phys. Rev. Lett. **55**, 1537 (1985).
- [7] J.Dawson, Sci. Am. **260**(3), 54 (1989).
- [8] J.S.Wurtele, Phys. Fluids B **5** 2363 (1993).
- [9] E.Esarey, P.Sprangle, J.Krall, and A.Ting, IEEE Trans. Plasma Sci. **24**, 252 (1996).
- [10] P.Chen, Part. Accel. **20**, 171 (1987).
- [11] T.Katsouleas, S.Wilks, P.Chen, J.M.Dawson, and J.J.Su, Part.Accel. **22**, 81 (1987).
- [12] R.Keinigs and M.E.Jones, Phys. Fluids **30**, 252 (1987).
- [13] K.V.Lotov, Phys. Plasmas **3**, 2753 (1996).
- [14] K.V.Lotov, Phys. Rev. E **69**, 046405 (2004).

- [15] J.B.Rosenzweig, N.Barov, M.C.Thompson, and R.B.Yoder, Phys. Rev. ST Accel. Beams **7**, 061302 (2004).
- [16] W.Lu, C.Huang, M.Zhou, W.B.Mori, and T.Katsouleas, Phys. Rev. Lett. **96**, 165002 (2006).
- [17] W.Lu, C.Huang, M.Zhou, M.Tzoufras, F.S.Tsung, W.B.Mori, T.Katsouleas, Phys. Plasmas **13**, 056709 (2006).
- [18] A.M.Kudryavtsev, K.V.Lotov, A.N.Skrinsky, Plasma wake-field acceleration of high energies: Physics and perspectives. Nuclear Instr. Meth. A **410**, 388 (1998).
- [19] J.Rosenzweig, N.Barov, A.Murokh, E.Colby, P Colestock, Nuclear Instr. Meth. A **410**, 532 (1998).
- [20] S.Lee, T.Katsouleas, P.Muggli, W.B.Mori, C.Joshi, R.Hemker, E.S.Dodd, C.E.Clayton, K.A.Marsh, B.Blue, et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 011001 (2002).
- [21] T.Katsouleas, Phys. Plasmas **13**, 055503 (2006).
- [22] V.D.Shiltsev, Physics – Uspekhi **55**, 965 (2012).
- [23] R.Assmann, R.Bingham, T.Bohl, C.Bracco, B.Buttenschon, A.Butterworth, A.Caldwell, S.Chattopadhyay, S.Cipiccia, E.Feldbaumer, et al., Plasma Phys. Control. Fusion **56**, 084013 (2014).
- [24] J.P.Delahaye, E.Adli, S.J.Gessner, M.J.Hogan, T.O.Raubenheimer, W.An, C.Joshi, and W.Mori, “A beam driven plasma-wakefield linear collider from Higgs factory to multi-TeV,” in Proceedings of the IPAC2014 (Dresden, Germany), pp. 3791-3793.
- [25] A.Caldwell and M.Wing, Eur. Phys. J. C **76**, 463 (2016).
- [26] M.J.Hogan, Reviews of Accelerator Science and Technology **9**, 63 (2016).
- [27] E.Adli and P.Muggli, Reviews of Accelerator Science and Technology **9**, 85 (2016).

- [28] S.E. Rosinskii, E.V. Rostomyan, A.A. Rukhadze, and V.G. Rukhlin, Sov. Phys. JETP **39**, 661 (1975).
- [29] S.E. Rosinskii, E.V. Rostomyan, and V.G. Rukhlin, Fizika Plasmy **2**, 49 (1976) (in Russian).
- [30] A.G.Khachatryan, Phys. Rev. E **60**, 6210 (1999).
- [31] Y. Golian, M. Aslaninejad, and D. Dorranean, Phys. Plasmas **23**, 013109 (2016).
- [32] K.V.Lotov, A.P.Sosedkin, A.V.Petrenko, Phys. Rev. Lett. **112**, 194801 (2014).
- [33] Y. Fang, J. Vieira, L. D. Amorim, W. Mori, and P. Muggli, Phys. Plasmas **21**, 056703 (2014).
- [34] <https://anaconda.org/Gorn/easy-linear-field-theory>
- [35] E. Gschwendtner, E. Adli, L. Amorim, R. Apsimon, R. Assmann, A.-M. Bachmann, F. Batsch, J. Bauche, V.K. Berglyd Olsen, M. Bernardini, et al., Nuclear Instr. Methods A **829**, 76 (2016).
- [36] P.Muggli, E.Adli, R.Apsimon, F.Asmus, R.Baartman, A-M.Bachmann, M.Barros Marin, F.Batsch, J.Bauche, V.K.Berglyd Olsen, et al., Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 014046 (2018).
- [37] E.Oz, P.Muggli, Nucl. Instr. Meth. A **740**, 197 (2014).
- [38] N.Kumar, A.Pukhov, and K.Lotov, Phys. Rev. Lett. **104**, 255003 (2010).
- [39] K. V. Lotov, Phys. Plasmas **22**, 103110 (2015).
- [40] K.V.Lotov, A.P.Sosedkin, A.V.Petrenko, L.D.Amorim, J.Vieira, R.A.Fonseca, L.O.Silva, E.Gschwendtner, and P.Muggli, Phys. Plasmas **21**, 123116 (2014).
- [41] A. Caldwell, E. Adli, L. Amorim, R. Apsimon, T. Argyropoulos, R. Assmann, A.-M. Bachmann, F. Batsch, J. Bauche, V.K. Berglyd Olsen, et al., Nuclear Instr. Methods A **829**, 3 (2016).



- [42] G Plyushchev et al, J. Phys. D: Appl. Phys. **51** 025203 (2018)
- [43] K.V.Lotov, Phys. Rev. ST - Accel. Beams **6**, 061301 (2003).
- [44] A.P.Sosedkin, K.V.Lotov, Nuclear Instr. Methods A **829**, 350 (2016).
- [45] L.M. Gorbunov, P. Mora, R.R. Ramazashvili, Phys. Plasmas **10**, 4563 (2003).
- [46] W. Lu, C. Huang, M. M. Zhou, W. B. Mori, and T. Katsouleas, Phys. Plasmas **12**, 063101 (2005).
- [47] K.V. Lotov, Phys. Plasmas **24**, 023119 (2017).
- [48] K.V.Lotov, J. Plasma Phys. **78**, 455 (2012).

# Аннотация

Использование в данной работе комбинации линейной аналитической теории и численных расчетов позволило исследовать реакцию аксиально-симметричной ограниченной плазмы на ультрарелятивистские пучки заряженных частиц в широком диапазоне плотностей плазмы.

В работе получены аналитические выражения для магнитных и электрических полей в плазме высокой плотности, доказано отсутствие кильватерного потенциала за пределами траектории самого внешнего плазменного электрона и прослежена реакция плазмы при понижении плотности плазмы. При высоких плотностях плазмы волновые фронты радиальной компоненты электрического поля искажаются из-за эффектов нейтрализации тока и заряда пучка, в то время как волновые фронты кильватерного потенциала и продольного электрического поля — нет. При плотностях плазмы ниже или порядка плотности пучка снаружи и внутри плазмы развивается многопоточное течение, в результате чего снаружи плазменного столба создаются области с ненулевым кильватерным потенциалом.