

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Христо Михаил Сергеевич

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Расчет структуры диамагнитного "пузыря" в открытой ловушке

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

д-р физ.-мат. наук,

профессор

Иванов А. А./.....
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Научный руководитель

канд. физ.-мат. наук,

в.н.с. ИЯФ СО РАН

Беклемишев А. Д./.....
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....».....20...г.

Новосибирск, 2017

Оглавление

1	Введение	2
2	Перенос в плазме	3
3	Равновесие плазмы	8
4	Численные алгоритмы	9
4.1	Уравнение переноса	10
4.2	Уравнение равновесия	12
4.3	Совместное решение	14
5	Заключение	17

1 Введение

Несмотря на то, что токамаки являются лидерами современной термоядерной программы, их конструкция имеет ряд ограничений. В то же время линейные системы, такие как открытые ловушки и системы с обращенным полем (FRC), становятся все более эффективными. Хотя управляемый ядерный синтез еще далек от своей реализации, основываясь на имеющихся теоретических и экспериментальных данных, можно полагать, что открытые магнитные системы являются перспективными для создания более компактного термоядерного реактора с высокой плотностью энергии и относительно простой конструкцией. Кандидатом на эту роль может выступать газодинамическая ловушка. Однако теория предсказывает, что для эффективного энергетического выхода длина реактора, основанного на газодинамическом удержании, должна быть чрезвычайно большой, что является серьезным конструкционным недостатком.

Одним из новых предложенных методов по повышению параметров плазмы в открытых ловушках является режим диамагнитного удержания [1], основная идея которого заключается в следующем. Мощность, выделяющаяся в результате термоядерных реакций, пропорциональна объему плазмы и квадрату ее плотности, а потери в основном связаны с вытеканием через торцы ловушки и пропорциональны поперечному сечению и плотности в пробках. Отношение поперечного сечения плазмы в пробках и в рабочей области равно отношению полей (пробочному отношению). Таким образом для эффективности реакции имеем $Q \propto nRL$, где n – плотность плазмы, $R = B_m/B_0$ – пробочное отношение, L – длина ловушки. Максимально достижимая плотность плазмы в реакторе ограничена величиной вакуумного магнитного поля и параметром β , то есть $n \propto \beta B_v^2$. Равновесие достигается при $B_0 = B_v \sqrt{1 - \beta}$. В итоге получим

$$Q \propto LB_v B_m \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta}}. \quad (1)$$

Таким образом, из (1) следует, что уменьшение длины реактора L может быть скомпенсировано увеличением параметра β , что означает возможность создания достаточно компактного термоядерного реактора на основе открытой ловушки. В связи с этим возникла потребность в деталь-

ном теоретическом исследовании режима диамагнитного удержания, в частности, расчете детальной пространственной структуры равновесия.

Настоящая работа посвящена поиску равновесия плазмы высокого давления ($\beta \sim 1$) в открытой осесимметричной ловушке при наличии стационарных потоков вещества. Для описания равновесия используется уравнение Грэда-Шафранова, основанное на теории одножидкостной магнитной гидродинамики плазмы с изотропным давлением. Данное уравнение было получено В. Д. Шафрановым в 1957 [2], и годом позднее Г. Грэдом [3]. Уравнение Грэда-Шафранова успешно используется в исследованиях, посвященных токамакам, однако оно применимо в том числе и к открытым ловушкам. Перенос в плазме в магнитном поле моделируется уравнением баланса частиц, полученным в рамках магнитогидродинамической теории. Точного аналитического решения данных уравнений найти не удастся вследствие их нелинейности. В цилиндрической геометрии они решены в [1]. Цель настоящей работы – найти решения в произвольной геометрии, применяя численные методы, в частности итерационный алгоритм Пикара [4, 5] и метод конечных разностей [7, 8].

В разделе 2 приводится вывод уравнения переноса и постановка граничных условий. Раздел 3 посвящен уравнению равновесия Грэда-Шафранова в случае осесимметричной открытой ловушки. Далее, в разделе 4 обсуждаются методы реализации и результаты численных решений уравнений переноса и равновесия по отдельности. Также рассматриваются трудности, возникающие при решении совместной системы, и способы борьбы с ними.

2 Перенос в плазме

Для моделирования эффектов переноса в открытой осесимметричной ловушке в настоящей работе используется уравнение, описывающее стационарную диффузию плазмы в магнитном поле в аксиально-симметричной системе. Так как имеется осевая симметрия, удобно выбрать цилиндрическую систему координат. Определим поток магнитного поля ψ в виде

$$[\mathbf{B} \times \mathbf{e}_\theta] = -\frac{1}{2\pi r} \nabla \psi. \quad (2)$$

Можно показать, что давление плазмы в равновесии постоянно на магнитных поверхностях $\psi = \text{const}$ и, следовательно, является функцией магнитного потока $p = p(\psi)$. Таким образом, можно заключить, что уравнение переноса сводится к одномерному дифференциальному уравнению.

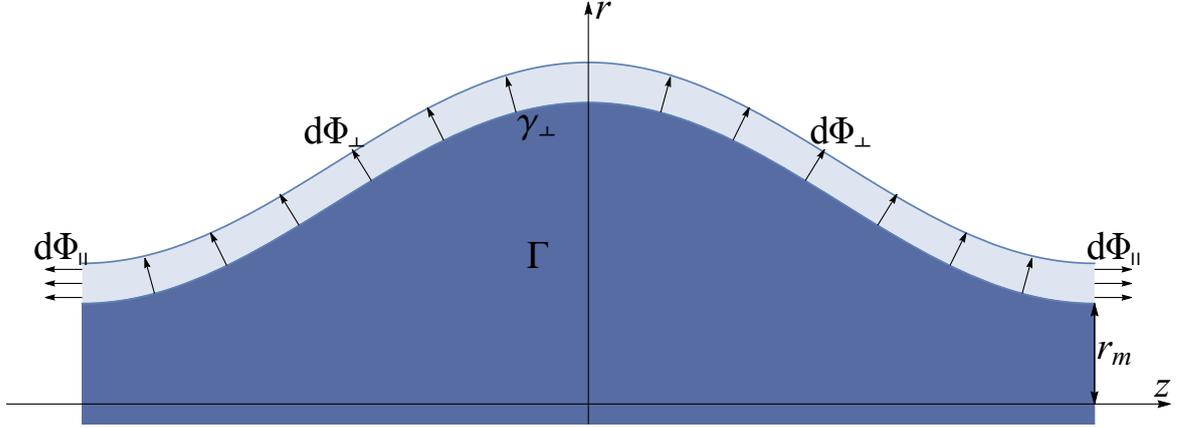


Рис. 1. Продольное сечение магнитной поверхности $\psi = \text{const}$. Здесь $d\Phi_{\perp}$ и $d\Phi_{\parallel}$ – поперечный и продольный потоки вещества в промежутке между поверхностями ψ и $\psi + d\psi$.

Закон сохранения числа частиц, который заключается в непрерывности потоков вещества от некоторого источника, имеет следующий вид

$$\frac{d}{d\psi}(\Phi_{\parallel} + \Phi_{\perp}) = \frac{dQ}{d\psi}, \quad (3)$$

где Φ_{\parallel} – поток частиц через торцы магнитной поверхности $S_{\parallel}(\psi)$, Φ_{\perp} – поток частиц через магнитную поверхность $S_{\perp}(\psi)$, Q – внутренний источник частиц (рис. 1).

Найдем скорость $\mathbf{v}_{\perp} \parallel \nabla\psi$ поперечного вытекания плазмы через магнитную поверхность $\psi = \text{const}$. Известно, что диффузия плазмы в магнитном поле эквивалентна диффузии магнитного поля в проводящей среде вследствие конечной проводимости. Закон Ома имеет следующий вид

$$\frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}. \quad (4)$$

Можно показать, что азимутальная компонента электрического поля E_{θ} равна нулю. Действительно, если $E_{\theta} \neq 0$, то существует замкнутый кон-

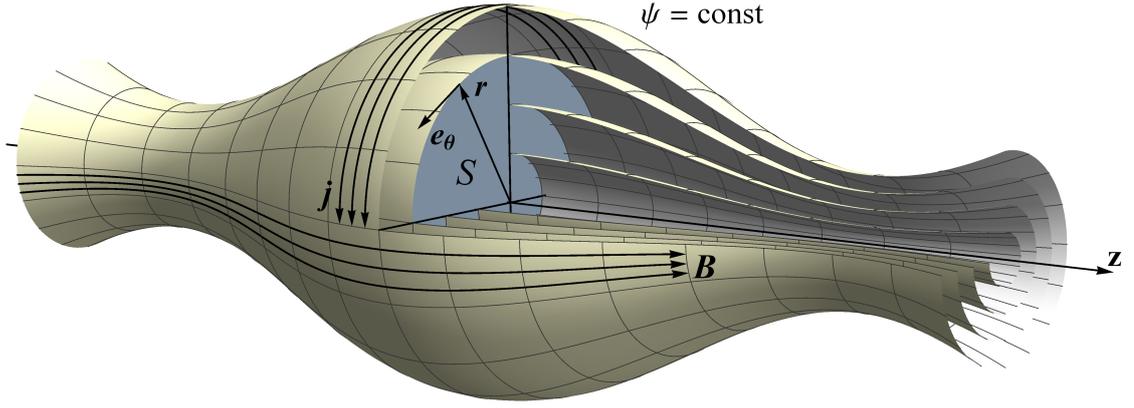


Рис. 2. Геометрия системы.

тур такой, что циркуляция поля \mathbf{E} вдоль него не равна нулю. Это, в свою очередь, приводит к появлению переменного магнитного поля, что противоречит изначальному условию стационарности. Умножая азимутальную составляющую (4) векторно на поле \mathbf{B} , имеем

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{c}{\sigma B^2} j_\theta [\mathbf{B} \times \mathbf{e}_\theta]$$

Далее, исключая магнитное поле при помощи (2), преобразуем к выражению

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{c}{2\pi r \sigma B^2} [[\nabla\psi \times \mathbf{e}_\theta] \times \mathbf{j}] = -\frac{2\pi r c}{\sigma} j_\theta \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}. \quad (5)$$

Уравнение равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}],$$

вместе с (2) дает

$$\nabla p = \frac{dp}{d\psi} \nabla\psi = \frac{1}{2\pi r c} [\mathbf{j} \times [\nabla\psi \times \mathbf{e}_\theta]],$$

откуда

$$j_\theta = 2\pi r c \frac{dp}{d\psi}.$$

В итоге, подставляя получившийся азимутальный ток в выражение для

поперечной скорости вытекания (5), имеем

$$\begin{aligned}\Phi_{\perp} &= \int_{S_{\perp}(\psi)} n \mathbf{v} d\mathbf{S} = -\frac{8\pi^3 c^2}{\sigma} \int_{\gamma_{\perp}(\psi)} n \frac{dp_{\perp}}{d\psi} \frac{1}{|\nabla\psi|} r^3 dl = \\ &= -\frac{8\pi^3 c^2}{\sigma} n \frac{dp_{\perp}}{d\psi} \int_{\gamma_{\perp}(\psi)} \frac{1}{|\nabla\psi|} r^3 dl, \quad (6)\end{aligned}$$

где интегрирование ведется вдоль силовой линии на магнитной поверхности $\psi = \text{const}$. Последнее равенство является законным, так как плотность есть функции только магнитной поверхности, то есть $p = p(\psi)$ и $n = n(\psi)$.

Для продольного потока через торцы магнитной трубки Φ_{\parallel} имеем

$$\Phi_{\parallel} = \int_{S_{\parallel}(\psi)} n \mathbf{v} d\mathbf{S} = 2\pi \int_0^{r_m(\psi)} n v_m r dr, \quad (7)$$

где r_m , v_m – радиус магнитной поверхности и скорость вытекания в пробке соответственно.

Чтобы замкнуть систему (6), (3), (7), выберем уравнение состояния плазмы в следующем виде

$$p = nT.$$

Далее будем считать, что времена, на которых частицы источника равномерно распределяются по силовой трубке, много меньше времени удержания. Тогда источник частиц Q можно считать функцией магнитной поверхности, т. е. $Q = Q(\psi)$. В случае если задана плотность источника как функция координат (r, z) , тогда

$$\frac{dQ}{d\psi} = 2\pi \frac{d}{d\psi} \int_{\Gamma(\psi)} q(r, z) r dr dz,$$

где $\Gamma(\psi)$ – продольное сечение объема в плоскости (r, z) , ограниченного магнитной поверхностью $\psi = \text{const}$.

Окончательно получим стационарное уравнение переноса в магнитном поле для аксиально-симметричной системы в виде

$$\frac{v_m \sigma}{2\pi^2 c^2} r_m \frac{dr_m}{d\psi} p - \frac{d}{d\psi} \left(p \frac{dp}{d\psi} \int_{\gamma_{\perp}(\psi)} \frac{r^3 dl}{|\nabla\psi|} \right) = \frac{\sigma T}{4\pi^2 c^2} \frac{d}{d\psi} \int_{\Gamma(\psi)} q(r, z) r dr dz \quad (8)$$

Уравнение (8) является одномерным нелинейным уравнением второго порядка на функцию $p(\psi)$.

Будем считать, что плазма ограничена по периметру материальным кольцом – лимитером, который имеет определенный радиус a_{lim} и его положение z_{lim} вдоль оси системы. Можно считать, что давление плазмы за ограничителем равно нулю, что формально представляется, как

$$p|_{r=a_{lim}, z=z_{lim}} = 0.$$

Однако вследствие того, что давление β является функцией магнитного потока ψ , граничное условие нужно ставить на некоторой потоковой поверхности $\psi = \psi_{bord}$. Таким образом, требуется найти согласованное с заданной зависимостью $\psi(r, z)$ значение $\psi_{bord} = \psi(a_{lim}, z_{lim})$. Тогда граничное условие на внешней границе плазмы сводится к

$$p(\psi(a_{lim}, z_{lim})) = 0. \quad (9)$$

В нуле граничное условие можно поставить следующим образом

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Граничное условие можно также поставить не в нуле, а на некоторой магнитной поверхности $\psi = \psi_s$. Пусть источник частиц локализован вблизи оси системы и целиком лежит внутри поверхности $\psi = \psi_s$. Интегрируя уравнение (8) по ψ от нуля ψ_s , получим

$$\left(p \frac{dp}{d\psi} \right) \Big|_{\psi=\psi_s} \approx - \frac{\sigma T}{4\pi^2 c^2} \frac{\int_{\Gamma(\psi_s)} q(r, z) r dr dz}{\int_{\gamma_{\perp}(\psi_s)} \frac{r^3 dl}{|\nabla\psi|}}. \quad (10)$$

Здесь мы пренебрегли вкладом потока через пробки ловушки, предполагая его малость.

3 Равновесие плазмы

Уравнение Грэда-Шафранова описывает равновесие плазмы в осесимметричной системе. Вывод данного уравнения в общем случае приводится в [2–4]. Аналогичным образом уравнение было получено в [6] для случая осесимметричной открытой ловушки

$$\Delta^* \psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = g,$$

$$g = \begin{cases} -16\pi^3 r^2 \frac{dp}{d\psi}, & (r, z) \in \Gamma_p, \\ -\frac{8\pi}{c} r j(r, z), & (r, z) \notin \Gamma_p. \end{cases}$$

где j – внешние удерживающие токи, Γ_p – продольное сечение плазмы в плоскости (r, z) . Данное уравнение является двумерным дифференциальным уравнением второго порядка эллиптического типа.

Существуют конфигурации, в которых плазма заключена в идеально проводящий кожух. В простейшем случае считается, что плазма полностью заполняет пространство внутри кожуха. В более общем случае между плазмой и кожухом существует вакуумный зазор, а сам кожух не совпадает с магнитной поверхностью. Граница плазмы в такой задаче определяется из решения самого уравнения. В настоящей работе считается, что плазма находится в неограниченной области при отсутствии внешнего проводящего кожуха. В этом случае равновесие имеет место при наличии удерживающих магнитных полей, создаваемых внешними токами. Тогда граничные условия по координате r ставятся следующим образом

$$\begin{aligned} \psi(r, z)|_{r=0} &= 0, \\ \psi(r, z)|_{r \rightarrow \infty} &= \text{const} < \infty. \end{aligned} \tag{11}$$

Первое из них очевидным образом следует из равенства нулю интегра-

ла от непрерывной функции по бесконечно малой поверхности, второе следует из того, что магнитное поле спадает на бесконечности. Граница плазмы находится из решения задачи. Граничное условие по координате z , ставится на бесконечности аналогичным образом, исходя из физических соображений, то есть

$$\psi(r, z)|_{z \rightarrow \infty} = \text{const} < \infty.$$

Если ловушка является многопробочной с длиной ячейки L , тогда решение должно удовлетворять требованию на периодичность

$$\psi(r, z) = \psi(r, z + L). \quad (12)$$

При выборе достаточно большого продольного размера элементарной секции, влиянием соседних секций друг на друга, по-видимому, можно пренебречь. Это значит, что решение, полученное с периодическим граничным условием, может также приближенно описывать равновесие в неперодической открытой ловушке.

4 Численные алгоритмы

Для удобства вычислений перейдем к безразмерным величинам. Магнитный поток нормируем на $\psi_0 = \pi a^2 B_0$, заменяя $\psi \rightarrow \psi_0 \psi$, где $B_0 = \text{const}$ – заданное магнитное поле. Давление плазмы обезразмерим, вводя величину $\beta = p B_0^2 / 8\pi$. Заметим, что в стандартное определение параметра β входит магнитное поле на оси системы, которое зависит от координаты z , т. е. $B_0 = B_0(z)$. Однако, в настоящей работе B_0 – минимальное вакуумное поле в некоторой конкретной точке на оси системы (напр. в центре ловушки) и является постоянным, независимым от z , т. е. $B_0 = \text{const}$. Плотность источника частиц нормируем на некоторую характерную величину q_0 , а внешние удерживающие токи на $j_0 = B_0 c / 4\pi a$, т. е. $q \rightarrow q_0 q$ и $j \rightarrow j j_0$. Также введем безразмерные координаты, производя замену $r \rightarrow ar$, $z \rightarrow Lz$, $l \rightarrow Ll$, где a и L – поперечный и продольный размеры ловушки соответственно, тогда оператор градиента преобразу-

ется к виду

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \rightarrow \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial r}, K \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{a} \nabla,$$

где $K = a/L$ – аспектное отношение ловушки. В итоге получим уравнение переноса

$$\tau_{\parallel}^{-1} \beta r_m \frac{dr_m}{d\psi} - \tau_{\perp}^{-1} \frac{d}{d\psi} \left(\beta \frac{d\beta}{d\psi} \int_{\gamma_{\perp}(\psi)} \frac{r^3 dl}{|\nabla\psi|} \right) = \tau_Q^{-1} \frac{d}{d\psi} \int_{\Gamma(\psi)} q(r, z) r dr dz, \quad (13)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{L}{v_m}, \quad \tau_{\perp} = \frac{a^2}{D_M}, \quad \tau_Q = \frac{2P_M}{Tq_0}.$$

и уравнение равновесия Грэда-Шафранова

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + K^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = g, \quad (14)$$

$$g = \begin{cases} -2r^2 \frac{d\beta}{d\psi}, & (r, z) \in \Gamma_p, \\ -2rj(r, z), & (r, z) \notin \Gamma_p. \end{cases}$$

в безразмерной форме. Константы τ_{\perp} , τ_{\parallel} имеют смысл характерного времени поперечного и продольного вытекания плазмы, а τ_Q характеризует мощность источника. Так как уравнения (13), (14) являются нелинейными, для их решения применяется итерационные методы и разностные схемы. Возникающие в ходе решения системы линейных уравнений решаются с применением метода прогонки [7, 8].

4.1 Уравнение переноса

Пусть зависимость магнитного потока от координат $\psi(r, z)$ является известной. В коэффициентах уравнения переноса функция $\psi(r, z)$ явно не присутствует, однако имеется обратная ей $r(\psi, z)$. Таким образом для простоты вычислений будем считать зависимость $r(\psi, z)$ однозначной по ψ , что эквивалентно строгой монотонности магнитного потока ψ по радиусу r . Заметим, что данная постановка задачи исключает решения с

обращенным полем (FRC). Для нахождения решения уравнения переноса (13) организуем итерационную процедуру следующим образом.

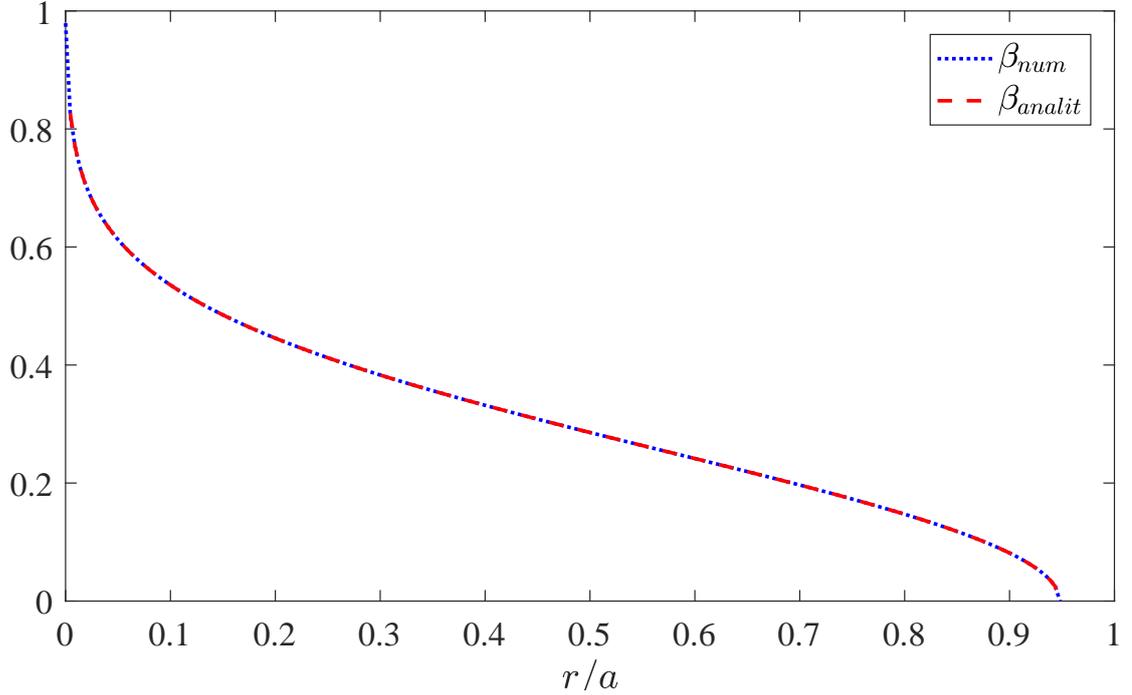


Рис. 3. Численное β_{num} и аналитическое β_{analit} решения уравнения переноса в цилиндрической геометрии ($\psi(r, z) = Ar^2$).

Введем следующие обозначения для краткости

$$\Lambda_{\perp}(\psi, \beta) = \tau_{\perp}^{-1} \beta \int_{\gamma_{\perp}(\psi)} \frac{r^3 dl}{|\nabla \psi|},$$

$$\Lambda_{\parallel}(\psi) = \tau_{\parallel}^{-1} r_m \frac{dr_m}{d\psi},$$

$$\Lambda_Q(\psi) = \tau_Q^{-1} \frac{d}{d\psi} \int_{\Gamma(\psi)} q(r, z) r dr dz.$$

Тогда уравнение переноса примет вид

$$\Lambda_{\parallel}(\psi) \beta - \frac{d}{d\psi} \left(\Lambda_{\perp}(\psi, \beta) \frac{d\beta}{d\psi} \right) = \Lambda_Q(\psi).$$

Пусть безразмерное давление плазмы β на $(i-1)$ -ом шаге итерационного

цикла равно β^{i-1} , тогда на следующем шаге имеем уравнение

$$\Lambda_{\parallel}(\psi)\beta^i - \frac{d}{d\psi} \left(\Lambda_{\perp}(\psi, \beta^{i-1}) \frac{d\beta^i}{d\psi} \right) = \Lambda_Q(\psi).$$

Получившееся уравнение является линейным уравнением второго порядка и решается стандартными методами.

Сходимость итерационного алгоритма была проверена на цилиндрической задаче ($\psi(r, z) = Ar^2$) с граничными условиями (9), (10). Данная задача имеет аналитическое решение. Результаты теста демонстрируют хорошее соответствие численного решения теории (рис. 3).

4.2 Уравнение равновесия

В области содержащей плазму Γ_p уравнение равновесия Грэда-Шафранова (14) нелинейно. Для нелинейностей такого типа существуют стандартные методы решения, например итерационный алгоритмом Пикара [4, 5], который используется в настоящей работе. Пусть магнитный поток $\psi(r, z)$ и область Γ_p на $(i - 1)$ -ом шаге итерационного цикла соответственно равны $\psi^{i-1}(r, z)$ и Γ_p^{i-1} , тогда на следующем шаге имеем уравнение

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^i}{\partial r} \right) + K^2 \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^2} = g(r, z) = \begin{cases} -2r^2 \frac{d\beta}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi^i}, & (r, z) \in \Gamma_p, \\ -2rj(r, z), & (r, z) \notin \Gamma_p. \end{cases} \quad (15)$$

Будем искать решение в виде преобразования Фурье по координате z : $\psi(r, z) = \mathcal{F}_- [\hat{\psi}(r, k)]$ Тогда требование на периодичность (12) удовлетворяется автоматически. В данной работе используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (FFT). Вследствие ортогональности Фурье-гармоник, получим уравнение вида

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right) - \lambda^2(k) \hat{\psi} = \hat{g}(r, k), \quad (16)$$

где $\hat{g}(r, k) = \mathcal{F}_+ [g(r, z)]$.

Если удерживающие токи в системе локализованы в некоторой обла-

сти, то при достаточно больших r уравнение (16) является однородным, т. е. $\hat{g}(r, k) = 0$. Тогда, отбрасывая растущее решение, во внешней области имеем

$$\hat{\psi}_{out} = C(k)rK_1(\lambda r),$$

где K_1 – функция Макдональда первого порядка. Уравнение (16) на каждом шаге итераций является линейным, тогда его решение можно записать как сумму магнитного потока от плазмы $\hat{\psi}_p$ и магнитного потока от внешних удерживающих токов $\hat{\psi}_c$, т. е. $\hat{\psi} = \hat{\psi}_p + \hat{\psi}_c$. Таким образом, на границе плазмы имеем

$$\frac{\hat{\psi}' - \hat{\psi}'_c}{\hat{\psi} - \hat{\psi}_c} = \frac{\hat{\psi}'_{out}}{\hat{\psi}_{out}}, \quad (17)$$

где штрих означает дифференцирование по r . В итоге имеем одномерное линейное уравнение второго порядка (16) с граничными условиями (11), (17), которое, как и уравнение переноса, решается с применением разностного метода.

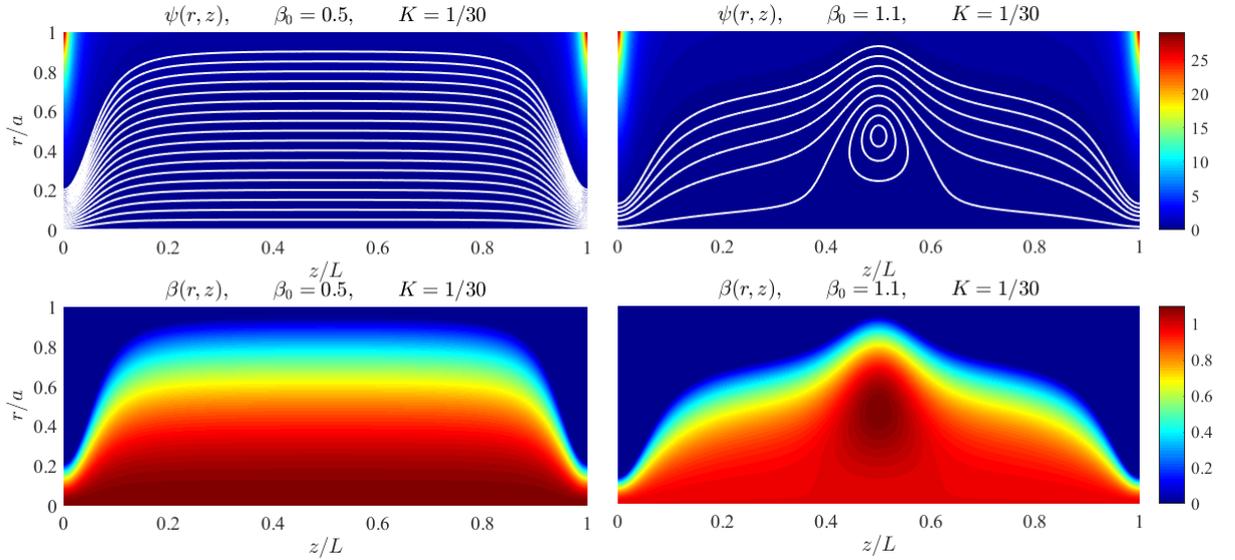


Рис. 4. Распределения магнитного потока $\psi(r, z)$ (сверху) и давления плазмы $\beta(r, z)$ (снизу) при $\beta_0 = 0.5$ и $\beta_0 = 1.1$. Белым цветом выделены изолинии магнитного потока $\psi(r, z)$, представляющие собой силовые линии магнитного поля.

Для демонстрации работы алгоритма были найдены решения при различных модельных $\beta(\psi)$. Рассмотрим решения, которые получаются в простейшем случае линейной зависимости $\beta(\psi)$. Функция $\beta(\psi)$ зада-

ется таким образом, что ее максимальное значение равно β_0 , а границей плазмы является некоторая магнитная поверхность $\psi = \psi_0 bord$. На рисунке 4 представлены распределения магнитного потока $\psi(r, z)$ и давления плазмы $\beta(r, z)$ при β_0 равном 0.5 и 1.1 соответственно. Видно, что при $\beta_0 = 1.1$ алгоритм сходится к решению с обращенным полем. Заметим, однако, что вследствие нелинейности уравнения Грэда-Шафранова данное решение может быть не единственным. Также было установлено, что при изменении шага сетки решение изменяется незначительно, что говорит об устойчивости алгоритма.

4.3 Совместное решение

Прежде были рассмотрены методы численного решения уравнений переноса (13) и равновесия (14) отделено друг от друга. В результате работы данных алгоритмов были получены сходящиеся решения. Следующей ступенью является построение совместного численного решения системы уравнений переноса и равновесия. При использовании стандартных подходов, описанных в разделах 4.1 и 4.2, возникают расходимости. В цилиндре итерационный алгоритм (15) не является сходящимся, а в непараксиальном случае, как было сказано ранее, при достаточно большом давлении плазмы β итерационная процедура сходится к решениям типа FRC. Аналитическая теория [1], в свою очередь, предсказывает существование решений типа диамагнитного «пузыря». Таким образом, требуется разработать нестандартные сходящиеся методы решения системы уравнений (13) и (14).

В качестве первого шага рассмотрим следующую модель. Для описания равновесия вместо уравнения Грэда-Шафранова (14) будем использовать уравнение параксиального равновесия, то есть осуществим замену

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + K^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2r^2 \frac{d\beta}{d\psi}, \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{d\beta}{d\psi}.$$

Далее, преобразуя, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B^2}{B_0^2} + \beta \right) = 0, \quad \frac{B}{B_0} = \frac{1}{2r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет решение в квадратурах

$$r^2(\psi, z) = \int_0^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{(B_v(z)/B_0)^2 - \beta(\psi')}}}, \quad (19)$$

где B_v – вакуумное магнитное поле за границей плазмы, в общем случае зависящее от координаты z . Граничное условие в данном приближении определяется теперь не внешними удерживающими токами, а некоторой заданной функцией $B_v(z)$. Заметим, что несмотря на то, что уравнение (18) записано в параксиальном приближении, его решение не обязательно будет параксиальным. В этом случае может произойти выход за границы применимости приближения.

Для решения уравнения переноса используется алгоритм, описанный в разделе 4.1, где в качестве $r(\psi, z)$ выступает решение (19). Данный итерационный алгоритм является сходящимся. На рисунке 5 представлены профили распределения магнитного поля B/B_0 и давления β в центральном сечении ловушки. На рисунке 6 приведено распределение давления плазмы в центральной области ловушки, полученное в результате численного решения.

В параксиальном приближении в работе [1] было получено аналитическое решение уравнения равновесия. В случае изотропного давления оно запишется в виде

$$R(l) = \sqrt{\frac{R_v^2(l) - \beta}{1 - \beta}}, \quad (20)$$

где l – координата вдоль силовой линии ($l = 0$ соответствует дну магнитной ямы), $R_v(l) = B_v(l)/B_v(0)$ – пробочное отношение по вакуумному полю, $R(l) = B(l)/B(0)$ – пробочное отношение по полю с плазмой. Сравнение показало хорошее соответствие численного решения, полученного в настоящей работе, и аналитического решения (20). В дальнейшем на основе данного алгоритма планируется построить модель непараксиального равновесия. Аналог уравнения (19) при учете непараксиальности

имеет вид

$$x(\psi, z) = \int_0^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{1/x_\psi^2(\eta) - \beta(\psi') - \int_\eta^{\psi'} g(\psi'', z) d\psi''}},$$

$$g(\psi, z) = \frac{1}{2x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x_z}{x_\psi} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{x_z}{x_\psi} \right),$$

где $x(\psi, z) = r^2(\psi, z)$, $\eta = \eta(z)$ – магнитный поток на границе счетной области, $g(\psi, z)$ – непараксиальная добавка, которая вычисляется в ходе итераций.

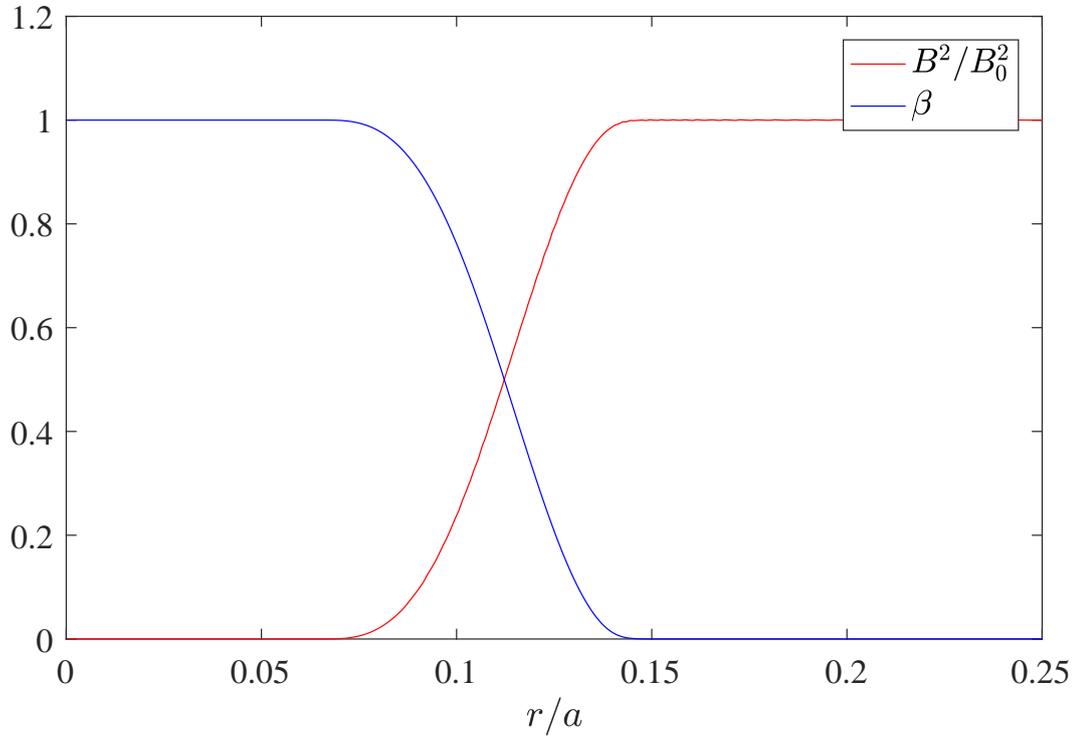


Рис. 5. Профили распределения магнитного поля B/B_0 и давления β в центральном сечении ловушки.

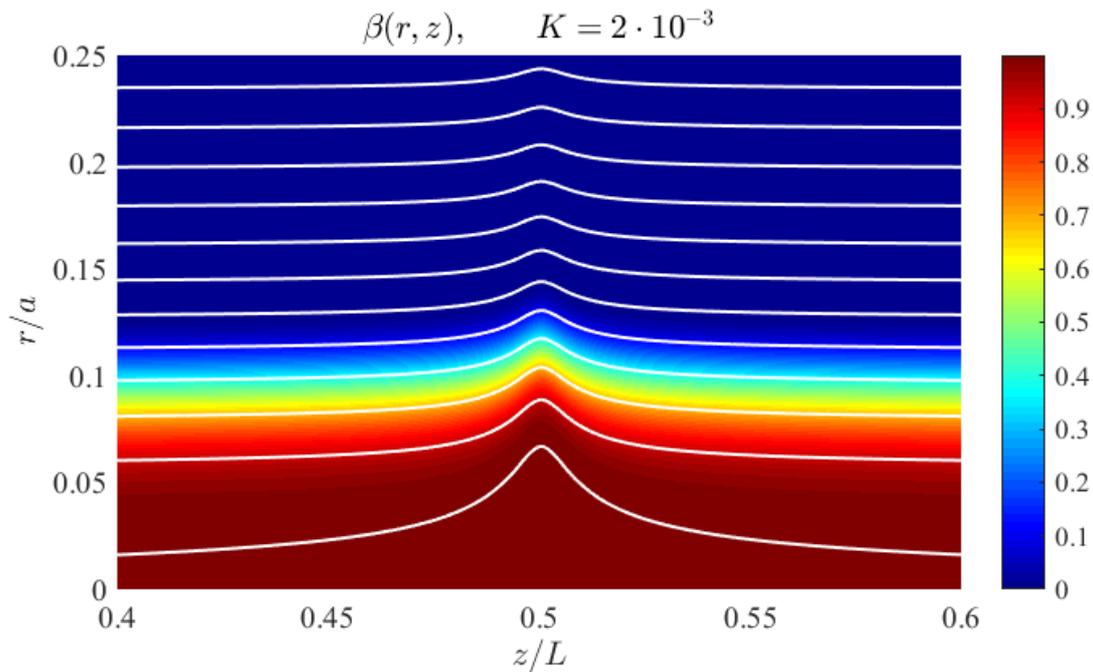


Рис. 6. Распределения давления плазмы $\beta(r, z)$ в области диамагнитного «пузыря». Белым цветом выделены изолинии $\beta(r, z)$, представляющие собой силовые линии магнитного поля.

5 Заключение

Данная работа посвящена поиску равновесия плазмы высокого давления ($\beta \sim 1$) в открытой осесимметричной ловушке при учете эффектов переноса. В ходе работы для этого были проделаны следующие шаги.

1. Был представлен численный алгоритм решения нелинейного уравнения переноса (8) при заданном магнитном потоке $\psi(r, z)$. Тестирование алгоритма проведенное на цилиндрической задаче ($\psi = Ar^2$) показало хорошее соответствие аналитического и численного решений.
2. Построен алгоритм численного решения уравнения Грэда-Шафранова при заданном давлении плазмы $p(\psi)$ как функции магнитного потока ψ . В простейшем случае линейной зависимости $p(\psi)$ найдены численные решения уравнения равновесия.
3. Разработан метод численного решения совместной системы уравнений переноса и равновесия в параксиальном приближении. Числен-

ные решения, полученные в результате работы данного алгоритма, соответствуют аналитической теории.

Данные результаты в дальнейшем могут помочь в построении модели непараксиального равновесия. В качестве основы для этой модели может послужить алгоритм совместного решения уравнений переноса и равновесия в параксиальном приближении, приведенный в настоящей работе.

Список литературы

1. Beklemishev A. D. Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps // *Physics of Plasmas*. – 2016. – Т. 23. – №. 8. – С. 082506.
2. Шафранов В. Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1957. – Т. 33. – №. 3. – С. 9.
3. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // *Journal of Nuclear Energy (1954)*. – 1958. – Т. 7. – №. 3-4. – С. 284-285.
4. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. – «Физико-математическая литература», 1993. – Т. 3.
5. Biskamp D. *Nonlinear magnetohydrodynamics*. – Cambridge University Press, 1997. – Т. 1.
6. Христо М. С. Курсовая работа «Численное решение уравнения равновесия Грэда-Шафранва для осесимметричной открытой ловушки». – НГУ, 2016.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию*. – 1977.
8. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. 2 изд. – БХВ-Петербург, 2011.