

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет: **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра: **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки: **03.04.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **МАГИСТРАТУРА**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

Сандалова Евгения Сергеевича

Тема работы: Влияние собственных полей ультрарелятивистского сильноточного электронного пучка на его характеристики в системе разводки

**«К защите допущена»**

Д-р физ.-мат. наук,

профессор

Иванов А.А /

«.....».....20...г.

**Научный руководитель**

Канд.физ.-мат. наук, доцент

с.н.с. ИЯФ СО РАН

Синицкий С.Л/

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....» .....20...г.

Новосибирск, 2018

## Оглавление

Введение .....	3
Глава 1. Набор эмиттанса в поворотном элементе системы разводки пучка ЛИУ .....	8
1.1. Общая схема системы разводки пучка .....	8
1.2. Описание конструкции поворотного элемента .....	9
1.2. Факторы, влияющие на угловую расходимость пучка .....	10
1.3. Рассмотрение теории Ли-Чена .....	12
1.4. 2D-модель транспортировки пучка в тороидальной камере .....	16
1.5. 3D-расчет магнитного поля поворотного элемента .....	19
1.6. Аналитическая модель транспортировки интенсивного пучка без магнитного поля .....	21
1.7. 3D-модель транспортировки пучка в поворотном элементе с учетом собственного заряда .....	26
1.8. Результаты и обсуждения трехмерного моделирования .....	30
Глава 2. Набор эмиттанса в магнитном кикере системы разводки пучка ЛИУ .....	39
2.1. Описание конструкции магнитного кикера .....	39
2.2. Выбор токов для создания однородного магнитного поля в кикере .....	40
2.3. 2D-модель транспортировки пучка в кикере .....	45
2.4. 3D-модель транспортировки пучка в кикере .....	51
Заключение .....	56
Список литературы .....	57

## Введение

В настоящее время ускорение пучков заряженных частиц играет важнейшую роль в фундаментальной физике, представляя собой основной метод изучения строения мира на самых малых достижимых масштабах ( $\sim 1$  фм). Само по себе развитие физики ускорителей привело к широкому использованию пучков заряженных частиц во многих областях науки и техники: в частности, в атомной энергетике, в сельском хозяйстве, в медицине, в радиационных технологиях (обработке пищевых продуктов, модифицировании поверхности материалов, радиационной полимеризации, стерилизации медицинских инструментов и препаратов), в экологии для очистки сточных вод и выбросов газов.

Одной из исследовательских и прикладных задач в области создания новых ускорителей, по которой ведутся интенсивные работы в Институте ядерной физики имени Г.И. Будкера, является создание линейного индукционного ускорителя (ЛИУ) для генерации ультррелятивистского электронного пучка высокой яркости. Для решения этой задачи необходимо создать пучок с током в несколько килоампер и настолько малым угловым разбросом, чтобы его можно было сжать на мишени в пятно с характерным размером менее 1 мм. Поэтому крайне важно обеспечить минимальный набор эмиттанса пучка в ходе его транспортировки в элементах системы разводки ЛИУ, состоящей из кикера, септум-магнита и поворотного элемента.

Среди основных факторов, которые могут привести к увеличению углового разброса электронов пучка при прохождении различных элементов магнитной системы ускорителя, можно выделить следующие. Во-первых, это разброс энергий у частиц пучка, вследствие непостоянства во времени ускоряющего поля в элементах ускорителя. Во-вторых, электрические и магнитные поля сильноточного пучка, создаваемые его собственными объемным зарядом и током, а также поверхностными

зарядами и токами, индуцированными на стенках трубы дрейфа. В-третьих, важным фактором, влияющим на угловую расходимость, являются аберрации магнитных элементов тракта транспортировки.

При расчете, проектировании и настройке таких ускорителей с целью получения пучка высокой яркости наибольшую трудность из вышеперечисленных факторов представляет учет влияния собственных полей пучка на поперечный эмиттанс при его транспортировке в ЛИУ.

К настоящему времени в мире уже построено несколько ЛИУ с энергиями электронов около 20 МэВ. Одной из первых подобных установок является построенный в Ливерморской национальной лаборатории ЛИУ под названием FXR (The Flash X-Ray, США, 1982 год). Энергия частиц в пучке такого ЛИУ достигала значений 17÷18 МэВ при токе 3 кА и длительности импульса 65 нс, а диаметр фокусного пятна, до которого удалось сфокусировать пучок, - 3.5 мм [1-2]. Оптимизация транспортировки пучка в ЛИУ FXR осуществлялась с помощью моделирования численным кодом ENSOLVE, который решает уравнение на среднеквадратичную огибающую пучка с учетом нескольких факторов: провисания потенциала, создаваемого пространственным зарядом пучка, сферических аберраций соленоидальных линз, влияния обратного потока ионов в области перед мишенью на рост эмиттанса и фокусировку пучка [3].

Кроме этих установок во Франции был спроектирован, собран и действует с 1998 года томографический комплекс AIRIX (Institute at Pontfaverger – Moronvilliers,). Этот комплекс создает пучок с более высокими характеристиками: ток пучка 3.5 кА, энергия электронов около 16÷20 МэВ и размер фокусного пятна пучка приблизительно 2 мм [4]. В качестве прототипа AIRIX была использована установка PIVAIR на энергию электронов до 8 МэВ, состоящая из инжектора с "вельветовым" катодом  $\varnothing \sim 89$  мм и восьми индукционных секций (250 кэВ каждая),

которые питались специально разработанными генераторами высокого напряжения. В этой установке получен пучок с энергией электронов 4 МэВ, током 3.5 кА и длительностью импульса 60 нс. Результаты расчета транспортировки пучка с учетом собственного пространственного заряда, полученные с помощью кода SCAIRIX, опубликованы в работе [5].

Еще одной ветвью развития ЛИУ являются установки DARHT-I (Dual Axis Radiograph Hydrodynamic Test, США, 1999 г.) и DARHT-II (США, 2003 г.). Эти источники рентгенографического излучения применялись для проведения многоракурсного облучения мишени. Так, например, в двухэмиссионной рентгенографической гидродинамической установке (DARHT-I) были использованы два ортогонально расположенных электронных ЛИУ для создания интенсивных рентгеновских импульсов тормозного излучения для флэш-радиографии [7]. Чтобы производить измерения трехмерного распределения плотности исследуемого объекта с субмиллиметровым пространственным разрешением, был сконструирован и изготовлен инжектор пучка с током 2 кА, диаметром 64 мм с энергией электронов 4 МэВ, который эмиттировался «вельветовым» катодом диаметром 90 мм. На первой версии этой установки планировалось получить пучок с фокусным пятном 2 мм, энергией 19.8 МэВ, током 2 кА при длительности импульса 60 нс. На второй версии (DARHT-II) были достигнуты те же параметры пучка при существенно увеличенной длительности импульса - 2 мкс [8]. В конечном итоге установка включала в себя инжектор из 8 индукционных модулей (с ускоряющим потенциалом 173 кВ каждый) и ускорительную секцию из 70 ячеек с потенциалом 197 кВ.

Исследование влияния магнитной системы на рост эмиттанса на установке DARHT-II было проведено с помощью численных кодов, таких как XTR и LSP, моделирующих движение пучка методом частиц в ячейках (PIC-code) [9].

Таким образом, на основании результатов анализа опубликованных работ по тематике, касающейся создания и оптимизации работы ЛИУ, которые предназначены для получения пучка с высокой яркостью, актуальной задачей является освоение существующих, а также разработка новых программных пакетов, позволяющих учесть влияние собственных электрических и магнитных полей интенсивного ультрарелятивистского электронного пучка на его транспортировку.

Исходя из этого, основной целью данной квалификационной работы является теоретическое исследование динамики угловых характеристик ультрарелятивистского сильноточного электронного пучка круглого сечения при прохождении различных элементов тракта транспортировки, таких как: кикер, септум-магнит и поворотный элемент, методами компьютерного моделирования.

В рамках данного исследования решались следующие задачи: с помощью двумерного и трехмерного моделирования исследовалась транспортировка ультрарелятивистского пучка с учетом его собственных электрических и магнитных полей, анализировалось изменение характеристик пучка (его траекторий, формы поперечного сечения, поперечного эмиттанса) при прохождении через элементы системы разводки. По результатам данного исследования выявлены основные факторы, влияющие на рост эмиттанса пучка в тракте транспортировки, проведена оптимизация геометрии магнита в поворотном элементе. С помощью специально созданной методики и программных пакетов COMSOL Multiphysics и CST Particle Studio был разработан алгоритм эффективного расчета собственных полей ультрарелятивистского сильноточного пучка, имеющий существенно меньший «счетный» шум, чем в каждом из этих пакетов отдельно, что позволило рассчитывать динамику поперечного эмиттанса на существенно больших длинах транспортировки в магнитных элементах сложной геометрической

конфигурации. Результаты расчетов для сильноточного пучка сопоставлены с результатами для пучков с малыми токами.

Диссертация состоит из нескольких частей: введения, двух глав с 28 рисунками, заключения и списка литературы с 13 позициями, изложенных на 58 страницах. Автор данной магистерской диссертации принимал участие во всех ее стадиях: моделировании, оптимизации и проведении сравнительного анализа полученных результатов.

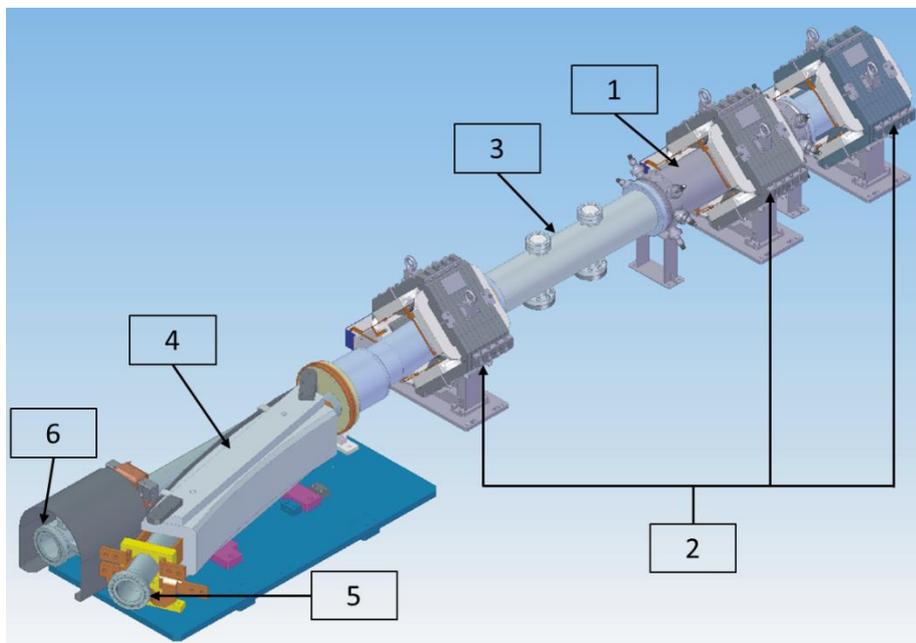
## Глава 1. Набор эмиттанса в поворотном элементе системы разводки пучка ЛИУ.

В данной главе мы рассмотрим детальное описание постановки задачи и результатов компьютерного моделирования транспортировки сильноточного ультрарелятивистского пучка круглого сечения в двумерном и трехмерном случаях с учетом собственных электрического и магнитного полей пучка в поле поворотного элемента. Расчеты проводились с помощью двух пакетов программ CST Particle Studio и COMSOL Multiphysics.

### 1.1. Общая схема системы разводки пучка

Для обеспечения возможности направлять отдельные импульсы ультрарелятивистского сильноточного пучка по различным каналам транспортировки (многолучное облучение мишени), в ИЯФ была разработана специальная система разводки пучка, которая представляет собой совокупность магнитных элементов, последовательно расположенных вдоль тракта транспортировки пучка после его выхода из ЛИУ.

Общая схема расположения первых двух элементов системы разводки представлена на Рис.1. В первом элементе этой системы, так называемом кикере, производится отклонение пучка импульсным дипольным магнитным полем, создаваемым токами в стержнях кикера. Это поле отклоняет пучок на угол  $\sim 2^\circ$ , тем самым направляя его из прямого канала в канал ответвления, проходящий внутри септум-магнита с сильным градиентом магнитного поля на входе. Поле септум-магнита еще больше отклоняет пучок и направляет его в поворотный элемент тракта транспортировки. Вдоль всего тракта установлены квадрупольные линзы для обеспечения фокусировки пучка и препятствия его расплыванию под действием собственных электрического и магнитного полей.



*Рисунок 1. Эскиз системы разводки пучка ЛИУ: 1-кикер, 2-квадрупольные линзы, 3- регулярная секция тракта, 4-септум-магнит, 5-выход к поворотному элементу, 6 - прямой канал*

Кроме того, с помощью квадрупольных линз осуществляется преобразование круглого сечения пучка в кикере в сильно вытянутый по вертикали эллипс на входе в септум-магнит для облегчения его переключения из канала в канал и уменьшения возмущения пучка резкоменяющимся магнитным полем данного элемента.

## **1.2. Описание конструкции поворотного элемента**

После септум-магнита электронный пучок направляется в поворотный элемент, который состоит из дипольного магнита прямоугольного сечения с обмотками на верхнем и нижнем магнитных полюсах, а также дополнительной обмоткой, расположенной вдоль трубы дрейфа, которая создает квадрупольное магнитное поле, корректирующее форму сечения пучка. Ядро магнита, изготовленное из магнитомягкой стали-10, имеет габаритные размеры  $280 \times 500 \times 500$  мм. Между полюсами магнита расположена изогнутая труба дрейфа, представляющая собой вакуумную камеру, сваренную из двух прямолинейных участков труб радиусом

$r_t = 75$  мм и расположенным между ними тороидальным участком, имеющим то же сечение и длину 680 мм. (см. Рис. 2). Радиус изгиба тороидального участка равен 3253 мм. При соответствующем выборе величины магнитного поля вся эта конструкция обеспечивает поворот пучка электронов с энергией 20 МэВ на угол  $\alpha = 12^\circ$ .

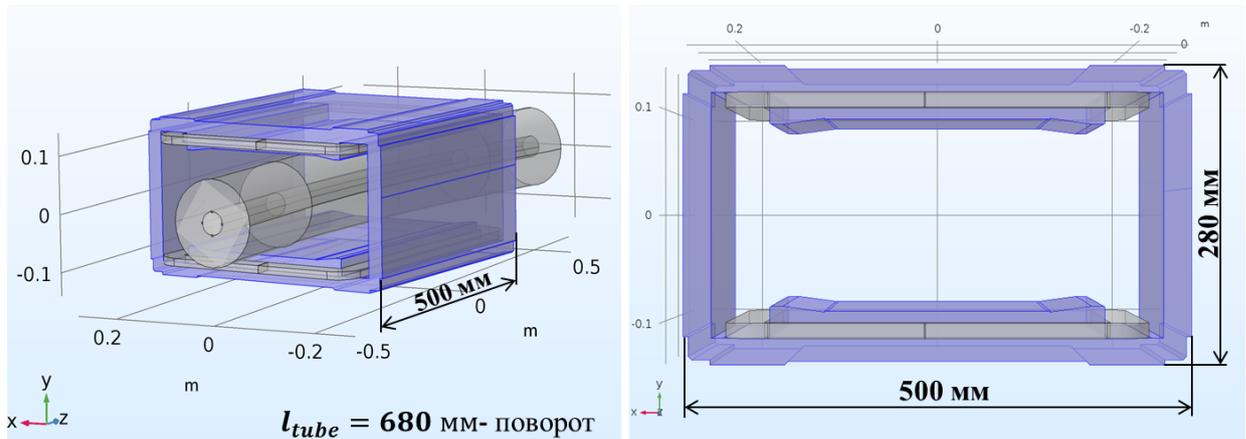


Рисунок 2. Внешний вид  $12^\circ$  поворотного элемента. Синим цветом показано ярмо магнита, серым—вакуумная труба дрейфа и обмотки магнитных катушек

## 1.2. Факторы, влияющие на угловую расходимость пучка

Прежде всего стоит отметить, что точное аналитическое описание движения пучка с учетом его собственных полей в такой системе транспортировки, состоящей из прямого участка трубы дрейфа, переходящего в тороидальный и обратно, является достаточно сложным. Объясняется это тем, что существует ряд факторов, который может привести к увеличению угловой расходимости электронов пучка при прохождении ими поворотного элемента. Первый из них связан с разбросом энергий электронов пучка— $\Delta\mathcal{E}$ , вследствие чего дополнительная угловая расходимость электронов на выходе элемента может быть оценена как  $\Delta\alpha \sim \alpha \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E} + mc^2}$ , где  $\mathcal{E}$ —это кинетическая энергия электронов, а  $\alpha$ —угол поворота в тороидальной камере. Вторым фактором, увеличивающим угловую расходимость электронов, является провисание потенциала

внутри пучка, создаваемое его объемным зарядом (будет рассмотрено более подробно в одном из следующих разделов). При проектных параметрах пучка  $I_b = 2$  кА,  $r_b = 2$  см,  $r_t = 7.5$  см величина провисания потенциала  $\Delta\phi$  внутри сечения пучка составляет около 60 кВ, что приводит к угловому разбросу на выходе поворотного элемента  $\Delta\alpha \sim \alpha \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon + mc^2} \sim 2.5$  мрад и, соответственно, к дополнительному вкладу в его эмиттанс масштаба 100 мм·мрад, что является неприемлемым для получения пучка с высокой яркостью. Однако этот эффект в соответствии с теорией Ли-Чена должен практически полностью компенсироваться радиальным электрическим полем, возникающим при прохождении тороидального пучка в тороидальной трубе дрейфа [10-12]. В нашем случае большую часть области поворота пучка составляет переходной процесс от прямолинейного движения к движению по окружности, поэтому можно предположить, что такая компенсация будет лишь частичной.

Следующим фактором, влияющим на угловую расхожимость электронов пучка, являются краевые поля дипольного магнита, возмущающие гладкую траекторию электронов на входе и выходе из поворотного элемента, иными словами, это воздействие аббераций дипольного магнита. В общем случае в соответствии с теоремой Лиувилля эти возмущения не могут изменить исходный фазовый объем пучка, однако в случае, когда эмиттанс электронов пучка в поперечной плоскости, перпендикулярной опорной траектории пучка, вычисляется по формуле Лапостоля (что предполагает проецирование поперечного 4-х мерного фазового объема  $(X, X', Y, Y')$  на плоскости  $(X, X')$  и  $(Y, Y')$ ), то это приводит к заметному росту эмиттанса. То есть, если в качестве примера взять исходный пучок с нулевым разбросом поперечных импульсов  $(X', Y') = (0, 0)$ , поперечный фазовый объем, занимаемый его электронами, будет представлять собой часть плоской поверхности. После прохождения электронами поворотного элемента эта поверхность искривляется, ее объем равен нулю, но проекции

этой поверхности на плоскости  $(X, X')$  и  $(Y, Y')$  будут иметь конечные площади.

В связи со всеми вышеуказанными обстоятельствами для корректного рассмотрения задачи о наборе эмиттанса в поворотном элементе в качестве приближенного решения можно использовать теорию Ли-Чена, дающую описание транспортировки стационарного пучка круглого сечения в тороидальной камере [10-12]. Однако данное решение является вполне корректным только в центральной области магнита. Также важно отметить, что стационарное описание транспортировки пучка является вполне оправданным, поскольку характерная длительность пучка в эксперименте ( $\sim 100$  нс), а также фронтов его тока ( $\sim 20 \div 30$  нс) намного превышает времена, за которые электромагнитная волна, испускаемая электронами пучка, успевает добежать от пучка до стенки камеры и обратно.

### **1.3. Рассмотрение теории Ли-Чена**

В рамках данной теории рассматривается аксиально-симметричная задача о движении стационарного сильноточного ультрарелятивистского пучка круглого сечения по замкнутой орбите с постоянным радиусом кривизны внутри тороидальной трубы дрейфа, соосной пучку. В рассмотрение включены электрические и магнитные поля самого пучка, а также токов и зарядов, индуцированных пучком в стенках канала транспортировки. Особое внимание в этой теории уделяется радиальному электрическому полю, возникающему в пространстве дрейфа за счет кривизны пучка и камеры. При этом полагается, что пучок находится в равновесном состоянии и распространяется в слабофокусирующей магнитной системе, то есть все поля являются постоянными во времени и имеют азимутальную и медианную симметрию.

Для представления результатов теории введем цилиндрическую систему координат, вид которой представлен на Рис. 3. Желтым цветом изображена тороидальная вакуумная камера, большой и малый радиусы которой обозначены  $R$  и  $r_t$  соответственно. Синим цветом показан электронный пучок круглого сечения с радиусом  $r_b$  и током  $I_b$ . Внешнее магнитное поле величиной  $B_e$  направлено вдоль оси  $Z$ .

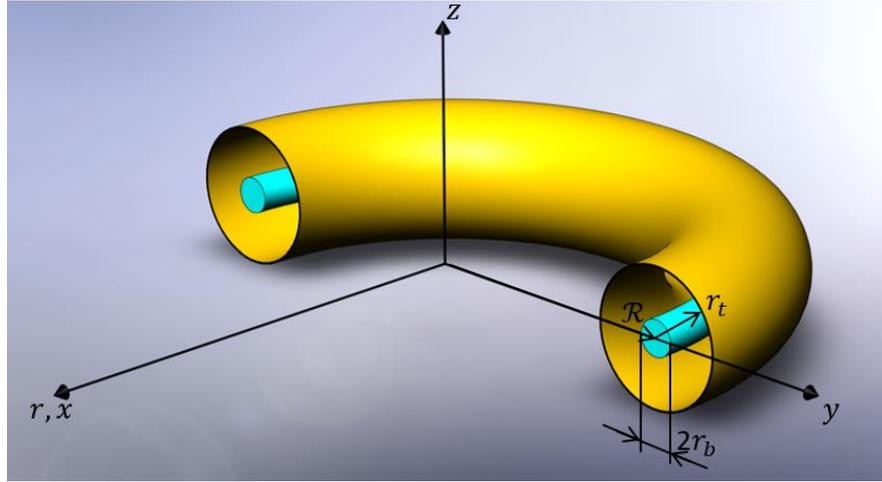


Рисунок 3. Схема распространения пучка в тороидальной камере

В описываемых работах авторам удалось получить решение уравнений (1.1 и 1.2) на скалярный и векторный потенциалы с учетом граничных условий на стенках тороидальной трубы дрейфа в виде ряда по малому параметру  $\frac{r_t}{R} \ll 1$ :

$$\nabla^2 \varphi(r, z) = -4\pi\rho(r, z) \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 A_\theta(r, z) - \frac{A_\theta^2(r, z)}{r^2} = -4\pi\rho(r, z) \cdot \beta_\theta(r, z) \quad (1.2)$$

$$A_\theta(r, z) = \beta_\theta(r, z) \cdot \varphi(r, z) + \delta A_\theta(r, z) \quad (1.3)$$

$$\Delta \delta A_\theta(r, z) = \frac{\beta_\theta \varphi(r, z)}{r^2} \quad (1.4)$$

Поправка к векторному потенциалу  $\Delta \delta A_\theta(r, z)$  обусловлена именно кривизной геометрии. Полученный результат позволил решить уравнения

движения отдельного электрона с учетом собственных полей пучка в цилиндрической системе координат:

$$\gamma \frac{dv_r}{dt} = \gamma \frac{v_\theta^2}{r} - v_r \frac{d\gamma}{dt} + \frac{F_r}{m} \quad (1.5)$$

$$\gamma \frac{dv_\theta}{dt} = -\gamma \frac{v_r v_\theta}{r} - v_\theta \frac{d\gamma}{dt} + \frac{F_\theta}{m} \quad (1.6)$$

$$\gamma \frac{dv_z}{dt} = -v_z \frac{d\gamma}{dt} + \frac{F_z}{m} \quad (1.7)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc^2} (\bar{v} \cdot \nabla \varphi) \quad (1.8)$$

$$\bar{F} = \frac{e}{c} [\bar{v} \times \bar{B}_e] - e \bar{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} [\bar{v} \times [\bar{\nabla} \times \bar{A}]], \quad (1.9)$$

где введены следующие обозначения:  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $v_z$  – компоненты скорости электрона;  $F_r$ ,  $F_\theta$ ,  $F_z$  – компоненты сил, действующих в поперечном сечении трубы дрейфа;  $\gamma$  – гамма-фактор электрона;  $m$  – масса электрона;  $c$  – скорость света;  $\varphi$  и  $\bar{A}$  – электрический и магнитный векторный потенциалы, связанные с пространственным зарядом пучка;  $\bar{B}_e$  – внешнее магнитное поле.

Дальнейшее рассмотрение теории Ли-Чена приводит к очень важным утверждениям, которые можно коротко сформулировать так:

- Из-за кривизны камеры и пучка возникает дополнительное радиальное электрическое поле:  $E_r^{cur} = -\frac{\varphi_b}{r}$ , где  $\varphi_b$  – потенциал аксиально-симметричного пучка в соосной ему трубе круглого сечения.
- Все частицы круглого пучка с равномерным распределением плотности заряда и тока, имеющие разную кинетическую энергию вследствие провисания потенциала, поворачивают в однородном

магнитном поле с одинаковым радиусом поворота  $R$ , зависящим только от полной энергии пучка  $\mathcal{E} = \gamma mc^2 + e\phi = eRB_e$ , а не от кинетической.

• Из решения уравнений (1.1) и (1.2) на электрический и векторный потенциалы и представления решения в виде (1.3) следует, что в результате воздействия нелинейных сил, связанных с собственными полями пучка, поперечный эмиттанс приобретает следующие добавки:

$$\Delta\varepsilon_{n,x} = \Delta\varepsilon_{n,y} = 4x_{rms}x'_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{I_b}{I_A\beta_\theta} \frac{r_b^2}{R} \alpha_b \quad (1.10)$$

где  $\beta_\theta$  — это отношение скорости пучка к скорости света (в ультрарелятивистском случае  $\beta_\theta = 1$ );  $\alpha_b$  — угол поворота пучка;  $I_A = \frac{mc^3}{e} = 17$  кА — ток Альфвена для электрона;  $\varepsilon_{n,x}$  и  $\varepsilon_{n,y}$  — поперечные эмиттансы.

Для удобства восприятия дальнейшего материала, приведу классические определения различных терминов, возникающих при обсуждении поперечного эмиттанса в плоскости  $XX'$ :

1. Площадь фазового портрета:

$$S_{XX'} = 4\pi \sqrt{\langle X^2 \rangle \langle X'^2 \rangle - \langle XX' \rangle^2} \quad (1.11)$$

2. Поперечный эмиттанс:

$$\varepsilon_X = \frac{S_{XX'}}{\pi} = 4 \sqrt{\langle X^2 \rangle \langle X'^2 \rangle - \langle XX' \rangle^2} \quad (1.12)$$

3. Среднеквадратичный эмиттанс:

$$\varepsilon_{rms} = \frac{S_{XX'}}{4\pi} = \sqrt{\langle X^2 \rangle \langle X'^2 \rangle - \langle XX' \rangle^2} \quad (1.13)$$

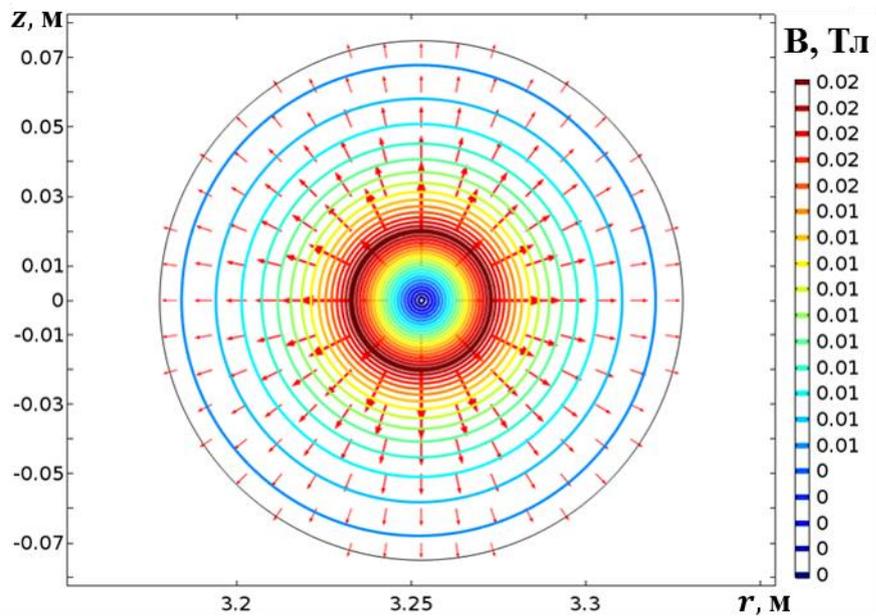
Оценивая набор дополнительного поперечного эмиттанса в случае нашего поворотного элемента, имеющего  $R = 3.253$  м,  $r_t = 0.075$  м и  $B_e = 0.025$  Тл для электронного пучка с  $r_b = 0.02$  м и током  $I_b = 2$  кА, получаем  $\Delta\varepsilon_{n,x} = \Delta\varepsilon_{n,y} \sim 0.6$  мм·мрад, что эквивалентно добавке к площади фазового портрета пучка в плоскости  $XX'$  —  $S_{XX'} \approx 2$  мм·мрад.

#### 1.4. 2D-модель транспортировки пучка в тороидальной камере

Для проверки теоретических результатов, полученных в предыдущем разделе в первом порядке по отношению  $r_t/R$ , с помощью пакета COMSOL Multiphysics была промоделирована двумерная аксиально-симметричная задача о транспортировке пучка в тороидальной камере с такими же размерами, как и в случае поворотного элемента. Сам по себе процесс моделирования в данном пакете условно можно разделить на несколько этапов: первым из них является построение геометрии и задание соответствующего материала. В нашей задаче были заданы параметры вакуумной трубы дрейфа:  $R = 3.253$  м,  $r_t = 0.075$  м, а также равномерные распределения плотностей заряда и тока самого электронного пучка, имеющего радиус  $r_b = 0.02$  м и ток  $I_b = 2$  кА. На втором этапе выбирается модуль решения, в данном разделе были использованы Electrostatic и Magnetic Fields модули, позволяющие численно решать уравнения на потенциалы с соответствующими граничными условиями. В электростатике на границе камеры был задан нулевой потенциал ( $\varphi = 0$ , идеальный проводник), а в магнитостатике -  $\vec{n} \times \vec{A} = 0$ , что эквивалентно равенству нулю нормальной компоненты индукции магнитного поля. На следующем этапе производилось построение сетки с максимальным размером треугольной ячейки  $\delta l = 0.001$  м, что по нашему опыту в такой простой геометрии гарантировало точность нахождения полей лучше, чем 0.01%. Решение задачи находилось с помощью решателя Stationary Solver.

В результате моделирования были получены характерные распределения силовых линий электрического и магнитного полей, а также графики радиальной и аксиальной компонент сил, действующих на электрон в поперечном сечении вакуумной трубы дрейфа, они представлены на Рис. 4 и Рис. 5 (а, б).

В результате анализа полученных двумерных распределений электрических и магнитных полей внутри сечения пучка выяснилось важное свойство пучка, движущегося в тороидальной камере с учетом его собственных полей. Сила воздействия на пробный электрон внутри сечения пучка с большой точностью ( $\sim 10^{-3}$  % - точность расчета полей) совпадает с суммой сил со стороны внешнего однородного магнитного поля, радиального электрического поля (возникающего за счет кривизны пучка и камеры и приводящего к повороту пучка относительно оси камеры как целого в соответствии с теорией Ли-Чена), а также силы, приводящей к равномерному расплыванию пучка по сечению.



*Рисунок 4. Двумерное распределение силовых линий электрического и магнитного полей: красными стрелками показано  $E$  поле, concentрическими линиями – магнитное поле  $B$ .*

Последняя сила совпадает по величине с силой расталкивания электронов аксиально-симметричного пучка, частично скомпенсированной магнитным сжатием его трубок тока, вследствие чего результирующая сила равна силе  $\frac{E_b}{\gamma^2}$ , где  $E_b$  – собственное электрическое поле пучка.

Это обстоятельство наглядно проиллюстрировано на Рис. 5 (а, б). На первом из них представлено распределение по  $r$  части радиальной силы  $\Delta F_r$ , действующей на пробный электрон без учета воздействия внешнего магнитного поля и радиального электрического поля, возникающего за счет кривизны пучка и камеры. На Рис. 5(б) приведена полная сила  $F_z$  в аксиальном  $z$  направлении. Как видно из рисунков, распределения сил  $\Delta F_r$  по  $r$  и  $F_z$  по  $z$  являются практически линейными внутри пучка, а изолинии величины  $\sqrt{\Delta F_r^2 + F_z^2}$  являются линиями, близкими к окружностям, concentричным сечению пучка.

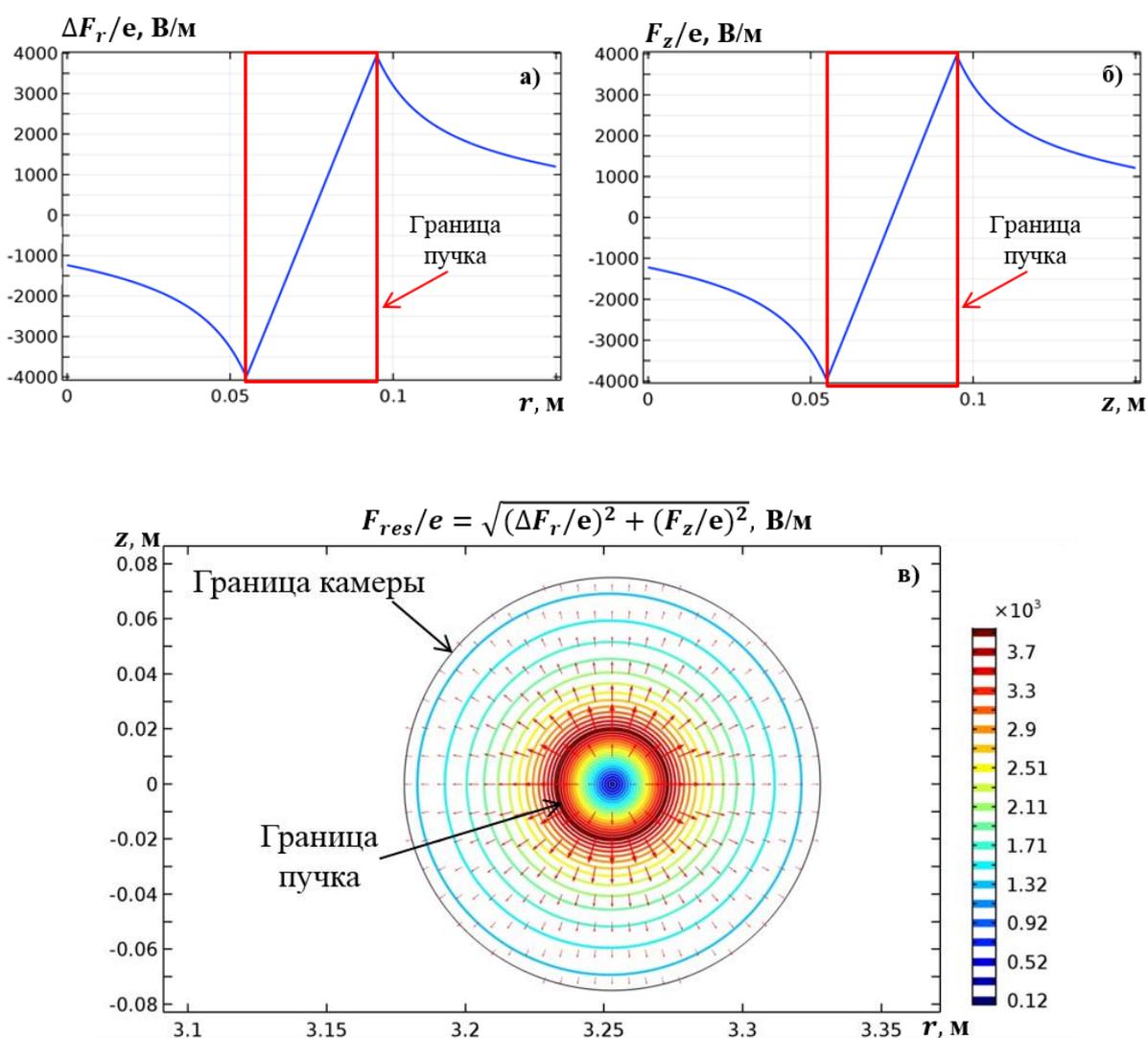


Рисунок 5. Распределение сил  $\Delta F_r$  и  $F_z$  в поперечном сечении трубы дрейфа: (а) – зависимость  $\Delta F_r$  от  $r$  при  $z = 0$  м ; (б) -  $F_z$  от  $z$  при  $r = 3.253$  м, (в)-изолинии силы  $\sqrt{\Delta F_r^2 + F_z^2}$

Кроме того, численно показано, что для электронного пучка с равномерным распределением плотности тока и заряда, имеющего радиус сечения  $r_b = 0.02\text{см}$ , ток пучка  $I_b = 2\text{кА}$  и энергию электронов  $\mathcal{E}_b = 20\text{МэВ}$ , при повороте в тороидальной камере с  $R = 3.253\text{ м}$ ,  $r_t = 0.075\text{ м}$  в условиях внешнего однородного аксиального магнитного поля  $B_e = 0.025\text{ Тл}$  величины сил  $\Delta F_r$  и  $F_z$  практически совпадают с силой расталкивания электронов пучка, деленной на  $\gamma^2$ :

$$\Delta F_r = e \left( E_r + \frac{v_\theta}{c} B_z - \frac{v_\theta}{c} B_e \right) - e E_r^{cur} \approx \frac{e E_{br}}{\gamma^2} \quad (1.14)$$

$$F_z = e \left( E_z - \frac{v_\theta}{c} B_r \right) \approx \frac{e E_{bz}}{\gamma^2} \quad (1.15)$$

Относительная погрешность приближенного равенства правых и левых частей этих выражений определяется отношением малого радиуса тороидальной камеры к большому, то есть  $\sim \frac{r_t}{R}$ , что в нашем случае составляет величину масштаба 1%.

Таким образом, из всего вышесказанного следует два важных утверждения: во-первых, при правильном соотношении величины однородного аксиального магнитного поля и большого радиуса тороидальной камеры, сечение пучка вращается как целое и не смещается относительно центральной оси камеры, а, во-вторых, силы расталкивания электронов пучка приводят к его равномерному расплыванию по сечению со скоростью в  $\gamma^2$  меньшей, чем для нерелятивистского пучка.

### 1.5. 3D-расчет магнитного поля поворотного элемента

Следующим шагом моей работы стало проведение трехмерного моделирования магнитного поля поворотного элемента. Для этого мною был также использован пакет COMSOL Multiphysics. Постановка задачи включала в себя построение геометрии магнита близкой к реальной (см. Рис.2) и задание кривой намагничивания ярма, изготовленного из

магнитомягкой стали (сталь-10). Согласно классификации магнитных материалов главное свойство магнитомягких сталей заключается в том, что они эффективно концентрируют магнитный поток, но не обладают остаточной намагниченностью. Решение осуществлялось с помощью модуля Magnetic Fields и решателя Coil Geometry Analysis, позволяющего рассчитывать стационарные поля магнита. На границах расчетной области задавались граничные условия на векторный магнитный потенциал  $\vec{n} \times \vec{A} = 0$ , которое эквивалентно равенству нулю нормальной компоненты индукции магнитного поля. При сеточном разбиении расчетной области характерные размеры ячейки в области ярма магнита и пространства между его полюсами не превышали  $\delta l_{yoke} = 0.002$  м,  $\delta l_{vac} = 0.003$  м, соответственно. Ток в катушках задавался равным  $I_{coil} = 183$  А (при эффективном представлении катушки в виде 10 витков провода, и 1830 А при представлении в виде единого проводника).

На Рис.6 приведено рассчитанное распределение компоненты индукции магнитного поля  $B_y$  на линии пересечения плоскостей симметрии магнита.

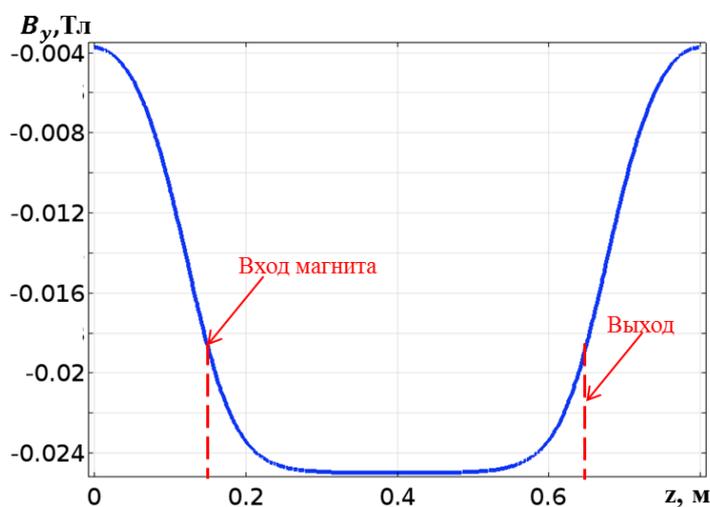


Рисунок 6. Распределение магнитного поля на центральной оси магнита

Согласно графику, величина  $B_y$  плавно нарастает от нуля в области перед входом в магнит до значения  $B_y = 0.025$  Тл в центральной части магнита, где она практически постоянна на размере 0.2 м.

Переходя к вопросу моделирования транспортировки пучка в трубе дрейфа внутри области поворотного магнита, следует отметить, что нами была использована программа CST Particle Studio, позволяющая учесть эффекты пространственного заряда. Рассчитанные распределения компонент магнитной индукции в пространстве внутри магнита экспортировались в файл, который считывался в программе CST Particle Studio. Причины выполнения расчетов полей поворотного магнита именно в программе COMSOL, а не в CST связаны с экономией времени и большей точностью расчета полей при тех же размерах ячеек сетки. Предварительно для оценки ограничений и точности расчета алгоритмов CST Particle Studio мы провели тестовый расчет по моделированию расплывания круглого однородного пучка в цилиндрической трубе дрейфа в отсутствие внешних магнитных полей и сравнили результаты с предсказаниями аналитической модели, которые представлены ниже.

#### **1.6. Аналитическая модель транспортировки интенсивного пучка без магнитного поля**

Рассмотрим аналитическое решение аксиально-симметричной задачи о распространении однородного электронного пучка круглого сечения в соосной с ним цилиндрической трубе дрейфа в отсутствие внешних магнитных полей. При этом мы будем предполагать выполнение параксиального приближения, для чего необходимо выполнить условие  $\frac{I}{mc^3/e} \cdot \frac{1}{\gamma^3 \beta_z^3} \ll 1$ , которое получим ниже. В этом приближении, несмотря на то, что пучок постепенно увеличивает свой радиус по мере распространения в трубе дрейфа, локально с хорошей точностью можно считать форму сечения пучка цилиндрической, что значительно упрощает нахождение собственных электрических и магнитных полей пучка. Также предполагаем, что пучок незначительно приближается своей границей к стенке камеры по мере распространения внутри трубы дрейфа. Данное

предположение необходимо для того, чтобы не учитывать изменение гамма-фактора и продольной скорости электронов по мере его движения. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ , в которой электроны пучка с круглым сечением распространяются с левого торца геометрии задачи вдоль продольной оси  $Z$  с одинаковой скоростью  $\bar{v}_{beam} = (0, 0, v_z)$ , схема представлена на Рис. 7(а).

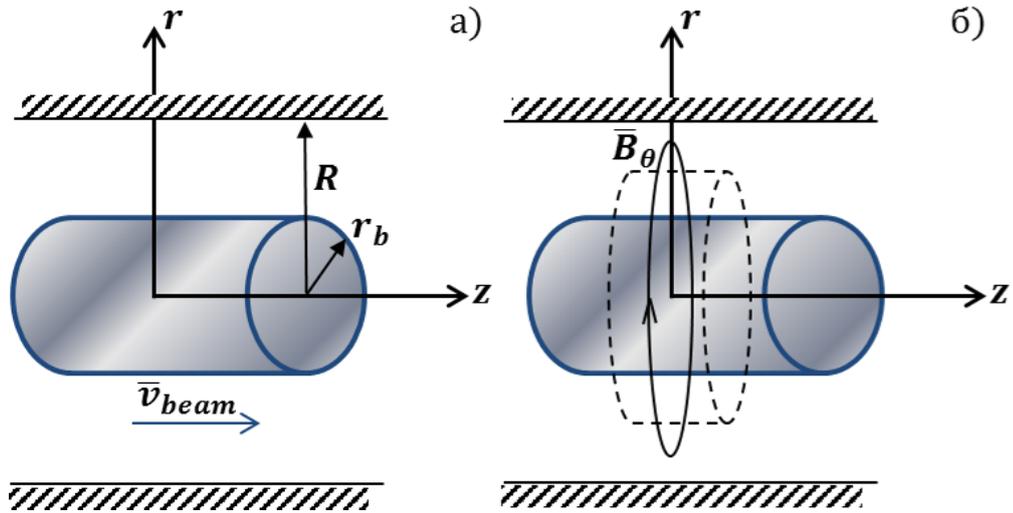


Рисунок 7. Схема транспортировки интенсивного пучка без ведущего магнитного поля

Поскольку поставленная задача аксиально-симметрична, следовательно, сохраняется  $\theta$  компонента обобщенного импульса. Согласно теореме Буша, исходя из азимутальной симметрии в распределении плотности тока и отсутствия начальной компоненты скорости частиц в направлении  $\theta$ , должна сохраняться угловая скорость вращения электрона  $\dot{\theta}$  в течение всего времени движения, а при старте она равнялась нулю. Таким образом, запишем уравнение изменения импульса электрона в радиальном направлении:

$$\dot{P}_r = eE_r + \frac{e}{c} [\bar{v}_{beam} \times \bar{B}]_r = e(E_r - \frac{v_z B_\theta}{c}) \quad (1.16)$$

Рассмотрим трубку тока (или пучок) круглого сечения с начальным радиусом  $r_0$  в плоскости  $z = 0$  и радиусом  $r$  – в плоскости  $z \neq 0$ . Обозначим ток трубки тока –  $I$ , а заряд на единицу длины –  $\kappa$ . Тогда

радиальное электрическое поле, создаваемое цилиндром длины  $l$  с зарядом  $\kappa$  на единицу длины, определяется по теореме Гаусса (поток через поверхность цилиндра единичной длины, показанную пунктиром на Рис.7 (б)):

$$E_r \cdot 2\pi r l = 4\pi \kappa l \Rightarrow E_r = \frac{2\kappa}{r} \quad (1.17)$$

Согласно закону Био-Савара-Лапласа определяется магнитное поле, создаваемое прямым проводником с током  $I$ :

$$\oint B dl = \frac{4\pi I}{c} \Rightarrow B_\theta = \frac{2I}{cr} \quad (1.18)$$

За единицу времени через поперечное сечение цилиндра протекает ток:

$$\kappa v_z dt = I dt \Rightarrow \kappa = \frac{I}{v_z} \quad (1.19)$$

Подставляя выражения (1.17-1.19) в (1.16) в параксиальном приближении получим следующее дифференциальное уравнение движения релятивистского электрона с массой  $m$  и гамма-фактором  $\gamma$ :

$$\dot{P}_r = \frac{2e}{r} \left( \kappa - \frac{v_z I}{c} \right) \Rightarrow \gamma m \dot{r} = \frac{2eI}{v_z r} \cdot \frac{1}{\gamma^2} \quad (1.20)$$

Домножая на  $\frac{1}{v_z^2}$  левую и правую части уравнения (1.20), преобразуем его к дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{2eI}{mr} \cdot \frac{1}{\gamma^3 v_z^3} \quad (1.21)$$

Решая данное уравнение с граничным условием  $\frac{dr}{dz} = v_r = 0$  при  $z, t = 0$ , получаем формулу, определяющую зависимость изменения радиуса токовой трубки при распространении вдоль трубы дрейфа:

$$\int_1^{r(z)/r_0} \frac{d(r/r_0)}{\sqrt{\ln(r/r_0)}} = \sqrt{\frac{4eI}{m\gamma^3 v_z^3}} \frac{z}{r_0} = \sqrt{\frac{4\pi e j}{m\gamma^3 v_z^3}} z \quad (1.22)$$

где  $j$  - исходная плотность тока пучка. Предполагая, что токовая трубка расширяется в 2 раза, можем найти расстояние  $Z$ , при котором это произойдет в виде упрощенной формулы:

$$z_{(2r_0)} \approx \frac{r_0}{\sqrt{\frac{I[\text{кА}]}{17 [\text{кА}]} \cdot \frac{1}{\gamma^3 \beta_z^3}}} \quad (1.23)$$

Как видно из этой формулы используемое нами параксиальное приближение верно, если выражение, стоящее под корнем в (1.23) существенно меньше единицы. Из уравнения (1.22) следует вывод, что отношение  $r/r_0$  для токовой трубки с любым начальным радиусом зависит только от параметров исходного пучка и координаты  $z$ :

$$\frac{r}{r_0} = f(z). \quad (1.24)$$

Следовательно, каждая трубка тока пучка с ростом  $z$  увеличивается в размерах пропорционально  $r_0$  с одним и тем же коэффициентом. Дифференцируя по  $z$  (1.24) можно получить, что  $\frac{dr}{dz} = r \frac{d}{dz} \ln f(z)$ , откуда следует, что  $x' = \frac{dr}{dz} \cos(\theta) = r \cos(\theta) \frac{d}{dz} \ln f(z) = x \frac{d}{dz} \ln f(z)$ . Таким образом, для любой точки в сечении пучка зависимость  $x'(x)$  должна быть линейна, а проекция поперечного фазового объема пучка на плоскость  $(x, x')$  должна быть прямой линией. По этой причине эмиттансы пучка  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  в такой задаче должны быть точно равны нулю.

В самом моделировании рассматривалась задача транспортировки пучка, стартующего из равновесного состояния с учетом провисания потенциала, обусловленного пространственным зарядом пучка. Более подробно о стартовых условиях задачи будет написано в следующем разделе, а пока поясню, чем обусловлен интерес к построению данной тестовой модели.

Во-первых, было необходимо убедиться в правильности постановки задачи в пакете CST, то есть нужно было провести верификацию результатов расчетов с аналитической оценкой из теоретической модели по уравнению (1.22). Подставив параметры нашего пучка ( $r_0 = 2$  см,  $I = 2$  кА,  $\gamma = 39.767$ ,  $v_z \approx 3 \cdot 10^8$  м/с), получаем, что на длине  $l = 2.4$  м исходный радиус пучка увеличивается на 10%, в то время как в CST данный радиус увеличивается на 9.6 %, а это означает, что относительная погрешность расчета геометрических параметров пучка ( $\Delta r_b / r_b$ ) составляет не более 0.4%.

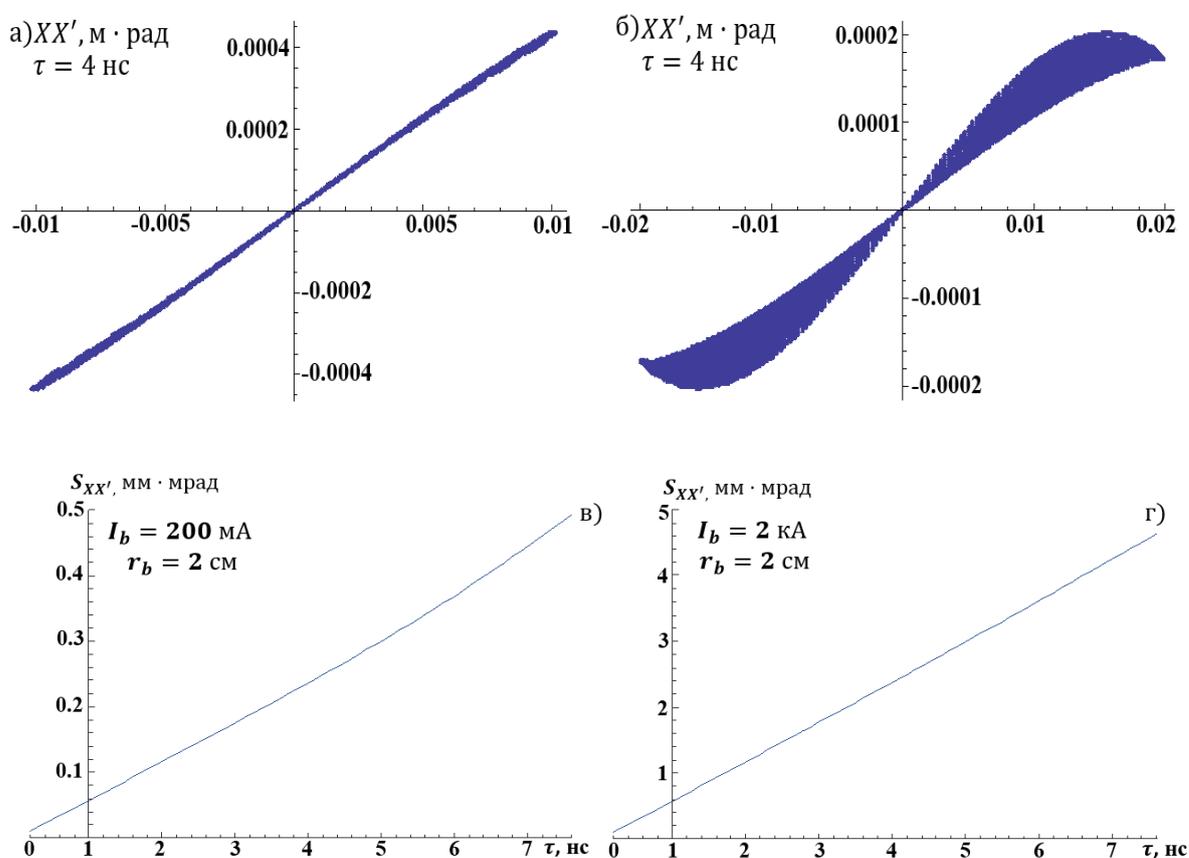


Рисунок 8. Распределения частиц пучка в фазовой плоскости - (верх) и зависимости площади фазового портрета от времени движения электрона - (низ); при малом токе пучка  $I_b = 200$  мА (а,в) и при токе  $I_b = 2$  кА (б,г)

Во-вторых, было важно понять какой уровень счетной погрешности в определении величины эмиттанса набирается в моделировании в течение

времени движения пучка на расстояния, сопоставимые с длиной траектории пучка в поворотном элементе ( $\sim 2$  м). Результаты расчета, характеризующие распределение электронов пучка в фазовом пространстве, представлены на Рис. 8. Как видно из Рис. 8 (а), при малом токе пучка  $I_b = 200$  мА зависимость  $x'(x)$  действительно близка к линейной с малыми отклонениями от нее, однако при увеличении тока до 2 кА происходит «рассыпание частиц» в окрестности этой линии, а также имеет место деформация ее формы.

Также на Рис.8 (в,г) приведена характерная зависимость эмиттанса пучка в терминах площади фазового портрета  $XX'$ . Как видно из него, в обоих случаях величина  $S_{XX'}$  линейно нарастает со временем движения электрона, что дает нам информацию об уровне флуктуаций расчетных полей в пакете CST. В случае транспортировки пучка с малым током набор эмиттанса к моменту времени  $\tau = 4$  нс (за это же время пучок проходит к выходу из поворотного элемента) составляет относительно малую величину  $S_{XX'} \approx 0.2$  мм·мрад. В случае с большим током эта величина достигает уже существенного значения  $S_{XX'} \approx 2$  мм·мрад.

### **1.7. 3D-модель транспортировки пучка в поворотном элементе с учетом собственного заряда**

Проделанные выше расчеты позволили перейти к более серьезной задаче: исследованию динамики эмиттанса пучка в поле поворотного элемента. Как известно, пакет CST Studio Suite (Tracking-solver) позволяет решать методом трубок тока стационарные трехмерные задачи распространения пучков заряженных частиц в полостях с проводящими стенками с учетом собственных электрических и магнитных полей пучка. Однако тут стоит отметить, что для корректной постановки задачи требуется соблюсти несколько важных моментов. Прежде всего, нужно

задать те самые условия старта частиц как из равновесного состояния пучка, о которых я упомянул в предыдущем разделе.

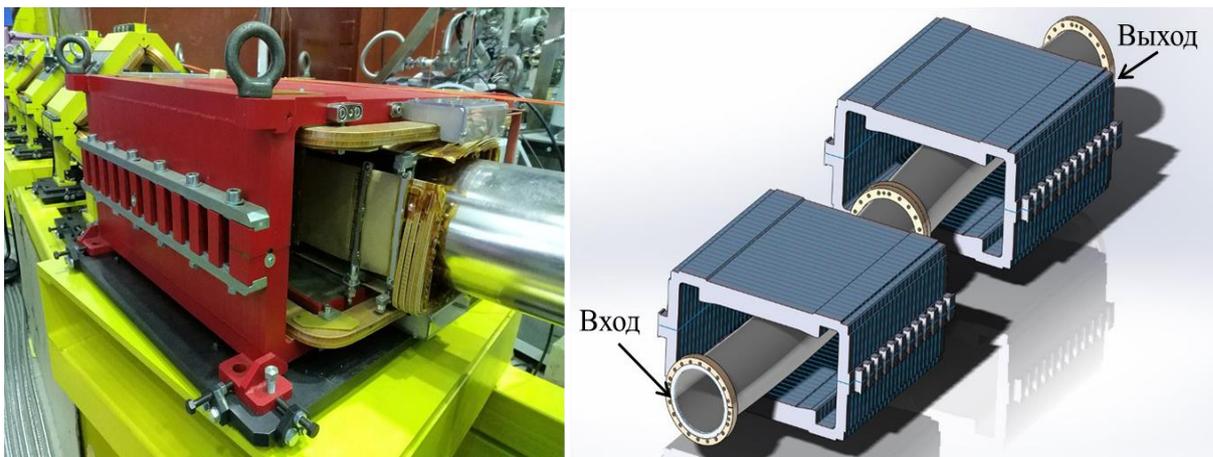


Рисунок 9. Фото дипольного магнита (слева) и схема расположения двух поворотных элементов противоположной полярности (справа), катушки самого магнита и квадрупольной обмотки не показаны

Иными словами, нужно задать такие граничные условия, которые бы не возмущали траектории и эмиттанс пучка на старте. Для этого были использованы так называемые условия «мягкого старта» частиц с торца трубы или со стенки параллелепипеда расчетной области, как показано на Рис.9. При таком условии частицы стартуют перпендикулярно торцу трубы дрейфа с заданными значениями продольной скорости и гамма-фактора, найденными из равновесного распределения потенциала в трубе с учетом объемного заряда электронов цилиндрического пучка. При этом на электрические и магнитные поля в стартовой плоскости накладываются следующие граничные условия:  $E_n = 0$  и  $B_n = 0$ .

Равновесное распределение потенциала находилось из уравнения непрерывности для заряда и уравнения Пуассона в параксиальном приближении, когда можно пренебречь  $j_r$  по сравнению с  $j_z$ , а также  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  по сравнению с  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$  [13]. Условия выполнения параксиального приближения обсуждались в параграфе 1.6.

Первое уравнение позволяет найти плотность заряда в пучке:

$$j_z = const = \rho v_z = \rho c \sqrt{1 - 1/\gamma(r)^2} \quad (1.25)$$

А второе определяет потенциал внутри пучка -  $\varphi_I$  и вне его -  $\varphi_{II}$  через уравнения Пуассона и Лапласа:

$$0 < r \leq r_b: \quad \Delta\varphi_I = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_I}{dr} \right) = - \frac{4\pi j_z}{c \sqrt{1 - 1/\gamma(r)^2}} \quad (1.26)$$

$$r_b < r \leq R: \quad \Delta\varphi_{II} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{II}}{dr} \right) = 0 \quad (1.27)$$

$$\text{Закон сохранения энергии:} \quad \gamma(r) = \gamma_0 + \frac{|e|\varphi}{mc^2} \quad (1.28)$$

$\gamma_0$  – значение гамма фактора на коллекторе пучка,  $\gamma(r)$  – распределение гамма-фактора в поперечном сечении пучка. Определим величины  $\gamma^*$  и  $\varphi^*$  как гамма-фактор и потенциал на оси пучка соответственно.

Таким образом, через условия непрерывности радиальной компоненты электрического поля и равенства нулю потенциала на стенке камеры, мы получаем ряд граничных условий для системы уравнений (1.26) и (1.27) (на границе трубы дрейфа, сшивку потенциалов на границе пучка):

$$\varphi_{II}(R) = 0 \quad (1.29)$$

$$\varphi_I(r_b) = \varphi_{II}(r_b) \text{ и } \varphi_I'(r_b) = \varphi_{II}'(r_b) \quad (1.30)$$

$$\varphi_I(0) = \varphi^* \text{ и } \varphi_I'(0) = 0 \quad (1.31)$$

Полученные решения уравнений (1.26) и (1.27) в общем виде выглядят следующим образом:

$$\varphi_I = Dr^2 + C_1 \ln r + C_2, D = - \frac{\pi j_z}{c \sqrt{1 - 1/\gamma^2}} \quad (1.32)$$

$$\varphi_{II} = C_3 \ln r + C_4 \quad (1.33)$$

Из граничного условия (1.31)  $C_1 = 0$  и  $C_2 = \varphi^*$ . Тогда решение для I области запишется так:

$$\varphi_I = Dr^2 + \varphi^* \quad (1.34)$$

Условие (1.29) позволяет найти константу  $C_4$ , а условия (1.30) на сшивку потенциалов определяют взаимосвязь  $\varphi^*$  и константы  $D$ :

$$\varphi^* = Dr_b^2 \left( 2 \ln \left( \frac{r_b}{R} \right) - 1 \right) \quad (1.35)$$

Подставляя полученные уравнения в закон сохранения энергии для электрона и пользуясь определением тока пучка  $I_b = \pi r_b^2 j_z$ , получаем уравнение, определяющее характерное распределение гамма-фактора в поперечном сечении пучка:

$$\gamma(r) = \gamma_0 - \frac{I_b}{I_A \sqrt{1 - 1/\gamma^{*2}}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_b} \right)^2 + 2 \ln \left( \frac{R}{r_b} \right) \right] \quad (1.36)$$

Поскольку в нашем случае ток пучка мал по сравнению с предельным вакуумным током, а следовательно, изменение энергии электрона от центра пучка к его границе мало по сравнению с кинетической энергией электронов, то для ультрарелятивистского пучка величиной  $1/\gamma^{*2}$  в (1.36) можно пренебречь в сравнении с единицей.

Данное распределение  $\gamma(r)$  приводит к тому, что продольная скорость электронов в поперечном сечении пучка также становится профилированной согласно уравнению и легко находится по формуле:

$$v(r) = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(r)^2}} \quad (1.37)$$

Провисание потенциала можно найти по простой формуле:

$$\varphi[kV] = (\gamma(r) - \gamma_0) \cdot 511[keV] \quad (1.38)$$

На Рис.10 представлены распределения гамма-фактора и относительного отличия скорости электрона от скорости света для параметров пучка, инжектируемого в условиях «мягкого старта» в трехмерном моделировании:  $I_b = 2$  кА,  $r_b = 2$  см,  $\mathcal{E}_b = 20$  МэВ. При этих параметрах разность потенциалов в центре пучка и на его границе составляет около 60 кВ.

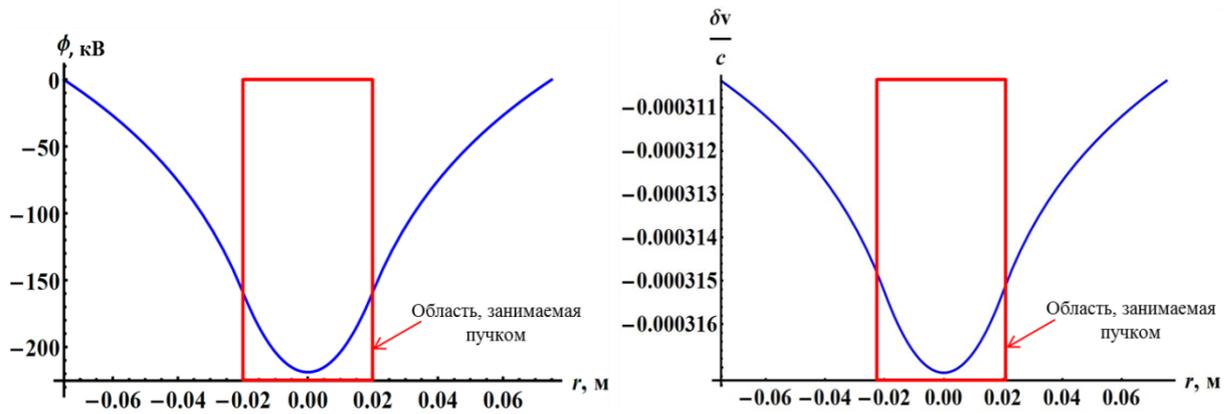


Рисунок 10. Распределения гамма-фактора и скорости частиц пучка

Второй момент, которому стоит уделить внимание, это корректные условия выхода пучка из расчетной области. Поскольку в программе CST расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед, на боковых гранях которого задаются граничные условия на нормальные или тангенциальные компоненты электрических и магнитных полей, то необходимо осуществить вывод пучка из расчетной области таким образом, чтобы траектории электронов были ортогональны одной из граней параллелепипеда. Для этого в моделировании был введен дополнительный поворотный элемент противоположной полярности (см. Рис. 9). Таким образом, граничные условия и дискретизация сетки в моделировании были взяты следующие:  $E_n = B_n = 0$  – на гранях параллелепипеда, где входят и выходят траектории пучка;  $E_\tau = B_\tau = 0$  – на остальных гранях расчетной области,  $\delta l = 0.004$  м – характерный размер разбиения сетки.

### 1.8. Результаты и обсуждения трехмерного моделирования

Для того, чтобы понять какой именно вклад в эмиттанс вносят нелинейность самого магнита (эффекты краевых полей) и переходные процессы в транспортировке пучка в области входа и выхода из поворотного элемента, мною было проведен расчет траекторий пучка с малым током ( $I_b = 200$  мА,  $r_b = 2$  см), то есть в отсутствие влияния

пространственного заряда. Данный расчет проводился двумя способами: первый – это расчет трассировки пучка в CST и второй – это расчет в программе собственного написания (среда Wolfram Mathematica), которая численно решает уравнения движения частиц в импортированных из COMSOL полях с помощью метода предиктор-корректор Адамса. В этом методе на первой итерации предиктор рассчитывает грубое приближение требуемой величины, а на втором шаге начальное приближение корректируется. Этот метод обладает большей устойчивостью по сравнению с алгоритмами Рунге-Кутты.

В результате проведенного моделирования были получены траектории движения электронов, формы сечения пучка и зависимость площади пучка в фазовом пространстве в зависимости от времени движения электрона по опорной траектории, начиная от момента его старта. Наибольший интерес для нас представляет момент времени  $\tau = 4$  нс, соответствующий моменту выхода пучка из первого поворотного элемента, это место отмечено синей линией на Рис.11.

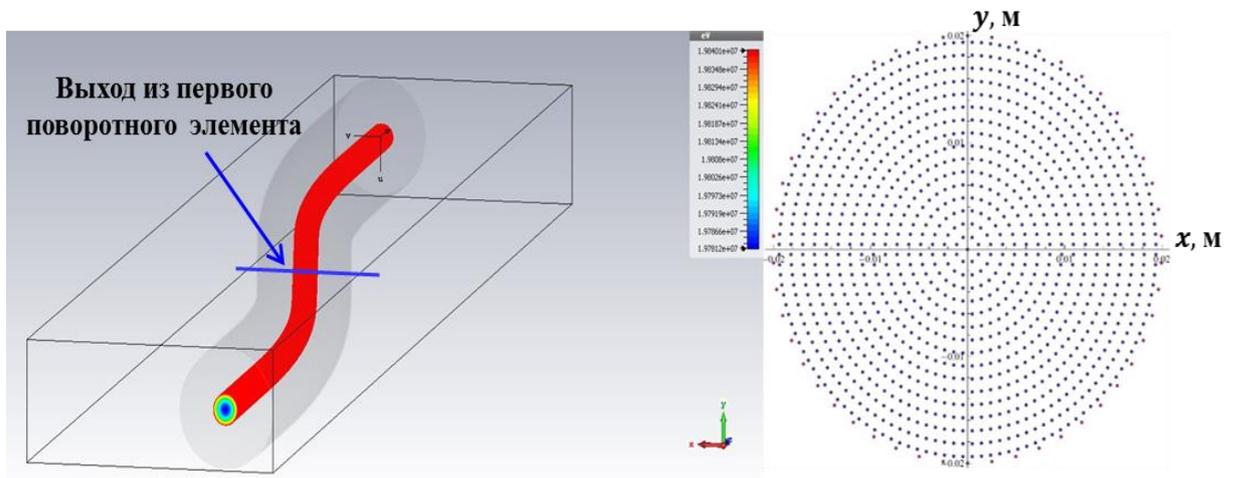
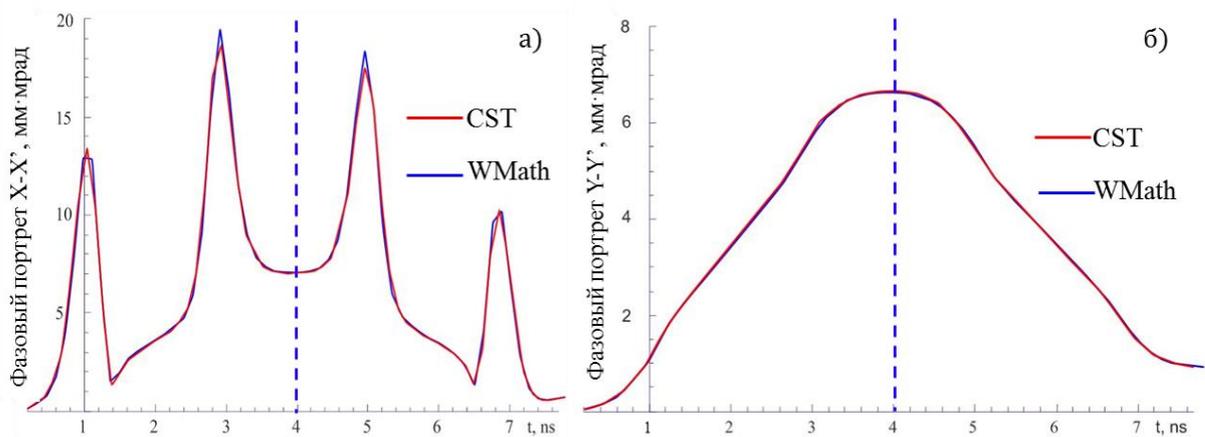


Рисунок 11. Траектории движения частиц в CST при малом токе  $I_b = 200$  мА и форма пучка на выходе из первого поворотного элемента.

Как видно из этого рисунка, цветовая индикация демонстрирует некоторый рост кинетической энергии от центра к краю пучка даже в случае малого тока, поскольку начальные скорости электронов были

выбраны в условиях «мягкого» старта в соответствие с результатами предыдущего раздела. На Рис. 11 справа приведено сечение пучка с малым током после поворотного магнита. Как показали расчеты, форма сечения пучка остается практически неизменной в течение всего времени движения пучка от входа до выхода из первого магнита.

Сопоставление результатов моделирования для зависимости эмиттанта от времени с помощью пакета CST и собственной программы показало их хорошее согласие в случае пучка с малым током (см. Рис.12). Из данных графиков следует, что пучок с малым током при прохождении поворотного элемента приобретает характерные величины  $S_{XX'} = S_{YY'} = 7 \text{ мм} \cdot \text{мрад}$ .



*Рисунок 12. Эмиттанс в терминах площади фазового портрета пучка: (а)- в плоскости  $XX'$ , (б)- в плоскости  $YY'$ , пунктиром показан момент выхода из поворотного элемента*

Второй расчет производился с помощью CST для сильноточного пучка со следующими параметрами:  $I_b = 2 \text{ кА}$ ,  $r_b = 2 \text{ см}$ ,  $\mathcal{E}_b = 20 \text{ МэВ}$ , число трубок тока  $N = 10609$ . Полученные траектории частиц и сечение пучка приведены на Рис.13. Эволюция формы сечения пучка в ходе его транспортировки демонстрирует небольшую деформацию пучка: сжатие в вертикальном и растяжение в горизонтальном направлении величиной ( $\sim 5\%$ ), обусловленные квадрупольным воздействием магнита и собственных полей пучка.

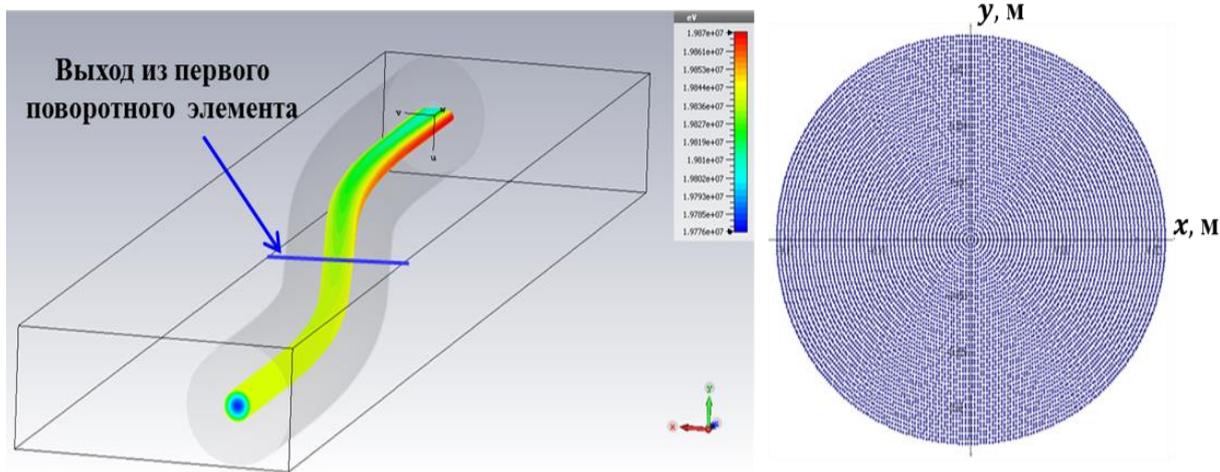


Рисунок 13. Траектории движения частиц в CST для тока  $I_b = 2$  кА, а также форма пучка на выходе из первого поворотного элемента.

В соответствии с результатами расчета, сечение пучка после первого магнита имело сечение, близкое к эллипсу с полуосями  $21.5 \times 19$  мм, а после второго магнита -  $27 \times 12$  мм. На Рис. 14 приведены распределения частиц в фазовых плоскостях  $XX'$  и  $YY'$ , что подтверждает сжатие сечения пучка в вертикальном направлении  $Y$  и растяжение в горизонтальном  $X$ .

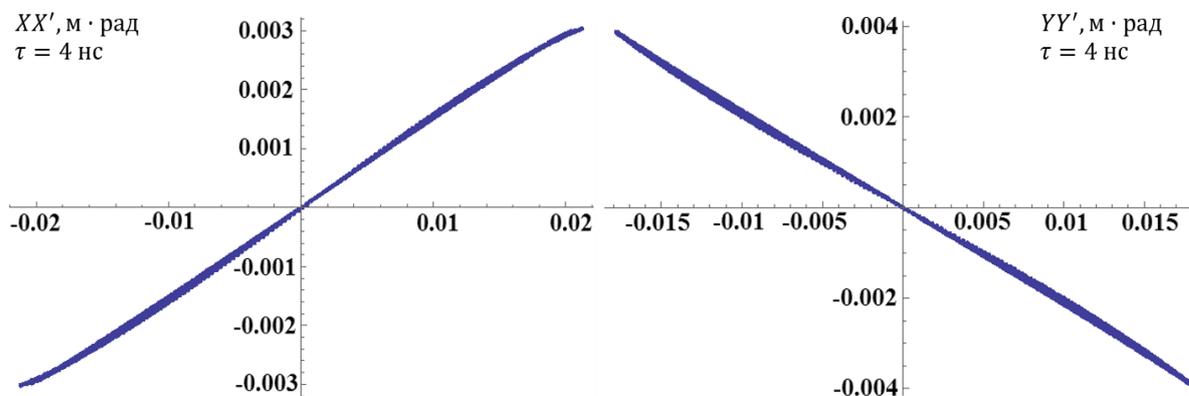


Рисунок 14. Распределения частиц в фазовой плоскости при  $I_b = 2$  кА

Что же касается величины площади пучка в фазовом пространстве, то она имеет характерную зависимость, приведенную на Рис.15. Площадь фазового портрета после первого поворота составляет  $S_{XX'} \approx 5$  мм·град и  $S_{YY'} \approx 4$  мм·град.

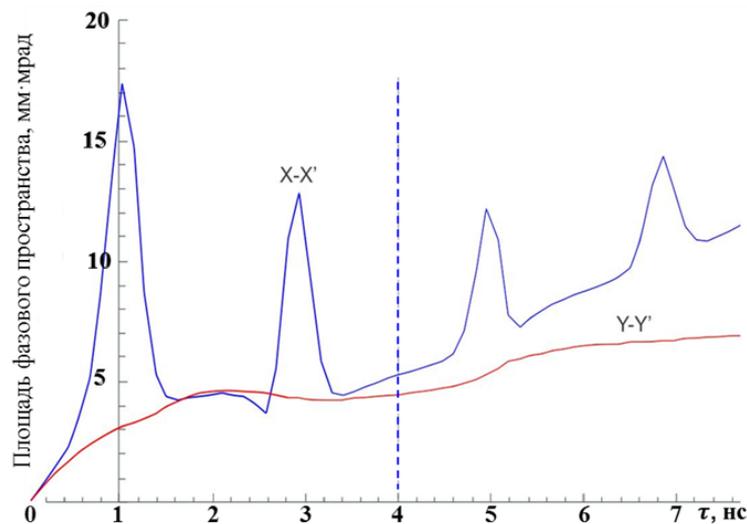


Рисунок 15. Площади пучка в фазовом пространстве при  $I_b = 2$  кА: синим цветом показана  $S_{X-X'}$  и красным -  $S_{Y-Y'}$ , пунктиром – момент времени выхода из первого поворотного элемента.

Данный график имеет две ключевые особенности: первая - это наличие ярко выраженных пиков большой амплитуды на входе и выходе магнита, что обусловлено действием именно краевых полей магнита, поскольку этот эффект проявляется аналогичным образом и для пучка с малым током. Вторая особенность заключается в том, что помимо пиков на входе и выходе обоих магнитов есть еще и монотонное нарастание эмиттанса. Это нарастание аналогично поведению эмиттанса, полученному в расчетах транспортировки пучка с током 2 кА в прямой трубе без внешних магнитных полей (см п. 1.6, Рис. 8), которое было вызвано флуктуацией рассчитываемых собственных полей пучка. Было проверено, что скорость роста можно уменьшить путем уменьшения шага дискретизации задачи, однако это приводит к существенному повышению требований к ресурсам системы (оперативной памяти), на которой производится расчет, а так же к увеличению длительности счета задачи.

Другим важным фактом, замеченным в расчетах, было восьмикратное уменьшение эмиттанса пучка с тем же током на выходе из первого магнита при уменьшении исходного радиуса пучка в два раза. Очевидно, что такое

уменьшение связано со спадом влияния аббераций магнита пропорционально  $\sim r^3$ .

Также интересным фактом является и то, что величина площади пучка в фазовом пространстве после первого магнита для тока 2 кА несколько меньше, чем это было получено для пучка с малым током (200 мА). Это означает, что флуктуации расчетных электрических и магнитных полей в CST имеют стохастический характер и могут приводить как к повышению, так и к понижению значения конечного эмиттанса, набираемого пучком в поворотном элементе магнитной системы ускорителя.

Такой непредсказуемый характер воздействия расчетного шума полей в CST на эмиттанс, приводит к необходимости исключения этого эффекта в расчетах. Далее, опираясь на то, что из расчетов в CST нам известны форма пучка, а также факт постоянства плотности тока по его сечению, мною была построена модель однородно заряженного изогнутого цилиндра с постоянными плотностью заряда и тока, форма модельной поверхности которого выбиралась максимально близкой к форме огибающих электронного пучка, посчитанных в CST.

Таким образом, на первом шаге данной модели после построения геометрии тела, замещающего пучок, в пакете COMSOL в модуле EM-Static Solver производился расчет электрического и магнитного полей от этого тела в предположении, что по нему равномерно течет ток  $I_b = 2$  кА и оно заряжено плотностью заряда  $\rho = \frac{I_b}{\pi r_b^2 v_z}$ . После экспорта данных с собственными полями пучка и полей магнита из COMSOL в свою программу, производился расчет траекторий тестовых частиц. Далее из зависимостей координат и импульсов частиц от времени находились проекции поперечного фазового пространства на плоскости  $XX'$  и  $YY'$ , представленные на Рис. 16.

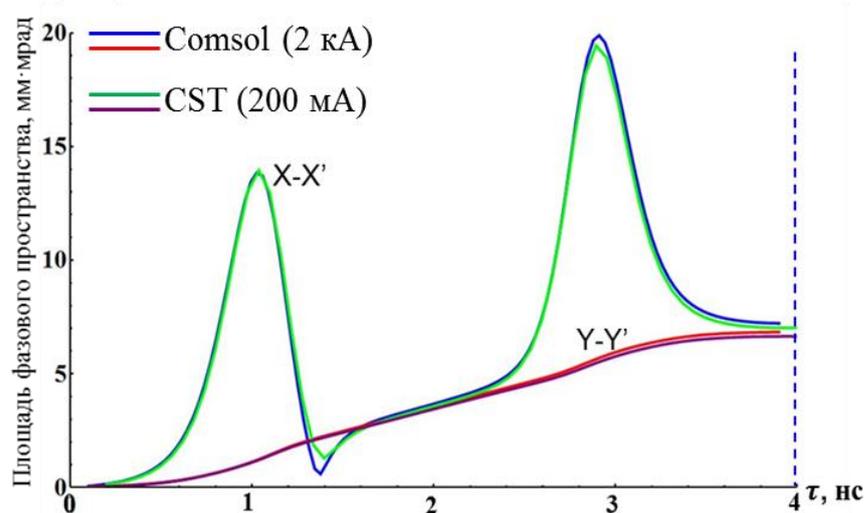


Рисунок 16. Сопоставление результатов расчетов площади пучка в фазовом пространстве в CST и COMSOL

Следует отметить, что данный способ расчета эмиттанса имеет недостаток, который состоит в неточности совпадения формы пучка и замещающего его тела (точность совпадения  $<1$  мм), поскольку сечение пучка незначительно отличается от круглого (деформации из-за аббераций магнита), и пучок поворачивает в магнитном поле магнита не точно по окружности постоянного радиуса. По итогу расчета эмиттанса таким способом нами был получен удивительный результат (см. Рис.16). Оказывается, что эмиттанс ультрарелятивистского пучка, посчитанный с помощью его замещения изогнутым цилиндром с равномерными плотностью тока и заряда, совпадает с эмиттансом пучка с малым током с точностью  $\approx 1 \div 2$  %, что говорит о выполнении теории Ли-Чена для реального поворотного элемента. При этом величины фазовых портретов равны  $S_{XX'} = S_{YY'} = 7$  мм·мрад.

Оценим величину эмиттанса, который получит пучок при отклонении на суммарный угол масштаба  $90^\circ$ , то есть при прохождении через 8 поворотных элементов. При требовании получить на мишени пятно с радиусом  $r = 0.5$  мм и фокальным расстоянием финальной магнитной линзы  $F = 200$  мм, величина угловой расходимости электронов пучка не должна

превышать  $\Delta\theta = \frac{r}{F} = 2.5$  мрад. Тогда характерная площадь в фазовом пространстве такого пучка должна быть меньше, чем  $\pi r_b \Delta\theta \sim 100$  мм·мрад.

Согласно приведенным выше значениям, добавка в площади фазового портрета 7 мм·мрад на один магнит, увеличивает этот параметр пучка при прохождении  $\sim 8$  магнитов до уровня, сопоставимого с ограничением в 100 мм·мрад. По этой причине с целью уменьшить набор эмиттанса в отдельно взятом поворотном элементе мною была проведена оптимизация геометрических размеров используемых в них магнитов.

На Рис.17 приведены результаты моделирования транспортировки пучка с малым током  $I_b = 200$  мА в модифицированном магните, поочередно расширенном в два раза вдоль осей X и Y, соответственно.

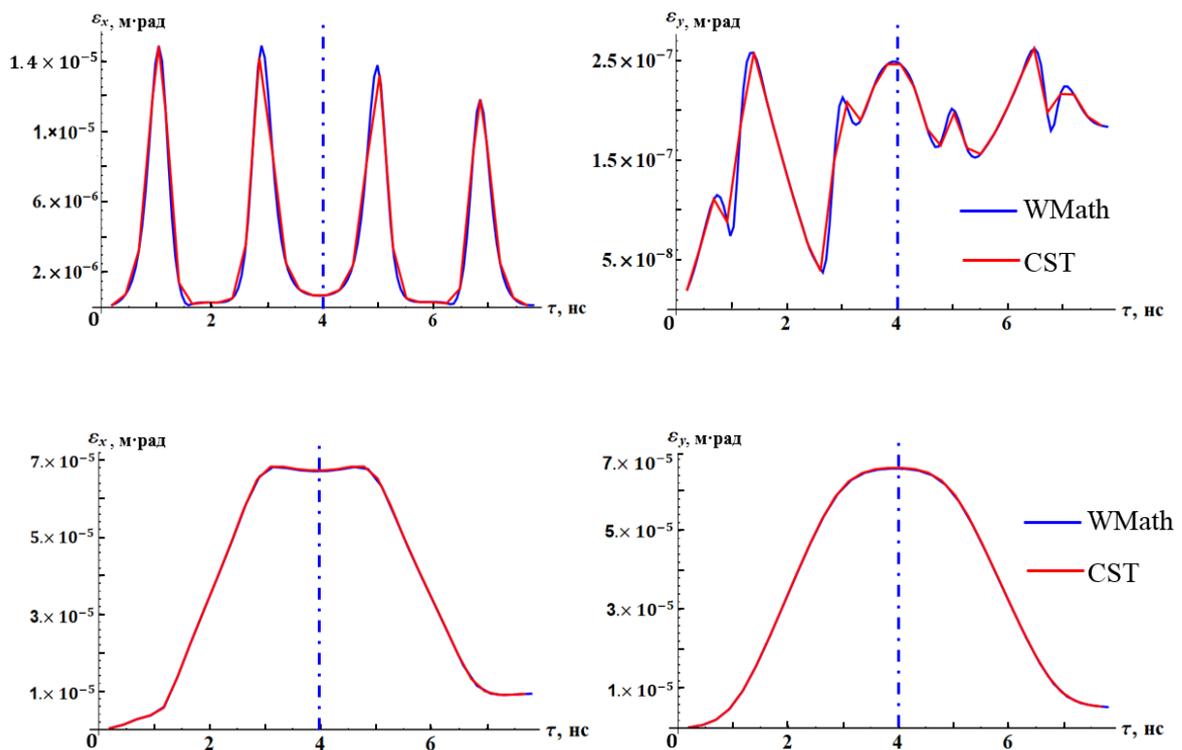


Рисунок 17. Фазовый портрет пучка для оптимизированных магнитов:  
(а,б)-расширенный в два раза по оси X; (в,г)- по оси Y

Согласно расчетам эмиттанс пучка уменьшился в  $7 \div 8$  раз до значения в 1 мм·мрад при расширении магнита в направлении оси X, лежащей в

медианной плоскости пучка. А при расширении магнита в направлении оси  $Y$ , этот параметр увеличился на порядок.

## Глава 2. Набор эмиттанса в магнитном кикере системы разводки пучка ЛИУ.

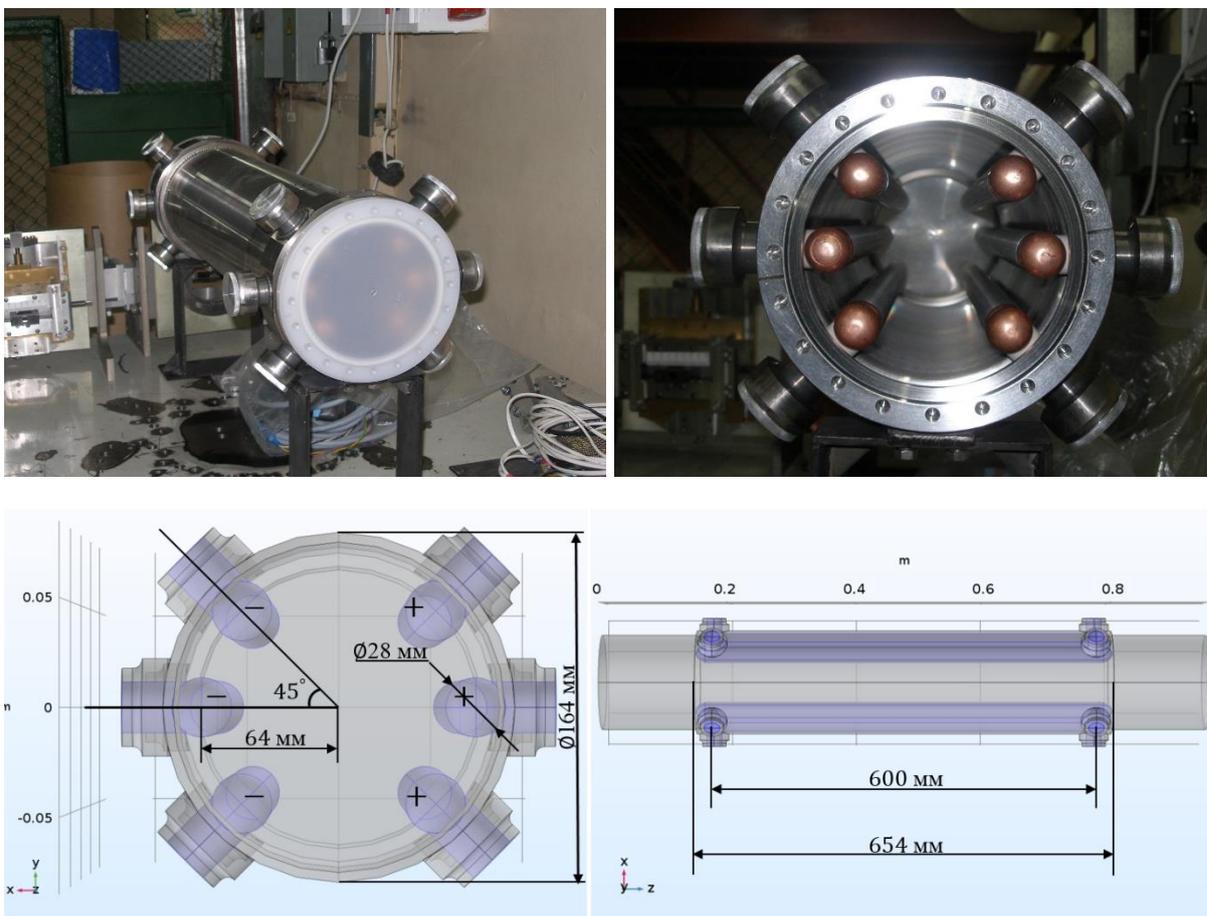
В данной главе проведем рассмотрение работы элемента системы разводки пучка - магнитного кикера, а также представим результаты моделирования процесса транспортировки интенсивного ультрарелятивистского пучка электронов круглого сечения с учетом собственных полей пучка. Расчеты проводились с помощью COMSOL Multiphysics и программы собственного написания в Wolfram Mathematica.

### 2.1. Описание конструкции магнитного кикера

Кикер является первым элементом системы разводки ЛИУ, предназначение которого заключается в отклонении пучка от прямого направления импульсным магнитным полем, создаваемым токами в стержнях кикера. Внешний вид кикера и его характерные размеры приведены на Рис. 18. В этом кикере в отсутствие токов в его стержнях пучок электронов направляется в прямой канал, а при протекании токов необходимой величины пучок должен отклониться на угол  $\sim 2^\circ$  и попасть в канал ответвления, проходящий внутри септум-магнита, имеющего сильный градиент магнитного поля на входе.

Конструктивно кикер представляет собой цилиндрическую вакуумную трубу дрейфа, выполненную из нержавеющей стали с внутренним диаметром  $\Phi \sim 164$  мм и длиной  $L = 654$  мм. Внутри этой трубы вдоль ее оси на окружности диаметром 128 мм расположены шесть проводящих цилиндрических стержней (электродов) с закругленными торцами, имеющие диаметр  $\Phi \sim 28$  мм и такую же длину, что и камера (654 мм). Центральные электроды расположены в горизонтальной (медианной) плоскости, а верхняя и нижняя пары электродов повернуты на углы  $\pm 45^\circ$  вдоль окружности с центром, совпадающим с осью камеры. Токи в верхних, нижних и центральных парах электродов направлены в

противоположные стороны и возбуждаются отдельными модуляторами, подключенными к электродам посредством длинных линий. Расстояние между вакуумными подводами тока к электродам составляет 600 мм.



*Рисунок 18. Фотографии магнитного кикера и его характерные размеры; на нижних рисунках синим показаны медные электроды, а знаки «+» и «-» показывают направление течения токов в них*

## **2.2. Выбор токов для создания однородного магнитного поля в кикере**

Прежде чем переходить к моделированию прохождения ультрарелятивистского сильноточного пучка в кикере, необходимо было подобрать значения токов в электродах для получения максимально однородного поля в области пучка. Важно отметить, что вследствие короткой длительности токов в кикере (~100 нс) все токи, текущие в стенках камеры и электродах кикера являются поверхностными из-за скин-эффекта. Также можно использовать стационарное приближение,

поскольку характерная длительность этих токов существенно превышает время движения волны от электродов до стенки и обратно.

Вначале рассмотрим относительно простую двумерную модель кикера, однородную вдоль его оси, в отсутствие электронного пучка в нем. Токи текут в электродах и стенках камеры, поэтому генерируемое ими «вакуумное» магнитное поле можно определить в общем случае из мультипольного разложения скалярного магнитного потенциала  $\psi(r, \varphi)$ , который является решением уравнения Лапласа. Данное уравнение является следствием уравнений Максвелла в предположении квазистационарности задачи и отсутствия токов и зарядов в области, где будет проходить пучок электронов:

$$\operatorname{rot} \bar{B} = 0 \text{ (потенциальное поле)} \Rightarrow \bar{B} = -\nabla\psi \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \Rightarrow \Delta\psi = 0 \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) в общем виде в переменных  $(r, \varphi)$  записывается следующим образом:

$$\psi = \sum a_n r^n \cos(n\varphi) + b_n r^n \sin(n\varphi) \quad (2.3)$$

где  $a_n, b_n$  – вещественные коэффициенты,  $n$  – целые числа 0, 1, 2,...

При условии, что пучок движется в направлении оси Z, а отклонять его планируется в направлении оси X, то необходимые граничные условия на магнитное поле будут следующими:  $B_n = 0$  при  $X=0$  и  $B_\tau = 0$  при  $Y=0$  (см. Рис. 19):

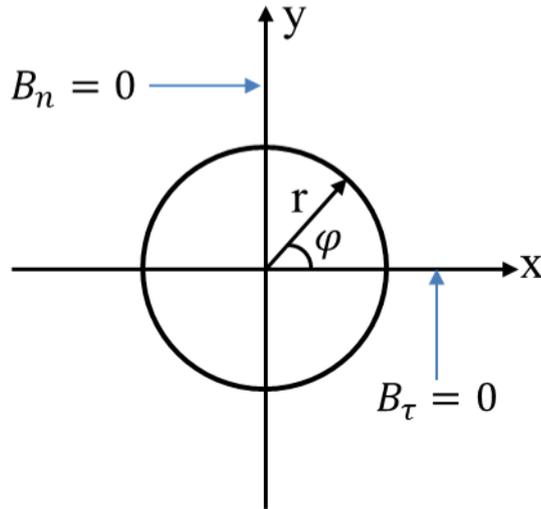


Рисунок 19. Изображение области занимаемой пучком, и граничные условия на компоненты «вакуумного» магнитного поля кикера

Применяя граничные условия к выражению (2.3), получим решение для  $\psi$ :

При  $\varphi = 0$ :  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow$  при любом  $r$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^{n-1} = 0$ , отсюда все  $a_n = 0$ .

При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ :  $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$ , следовательно, все  $b_n$  с четными  $n$  равны нулю.

Исходя из этих результатов, можно получить выражение на интересующую нас компоненту поля  $B_y$ , используя замену в  $\psi$  следующего вида:

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi \quad (2.4)$$

$$\psi = b_1 y + (3x^2 y - y^3) b_3 + (5x^4 - 10x^2 y^3 + y^5) b_5 + \dots \quad (2.5)$$

$$B_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -b_1 - 3b_3 r^2 \cos(2\varphi) - 5b_5 r^4 \cos(4\varphi) + \dots \quad (2.6)$$

Первый член в последнем выражении отвечает за дипольную составляющую магнитного поля, второй - секступольную, третий - декапольную и так далее к более высоким порядкам разложения, все промежуточные гармоники с четными номерами отсутствуют в силу симметрии задачи (граничных условий). По этой же причине токи в верхних и нижних парах электродов должны быть одинаковы и менять знак при отражении оси X.

Наиболее сильное влияние на однородность магнитного поля кикера оказывает секступольная составляющая, так как она растет быстрее всех высших гармоник при  $r \ll r_t$ . Все остальные гармоники, кроме первой, обладая функциональной зависимостью  $\sim r^n$  довольно медленно изменяются вблизи центральной области кикера, но затем быстро нарастают по мере приближения к его стержням. По этой причине они мало влияют на возмущение границы пучка, находящейся вблизи центральной области кикера. Таким образом, чтобы сделать поле  $B_y$  более однородным, необходимо занулить секступольную гармонику. Для этого необходимо разложить  $B_y$  на границе области, где будет проходить пучок, с радиусом  $r = r_b$ , найти гармонику  $b_3$ , а далее подобрать требуемое для ее зануления соотношение между токами в центральной и верхней парах (при этом токи в нижней паре совпадают с токами в верхней):

$$\int_0^{\pi/2} B_y \cos(2m\varphi) d\varphi = - \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0} b_{2n+1} (2n+1) \cos(2n\varphi) \cos(2m\varphi) d\varphi = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} b_{2m+1} (2m+1), m \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} b_1, m = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$b_{2m+1} = - \int_0^{\pi/2} \frac{4B_y(r, \varphi) \cos(2m\varphi)}{\pi(2m+1)} \quad (2.8)$$

В полученное выражение для гармоники  $b_3$  нужно по очереди подставить магнитные поля  $B_y(r, \varphi)$ , созданные токами в электродах двумя способами, представленными на Рис. 20. Направления токов в электродах обусловлены симметрией при отражении оси X и антисимметрией при отражении Y.

Таким образом, используя COMSOL и левое базисное состояние токов в кикере (см. Рис.21, слева), находим решение  $-B_y(I_1 = 0, I_0 = 1)$ . Аналогичным образом, задавая токи с правым базисным состоянием, находим решение  $-B_y(I_1 = 1, I_0 = 0)$ .

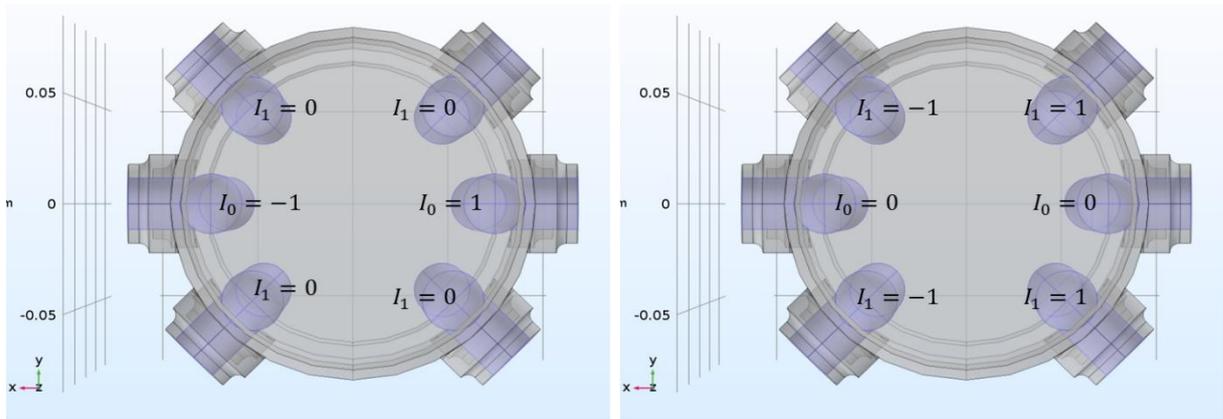


Рисунок 20. Схема направлений и величин токов в электродах кикера в двух базисных состояниях для определения соотношения токов в центральной и верхней парах

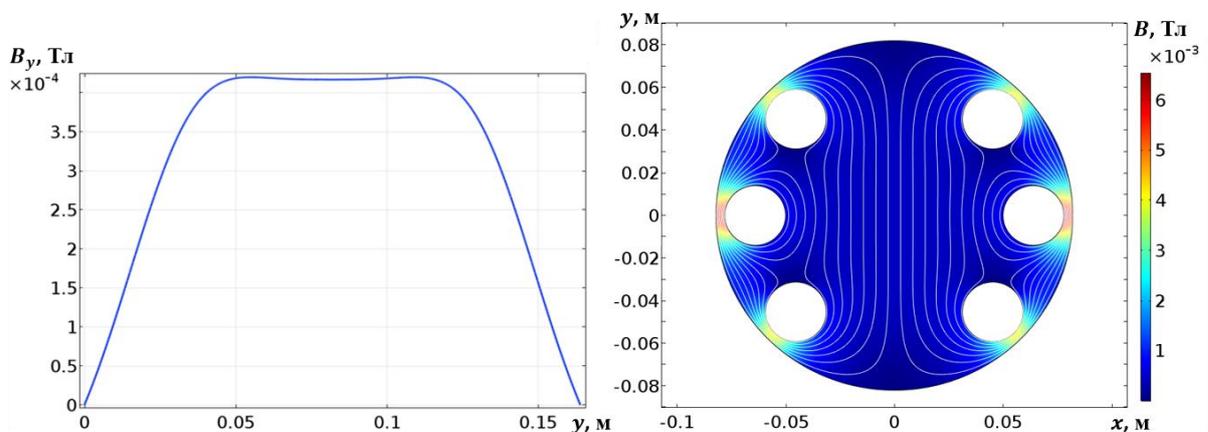
Далее, пользуясь уравнением (2.8), численно интегрируем по окружности с радиусом  $r_b$  и весом  $\cos(2m\varphi)$  сумму этих двух решений с неизвестным коэффициентом  $\alpha$  перед вторым:

$$B_y(r, \varphi) = B_y(I_1 = 0, I_0 = 1) + \alpha B_y(I_1 = 1, I_0 = 0), \quad (2.9)$$

а затем, приравняв результат к нулю, находим  $\alpha$ . В итоге проделанной процедуры для геометрии существующего кикера коэффициент  $\alpha$  составил 0.6627.

Используя полученный коэффициент  $\alpha$  в соотношении токов, с помощью программы COMSOL была построена модель, позволившая найти конфигурацию магнитного поля в кикере в отсутствие в нем пучка электронов. В таком случае на стенках камеры кикера в магнитостатике задавалось граничное условие  $\vec{n} \times \vec{A} = 0$ , означающее равенство нулю нормальной компоненты магнитного поля, а фактически в 2D-геометрии означающее  $A_z = 0$ . Функционально в 2D-модели COMSOL, к сожалению, невозможно напрямую задать полный ток в электродах, текущий по их поверхности, поэтому задавалась величина векторного магнитного потенциала  $A_z$ , пропорциональная суммарному току в электроде. Сам же полный ток электрода находился уже после получения решения путем интегрирования поверхностной плотности тока по длине окружности

поперечного сечения электрода. Поэтому на границах поперечных сечений левого и правого электродов центральной пары задавались значения векторных потенциалов  $A_{z_0} = -1$  и  $+1$ , а на электродах верхней и нижней пар - на левой стороне  $A_{z_1} = -\alpha$  и на правой стороне  $A_{z_1} = +\alpha$ , соответственно. Важно отметить, что магнитный векторный потенциал в электродах задавался с некоторым коэффициентом пропорциональности таким образом, чтобы поле  $B_y$  (вместе с токами в электродах) увеличивалось во всей расчетной области так, чтобы в центральной области, где должен проходить пучок, получить требуемое значение поля для поворота пучка на требуемый угол. В результате выполнения такой процедуры, поле в центре кикера составило  $0.45$  мТл, а ток в центральном электроде составил  $I_0 = 166$  А. Полученные в расчетах зависимости магнитной индукции  $B_y$  вдоль оси  $Y$ , а также распределение модуля индукции и картина силовых линий в плоскости поперечного сечения кикера приведены на Рис. 21.



*Рисунок 21. Слева-распределение магнитного поля  $B_y$  на оси  $Y$ , справа - распределение модуля магнитной индукции и картина силовых линий в поперечном сечении кикера*

### **2.3. 2D-модель транспортировки пучка в кикере**

Предварительно проведем рассуждения, которые помогут корректно сформулировать задачу о собственных электрическом и магнитном полях

пучка при его транспортировке в кикере. При протекании токов в электродах кикера, вычисленных в предыдущем параграфе, пучок под действием дипольного магнитного поля (в однородной части кикера) должен двигаться по траектории, близкой к окружности с радиусом кривизны  $R = 26.7$  м. Следовательно, центростремительное ускорение, действующее на весь пучок как целое, должно создаваться полем токов в электродах кикера  $B_e$  и электрическим полем  $E_r^{cur}$  (по аналогии с теорией Ли-Чена в п.1.3), возникающим за счет кривизны траектории пучка:

$$\dot{P}_r = \frac{P_0 v_0}{R} + e E_r^{cur} + \frac{e}{c} [\bar{v}_{beam} \times \bar{B}_e]_r = 0 \quad (2.10)$$

где  $P_0, v_0$  – это модули импульса и скорости электрона вдоль опорной траектории.

Все остальные силы на электроны пучка со стороны его собственных электрических и магнитных полей в целях уменьшения добавки в поперечный эмиттанс должны компенсироваться  $\propto 1/\gamma^2$ , как и в случае для аксиально-симметричного пучка.

В нашем случае, когда пучок транспортируется в кикере, электростатический и магнитный потенциалы наводятся пучком не только на стенках камеры, но и на электродах кикера, которые, вообще говоря, могут быть оторваны от потенциала камеры кикера. Поэтому с нашей точки зрения, возможны, по крайней мере, две постановки задачи, отличающиеся граничными условиями на электродах кикера, при равенстве нулю  $\varphi$  и  $B_n$  на стенке камеры кикера. Первая формулировка задачи – электроды кикера соединены с камерой через очень малые сопротивления так, что потенциал электродов при прохождении пучка остается близким к потенциалу камеры, а магнитный поток, индуцированный пучком, не проникает в пространство между электродом и стенкой камеры. Тогда граничные условия на потенциалы, индуцированные пучком в электродах, выглядят так:  $\varphi_b = 0, \bar{A}_{b\tau} = 0$

( $\bar{A}_{b\tau}$  – тангенциальная компонента векторного потенциала), при этом расчетная область внутри кикера является многосвязной.

Во втором случае, когда электроды оторваны от стенки камеры, они находятся под плавающим потенциалом, задаваемым и внешними условиями и самим пучком, но при этом на каждом электроде  $\varphi_b = const, \bar{A}_{b\tau} = 0$ , и расчетная область – односвязная. В такой формулировке магнитный поток, индуцированный пучком, проникает в области за электродами кикера.

Попытаемся в двумерной задаче на потенциалы пучка  $\varphi$  и  $A_z$  сформулировать условия, при которых происходит компенсация действия собственных электрического и магнитного полей пучка. В этой модели мы используем параксиальное приближение в силу малости угла отклонения электронного пучка «вакуумным» полем кикера ( $\vartheta \approx 1.375^\circ$ ). Это означает, что траектории электронов направлены практически параллельно оси кикера, но при этом поперечное сечение пучка в разных сечениях по  $Z$  в нашей модели имеет право быть смещено от этой оси, не касаясь электродов кикера. Отметим, что смещение центра пучка от оси на выходе кикера при угле поворота пучка  $1.375^\circ$  не должно превышать 11 мм, что достаточно мало по сравнению со всеми характерными размерами геометрии задачи.

Забегая вперед, можно сказать, что для обеспечения согласования полей необходимо выполнить ряд крайне важных условий: во-первых, условия пропорциональности магнитного –  $A_z$  и электростатического –  $\varphi$  потенциалов на стенках и электродах, во-вторых, условия пропорциональности зарядов и токов на них. Либо же одновременного выполнения обоих условий на разных поверхностях. Давайте рассмотрим их по порядку.

Сперва рассмотрим уравнения на потенциалы в стационарном приближении, полагая что вдоль оси  $Z$  все однородно:

$$\Delta_{\perp}\varphi = -4\pi\rho \quad (2.11)$$

$$\Delta_{\perp}A_z = -\frac{4\pi}{c}j_z \quad (2.12)$$

Если продольная скорость электронов в пучке практически постоянна,  $v_z = const$ , что легко выполняется в случае ультрарелятивистского пучка, то эти два уравнения отличаются только постоянным множителем  $v_z/c$ . При выполнении условия  $A_z = \frac{v_z}{c}\varphi$  на всех границах, потенциалы  $A_z$  и  $\varphi$  будут пропорциональны во всей расчетной области. Далее вычисляя магнитное поле из  $\vec{B} = rotA = \frac{v_z}{c}rot\vec{e}_z\varphi = \frac{v_z}{c}[\vec{e}_z \times \vec{E}]$ , получим силу, действующую на электрон пучка:

$$F_x = e(E_x - \frac{v_z}{c}B_y) \approx \frac{eE_{bx}}{\gamma^2} \quad (2.13)$$

$$F_y = e(E_y + \frac{v_z}{c}B_x) \approx \frac{eE_{by}}{\gamma^2} \quad (2.14)$$

Для выполнения условия пропорциональности  $A_z = \frac{v_z}{c}\varphi$  требуется, чтобы в моделировании на границе камеры и электродов кикера были применены граничные условия либо вида (а), либо вида (б):

$$A_z|_{\Gamma_0} = \varphi|_{\Gamma_0} = 0, \quad (а)$$

$$\frac{v_z}{c}\varphi_{flow}|_{\Gamma_i} = A_z|_{\Gamma_i}, \quad (б)$$

где  $\varphi_{flow}$  – значение плавающего потенциала на границе электрода,  $\Gamma_0$  – это граница, соответствующая поверхности камеры кикера, а  $\Gamma_i$  – поверхности электродов,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Из пропорциональности электрического и магнитного потенциалов следует:

$$\frac{v_z}{c} \oint E_n dl = \oint (\vec{B}, d\vec{l}), \quad (2.15)$$

а из него - соотношение на погонный заряд  $\kappa$  на поверхности электрода и ток в нем  $I$ :  $\kappa = I/v_z$ .

Исходя из этого, в первой модели мы задаем на границах камеры и электродов условие вида (а), а во второй вида (б) при одних и тех же параметрах ультрарелятивистского сильноточного пучка электронов  $r_b = 0.02$  м,  $I_b = 2$  кА,  $\mathcal{E}_b = 5$  МэВ и одинаковой геометрии кикера. Размер разбиения сетки тоже был одинаков:  $\delta l = 0.001$  м.

В результате расчета первой модели были получены характерные распределения сил, действующих на электроны пучка в поперечном сечении кикера только со стороны собственных электрического и магнитного полей. Зависимости этих сил приведены на Рис.22, при этом распределение  $F_x$  компоненты построено вдоль оси, соединяющей поверхности центральных электродов. При этом поля являются скомпенсированными с точностью  $\sim 10^{-4} \cdot E_b|_{\Gamma_b}$ , где  $E_b|_{\Gamma_b}$  — это поле на границе пучка.

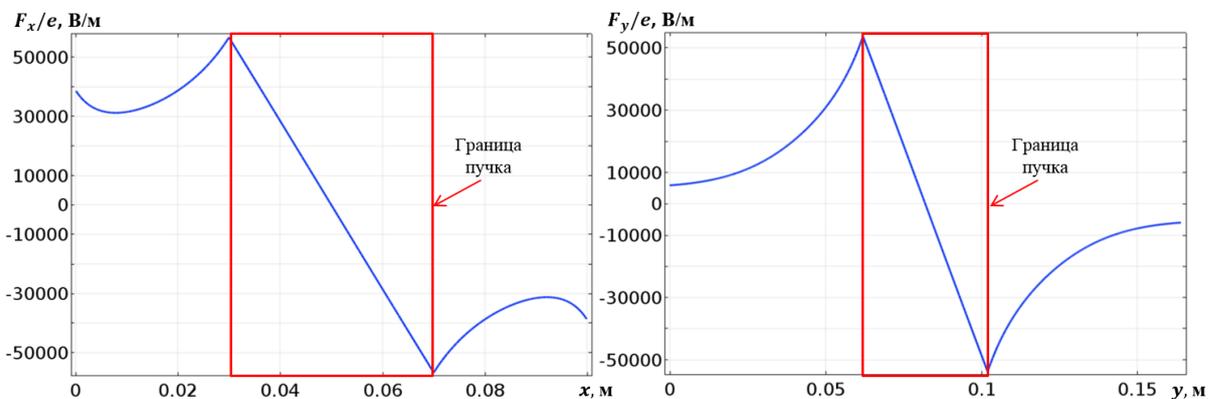


Рисунок 22. Распределение сил  $F_x$  и  $F_y$  в поперечном сечении кикера

Кроме того, наложение данных граничных условий приводит к тому, что магнитное поле пучка не проникает в область между стенкой камеры кикера и его электродами, что демонстрирует распределение силовых линий магнитного поля пучка, приведенное на Рис.23.

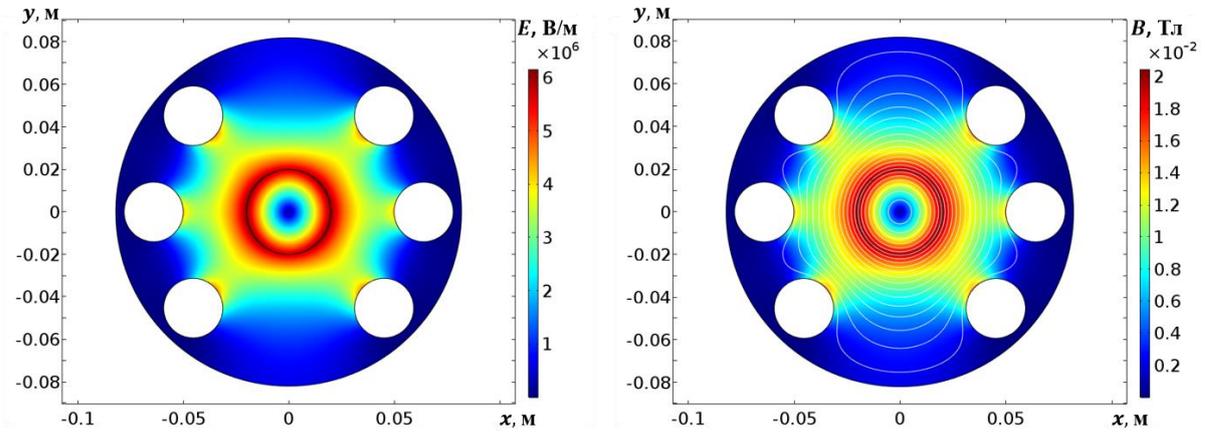


Рисунок 23. Слева-распределение модуля электрического поля в поперечном сечении кикера, справа- распределение модуля магнитной индукции и картина силовых линий

Во второй модели, мы применяли граничное условие типа (б) на поверхностях электродов, при этом на стенке камеры кикера задавалось условие  $\vec{n} \times \vec{A} = 0$ . Для этого в модуле электростатики сначала проводился расчет электрического поля от электронного пучка, в котором на поверхность электродного стержня накладывались условия вида:  $\varphi = const$ ,  $\int_{\partial\Omega} \vec{D}\vec{n}dS = Q_0$ , при  $Q_0 = 0$  – заряд на электроде. Эти условия эквивалентны тому, что незаряженные электроды находятся под плавающим потенциалом. По результатам этого решения были получены соответствующие значения  $\varphi_{flow} = -13.699$  кВ на поверхностях всех электродов.

Далее эти значения в модуле магнитостатики подставлялись непосредственно в условие (б). Таким образом, были получены характерные распределения модулей электрического и магнитного полей, а также распределения сил, действующих в поперечном сечении кикера (см. Рис. 24-25). В данном случае происходит проникновение силовых линий магнитного поля в зазор между электродом и стенкой кикера.

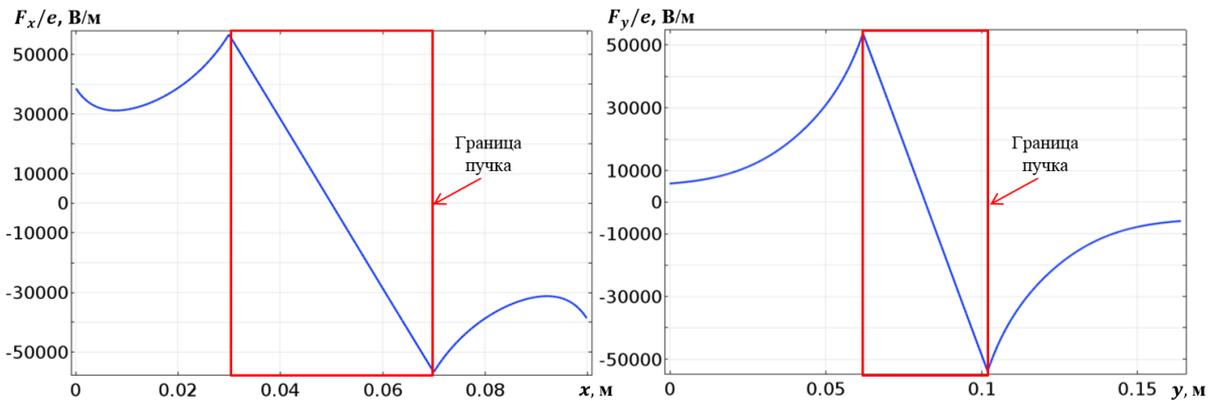


Рисунок 24. Распределение сил  $F_x$  и  $F_y$  в поперечном сечении кикера

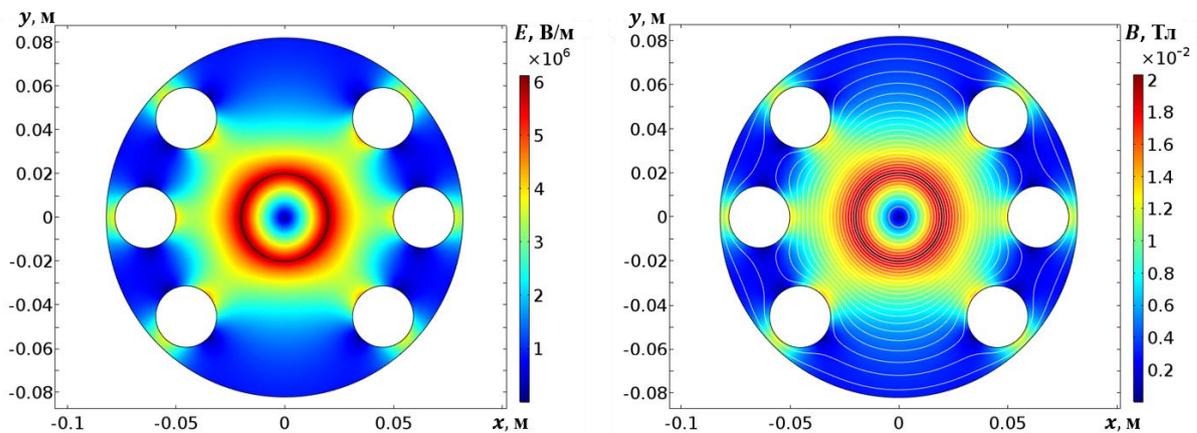


Рисунок 25. Слева-распределение модуля электрического поля в поперечном сечении кикера, справа- распределение модуля магнитной индукции и картина силовых линий

## 2.4. 3D-модель транспортировки пучка в кикере

Для ответа на поставленный вопрос о влиянии магнитного поля кикера на эмиттанс пучка было проведено трехмерное компьютерное моделирование, отличительная особенность которого заключалась в том, что «вакуумное» поле кикера находилось из задачи о скин-эффекте магнитных полей токов, текущих в электродах и индуцированных токов в стенке камеры кикера. Для расчета собственных полей пучка были использованы модули решения Electrostatic и Magnetic Fields, в которых численно решаются уравнения на скалярный электрический и векторный

магнитный потенциалы при граничных условиях на поверхностях электродов и камеры кикера, похожих на тип (а) из предыдущего раздела. То есть на границе камеры был задан нулевой потенциал ( $\varphi = 0$ , идеальный проводник), а в магнитостатике —  $\bar{n} \times \bar{A} = 0$ . Такая формулировка соответствует случаю, когда поля пучка и поля от токов в стенках и стержнях кикера согласованы, а магнитное и электрическое поля не проникают в области между электродами и стенкой кикера, как упоминалось в предыдущем разделе. Для решения этой части задачи был использован решатель Stationary Solver. Поскольку в трехмерной задаче в пакете COMSOL отсутствует функция задания явного распределения тока в электроде, то мною был использован модуль Magnetic and Electric Fields. Этот модуль позволяет рассчитывать поля, создаваемые токами в электродных стержнях с учетом скин-эффекта. В модуле существует возможность с помощью функций Terminal и Ground задавать нужную величину тока в каждом отдельно взятом стержне, для центральных электродов эта величина составляет  $I_0 = \pm 166$  А, а для  $I_1 = \pm \alpha I_0$ . Данный раздел задачи решался с помощью Frequency Domain Solver, в котором была выбрана частота  $f = 1.21$  кГц, чтобы глубина скин-слоя для медного электрода была равной  $\delta = \frac{2.2}{\sqrt{f_{[\text{кГц}]}}} = 2$  мм, что много меньше диаметра электрода кикера. Эта глубина, в свою очередь, определяет требование на дискретизацию расчетной сетки приповерхностных слоев электродов.

По этой причине на следующем этапе для корректного учета скин-эффекта, применяя функцию Boundary Layers, задавалось разбиение не менее трех узлов сетки на глубину скин-слоя в электродах, объем электрода имел разбиение  $\delta l = 0.004$  м. Для полости камеры кикера производилось построение сетки с характерным размером тетраэдральных ячеек  $\delta l = 0.008$  м, при этом область, в которой проходит пучок, имела разбиение  $\delta l = 0.0025$  м для лучшей точности расчета электрического и

магнитных полей на границе пучка. Затем уже с помощью модуля Particle Tracing осуществлялась транспортировка частиц в рассчитанных полях.

На Рис.26 приведены результаты расчета плотности тока в поперечном сечении кикера по оси X, параллельной медианной плоскости пучка, а также распределения плотности магнитного потока в поперечном по оси Y и продольном- Z направлениях. Распределение магнитного поля  $B_y$  на оси Y совпадает с величиной, рассчитанной в 2D случае (см. Рис.21), распределение  $B_y$  на оси Z достаточно однородное в центральной части кикера. Графики плотности тока на Рис. 26 демонстрируют пики в областях вблизи границ электродов центральной пары кикера, а также экспоненциальное затухание тока внутрь проводящих электродов.

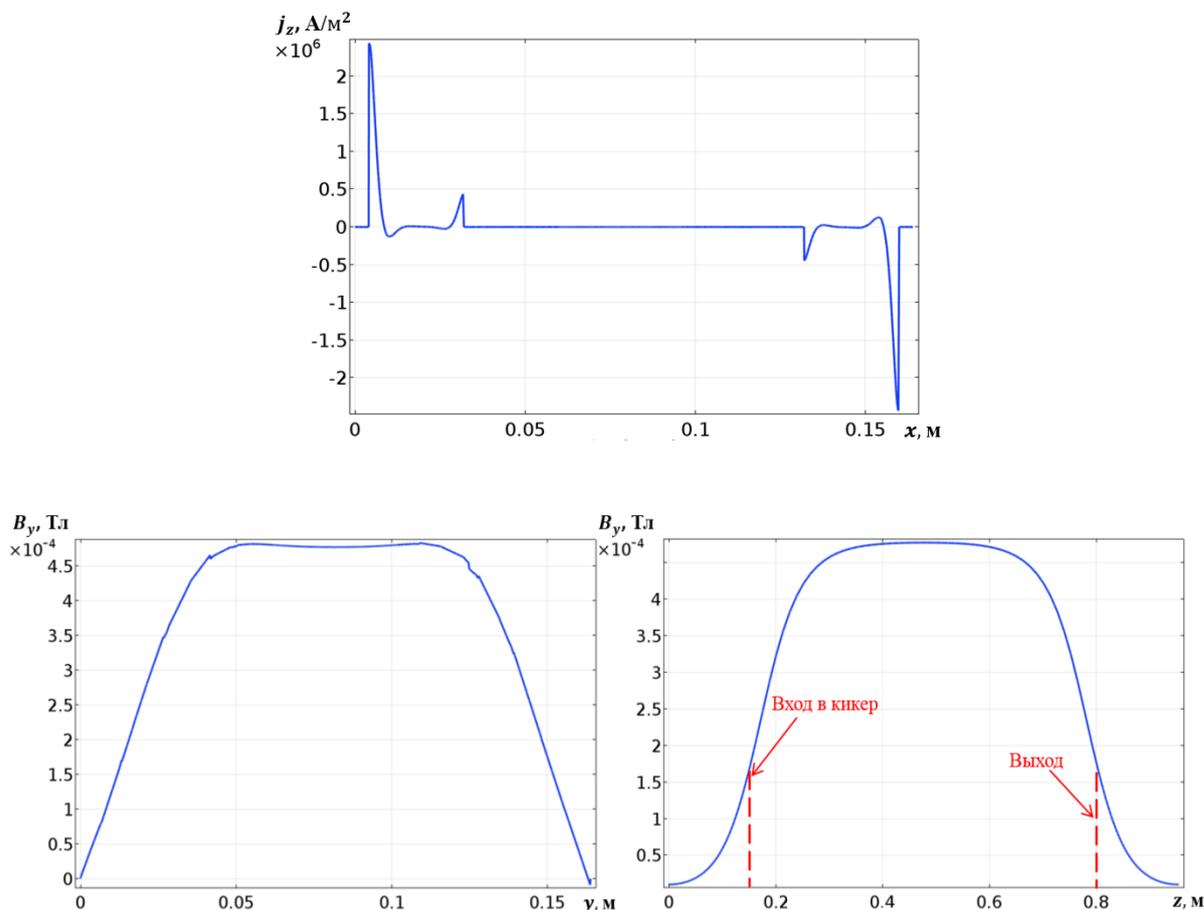


Рисунок 26. Верхний ряд – распределение плотности тока  $j_z$  на оси X, нижний ряд – распределения магнитного поля  $B_y$  на оси Y (при  $X=0$  и  $Z=0.475$  м) и на оси Z (при  $X=Y=0$ ).

Исследование поведения площади фазового портрета в формулировке задачи без проникновения полей пучка в область пространства между электродами и стенками камеры кикера показано на Рис.27. Из этого графика видно, что величины фазовых портретов к моменту времени  $\tau = 2.8$  нс, соответствующему выходу из кикера, достигают значений  $S_{XX'} \approx 40$  мм·мрад и  $S_{YY'} \approx 30$  мм·мрад.

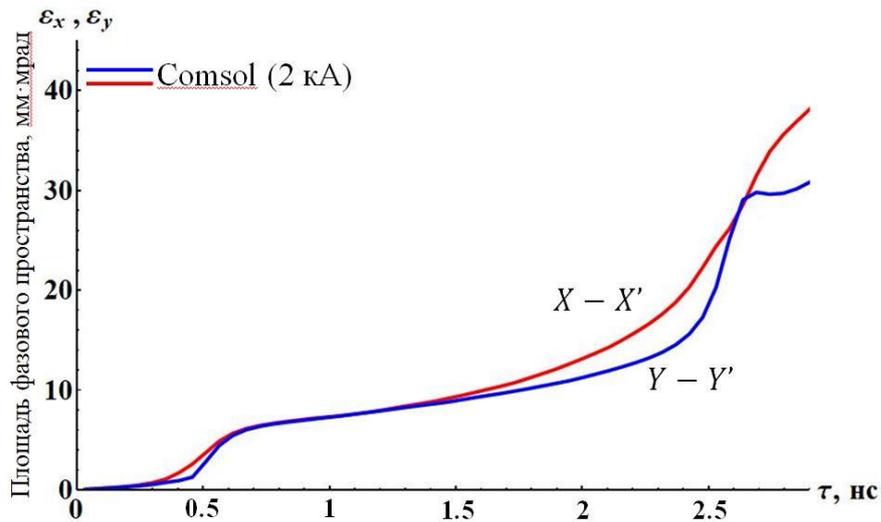


Рисунок 27. Площади пучка в фазовом пространстве при  $I_b = 2$  кА: красным цветом показана  $S_{XX'}$  и синим —  $S_{YY'}$

Чтобы продемонстрировать важность правильных граничных условий для обеспечения согласования собственных полей пучка, был проведен расчет с искусственным нарушением условия согласования полей. Для этого в моделировании один из концов каждого из электродов был оторван от камеры кикера. В результате полученные значения величин фазового портрета пучка увеличились примерно в 2,5 раза до  $S_{XX'} \approx 90$  мм·мрад и  $S_{YY'} \approx 70$  мм·мрад, что демонстрирует Рис. 28.

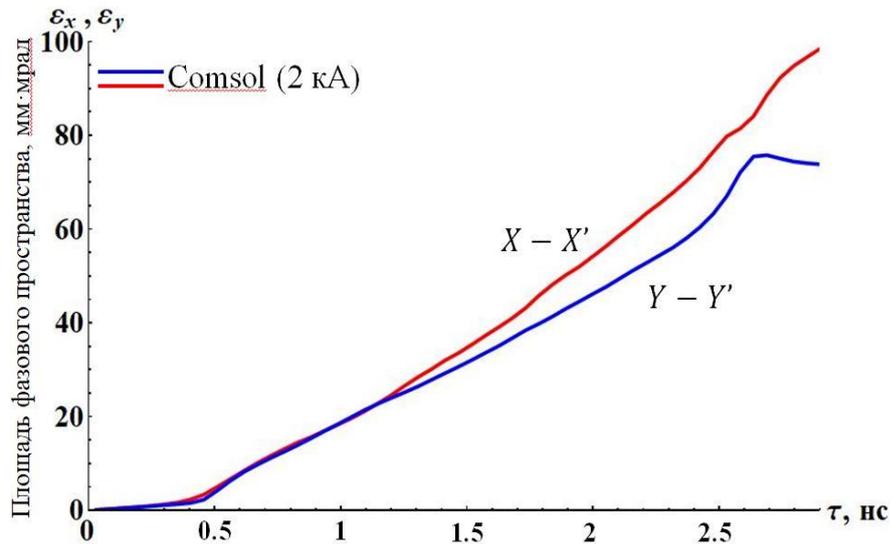


Рисунок 28. Площади пучка в фазовом пространстве при  $I_b = 2$  кА: красным цветом показана  $S_{XX'}$  и синим— $S_{YY'}$

В будущем планируется провести полномасштабное трехмерное моделирование самого сложного элемента системы разводки пучка ЛИУ-септум-магнита, а также провести расчеты прохождения пучка через систему разводки ЛИУ в полном комплекте.

## Заключение

В процессе выполнения квалификационной магистерской диссертации были получены следующие результаты:

1. В пакете COMSOL была построена 2D-модель транспортировки ультрарелятивистского пучка круглого сечения в тороидальной камере с учетом пространственного заряда, подтверждающая теорию Ли-Чена.
2. Проведено сравнение результатов расчета в CST задачи распространения аксиально-симметричного электронного пучка с током 2 кА и радиусом 2 см в однородной трубе дрейфа с теорией. Показано, что шум собственных полей пучка приводит к линейному по времени уширению фазового портрета.
3. В пакете CST построена и протестирована 3D-модель, описывающая распространение интенсивного пучка с током 2 кА в изогнутой трубе под действием поля поворотного элемента и собственных полей пучка. Получены формы сечения пучка, траектории частиц и динамика эмиттанса пучка в процессе транспортировки.
4. В 3D-модели с однородным распределением плотностей токов и зарядов в пучке и его полями, рассчитанными в COMSOL, получено совпадение эмиттансов пучка с токами 2 кА и 200 мА. Из чего следует, что при расчете эмиттанса ультрарелятивистского пучка в поворотном элементе можно не учитывать собственные поля, поскольку их действие компенсируется  $\sim 1/\gamma^2$ .
5. В результате оптимизации геометрии магнита поворотного элемента показано уменьшение эмиттанса в 7-8 раз при расширении его в медианной плоскости в 2 раза.
6. В результате 2D расчетов были выбраны соответствующие значения токов в электродах кикера для создания квазиоднородного магнитного поля.
7. Выявлены условия компенсации действия собственных электрических и магнитных полей пучка на его электроны при согласованных граничных условиях на потенциалы электродов и стенки кикера, а также зарядов и токов на этих электродах.
8. В модели COMSOL с однородным распределением плотностей токов и зарядов в пучке получена временная динамика эмиттанса пучка с током 2 кА при транспортировке в кикере при согласованных и несогласованных граничных условиях на его электродах.

## Список литературы

- [1] L.G. Multhauf et al., The LLNL Flash X-ray Induction Linear Accelerator (FXR), 25th Int. Conf. on High-Speed Photography and Photonics, Proc. SPIE 4948, p.622 (2003).
- [2] T. Houck et al., Tuning the magnetic transport of an induction linac using emittance, in Proc. Int. Linac Conf., pp.444÷446 (2006)
- [3] Y.H. Wu, Y.J. Chen, ENSOLVE : A Simulation Code for FXR LIA Downstream Section, Proceedings of IPAC2018, Vancouver, BC, Canada
- [4] E. Merle et al., High Current and High Energy AIRIX Induction Accelerator Development, Proceedings
- [5] N. Pichoff, A. Compant et al., End to End Multiparticle Simulations of the AIRIX Linac, EPAC 2004, Lucerne, Switzerland, pp. 2598.
- [6] M. J. Burns et al., Status of the DARHT Phase 2 Long-Pulse Accelerator, in Proc. 2001 Particle Accelerator Conf., Chicago, IL, June 2001, pp. 325-329.
- [7] S. Nath, Linear Induction Accelerators at the Los Alamos National Laboratory DARHT Facility, Proceedings of the 2010 Linear Accelerator Conference, Tsukuba, Japan, September 12-17, 2010, pp.750-754 (2010).
- [8] B. R. Poole and Y.-J. Chen, “Particle Simulations of DARHT-II Transport System”, Proc. of the 2001 IEEE PAC, Chicago. IL, June 18-22, 2001, p. 3299.
- [9] C. Ekdahl et al., Emittance growth in the DARHT-II linear induction accelerator, IEEE Trans. Plasma Sci., vol. (submitted), 2017.
- [10] E. P. Lee, “Cancellation of the Centrifugal Space Charge Force”, Particle Accelerators, v.25, p.241, 1990

[11] B.R. Poole, Y.-J. Chen, "Particle Simulations of a Long Pulse Electron Beam in a Bend, Proc. 20<sup>th</sup> International Linac Conference, Monterey, CA, August 21-25, 2000

[12] Y.-J. Chen, "Space-Charge Forces Of A Dc Beam In A Continuous Bend", Particle Accelerator Conference 1997, Livermore, California 9, The USA, 1997

[13] Аржанников А.В. и Сеницкий С.Л., "Мощные импульсные пучки: учебное пособие", Новосибирский государственный университет, 2012