МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет: **ФИЗИЧЕСКИЙ** Кафедра: **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки: **03.03.02 ФИЗИКА** Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Ярыговой Влады Максимовны

Тема работы: Оптимизация протонного кильватерного ускорителя

с двойной плазменной секцией

«К защите допущена»

И.О. заведующего кафедрой к.ф.-м.н. с.н.с., ИЯФ СО РАН

«____»____ 2022 г.

Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор РАН г.н.с., ИЯФ СО РАН

Лотов К. В./_____(подпись, МП)

«____»____ 2022 г.

Дата защиты: «_____»____ 2022 г.

Новосибирск — 2022 г.

Содержание

Введение

1	Методика моделирования	5
2	Режим низкой плотности плазмы	9
3	Режим высокой плотности плазмы	12
4	Степень ослабления поля вакуумным промежутком	15
Заключение		21
Список использованных источников		22

 $\mathbf{2}$

Введение

Стремление повысить энергию частиц требует строительства линейных ускорителей всё больших размеров. Однако существует альтернативный метод ускорения — кильватерное ускорение, позволяющее получать более высокие поля в компактных установках. Это метод ускорения сгустка электронов в плазме, возмущённой прохождением первичного пучка (драйвера).

Использование плазмы в качестве ускоряющей структуры позволит увеличивать энергию частиц с темпом, намного превышающим темп ускорения в традиционных высокочастотных резонаторах, что позволит ускорять электроны до высоких энергий.

Кильватерное ускорение с помощью протонного драйвера изучается в ЦЕРНе в рамках проекта AWAKE. Проведенные эксперименты показали возможность ускорения электронов до 2 ГэВ [1]. Наиболее эффективное ускорение происходит, когда пучок протонов разделяется на микропучки посредством контролируемой самомодуляции. Неконтролируемая самомодуляция является фазово-неустойчивой, и пучок быстро разрушается [2,3]. Для контроля самомодуляции необходимо перед протонным пучком запустить затравочный пучок. Затравка самомодуляции протонного пучка ранее осуществлялась лазерным импульсом [4]. Протонный пучок имеет большую энергию, что позволит создавать ускоряющие поля с большей амплитудой. Чтобы протонный пучок не разрушался на более длинных дистанциях, все протонные микросгустки должны попадать в фокусирующую фазу кильватерной волны. Этого можно достичь уменьшением длины волны плазменных колебаний на стадии самомодуляции. Для этого продольный профиль плотности плазмы должен быть возрастающим или ступенчатым 5. Остаётся неизвестным оптимальный закон нарастания плотности плазмы при затравке самомодуляции электронным пучком. В качестве

первого приближения рассматриваем профиль с линейным градиентом. В таком случае при поиске наибольшего ускоряющего поля варьируются три параметра: длина L_s , высота δn и положение z_p "ступеньки" (рис. 1). Решение этой задачи осуществляется с помощью численного моделирования. Моделирование производим с помощью двумерного квазистатического кода LCODE [6].



Рисунок 1: Геометрия задачи.

Ранее исследование проводилось для ускорителя с одной плазменной секцией для различных энергий электронного пучка [7]. Оптимальный профиль плотности плазмы с линейным нарастанием позволял получить почти постоянное поле после самомодуляции на уровне половины поля опрокидывания $E_0 = mc\omega_p/e$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ — плазменная частота, m — масса электрона, c — скорость света, e — заряд электрона, n_0 — плотность плазмы. Так же сравнивали затравочные пучки с энергиями 18 МэВ и 160 МэВ. Оказалось, что низкоэнергитический пучок электронов более эффективен для затравки самомодуляции.

Если инжектировать электронный ускоряемый пучок (витнесс) сразу за драйвером, то во время самомодуляции протонного пучка ухудшается его качество, то есть эмиттанс увеличивается [8]. Появляется риск разрушения витнесса, поэтому в следующей серии экспериментов плазменная секция разделяется на две секции с вакуумным промежутком между ними [9]. В первой происходит самомодуляция протонного пучка, а в промежутке между секциями инжектируется электронный пучок для последующего ускорения. Для такой конфигурации установки также необходимо найти оптимальный профиль плотности плазмы.

Эксперименты проводятся в двух режимах: с низкой и высокой плотность плазмы. Первый режим удобен для диагностик, второй позволяет получить большую амплитуду ускоряющего поля. Необходимо оптимизировать параметры профиля плотности плазмы для обоих режимов.

В данной работе описывается численное исследование кильватерного ускорения с протонным драйвером для ускорителя с двумя плазменными секциями. Основные задачи — поиск оптимального профиля плотности плазмы и анализ физических процессов, происходящих в системе.

1 Методика моделирования

Модель представляет собой протонный и электронный пучки, движущиеся в одном направлении (рис. 1.1). Считаем, что неосесимметричные неконтролируемые возмущения в системе не появляются или пренебрежимо малы. Помимо цилиндрических координат используется сопутствующая координата $\xi = z - ct$, где z — координата, вдоль которой движутся пучки, t — время.



Рисунок 1.1: Схема электронной затравки.

Исходные базовые параметры работы экспериментальной установки AWAKE определяют параметры плазмы и пучков (таблица 1.1). Варьируемыми параметрами являются высота δn , длина L_s и координата начала z_p плазменной ступеньки (рис. 1). Положение плазменной ступеньки z_s складывается из двух параметров: расстояния z_p , на котором плазма постоянна, и половины расстояния L_s , на котором плотность увеличивается линейно. Кроме того, для корректных расчетов в профиле плотности плазмы следует учитывать изменение плотности на входе в плазменную секцию, связанное с вытеканием плазмы, которое определяется диаметром первого отверстия D, и вакуумный зазор между двумя плазменными секциями.

Значения			
Плазма:			
$2{ imes}10^{14}~{ m cm}^{-3}~/~7{ imes}10^{14}~{ m cm}^{-3}$			
10 м, 10 м			
1 см			
1 mm			
1 м			
Пучок протонов:			
3×10^{11}			
7,5 см			
0,2 мм			
400 ГэВ			
3,6 мм мрад			
0,94×10 ⁹ (150 пКл)			
0,71 мм			
0,19 мм			
18,5 MəB			
2,96 мм мрад			

Таблица 1.1: Параметры пучков и плазмы

Профиль плотности плазмы n(z) можно описать математически:

$$\begin{cases} 0 \le z \le z_p : & \frac{n_0}{2} \left(1 + \frac{z/D}{\sqrt{(z/D)^2 + 0.25}} \right), \\ z_p \le z < z_p + L_s : & n_0 \left(1 + \delta n \frac{z - z_p}{L_s} \right), \\ z_p + L_s \le z < L_1 : & n_0 \left(1 + \delta n \right), \\ L_1 \le z < L_1 + L_p : & 0, \\ L_1 + L_p \le z : & n_0 \left(1 + \delta n \right). \end{cases}$$
(1.1)

В первой плазменной секции происходит самомодуляция, во второй ускорение. Длина зазора L_p между ними определяет потерю в амплитуде ускоряющего поля, так как в вакууме протонный драйвер разлетается. Это связано с эмиттансом пучка, то есть с угловым разбросом, который в вакууме перестаёт быть скомпенсирован фокусирующей силой, возбужденной кильватерной волной. Поэтому чем меньше длина зазора, тем лучше. Однако же совсем избавиться от зазора не удается по конструктивным соображениям, так как в нем должны уместиться поворотный магнит для электронного витнесса и ряд диагностических систем.

В качестве меры амплитуды волны возьмем кильватерный потенциал Ф. Его можно определить как интегральную величину от поля:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad E_r - B_\phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$
 (1.2)

Обозначим Φ_{loc} локальные максимумы потенциала на оси z, достигаемые в точках с координатами $\xi = \xi_{loc}$. Пусть Φ_{max} — наибольший из них. Подбором z_p , L_s и δn найдем максимальный потенциал в конце второй плазменной секции $\Phi_f = \Phi_{max}(z = L_{max})$, где $L_{max} = L_1 + L_p + L_2$.

Двумерный код рассчитывает плазменные поля с периодичностью $200c/\omega_p$ по оси z и $0,01c/\omega_p$ по r и ξ . Начальная эволюция пучка моделируется отдельно с меньшим шагом по оси z, зависящим от энергии затравочного электронного пучка. Вскоре после попадания электронного пучка в плазму кильватерное поле изменяется быстро. После достижения радиального равновесия форма электронного пучка, и создаваемое им поле изменяются медленно, что позволяет увеличить шаг расчёта полей [10].

Изначально поиск максимального потенциала в трехмерном пространстве $(z_p, L_s, \delta n)$ проводится с шагом $\Delta z_p = 20$ см, $\Delta L_s = 40$ см, $\Delta \delta n = 0,05n_0$. Для фиксированного значения δn изменяются значения z_p и L_s так, чтобы значение $z_s = z_p + L_s/2$ оставалось неизменным. Для первой точки поиск начинается с $L_s = 0$, далее при возрастании длины ступеньки измеряем амплитуду кильватерного потенциала в конце второй плазменной секции. Как только результат становится меньше предыдущего, максимальное полученное значение Φ_f для заданных δn и z_s сохраняется. Параллельно создаются 6 новых точек, имеющих координаты $(\delta n \pm \Delta \delta n; z_s \pm \Delta z_p), (\delta n \pm \Delta \delta n; z_s), (\delta n; z_s \pm \Delta z_p)$. Для них повторяется аналогичная процедура. После получения общего вида карты область, близкую к максимуму, более подробно исследуем с меньшим шагом. Таким образом получаем результат в виде трёхмерной карты $\Phi_f(\delta n, z_s = z_p + L_s/2)$, что упрощает визуализацию.

2 Режим низкой плотности плазмы

Для режима с низкой плотностью плазмы $(n_0 = 2 \times 10^{14} \text{ см}^{-3})$ при длине промежутка 1 м наилучший потенциал Φ_b составил примерно 130 кВ при оптимальных параметрах $\delta n = 0.05n_0$, $L_s = 480$ см, $z_p = 0$ см (рис. 2.1). Это соответствует ускоряющему полю в волне ≈ 370 МэВ/м. Детальная диагностика этой точки позволила изучить сопутствующие физические процессы.



Рисунок 2.1: Карта амплитуды кильватерного поля $\Phi_f(z_s, \delta n)$. Звездочкой указано расположение наилучшего варианта.

Кильватерное поле сначала резко возрастает с максимумом около z = 8 м, а затем медленно уменьшается. Поле во второй плазменной секции остается практически постоянным (рис. 2.2 и 2.3). Значит, самомодуляция протонного пучка завершилась в первой секции, и можно инжектировать электронный пучок во вторую секцию. Когерентное сложение вклада микропучков самомодулированного пучка вызывает линейное увеличение ста-

ционарного кильватерного поля (рис. 2.4). Величина этого поля зависит от плотности пучка. Фаза волны после самомодуляции протонного пучка почти постоянна (рис. 2.5), что хорошо для ускорения частиц.



Рисунок 2.2: Амплитуды кильватерного поля $\Phi_{loc}(z,\xi)$ для наилучшего варианта.





Рисунок 2.3: Наибольшая амплитуда кильватерного поля $\Phi_{max}(z)$ для наилучшего варианта с оптимальными параметрами профиля плотности плазмы.

Рисунок 2.4: Рост установившегося кильватерного поля вдоль пучка $\Phi_{loc}(\xi)$ при $z = L_{max}$ для наилучшего варианта. Пунктирная линия показывает начальную плотность протонного пучка.

Карта содержит достаточно большую окрестность точек, имеющих потенциал, близкий к максимуму (рис. 2.1). То есть можно ошибиться в выборе оптимальных параметров профиля примерно на 20%, а потери в амплитуде ускоряющего потенциала составят при этом не более 10% (рис. 2.6). В эксперименте это будет играть существенную роль, так как параметры "ступеньки" плотности не задаются с высокой точностью. Близкие к оптимальному профили имеют близкое значение градиента и не имеют резкого скачка плотности.



Рисунок 2.5: Расположение экстремумов потенциала $\xi_{loc}(z)$ в окрестности наибольшего поля. Цвет точек показывает амплитуду кильватерного поля Φ_{loc} .



Рисунок 2.6: Примеры профилей плотности плазмы, которые дают кильватерное поле Φ_f выше 90% от наилучшего значения Φ_b . Ширина линии пропорциональна $\Phi_f - 0.9\Phi_b$. Черная пунктирная линия - оптимальный профиль.

3 Режим высокой плотности плазмы

Для режима с высокой плотностью плазмы 7×10^{14} см⁻³ при длине промежутка в 1 м наилучший кильватерный потенциал составил примерно 90 кВ, что соответствует темпу ускорения 380 МэВ/м. Ожидаемый результат при этом был порядка 260 кВ, что почти в 3 раза больше. При попытке уменьшить длину промежутка до 0,5 м наилучший результат не изменился (рис. 3.1).



Рисунок 3.1: Карты амплитуды кильватерного поля $\Phi_f(z_s, \delta n)$ для плотности 7×10^{14} см⁻³ и промежутков длиной 1 м (слева) и 0,5 м (справа). Звездочками указаны расположения наилучших вариантов.

Наибольшая амплитуда кильватерного потенциала в этом режиме ведёт себя не так, как в режиме низкой плотности. Теперь после промежутка амплитуда спадает при любой длине промежутка (рис. 3.2), а не держится на некотором постоянном уровне, как при меньшей плотности плазмы

(рис. 2.3). Чтобы достигнуть ожидаемого результата, необходимо изменить параметры задачи.



Рисунок 3.2: Наибольшая амплитуда кильватерного поля $\Phi_{max}(z)$ для плотности 7×10^{14} см⁻³ для наилучшего варианта при различных длинах вакуумного промежутка.



Рисунок 3.3: Наибольшая амплитуда кильватерного поля $\Phi_{max}(z)$ для плотности 7×10^{14} см⁻³ при заряде затравки 500 пКл для наилучшего варианта при различных длинах вакуумного промежутка.

Одним из параметров, влияющих на амплитуду кильватерного поля, является заряд затравочного пучка [11]. Изменение параметров затравки (таблица 3.1) увеличило значение амплитуды ускоряющего поля во второй секции при длине промежутка в 1 м до 122 кВ, темп ускорения при этом составил 610 МэВ/м. При этом потенциал после промежутка выходит на константу (рис. 3.3). Таким образом, заряд затравочного пучка влияет не только на амплитуду кильватерного потенциала, но и на характер его убывания. Новый заряд затравки был выбран, так как существующий электронный ускоритель способен произвести пучки с зарядом 140 - 650 пКл [12]. Чем больше заряд электронного сгустка, тем сложнее его контролировать, поэтому было желание использовать наименьший заряд из возможных. Как показывает моделирование, маленький заряд не даёт ожидаемой амплитуды потенциала.

Таблица 3.1: Параметры затравочного электронного пучка

Параметры	Значения
Затравочный электронный пучок:	
Количество частиц	3,13×10 ⁹ (500 пКл)
Длина	0,66 мм
Радиус	0,25 мм
Энергия	18 МэВ
Нормализованный эмиттанс	4 мм мрад

4 Степень ослабления поля вакуумным промежутком

С затравочным пучком, имеющим параметры, аналогичные приведенным в таблице 3.1, ранее решалась задача оптимизации для одной плазменной секции [7]. При сравнении карты потенциала для одной и двух плазменных секций можно заметить, что положение максимума и общая форма карты совпадают (рис. 4.1), основное отличие состоит в максимальной амплитуде ускоряющего поля. Аналогичное можно заметить и для заряда затравки 150 пКл при длинах промежутков 1 и 0,5 м (рис. 3.1), а также для одной и двух плазменных секций при той же затравке (рис. 4.2). Такая закономерность наводит на мысль о том, что ослабление поля слабо влияет на положение максимума потенциала и оптимальную форму продольного профиля плотности плазмы. В таком случае возможна аналитическая связы между амплитудами кильватерного потенциала до вакуумного промежутка и после с длиной промежутка. Это бы значительно облегчило поиск оптимальных параметров, так как не известна конечная длина промежутка L_p , а расчёт каждой точки на карте потенциалов занимает около 600 машинных часов, для построения же полноценной карты нужно порядка 500 точек.

Рассмотрим движение пучка через вакуумный промежуток. Продольный импульс частиц пучка p_z — релятивистский, поперечный же (p_r) много меньше продольного. Предположим, что при пролете вакуумного промежутка поперечный размер микросгустков увеличивается на величину δr



Рисунок 4.1: Сравнение карт амплитуды кильватерного поля $\Phi_f(z_s, \delta n)$ для заряда затравки 500 пКл и вакуумных промежутков длиной 0 и 1 м. Звездочкой указаны расположения наилучших вариантов.



Рисунок 4.2: Сравнение карт амплитуды кильватерного поля $\Phi_f(z_s, \delta n)$ для заряда затравки 150 пКл и вакуумных промежутков длиной 0 и 1 м. Звездочкой указаны расположения наилучших вариантов.

(рис. 4.3). В наиболее простом приближении считаем, что протонный пучок разлетается свободно, частицы не имеют поперечного ускорения. Также будем использовать безразмерные единицы (таблица 4.1), так как именно в таких единицах лучше всего видно подобие разномасштабных физических систем. При этом длину промежутка оставим размерной, так как при вариации плотности плазмы она сохраняется. В данном приближении δr можно оценить как

$$\delta r = \frac{m}{m_p \gamma} \cdot p_r t, \tag{4.1}$$

где t — время, за которое пучок пролетает вакуумный промежуток, m_p — масса протона, γ — релятивистский фактор. Время пролёта t можно оценить как

$$t \approx \frac{L}{c/\omega_p} \propto L\sqrt{n}.$$
(4.2)

Такое приближение справедливо при значительном разлёте пучка, иначе нужно использовать более точное уравнение огибающей [13].



Рисунок 4.3: Вид цепочки протонных микросгустков до и после пролёта вакуумного промежутка.

Таблица 4.1: Безразмерные величины			
Величина	Единица измерения		
t	ω_p^{-1}		
Φ	$\dot{m}c^2/e$		
p	mc		
r	c/ω_p		

Движение частиц пучка поперёк оси распространения описывается как колебания в потенциальной яме. При этом сумма поперечной кинетической и потенциальной энергии должна сохраняться. Поэтому поперечный

импульс можно оценить исходя из закона сохранения энергии как

$$p_r \propto \sqrt{\Phi}.$$
 (4.3)

Для заданных параметров пучка и плазмы (таблица 1.1) естественно предположить, что $\Phi \propto 1/S$, где S — площадь поперечного сечения пучка. Это равносильно тому, что амплитуда потенциала пропорциональна плотности протонного пучка. С учётом этого факта и формул (4.1) – (4.3) получим

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \approx \frac{r_0^2}{r_1^2} \approx \frac{r_0^2}{(r_0 + CL\sqrt{\Phi_0 n})^2} = \frac{1}{(1 + AL\Phi_0\sqrt{n})^2},\tag{4.4}$$

где Φ_0 и Φ_1 — амплитуда ускоряющего потенциала до и после промежутка соответственно, A и C — неизвестные константы. Для нахождения константы A используем данные моделирования, полученные при построении карты потенциала для плотности 7×10^{14} см⁻³ и затравочного пучка с зарядом 150 пКл (рис. 4.4). На график нанесены не только точки с максимальным значением потенциала для фиксированных δn и z_s , а все полученные значения. Для каждой точки вычисляем значение A, после чего находим среднее значение, которое составило $A = 4,5 \times 10^{-10}$ см^{1/2}. Для нахождения погрешности считаем сначала среднеквадратическое отклонение $\Delta A \approx 0,2A$. Погрешность амплитуды потенциала после промежутка считаем с учетом (4.4):

$$\Delta \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial A} \Delta A = -\frac{2L\Phi_0^2 \sqrt{n}}{(1 + AL\Phi_0 \sqrt{n})^3} \Delta A = 2\Phi_1 \left(\sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} - 1\right) \frac{\Delta A}{A} \quad (4.5)$$

Для проверки гипотезы подставляем полученное значение в данные моделирования для других параметров плазмы или затравочного электронного пучка (рис. 4.5). Можно заметить, что для низкой плотности совпадение данных моделирования с формулой хуже. Это можно связать с использова-



Рисунок 4.4: Поиск неизвестной константы A по данным моделирования для плотности плазмы 7×10^{14} см⁻³, заряда затравки 150 пКл и длины вакуумного промежутка 1 м.

нием приближения для большой угловой расходимости пучка (4.1). Величина, на которую изменяется поперечный радиус пучка, пропорциональна корню из плотности, поэтому для меньшей плотности приближение работает хуже.

Полученная формула (4.4) для амплитуды потенциала после пролёта пучком вакуумного промежутка содержит зависимость не только от потенциала до промежутка, но и от длины промежутка (рис. 4.6). Здесь точки моделирования хорошо ложатся на теоретическую кривую.

Таким образом, формула (4.4) с хорошей точностью описывает связь амплитуды потенциала до и после промежутка и длины промежутка для высоких плотностей. Из монотонности зависимости от Φ_0 в формуле (4.4) следует постоянство положения оптимума потенциала и, как следствие, оптимального продольного профиля плазмы. Случай низких плотностей формула описывает хуже, однако время счёта задачи с плотностью 2×10^{14} см⁻³ составляет примерно 80 машинных часов. Это в 7 раз быстрее, чем для высокой плотности, рассмотренной в работе, поэтому проблема экономии времени на моделирование не стоит так остро. В свою очередь, сохранение положения оптимума можно увидеть из результатов моделирования.



Рисунок 4.5: Проверка полученной формулы (4.4) для различных параметров плазмы и затравочного пучка: (а) — плотность плазмы 2×10^{14} см⁻³, заряд затравочного пучка 150 пКл, длина вакуумного промежутка 1 м; (b) — плотность плазмы 7×10^{14} см⁻³, заряд затравочного пучка 150 пКл, длина вакуумного промежутка 0,5 м; (c) — плотность плазмы 7×10^{14} см⁻³, заряд затравочного пучка 1 м.



Рисунок 4.6: Зависимость амплитуды ускоряющего потенциала после пролёта вакуумного промежутка Φ_1 от длины промежутка L_p при фиксированной амплитуде потенциала до промежутка.

20

Заключение

Оптимизация продольного профиля плотности плазмы проводилось для достижения максимальной установившейся амплитуды волны в кильватерном ускорителе с двумя плазменными секциями. Вычисления выполнялись параллельным квазистатическим кодом.

Используемые параметры моделирования соответствовали эксперименту AWAKE. Поэтому результат моделирования предсказывает результат эксперимента.

Оптимальные продольные профили плотности найдены для двух режимов работы установки — высокой и низкой плотности плазмы. Допустимая погрешность в реализации параметров профиля плотности составляет порядка 20% от оптимальных, при этом относительная погрешность амплитуды кильватерного потенциала не превышает 10%.

Заряд затравочного электронного сгустка оказывает существенное влияние на амплитуду потенциала, а также на его поведение во второй плазменной секции. Это влияние требует более подробного изучения.

Положение оптимума кильватерного потенциала на выходе из второй плазменной секции не зависит от длины вакуумного промежутка. На форму оптимального профиля плотности она также не влияет. Кроме того, при достаточно большом радиальном разлёте пучка после прохождения вакуумного промежутка можно аналитически связать амплитуды потенциала до и после промежутка с длиной промежутка. Это позволяет оптимизировать параметры профиля плотности лишь для одного значения длины промежутка.

Список использованных источников

- Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch / Erik Adli, Arun Ahuja, O Apsimon et al. // Nature. — 2018. — Vol. 561, no. 7723. — P. 363–367.
- [2] Path to AWAKE: Evolution of the concept / Allen Caldwell, Erik Adli, L Amorim et al. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2016. — Vol. 829. — P. 3–16.
- [3] Caldwell Allen, Lotov KV. Plasma wakefield acceleration with a modulated proton bunch // Physics of Plasmas. — 2011. — Vol. 18, no. 10. — P. 103101.
- [4] Experimental observation of proton bunch modulation in a plasma at varying plasma densities / Erik Adli, A Ahuja, O Apsimon et al. // Physical review letters. — 2019. — Vol. 122, no. 5. — P. 054802.
- [5] Lotov KV. Controlled self-modulation of high energy beams in a plasma // Physics of Plasmas. — 2011. — Vol. 18, no. 2. — P. 024501.
- [6] Sosedkin AP, Lotov KV. LCODE: a parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2016. — Vol. 829. — P. 350–352.

- [7] Lotov KV, Minakov VA. Proton beam self-modulation seeded by electron bunch in plasma with density ramp // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2020. — Vol. 62, no. 11. — P. 115025.
- [8] Witness emittance growth caused by driver density fluctuations in plasma wakefield accelerators / VA Minakov, M Tacu, AP Sosedkin, KV Lotov // Physics of Plasmas. — 2018. — Vol. 25, no. 9. — P. 093112.
- [9] AWAKE status report : Rep. ; Executor: Collaboration AWAKE : 2020.
- [10] K.V. Lotov A.P. Sosedkin. LCODE user manual, 2020. URL: https://lcode.info/.
- [11] Verra L. Controlled Growth of the Self-Modulation of a Relativistic Proton Bunch in Plasma // arXiv preprint arXiv:2203.13752. — 2022.
- [12] Commissioning of the electron injector for the AWAKE experiment / S-Y Kim, S Doebert, O Apsimon et al. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2020. — Vol. 953. — P. 163194.
- [13] Lee EP, Cooper RK. General envelope equation for cylindrically symmetric charged particle beams // Part. Accel. 1976. Vol. 8. P. 67–Erratum.