

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

А.Д.Беклемишев  
НГУ, 2004

15 марта 2011 г.

Данный курс предназначен для магистрантов кафедры физики плазмы и предполагает знакомство с основными понятиями физики плазмы, кинетической теории и электродинамики. Целью курса является введение терминологии и разъяснение физических и математических основ теории плазмы. На уровне элементарного введения освещены некоторые сложные вопросы теоретической физики, которые широко используются в теории плазмы и необходимы экспериментаторам для понимания теоретических статей. Выбор тем, конечно, чисто субъективен и целиком на совести автора.

## Фазовое пространство и микроскопическая функция распределения

Пусть система (газ или плазма) содержит  $N$  бесструктурных частиц ( $3N$  степеней свободы). Тогда задание  $6N$  гамильтоновых переменных,

$$(q_i, p_i), \quad i = 1, \dots, 3N$$

или такого же числа лагранжевых переменных

$$(q_i, \dot{q}_i), \quad i = 1, \dots, 3N$$

полностью определяет состояние системы и все физические параметры. (Если частицы имеют внутренние степени свободы, то  $3N$  надо заменить на полное число степеней свободы  $S$  в системе.)

- Фазовым пространством системы называется координатное пространство  $\{\hat{X}\}$   $6N$  ( $2S$ ) измерений, точки которого однозначно характеризуют состояние системы в данный момент.

В соответствии с определением, координаты в фазовом пространстве могут быть разные, так что возможно гамильтоново,

$\{\hat{X}\} = \{(q_i, p_i), i = 1, \dots, 3N\}$ , лагранжево,  $\{\hat{X}\} = \{(q_i, \dot{q}_i), i = 1, \dots, 3N\}$ , или иное их определение. Разница между гамильтоновым и лагранжевым представлением существенна, так как в замагниченной плазме определение обобщённого импульса частицы зависит от векторного потенциала, который сам зависит от координат и времени. Однако в любом случае каждое конкретное состояние системы изображается одной точкой, так что истинная плотность состояний системы  $s$  имеет вид

$$F_N(\hat{X}, t) = \delta(\hat{X} - \hat{X}_s(t)),$$

где  $\hat{X} = \hat{X}_s(t)$  - траектория системы в фазовом пространстве, определяемая уравнениями движения частиц и начальными условиями.

- Функция  $F_N(\hat{X}, t)$  называется микроскопической функцией распределения.

## Ансамбль Гиббса и фазовая плотность

Точные значения начальных условий для всех частиц неизвестны, так как в эксперименте мы ограничены показаниями относительно небольшого набора датчиков.

- Ансамблем Гиббса для данной системы и данного набора датчиков назовём все состояния системы которые соответствуют идентичным показаниям датчиков.

Число состояний в ансамбле обычно очень велико ( $K = 6N - d$ , где  $d$  - число измеряемых параметров), так что от набора датчиков зависимость слабая. Однако можно создать системы с малым числом частиц и соизмеримым числом датчиков, тогда и зависимость ансамбля от конкретного набора датчиков будет существенной. Число состояний в ансамбле - это число параметров системы, которые нам неизвестны. Логично считать реализации этих параметров случайными.

Если конкретное состояние системы является случайной реализацией системы из ансамбля Гиббса, то можно вычислить математическое ожидание, дисперсию, и т.д., для любой физической величины, являющейся функцией фазовых переменных. Это можно сделать с помощью понятия фазовой плотности вероятности:

- Функция  $f_N(\hat{X}, t)$  называется фазовой плотностью, или  $N$ -частичной функцией распределения микросостояний в точке  $\hat{X}$ , если она пропорциональна плотности состояний ансамбля в окрестности этой точки, т.е.,

$$\lim_{dX \rightarrow 0} \frac{dK}{K} = f_N(\hat{X}, t) d\hat{X}.$$

Этот предел имеет физический смысл при большом числе состояний  $dK$  в области  $d\hat{X}$ .

Нормировка  $f_N(\hat{X}, t)$  соответствует нормировке вероятности

$$\int f_N(\hat{X}, t) d\hat{X} = 1.$$

Часто вместо понятия “датчики” в определении ансамбля Гиббса используется понятие “термодинамические параметры”. В условиях неравновесной среды, каковой является типичная лабораторная плазма, однозначное определение “термодинамических параметров” затруднительно, и вопрос всё равно сводится к тому как они измеряются, т.е., “датчикам”.

## Средние по ансамблю и флуктуации

Для любой физической величины  $A$ , являющейся функцией фазовых переменных, можно определить

- среднее по ансамблю, т.е.,

$$\langle A \rangle = \int A(\hat{X}) f_N(\hat{X}, t) d\hat{X}.$$

В частности, фазовая плотность сама является средним по ансамблю от микроскопической функции распределения:

$$f_N(\hat{X}, t) = \int \delta(\hat{X}' - \hat{X}) f_N(\hat{X}', t) d\hat{X}' = \langle F_N \rangle.$$



Если  $A$  зависит только от показаний датчиков из определения ансамбля Гиббса, то  $\langle A \rangle = A$ . В противном случае (например,  $A$  может быть давлением, которое показал бы дополнительный датчик на другой стенке сосуда) значение  $A$  зависит от конкретной реализации, и можно говорить о

- микроскопических флуктуациях, т.е., отклонениях

$$\delta A(\hat{X}, t) = A - \langle A \rangle.$$

Пользуясь понятиями микроскопической функции распределения и фазовой плотности можно выразить флуктуации через

- флуктуацию функции распределения

$$\delta f_N(\hat{X}, t) = F_N - f_N,$$

так что

$$\delta A(\hat{X}, t) = \int A(\hat{X}) \delta f_N(\hat{X}, t) d\hat{X}.$$

Важный вывод из материала этого раздела заключается в том, что, работая в дальнейшем только со средней фазовой плотностью  $f_N$ , мы теряем большую часть информации о микроскопических флуктуациях в системе. Тем не менее, та её часть, которая заложена в показаниях установленных датчиков (которые тоже могут флуктуировать во времени) сохраняется.

## Кинетическое уравнение и уравнение Лиувилля

Предположим, что нам известны уравнения движения всех частиц системы. Можно ли узнать как в процессе эволюции меняется функция распределения? Да, она подчиняется *кинетическому уравнению*, имеющему смысл уравнения непрерывности, или закона сохранения числа систем ансамбля Гиббса в процессе движения системы.

Действительно, траектории систем в фазовом пространстве не пересекаются ( в силу однозначности задания состояния системы координатами каждой точки), не начинаются и не заканчиваются, т.е., ведут себя подобно линиям тока жидкости. Поэтому плотность изображающих точек, т.е., фазовая плотность  $f_N$ , должна удовлетворять

- кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \text{Div}_{\dot{X}} (\dot{X} f_N) = 0. \quad (1)$$

Здесь дивергенция берётся по всем координатам фазового пространства, а  $\dot{X}$  - скорость фазового потока, определяющаяся уравнениями движения. Заметим, что микроскопическая функция распределения  $F_N$  также удовлетворяет этому уравнению.

Если движение системы описывается уравнениями Гамильтона,

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i},\end{aligned}$$

то справедлива

- *Теорема Лиувилля*: фазовый объём сохраняется в процессе эволюции, т.е., фазовый поток  $\dot{X}$  является несжимаемым,  $\text{Div}_{\dot{X}}(\dot{X}) = 0$ .

Действительно, если выполняются уравнения Гамильтона, в соответствующем фазовом пространстве

$$\text{Div}_{\dot{X}}(\dot{X}) = \sum_i \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Если фазовый объём сохраняется, то кинетическое уравнение может быть преобразовано к виду, который называется

- *уравнением Лиувилля*

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \left( \dot{X} \nabla_{\dot{X}} \right) f_N = \frac{df_N}{dt} = 0.$$

А для Гамильтоновой системы это уравнение можно записать через скобку Пуассона:

$$\frac{df_N}{dt} = \frac{\partial f_N}{\partial t} + \{H, f_N\} = 0.$$

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что фазовая плотность сохраняется вдоль траектории системы в фазовом пространстве.

## Замечания

1: Можно ли получить уравнение Лиувилля в пространстве лагранжевых переменных? Да, но только для определённого класса сил. Действительно, перепишем кинетическое уравнение в терминах координат  $q_i$  и координатных скоростей  $v_i = \dot{q}_i$ :

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} (v_i f_N) + \frac{\partial}{\partial v_i} (\dot{v}_i f_N) \right] = 0.$$

Далее учтём, что  $q_i$  и  $v_i$  являются независимыми переменными, и введём определение ускорения  $a_i = \dot{v}_i$ . Выделяя полную (лагранжеву) производную по времени, получим кинетическое уравнение в виде

$$\frac{df_N}{dt} + f_N \text{Div}_{\hat{v}} \hat{a} = 0. \quad (2)$$

Видно, что оно сводится к уравнению Лиувилля (но в лагранжевых переменных!) в случае, когда дивергенция ускорения по скоростным переменным равна нулю. Это выполняется для всех действующих сил, которые не зависят от скорости, а также для силы Лоренца, которая перпендикулярна скорости, т.е., в большинстве задач.

2: Не следует думать, что любую систему можно описать с помощью уравнений Гамильтона или с помощью сил, не зависящих от скорости, и силы Лоренца. Незамкнутые системы, в частности плазма, излучающая циклотронные и тормозные кванты, не являются гамильтоновыми. (Излучающую плазму можно описывать уравнениями Лагранжа или Гамильтона, только если включить в рассмотрение Лагранжиан свободного поля, т.е., писать кинетическое уравнение не только для частиц, но и для квантов тоже). Радиационное остывание плазмы приводит к уменьшению фазового объёма системы со временем, и вместо уравнения Лиувилля следует пользоваться кинетическим уравнением в форме (2). Дополнительное слагаемое можно интерпретировать как интеграл столкновений частиц с квантами электромагнитного излучения.

## Цепочка уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона (ББГКИ)

Кинетическое уравнение для фазовой плотности  $f_N$  слишком сложное. Например, характеристики уравнения Лиувилля для  $f_N$  представляют собой траектории системы, т.е., чтобы их найти, надо решить дифференциальные уравнения движения для всех частиц. Упрощение возможно, если все частицы одинаковы (или есть несколько классов одинаковых частиц). Тогда можно выделить одну или несколько “пробных” частиц и следить за ними, т.е., поставить вопрос - какова вероятность обнаружить частицу (частицы) с данными параметрами в данной точке её (их) фазового пространства, если все остальные ведут себя по-прежнему, случайным образом?

Введём математические определения, необходимые для реализации такой программы.

- Назовём фазовым пространством одной частицы координатное пространство, точки которого полностью определяют её движение, например,  $\hat{x}_i = (\vec{q}_i, \vec{p}_i)$  или  $\hat{x}_i = (\vec{q}_i, \vec{q}_i)$ , тогда
- фазовое пространство  $s$  частиц является прямым произведением фазовых пространств составляющих частиц,  $\hat{X}_s = \hat{x}_1 \otimes \hat{x}_2 \otimes \dots \otimes \hat{x}_s$ .
- Одно- и  $s$ -частичные функции распределения для одинаковых частиц можно определить как

$$f_1(\hat{x}_1, t) = V \int f_N d\hat{x}_2 d\hat{x}_3 \dots d\hat{x}_N,$$

$$f_s(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s, t) = V^s \int f_N d\hat{x}_{s+1} \dots d\hat{x}_N,$$

с нормировкой

$$\int f_s d\hat{x}_1 \dots d\hat{x}_s = V^s.$$



Если в системе есть несколько сортов частиц, например, ионы и электроны, то последовательность функций распределения  $f_1, \dots, f_N$  окажется зависящей от того, в каком порядке пронумерованы частицы. Чтобы избежать неоднозначности, нужно разбить фазовые переменные на группы соответствующие сортам частиц, и использовать дополнительные индексы у функций распределения, показывающие, переменные каких групп используются в качестве аргументов. Например, для  $I$  ионов и  $J$  электронов ( $I + J = N$ ,  $i + j = s$ ) можно определить набор  $s$ -частичных функций распределения  $f_{i,j}$  как

$$f_{i,j}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+j}, t) = V^{i+j} \int f_N d\hat{x}_{i+1} \dots d\hat{x}_i d\hat{x}_{i+j+1} \dots d\hat{x}_N.$$

Уравнения, которым удовлетворяют  $s$ -частичные функции распределения, можно получить из кинетического уравнения для  $f_N$  интегрированием по “лишним” переменным. При этом интеграл от дивергенции преобразуется в интеграл по поверхности (по этим переменным). Кроме того, сделаем предположение, что при бесконечных значениях переменных частиц нет, т.е.,  $f_N(\hat{x}_i \rightarrow \infty) = 0$ , и используем его в качестве граничного условия при интегрировании. Тогда для  $f_s$  (интегрируя по  $\hat{x}_{s+1} \dots \hat{x}_N$ ) получим

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \text{Div}_{\hat{x}_s} \left( V^s \int \dot{X}_s f_N d\hat{x}_{s+1} \dots d\hat{x}_N \right) = 0, \quad (3)$$

где  $\hat{X}_s = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$ . Видно, что получить замкнутую систему уравнений удастся если выразить интеграл под дивергенцией через функции серии  $f_s$ . Если частицы совсем невзаимодействующие, то ускорение  $\dot{X}_s$  не зависит от положения и параметров всех остальных частиц, и мы получим просто

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \text{Div}_{\hat{x}_s} \left( \dot{X}_s f_s \right) = 0.$$

Однако даже в бесстолкновительной плазме взаимодействие всё-таки есть, например, через самосогласованное (коллективное) электромагнитное поле.

Учесть взаимодействие частиц можно в рамках приближения

- *парного взаимодействия*: положение и параметры всех остальных частиц не влияют на силу взаимодействия каждой пары между собой. (Не путать с парными соударениями!)

Это приближение по физическому содержанию близко к принципу суперпозиции взаимодействий, т.е., для электромагнитных полей, описываемых линейными уравнениями Максвелла, и бесструктурных частиц должно выполняться точно. Для нелинейно-поляризуемых атомов и молекул, например, в воде, возможны отклонения.

Если взаимодействие парное, а все частицы одинаковые, то ускорение  $\dot{X}_s$  можно разбить на две части: движение во внешних полях и взаимодействие в группе частиц  $s$ ,  $\dot{X}_s^0(\hat{X}_s, t)$ , которое зависит только от положения и параметров самих частиц, и ускорение при парном взаимодействии с “лишними” частицами,  $\dot{X}_s^1$ . Тогда уравнение (3) сводится к виду

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \text{Div}_{\hat{x}_s} \left( \dot{X}_s^0 f_s \right) + \text{Div}_{\hat{x}_s} \left( \frac{N-s}{V} \int \dot{X}_s^1(\hat{X}_s, \hat{x}_{s+1}, t) f_{s+1} d\hat{x}_{s+1} \right) = 0, \quad (4)$$

поскольку взаимодействие с каждой частицей из “лишнего” набора  $s + 1 \dots N$  одинаково и равно взаимодействию с частицей  $s + 1$ .

В частности, если гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_i \left( H_0(\hat{x}_i, t) + \sum_{j \neq i} U_{ij}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|, t) \right),$$

где  $H_0(\hat{x}_i, t)$  - гамильтониан “свободного” движения  $i$ -ой частицы во внешних полях, а  $U_{ij}$  - потенциал парного взаимодействия, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{H_0(\hat{x}_1), f_1\} = \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} d\hat{x}_2$$

для  $s = 1$ , и

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \{H_0(\hat{x}_i), f_s\} - \sum_{j \neq i}^s \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} \right) = \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int \frac{\partial U_{is+1}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_i} d\hat{x}_{s+1} \quad (5)$$

для произвольного  $s$ .

- Система связанных инедро-дифференциальных уравнений вида (5) называется *цепочкой уравнений ББГКИ*.

Решение полной цепочки ББГКИ эквивалентно решению исходного уравнения Лиувилля, а значит не проще, если не делать никаких дополнительных предположений. В ряде случаев удаётся выбрать приближения позволяющие “обрезать” цепочку, так что остаётся только одно-два уравнения. Помимо упрощения описания такое “обрезание” вносит в систему искусственную “статистическую” необратимость. Напомним, что уравнение Лиувилля полностью обратимо (так как его характеристики - траектории системы простираются как вперёд, так и назад по времени). О реальных причинах появления необратимости в сложных динамических системах будет сказано позже.

Отметим ещё, что потенциал взаимодействия для электростатического поля зарядов  $e$  имеет вид

$$U_{ij}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) = \frac{e^2}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|}.$$

Здесь не учтено магнитное взаимодействие зарядов, поскольку оно обычно является малой (релятивистской) поправкой к электростатическому взаимодействию. Вместе с тем необходимо учитывать его коллективную часть в квазинейтральной среде, где в среднем заряды скомпенсированы. Действительно, хотя вклад магнитного поля в столкновениях мал, взаимодействие заряда с полем тока проводимости может быть существенным. Чтобы не переусложнять формулы, в дальнейшем будем дописывать силу Лоренца, порождаемую коллективным магнитным полем, “от руки”.

## Бесстолкновительное кинетическое уравнение Власова

По физическому смыслу  $f_1$  - вероятность обнаружить частицу в окрестности данной точки фазового пространства. Соответственно,  $f_s$  - условная вероятность одновременного обнаружения  $s$  частиц в заданных точках. Если поведение частиц независимо, или *нескоррелировано*, то условная вероятность есть просто произведение вероятностей, т.е.,

$$f_s = f_1(\hat{x}_1)f_1(\hat{x}_2)\dots f_1(\hat{x}_s),$$

в частности,  $f_2 = f_1(\hat{x}_1)f_1(\hat{x}_2)$ . Если это выражение подставить в первое уравнение цепочки ББГКИ, то оно примет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{H_0(\hat{x}_1), f_1\} = \frac{N-1}{V} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} f_1(\hat{x}_2) d\hat{x}_2,$$

что эквивалентно бесстолкновительному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = 0. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения  $\vec{v}_1 = \partial H_0 / \partial \vec{p}_1$  - скорость, и сила

$$\vec{F}(\hat{x}_1) = -\frac{\partial H_0}{\partial \vec{q}_1} - \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} f_1(\hat{x}_2) d\hat{x}_2.$$



Второе слагаемое в выражении для силы представляет собой среднюю силу действующую на частицу со стороны всех остальных, т.е. силу, порождаемую самосогласованным полем Хартри. Как указано в предыдущем параграфе, помимо среднего электрического поля, описываемого интегралом от  $U_{12}$ , в  $\vec{F}(\hat{x}_1)$  присутствует ещё и сила Лоренца от коллективного магнитного поля, т.е., в плазме с магнитным полем имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} + \frac{e}{m} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_1 \times \vec{B} \right) \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1} = 0 \quad (7)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  - средние (суммарные) поля.

- Бесстолкновительное кинетическое уравнение (7) называется уравнением Власова.

Факторизованная многочастичная функция распределения (в виде произведения одночастичных) в общем случае не удовлетворяет соответствующим уравнениям. В частности,  $f_2 = f_1(\hat{x}_1)f_1(\hat{x}_2)$  не удовлетворяет второму уравнению цепочки ББГКИ, в чём легко убедиться прямой подстановкой. Не обращаются в нуль слагаемые

$$\sum_{i,j \neq i}^s \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i}$$

отвечающие за взаимодействие частиц. Предел, когда этими членами можно пренебречь, и, тем самым, оправдать бесстолкновительное приближение, называется “гидродинамическим”. Он формально определяется как  $N \rightarrow \infty$ , при  $NU_{ij} = const.$ , что соответствует “измельчению” частиц при постоянной внутренней энергии взаимодействия.

## Корреляционные функции и интеграл столкновений

Если рассматривать точные решения для многочастичных функций распределения, то они будут отклоняться от факторизованных функций, полученных в предположении независимости движения отдельных частиц. Естественно назвать разницу между ними корреляционной функцией, так как она описывает насколько скоррелированы (зависимы) движения частиц между собой. Примером скоррелированного поведения частиц в плазме может служить дебаевское экранирование зарядов. Введём определения корреляционных функций

$$g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - f_1(\hat{x}_1)f_1(\hat{x}_2);$$

$$g_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = f_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) - f_1(\hat{x}_1)f_1(\hat{x}_2)f_1(\hat{x}_3) - f_1(\hat{x}_1)g_2(\hat{x}_2, \hat{x}_3) - \\ - f_1(\hat{x}_2)g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_3) - f_1(\hat{x}_3)g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2);$$

Дополнительные слагаемые в правой части выражения для  $g_3$  связаны с тем, что каждая пара из трёх частиц может быть скоррелирована при независимой третьей частице. Это описывается в рамках двухчастичных корреляций, т.е., через  $g_2$ . Выражения для  $g_4$  и т.д. могут быть построены аналогично, однако в дальнейшем нам не понадобятся.

Система функций  $f_1, g_2, g_3 \dots$  может полностью заменить последовательность  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , т.е. цепочку БГКИ можно переписать в терминах корреляционных функций. Это оправдано, если корреляции в каком-то смысле слабые или у нас есть иная модель для их описания. Поскольку в системе новых функций только одна “функция распределения” -  $f_1$ , у неё можно опустить индекс,  $f_1 \equiv f$ .

Подставим выражение для  $f_2$  через  $f$  и  $g_2$  в первое уравнение цепочки:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_1} = \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial g_2}{\partial \vec{p}_1} d\hat{x}_2. \quad (8)$$

Левая часть этого уравнения такая же как и в уравнении Власова, а

- правая часть называется *интегралом столкновений* общего вида. Если удаётся выразить её через  $f$ , то она обозначается  $St(f)$  и называется штосс-членом.

Если считать, что траектория частицы определяется только усреднёнными полями, то левую часть кинетического уравнения можно коротко записать как полную производную, так что

$$\frac{df}{dt} = St(f).$$

Чтобы подчеркнуть, что, в соответствии с этим уравнением, интеграл столкновений изменяет производную функции распределения вдоль траектории, иногда вместо  $St(f)$  в литературе используется также запись

$$St(f) \equiv \left( \frac{df}{dt} \right)_{st}.$$

Заметьте, что это не уравнение, а обозначение.

Искать интеграл столкновений в рамках цепочки ББГКИ следует путём решения второго уравнения цепочки для  $g_2$ . Оно получается подстановкой выражений для  $f_2, f_3$  через  $f$  и  $g_2, g_3$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \vec{v}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_2} + \vec{F}(\hat{x}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2} \right) g_2 = \\ & = \left( \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2} \right) (f(\hat{x}_1) f(\hat{x}_2) + g_2) + \\ & + \frac{N-2}{V} \int \left( \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f(\hat{x}_1)}{\partial \vec{p}_1} g_2(\hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial f(\hat{x}_2)}{\partial \vec{p}_2} g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_3) \right) d\hat{x}_3 + \\ & + \frac{N-2}{V} \int \left( \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial g_3}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial g_3}{\partial \vec{p}_2} \right) d\hat{x}_3. \quad (9) \end{aligned}$$

В правой части этого уравнения первое слагаемое отвечает за взаимодействие частиц пары, второе - описывает действие среднего поля, являющегося результатом парных корреляций. В третьем слагаемом (интеграле тройных столкновений) присутствует трёхчастичная корреляционная функция, которую, строго говоря, надо искать из следующего, третьего уравнения цепочки.

- Приближение, в котором полностью игнорируются трёхчастичные (и более высокие) корреляции,  $g_3 = 0$ , называется *приближением парных столкновений*. Акты столкновений можно считать парными, если они хорошо изолированы друг от друга, т.е., потенциал взаимодействия короткодействующий по сравнению со средним расстоянием между частицами.

Ясно, что приближение парных столкновений позволяет замкнуть систему уравнений, хотя она всё равно остаётся весьма сложной.

## Интеграл столкновений Больцмана

Временно отвлечёмся от цепочки ББГКИ и попробуем реализовать физическое представление о парных соударениях для вычисления интеграла столкновений как скорости изменения функции распределения вдоль траектории.

Столкновение частиц со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  убирает их из соответствующей точки фазового пространства, добавляя в точку  $\vec{v}'_1$ ,  $\vec{v}'_2$ . Однако есть и обратный процесс, при котором частицы со скоростями  $\vec{v}'_1$ ,  $\vec{v}'_2$  в результате столкновения приобретают скорости  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ; таким образом

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{st} = R - L.$$

Вычислим  $R$  и  $L$ .



Столкновения сохраняют импульс и энергию, так что для одинаковых частиц с произвольным потенциалом взаимодействия имеем

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \\ v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases} .$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + g \vec{\epsilon}) \\ \vec{v}'_2 = \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - g \vec{\epsilon}) \end{cases} , \quad (10)$$

где  $g = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$  - относительная скорость, сохраняющаяся в соударении, а  $\vec{\epsilon}$  - произвольный единичный вектор. Задание прицельного параметра и потенциала взаимодействия определяет направление рассеяния,  $\vec{\epsilon}$ .

Считая функцию распределения однородной на масштабе столкновения, подсчитаем число налетающих частиц в цилиндре длиной  $g\delta t$  с прицельным параметром  $b$ :

$$dN = b db d\phi \cdot g\delta t \cdot \frac{N}{V} f(r, \vec{v}_2, t) d^3\vec{v}_1.$$

Полная убыль частиц в точке фазового пространства за время  $\delta t$  получится отсюда умножением на вероятность попадания на рассеивающий центр,

$$L d^3\vec{v}_1 \delta t = \frac{N}{V} \int b db d\phi g \delta t d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2 f(r, \vec{v}_2, t) f(r, \vec{v}_1, t).$$

В силу симметрии и сохранения относительной скорости,  $g$

$$R d^3\vec{v}_1 \delta t = \frac{N}{V} \int b db d\phi g \delta t d^3\vec{v}'_1 d^3\vec{v}'_2 f(r, \vec{v}'_2, t) f(r, \vec{v}'_1, t),$$

причём  $d^3\vec{v}'_1 d^3\vec{v}'_2 = d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2$  в силу теоремы Лиувилля для сталкивающихся частиц.

Окончательно,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{st} = \frac{N}{V} \int |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| d\sigma [f(r, \vec{v}'_2, t)f(r, \vec{v}'_1, t) - f(r, \vec{v}_2, t)f(r, \vec{v}_1, t)] d^3\vec{v}_2, \quad (11)$$

где  $d\sigma = b db d\phi$  - дифференциальное сечение рассеяния, а скорости связаны соотношениями (10).

- Интеграл столкновений вида (11) называется интегралом столкновений Больцмана.

Он обладает всеми необходимыми свойствами, которыми должен обладать физически-состоятельный интеграл упругих столкновений:

1. Сохраняет импульс и энергию частиц при столкновениях;
2. Сохраняет число частиц в системе;
3. Обеспечивает неотрицательность функции распределения (вероятности!) в процессе эволюции;
4. Обеспечивает неубывание энтропии и релаксацию функции распределения к максвелловской (H-теорема.)

Интеграл столкновений Больцмана хорошо описывает нейтральные газы, а также может служить отправной точкой для вывода интеграла столкновений Ландау, который часто используется в физике плазмы. Поэтому важно знать все предположения, сделанные и необходимые для его вывода.

1. Столкновения парные,  $g_3 \equiv 0$ ;
  2. Столкновения локальные, так что внешние силы и поля на траектории не влияют, и зависимостью  $f(r)$  на масштабе столкновения можно пренебречь;
  3. Число сталкивающихся пар пропорционально  $f(r, \vec{v}_2, t)f(r, \vec{v}_1, t)$ , в то время как на самом деле оно должно быть пропорционально  $f_2(r_1, \vec{v}_1, r_2, \vec{v}_2, t)$ . Следовательно, эффективная парная корреляционная функция равна нулю всюду кроме точки столкновения, т.е., тоже локальна.
- Последнее предположение, т.е.,  $g_2 = 0$  **езде кроме точки столкновения**, называется Stosszahlansatz, или *гипотеза молекулярного хаоса*. Оно исключает эффекты, связанные с нелокальными флуктуациями и обеспечивает необратимость эволюции системы.

## Иерархия времён Боголюбова и приближение слабого взаимодействия

Возвратимся к цепочке ББГКИ и интегралу столкновений общего вида. Можно заметить, что предположения вывода интеграла столкновений Больцмана весьма радикальны. Существуют и более мягкие предположения, позволяющие замкнуть цепочку уравнений. Так, смягчая требования локальности столкновений, Боголюбов предложил сравнить следующие характерные времена:

$$\tau_h \sim L/c_s$$

- время гидродинамической релаксации;

$$\tau_{rel} \sim \lambda/v_T$$

- время релаксации  $f$  к локальному равновесию; и

$$\tau_{corr} \sim d/v_T$$

- время пробега частицы на корреляционном расстоянии, т.е., на длине единичного столкновения.

- Во многих случаях

$$T_h \gg T_{rel} \gg T_{corr}, \quad (12)$$

что и называется *иерархией времён Боголюбова*.

Например, предположения вывода интеграла столкновений Больцмана требуют  $T_h \gg T_{rel}$ ,  $T_{corr} = 0$ , что совместимо, хотя и жёстче, чем соотношения (12).

Если иерархия времён Боголюбова имеет место, то корреляционные функции, меняющиеся на масштабе времён  $T_{corr}$ , можно считать близкими к квази-равновесию во время релаксации  $f$ . Таким образом, появляется возможность пренебречь производными по времени в уравнениях для корреляционных функций.

Остаётся выяснить, применима ли эта иерархия к условиям в плазме?

Первое неравенство обычно выполняется в космической, слабоионизованной и холодной плазме, тогда как в горячей плазме термоядерных ловушек длина свободного пробега может превышать размер системы, и имеет место обратное неравенство. Однако на вид интеграла столкновений в большей степени влияет второе соотношение,  $\tau_{rel} \gg \tau_{corr}$ . А оно в плазме с дальнедействующим кулоновским взаимодействием выполняется с натяжками. Тем не менее, если формально подставить вместо  $\lambda$  спитцеровскую длину свободного пробега, а вместо  $d$  - дебаевский радиус  $r_d$ , получим

$$\frac{\tau_{rel}}{\tau_{corr}} \sim nr_d^3,$$

т.е., соотношение времён оказывается правильным в *идеальной* плазме с большим значением плазменного параметра. Соответственно, в неидеальной плазме необходимо решать динамические уравнения для корреляций наряду с кинетическим уравнением, тогда как в идеальной плазме можно использовать квазистационарное приближение.

- Приближение *слабого взаимодействия* вводит иерархию относительных величин многочастичных корреляций и потенциала взаимодействия,

$$g_2/f^2 \sim \epsilon^2, \quad g_3/f^3 \sim \epsilon^3, \dots \epsilon \ll 1, \quad (13)$$

что несколько смягчает жёсткость приближения парных столкновений,  $g_3 = 0$ . Иерархия совместима с цепочкой ББГКИ при условии

$$U_{ij} \sim \epsilon,$$

т.е., именно слабого потенциала взаимодействия, причём  $NU_{ij} \sim 1$  (чтобы поле Хартри было нулевого порядка.)

Это приближение весьма полезно в плазме для описания слабых дальних столкновений и позволяет учитывать флуктуации. Мы будем использовать его при выводе интеграла столкновений Балеску-Ленарда. К сожалению, оно плохо совместимо с описанием близких столкновений, поскольку они сильные.



Интеграл столкновений Ландау является продуктом последовательного применения приближения слабого взаимодействия к интегралу столкновений Больцмана с кулоновским потенциалом. В результате, локальность взаимодействия в приближении Больцмана делает его неприменимым при дальних столкновениях, а слабость взаимодействия - при близких. Как известно, эти обстоятельства преодолеваются формальным обрезанием интеграла и введением “кулоновского логарифма”.

Существуют и другие приближения и способы замыкания цепочки ББГКИ. Особенно актуальны и интересны исследования в этом направлении для описания неидеальной или пыльной плазмы, развития кинетической теории жидкостей.

## Интеграл столкновений Балеску-Ленарда

Вывод этого интеграла столкновений основан на последовательном применении приближения слабого взаимодействия и иерархии времён Боголюбова к цепочке БГКИ, и адекватно описывает дальние соударения в плазме. На этом примере удаётся проследить связь интеграла столкновений с волновыми свойствами плазмы.

Применим приближение слабого взаимодействия к первым двум уравнениям цепочки БГКИ (8), (9), причём во втором уравнении сохраним только члены первого порядка малости. Тогда тройная корреляция  $g_3$  выпадет,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \vec{v}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_2} + \vec{F}(\hat{x}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2} \right) g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - \\ & - \frac{N-2}{V} \int \left( \frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f(\hat{x}_1)}{\partial \vec{p}_1} g_2(\hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial f(\hat{x}_2)}{\partial \vec{p}_2} g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_3) \right) d\hat{x}_3 = \\ & = \left( \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2} \right) f(\hat{x}_1) f(\hat{x}_2), \quad (14) \end{aligned}$$

и первая пара уравнений станет замкнутой.

Итак, замечательным следствием приближения слабого взаимодействия (или слабых столкновений) является относительная малость корреляций, так что тройной корреляцией можно пренебречь, а уравнение для парной корреляции  $g_2$  оказывается линейным, если рассматривать функцию распределения  $f$  как заданную:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \right) g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = R, \quad (15)$$

где

$$\hat{L}_i g_2(\hat{x}_i, \hat{x}_j) \equiv \left( \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} + \vec{F}(\hat{x}_i) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \right) g_2(\hat{x}_i, \hat{x}_j) - \frac{N-2}{V} \int \frac{\partial U_{i3}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f(\hat{x}_j)}{\partial \vec{p}_i} g_2(\hat{x}_3, \hat{x}_j) d\hat{x}_3, \quad (16)$$

а  $R$  - правая часть уравнения (14). Заметим, что оператор действует только на один аргумент функции  $g_2$ .

Линейный оператор  $\hat{L}_i$  оказывается идентичен дифференциальному оператору в **линеаризованном** уравнении Власова для соответствующей частицы. Корреляции распространяются вдоль траекторий частиц как малые возмущения в фазовом пространстве. Убедимся в этом.

## Линеаризация уравнения Власова

Уравнение Власова было записано как

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = 0, \quad (17)$$

где

$$\vec{F}(\hat{x}_1) = -\frac{\partial H_0}{\partial \vec{q}_1} - \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} f_1(\hat{x}_2) d\hat{x}_2.$$

Линеаризуем систему,  $f_1 = f + \delta f$ . Теперь для  $\delta f$  имеем

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial \delta f}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial \delta f}{\partial \vec{p}_1} + \delta \vec{F}_1 \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_1} = 0, \quad (18)$$

где  $\vec{F}$  - сила, найденная по невозмущённой функции распределения, а  $\delta \vec{F}_1$  - интегральный оператор,

$$\delta \vec{F}_1 = -\frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} \delta f(\hat{x}_2) d\hat{x}_2. \quad (19)$$

Получили *линеаризованное уравнение Власова* в виде

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \left( \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\hat{x}_1) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} \right) \delta f - \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_1} \delta f(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 = 0, \quad (20)$$

что и требовалось доказать.

В Фурье представлении распространение линейных возмущений можно описать с помощью тензора диэлектрической проницаемости. Поскольку уравнения похожи, это верно и для корреляций.

Обычно вычисление корреляций проводится лишь для немагнитной плазмы. Поскольку корреляции сохраняются где-то в пределах дебаевского радиуса, фактически это означает, что теория столкновений Балеску-Ленарда построена для случая, когда ларморовский радиус много больше дебаевского,  $\rho \gg r_D$ . Противоположный предел исследуется, но работа пока не доведена до конца. Если магнитным взаимодействием полностью пренебречь, то имеет место трансляционная симметрия

$$g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = g_2(r_1 - r_2, v_1, v_2, t). \quad (21)$$

Следовательно, в однородной системе можно сделать преобразование Фурье по  $r_1 - r_2$  и получить

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + L_1(k_1) + L_2(-k_1) \right) g_2(k_1, v_1, v_2, t) = R(k_1, v_1, v_2, t), \quad (22)$$

где

$$L_j(k_1) = ik_1 v_j - \frac{4\pi i q_1 q_2}{m_j} \frac{k_1}{k_1^2} \frac{\partial f}{\partial v_j} \int d^3 v_j, \quad (23)$$

$$R(k_1, v_1, v_2, t) = 4\pi i q_1 q_2 \frac{k_1}{k_1^2} \left( \frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial v_2} \right) f(v_1) f(v_2). \quad (24)$$

При решении уравнения (22) мы договорились считать функцию распределения постоянной во времени (иерархия времён Боголюбова!). Поэтому можно сделать преобразование Лапласа по времени, и после длительных и сложных преобразований (для  $g_2$  получается выражение из 12 слагаемых из которых 8 точно сокращаются...) выводится интеграл столкновений в виде

$$St(f_s, f_{s'}) = -\frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int d^3 v' Q_{\alpha\beta} \cdot \left( \frac{1}{m_{s'}} \frac{\partial}{\partial v'_\beta} - \frac{1}{m_s} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \right) f_s(\mathbf{v}) f_{s'}(\mathbf{v}'). \quad (25)$$

Здесь  $s$  и  $s'$  - сорта частиц, а ядро интеграла  $Q$  даётся формулой

$$Q = \frac{2q_s^2 q_{s'}^2}{m_s} \int d^3 \mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{|\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v})|^2}, \quad (26)$$

причём

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi q_s q_{s'}}{m_s k^2} \int d^3 \mathbf{v} \frac{\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \quad (27)$$

- продольная (вдоль  $\mathbf{k}$ ) диэлектрическая проницаемость.

Строго говоря, такая форма штосс-члена получается только для устойчивой плазмы, в которой  $\varepsilon_{\parallel}$  не имеет нулей на оси интегрирования. В недавней работе

- S. D. Baalrud et al. PHYSICS OF PLASMAS 17, 055704 (2010)

рассмотрен случай слабо-неустойчивой плазмы, и показано, что в интеграле столкновений появляется ещё одно слагаемое, пропорциональное инкременту неустойчивости.

- Интеграл столкновений (25) с ядром (26) называется ИС Балеску-Ленарда для плазмы.
- Интеграл столкновений в форме (25) называется ИС в форме Ландау.
- Интеграл столкновений (25) (в форме Ландау) с ядром

$$Q = \frac{2q_s^2 q_{s'}^2}{m_s} \int d^3 \mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \quad (28)$$

( $\varepsilon_{\parallel} \rightarrow 1$ ) называется ИС Ландау.

- Существуют другие виды интеграла столкновений Балеску-Ленарда - для пылевой плазмы, кварк-глюонной плазмы, и др. (Общими являются исходные предположения и методы, но варьируется взаимодействие частиц.)



Интеграл по волновым векторам в формуле для  $Q$ , вообще говоря, расходится. Для случая Балеску-Ленарда он расходится только при больших  $k$ , в случае Ландау - и при малых тоже. Это объясняется тем, что ИС БЛ выводился в предположении слабого взаимодействия, а большие  $k$  соответствуют близким *сильным* соударениям. Однако слабые дальние взаимодействия он описывает точно, так что при малых волновых числах  $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v}) \rightarrow \infty$  и искусственного обрезания интеграла не требуется. Интеграл столкновений Ландау может быть получен из интеграла столкновений Больцмана (для сильных столкновений) путём применения к нему приближения слабых столкновений (что противоречиво). Поэтому он и не работает ни в одном из пределов и требует искусственного обрезания.

Интегралы столкновений Балеску-Ленарда и Ландау получаются в приближениях

- слабых столкновений,
- в идеальной плазме (иерархия Боголюбова),
- со слабым магнитным полем,  $\lambda_D < \rho$ ,
- без неустойчивых волн,
- с достаточной однородностью,  $\lambda_D \nabla f \ll f$ ,

и удовлетворяют необходимым “правильным” свойствам:

- Сохраняется неотрицательность функции распределения при эволюции,
- Сохраняется число частиц,
- Сохраняется полный импульс,
- Сохраняется полная энергия системы,
- Максвелловская функция распределения является стационарным решением,
- При столкновениях функция распределения релаксирует к Максвелловской.

## Уравнение Фоккера-Планка

Существует альтернативный подход к описанию процессов столкновительной релаксации, основанный на теории броуновского движения пробной частицы. Действительно, если бы мы на основании каких-то соображений смогли сразу написать уравнение для эволюции одночастичной функции распределения (вероятности обнаружить ту самую пробную частицу в данном месте фазового пространства), то и цепочка ББГКИ была бы не нужна.

Для броуновского движения характерно наличие такого временного интервала  $\tau$ , в течение которого координаты броуновской частицы в фазовом пространстве изменяются бесконечно мало, но происходит много флуктуаций. Т.е., временной интервал  $\tau$  соответствует времени релаксации в иерархии Боголюбова:

$$\tau_h \gg \tau \gg \tau_{corr}. \quad (29)$$

Тогда эволюция функции распределения пробной частицы описывается интегральным уравнением

$$f(\hat{x}, t + \tau) = \int f(\hat{x} - \delta\hat{x}, t) W_\tau(\hat{x} - \delta\hat{x}, \delta\hat{x}) d\delta\hat{x}. \quad (30)$$

Величина  $W_\tau(\hat{x} - \delta\hat{x}, \delta\hat{x})$  представляет собой вероятность того, что за время  $\tau$  первоначальное значение  $\hat{x} - \delta\hat{x}$  изменится на  $\delta\hat{x}$  и называется *вероятностью перехода*. Она нормирована на единицу

$$\int W_\tau(\hat{x}, \delta\hat{x}) d\delta\hat{x} = 1. \quad (31)$$

Если, как у нас, *вероятность перехода не зависит от того, как частица двигалась на предыдущих шагах по времени, такой процесс называется марковским*. Являются ли процессы рассеяния частиц в плазме марковскими - вопрос сложный. По-видимому это так, но лишь для систем без долгоживущих корреляций, т.е., в устойчивой, спокойной плазме, близкой к термодинамическому равновесию.

Разложим интегральное уравнение по степеням  $\tau$  и  $\delta\hat{x}$  :

$$\begin{aligned}
 f(\hat{x}, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t} + O(\tau^2/\tau_h^2) = \\
 = \int d\delta\hat{x} \left[ f(\hat{x}, t) - \delta\hat{x}_i \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\delta\hat{x}_i \delta\hat{x}_j}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j} - \dots \right] \times \\
 \times \left[ W_\tau(\hat{x}, \delta\hat{x}) - \delta\hat{x}_i \frac{\partial W_\tau}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\delta\hat{x}_i \delta\hat{x}_j}{2} \frac{\partial^2 W_\tau}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j} - \dots \right]. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости по  $\tau/\tau_h$  и третьего порядка по  $\delta\hat{x}$ , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left( \frac{\langle \delta\hat{x}_i \delta\hat{x}_j \rangle}{2\tau} f \right) - \frac{\langle \delta\hat{x}_i \rangle}{\tau} f \right], \quad (33)$$

где, по определению, средние значения имеют вид

$$\langle \delta\hat{x}_i \rangle \equiv \int \delta\hat{x}_i W_\tau(\hat{x}, \delta\hat{x}) d\delta\hat{x}, \quad (34)$$

$$\langle \delta\hat{x}_i \delta\hat{x}_j \rangle \equiv \int \delta\hat{x}_i \delta\hat{x}_j W_\tau(\hat{x}, \delta\hat{x}) d\delta\hat{x}. \quad (35)$$

Если плазма однородна на масштабе флуктуаций (дебаевского радиуса), то производными по координатам можно пренебречь:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ \frac{\partial}{\partial v_j} \left( \frac{\langle \delta v_i \delta v_j \rangle}{2\tau} f \right) - \frac{\langle \delta v_i \rangle}{\tau} f \right]. \quad (36)$$

Одним из оправданий обрезания ряда разложения Тейлора на третьем члене является то, что в плазме  $\langle \delta v_i \rangle$  и  $\langle \delta v_i \delta v_j \rangle$  являются логарифмически расходящимися (большими), а  $\langle \delta v_i \delta v_j \delta v_k \rangle$  и следующие члены - конечны (порядка единицы по сравнению с кулоновским логарифмом.) Правая часть уравнения Фоккера-Планка (36) соответствует интегралу столкновений. Коэффициенты

$$\mathbf{F}(v) = \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\tau}, \quad D_{ij} = \frac{\langle \delta v_i \delta v_j \rangle}{2\tau}, \quad (37)$$

имеют смысл скорости потока и коэффициента диффузии в пространстве скоростей. Их можно найти, если есть какая-то разумная модель для флуктуаций поля, действующего на частицы, например, равновесные тепловые флуктуации.

## Коэффициенты Фоккера-Планка

Чтобы вычислить коэффициенты уравнения (36) по известному спектру флуктуаций электромагнитного поля, можно начать с уравнения движения заряженной частицы в электрическом поле. Как и при выводе интеграла столкновений Балеску-Ленарда считаем ларморовский радиус много больше интересующего нас пространственного масштаба.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t). \quad (38)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение, но его можно формально проинтегрировать

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q}{m} \int_0^t \mathbf{E}(\mathbf{r}(t'), t') dt', \quad (39)$$

и попытаться решить с помощью последовательных приближений. В качестве первого приближения используем *интегрирование по невозмущённой траектории* - вместо точной траектории под интегралом в правой части подставим прямую

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}_0 t. \quad (40)$$

Отсюда получаем оценку

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau) - \mathbf{v}_0 = \frac{q}{m} \int_0^\tau \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(s), s) ds + \frac{q}{m} \int_0^\tau ([\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(s), s) ds + \dots \quad (41)$$

Однако это ещё не всё. Надо заметить, что поле  $\mathbf{E}$ , входящее в эту формулу, не является чисто флуктуационным. Дело в том, что наша пробная частица поляризует окружающую плазму, а соответствующее поле плазмы может воздействовать на частицу (подобно тому как это происходит при черенковском излучении). Условие выполнения черенковского резонанса с плазменными колебаниями,  $v = \omega_p/k_{\parallel}$ , допускает резонанс при любой скорости частицы. Из полного поля  $\mathbf{E}$  удобно выделить эту индуцированную черенковскую часть (см. ФСС, 3 курс). Полное поле частицы и среды в точке, где находится частица имеет вид

$$\mathbf{E}_{ind}(r = vt, t) = \frac{2iq}{4\pi^2 c^2} \int \frac{\omega \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \omega^2 \epsilon / c^2} \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})c^2}{\omega^2 \epsilon} \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)t} d^3 k d\omega, \quad (42)$$

а если от этого оставить только резонансную часть (связанную с особенностью  $\epsilon = 0$ ) и проинтегрировать по  $\omega$ , то

$$\mathbf{E}_{ind} = \frac{q}{2\pi^2} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \text{Im} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v})} d^3 k. \quad (43)$$

Такая формула приводится в книге Ишимару.



Если же интегрировать по  $k_{\parallel}$ , как делалось на ФСС,

$$\mathbf{E}_{ind} = \frac{\mathbf{v}q}{4\pi^2 v^2} \int \frac{\omega d\omega}{k_{\perp}^2 + \omega^2/v^2} \text{Im} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) dk_{\perp}^2. \quad (44)$$

то видно, что результирующая сила на частицу будет постоянно направлена против скорости.

Итак, запишем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ind} + \tilde{\mathbf{E}}, \quad (45)$$

где  $\tilde{\mathbf{E}}$  - флуктуирующая (случайная) часть поля. Теперь, с нужной нам квадратичной точностью,

$$D_{ij} = \frac{q^2 \tau}{2m^2} E_{i,ind}(\mathbf{v}) E_{j,ind}(\mathbf{v}) + \frac{q^2}{2\tau m^2} \int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' \langle \tilde{E}_i(\mathbf{r}_0(s), s) \tilde{E}_j(\mathbf{r}_0(s'), s') \rangle. \quad (46)$$

Перекрестные члены выпадают из-за предположенной однородности плазмы (тогда у флуктуационного поля нет выделенного направления и его среднее вдоль траектории равно нулю).

Коэффициент Фоккера-Планка  $D_{ij}$  имеет порядок  $v^2/\tau_h$ , поэтому первое слагаемое, пропорциональное малому  $\tau$ , можно опустить. Во втором слагаемом сделаем замену переменной,  $t = s - s'$ ,

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{q^2}{2\tau m^2} \int_0^\tau ds \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \tilde{E}_i(\mathbf{r}_0(s), s) \tilde{E}_j(\mathbf{r}_0(s-t), s-t) \rangle. \quad (47)$$

Бесконечные пределы интегрирования поставлены в предположении малой длительности корреляции поля ( $\tau \gg \tau_{corr}$ !), тогда это всё равно...

Вообще-то величина  $K(\mathbf{r}', t', \mathbf{r}, t) = \langle a(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t') a(\mathbf{r}', t') \rangle$  называется автокорреляционной функцией для поля  $a(\mathbf{r}, t)$ . Она часто встречается в теории, её измеряют, скажем, для турбулентных состояний. Однако вместо усреднения по реализациям случайной величины, на основании *эргодической гипотезы*, используют усреднение по какому-то интервалу пространства и времени,  $\mathbf{r}', t'$ . Если состояние однородно, как в нашей задаче, то остаётся зависимость только от величины сдвига между точками измерения, а саму функцию представляют через Фурье-разложение флуктуирующего поля:

$$K(\mathbf{r}, t) = \left\langle \tilde{E}_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t') \tilde{E}_j(\mathbf{r}', t') \right\rangle = \frac{1}{VT} \int \tilde{E}_i(\mathbf{k}, \omega) \tilde{E}_j^*(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega. \quad (48)$$

Здесь  $V$  и  $T$  характеризуют объём и период усреднения. По определению, *тензор спектральной плотности флуктуаций*

$$\left\langle \tilde{E}_i \tilde{E}_j^* \right\rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{VT} \tilde{E}_i(\mathbf{k}, \omega) \tilde{E}_j^*(\mathbf{k}, \omega). \quad (49)$$

*Внимание, возможны иные нормировки!*

Возвращаясь к выражению для  $D_{ij}(\mathbf{v})$ , получим

$$\langle \tilde{E}_i(\mathbf{r}(0) + \mathbf{v}s, s) \tilde{E}_j(\mathbf{r}(0) + \mathbf{v}s - \mathbf{v}t, s - t) \rangle = K(-\mathbf{v}t, -t), \quad (50)$$

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{q^2}{2\tau m^2} \frac{1}{VT} \int_0^\tau ds \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \tilde{E}_i(\mathbf{r}(0) + \mathbf{v}s, s) \tilde{E}_j(\mathbf{r}(0) + \mathbf{v}s - \mathbf{v}t, s - t) \rangle \quad (51)$$

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{q^2}{2\tau m^2} \int_0^\tau ds \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int \langle \tilde{E}_i \tilde{E}_j^* \rangle_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})t} d^3k d\omega, \quad (52)$$

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{\pi q^2}{m^2} \int \langle \tilde{E}_i \tilde{E}_j^* \rangle_{\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v}} d^3k. \quad (53)$$

Поток в пространстве скоростей,  $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \langle \delta \mathbf{v} \rangle / \tau$ , получается аналогично, однако слагаемое с индуцированным полем играет главную роль, поскольку оно сохраняется даже в первом порядке по полю

$$F_{j,ind}(\mathbf{v}) = \frac{q^2}{2\pi^2 m} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v})} d^3 k. \quad (54)$$

Напротив, линейный вклад от флуктуирующего поля равен нулю, и лишь квадратичная поправка к  $\delta \mathbf{v}$  (см. уравнение (41)) даёт нетривиальную поправку к потоку. Оказывается, что

$$F_j(\mathbf{v}) = F_{j,ind}(\mathbf{v}) + \frac{\partial D_{ij}(\mathbf{v})}{\partial v_i}. \quad (55)$$

Поэтому общее выражение для уравнения Фоккера-Планка выглядит как

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ D_{ij}(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial v_j} - F_{j,ind}(\mathbf{v}) \cdot f \right]. \quad (56)$$

Можно заметить, что в турбулентной плазме коэффициент диффузии по скоростям должен быть заведомо больше, чем в спокойной. Однако даже в спокойной плазме всегда существуют тепловые флуктуации поля. Их можно оценить, рассматривая поля при относительном движении дискретных частиц с учётом дебаевской экранировки зарядов. Если это сделать правильно, то правая часть уравнения Фоккера-Планка превращается в интеграл столкновений Балеску-Ленарда! Таким образом, уравнение Фоккера-Планка даёт нам прямой метод учёта столкновений частиц с флуктуациями, допуская как тепловые, так и турбулентные спектры. Ограничения метода - те же, что и при выводе ИС Балеску-Ленарда.

## Модельные интегралы столкновений

Как вы заметили, точное описание столкновений частиц весьма громоздко, приводит к нелинейным дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям. При этом в горячей плазме столкновений мало, и кажется, что какая-то более простая математическая модель могла бы заменить точное описание.

ИС в форме Бхатнагара-Гросса-Крука ( $\tau$  – приближение):

$$St = -\frac{f - f_M}{\tau}. \quad (57)$$

Здесь  $f_M$  - максвелловская функция распределения,  $\tau$  - частота столкновений.

Штосс-член в форме Крука - самый примитивный из используемых.

Однако он и самый простой, что очень соблазнительно. Он *не сохраняет* ни энергию, ни импульс, ни число частиц. Это можно поправить, если параметры максвелловской функции распределения сделать пропорциональными соответствующим моментам функции распределения  $f$ . Однако в этом случае уже пропадает простота.

Фактически, ИС Крука позволяет правильно обходить особенности в интегралах в комплексной плоскости и, в некоторых случаях, делать грубые оценки скорости максвеллизации. Для процессов потерь из открытых ловушек этот ИС совсем не пригоден - заполнение конуса потерь происходит диффузионно, как овраг с осыпающимися берегами. Чем уже овраг - тем быстрее. А ИС Крука заполняет все точки фазового пространства с постоянной скоростью. Так можно ошибиться на порядки...



## ИС Ленарда-Бернштейна:

$$St = \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[ \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} f \right]. \quad (58)$$

Применяется для одномерных задач. По сравнению с ИС Крука сохраняет число частиц (так как является полной дивергенцией) и заполняет “овраги” правильным, диффузионным образом.

## Лоренцева плазма

Электроны+бесконечно тяжёлые холодные ионы с  $Z \gg 1$ :

$$St = -\frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^3} \nabla_{v\perp}^2 f. \quad (59)$$

Энергия электронов сохраняется, хотя в реальной плазме такого типа будет очень сильное остывание из-за тормозного излучения...

## Линеаризованный интеграл столкновений Ландау:

– к сожалению, занимает целую страницу. Тем не менее, для численных моделей он проще, чем нелинейный, хотя и более короткий, интеграл Ландау.

1. Вывести первые уравнения цепочки БГКИ для плазмы из  $I$  ионов и  $J$  электронов.
2. Записать явный вид гамильтониана для электромагнитного взаимодействия точечных заряженных частиц.
3. В каком случае многочастичные функции распределения симметричны относительно перестановки аргументов? Относится ли это к корреляционным функциям?
4. Показать, что интеграл от корреляционной функции по любому из аргументов  $\hat{x}_i$  равен нулю.



Климонтович Ю.Л. "Статистическая физика" М.: Наука, 1982



Ишимару С. "Основные принципы физики плазмы" М.: Атомиздат, 1975



Галеев А.А., Сагдеев Р.З. "Неоклассическая' теория диффузии в сб. Вопросы теории плазмы т .7, с.205, М.: Атомиздат, 1973



Морозов А.И., Соловьёв Л.С. "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях в сб. Вопросы теории плазмы т .2, с.177, М.: Атомиздат, 1963



Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. "Введение в нелинейную физику М.: Наука, 1988



Кадомцев Б.Б. "Турбулентность плазмы" в сб. Вопросы теории плазмы т .4, с.188, М.: Атомиздат, 1964