

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

А.Д.Беклемишев
НГУ, 2004

29 марта 2011 г.

Кинетика бесстолкновительной замагниченной плазмы

В этой главе мы будем рассматривать процессы, быстрые по сравнению со временем столкновительной релаксации функции распределения, так что интеграл столкновений является малой поправкой. Нашей главной целью будет изучение волн в горячей однородно-замагниченной плазме. Такие волны распространяются как малые возмущения на фоне однородного равновесного состояния

$$\mathbf{V}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1)$$

$$f_{0j} = f_{0j}(v_{\parallel}, v_{\perp}). \quad (2)$$

Сперва надо убедиться, что функции распределения вида $f_{0j}(v_{\parallel}, v_{\perp})$ действительно являются равновесными.

Линеаризация уравнения Власова

Бесстолкновительное кинетическое уравнение,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3)$$

можно линеаризовать, подставив $f = f_0 + \tilde{f}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}$, $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}$. Тогда, если f_0 не зависит от времени и много больше поправки \tilde{f} , должно удовлетворяться уравнение равновесия

$$\mathbf{v} \nabla f_0 + \frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что для функции распределения вида $f_{0j}(v_{\parallel}, v_{\perp})$ это уравнение удовлетворяется тождественно. Первое слагаемое равно нулю в силу однородности

$$\mathbf{v} \nabla f_{0j} = 0, \quad (5)$$

а второе можно преобразовать к производной по углу ларморовского вращения ϕ :

$$\frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \vec{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\Omega \frac{\partial f_0}{\partial \phi}, \quad (6)$$

где $\vec{\Omega} \equiv q\mathbf{B}_0/mc$ - вектор угловой скорости ларморовского вращения.

Действительно, второе равенство получается из представления для скорости в цилиндрических координатах

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} (\mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi). \quad (7)$$

Теперь $\mathbf{v} \times \dot{\cdot} = \Omega v_{\perp} (\mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi) \times \mathbf{b} = \Omega v_{\perp} (-\mathbf{e}_y \cos \phi + \mathbf{e}_x \sin \phi)$.
Кроме того,

$$\mathbf{v} \times \vec{\Omega} = -\Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \phi}. \quad (8)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f_0}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}}, \quad (9)$$

так что для любой функции f_0 имеет место тождество

$$\mathbf{v} \times \vec{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \vec{\Omega} \cdot b \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \mathbf{v} \times \vec{\Omega} \cdot \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} - \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \phi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} = -\Omega \frac{\partial f_0}{\partial \phi}. \quad (10)$$

Для равновесной функции распределения окончательно получаем

$$\frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathbf{v}} = -\Omega \frac{\partial f_{0j}}{\partial \phi} \equiv 0, \quad (11)$$

что и требовалось доказать.

- В общем случае кинетическое уравнение представляет собой производную вдоль траектории. А на траектории частицы сохраняются интегралы движения. Поэтому любая функция от интегралов движения (и только от них) является решением уравнения равновесия.

В частности, в однородном и постоянном поле v_{\perp} и v_{\parallel} сохраняются, поэтому любая функция этих переменных и оказывается решением стационарного уравнения Власова.

Теперь получим уравнение для поправки к функции распределения, \tilde{f} , возникающей как отклик на электромагнитное поле волны. Сохраняя только члены первого порядка малости, имеем

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \tilde{f} - \Omega \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = -\frac{q}{m} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (12)$$

Это линейное дифференциальное уравнение с правой частью. Его можно решать разными методами, но мы используем метод интегрирования по невозмущённым траекториям, следуя Кроллу и Трайвелпису.

- Для изотропной функции распределения f_0 вклад от магнитного поля в правой части исчезает, поскольку $\partial f_0 / \partial \mathbf{v}$ направлена вдоль \mathbf{v} .

Решение линеаризованного уравнения

Левая часть линеаризованного уравнения (12) представляет собой полную производную по времени вдоль равновесной (невозмущённой) траектории. Поэтому, чисто формально

$$\tilde{f} = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^t \left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}', t') + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}', t') \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} dt'. \quad (13)$$

В этом интеграле удобно перейти к переменной $\tau = t' - t$:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^0 \left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}', t + \tau) + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}', t + \tau) \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} d\tau, \quad (14)$$

причём скорости и координаты под интегралом меняются по закону

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} (\mathbf{e}_x \cos \phi' + \mathbf{e}_y \sin \phi'), \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + v_{\parallel} \mathbf{b} \tau - \mathbf{e}_x \rho (\sin \phi' - \sin \phi) + \mathbf{e}_y \rho (\cos \phi' - \cos \phi), \\ \phi' &= \phi - \Omega \tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\rho \equiv v_{\perp} / \Omega$ - ларморовский радиус, ϕ - ларморовская фаза частицы в момент t . Система (15) и есть те самые невозмущённые траектории.

В интеграле (14) удобно перейти к переменным Фурье, воспользовавшись однородностью и свойством

$$F(g(\mathbf{x} + \mathbf{X}, t + \tau)) = F(g(t)) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{X} - \omega\tau)}, \quad (16)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^0 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \omega} + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}, \omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} d\tau. \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{X} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ - сдвиг точки наблюдения поля. С точки зрения интегрирования по τ , $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \omega}$ и $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}, \omega}$ - просто постоянные векторы! Сложность интегрирования сохраняется из-за зависимости $\mathbf{v}'(\tau)$ и $\mathbf{X}(\tau)$.

Для дальнейшего упрощения воспользуемся условием равновесности $f_0 = f_0(v_{\parallel}, v_{\perp})$. Как следует из (9),

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} = \mathbf{b} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \mathbf{u} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}}, \quad (18)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{e}_x \cos \phi' + \mathbf{e}_y \sin \phi'$ - единичный вектор вдоль поперечной скорости.

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = & -\frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \int_{-\infty}^0 \left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{b} + \frac{v_{\perp}}{c} \mathbf{u} \times \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b} \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} d\tau + \\ & -\frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \int_{-\infty}^0 \left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u} + \frac{v_{\parallel}}{c} \mathbf{b} \times \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u} \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

В изотропном случае, $f_0 = f_0(v)$, всё проще:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = -\frac{q}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \int_{-\infty}^0 \left(v_{\parallel} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{b} + v_{\perp} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u} \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} d\tau. \quad (19)$$

Видно, что в любом случае надо научиться вычислять три сорта интегралов:

$$I_{1,\pm} = \int_{-\infty}^0 \left(1, e^{i\phi'}, e^{-i\phi'} \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} d\tau, \quad (20)$$

и тогда задача становится чисто технической. Это удаётся сделать с помощью разложения экспоненты в ряд Фурье с функциями Бесселя в качестве коэффициентов:

$$\exp [ik_{\perp} \rho \sin \phi'] = \sum_n J_n(k_{\perp} \rho) \exp [in\phi']. \quad (21)$$

Всегда можно выбрать ось e_x вдоль k_{\perp} , тогда интегрировать нужно будет вдвое меньше.

$$\begin{aligned}
 I_{\perp} &= e^{ik_{\perp}\rho \sin \phi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_{\perp}\rho \sin \phi') e^{-i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})\tau} d\tau = \\
 &= \sum_{n,l} J_l(k_{\perp}\rho) \exp[i l \phi] \int_{-\infty}^0 J_n(k_{\perp}\rho) \exp[-in\phi' - i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})\tau] d\tau = \\
 &= \sum_{n,l} J_l(k_{\perp}\rho) J_n(k_{\perp}\rho) \exp[i(l-n)\phi] \int_{-\infty}^0 \exp[i(n\Omega - \omega + k_{\parallel} v_{\parallel})\tau] d\tau = \\
 &= \sum_{n,l} \frac{iJ_l(k_{\perp}\rho) J_n(k_{\perp}\rho)}{\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \exp[i(l-n)\phi].
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\begin{aligned}
 I_{\pm} &= \sum_{n,l} \frac{iJ_l(k_{\perp}\rho) J_n(k_{\perp}\rho)}{\omega - (n \mp 1)\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \exp[i(l-n \pm 1)\phi] = \\
 &= \sum_{n,l} \frac{iJ_l(k_{\perp}\rho) J_{n \pm 1}(k_{\perp}\rho)}{\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \exp[i(l-n)\phi].
 \end{aligned}$$

Теперь можно собрать все слагаемые возмущённой функции распределения (изотропный случай)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) &= -\frac{q}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[v_{\parallel} \tilde{E}_{\parallel} I_1 + \frac{1}{2} v_{\perp} I_+ (\tilde{E}_x - i\tilde{E}_y) + \frac{1}{2} v_{\perp} I_- (\tilde{E}_x + i\tilde{E}_y) \right] = \\ &= -\frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v^2} \sum_{n,l=-\infty}^{+\infty} \frac{iJ_l \left[2v_{\parallel} \tilde{E}_{\parallel} J_n + v_{\perp} (\tilde{E}_x - i\tilde{E}_y) J_{n+1} + v_{\perp} (\tilde{E}_x + i\tilde{E}_y) J_{n-1} \right]}{\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} e^{i(l-n)\phi}. \end{aligned}$$

Напомним, что направление \mathbf{e}_x - вдоль \mathbf{k}_{\perp} !

Надо отметить следующие особенности этой функции распределения:

- она пропорциональна *производной* равновесной функции распределения по скорости,
- она имеет особенности на линиях $\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$, - кратные циклотронные резонансы,
- все угловые гармоники стремятся к нулю для коротковолновых возмущений, $k_{\perp} \rho \rightarrow \infty$,
- но только высшие стремятся к нулю при больших длинах волн, $k_{\perp} \rho \rightarrow 0$,
- право- и лево-поляризованные гармоники поля вызывают различный отклик,
- при анизотропном давлении может появляться зависимость от $\tilde{\mathbf{B}}$,
- при нашем определении ρ и Ω могут менять знак в зависимости от знака заряда частицы.

Диэлектрическая проницаемость горячей замагниченной плазмы

Теперь для каждой компоненты плазмы мы можем вычислить отклик её функции распределения на приложенное поле. Для вычисления диэлектрической проницаемости надо знать плотность тока, возникающую как отклик на поле волны. Её можно вычислить по известной функции распределения. Поскольку в равновесии тока нет, имеем

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} \tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) d^3 v, \quad (22)$$

если функция распределения нормирована на концентрацию. Подставив сюда выражение (??) и скорость,

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} (\mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi), \quad (23)$$

получим компоненты плотности тока в виде

$$\mathbf{j} = - \sum_{\alpha} \frac{iq_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} \sum_{n,l=-\infty}^{+\infty} S_{nl} e^{i(l-n)\phi} [v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} (\mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi)] v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\phi, \quad (24)$$

где

$$S_{nl} = \frac{J_l \left[2v_{\parallel} \tilde{E}_{\parallel} J_n + v_{\perp} \left(\tilde{E}_x - i\tilde{E}_y \right) J_{n+1} + v_{\perp} \left(\tilde{E}_x + i\tilde{E}_y \right) J_{n-1} \right]}{\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}. \quad (25)$$

Видно, что большая часть гармоник выпадает при интегрировании!

- Обход особенности - по правилу Ландау, т.е., контур лежит ниже особенности.
- Это правило получается и при учёте столкновений:
 $\partial \tilde{f} / \partial t \rightarrow \partial \tilde{f} / \partial t + \nu \tilde{f} \rightarrow -i(\omega + i\nu) \tilde{f}$.

$$j = - \sum_{\alpha} \frac{\pi i q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [2v_{\parallel} b S_{nn+v_{\perp}} (e_x (S_{nn+1} + S_{nn-1}) - i e_y (S_{nn-1} - S_{nn+1}))] v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}. \quad (26)$$

Сравним это выражение со стандартной формой

$$j_i = \sigma_{ik} \tilde{E}_k. \quad (27)$$

Получим тензор проводимости в виде

$$\sigma_{ik} = - \sum_{\alpha} \frac{\pi i q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{ik}^{(n)}}{\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}, \quad (28)$$

Здесь $Q_{ik}^{(n)} =$

$$\begin{pmatrix} v_{\perp}^2 (J_{n+1} + J_{n-1})^2 & -iv_{\perp}^2 (J_{n+1} + J_{n-1})(J_{n+1} - J_{n-1}) & 2v_{\perp} v_{\parallel} J_n (J_{n+1} + J_{n-1}) \\ iv_{\perp}^2 (J_{n+1} + J_{n-1})(J_{n+1} - J_{n-1}) & v_{\perp}^2 (J_{n+1} - J_{n-1})^2 & 2iv_{\perp} v_{\parallel} J_n (J_{n+1} - J_{n-1}) \\ 2v_{\perp} v_{\parallel} J_n (J_{n+1} + J_{n-1}) & -2iv_{\perp} v_{\parallel} J_n (J_{n+1} - J_{n-1}) & 4v_{\parallel}^2 J_n^2 \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу можно упростить с помощью тождеств

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{2n}{z} J_n, \quad (29)$$

$$J_{n-1} - J_{n+1} = 2J_n'. \quad (30)$$

Теперь

$$Q_{ik}^{(n)} = 4 \begin{pmatrix} v_{\perp}^2 n^2 J_n^2 / (k_{\perp} \rho)^2 & inv_{\perp}^2 J_n' J_n / (k_{\perp} \rho) & nv_{\perp} v_{\parallel} J_n^2 / (k_{\perp} \rho) \\ -inv_{\perp}^2 J_n' J_n / (k_{\perp} \rho) & v_{\perp}^2 J_n'^2 & -iv_{\perp} v_{\parallel} J_n J_n' \\ nv_{\perp} v_{\parallel} J_n^2 / (k_{\perp} \rho) & iv_{\perp} v_{\parallel} J_n J_n' & v_{\parallel}^2 J_n^2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Подставив σ_{ik} в формулу

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ik},$$

получим тензор диэлектрической проницаемости в виде

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \sum_{\alpha} \frac{2\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{ik}^{(n)}}{\omega - n\Omega - k_{\parallel}v_{\parallel}} \right] \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3v. \quad (32)$$

Здесь для краткости записи сделана замена $2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} \rightarrow d^3v$.

- Диэлектрическая проницаемость содержит аддитивные вклады не только от разных сортов частиц, но и от разных циклотронных гармоник. В *однородной плазме* циклотронные гармоники независимы.

Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы

В холодной плазме тепловые скорости много меньше фазовых, и ларморовский радиус тоже стремится к нулю, поэтому должны выполняться соотношения

- $k_{\parallel} v_{\parallel} \ll \omega$,
- $k_{\perp} \rho \ll 1$.

Кроме того, надо заметить, что можно пренебречь $k_{\parallel} v_{\parallel}$ в циклотронных резонансах, если не приближаться к ним слишком близко по частоте:

- $k_{\parallel} v_{\parallel} \ll \omega \pm \Omega_{\alpha}$.

При $k_{\perp} \rho \ll 1$ асимптотика функций Бесселя даёт $J_0 = 1$, $J_{\pm 1} = k_{\perp} \rho / 2$, $J_{\pm n} \propto (k_{\perp} \rho)^n$, так что все матрицы $Q_{ik}^{(n)}$ с $n > 1$ - пренебрежимо малы, а нулевая и первые - существенно упрощаются:

$$Q_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4v_{\parallel}^2 \end{pmatrix}, \quad Q_{ik}^{(\pm 1)} = \begin{pmatrix} v_{\perp}^2 & \pm i v_{\perp}^2 & 0 \\ \mp i v_{\perp}^2 & v_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставив эти формы в общее выражение для диэлектрической проницаемости, получим

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \sum_{\alpha} \frac{2\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int \left[\frac{4v_{\parallel}^2}{\omega} b_i b_k + \frac{2\omega v_{\perp}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} (\delta_{ik} - b_i b_k) - \frac{2iv_{\perp}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} \epsilon_{ijk} b_k \right] \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v.$$

Осталось выполнить интегрирование по скоростям частиц. Для этого используем $f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)$, а значит

$\partial f_{0\alpha} / \partial v^2 = \partial f_{0\alpha} / \partial v_{\parallel}^2 = \partial f_{0\alpha} / \partial v_{\perp}^2$. Тогда

$$\int v_{\parallel}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v = \frac{1}{2} \int v_{\parallel} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\parallel}} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = -\frac{1}{2} \int f_{0\alpha} d^3 v = -\frac{n_{\alpha}}{2},$$

$$\int v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v = \frac{1}{2} \int v_{\perp} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = -n_{\alpha}.$$

Окончательно,

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} - \sum_{\alpha} \frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \left[\frac{b_i b_k}{\omega} + \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} (\delta_{ik} - b_i b_k) - \frac{i\Omega_{\alpha}}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2} \epsilon_{ijk} b_k \right],$$

или

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}\right) (\delta_{ik} - b_i b_k) + \\ + \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}\right) b_i b_k + i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega (\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)} \epsilon_{ijk} b_k.$$

Это выражение точно совпадает с тем, которое получается в гидродинамической теории. Однако теперь мы знаем критерии применимости этого приближения.

- Пространственная дисперсия (зависимость от k) в приближении холодной плазмы выпадает, потому что волновой вектор входит в общее выражение только в произведении со скоростью,
- Приближение холодной плазмы соответствует *длинноволновому пределу* в плазме произвольной температуры. (Всё равно, что стремится к нулю в произведении kv , k или v .)

Распространение волн поперёк магнитного поля

Распространение свободных электромагнитных волн в среде описывается уравнениями Максвелла, которые в однородной среде в фурье-представлении сводятся к известной системе алгебраических уравнений

$$L_{\alpha\beta} E_{\beta} = \left(k_{\alpha} k_{\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \right) E_{\beta} = 0. \quad (33)$$

Система координат у нас уже выбрана, ось z направлена вдоль магнитного поля, а волновой вектор имеет компоненты

$$k_{\alpha} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel}). \quad (34)$$

При поперечном распространении $k_{\parallel} = 0$, а матрица $L_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & -\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

- В тензоре $\varepsilon_{\alpha\beta}$ компоненты $\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ обратились в нуль из-за того, что $Q_{yz}, Q_{xz} \propto v_{\parallel}$, а больше ничего от v_{\parallel} под интегралом (при $k_{\parallel} = 0!$) не зависит. Поэтому, по чётности, интегрирование по скоростям в соответствующих компонентах $\varepsilon_{\alpha\beta}$ даёт нуль.

Для существования свободных волн требуется $\det L_{\alpha\beta} = 0$. Система распадается на волны, поляризованные строго вдоль магнитного поля, и строго поперёк. При поляризации вдоль магнитного поля имеем

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{zz} = 1 + \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega_{p\alpha}^2/n_{\alpha}}{\omega(\omega - n\Omega_{\alpha})} \int J_n^2(k\rho) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} v_{\parallel}^2 d^3 v, \quad (36)$$

что можно проинтегрировать по частям:

- *Обыкновенная волна* поляризована вдоль магнитного поля и имеет дисперсионное соотношение

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{p\alpha}^2/n_{\alpha}}{\omega(\omega - n\Omega_{\alpha})} \int J_n^2(k\rho) f_{0\alpha} d^3 v. \quad (37)$$

В длинноволновом пределе, $k\rho < 1$, далеко от циклотронных резонансов ($\omega \neq n\Omega_\alpha$) главный вклад в сумму вносит нулевая гармоника, $n = 0$, и решение мало отличается от электромагнитной волны в холодной немагниченной плазме

$$\omega^2 \approx \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (38)$$

Поэтому волна и называется обыкновенной.

- Если частота обыкновенной волны близка к кратной циклотронной для частиц сорта s , $\omega \approx n\Omega_s$, то она называется *циклотронной волной*. В длинноволновом пределе $J_n^2 \rightarrow (z/2)^n / n!$, поэтому

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \approx 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ps}^2 / n_s}{\omega (\omega - n\Omega_s)} \frac{1}{(n!)^2} \int \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2n} f_{0s} d^3 v. \quad (39)$$

Показатель преломления этой волны имеет особенность вблизи $\omega = n\Omega_s$.

- *Необыкновенная волна* имеет эллиптическую поляризацию в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Её дисперсионное соотношение сложнее, чем у обыкновенной

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{yy} - \frac{|\varepsilon_{xy}|^2}{\varepsilon_{xx}}. \quad (40)$$

- *Необыкновенной волной в узком смысле* Кролл и Трайвелпис называют электромагнитную волну, поляризованную почти вдоль y . Естественно, это реализуется только там, где мало ε_{xy} , и только вдали от нулей ε_{xx} и циклотронных особенностей. **Это грубое приближение, пригодное только при $\omega < \Omega_i$ (хотя К и Т об этом умалчивают).** Грубость приближения становится очевидной при попытке перехода к гидродинамическому пределу, который воспроизводится лишь для низкочастотных МГД волн.

Дисперсионное соотношение для НВ в узком смысле имеет вид

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{yy} = 1 + \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega_{p\alpha}^2/n_{\alpha}}{\omega(\omega - n\Omega_{\alpha})} \int J_n'^2(k\rho) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} v_{\perp}^2 d^3v, \quad (41)$$

что в длинноволновом пределе даёт

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}. \quad (42)$$

Отсюда при низких частотах, $\omega < \Omega_i$, имеем *магнитозвуковые волны*

$$\omega^2 \approx \frac{k^2 c_A^2}{1 + c_A^2/c^2}. \quad (43)$$

Здесь введено обозначение для альфвеновской скорости

$$c_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi n m_i}} = c \frac{\Omega_i}{\omega_{pi}}. \quad (44)$$

(Ионная плазменная частота почти никогда не встречается в дисперсионных соотношениях из-за того, что она выражается через более популярные c_A и Ω_i .)

- В холодной плазме показатель преломления необыкновенной волны становится бесконечным на нижнегибридной, $\omega_{LH} = \sqrt{\Omega_i \Omega_e}$, и верхнегибридной, $\omega_H = \sqrt{\Omega_i^2 + \Omega_e^2}$, частотах. Это никак не видно из дисперсионного соотношения (42) для НВ в узком смысле.
- Вблизи параметров, где $\varepsilon_{xx} \rightarrow 0$, необыкновенная волна имеет очень большой показатель преломления, $k^2 c^2 / \omega^2 \gg 1$, и **продольную** поляризацию (т.е., она коротковолновая ($k\rho \sim 1$) и почти электростатическая). Резонансы на верхнегибридной и нижнегибридной частотах для необыкновенной волны в холодной плазме возникают именно так. В горячей плазме возникают дополнительные резонансы *вблизи* циклотронных гармоник, а положение верхнегибридного и нижнегибридного резонансов смещается. Это явление называется “*модами Бернштейна*”.

Грубое приближение для дисперсии мод Бернштейна можно получить из условия $\varepsilon_{xx} = 0$.

$$1 + \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega_{p\alpha}^2/n_{\alpha}}{\omega(\omega - n\Omega_{\alpha})} \int \frac{n^2 J_n^2(k\rho)}{(k\rho)^2} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} v_{\perp}^2 d^3v = 0. \quad (45)$$

Это выражение можно переписать, суммируя слагаемые с положительными и отрицательными n , и подставляя определение ρ :

$$k^2 + \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2\omega_{p\alpha}^2\Omega_{\alpha}^2/n_{\alpha}}{(\omega^2 - n^2\Omega_{\alpha}^2)} \int J_n^2(k\rho) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3v = 0. \quad (46)$$

- Если $k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$, то обход особенности по Ландау происходит в области, где нет частиц, т.е., на волны, распространяющиеся точно поперёк поля, затухание Ландау не действует.
- Из-за того, что частоты Бернштейновских мод не совпадают с циклотронными, затухание Ландау на них не действует даже если угол распространения не точно равен $\pi/2$.

Распространение волн вдоль магнитного поля

При распространении волн вдоль поля $k_{\perp} = 0$, так что все функции Бесселя в ε заменяются асимптотиками в длинноволновом пределе. Матрица $L_{\alpha\beta}$ принимает вид

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} -\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & -\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

- Продольная волна является электростатической и ничем не отличается от волны без магнитного поля. Действительно, из $\varepsilon_{zz} = 0$ следует

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int \frac{v_{\parallel}^2}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v = 0. \quad (48)$$

Это уравнение описывает затухающие по Ландау ленгмюровские и ионно-звуковые волны.

- Две другие волны являются поперечными, электромагнитными и обладают круговой поляризацией.

Выразим компоненты диэлектрической проницаемости в явном виде:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{\alpha}^2} v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v, \quad (49)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int \frac{\Omega_{\alpha}}{(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - \Omega_{\alpha}^2} v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v. \quad (50)$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\left(-\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_{xx} \right)^2 - |\varepsilon_{xy}|^2 = 0, \quad (51)$$

откуда

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{xx} \pm |\varepsilon_{xy}|, \quad (52)$$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} \mp \Omega_{\alpha}} v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v^2} d^3 v. \quad (53)$$

- Никаких принципиально новых эффектов, кроме затухания Ландау, в горячей плазме (по сравнению с холодной) не появилось.

Распространение волн под косым углом к полю

Сложное дисперсионное уравнение поддаётся лишь численному решению.

- Куда девались волны на гармониках циклотронных частот при повороте направления распространения? - Ширина их резонансов обратилась в нуль как $(k_{\perp} \rho)^n$.
- Что происходит с затуханием Ландау при $\theta \rightarrow \pi/2$? Долше всего сохраняется затухание для более быстрых электронов, поэтому есть предельный угол $\pi/2 - \theta \sim \sqrt{m_e/M_i}$, вблизи которого меняется закон дисперсии, т.к., электронный отклик становится Больцмановским. В гидродинамическом приближении появляется аналог ионного звука, распросраняющийся почти поперёк силовых линий, с дисперсией

$$\omega^2 = \Omega_i^2 + k^2 c_s^2 \quad (54)$$

Радиочастотный нагрев и генерация тока в плазме

Для того, чтобы “нагреть” плазму, нужно, чтобы генерируемая извне волна в плазму проникла и в нужном месте поглотилась. Чтобы создать ток, нужно, чтобы волна передала свой импульс преимущественно электронам, при линейном или нелинейном затухании Ландау, причём важен импульс вдоль магнитного поля.

- Для нагрева создают волну, распространяющуюся почти поперёк магнитного поля - обыкновенную или необыкновенную, или Бернштейновскую, чтобы добиться её распространения в центр шнура;
- Эффективный нагрев возможен вблизи циклотронных резонансов, поэтому частота генерируемой волны должна быть близка к резонансной в нужной области плазмы;
- Для генерации тока волна должна иметь существенную продольную компоненту волнового вектора, так что циклотронные резонансы - не годятся из-за малой энергетической эффективности (большая часть энергии идёт на увеличение поперечной скорости).
- Для генерации тока популярными являются ниже- и выше-гибридные резонансы.

Дрейфово-кинетическое и gyroкинетическое уравнения

Во многих задачах адиабатический инвариант частицы (магнитный момент) является достаточно хорошо сохраняющейся величиной. В частности, это так, если характерные частоты много меньше циклотронных, а длина неоднородности много больше ларморовского радиуса. На этих приближениях, $\omega \ll \Omega$, $\rho \ll l$, построена дрейфово-кинетическая теория.

Логика вывода дрейфово-кинетического уравнения:

1. вводится малый параметр ϵ , так что ω/Ω , $\rho/l \sim \epsilon \ll 1$,
2. функция распределения представляется в виде $f = \bar{f} + \tilde{f}$, причём $\tilde{f} \sim \epsilon \bar{f}$, но только \tilde{f} зависит от ларморовской фазы,
3. выводится уравнение для \bar{f} методом усреднения по ларморовской фазе,
4. выводятся интегральные выражения для плотности и плотности тока по известной средней части функции распределения.

Область применимости дрейфово-кинетического уравнения:

- Описание кинетического равновесия плазмы в неоднородном магнитном поле,
- Медленные дрейфовые движения и низкочастотные (дрейфовые и МГД) волны в замагниченной плазме.

Современный вариант дрейфово-кинетического приближения напрямую основан на сохранении адиабатического инварианта, не требует разбиения функции распределения на среднюю и фазо-зависимую части и метода усреднения. Это - *гирокинетическое уравнение*.

- Единственным требованием при выводе является наличие интеграла движения, сопряжённого ларморовской фазе, поэтому область применения оказывается шире, чем у дрейфово-кинетического уравнения.
- Допускается описание волн малой амплитуды с длиной волны меньше ларморовского радиуса.
- Установлено, что в общей области применимости оба подхода эквивалентны (по результатам).

Вывод gyroкинетического уравнения

Пусть μ - интеграл движения частицы, сопряжённый циклической ларморовской фазе ϕ . Магнитный момент частицы может рассматриваться в качестве такого интеграла, если его вычислить в системе отсчёта, дрейфующей вместе с ларморовским центром. При наличии коротковолновых возмущений интеграл движения не совпадает с μ , но может быть найден. Он содержит поправки, связанные с волной. В бесстолкновительном кинетическом уравнении в форме Лиувилля

$$\frac{df}{dt} = 0$$

перейдём в шестимерном пространстве (\mathbf{x}, \mathbf{v}) к смешанным неортогональным координатам $(\mathbf{X}, v_{\parallel}, \mu, \phi)$. Вместо подсистемы $(\mathbf{X}, v_{\parallel})$ можно выбрать любые другие, например, гамильтоновы переменные. Запишем теперь полную производную по времени как производную сложной функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \nabla f + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

Можно заметить три особенности этого уравнения.

1. $\dot{\mu} = 0$, следовательно, слагаемое с частной производной по μ - исчезает,
2. Коэффициенты уравнения не зависят от ларморовской фазы, ϕ . Действительно, если в гамильтоновой системе есть интеграл движения, то ему сопряжена циклическая обобщённая координата, такая, что от неё гамильтониан не зависит:

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.$$

3. В частности, $\dot{\phi} = \Omega = \text{const}$ - частота вращения частицы по замкнутой ларморовской траектории в дрейфующей системе отсчёта.

Наше кинетическое уравнение приняло вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \nabla f + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0,$$

причём его решение должно быть периодическим по ϕ , и его можно решать разложением в ряд Фурье. Поскольку коэффициенты от ϕ не зависят, уравнения для гармоник *разделяются*. При этом для высших гармоник $n > 0$ уравнение однородное

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \nabla f_n + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial f_n}{\partial v_{\parallel}} + in\Omega f_n = 0$$

и решение $f_n = 0$ является естественным выбором. Ненулевые решения могут появляться только в виде δ -функций вблизи циклотронных резонансов, что выходит за рамки применимости теории. Единственное нетривиальное решение имеется для нулевой гармоники f , поэтому $f = f_0$ и удовлетворяет gyrokinетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \nabla f + \dot{v}_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = 0. \quad (55)$$

Уравнение кажется очень простым, но

- Здесь частные производные, в том числе при вычислении коэффициентов $\dot{\mathbf{X}}, \dot{v}_{\parallel}$ берутся при условии $\mu, \phi = \text{const}$! Это не так-то просто...
- Сложность также закопана в необходимости интегрирования по скоростным переменным при постоянном положении частицы для вычисления плотности и плотности тока (при этом $\mathbf{X} \neq \text{const}$)...
- Преимущество gyroкинетического уравнения - на два меньшая эффективная размерность фазового пространства. Это делает численные коды гораздо более эффективными.

В первом порядке разложения траектории частицы по ϵ коэффициенты gyroкинетического уравнения (или дрейфово-кинетического) можно записать как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} (\mathbf{b}\nabla) f + \mathbf{v}_d \nabla f - \frac{q}{m} (\mathbf{b}\nabla) [\varphi + \mu B] \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = 0. \quad (56)$$

Здесь \mathbf{v}_d - скорость дрейфа ларморовского центра, $\varphi + \mu B$ - потенциал Юшманова, а пространственные производные относятся к координатам ларморовского центра частицы.

Дрейфовые волны

Рассмотрим решения линеаризованного дрейфово-кинетического уравнения в приближении $\omega \ll \Omega_i$, и (для простоты) в предположении электростатического характера возмущений, $\tilde{B} = 0$. Будем считать, что исходное равновесие неоднородно в направлении x , перпендикулярном магнитному полю. Само поле имеет прямые силовые линии вдоль z . Сперва линеаризуем уравнение: $f = f_0 + \tilde{f}$, $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{d0} - c\nabla\varphi \times \mathbf{b}/B$, тогда

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + v_{\parallel} (\mathbf{b}\nabla) \tilde{f} + \mathbf{v}_{d0} \nabla \tilde{f} = \frac{q}{m} (\mathbf{b}\nabla) \varphi \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{c}{B} \nabla \varphi \times \mathbf{b} \cdot \nabla f_0. \quad (57)$$

Поскольку магнитное поле по условию может иметь градиент только вдоль y , равновесная дрейфовая скорость,

$$\mathbf{v}_{d0} = \mathbf{e}_y \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \ln |\Omega|, \quad (58)$$

постоянна и направлена строго вдоль y . Это позволяет решать уравнение (57) методом преобразования Фурье по t, y, z .

$$(-i\omega + ik_{\parallel} v_{\parallel} + ik_y v_{d0}) \tilde{f} = \frac{iq}{m} k_{\parallel} \varphi \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{ick_y \varphi}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x}, \quad (59)$$

$$\tilde{f} = -\frac{\varphi}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_y v_{d0}} \left[\frac{qk_{\parallel}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right]. \quad (60)$$

Для отыскания дисперсионного соотношения для электростатических дрейфовых волн, вместо общего подхода с уравнениями Максвелла, можно воспользоваться условием квазинейтральности,

$$q_i n_i + q_e n_e = 0. \quad (61)$$

Такой подход работает при относительно низких частотах, $\omega \ll \omega_{pe}$. Кроме того, решение можно будет считать относительно слабозатухающим, если фазовая скорость волны достаточно далека от особенности Ландау для ионов и электронов. Потребуем

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega - k_y v_{d0}}{k_{\parallel}} \ll v_{Te}, \quad (62)$$

тогда ионный отклик будет гидродинамическим (предел холодной плазмы), а электронный - адиабатическим.

Действительно, для электронов

$$\tilde{f}_e \approx -\frac{\varphi}{k_{\parallel} v_{\parallel}} \left[\frac{ek_{\parallel}}{m_e} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \right]. \quad (63)$$

При интегрировании по v_{\parallel} два слагаемых исчезнет (по чётности), и останется

$$\tilde{n}_e \approx -\frac{e\varphi}{m_e} \int \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{\parallel}} d^3v = \frac{e\varphi}{T_e} n_{0e}.$$

Для ионов $k_{\parallel} v_{Ti} \ll \omega - k_y v_{d0}$, и но надо сохранить вклад первого порядка по этому параметру, поскольку главное слагаемое не даёт вклада в плотность (по чётности по v_{\parallel}):

$$\tilde{f}_i \approx -\frac{\varphi}{\omega - k_y v_{d0}} \left(1 + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega - k_y v_{d0}} \right) \left[\frac{Zek_{\parallel}}{M_i} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{ck_y}{B} \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} \right]. \quad (64)$$

$$\tilde{n}_i \approx -\frac{Zek_{\parallel}^2 \varphi}{M_i} \int \frac{v_{\parallel}}{(\omega - k_y v_{d0})^2} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{\parallel}} d^3 v - \frac{ck_y \varphi}{B} \int \frac{1}{\omega - k_y v_{d0}} \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} d^3 v. \quad (65)$$

Равновесная дрейфовая скорость v_{d0} зависит от v_{\perp}^2 , так что в области интегрирования по v_{\perp}^2 возникает особенность. Если считать ионы холодными, $\omega \gg k_y \bar{v}_{di}$, где \bar{v}_{di} - дрейфовая скорость ионов по их тепловой скорости, вклад особенности - пренебрежимо мал. Но и сама поправка - тоже, поэтому считаем далее $k_y \bar{v}_{di} = 0$.

$$\tilde{n}_i \approx \frac{Zek_{\parallel}^2 n_{0i}}{M_i \omega^2} \varphi - \frac{ck_y \varphi}{B \omega} \frac{\partial n_{0i}}{\partial x}. \quad (66)$$

Подставим полученные выражения для возмущённых плотностей ионов и электронов в условие квазинейтральности:

$$1 = \frac{Z T_e k_{\parallel}^2}{M_i \omega^2} - \frac{c k_y T_e}{e B \omega} \frac{\partial}{\partial x} \ln n_{0e}. \quad (67)$$

Частоту

$$\omega_* = - \frac{k_y v_{Te}^2}{|\Omega_e|} \frac{\partial}{\partial x} \ln n_{0e} = -k_y \frac{c T_e}{e B} \frac{\partial}{\partial x} \ln n_{0e} \quad (68)$$

принято называть *диамангнитной дрейфовой частотой* (электронов). Она, совершенно очевидно, не равна $k_y \bar{v}_{de}$.

$$1 = \frac{Z T_e k_{\parallel}^2}{M_i \omega^2} + \frac{\omega_*}{\omega}, \quad (69)$$

$$\omega^2 - \omega \omega_* = k_{\parallel}^2 c_s^2, \quad (70)$$

где

$$c_s = \sqrt{\frac{Z T_e}{M_i}} \quad (71)$$

- скорость ионного звука.

- Если увеличивать продольную длину волны, до $k_{\parallel} v_{Te}$ порядка частоты, электронный отклик перестаёт быть адиабатическим;
- Ещё раньше, при $k_{\parallel} c_A \sim \omega$, волна становится электромагнитной;
- Если продольную длину волны уменьшать до $k_{\parallel} v_{Ti} \sim \omega$, то становится существенным затухание Ландау на ионах;
- Уточнения дисперсионного соотношения как правило приводят к появлению комплексных корней для частоты, т.е., неустойчивостям или затуханию дрейфовых волн.

Макроскопические коэффициенты переноса

Известно, что если взять моменты кинетического уравнения, то получим уравнения магнитной гидродинамики. Например, нулевой момент даёт уравнение непрерывности:

$$\int \left[\frac{df}{dt} - St(f) \right] d^3v = \frac{dn}{dt} + \operatorname{div} n\mathbf{u} = 0, \quad (72)$$

если нет источников частиц. А где же диффузия?

Дело в том, что поток частиц, который определяется по функции распределения как

$$n\mathbf{u} = \int \mathbf{v} f d^3v, \quad (73)$$

содержит как конвективную, так и диффузионную часть, т.е., такую, которая пропорциональна *градиенту* концентрации n и зависит от частоты столкновений

$$n\mathbf{u} = n\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}. \quad (74)$$

Разделение потока на конвективный и диффузионный производится достаточно легко, если функция распределения близка к локально-максвелловской. Тогда скорость \mathbf{u}_0 — это та функция координат, которая стоит в экспоненте сдвинутого максвелловского распределения

$$f_M = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)^2}{2T} \right]. \quad (75)$$

Тем не менее, строго говоря разделение — неоднозначно.

Отличие точной функции распределения от локально-максвелловской в первом приближении пропорционально эффективной длине свободного пробега, λ . Таким образом, $\mathbf{F} \propto \lambda \nabla n$, $\lambda \nabla T$, $\lambda \nabla \mathbf{u}_0$, но могут быть и слагаемые пропорциональные градиентам других равновесных параметров, например, $\lambda \nabla \varphi$, $\lambda \nabla B$.

В линейном приближении

$$F_\alpha = D_{\alpha\beta}^{(n)} \frac{\partial n}{\partial x_\beta} + D_{\alpha\beta}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_\beta} + D_{\alpha\beta\gamma}^{(u)} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} + F_\alpha^{(pinch)}. \quad (76)$$

Первые два коэффициента переноса $D_{\alpha\beta}^{(n)}$, $D_{\alpha\beta}^{(T)}$, называются коэффициентами диффузии и термодиффузии соответственно, третий коэффициент, $D_{\alpha\beta\gamma}^{(u)}$, может появляться только в замагниченной плазме с градиентом скорости, а последнее слагаемое пропорционально градиентам полей, и называется пинчем.

Аналогично, для тензора плотности потока импульса можно найти поправки

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(diss)} = R_{\alpha\beta\gamma}^{(n)} \frac{\partial n}{\partial x_\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(u)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\delta} + R_{\alpha\beta}^{(fric)}. \quad (77)$$

В изотропной среде (без магнитного поля) первые два слагаемых зануляются автоматически, а третье - сводится к тензору вязкости. Последнее слагаемое описывает силу трения либо о поля (напр. в ГОЛ-3), либо о другие сорта частиц.

Для вектора плотности потока энергии

$$S_\alpha^{(diss)} = \chi_{\alpha\beta}^{(n)} \frac{\partial n}{\partial x_\beta} + \chi_{\alpha\beta}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_\beta} + \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(u)} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} + S_\alpha^{(pinch)}. \quad (78)$$

Может оказаться так, что изменение равновесия на длине свободного пробега - не мало. В частности, длина свободного пробега может быть длиной пробега *волны*. Тогда, раскладывать гидродинамические потоки в ряд по малости $\lambda \nabla$ - нельзя. В этом случае говорят о *нелокальности* переносов, уравнения становятся интегральными:

$$F_{\alpha} = \int D_{\alpha\beta}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}') n(\mathbf{x}') d^3x' + \dots \quad (79)$$

- В термоядерной плазме переносы почти всегда существенно нелокальны, однако на практике из-за сложности интегрального представления их описывают в локальном приближении.
- Разделение потоков на конвективную и диффузионную часть существенно неоднозначно. Например, можно говорить либо о диффузии магнитного поля в плазму ($F_\alpha = 0$), либо о диффузии плазмы сквозь магнитное поле ($F_\alpha \neq 0$), причём оба описания - эквивалентны.
- Уравнения Брагинского представляют собой достаточно полный результат вычисления коэффициентов переноса для столкновительной плазмы.

Формальный вывод коэффициентов переноса в столкновительной среде основан на разложении функции распределения вблизи локально-максвелловской.

1. В методе Чэпмена-Энскога разложение происходит по полиномам Сонина-Лагерра:

$$f = f_M \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i S_{3/2}^i \left(\frac{v^2}{v_T^2} \right) \right), \quad (80)$$

$$S_r^i(z) = \sum_{k=1}^i (-z)^k \frac{\Gamma(r+i+1)}{\Gamma(r+k+1) k! (i-k)!}. \quad (81)$$

Коэффициенты A_i ищутся путём последовательной подстановки в кинетическое уравнение с интегралом столкновений, а потом по ним можно найти все потоки. По крайней мере для нейтрального газа ряд очень быстро сходится.

2. В методе Грэда разложение происходит просто по степеням скорости

$$f = f_M (1 + a_i v_i + b_{ik} v_i v_k + \dots). \quad (82)$$

В газе разложение Грэда сходится хуже, однако в плазме (с интегралом столкновений Ландау) сходимость методов - сравнима.

-  Климонтович Ю.Л. "Статистическая физика" М.: Наука, 1982
-  Ишимару С. "Основные принципы физики плазмы" М.: Атомиздат, 1975
-  Галеев А.А., Сагдеев Р.З. "Неоклассическая' теория диффузии в сб. Вопросы теории плазмы т .7, с.205, М.: Атомиздат, 1973
-  Морозов А.И., Соловьёв Л.С. "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях в сб. Вопросы теории плазмы т .2, с.177, М.: Атомиздат, 1963
-  Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. "Введение в нелинейную физику М.: Наука, 1988
-  Кадомцев Б.Б. "Турбулентность плазмы" в сб. Вопросы теории плазмы т .4, с.188, М.: Атомиздат, 1964