

Коллективные явления в плазме

И.В.Тимофеев

9 декабря 2014 г.

Оглавление

1	Иерархия теоретических моделей описания плазмы	5
1.1	Точное описание плазмы	6
1.2	Кинетическое уравнение	7
1.3	Двухжидкостная гидродинамика	11
1.4	Одножидкостная МГД	13
2	Линейная теория колебаний незамагниченной плазмы	15
2.1	Линейное приближение	15
2.2	Тензор диэлектрической проницаемости	16
2.3	Затухание Ландау	18
3	Волны в максвелловской плазме	23
3.1	Диэлектрическая проницаемость	23
3.2	Потенциальные волны	25
3.3	Электромагнитные волны	28
4	Волны в неравновесной плазме с надтепловыми хвостами	31
4.1	Каппа-распределения	31
4.2	Ленгмюровская волна	32
4.3	Ионно-звуковая волна	34
5	Двухпотоковая неустойчивость	37
5.1	Гидродинамический режим	38
5.2	Кинетический режим	41
6	Диэлектрическая проницаемость замагниченной плазмы	45
6.1	Решение кинетического уравнения	45
6.2	Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$	48
7	Продольные волны в замагниченной плазме	53
7.1	Дисперсионное соотношение	53
7.2	Альфвеновская волна	55

7.3	Вистлеры	57
7.4	Высокочастотные колебания	58
8	Волны в замагниченной плазме с поперечным распространением	61
8.1	Дисперсионные соотношения	61
8.2	Обыкновенная волна	62
8.3	Необыкновенные волны	63
8.3.1	Низкочастотные колебания	64
8.3.2	Высокочастотные колебания	67
9	Дрейфовая волна	69
10	Слабая турбулентность. Квазилинейная теория	73
11	Трёхволновые взаимодействия	75
12	Генерация электромагнитных волн ленгмюровской турбулентностью.	77
13	Нелинейное затухание Ландау	79
14	Уравнения Захарова	81
15	Модуляционная неустойчивость	83
16	Параболическое уравнение. Самофокусировка волновых пакетов.	85
17	Концепция сильной турбулентности	87

Лекция 1

Иерархия теоретических моделей описания плазмы

Как известно, плазма представляет собой квазинейтральную среду, состоящую из заряженных частиц, взаимодействие между которыми осуществляется посредством электромагнитных полей. Благодаря дальнедействующему характеру такого взаимодействия в создании этих полей принимают участие большие коллективы частиц. Их самосогласованную динамику в зависимости от ситуации можно описывать с различным уровнем детализации. Если для описания медленных процессов с участием тяжелых ионов бывает достаточно ограничиться гидродинамическими представлениями, согласно которым плазма мало отличается от проводящей жидкости, то в быстрых процессах развития плазменных неустойчивостей зачастую необходимо учитывать не только различие в движении разных сортов частиц, но и даже различие в движении отдельных групп частиц внутри одного сорта.

В данной лекции мы покажем роль и место различных упрощенных моделей в общей иерархии теоретических подходов к описанию плазмы, стартуя с максимально подробного описания, основанного на уравнении Климонтовича - Дюпри. Это позволит понять, какие именно упрощения сделаны в той или иной теоретической модели, и сформулировать условия их применимости. Затем весь спектр этих моделей будет использован для изучения различных коллективных явлений в плазме, начиная с анализа собственных линейных колебаний и условий их устойчивости в неравновесной плазме и заканчивая нелинейными эффектами взаимодействия плазменных волн как между собой, так и с частицами плазмы.

1.1 Точное описание плазмы

Для максимально подробного описания плазмы как системы из $N = \sum_a N_a$ частиц необходимо знать, как со временем меняются не только координаты $\mathbf{q}_i^a(t)$ и импульсы $\mathbf{p}_i^a(t)$ частиц каждого сорта a , но и микроскопические значения электрического $\mathbf{E}^M(\mathbf{q}, t)$ и магнитного полей $\mathbf{B}^M(\mathbf{q}, t)$ в каждой точке пространства. Если такая информация известна в начальный момент времени, то дальнейшая динамика системы описывается уравнениями движения

$$\frac{d\mathbf{q}_i^a}{dt} = \mathbf{v}_i^a = \frac{\mathbf{p}_i^a}{m_a \sqrt{1 + (\mathbf{p}_i^a/m_a c)^2}}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i^a}{dt} = e_a \left(\mathbf{E}^M(\mathbf{q}_i^a, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i^a \times \mathbf{B}^M(\mathbf{q}_i^a, t)] \right), \quad (1.2)$$

и уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}^M = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^M, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^M = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^M}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^M = 4\pi \rho^M, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^M = 0, \quad (1.4)$$

где e_a и m_a — заряд и масса частиц сорта a , c — скорость света в вакууме, а микроскопические плотности заряда и тока определены выражениями

$$\rho^M(\mathbf{q}, t) = \sum_a e_a \sum_{i=1}^{N_a} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i^a(t)), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{q}, t) = \sum_a e_a \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{v}_i^a(t) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i^a(t)). \quad (1.6)$$

Иногда более удобным оказывается эквивалентный подход, в котором распределение частиц каждого сорта описывается с помощью функции

$$N_a(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_a} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i^a(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i^a(t)), \quad (1.7)$$

имеющей смысл микроскопической плотности частиц в 6-мерном фазовом пространстве (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . В силу постоянства числа частиц такие функции должны удовлетворять уравнению Климонтовича-Дюпри

$$\frac{dN_a}{dt} = \frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a \left(\mathbf{E}^M(\mathbf{q}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M(\mathbf{q}, t)] \right) \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (1.8)$$

представляющему собой уравнение непрерывности в этом фазовом пространстве. Плотности заряда и тока в этом случае определяются следующими интегралами

$$\rho^M(\mathbf{q}, t) = \sum_a e_a \int N_a(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 p, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{q}, t) = \sum_a e_a \int \mathbf{v} N_a(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 p. \quad (1.10)$$

Очевидно, что для описания макроскопических объёмов плазмы в реальных экспериментах данный подход является слишком подробным. Ни в одном эксперименте невозможно определить начальные положения всех частиц плазмы или измерить поля сразу во всех точках пространства. В этом смысле более адекватным представляется статистический подход, в котором вместо динамики точных полей и микроскопических плотностей частиц предсказывается динамика их наиболее вероятных значений, усреднённых по всевозможным микросостояниям системы.

1.2 Кинетическое уравнение

Итак, в эксперименте начальное состояние плазмы, содержащей большое число частиц, как правило, описывают с помощью весьма ограниченного набора макроскопических параметров. Очевидно, что заданному таким образом микросостоянию системы может отвечать большое количество микросостояний. Задача статистической теории состоит в изучении величин, усреднённых по таким микросостояниям. Другими словами, из-за недостатка информации о начальном микроскопическом состоянии реальной плазмы приходится рассматривать эволюцию целого ансамбля плазм, стартующих с различных возможных микросостояний, и затем усреднять интересующие величины по этому ансамблю.

Представим все микроскопические величины в виде

$$\mathbf{E}^M = \mathbf{E} + \delta\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}^M = \mathbf{B} + \delta\mathbf{B}, \quad N_a = \langle N_a \rangle + \delta N_a, \quad (1.11)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение, а для средних полей введены обозначения $\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^M \rangle$, $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}^M \rangle$. Усреднение уравнения Климонтовича-Дюпри и уравнений Максвелла для точных полей даёт следующий результат

$$\frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mathbf{q}} + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mathbf{p}} =$$

$$- e_a \left[\left\langle \delta \mathbf{E} \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle + \frac{1}{c} \left\langle [\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}] \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle \right], \quad (1.12)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \mathbf{v} \langle N_a \rangle d^3 p, \quad (1.13)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Видно, что уравнение для простейшего среднего $\langle N_a \rangle$ содержит более высокие моменты $\langle \delta \mathbf{E} \delta N_a \rangle$ и $\langle \delta \mathbf{B} \delta N_a \rangle$, которые могут быть выражены через $\langle \delta N_a \delta N_a \rangle$ с помощью уравнений

$$\text{rot } \delta \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a d^3 p, \quad (1.15)$$

$$\text{rot } \delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Если из исходных уравнений составить уравнение на $\langle \delta N_a \delta N_a \rangle$, то оно будет содержать ещё более высокие моменты $\langle \delta N_a \delta N_a \delta N_a \rangle$. Очевидно, что полученная таким образом цепочка уравнений оказывается ничуть не проще исходного уравнения для микроскопической плотности. Упрощение здесь возможно только за счёт обрыва цепочки.

Выясним физический смысл простейших моментов $\langle N_a \rangle$ и $\langle \delta N_a \delta N_a \rangle$. Для этого подойдём к процедуре статистического усреднения более формально. Будем описывать микросостояние плазмы с помощью функции распределения $f_N(\mathbf{x}_1^a, \dots, \mathbf{x}_{N_a}^a, \mathbf{x}_1^b, \dots, \mathbf{x}_{N_b}^b, \dots)$, зависящей от координат и импульсов всех N частиц системы. Под \mathbf{x}_i^a здесь понимается 6-мерный вектор, определяющий положение i -ой частицы a -ого сорта в фазовом пространстве (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . $f_N \prod_b d\mathbf{x}_1^b \dots d\mathbf{x}_{N_b}^b$ представляет собой вероятность того, что частицы системы в данном микросостоянии имеют координаты и импульсы $\mathbf{x}_1^a, \dots, \mathbf{x}_{N_a}^a, \mathbf{x}_1^b, \dots, \mathbf{x}_{N_b}^b, \dots$ в диапазонах $d\mathbf{x}_1^a, \dots, d\mathbf{x}_{N_a}^a, d\mathbf{x}_1^b, \dots, d\mathbf{x}_{N_b}^b, \dots$. Статистическое усреднение тогда можно определить как

$$\langle \dots \rangle = \int \dots f_N \prod_a d\mathbf{x}_1^a \dots d\mathbf{x}_{N_a}^a. \quad (1.17)$$

Проведём усреднение микроскопической плотности частиц сорта a :

$$\langle N_a(t, \mathbf{x}) \rangle = \int \sum_{i=1}^{N_a} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^a) f_N \prod_b d\mathbf{x}_1^b \dots d\mathbf{x}_{N_b}^b. \quad (1.18)$$

В силу неразличимости частиц одного сорта имеем

$$\begin{aligned} \langle N_a(t, \mathbf{x}) \rangle &= N_a \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^a) f_N d\mathbf{x}_1^a \dots d\mathbf{x}_{N_a}^a \prod_{b \neq a} d\mathbf{x}_1^b \dots d\mathbf{x}_{N_b}^b \\ &= N_a \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^a) f_a(t, \mathbf{x}_1^a) d\mathbf{x}_1^a = n_a f_a(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь введены обозначения для одночастичной функции распределения

$$f_a(t, \mathbf{x}_1^a) = V \int f_N d\mathbf{x}_2^a \dots d\mathbf{x}_{N_a}^a \prod_{b \neq a} d\mathbf{x}_1^b \dots d\mathbf{x}_{N_b}^b \quad (1.20)$$

и для концентрации частиц $n_a = N_a/V$ сорта a в общей объёме плазмы V . Таким образом, первый момент $\langle N_a(t, \mathbf{x}) \rangle$ определяет вероятность, с которой какая-либо частица сорта a может находиться в заданной точке фазового пространства независимо от положения остальных частиц системы.

Более высокий момент

$$\langle N_a(t, \mathbf{x}) N_b(t, \mathbf{x}') \rangle = n_a n_b f_{ab}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') + \delta_{ab} n_a f_a(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (1.21)$$

можно выразить через двухчастичную функцию распределения

$$f_{ab}(t, \mathbf{x}_1^a, \mathbf{x}_1^b) = V^2 \int f_N d\mathbf{x}_2^a \dots d\mathbf{x}_{N_a}^a d\mathbf{x}_2^b \dots d\mathbf{x}_{N_b}^b \prod_{c \neq a, b} d\mathbf{x}_1^c \dots d\mathbf{x}_{N_c}^c. \quad (1.22)$$

Если положения двух частиц в фазовом пространстве не скоррелированы между собой, то вероятность того, что частица сорта a находится в точке \mathbf{x} , а частица сорта b — в точке \mathbf{x}' , должна сводиться к произведению вероятностей каждой из частиц находиться в указанных точках, то есть $f_{ab}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = f_a(t, \mathbf{x}) f_b(t, \mathbf{x}')$. Если же положение одной частицы влияет на положение другой, то в выражении для f_{ab} должно появиться дополнительное слагаемое, описывающее корреляционные эффекты $f_{ab}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = f_a(t, \mathbf{x}) f_b(t, \mathbf{x}') + g_{ab}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Сравнивая выражение для двухточечного коррелятора

$$\langle N_a(t, \mathbf{x}) N_b(t, \mathbf{x}') \rangle = \langle N_a(t, \mathbf{x}) \rangle \langle N_b(t, \mathbf{x}') \rangle + \langle \delta N_a(t, \mathbf{x}) \delta N_b(t, \mathbf{x}') \rangle \quad (1.23)$$

с формулой (1.21), получаем, что второй момент $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle$, входящий в уравнение (1.12), содержит функцию g_{ab} и описывает эффект парных корреляций

$$\langle \delta N_a(t, \mathbf{x}) \delta N_b(t, \mathbf{x}') \rangle = n_a n_b g_{ab}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') + \delta_{ab} n_a f_a(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (1.24)$$

Ещё более высокий момент $\langle \delta N_a \delta N_b \delta N_c \rangle$ будет выражаться через трёхчастичную корреляционную функцию g_{abc} . Таким образом, описанная выше цепочка уравнений на моменты микроскопической плотности может быть преобразована в так называемую ББГКИ-цепочку (Боголюбова-Бернштейна-Грина-Кирквуда-Ивона), содержащую уравнения на одночастичную функцию распределения и корреляционные функции g_{ab} , g_{abc} и т.д.

Теперь понятно, что оборвать эту цепочку можно только в том случае, если корреляционные функции содержат некоторый малый параметр $\epsilon \ll 1$, то есть $g_{ab} \sim \epsilon f_a f_b$, $g_{abc} \sim \epsilon^2 f_a f_b f_c$ и т.д. В идеальном газе с плотностью n , где среднее расстояние между молекулами $n^{-1/3}$ значительно превосходит радиус их взаимодействия r_m (радиус молекул), роль такого параметра играет величина $\epsilon \sim nr_m^3$. В идеальной плазме в область взаимодействия, определяемую радиусом Дебая r_D , попадает сразу много частиц $nr_D^3 \gg 1$, тем не менее влияние какой-то одной частицы на положение другой можно по-прежнему считать малым по сравнению с тем влиянием, которое оказывают макроскопические поля, создаваемые большим коллективом частиц из дебаевской сферы. В этом случае возможность учёта корреляционных эффектов по теории возмущений обосновывается малостью параметра $\epsilon \sim 1/(nr_D^3)$.

В нулевом порядке такой теории возмущений, то есть при полном пренебрежении корреляционными эффектами, в уравнении (1.21) можно опустить правую часть и получить замкнутую систему уравнений, содержащую только одночастичную функцию распределения

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (1.25)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \mathbf{v} f_a d^3 p, \quad (1.26)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Такой подход к описанию плазмы был впервые предложен А.А.Власовым (1938), поэтому в литературе о данной системе уравнений говорят как о кинетическом уравнении Власова с самосогласованным полем.

В следующем порядке теории возмущений необходимо учесть вклад двухчастичной корреляционной функции g_{ab} , содержащей малый параметр ϵ . Оказывается, что в пренебрежении корреляциями более высокого порядка эта функция может быть выражена через нелинейную комбинацию одночастичных функций распределения, что приводит к появлению

в правой части кинетического уравнения так называемого штосс-члена

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = \sum_b St(f_a, f_b), \quad (1.28)$$

описывающего эффект парных столкновений. Следующие порядки теории возмущений учитывают столкновения трёх и более частиц.

Таким образом, частицы плазмы одновременно участвуют как в коллективных движениях плазмы под действием усреднённых полей, имеющих макроскопически достоверный характер, так и в процессах взаимодействия со случайными полями, создаваемыми отдельными частицами на микроуровне. Если колебания больших коллективов частиц носят обратимый характер, то столкновительные процессы приводят к появлению диссипативных механизмов, возвращающих систему в состояние термодинамического равновесия. В режиме, когда характерная частота рассматриваемых колебаний ω заметно превышает частоту столкновений ν , плазму можно считать бесстолкновительной и для описания её динамики использовать кинетическое уравнение Власова. Если условие $\omega \gg \nu$ не выполняется, необходимо решать уравнение (1.28).

1.3 Двухжидкостная гидродинамика

Если скорости отдельных частиц определённого сорта различаются не слишком сильно, то их движение можно рассматривать как движение единой жидкости. В простейшем случае, когда имеются только два сорта частиц — электроны и ионы, плазму можно представить как систему из двух взаимопроникающих проводящих жидкостей, взаимодействие между которыми осуществляется через электромагнитное поле.

Гидродинамический подход подразумевает что, состояние каждой жидкости можно описывать с помощью небольшого числа макроскопических характеристик, усреднённых по достаточно большим объёмам пространства и достаточно продолжительным промежуткам времени. Во-первых, размер такого усреднения L должен во всяком случае быть больше среднего расстояния между частицами $L \gg n_a^{-1/3}$. Это позволяет рассматривать данную жидкость как сплошную среду. Во-вторых, пространственные и временные масштабы рассматриваемых процессов должны существенно превышать длины и времена, на которых устанавливается локальное термодинамическое равновесие ($\tau \gg \nu^{-1}$, $L \gg v_T/\nu$). В разреженных газах последнее условие действительно существенно, однако в плазме, где взаимодействие между частицами может осуществляться

не только через столкновения, но и через макроскопические электромагнитные поля, условие столкновительности не всегда является обязательным и быстрая эволюция макроскопических параметров зачастую хорошо описывается уравнениями идеальной гидродинамики.

Рассмотрим более подробно бесстолкновительный случай. Поскольку детали распределения частиц по импульсам в гидродинамическом подходе не очень важны, проинтегрируем кинетическое уравнение Власова по всем импульсам. В результате получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{V} = 0, \quad (1.29)$$

в котором задействованы два простейших момента одночастичной функции распределения: плотность частиц

$$n(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 p \quad (1.30)$$

и их средняя скорость

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{n(t, \mathbf{r})} \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 p. \quad (1.31)$$

Полученное уравнение фактически представляет собой дифференциальную форму закона сохранения числа частиц. Чтобы получить уравнение на среднюю скорость, нужно умножить кинетическое уравнение на величину $m_a \mathbf{v}$ и снова провести интегрирование по импульсам. После простых преобразований получаем уравнение

$$n m_a \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V_\alpha \right) = - \frac{\partial}{\partial r_\beta} P_{\alpha\beta} + e_a n \left(E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]_\alpha \right), \quad (1.32)$$

которое по сути является следствием закона сохранения импульса в выделенном бесконечно малом объёме жидкости. Видно, что и это уравнение зацепляется за более сложный момент

$$P_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r}) = m_a \int (v_\alpha - V_\alpha)(v_\beta - V_\beta) f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 p, \quad (1.33)$$

определяющий тензор потока импульса, который обусловлен давлением жидкости. В изотропной плазме эта величина сводится к скалярному давлению, которое может быть выражено в терминах температуры частиц данного сорта $p = nT$. Для замыкания получающейся системы уравнений в бесстолкновительном случае, как правило, используют различные уравнения состояния, определяющие связь $p = p(n)$. В изотропной плазме наиболее часто встречается адиабата

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0, \quad (1.34)$$

причём показатель степени может варьироваться в зависимости от того, насколько быстро протекает рассматриваемый процесс и сколько степеней свободы плазменных частиц в нём задействовано. В замагниченной анизотропной плазме эта связь может быть более сложной и включать помимо давления и плотности ещё и величину внешнего магнитного поля

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{nB} \right) = 0 \quad (1.35)$$

(адиабата Чу–Голдбергера–Лоу). Строгое обоснование возможности обрыва цепочки гидродинамических уравнений может быть получено только в столкновительном случае в рамках метода Чепмена–Энскога, когда выполняются уже упомянутые условия малости времени и длины свободного пробега частиц по сравнению с характерными масштабами задачи. В случае же бесстолкновительной плазмы, который в основном и представляет интерес для анализа быстрых плазменных колебаний, применимость уравнений магнитной гидродинамики (МГД) может быть обоснована лишь совпадением результатов с предсказаниями более общей кинетической теории в соответствующих предельных случаях.

1.4 Одножидкостная МГД

Для ещё более медленных и крупномасштабных процессов можно пренебречь различием в движениях отдельных сортов частиц и описывать плазму как единую проводящую жидкость. В этом случае состояние плазмы характеризуют суммарными величинами массовой плотности, скорости и давления:

$$\rho = \sum_a m_a n_a, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \sum_a m_a n_a \mathbf{V}_a, \quad p = \sum_a p_a. \quad (1.36)$$

В простой плазме, состоящей из электронов и одного сорта ионов, плотность и скорость плазмы как целого определяются плотностью и скоростью массивных ионов. Уравнение для ρ получается суммирование уравнений непрерывности для различных сортов частиц

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0. \quad (1.37)$$

Суммируя аналогичным способом уравнения движения частиц и пренебрегая инерцией электронов, получаем уравнение для средней скорости плазмы

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] - \nabla p, \quad (1.38)$$

в котором

$$\rho_e = \sum_a e_a n_a, \quad \mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \mathbf{V}_a \quad (1.39)$$

обозначают плотности заряда и тока. Для очень медленных процессов $\tau \gg L/c$ в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения и выразить создаваемый в плазме электрический ток через магнитное поле

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}. \quad (1.40)$$

Если, кроме того, характерный пространственный масштаб задачи существенно превышает дебаевский радиус ($L \gg r_D$), плазму можно считать квазинейтральной $\rho_e \ll e_a n_a$, что позволяет пренебречь силой, которая действует на плазму со стороны электрического поля. Учитывая все перечисленные обстоятельства, уравнение движения приобретает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] - \nabla p. \quad (1.41)$$

Для давления плазмы, по-прежнему, используем различные уравнения состояния, которые в отсутствие диссипации могут быть представлены в форме закона сохранения энтропии в движущемся элементе жидкости

$$\frac{ds(p, \rho)}{dt} = 0. \quad (1.42)$$

Уравнение для магнитного поля получаем из закона Ома, который в бесстолкновительном случае сводится к условию отсутствия электрического поля в системе отсчёта движущейся плазмы

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (1.43)$$

Взятие rot приводит к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (1.44)$$

которое описывает вмерзённость в плазму силовых линий магнитного поля.

Задачи:

1. Доказать, что функция (1.7) является решением уравнения Климонтовича-Дюпри (1.8).
2. Сформулировать условия, при которых в уравнении движения для одножидкостной плазмы можно пренебречь электрической силой.

Лекция 2

Линейная теория колебаний незамагниченной плазмы. Затухание Ландау.

2.1 Линейное приближение

Очевидно, что отклик плазмы на достаточно слабые электромагнитные поля должен быть линейным. Уравнения Максвелла в этом случае тоже становятся линейными и могут быть решены методом преобразования Фурье. С физической точки зрения это означает, что возможные решения этих уравнений могут быть представлены в виде некоторого набора плоских волн

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega d\mathbf{k}, \quad (2.1)$$

каждая из которых характеризуется своей частотой ω , волновым вектором \mathbf{k} и амплитудой $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$. В Фурье-представлении уравнения Максвелла превращаются в однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \right) E_\beta(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.2)$$

Поскольку ненулевые решения в этой системе возможны только при условии

$$\left| k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (2.3)$$

частота и волновой вектор в каждой плоской волне оказываются связанными между собой $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$. Каждую такую зависимость $\omega(\mathbf{k})$ называют законом дисперсии, а о колебаниях на соответствующих частотах говорят как о собственных колебаниях плазмы. Вся информация о линейном отклике среды содержится в тензоре диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

Для вычисления этой величины необходимо установить линейную связь между Фурье-образами тока и поля $j_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})E_{\beta}(\omega, \mathbf{k})$, определяемую тензором проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$. Зная вид этого тензора можно определить частоты $\omega_{\mathbf{k}}$ и векторы поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})/|\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|$ собственных колебаний плазмы.

Прежде чем приступить к линейному анализу возможных колебаний немагнитной плазмы, необходимо установить вид тензоров $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$, воспользовавшись линеаризованными уравнениями, описывающими движение плазменных частиц под действием электромагнитных полей. Нас будет интересовать случай бесстолкновительной горячей плазмы, поэтому для наиболее подробного статистического описания колебательных процессов в такой среде будем использовать кинетическое уравнение Власова.

2.2 Тензор диэлектрической проницаемости

Пусть в невозмущенном состоянии электроны и ионы плазмы характеризуются изотропными распределениями $f_0^{e,i}(p)$. Возмущения электромагнитного поля (2.1) создают аналогичные возмущения в распределении частиц

$$\delta f^a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta f^a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega d\mathbf{k}, \quad (2.5)$$

так что $f^a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0^a(p) + \delta f^a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Линеаризуя кинетическое уравнение по малым возмущениям, получаем

$$\frac{\partial \delta f^a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f^a}{\partial \mathbf{r}} + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_0^a}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.6)$$

В силу изотропии невозмущённой функции распределения из этого уравнения выпадает сила Лоренца, поскольку $\partial f_0/\partial \mathbf{p} \parallel \mathbf{p}$, а $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \perp \mathbf{p}$. В Фурье-представлении это уравнение позволяет выразить возмущения функции распределения через возмущение поля

$$\delta f^a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{-ie_a}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \left(\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial f_0^a}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (2.7)$$

Вычисляя возмущение тока

$$\delta j_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \sum_a e_a \int v_\alpha \delta f^a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d^3 p = \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.8)$$

определяем тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = -i \sum_a e_a^2 \int \frac{v_\alpha}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{\partial f_0^a}{\partial p_\beta} d^3 p. \quad (2.9)$$

Используя затем связь (2.4), находим тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{\partial f_0^a}{\partial p_\beta} d^3 p. \quad (2.10)$$

Поскольку единственным выделенным направлением в данном интеграле является направление волнового вектора \mathbf{k}/k , тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ должен иметь следующую структуру

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \varepsilon_\parallel \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (2.11)$$

Это означает, что все волновые свойства изотропной плазмы можно характеризовать двумя скалярными функциями $\varepsilon_\perp(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_\parallel(\omega, \mathbf{k})$. Вид этих функций можно установить, вычисляя свёртки

$$\varepsilon_\parallel = \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0^a}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\perp &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \\ &= 1 + \sum_a \frac{2\pi e_a^2}{\omega} \int \frac{d\mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} \right) \cdot \frac{\partial f_0^a}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Смысл введённых обозначений ε_\perp и ε_\parallel становится понятным после анализа возможных колебаний в такой системе. Если в декартовой системе координат ось \mathbf{z} направить вдоль волнового вектора \mathbf{k} , то уравнения Максвелла (2.2) приводятся к виду

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\perp - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0,$$

где $n = kc/\omega$ называют показателем преломления. Отсюда видно, что в изотропной плазме существует два типа колебаний, дисперсия которых описывается различными функциями ε_{\perp} и ε_{\parallel} : $n^2 = \varepsilon_{\perp}$ и $\varepsilon_{\parallel} = 0$. Первое из дисперсионных соотношений соответствует электромагнитным волнам, поляризованным поперёк направления их распространения $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, а второе — потенциальным колебаниям, в которых электрическое поле направлено вдоль волнового вектора $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ и в которых по этой причине не происходит возмущения магнитного поля $\mathbf{B} \propto [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = 0$.

2.3 Затухание Ландау

С математической точки зрения полученные дисперсионные уравнения содержат расходящиеся интегралы. Действительно, интегрирование по импульсам в ε_{\parallel} проходит через точку, в которой знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль ($\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$). Физически это условие выделяет те частицы плазмы, скорость движения которых в направлении распространения волны совпадает с её фазовой скоростью. Эти резонансные частицы испытывают на себе постоянное электрическое поле волны и могут эффективно обмениваться с ней энергией. Расходимость возникает за счёт того, что, пользуясь методом Фурье, мы пытаемся представить эти нестационарные колебательные процессы в виде набора гармоник с вещественными частотами и постоянными во времени амплитудами. Между тем, нестационарность задачи носит принципиальный характер ещё и потому, что в реальной физической ситуации любой колебательный процесс всегда имеет своё начало. Для корректного математического описания таких начальных задач существует метод Лапласа, однако физики чаще используют эквивалентный подход, в котором по-прежнему применяют метод Фурье, а возникающие в интегралах особенности обходят в комплексной плоскости ω по определённому правилу, позволяющему учесть начальные условия.

Обоснуем необходимость введения подобного правила на конкретном примере. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ включается возмущение $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{k}_0/k_0)e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$. Наша цель — выяснить, как это возмущение будет эволюционировать со временем. Данное начальное условие можно учесть путём введения стороннего тока

$$\mathbf{j}^{\text{CT}}(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\delta(t) \quad (2.14)$$

в уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{CT}}). \quad (2.15)$$

Интегрирование этого уравнения по бесконечной малой окрестности начального момента времени действительно приводит к необходимому условию $\mathbf{E}(0, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$. В Фурье-представлении уравнения Максвелла приобретают вид

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]]_\alpha + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_\alpha^{\text{CT}}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.16)$$

где Фурье-образ стороннего тока определяется выражением

$$\mathbf{j}^{\text{CT}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{j}^{\text{CT}}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} dt d\mathbf{r} = -\frac{E_0 \mathbf{k}_0}{2 k_0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0). \quad (2.17)$$

Умножая уравнение (2.16) скалярно и векторно на \mathbf{k} , получаем уравнения, описывающие независимое возбуждение потенциальных и электромагнитных собственных колебаний плазмы

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} (\mathbf{k}\mathbf{j}^{\text{CT}}) \quad (2.18)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k^2 \right) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{4\pi i \omega}{c^2} [\mathbf{k} \times \mathbf{j}^{\text{CT}}]. \quad (2.19)$$

Отсюда видно, что первоначально потенциальное поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ может возбуждать только потенциальные плазменные колебания с $\mathbf{E} = (\mathbf{k}/k)E_{\parallel}$. Фурье-амплитуда этого поля имеет вид

$$E_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi i}{\omega \varepsilon_{\parallel}} E_0 \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}{k k_0} \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0). \quad (2.20)$$

Восстанавливая зависимость этого поля от координат и времени, получаем

$$E_{\parallel}(t, \mathbf{r}) = \frac{i}{2\pi} E_0 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega \varepsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}_0)} d\omega. \quad (2.21)$$

Рассмотрим сначала случай холодной плазмы, в котором, как известно, диэлектрическая проницаемость имеет простой вид $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. В этом случае в интеграле

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_p^2} d\omega \quad (2.22)$$

имеются две особые точки $\omega = \pm\omega_p$, отвечающие собственным ленгмюровским колебаниям плазмы. Чтобы приспособить метод Фурье к решению начальной задачи, нужно обойти эти особые точки, несколько

сместив путь интегрирования в комплексной плоскости ω . Поскольку до включения начального возмущения колебания электрического поля в плазме отсутствовали, такое смещение должно быть согласовано с условием $E_{\parallel}(t < 0) = 0$. Такой результат при вычислении интеграла I можно получить только в том случае, если обход вещественных особенностей производится сверху. Таким образом, если мы рассматриваем начальную задачу методом Фурье, то восстановление функции по её Фурье-образу должно производиться по формуле

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.23)$$

в которой $\sigma > 0$ выбрана так, чтобы путь интегрирования в комплексной плоскости ω лежал выше всех особенностей функции $f(\omega)$. Такое правило называют правилом обхода Ландау.

При $t > 0$ взятие интеграла I сводится к вычислению вычетов в двух простых полюсах и приводит к следующему результату для E_{\parallel} :

$$E_{\parallel}(t, \mathbf{r}) = E_0 e^{i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \cos \omega_p t. \quad (2.24)$$

Это означает, что в холодной плазме выбранное нами начальное возмущение эволюционирует в дальнейшем как стоячая ленгмюровская волна.

В горячей плазме особые точки в интеграле (2.21) по-прежнему связаны с нулями функции ε_{\parallel} , однако теперь решения дисперсионного уравнения $\varepsilon_{\parallel} = 0$ должны быть комплексными. Поскольку частоту в резонансном знаменателе $\omega - kv_{\parallel}$ согласно правилу Ландау надо понимать как $\omega + i0$, обход соответствующей особой точки в комплексной плоскости v_{\parallel} действительно приводит к появлению мнимой части ε_{\parallel} . Число корней такого дисперсионного уравнения оказывается бесконечно большим, при этом в статистически равновесной плазме все они располагаются в нижней полуплоскости ω . Это означает, что все собственные колебания плазмы в этом случае должны затухать со временем. Начальное возмущение должно возбуждать колебания на всех собственных частотах, однако в пределе $t \rightarrow \infty$ основной вклад в электрическое поле должно давать то колебание, которое затухает медленнее остальных (верхний полюс $\omega_{\mathbf{k}} = \omega'_{\mathbf{k}} - i\Gamma$):

$$I = \int \frac{e^{-i\omega t}}{\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{\parallel})}{\partial\omega} \right]_{\omega_{\mathbf{k}}} (\omega - \omega_{\mathbf{k}})} d\omega = -2\pi i \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{\parallel})}{\partial\omega} \right]_{\omega_{\mathbf{k}}}^{-1} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (2.25)$$

Таким образом, на больших временах электрическое поле $E_{\parallel} \propto e^{-i\omega'_{\mathbf{k}}t} e^{-\Gamma t}$ экспоненциально затухает с декрементом Γ .

Для вычисления скорости затухания продольных волн на электронах в нерелятивистской плазме преобразуем дисперсионное уравнение к виду

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \epsilon^i + \frac{4\pi e^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{dp_z}{\omega - kv_z} = 0, \quad (2.26)$$

в котором фигурирует функция распределения электронов, проинтегрированная по поперечным к \mathbf{k} компонентам импульса

$$F(p_z) = \int f_0^e(p) dp_x dp_y,$$

и введено обозначение ϵ^i для ионного вклада. Переходя к интегрированию по продольной скорости

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \epsilon^i - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial v_z} \frac{dv_z}{v_z - \omega/k} = 0, \quad (2.27)$$

видим, что по правилу Ландау особая точка ω/k на комплексной плоскости v_z располагается чуть выше вещественной оси, что соответствует её обходу снизу (рис.). Интеграл по вещественной оси v_z можно представить тогда в виде суммы интеграла в смысле главного значения и полувычета в особой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel} + i \operatorname{Im} \varepsilon_{\parallel} &= 1 + \epsilon^i - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial v_z} \frac{dv_z}{v_z - \omega/k} - \\ &\quad - i \frac{4\pi^2 e^2}{k^2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_z} \right]_{\omega/k} = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Решением этого уравнения является комплексная величина $\omega_{\mathbf{k}} = \omega'_{\mathbf{k}} - i\Gamma$. Для слабозатухающих колебаний ($\Gamma \ll \omega'_{\mathbf{k}}$) реальную и мнимую части собственной частоты можно найти методом последовательных приближений. Если затуханием пренебречь полностью, то дисперсия продольных колебаний $\omega'_{\mathbf{k}}$ определяется уравнением $\operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel}(\omega'_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = 0$. В следующем приближении нужно линеаризовать дисперсионное уравнение (2.28), учитывая малые мнимые части

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel}(\omega'_{\mathbf{k}} - i\Gamma, \mathbf{k}) + i \operatorname{Im} \varepsilon_{\parallel}(\omega'_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = -i\Gamma \left[\frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega} \right]_{\omega'_{\mathbf{k}}} + i \operatorname{Im} \varepsilon_{\parallel}(\omega'_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.29)$$

Таким образом, декремент затухания волн определяется выражением

$$\Gamma = \text{Im}\varepsilon_{\parallel} \left[\frac{\partial \text{Re}\varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega} \right]^{-1}. \quad (2.30)$$

Знак этой величины может соответствовать как затуханию ($\Gamma > 0$), так и раскачке плазменных колебаний ($\Gamma < 0$). Величина $\partial \text{Re}\varepsilon_{\parallel} / \partial \omega$ определяет знак энергии волны

$$W = \frac{|E|^2}{16\pi} \omega \frac{\partial \text{Re}\varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega}, \quad (2.31)$$

поэтому волны с положительной энергией должны затухать при $\text{Im}\varepsilon_{\parallel} > 0$ и нарастать при $\text{Im}\varepsilon_{\parallel} < 0$. Учитывая, что $\text{Im}\varepsilon_{\parallel}$ определяется производной функции распределения резонансных частиц

$$\text{Im}\varepsilon_{\parallel} = -\frac{4\pi^2 e^2}{k^2} \left[\frac{\partial F}{\partial v_z} \right]_{\omega/k}, \quad (2.32)$$

можно заключить, что затухание колебаний происходит в том диапазоне фазовых скоростей, который соответствует отрицательному наклону функции распределения, а нарастание появляется на участках с положительной производной. Теперь можно подтвердить, что в равновесной плазме с максвелловской функцией распределения частиц все колебания действительно должны затухать, поскольку эта функция всюду спадает с ростом продольной скорости.

С физической точки зрения условие затухания плазменной волны $\partial F / \partial v_z|_{\omega/k} < 0$ требует, чтобы частиц, слегка обгоняющих волну, то есть движущихся чуть быстрее её фазовой скорости, было меньше, чем частиц, которые слегка от неё отстают. Действительно, обмениваться энергией с волной конечной амплитуды φ могут лишь те частицы, которые захвачены в её потенциальную яму. Условием захвата является малость кинетической энергии частицы $m(v_z - \omega/k)^2/2$ в системе отсчёта волны по сравнению с глубиной этой ямы $e\varphi$. Отстающая частица рано или поздно должна отразиться от догоняющей потенциальной стенки и забрать у волны часть энергии, при этом обгоняющая частица, отражаясь в более медленной яме, теряет свою энергию, отдавая её волне. Суммарный эффект затухания или раскачки действительно зависит от того, каких частиц больше. В пределе малых амплитуд резонанс $v_z - \omega/k$ становится бесконечно узким, а перевес в числе обгоняющих или отстающих частиц начинает определяться знаком производной $\partial F / \partial v_z$ в точке резонанса.

Задачи:

1. Найти мощность поглощения энергии волны в процессе затухания Ландау, вычисляя работу, совершаемую волной над отдельными электронами.

Лекция 3

Волны в максвелловской плазме

3.1 Диэлектрическая проницаемость

Известно, что в статистически равновесном состоянии нерелятивистская плазма характеризуется максвелловским распределением по импульсам

$$f_0^a(p) = \frac{n_a}{(2\pi m_a T_a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_a T_a}\right), \quad (3.1)$$

где n_a и T_a — плотность и температура частиц сорта a . Как и в любой другой немагнитной плазме с изотропным распределением, все колебания в ней могут быть разделены на потенциальные и электромагнитные. Их дисперсия определяется различными диэлектрическими функциями $\varepsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$. Подставляя максвелловское распределение в формулы (2.12) и (2.13), можно выразить эти величины

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2 v_{Ta}^2} [1 - Z(\xi_a)], \quad \varepsilon_{\perp} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} Z(\xi_a) \quad (3.2)$$

через так называемую дисперсионную функцию плазмы

$$Z(\xi_a) = \frac{\xi_a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\xi_a - x} dx, \quad \xi_a = \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_{Ta}}, \quad (3.3)$$

аргумент которой по сути показывает, насколько велика фазовая скорость волны ω/k по сравнению с тепловой скоростью частиц данного сорта $v_{Ta} = \sqrt{T_a/m_a}$. Здесь введены также обозначения для плазменной частоты $\omega_{pa} = (4\pi e^2 n_a/m_a)^{1/2}$ и радиуса Дебая $r_{Da} = v_{Ta}/\omega_{pa}$, вычисляемых для каждого сорта частиц.

Прежде чем подставлять функцию $Z(\xi)$ в дисперсионные соотношения, необходимо учесть правило обхода Ландау. С этой целью преобразуем дисперсионную функцию, учитывая, что частота в резонансном знаменателе $\xi - x$ понимается как $\omega + i0$ независимо от того, затухает или раскачивается плазменная волна. Если резонансный знаменатель представить в виде интеграла

$$\frac{1}{\xi - x} = -i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(\xi + i0 - x)} d\alpha, \quad (3.4)$$

а в Z поменять порядок интегрирования, то получим

$$Z(\xi) = -i\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha/2 - i\xi)^2} d\alpha = -i2\xi e^{-\xi^2} \int_{-i\xi}^{\infty - i\xi} e^{-y^2} dy. \quad (3.5)$$

Деформируя путь интегрирования в комплексной плоскости y следующим образом

$$\int_{-i\xi}^{\infty - i\xi} = \int_{-i\xi}^0 + \int_0^{\infty} + \int_{\infty}^{\infty - i\xi}, \quad (3.6)$$

и переходя в первом интеграле к новой переменной $x = iy$, получаем выражение для $Z(\xi)$, пригодное для описания как неустойчивых, так и затухающих колебаний:

$$Z(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{x^2} dx - i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2}. \quad (3.7)$$

Представляют интерес также и асимптотики функции $Z(\xi)$ при больших ($\xi \gg 1$) и малых ($\xi \ll 1$) значениях аргумента. Первый предельный случай называют гидродинамическим, поскольку фазовая скорость волны здесь значительно превышает тепловые скорости частиц и плазму в первом приближении можно считать холодной, а второй — кинетическим, поскольку тепловые разбросы в этом случае оказываются существенно больше фазовой скорости волны.

Гидродинамический предел интересен тем, что допускает существование слабозатухающих колебаний. Действительно, малость $\text{Im}Z$ в этом режиме обеспечивается экспоненциально малым количеством частиц, попадающих в резонанс с быстрыми волнами. Для получения асимптотического поведения Z при больших аргументах преобразуем интеграл (3.7),

делая замену $y = \xi - x$:

$$2\xi \int_0^\xi e^{(x-\xi)(x+\xi)} dx = 2\xi \int_0^\xi e^{-2\xi y} e^{y^2} dy. \quad (3.8)$$

Основной вклад в этот интеграл набирается при малых значениях y ($y \ll 1$), поэтому для e^{y^2} можно воспользоваться разложением

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + y^4/2 + \dots \quad (3.9)$$

Вычисляя затем простые интегралы, получаем

$$Z(\xi) \simeq 1 + \frac{1}{2\xi^2} + \frac{3}{4\xi^4} + \dots - i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2}. \quad (3.10)$$

Подстановка этого разложения в ε_{\parallel} даёт

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{3k^2 v_{Ta}^2}{\omega^2} + \dots - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{k v_{Ta}} \right)^3 \exp\left(\frac{-\omega^2}{2k^2 v_{Ta}^2} \right) \right]. \quad (3.11)$$

В кинетическом пределе ($\xi \ll 1$) дисперсионная функция ведёт себя как

$$Z(\xi) \simeq 2\xi^2 - i\sqrt{\pi}\xi. \quad (3.12)$$

Продольная диэлектрическая проницаемость тогда имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \sum_a \frac{1}{k^2 r_{Da}^2} (1 + i\sqrt{\pi}\xi_a). \quad (3.13)$$

Видно, что затухание колебаний в этом режиме тоже должно быть слабым, поскольку $\text{Im}\varepsilon_{\parallel} \ll \text{Re}\varepsilon_{\parallel}$. В отличие от гидродинамического режима в резонансе с медленной волной теперь находится большое количество частиц, однако поглощение энергии волны остаётся слабым в силу малости производной $\partial F/\partial v_z$.

В промежуточном режиме $\xi \sim 1$ реальная и мнимая части ε одного порядка, что означает сильное затухание любых колебаний.

3.2 Потенциальные волны

Рассмотрим возможные типы потенциальных колебаний плазмы, удовлетворяющих уравнению $\varepsilon_{\parallel} = 0$. Как уже было сказано, слабозатухающие колебания могут существовать в режиме, при котором их фазовая

скорость настолько велика, что и для электронов, и для ионов плазмы выполняется гидродинамическое приближение. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{3k^2 v_{Ta}^2}{\omega^2} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{k v_{Ta}} \right)^3 \exp \left(\frac{-\omega^2}{2k^2 v_{Ta}^2} \right) \right] = 0. \quad (3.14)$$

Если в нём пренебречь малыми добавками, связанными с конечной температурой, то получаем известное из гидродинамики уравнение

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0, \quad (3.15)$$

которое описывает ленгмюровские колебания с постоянной частотой $\omega = (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2} \simeq \omega_{pe}$. Видно, что вклад ионов в эти высокочастотные колебания оказывается незначительным и в первом приближении их можно считать неподвижным фоном. Учёт тепловой поправки без учёта экспоненциально малого затухания, приводит к появлению дисперсии в этих колебаниях

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} \right) = 0, \quad \omega_\ell \simeq \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right). \quad (3.16)$$

Наконец, учитывая мнимую часть $\varepsilon_{||}$ и отыскивая решение дисперсионного уравнения в виде $\omega = \omega_\ell - i\Gamma$,

$$1 - \frac{\omega_\ell^2}{(\omega_\ell - i\Gamma)^2} + i \frac{(\pi/2)^{1/2}}{k^3 r_{De}^3} \exp \left(-\frac{\omega_\ell^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right) = 0, \quad (3.17)$$

находим декремент затухания ленгмюровских волн на электронах

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 r_{De}^3} \exp \left(-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (3.18)$$

Применимость гидродинамического приближения в этом случае ограничена условием $kr_{De} \ll 1$.

Физическая природа этих колебаний становится более наглядной, если их дисперсию получить из уравнений идеальной гидродинамики. Как следует из гидродинамического подхода, ленгмюровские волны представляют собой бегущую последовательность сжатий и разрежений в электронной жидкости. Из-за большой частоты колебаний массивные ионы практически не успевают сдвигаться со своих мест. При этом в местах скопления электронов образуется избыточный отрицательный заряд, а в

местах разряджений — избыточный положительный заряд. Это приводит к появлению электрических полей, которые пытаются вернуть электроны в положения равновесия. Такие колебания могут существовать в полностью холодной плазме и происходят на электронной плазменной частоте. Если электроны имеют конечную температуру, то в местах сжатия электронной жидкости к возвращающей силе со стороны электрического поля добавляется ещё и сила со стороны избыточного давления, что объясняет появление тепловой поправки к закону дисперсии ленгмюровских колебаний.

Ещё один тип слабозатухающих потенциальных колебаний может существовать в режиме, при котором фазовая скорость волны существенно превышает тепловую скорость ионов, которые по-прежнему рассматриваются в рамках гидродинамического приближения ($\omega/k \gg v_{Ti}$), но при этом оказывается значительно меньше тепловой скорости электронов, для которых справедлив кинетический предел ($\omega/k \ll v_{Te}$). В этом режиме дисперсионное уравнение имеет следующий вид:

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) = 0. \quad (3.19)$$

Пренебрегая в первом приближении малой мнимой частью, получаем закон дисперсии ионно-звуковой волны

$$\omega_s = \frac{k c_s}{(1 + k^2 r_{De}^2)^{1/2}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}. \quad (3.20)$$

Затухание этой волны на электронах происходит с декрементом

$$\Gamma = \omega_s \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} (1 + k^2 r_{De}^2)^{-3/2}, \quad (3.21)$$

который всегда мал по сравнению с реальной частью частоты. Затухание же на ионах можно считать малым только при условии

$$\frac{c_s}{(1 + k^2 r_{De}^2)^{1/2}} \gg \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}. \quad (3.22)$$

Это означает, что длинноволновые колебания $k \leq 1/r_{De}$ могут существовать только в сильно неизотермической плазме, в которой температура электронов значительно превышает температуру ионов ($T_e \gg T_i$), а в коротковолновой области $k > 1/r_{De}$ спектр слабозатухающих колебаний должен быть ограничен условием $kr_{De} \ll (T_e/T_i)^{1/2}$.

Закон дисперсии ионного звука может быть получен и в рамках двухжидкостной гидродинамики, если в ней учесть конечное давление электронов. По сути ионно-звуковые колебания представляют собой колебания ионной плотности, которые в силу большой массы ионов происходят настолько медленно, что быстрые электроны успевают подстроиться под неоднородное распределение ионов, препятствуя появлению большого нескомпенсированного заряда. При этом возвращающей силой в этих колебаниях выступает градиент электронного давления. Под действием этой силы электроны пытаются покинуть области их скопления, однако возникающие из-за разделения зарядов амбиполярные поля замедляют их ход, заставляя двигаться вместе с ионами.

Ещё одна возможность для существования слабозатухающих колебаний, казалось бы, должна открываться в режиме, при котором и электроны, и ионы плазмы можно рассматривать в кинетическом пределе ($\omega/k \ll v_{Te}, v_{Ti}$), однако, как видно из формулы (3.13), оба сорта частиц в этом случае дают положительные вклады в диэлектрическую проницаемость ε_{\parallel} , исключая тем самым возможность её зануления во всём диапазоне волновых чисел.

3.3 Электромагнитные волны

Электромагнитные волны в изотропной плазме должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} Z(\xi_a). \quad (3.23)$$

Из определения дисперсионной функции (3.3) видно, что её вещественная часть всюду положительна ($\text{Re } Z(\xi) > 0$). Тогда из дисперсионного уравнения следует, что фазовая скорость этих колебаний должна превышать скорость света в вакууме ($\omega/k > c$). В этом случае в плазме не существует частиц, которые могли бы попадать в резонанс с такими волнами, поэтому электромагнитные колебания в немагнитной плазме не затухают по Ландау. Очевидно, что нерелятивистская плазма в этом случае должна рассматриваться в гидродинамическом пределе. При полном пренебрежении тепловым движением получаем закон дисперсии

$$\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + k^2 c^2}, \quad (3.24)$$

который в коротковолновом пределе совпадает с дисперсией электромагнитной волны в вакууме $\omega = kc$.

Задачи:

1. Получить законы дисперсии колебаний в незамагниченной горячей плазме из уравнений двухжидкостной гидродинамики с конечным давлением.
2. Проверить асимптотики (3.11) и (3.13) функции ε_{\parallel} , переходя к гидродинамическому и кинетическому пределам в выражении (2.28).
3. Получить тепловую поправку к закону дисперсии электромагнитной волны.

Лекция 4

Волны в неравновесной плазме с надтепловыми хвостами

4.1 Каппа-распределения

В бесстолкновительной плазме, находящейся в неравновесном и турбулентном состоянии, часто формируются распределения частиц, в которых наряду с низкоэнергетическим тепловым ядром появляются медленно спадающие степенные хвосты. В плазме солнечного ветра и в магнитосферах различных планет надтепловые частицы весьма хорошо описываются семейством так называемых каппа-распределений:

$$f_{\kappa}(v) = \frac{n}{\pi^{3/2} \Delta v^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\Delta v^2} \right)^{-\kappa-1}, \quad (4.1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Видно, что кроме плотности n и характерного теплового разброса по скоростям Δv это распределение характеризуется ещё и параметром κ , определяющим интенсивность надтеплого хвоста. При $\kappa \rightarrow \infty$ оно переходит в максвелловское распределение, а вблизи минимального значения $\kappa_{min} = 3/2$ описывает сильнонеравновесные распределения, в которых значительная доля энергии содержится в надтепловых частицах.

Покажем, как меняется дисперсия и затухание плазменных колебаний, если от максвелловского распределения частиц

$$f_M(v) = \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) \quad (4.2)$$

с кинетической энергией $E_k = (3/2)nT$ перейти к каппа-распределению

с таким же энергосодержанием

$$E_k = \frac{3}{2}nT = \int \frac{mv^2}{2} f_\kappa d\mathbf{v}. \quad (4.3)$$

Интеграл в этом уравнении посредством замены $v/\Delta v = \tan x$ может быть сведён к табличному

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p/2)\Gamma(q/2)}{\Gamma(p/2 + q/2)}. \quad (4.4)$$

В результате получаем, что заданный уровень энергосодержания имеет то кашпа-распределение, у которого тепловой разброс определяется выражением

$$\Delta v = \sqrt{(2\kappa - 3) \frac{T}{m}}. \quad (4.5)$$

4.2 Ленгмюровская волна

Как мы уже выяснили, для получения закона дисперсии ленгмюровской волны в дисперсионном уравнении для потенциальных колебаний

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_\kappa}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = 0. \quad (4.6)$$

достаточно оставить только вклад электронов и воспользоваться для них гидродинамическим приближением. После обхода особенности по правилу Ландау получаем

$$1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} k_\alpha \int \frac{\partial f_\kappa}{\partial v_\alpha} \frac{dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i \frac{4\pi^2 e^2}{m_e k^2} \left[\frac{\partial F_\kappa}{\partial v_{\parallel}} \right]_{\omega/k} = 0, \quad (4.7)$$

где

$$F_\kappa(v_{\parallel}) = \int f d^2 v_{\perp} = \frac{n}{\sqrt{\pi} \Delta v} \frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 + \frac{v_{\parallel}^2}{\Delta v^2} \right)^{-\kappa}. \quad (4.8)$$

Резонансный знаменатель в гидродинамическом приближении можно разложить по малому параметру $\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega$

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega^2} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^3}{\omega^3} \right), \quad (4.9)$$

тогда интеграл в смысле главного значения можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{\omega} \int f_{\kappa} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^3}{\omega^3} \right) d\mathbf{v} = -\frac{k_{\alpha}}{\omega^2} \left(n + \frac{k^2}{\omega^2} \int v^2 f_{\kappa} d\mathbf{v} \right). \quad (4.10)$$

Дисперсионное уравнение в этом случае можно переписать следующим образом

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{\parallel}(\omega, k) + i\operatorname{Im}\varepsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0,$$

где

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k^2}{\omega^2} \langle v^2 \rangle \right), \quad (4.11)$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon_{\parallel} = -\frac{4\pi^2 e^2}{m_e k^2} \left[\frac{\partial F_{\kappa}}{\partial v_{\parallel}} \right]_{\omega/k}. \quad (4.12)$$

В такой форме полученное уравнение может использоваться для анализа дисперсии и затухания ленгмюровской волны в плазме с любым изотропным распределением. Видно, что тепловая поправка в $\operatorname{Re}\varepsilon_{\parallel}$ фактически определяется полным энергосодержанием электронной компоненты плазмы $E_k = nm_e \langle v^2 \rangle / 2$. В равновесной плазме с максвелловским распределением средний квадрат скорости выражается через температуру

$$\langle v^2 \rangle_M = \frac{1}{n} \int v^2 f_M d\mathbf{v} = 3 \frac{T}{m_e}, \quad (4.13)$$

а в плазме со степенным хвостом — через параметр Δv

$$\langle v^2 \rangle_{\kappa} = \frac{1}{n} \int v^2 f_{\kappa} d\mathbf{v} = \frac{3\Delta v^2}{2\kappa - 3}. \quad (4.14)$$

Если однако различные распределения характеризуются одним и тем же энергосодержанием, то дисперсия ленгмюровской волны в таких плазмах должна быть одинаковой

$$\omega_{\ell} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + 3k^2 T / m_e}. \quad (4.15)$$

Что касается затухания такой волны, то в неравновесной плазме с капла-распределением оно должно быть более сильным, поскольку в медленно спадающем степенном хвосте содержится гораздо больше частиц, способных резонансно взаимодействовать с волной. Действительно, в пределе слабого затухания получаем следующее выражение для декремента

$$\Gamma = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 1/2)} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{\ell}^2}{k^3 \Delta v^3} \left(1 + \frac{\omega_{\ell}^2}{k^2 \Delta v^2} \right)^{-\kappa-1}. \quad (4.16)$$

Если тепловой разброс Δv выразить через дебаевский радиус максвелловской плазмы, имеющей ту же кинетическую энергию, то в плазме с достаточно интенсивным хвостом ($\kappa = 2$) декремент затухания $\Gamma \approx \omega_{pe} k^3 r_{De}^3$ окажется гораздо больше аналогичной оценки для максвелловской плазмы.

Интересная ситуация возникает в предельном случае $\kappa = 3/2$, в котором полная кинетическая энергия электронов становится бесконечно большой. Такая расходимость связана с использованием нерелятивистского приближения, поэтому если в области релятивистских энергий функцию $f \propto v^{-5}$ заменить степенным законом $f \propto p^{-5}$, то энергосохранение плазмы останется конечным, но подавляющая часть энергии будет содержаться в надтепловом хвосте. Корректное рассмотрение этого случая требует учёта релятивистских эффектов, тем не менее качественный вывод формулы (4.11) о том, что основной вклад в тепловую поправку к частоте ленгмюровской волны даёт небольшая часть высокоэнергетических надтепловых частиц, остаётся справедливым.

4.3 Ионно-звуковая волна

Чтобы получить дисперсию ионного звука, воспользуемся дисперсионным уравнением (4.7), добавляя в него вклад холодных ионов. Таким образом, мнимая часть диэлектрической проницаемости остаётся неизменной, а реальная часть приобретает вид

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (4.17)$$

Переходя к кинетическому пределу для электронов, мы пренебрегаем частотой в резонансном знаменателе и преобразуем интеграл в смысле главного значения следующим образом

$$- \int \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} d\mathbf{v} = \int \frac{f}{v^2} d\mathbf{v} = n \left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle. \quad (4.18)$$

Реальная часть диэлектрической проницаемости тогда может быть записана в форме

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle, \quad (4.19)$$

пригодной для произвольного изотропного распределения частиц. Если в максвелловской плазме среднее от обратного квадрата скорости определяется той же самой температурой, которая задаёт тепловую поправку

в ленгмюровской волне,

$$\left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle_M = \frac{m_e}{T_e}, \quad (4.20)$$

то в эквивалентной по энергосодержанию плазме со степенным хвостом эта величина может быть существенно больше

$$\left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle_\kappa = \left(\frac{2\kappa - 1}{2\kappa - 3} \right) \frac{m_e}{T_e}. \quad (4.21)$$

Это означает, что дисперсия ионно-звуковой волны в неравновесной плазме с капша-распределением имеет такой же вид, как и в максвелловской плазме, но в роли температуры теперь выступает величина

$$T_s = T_e \left(\frac{2\kappa - 3}{2\kappa - 1} \right). \quad (4.22)$$

Следует отметить, что величина

$$\omega_{pe}^2 \left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle = \frac{1}{r_{De}^2} \quad (4.23)$$

определяет радиус Дебая, то есть характерное расстояние, на котором происходит экранирование внесённого в плазму заряда. Поскольку под знаком усреднения стоит обратная энергия, то вклад в такое экранирование от низкоэнергетических частиц из ядра распределения оказывается существенно больше, чем вклад надтепловых частиц. Таким образом, можно считать, что быстрые электроны хвоста практически не привязаны к ионам амбиполярными полями, а возвращающую силу в этих медленных колебаниях создаёт градиент давления более холодной электронной компонентны. В связи с этим неравновесные распределения со степенными хвостами удобно характеризовать двумя величинами: эффективной температурой всего распределения $T_\ell = m \langle v^2 \rangle / 3$, которая фактически определяет его энергосодержание, и температурой теплового ядра $T_s = m \langle 1/v^2 \rangle^{-1}$. Первая задаёт величину тепловой поправки к частоте ленгмюровской волны, а вторая определяет дисперсию ионного звука. Чем интенсивнее хвост надтепловых частиц, тем больше разрыв между T_ℓ и T_s .

Затухание ионно-звуковой волны на электронах описывается декрементом

$$\Gamma = \omega_s \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\kappa + 1)}{(2\kappa - 3)^{3/2} \Gamma(\kappa - 1/2)} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(k^2 r_{De}^2 + \frac{2\kappa - 1}{2\kappa - 3} \right)^{-3/2}, \quad (4.24)$$

36 Лекция 4. Волны в неравновесной плазме с надтепловыми хвостами

который по порядку величины совпадает с декрементом затухания в максвелловской плазме, имеющей такую же энергию.

Задачи:

1. Найти, как в гидродинамическом пределе меняется дисперсия ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме с релятивистским распределением $f \propto (p^2 + \Delta p^2)^{-5/2}$.

Лекция 5

Двухпотоковая неустойчивость

Известно, что плазма оказывается неустойчивой, если в ней возникают потоки частиц, которые движутся относительно друг друга. Действительно, плазма в этом случае находится в неравновесном состоянии и избыточная энергия этих потоков может тратиться на возбуждение плазменных колебаний за счёт развития различного рода неустойчивостей. В данной лекции мы остановимся только на тех неустойчивостях, которые развиваются в плазме с электронным пучком. Для простоты будем считать, что плотность пучка n_b существенно ниже плотности плазмы n_p , а его средняя скорость \mathbf{v}_b заметно превышает тепловую скорость плазменных электронов v_{Te} .

Следует сразу отметить, что в системе плазма-пучок появляется выделенное направление — направление движения пучка. Поскольку данная система теряет свойство изотропности, все колебания в ней уже нельзя разделить на строго потенциальные (электростатические) и электромагнитные. Это означает, что при вычислении линейного отклика пучка в кинетическом уравнении Власова нужно учитывать вклад силы Лоренца, действующей со стороны возмущений магнитного поля. Тогда линейное по полю возмущение функции распределения приобретает вид

$$\delta f^a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = -\frac{ie^2}{\omega} \left[\frac{\partial f_0^a}{\partial p_\beta} + \frac{k_\gamma v_\beta}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0^a}{\partial p_\gamma} \right] E_\beta. \quad (5.1)$$

Таким образом, в случае отсутствия изотропии плазмы тензор диэлектрической проницаемости может быть записан в форме

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{\omega^2} \int v_\alpha \frac{\partial f_0^a}{\partial p_\gamma} \left(\delta_{\beta\gamma} + \frac{k_\gamma v_\beta}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right) d^3p. \quad (5.2)$$

Частицы пучка могут накачивать энергию только в те плазменные колебания, которые попадают с ними в черенковский резонанс $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$.

При этом в зависимости от величины разброса пучка Δv_b по скоростям возможны различные режимы раскачки неустойчивостей. Дело в том, что ширина этого резонанса может определяться либо шириной частотного спектра, которая для неустойчивой волны составляет величину порядка инкремента ($\Delta\omega \sim \Gamma$), либо разбросом пучка $k\Delta v_b \sim \omega\Delta v_b/v_b$. В первом случае $\Gamma \gg k\Delta v_b$ в резонанс с волной попадают сразу все частицы пучка, поэтому основную роль играют не детали его распределения по скоростям, а такие интегральные характеристики, как плотность и средняя скорость. Такой режим неустойчивости называют гидродинамическим. Во втором же случае $\Gamma \ll k\Delta v_b$ резонансные с волной частицы занимают весьма узкий диапазон скоростей, внутри которого функция распределения пучка меняется не значительно, так что эффективность нарастания неустойчивости определяется локальным значением её производной по скорости. В таком кинетическом режиме нарастание плазменных колебаний фактически представляет собой эффект, обратный затуханию Ландау.

5.1 Гидродинамический режим

Итак, в гидродинамическом режиме электронный пучок ведёт себя как единая жидкость, наличие которой даже при условии малой относительной плотности ($n_b \ll n_p$) приводит не только к существенному искажению дисперсии собственных колебаний плазмы, но и к появлению новых ветвей. В предельном случае сильной неустойчивости можно полностью пренебречь тепловым разбросом пучка и использовать для него следующую функцию распределения: $f_0^b = n_b\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_b)$. Интеграл в тензоре $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (5.2) при этом удобно проинтегрировать по частям:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a \omega^2} \int \frac{f_0^a}{\gamma} \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha v_\beta + k_\beta v_\alpha}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{v_\alpha v_\beta (k^2 - \omega^2/c^2)}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] d^3p. \quad (5.3)$$

Подстановка функций распределения для холодной плазмы и холодного пучка даёт следующий результат:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b \omega^2} \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha v_{b\beta} + k_\beta v_{b\alpha}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_b} + \frac{v_{b\alpha} v_{b\beta} (k^2 - \omega^2/c^2)}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_b)^2} \right]. \quad (5.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 n_b}{m_e}, \quad \omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2, \quad (5.5)$$

$$\gamma_b = \sqrt{1 + \frac{p_b^2}{m_e^2 c^2}}, \quad \mathbf{v}_b = \frac{\mathbf{P}_b}{\gamma_b m_e}. \quad (5.6)$$

Если систему координат выбрать так, чтобы скорость пучка $\mathbf{v}_b = (0, 0, v_b)$ была направлена вдоль оси \mathbf{z} , а волновой вектор $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel)$ лежал в плоскости (x, z) , то уравнения Максвелла в Фурье-представлении будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} - k_\parallel^2 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xz} + k_\parallel k_\perp \\ 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy} - k^2 & 0 \\ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xz} + k_\parallel k_\perp & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} - k_\perp^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b \omega^2}, \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b (\omega - k_\parallel v_b)^2} \left(\frac{1}{\gamma_b^2} + \frac{k_\perp^2 v_b^2}{\omega^2} \right), \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -\frac{\omega_b^2}{\gamma_b \omega^2} \frac{k_\perp v_b}{\omega - k_\parallel v_b}. \quad (5.9)$$

Видно, что среди возможных колебаний в этой системе существует устойчивая электромагнитная волна, которая имеет поляризацию $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, \mathbf{v}_b и слегка модифицированный закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + \frac{n_b}{\gamma_b n_p} \right) + k^2 c^2. \quad (5.10)$$

Неустойчивая же ветвь описывается дисперсионным соотношением

$$\frac{\omega^2}{k^2 c^2} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2) - \varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (5.11)$$

которое теперь не совпадает с уравнением для потенциальных колебаний $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta / k^2 = 0$. Оказывается однако, что для достаточно слабых пучков наиболее неустойчивая часть спектра хорошо описывается электростатическим приближением

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b (\omega - k_\parallel v_b)^2} \left[\frac{k_\perp^2}{k^2} + \frac{k_\parallel^2}{\gamma_b^2 k^2} \right] = 0. \quad (5.12)$$

Удобно искать решение этого уравнения в виде $\omega = k_{\parallel}v_b + \delta$. Если поправка δ мала ($\delta \ll k_{\parallel}v_b$), то приближённое решение даёт

$$\frac{\delta}{\omega_p} = \left(\frac{n_b}{\gamma_b n_p} \right)^{1/2} \left(\frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{\gamma_b^2 k^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{k_{\parallel}^2 v_b^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.13)$$

Видно, что неустойчивыми оказываются колебания с достаточно большими длинами волн ($k_{\parallel} < \omega_p/v_b$), при этом максимум инкремента находится вблизи границы устойчивости. Чтобы найти это максимальное значение, уточним дисперсионное уравнение в окрестности $k_{\parallel} = \omega_p/v_b$:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{k_{\parallel}^2 v_b^2} \left(1 - \frac{2\delta}{k_{\parallel} v_b} \right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b \delta^2} \left(\frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{\gamma_b^2 k^2} \right) = 0. \quad (5.14)$$

Среди решений этого уравнения

$$\frac{\delta}{\omega_p} = \sqrt[3]{1} \left[\frac{n_b}{2\gamma_b n_p} \left(\frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{\gamma_b^2 k^2} \right) \right]^{1/3} \quad (5.15)$$

есть не только вещественный $\sqrt[3]{1} = 1$, но и два комплексно сопряжённых корня $\sqrt[3]{1} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, один из которых отвечает экспоненциально нарастающей волне. Таким образом, максимум инкремента

$$\Gamma_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left(\frac{n_b}{\gamma_b n_p} \right)^{1/3} \left[\frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{\gamma_b^2 k^2} \right]^{1/3} \quad (5.16)$$

достигается в области пересечения ветви ленгмюровских колебаний холодной плазмы $\omega = \omega_p$ и пучковой ветви $\omega = k_{\parallel}v_b$ и является растущей функцией поперечного волнового числа k_{\perp} . Тот факт, что в неустойчивом спектре доминируют косые колебания, является следствием анизотропии релятивистской массы электронов пучка. Действительно, если поперёк направления движения пучка инерция релятивистских электронов определяется массой $\gamma_b m_e$, то в продольных колебаниях эта эффективная масса заметно возрастает до величины $\gamma_b^3 m_e$. Очевидно поэтому, что отклик пучка на косые потенциальные колебания в этих условиях должен быть более быстрым. Отметим также, что продольная фазовая скорость неустойчивой волны ω/k_{\parallel} оказывается чуть ниже скорости пучка, благодаря чему пучок как целое попадает в её замедляющую фазу, что и обеспечивает перекачку энергии из пучка в волну.

В нерелятивистском пределе $v_b \ll c$ инкремент достигает значения

$$\Gamma_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3}, \quad (5.17)$$

при этом применимость гидродинамического подхода ограничивает величину теплового разброса пучка условием $\Delta v_b/v_b \ll (n_b/n_p)^{1/3}$.

Не для всех участков неустойчивого спектра однако электростатическое приближение можно считать адекватным. При $k_{\parallel} = 0$, например, возникает неустойчивость, которая сопровождается разбиением пучка на отдельные токовые филаменты и аperiодическим нарастанием возмущений магнитного поля. Эта неустойчивость получила название филаментационной. Действительно, при $k_{\parallel} = 0$ дисперсионное уравнение (5.11) может быть представлено в форме

$$\omega^2 \left(\omega^2 - \omega_p^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b} \right) \left(\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2 - \omega_p^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b^3} \right) - (\omega^2 - \omega_p^2) \frac{\omega_b^2}{\gamma_b} k_{\perp}^2 v_b^2 = 0. \quad (5.18)$$

В области малых частот ($\omega \ll \omega_p$) оно сводится к виду

$$\omega^2 \simeq - \frac{n_b}{\gamma_b n_p} \frac{k_{\perp}^2 v_b^2}{1 + k_{\perp}^2 c^2 / \omega_p^2}. \quad (5.19)$$

Максимальный инкремент такой неустойчивости достигает значения

$$\Gamma_{max} = \omega_p \left(\frac{v_b}{c} \right) \sqrt{\frac{n_b}{\gamma_b n_p}} \quad (5.20)$$

и может конкурировать с инкрементом нарастания косых ленгмюровских волн в случае достаточно плотных ($n_b \leq n_p$) слабoreлятивистских пучков.

5.2 Кинетический режим

Если пучок имеет достаточно большой разброс по скоростям, то в резонанс с отдельной неустойчивой модой попадает лишь малая доля частиц пучка. В предельном случае слабой неустойчивости пучок можно представить как набор отдельных частиц, каждая из которых независимо участвует в черенковском излучении собственных колебаний фоновой плазмы. Условие черенковского резонанса $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ при этом можно интерпретировать как закон сохранения энергии в элементарном акте излучения волны с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ отдельной частицей пучка, имеющей импульс \mathbf{p} . Действительно, для малых передач импульса

$\hbar|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{p}|$ получаем

$$\hbar\omega = m_e c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} - \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2}{m_e^2 c^2}} \right] \simeq \hbar(\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (5.21)$$

Пучок в этом режиме предполагается настолько слабым, что дисперсия колебаний в системе плазма-пучок остаётся такой же, как и в плазме без пучка. Пучок лишь способствует их медленной раскачке. В связи с этим будем по-прежнему считать, что в плазме существуют потенциальные ленгмюровские колебания, которые описываются дисперсионным уравнением

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d^3 p}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = 0. \quad (5.22)$$

Для вычисления инкремента неустойчивости воспользуемся тем же формализмом, который использовался при изучении эффекта затухания Ландау, обобщая его на релятивистский случай. Если волна неустойчива, то особая точка в интеграле лежит выше пути, по которому идёт интегрирование в комплексной плоскости v_z . Поэтому в пределе бесконечно слабой неустойчивости можно считать, что полюс спускается на вещественную ось, а его обход происходит снизу по бесконечно малой полуокружности. Интеграл при этом можно представить в виде суммы интеграла в смысле главного значения и полувывчета в особой точке:

$$\int = \int - i\pi \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 p. \quad (5.23)$$

Вещественной поправкой к частоте ленгмюровской волны $\omega = \omega_p$, которую даёт первый интеграл, можно пренебречь, а мнимую часть найти из уравнения

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega_p + i\Gamma)^2} - i \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 p = 0. \quad (5.24)$$

Таким образом, инкремент раскачки ленгмюровских колебаний определяется выражением

$$\Gamma = \omega_p \frac{2\pi e^2}{k^2} \int \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 p. \quad (5.25)$$

Оценим величину этого инкремента в нерелятивистском случае, когда приведённый выше интеграл выражается через производную одномерной

функции распределения $F_b(p_z) = \int f d^2p_\perp$ в точке резонанса:

$$\Gamma = \omega_p \frac{2\pi e^2}{k^2} \left[\frac{\partial F_b}{\partial v_z} \right]_{v_z=\omega/k_\parallel}. \quad (5.26)$$

Видно, что колебания оказываются неустойчивыми только в том диапазоне фазовых скоростей, который соответствует участку с положительной производной $\partial F_b/\partial v_z$. Учитывая, что

$$n_b = \int F_b dp_z \sim F_b m_e \Delta v_b, \quad \frac{\partial F_b}{\partial v_z} \sim \frac{F_b}{\Delta v_b},$$

получаем оценку для инкремента неустойчивости в кинетическом режиме

$$\Gamma \sim \omega_p \left(\frac{n_b}{n_p} \right) \left(\frac{v_b}{\Delta v_b} \right)^2. \quad (5.27)$$

Применимость кинетического подхода ($\Gamma \ll k\Delta v_b$) требует наличия достаточно большого разброса по скорости $\Delta v_b/v_b \gg (n_b/n_p)^{1/3}$. Из формул (5.17) и (5.27) видно, что на границе между режимами $\Delta v_b/v_b \sim (n_b/n_p)^{1/3}$ кинетический и гидродинамический инкременты по порядку величины сшиваются друг с другом.

Задачи:

1. Найти тензор диэлектрической проницаемости для системы плазменных пучков, используя уравнения двухжидкостной МГД.
2. Сформулировать условия применимости электростатического приближения для колебаний, нарастающих в процессе развития гидродинамической двухпотоковой неустойчивости.

Лекция 6

Диэлектрическая проницаемость замагниченной плазмы

Прежде чем перейти к анализу возможных колебаний горячей бесстолкновительной плазмы, помещённой в постоянное и однородное магнитное поле, получим выражение для её тензора диэлектрической проницаемости. При этом чтобы учесть и релятивистские эффекты, и эффекты, связанные с конечными тепловыми разбросами частиц, линейный отклик среды будем вычислять на основе кинетического уравнения Власова.

6.1 Решение кинетического уравнения

В плазме с магнитным полем $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ в качестве невозмущённых функций распределения частиц можно выбирать произвольные аксиально симметричные функции $f_0(p_\perp, p_\parallel)$, допускающие анизотропию в распределении вдоль и поперёк поля. С появлением колебаний, характеризуемых полями \mathbf{E} и \mathbf{B} , в функции распределения частиц $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(p_\perp, p_\parallel) + \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ появляется возмущение, которое удовлетворяет линейному уравнению Власова

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (6.1)$$

Для определённости здесь рассматриваются электроны, имеющие заряд $-e$ и массу m_e . Если в пространстве импульсов перейти к цилиндрическим координатам $\mathbf{p} = (p_\perp \cos \varphi, p_\perp \sin \varphi, p_\parallel)$, то производная по \mathbf{p} будет

иметь компоненты

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{\sin \varphi}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \sin \varphi \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{\cos \varphi}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right), \quad (6.2)$$

а оператор

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{B_0}{\gamma m_e} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.3)$$

будет сводиться к производной по азимутальному углу. Тогда в Фурье представлении кинетическое уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} -i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_{\perp} v_{\perp} \cos \varphi) \delta f + \frac{\Omega}{\gamma} \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = \\ = e \left[\mathbf{E} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \right] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь введено определение циклотронной частоты элетронов $\Omega = eB_0/(m_e c)$ и без ограничения общности выбрана система координат, в которой волновой вектор имеет компоненты $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$. Это уравнение можно переписать в более компактной форме

$$-i(a - z \cos \varphi) \delta f + \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = F(\varphi), \quad (6.5)$$

если ввести следующие обозначения

$$a = \frac{\gamma(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})}{\Omega}, \quad z = \frac{\gamma k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}, \quad (6.6)$$

$$F(\varphi) = \frac{\gamma e}{\Omega} \left[U \cos \varphi E_x + U \sin \varphi E_y + \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} + V \cos \varphi \right) E_z \right], \quad (6.7)$$

$$U = \left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}}, \quad V = \frac{k_{\perp}}{\omega} \left(v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right). \quad (6.8)$$

Решение уравнения (6.5) будем искать в виде $\delta f = C(\varphi) \exp(i a \varphi - i z \sin \varphi)$. Функция $C(\varphi)$ тогда должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi} = F(\varphi) e^{-i a \varphi + i z \sin \varphi}, \quad (6.9)$$

интегрирование которого даёт

$$C = \int_{\Phi}^{\varphi} F(\varphi') e^{-i a \varphi' + i z \sin \varphi'} d\varphi'. \quad (6.10)$$

Нижний предел в этом интеграле должен выбираться из условия периодичности функции распределения $\delta f(\varphi + 2\pi) = \delta f(\varphi)$. Эту функцию можно представить в форме

$$\begin{aligned} \delta f(\varphi) &= e^{-iz \sin \varphi} \int_{\Phi}^{\varphi} F(\varphi') e^{-ia(\varphi' - \varphi) + iz \sin \varphi'} d\varphi' = \\ &= e^{-iz \sin \varphi} \int_{\Phi - \varphi}^0 F(\varphi + s) e^{-ias + iz \sin(\varphi + s)} ds, \end{aligned} \quad (6.11)$$

из которой видно, что периодичность может достигаться только в случае бесконечных пределов $\Phi = \pm\infty$. Выбор знака диктуется правилом обхода Ландау. Согласно этому правилу величину a мы понимаем как $a + i0$, поэтому конечным этот интеграл может быть только при $\Phi = -\infty$.

Учитывая, что подстановка функции $F(s + \varphi)$ в δf приводит к появлению следующих интегралов

$$\int_{-\infty}^0 ds e^{-ias + iz \sin(\varphi + s)} = g(z, \varphi), \quad (6.12)$$

$$\int_{-\infty}^0 ds \sin(\varphi + s) e^{-ias + iz \sin(\varphi + s)} = -i \frac{\partial g}{\partial z}, \quad (6.13)$$

$$\int_{-\infty}^0 ds \cos(\varphi + s) e^{-ias + iz \sin(\varphi + s)} = -\frac{i}{z} (e^{iz \sin \varphi} + iag), \quad (6.14)$$

получаем окончательное выражение для возмущения функции распределения

$$\begin{aligned} \delta f &= \frac{\gamma e}{\Omega} \left[-\frac{iU}{z} (1 + iag e^{-iz \sin \varphi}) E_x - \right. \\ &\quad \left. -iU \frac{\partial g}{\partial z} e^{-iz \sin \varphi} E_y + \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} U g e^{-iz \sin \varphi} - i \frac{V}{z} \right) E_z \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Долгое время в теории замагниченной плазмы общепринятым считался подход, в котором благодаря известному разложению

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi} \quad (6.16)$$

интеграл g представлялся в виде ряда, содержащего бесконечное число членов

$$g = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(z)}{a-n} e^{in\varphi} \quad (6.17)$$

($J_n(z)$ — функции Бесселя целого порядка). Такой подход эффективен в ситуациях, когда ларморовские радиусы частиц малы по сравнению с длиной волны возмущения и ряд быстро сходится, но весьма неудобен в тех случаях, когда это условие не выполняется. Реальное же упрощение задачи может быть получено благодаря условию периодичности $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$. Действительно, простые преобразования

$$\begin{aligned} g(\varphi + 2\pi) &= \int_{-\infty}^0 ds e^{-ias + iz \sin(\varphi + s + 2\pi)} = \\ &= e^{i2\pi a} \int_{-\infty}^{2\pi} ds' e^{-ias' + iz \sin(\varphi + s')} = e^{i2\pi a} \left(g + \int_0^{2\pi} ds e^{-ias + iz \sin(\varphi + s)} \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

позволяют выразить функцию g через интеграл с конечными пределами

$$g = R \int_0^{2\pi} ds e^{-ias + iz \sin(\varphi + s)}, \quad R = \frac{ie^{i\pi a}}{2 \sin \pi a}. \quad (6.19)$$

6.2 Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$

Для получения тензора диэлектрической проницаемости плазмы необходимо сначала определить линейную связь между Фурье-образами тока и электрического поля. Вычислим, например, вклад в ток j_x , который создаётся горячими электронами. Будем считать, что их невозмущенная функция распределения нормирована условием $\int f_0 d^3p = 1$, поэтому

$$j_x = -en \int v_{\perp} \cos \varphi \delta f d^3p. \quad (6.20)$$

Подстановка δf даёт следующий результат

$$j_x = -\frac{e^2 n}{m_e \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 U \left[\frac{a}{z} \Phi_1 E_x - i \Phi_2 E_y + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \Phi_1 E_z \right], \quad (6.21)$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi g \cos \varphi e^{-iz \sin \varphi}, \quad \Phi_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial g}{\partial z} \cos \varphi e^{-iz \sin \varphi}. \quad (6.22)$$

Интеграл Φ_1 можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{i}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi g \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-iz \sin \varphi} = -\frac{i}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iz \sin \varphi} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ &= -\frac{i}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iz \sin \varphi} (e^{iz \sin \varphi} + iag) = -\frac{2\pi i}{z} (1 + aG), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi g e^{-iz \sin \varphi} = \frac{iR}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds e^{-ias} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{iz(\sin(\varphi+s) - \sin \varphi)} = \\ &= \frac{iR}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds e^{-ias} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{2iz \sin(s/2) \cos(\varphi+s/2)} = iR \int_0^{2\pi} ds e^{-ias} J_0 \left(2z \sin \frac{s}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Выражение для G можно ещё более упростить, если заметить, что оно является интегральным представлением для произведения функций Бесселя комплексного порядка

$$G = -\frac{\pi}{\sin \pi a} J_{-a}(z) J_a(z). \quad (6.25)$$

Подход, использующий разложение (6.16), даёт другую форму представления этой величины

$$G = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(z)}{a-n}. \quad (6.26)$$

Таким образом, для вычисления G в случае малых ларморовских радиусов ($z \ll 1$) удобно использовать быстросходящийся ряд (6.26), в случае больших радиусов ($z \gg 1$ и $z \gg a$) удобно представление (6.25), позволяющее воспользоваться асимптотическими формулами для функций Бесселя при больших аргументах, а в общем случае, когда порядок и аргумент функции Бесселя $J_a(z)$ могут одновременно достигать больших

значений, наиболее эффективным оказывается интегральное представление (6.24).

Для вычисления Φ_2 выполним следующую цепочку преобразований

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{i}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-iz \sin \varphi} = -\frac{i}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iz \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial z} (e^{iz \sin \varphi} + iag) = \\ &= \frac{a}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iz \sin \varphi} \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{iRa}{z} \int_0^{2\pi} ds e^{-ias} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi + s) e^{2iz \sin(s/2) \cos(\varphi+s/2)}.\end{aligned}\quad (6.27)$$

Функцию $\sin(\varphi + s)$ можно представить в виде суммы

$$\sin(\varphi + s) = \sin(\varphi + s/2) \cos(s/2) + \cos(\varphi + s/2) \sin(s/2), \quad (6.28)$$

причём ненулевой вклад в интеграл даёт только второе слагаемое

$$\Phi_2 = \frac{Ra}{2z} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} ds e^{-ias} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{2iz \sin(s/2) \cos(\varphi+s/2)} = -i\pi \frac{a}{z} \frac{\partial G}{\partial z}. \quad (6.29)$$

Таким образом, интеграл Φ_2 тоже выражается через функцию G .

Из выражения для тока j_x можно определить тот вклад, который дают электроны плазмы в компонентны тензора проводимости σ_{xx} , σ_{xy} и σ_{xz} . Вычисления остальных компонентов тока показывают, что все двойные интегралы по фазам ларморовского вращения могут быть выражены через функцию G и её производные по z . Окончательное выражение для тензора диэлектрической проницаемости можно представить в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\beta}^e + \chi_{\alpha\beta}^i. \quad (6.30)$$

При этом вклад электронов определяется формулами

$$\chi_{\alpha\beta}^e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\Omega} \int d^3p \left[p_{\perp} U T_{\alpha\beta} + \frac{\Omega}{\gamma\omega} \left(p_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \right) \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} h_{\alpha} h_{\beta} \right], \quad (6.31)$$

где

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{z^2}(1+aG) & \frac{i}{2} \frac{a}{z} G' & -\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{(1+aG)}{z} \\ -\frac{i}{2} \frac{a}{z} G' & \frac{a}{z^2}(1+aG) - \frac{(zG')'}{2z} - G & -\frac{i}{2} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}^2} G' \\ -\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{(1+aG)}{z} & \frac{i}{2} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} G' & -\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}^2} G \end{pmatrix},$$

$\mathbf{h} = \mathbf{B}_0/B_0$ — единичный вектор вдоль невозмущённого магнитного поля, а штрихи означают дифференцирование по z .

Из полученных формул видно, что в тензоре диэлектрической проницаемости имеется антиэрмитова часть, которая возникает из-за обхода особенностей $\sin(\pi a) = 0$. Это означает, что в замагниченной плазме, как и в случае без поля, присутствует диссипация колебаний, связанная с эффектом затухания Ландау. При этом магнитное поле несколько модифицирует условие резонансного взаимодействия между волнами и частицами:

$$\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\frac{\Omega}{\gamma} = 0. \quad (6.32)$$

При $n = 0$ это условие называют черенковским резонансом. В этом случае скорость частицы вдоль магнитного поля совпадает с продольной фазовой скоростью волны. Остальные резонансы называют циклотронными, при этом различают резонансы на нормальном ($n > 0$) и аномальном ($n < 0$) эффектах Доплера. В первом случае частица может двигаться медленнее волны, причём процесс её излучения сопровождается потерей поперечной энергии частицы. Во втором же случае частица обгоняет волну вдоль поля, а при излучении увеличивает свою поперечную энергию. Условие циклотронного резонанса можно ещё интерпретировать и как условие совпадения частоты волны $\omega' = \gamma(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})$ в системе отсчёта, движущейся с продольной скоростью частицы, с гармониками частоты вращения частиц в магнитном поле $n\Omega$. Действительно, в указанной системе отсчёта электрон можно рассматривать как неподвижный осциллятор, который может поглощать или излучать энергию на частотах, кратных собственной частоте.

Задачи:

1. Получить тензор диэлектрической проницаемости холодной замагниченной плазмы, делая предельный переход $T_a \rightarrow 0$ в выражении, полученном в рамках кинетической теории.

Лекция 7

Продольные волны в замагниченной плазме

Исследуем возможные типы плазменных колебаний, бегущих вдоль магнитного поля ($k_{\perp} = 0$). В этом случае дисперсионные соотношения значительно упрощаются и позволяют изучить влияние эффектов, связанных с конечной температурой плазмы.

7.1 Дисперсионное соотношение

Упростим вид тензора диэлектрической проницаемости, переходя к пределу $k_{\perp} \rightarrow 0$. Для вычисления интеграла G в этом случае можно использовать разложение $J_0(x) \approx 1 - x^2/4$, которое приводит к следующему результату

$$G = -\frac{1}{a} - \frac{z^2}{2a(a^2 - 1)}. \quad (7.1)$$

Сразу видно, что из множества резонансов остаются только черенковский $a = 0$ и первые циклотронные $a = \pm 1$. Матрица $T_{\alpha\beta}$ в этом случае приобретает простой вид:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2(a^2-1)} & -\frac{i}{2(a^2-1)} & 0 \\ \frac{i}{2(a^2-1)} & \frac{a}{2(a^2-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда в тензоре восприимчивости остаются только три независимые компоненты:

$$\chi_{xx} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{2\gamma} U \frac{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})}{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 - \Omega^2/\gamma^2}, \quad (7.2)$$

$$\chi_{xy} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{2\gamma} U \frac{-i\Omega/\gamma}{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 - \Omega^2/\gamma^2}, \quad (7.3)$$

$$\chi_{zz} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int d^3p \frac{p_{\parallel}/\gamma}{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}}. \quad (7.4)$$

Уравнения Максвелла в случае продольного распространения сводятся к следующей системе

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (7.5)$$

где $n_{\parallel} = k_{\parallel}c/\omega$ — показатель преломления. Видно, что все колебания теперь можно опять разделить на потенциальные с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ и электромагнитные с $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$. В первом случае закон дисперсии определяется уравнением

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int d^3p \frac{p_{\parallel}/\gamma}{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} = 0, \quad (7.6)$$

которое не содержит магнитного поля и совпадает с уравнением для потенциальных колебаний в незамагниченной плазме. Этот результат очевиден, поскольку на колебания частиц вдоль силовых линий магнитное поле действительно не может оказать никакого влияния. Таким образом, полученное уравнение описывает затухающие ленгмюровские и ионно-звуковые волны, которые подробно исследовались в предыдущих лекциях.

Дисперсия же электромагнитных волн в замагниченной плазме несколько модифицируется. Теперь дисперсионные уравнения $n_{\parallel}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$ описывают колебания с левой и правой круговой поляризацией $E_y = \pm iE_x$, которые теперь подвержены затуханию Ландау. В наиболее общем случае релятивистского анизотропного распределения эти уравнения приобретают вид:

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \int d^3p \frac{p_{\perp}/(2\gamma)}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} \mp \Omega/\gamma} \left[(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel}v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right]. \quad (7.7)$$

В изотропном случае они несколько упрощаются,

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int d^3p \frac{p_{\perp}/(2\gamma)}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} \mp \Omega/\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}}, \quad (7.8)$$

а в нерелятивистском пределе сводятся к виду

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int d^3p \frac{f_0}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} \mp \Omega}. \quad (7.9)$$

Если в интеграл по импульсам подставить максвелловское распределение

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} m_e^3 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right), \quad (7.10)$$

то последнее уравнение будет содержать те же дисперсионные функции Z , которые использовались ранее для незамагниченной плазмы,

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \Omega_e)} Z(\xi_e) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \Omega_i)} Z(\xi_i). \quad (7.11)$$

Здесь мы добавили вклад ионов и ввели обозначения

$$\xi_e = \frac{\omega \mp \Omega_e}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Te}}, \quad \xi_i = \frac{\omega \pm \Omega_i}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Ti}}, \quad (7.12)$$

$$\Omega_a = \frac{eB_0}{m_a c}, \quad v_{Ta}^2 = T_a/m_a. \quad (7.13)$$

7.2 Альфвеновская волна

Начнём с анализа колебаний предельно низких частот $\omega \ll \Omega_i$. В этой спектральной области аргументы дисперсионных функций могут быть выражены через ларморовские радиусы частиц ρ_e и ρ_i

$$\xi_e \approx \frac{\mp \Omega_e}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Te}} \sim \frac{1}{k_{\parallel} \rho_e}, \quad \xi_i \approx \frac{\pm \Omega_i}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Ti}} \sim \frac{1}{k_{\parallel} \rho_i}. \quad (7.14)$$

Если эти радиусы малы по сравнению с длиной волны, можно использовать гидродинамическую асимптотику функции Z . Для плазмы с сопоставимыми температурами электронов и ионов ($T_i \gg T_e \sqrt{m_e/m_i}$) ларморовский радиус ионов оказывается больше, поэтому и затухание низкочастотных колебаний в этом режиме должно быть обусловлено ионами. Дисперсионное уравнение тогда приобретает вид

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \Omega_e)} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \Omega_i)} \left(1 + \frac{1}{2\xi_i^2} - i\sqrt{\pi}\xi_i e^{-\xi_i^2}\right). \quad (7.15)$$

Полностью пренебрегая тепловыми эффектами, получаем

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_e} \left(\mp 1 - \frac{\omega}{\Omega_e}\right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \Omega_i} \left(\pm 1 - \frac{\omega}{\Omega_i}\right). \quad (7.16)$$

Учитывая, что $\omega_{pe}^2/\Omega_e = \omega_{pi}^2/\Omega_i$, находим закон дисперсии низкочастотных колебаний

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel} c_A^2}{1 + \mu + c_A^2/c^2}, \quad (7.17)$$

где $c_A = c\Omega_i/\omega_{pi} = B_0/\sqrt{4\pi n m_i}$ — альфвеновская скорость, а $\mu = m_e/m_i$. Отсюда видно, что при достаточно низких частотах и право- и левополяризованная волна имеют одинаковую дисперсию. Различие возникает лишь в следующем порядке разложения по малости ω/Ω_i

$$\omega^2 = \omega_A^2 = \frac{k_{\parallel} c_A^2}{1 + \mu + c_A^2/c^2} \left[1 \pm \frac{k_{\parallel} c_A}{\Omega_i (1 + \mu + c_A^2/c^2)^{3/2}} \right], \quad (7.18)$$

Решение с отрицательной поправкой соответствует альфвеновской волне. Направление вращения вектора электрического поля в этой волне совпадает с направлением вращения ионов, поэтому при приближении к частоте Ω_i возникает резонанс с ионами, при котором происходит сильное увеличение волнового числа ($n_{\parallel} \rightarrow \infty$) и быстрое затухание волны. Участок ветви вблизи $\omega \approx \Omega_i$ называют ионно-циклотронной волной, при этом её корректное рассмотрение с учётом сильного затухания требует решения точного уравнения (7.11). Решение с положительной поправкой описывает волну, которая при косом распространении соответствует ветви быстрого магнитного звука (БМЗ), а при строго продольном по сути представляет собой ту же альфвеновскую волну, но с другим направлением вращения вектора электрического поля. Поскольку этот вектор вращается вместе с электронами, при продолжении этой ветви в более высокие частоты возникает резонанс вблизи электронной циклотронной частоты $\omega \approx \Omega_e$.

Вычислим теперь затухание альфвеновской волны на ионах. С этой целью оставим в уравнении (7.15) мнимую часть функции Z , которая приводит к появлению малой мнимой поправки к частоте ω_A

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega_A^2} \left(1 + 2i \frac{\Gamma}{\omega_A} \right) = \frac{c^2}{c_A^2} \left(1 + \mu + \frac{c_A^2}{c^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_A k_{\parallel} v_{Ti}} e^{-\xi_i^2}. \quad (7.19)$$

Таким образом, альфвеновская волна испытывает весьма малое затухание с декрементом

$$\Gamma = \omega_A \sqrt{\frac{\pi/8}{1 + \mu + c_A^2/c^2}} \frac{v_{Ti}/c_A}{k_{\parallel}^2 \rho_i^2} \exp\left(-\frac{1}{2k_{\parallel}^2 \rho_i^2}\right). \quad (7.20)$$

которое и вовсе пропадает при условии $\omega < \Omega_i(c_A/c)$, когда для поглощения на циклотронном резонансе требуются частицы со сверхсветовыми скоростями.

Чтобы понять, за счёт чего в альфвеновских колебаниях возникает возвращающая сила, рассмотрим колебательный процесс, исходя из

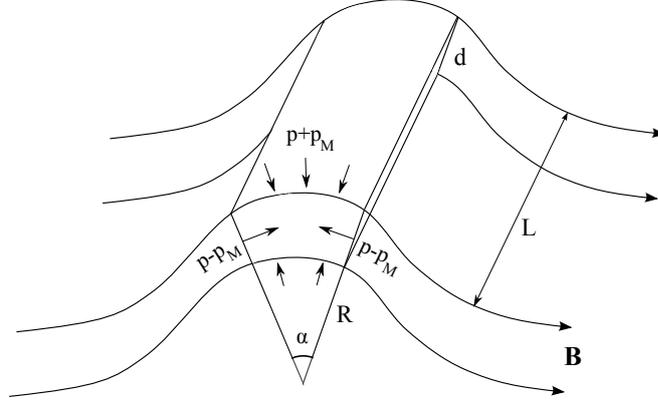


Рис. 7.1: Возвращающая сила в альфвеновских колебаниях.

гидродинамических представлений. Сместим плазму вместе с вмороженным в неё магнитным полем, не создавая в ней возмущений плотности (рис. 7.1) Поперёк силовых линий магнитного поля на выделенный объём плазмы действует сила $(p + p_M)(\alpha(R + d) - \alpha R)L$, где $p_M = B_0^2/(8\pi)$ — давление магнитного поля, а R — радиус кривизны силовой линии. Вдоль же силовых линий магнитное поле пытается растянуть плазму, поэтому появляется дополнительная сила $-(p - p_M)\alpha dL$, которая действует на торцы выделенного объёма. Суммарная возвращающая сила определяется только магнитным давлением $F = 2p_M\alpha dL$ и уравнивается инерцией плазмы $nm_i\alpha R L d\ddot{\zeta}$, где $\zeta(z)$ представляет собой смещение силовой линии из положения равновесия. Выражая радиус кривизны линии через вторую производную смещения, получаем уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \left(\frac{2p_M}{nm_i} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}. \quad (7.21)$$

Таким образом, альфвеновские колебания напоминают поперечные колебания упругих струн, в качестве которых в нашем случае выступают силовые линии магнитного поля.

7.3 Вистлеры

Простые аналитические выражения для закона дисперсии могут быть получены и для того участка резонансной с электронами ветви, который соответствует более высоким частотам $\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$. Первое условие

позволяет пренебречь вкладом ионов. Эффекты же, связанные с конечной температурой электронов, по-прежнему малы, если $k_{\parallel}\rho_e \ll 1$. В этом случае дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_e}. \quad (7.22)$$

Если частота волны удовлетворяет ещё и условию $\omega \ll \omega_{pe}^2/\Omega_e$, то закон дисперсии определяется простым выражением

$$\omega = \Omega_e \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega_{pe}^2}. \quad (7.23)$$

Колебания на данном участке ветви называют вистлерами или геликонами. Видно, что благодаря квадратичной зависимости от волнового числа групповая скорость колебаний оказывается тем больше, чем выше их частота. Благодаря этому факту при разрядах молний, возбуждающих широкий спектр колебаний ионосферной плазмы, наблюдатель фиксирует сначала приход высокочастотного сигнала, а потом понижение частоты. Такой сигнал напоминает свист, поэтому в ионосферной плазме данные колебания называют свистящими атмосфериками.

7.4 Высокочастотные колебания

Исследуем колебания при высоких частотах $\omega \sim \Omega_e, \omega_{pe}$. В приближении холодной плазмы показатель преломления волн с правой и левой круговой поляризацией даётся выражением

$$n_{\parallel}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \Omega_e)}. \quad (7.24)$$

Видно, что на электронной циклотронной частоте правополяризованная ветвь, представляющая собой продолжение вистлеров, попадает в резонанс с электронами. Очевидно, что окрестность этого резонанса может быть корректно описана только с учётом кинетических эффектов. Видно также, что показатель преломления обращается в нуль при частотах

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\Omega_e}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\Omega_e^2}{4}}, \quad (7.25)$$

называемых частотами отсечки. Это означает, что другие ветви колебаний холодной плазмы существуют только внутри спектральных диапазонов $\omega > \omega_1$ и $\omega > \omega_2$. Таким образом, в достаточно слабом магнитном поле $\Omega_e \ll \omega_{pe}$ имеется область непрозрачности $\Omega_e < \omega < \omega_2 \approx \omega_{pe} - \Omega_e/2$, в

которой не существует собственных колебаний плазмы. Колебания, отсекаемые частотами $\omega_{1,2}$, представляют собой обычные электромагнитные волны, которые в пределе больших частот $\omega \gg \omega_{pe}$ выходят на линейный закон дисперсии $\omega = k_{\parallel}c$, определяющий электромагнитную волну в вакууме.

Чтобы понять, как меняется дисперсия упомянутых высокочастотных ветвей в горячей плазме, решим дисперсионное уравнение (7.11) для следующего набора параметров: $T_e = 500$ эВ, $\Omega_e/\omega_{pe} = 0.7$, $m_i/m_e = 1836$. Из рисунка 7.2 видно, что наиболее отчётливо различие между точным

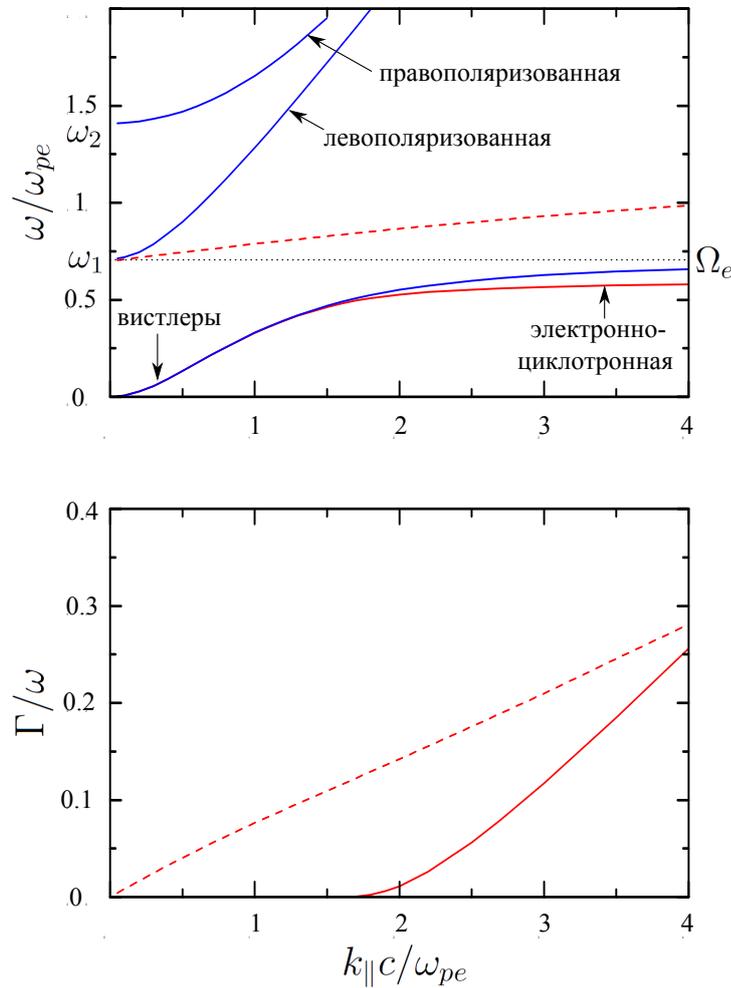


Рис. 7.2: Вещественная частота и декремент затухания колебаний в горячей плазме (синим показаны решения гидродинамического уравнения (7.24), а красным — решения кинетического уравнения (7.11)).

кинетическим решением и решением, полученным в гидродинамическом приближении, проявляется вблизи электронного циклотронного резонанса $\omega \approx \Omega_e$. В этой области происходит быстрое нарастание декремента затухания волны с ростом волнового числа, при этом вещественная частота волны оказывается заметно ниже Ω_e . Кинетическая теория однако позволяет не только вычислять малые поправки к известным из гидродинамики волнам, но и находить новые ветви колебаний, которые не имеют гидродинамических аналогов. В частности, при выбранных параметрах существует целое семейство новых решений, имеющих при $k_{\parallel} \rightarrow 0$ частоту $\omega \approx \Omega_e$. Одно из таких решений представлено на рис. 7.2 пунктиром. Видно, что при малых волновых числах затухание этой ветви тоже может быть слабым.

Задачи:

1. Получить законы дисперсии колебаний холодной плазмы для произвольного угла распространения.

Лекция 8

Волны в замагниченной плазме с поперечным распространением

8.1 Дисперсионные соотношения

Исследуем колебания горячей плазмы, бегущие поперёк магнитного поля ($k_{\parallel} = 0$). Если функции распределения составляющих плазму частиц зависят только от модуля продольного импульса и не зависят от его знака, то есть $f = f(p_{\parallel}^2)$, то компоненты тензора восприимчивости χ_{xz} , χ_{zx} , χ_{yz} и χ_{zy} обращаются в нуль. Действительно, $U = \partial f / \partial p_{\perp}$ и $a = \gamma\omega / \Omega$ являются функциями p_{\parallel}^2 , поэтому те компоненты $T_{\alpha\beta}$, которые содержат p_{\parallel} , зануляют интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\parallel} F(p_{\parallel}^2) dp_{\parallel} \quad (8.1)$$

в силу нечётности подынтегрального выражения. В этом случае все колебания можно разделить на два типа, которые принято называть обыкновенными и необыкновенными. Из уравнений Максвелла в Фурье представлении

$$\begin{pmatrix} 1 + \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ -\chi_{xy} & \chi_{yy} - n_{\perp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{zz} - n_{\perp}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (8.2)$$

видно, что обыкновенная волна имеет закон дисперсии $n_{\perp}^2 = 1 + \chi_{zz}$ и поляризована вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$. Поскольку $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, эта волна является электромагнитной. В необыкновенной волне, напротив,

62. Лекция 8. Волны в замагниченной плазме с поперечным распространением

вектор электрического поля лежит в поперечной к \mathbf{B}_0 плоскости и имеет потенциальную составляющую, а дисперсия определяется уравнением

$$(1 + \chi_{xx})(1 + \chi_{yy} - n_{\perp}^2) + \chi_{xy}^2 = 0. \quad (8.3)$$

С целью упрощения анализа этих дисперсионных соотношений рассмотрим случай изотропной нерелятивистской плазмы с максвелловским распределением по скоростям

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} m^3 v_T^3} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_T^2}\right). \quad (8.4)$$

Поскольку в нерелятивистском пределе резонансное условие $a = n$ перестаёт зависеть от импульса, в соответствующих интегралах пропадают особые точки, требующие обхода в комплексной плоскости переменной интегрирования. В результате все решения дисперсионных уравнений оказываются вещественными. Это означает, что волны со строго поперечным распространением не испытывают затухания Ландау.

8.2 Обыкновенная волна

Итак, в нерелятивистском случае χ_{zz} принимает простой вид

$$\chi_{zz} = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \int f_s G_s d^3 p = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \langle G_s \rangle, \quad (8.5)$$

где суммирование ведётся по сортам частиц. Подстановка максвелловской функции распределения приводит к интегралам вида

$$\langle G_s \rangle = \frac{1}{v_T^2} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} G_s \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_T^2}\right). \quad (8.6)$$

Если для G_s использовать интегральное представление (6.24), то меняя порядок интегрирования и пользуясь выражением для интеграла Вебера

$$\int_0^{\infty} J_n(\alpha t) e^{-\beta^2 t^2} t^{n+1} dt = \frac{\alpha^n}{(2\beta^2)^{n+1}} e^{-\alpha^2/4\beta^2}, \quad (8.7)$$

можно получить следующий результат

$$\langle G_s \rangle = \frac{i}{e^{-i2\pi a_s} - 1} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i a_s \varphi - b_s(1 - \cos \varphi)} = -\frac{e^{-b_s}}{\sin \pi a_s} \int_0^{\pi} d\varphi \cos(a_s \varphi) e^{-b_s \cos \varphi}, \quad (8.8)$$

где параметр $b_s = k_{\perp}^2 v_{Ts}^2 / \Omega_s^2 = k_{\perp}^2 \rho_s^2$ определяет величину ларморовского радиуса частиц сорта s по отношению к длине волны. В случае малых ларморовских радиусов бывает удобно использовать для G_s представление рядом (6.26). Приводя получающиеся интегралы к другому известному интегралу Вебера

$$\int_0^{\infty} J_n^2(\alpha t) e^{-\beta^2 t^2} t dt = \frac{e^{-\alpha^2/2\beta^2}}{2\beta^2} I_n\left(\frac{\alpha^2}{2\beta^2}\right), \quad (8.9)$$

можно представить $\langle G_s \rangle$ в виде бесконечной суммы

$$\langle G_s \rangle = -e^{-b_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(b_s)}{a_s - n}, \quad (8.10)$$

содержащей модифицированные функции Бесселя $I_n(b_s)$. Таким образом, с учётом кинетических эффектов дисперсия обыкновенной волны определяется уравнением

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \frac{e^{-b_s}}{\sin \pi a_s} \int_0^{\pi} d\varphi \cos(a_s \varphi) e^{-b_s \cos \varphi}. \quad (8.11)$$

В пределе холодной плазмы ($b_s \rightarrow 0$) это уравнение имеет решение

$$\omega^2 = \sum_s \omega_{ps}^2 + k_{\perp}^2 c^2, \quad (8.12)$$

которое совпадает с дисперсией электромагнитной волны в немагнитной плазме. Учёт конечной температуры электронов приводит к появлению новых ветвей, лежащих вблизи циклотронных резонансов $\omega = n\Omega_e$. Численное решение уравнения (8.11), полученное при $T_e = 4$ кэВ, $\Omega_e/\omega_{pe} = 0.6$ и представленное на рис. 8.2, показывает, что в области пересечения электромагнитной ветви с электронными циклотронными волнами происходит пересоединение дисперсионных кривых, так что электромагнитная волна оказывается разбита на отдельные сегменты, лежащие между гармониками циклотронной частоты.

8.3 Необыкновенные волны

Подстановка максвелловского распределения в остальные компоненты тензора $\chi_{\alpha\beta}$ показывает, что все они могут быть выражены через ту же

усреднённую функцию $\langle G_s \rangle$:

$$\chi_{xx} = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \frac{a_s}{b_s} (1 + a_s \langle G_s \rangle), \quad (8.13)$$

$$\chi_{xy} = -i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} a_s \frac{\partial \langle G_s \rangle}{\partial b_s}, \quad (8.14)$$

$$\chi_{yy} = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \Omega_s} \frac{\partial}{\partial b_s} \left[2b_s \left(\langle G_s \rangle + \frac{\partial \langle G_s \rangle}{\partial b_s} \right) \right] - \chi_{xx}. \quad (8.15)$$

В холодной плазме, когда ларморовские радиусы частиц оказываются значительно меньше длины волны ($b_s \ll 1$), тепловые эффекты могут быть учтены как малые поправки

$$\langle G_s \rangle = -\frac{1}{a_s} - \frac{b_s}{a_s(a_s^2 - 1)} - \frac{3b_s^2}{a_s(a_s^2 - 1)(a_s^2 - 4)} - \dots \quad (8.16)$$

В этом приближении компоненты тензора восприимчивости приобретают вид:

$$\chi_{xx} = -\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} \left[1 + \frac{3b_s}{a_s^2 - 4} \right], \quad (8.17)$$

$$\chi_{xy} = i \sum_s \frac{\Omega_s}{\omega} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} \left[1 + \frac{6b_s}{a_s^2 - 4} \right], \quad (8.18)$$

$$\chi_{yy} = -\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} \left[1 + \frac{b_s(a_s^2 + 8)}{a_s^2(a_s^2 - 4)} \right]. \quad (8.19)$$

8.3.1 Низкочастотные колебания

Исследуем сначала низкочастотные колебания $\omega < \Omega_e$, на дисперсию которых существенное влияние оказывают ионы. В полностью холодной плазме дисперсионное соотношение (8.3) сводится к биквадратному уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\Omega_{LH}^4}{\Omega_i^2} + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{(1 + \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)} \right) + \Omega_{LH}^2 \frac{k_{\perp}^2 c^2}{(1 + \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)} = 0, \quad (8.20)$$

которое в пределе малых k_{\perp} описывает ветвь быстрого магнитного звука с законом дисперсии $\omega = k_{\perp} c_A$, а при больших волновых числах $k_{\perp} \rightarrow \infty$ определяет частоту так называемого нижнего гибридного резонанса

$$\omega = \Omega_{LH} = \sqrt{\frac{\Omega_e \Omega_i}{1 + \Omega_e^2/\omega_{pe}^2}} + \Omega_i^2. \quad (8.21)$$

Изучим теперь влияние малых тепловых поправок, связанных с конечной температурой электронов, на дисперсию БМЗ-волны. На самом низкочастотном участке спектра ($\omega \ll \Omega_i$) не только электроны, но и ионы плазмы оказываются замагниченными. В этом случае компоненты $\chi_{\alpha\beta}$ можно оценить следующим образом:

$$\chi_{xx} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2}, \quad \chi_{yy} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} - 2b_e \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \chi_{xy} \approx i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \Omega_i} \left(\frac{\omega^2}{\Omega_i^2} + \frac{3b_e}{2} \right). \quad (8.22)$$

Видно, что $\chi_{xy} \ll \chi_{yy}, \chi_{xx}$ и приближённое дисперсионное уравнение сводится к виду

$$1 + \chi_{yy} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} = 0, \quad (8.23)$$

откуда и получаем закон дисперсии БМЗ-волны в горячей плазме

$$\omega^2 = k_{\perp}^2 (c_A^2 + c_s^2), \quad c_s^2 = \frac{2T_e}{m_i}. \quad (8.24)$$

Электрическое поле этой волны преимущественно направлено поперёк \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , а возмущение магнитного поля сонаправлено с \mathbf{B}_0 . Таким образом, колебания в этой волне представляют собой бегущую в поперечном направлении последовательность разрядов и сжатий плазмы вместе с замороженным в неё магнитным полем. В области сгущения силовых линий повышается не только газокинетическое давление плазмы, но и давление магнитного поля, поэтому возвращающей силой в этих колебаниях является градиент суммарного давления $-\nabla(p + p_M)$. Заметим, что для получения такого же закона дисперсии в одножидкостной гидродинамике в качестве уравнения состояния необходимо использовать адиабату $p \propto \rho^{\gamma}$ с показателем $\gamma = 2$, что объясняется наличием у электронов только двух колебательных степеней свободы. Выясним теперь, справедливо ли предположение о малости ларморовского радиуса электронов по сравнению с длинами рассматриваемых волн ($b_e \ll 1$). Видно, что диапазон частот $\omega \ll \Omega_i$ соответствует малым волновым числам $k_{\perp} \ll \omega_{pi}/c$. Таким образом, параметр b_e , удовлетворяющий условию

$$b_e \ll \frac{m_e c_s^2}{m_i c_A^2},$$

можно считать малым, если относительное давление плазмы оказывается не слишком большим $4\pi n T_e / B_0^2 < m_i / m_e$, что всегда выполняется в магнитных ловушках, способных удерживать плазму только с низким относительным давлением.

Чтобы понять, как меняется дисперсия БМЗ-ветви с учётом тепловых эффектов в области нижнего гибридного резонанса, получим дисперсионное уравнение, справедливое в более широком диапазоне частот $\omega \ll \Omega_e$. Наличие резонанса говорит о существовании колебаний с очень короткими длинами волн, по сравнению с которыми ларморовские радиусы электронов уже нельзя считать малыми. Оказывается однако, что благодаря замагниченности электронов учёт тепловых эффектов может быть проведён аналитически для произвольных величин ларморовских радиусов. Действительно, при малых a_e $\langle G_e \rangle$ ведёт себя как

$$\langle G_e \rangle = -\frac{e^{-b_e}}{2\pi a_e} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{b_e \cos \varphi} = -\frac{e^{-b_e}}{a_e} I_0(b_e). \quad (8.25)$$

Тогда в плазме с горячими электронами и холодными ионами компоненты $\chi_{\alpha\beta}$ приобретают вид:

$$\chi_{xx} = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{1 - e^{-b_e} I_0}{b_e} \right), \quad (8.26)$$

$$\chi_{xy} = -i \frac{\Omega_i}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_e} e^{-b_e} (I_0 - I_1), \quad (8.27)$$

$$\chi_{yy} = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} 2b_e e^{-b_e} (I_0 - I_1). \quad (8.28)$$

Нетрудно убедиться, что переход к пределу холодных электронов ($b_e \rightarrow 0$) в этих формулах даёт правильные тепловые поправки, но не воспроизводит холодный вклад ω_{pe}^2/Ω_e^2 в χ_{yy} . Дело в том, что, пренебрегая наличием конечного a_e в интеграле (8.8), мы неявно предположили, что b_e остаётся достаточно большим по сравнению с a_e даже при $b_e \rightarrow 0$. Таким образом, приведённая формула для χ_{yy} остаётся справедливой при $b_e \ll 1$ только при выполнении дополнительного условия $2b_e \gg a_e^2$. Поскольку частота волны при $k_{\perp} \rightarrow 0$ обращается в нуль по закону $\omega = k_{\perp} c_A$, формула (8.28) применима при всех k_{\perp} , если относительное давление плазмы оказывается не слишком малым ($\beta = p/p_M \gg m_e/m_i$). Дисперсионное соотношение (8.3), как и в случае холодных электронов, сводится к квадратному уравнению, одно из решений которого представляется в виде:

$$\omega^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (8.29)$$

где

$$A = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{1 - e^{-b_e} I_0}{b_e} \right), \quad (8.30)$$

$$B = \omega_{pi}^2 \left[1 + A \left(1 + \frac{c_A^2}{c^2} + \frac{k_{\perp}^2 V^2}{\Omega_i^2} \right) + \frac{c^2}{c_A^2} e^{-2b_e} (I_0 - I_1)^2 \right], \quad (8.31)$$

$$C = \omega_{pi}^4 \left[(1 - e^{-b_e} (I_0 - I_1))^2 + \frac{k_{\perp}^2 V^2}{\Omega_i^2} \left(1 + A \frac{c_A^2}{c^2} \right) \right], \quad (8.32)$$

$$V^2 = c_A^2 + c_s^2 e^{-b_e} (I_0 - I_1), \quad c_s^2 = \frac{2T_e}{m_i}. \quad (8.33)$$

При $k_{\perp} \rightarrow 0$ и $c_A^2 \ll c^2$ полученное решение, как и ожидалось, воспроизводит дисперсию БМЗ-волны $\omega^2 = k_{\perp}^2 (c_A^2 + c_s^2)$, а при больших k_{\perp} выходит на постоянную частоту $\omega = \omega_{pi}$. Таким образом, при конечной температуре электронов резонанс возникает не на нижней гибридной частоте Ω_{LH} , а на ионной плазменной ω_{pi} . Рисунок 8.1 показывает, как нижний гибридный резонанс исчезает с увеличением температуры электронов.

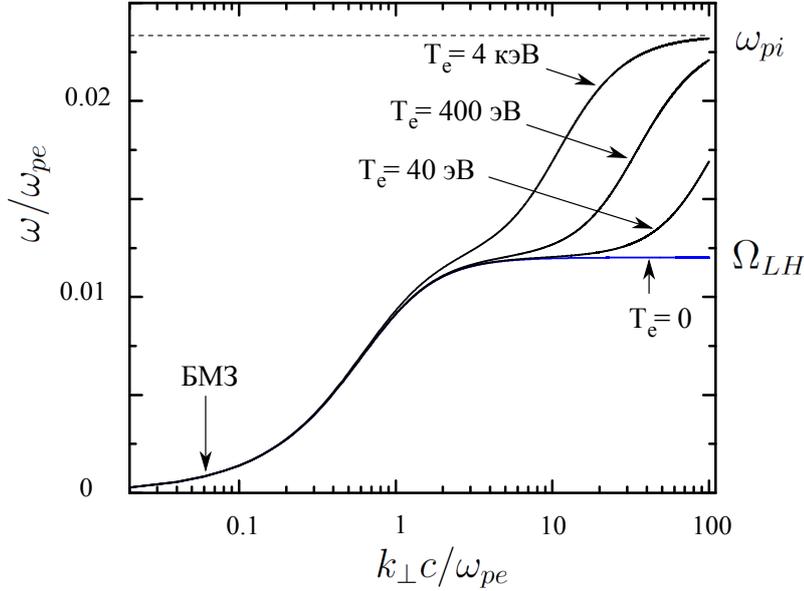


Рис. 8.1: Дисперсия БМЗ-ветви в горячей плазме.

8.3.2 Высоочастотные колебания

При высоких частотах $\omega \sim \Omega_e$, ω_{pe} можно пренебречь влиянием ионов. Тогда в холодной плазме дисперсионное уравнение имеет два решения

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{\Omega_e^2 + k_{\perp}^2 c^2}{2} \pm \sqrt{\omega_{pe}^2 \Omega_e^2 + \frac{\Omega_e^2 - k_{\perp}^2 c^2}{4}}, \quad (8.34)$$

одно из которых представляет собой электромагнитную волну, выходящую при больших k_{\perp} на закон дисперсии $\omega = k_{\perp}c$, а другое соответствует верхнегибридной моде, выходящей на резонанс, расположенный на частоте $\Omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2}$.

В плазме с горячими электронами спектр колебаний значительно обогащается за счёт появления новых ветвей почти потенциальных колебаний, называемых модами Бернштейна. Эти моды лежат в диапазонах между гармониками циклотронной частоты Ω_e и в тех местах, где они пересекаются с верхнегибридной и электромагнитными модами, происходит пересоединение дисперсионных кривых. Рисунок 8.2, на котором представлено численное решение точного дисперсионного уравнения, показывает, что верхний гибридный резонанс фактически исчезает, переходя вместе с модой Бернштейна на одну из гармоник циклотронной частоты, а электромагнитная волна разбивается на отдельные сегменты, соединяющие две различные моды Бернштейна.

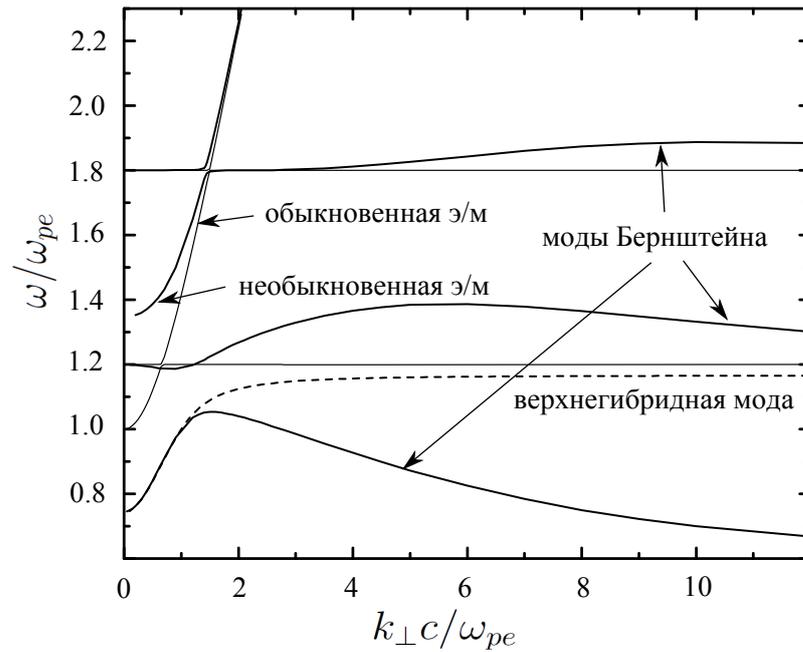


Рис. 8.2: Высокочастотные колебания с поперечным распространением.

Задачи:

1. Получить законы дисперсии низкочастотных колебаний горячей замагниченной плазмы с произвольным углом распространения из уравнений одножидкостной гидродинамики.

Лекция 9

Дрейфовая волна

Известно, что в замагниченной плазме с неоднородной плотностью возникает так называемый градиентный дрейф частиц, скорость которого направлена поперёк как магнитного поля, так и градиента плотности $\mathbf{V}_0 \propto [\nabla n \times \mathbf{B}_0]$. Очевидно, что появление такого дрейфа должно заметно искажать дисперсию колебаний, которые имеют сравнимые фазовые скорости.

В качестве стационарного невозмущенного состояния будем рассматривать плазму с неоднородной вдоль x плотностью $n_e = n_i = n_0(x)$ и однородной электронной температурой T_e ($T_i = 0$), помещённую в постоянное во времени магнитное поле $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$. Для того чтобы электроны находились в равновесии, градиент давления плазмы должен быть уравновешен силой Лоренца, действующей на дрейфующие поперёк поля электроны,

$$-T_e \nabla n_0 - \frac{en_0}{c} [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0] = 0. \quad (9.1)$$

Отсюда получаем выражение для скорости дрейфа

$$\mathbf{V}_0 = (0, V_0, 0), \quad V_0 = -\frac{cT_e}{eB_0n_0} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Создаваемый электронами ток требует неоднородности магнитного поля, при этом уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 = -\frac{4\pi en_0}{c} \mathbf{V}_0 \quad (9.3)$$

сводится к условию постоянства суммарного давления плазмы и магнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} + n_0 T_e \right) = 0. \quad (9.4)$$

Если однако относительное давление плазмы невелико, то неоднородностью поля можно пренебрегать.

Рассмотрим волну, бегущую в плоскости (y, z) . Она создаёт возмущения вида $f(t, x, y, z) = f(x)e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}$. Если продольная фазовая скорость этой волны мала по сравнению с альфвеновской ($\omega/k_z \ll c_A$), эту волну можно считать потенциальной, то есть $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Будем предполагать также, что колебания в этой волне, связанные с движением тяжёлых ионов, происходят настолько медленно, что электроны в потенциальном поле успевают распределиться по Больцману

$$n_e(t, \mathbf{r}) = n_0(x) \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) \approx n_0 + n_0 \frac{e\varphi}{T_e} \quad (9.5)$$

и почти полностью скомпенсировать заряд ионов $\delta n_e = \delta n_i$. Тогда колебания ионов описываются уравнениями

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \delta \mathbf{V}_i) = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{V}_i}{\partial t} = -\frac{e}{m_i} \nabla \varphi + \frac{e}{m_i c} [\delta \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_0]. \quad (9.7)$$

В условиях, когда частота волны существенно ниже ионной циклотронной ($\omega \ll \Omega_i$), связь между возмущением скорости и потенциала приобретает простой вид

$$\delta \mathbf{V}_i = \left(-ik_y \frac{c}{B_0} \varphi; \quad \frac{c}{B_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{ek_z}{m_i \omega} \varphi \right). \quad (9.8)$$

Подстановка этой скорости в уравнение непрерывности

$$-i\omega \delta n_e + \frac{\partial}{\partial x}(n_0 \delta V_x) + ik_y n_0 \delta V_y + ik_z n_0 \delta V_z = 0 \quad (9.9)$$

приводит к квадратному уравнению на ω

$$\omega^2 - \omega k_y V_0 - k_z^2 c_s^2 = 0, \quad (9.10)$$

решения которого имеют вид

$$\omega = \frac{k_y V_0}{2} \pm \sqrt{\frac{k_y^2 V_0^2}{4} + k_z^2 c_s^2}. \quad (9.11)$$

При $k_y = 0$ эти решения описывают встречные ионно-звуковые колебания, бегущие вдоль силовых линий магнитного поля. При косом распространении наличие дрейфа электронов при больших k_z приводит к

некоторому сдвигу частоты этих колебаний $\omega = \pm k_z c_s + k_y V_0/2$, а при $k_z \rightarrow 0$ приводит к появлению новой ветви так называемых дрейфовых волн ($\omega = k_y V_0$). Видно, что фазовая и групповая скорости в этой волне совпадают с дрейфовой скоростью V_0 .

По сути дрейфовая волна представляет собой бегущую в направлении y волну плотности плазмы. Электрическое поле этой потенциальной волны E_y за счёт дрейфа в скрещенных полях заставляет ионы колебаться в направлении x . В однородной плазме колебания с $\text{div } \delta \mathbf{V}_i = 0$ не сопровождаются возмущениями плотности, однако при наличии ∇n_0 такие возмущения появляются за счёт конвективного переноса ионов из мест с более высокой плотностью в места с более низкой и наоборот.

Задачи:

1. Найти распределение полей при отражении электромагнитной волны от плазмы с плавно нарастающей сверхкритической плотностью.

Лекция 10

Слабая турбулентность. Квазилинейная теория

Задачи:

1. Проверить выполнение законов сохранения импульса и энергии в квазилинейной теории.
2. Найти установившийся одномерный спектр ленгмюровских колебаний после квазилинейной релаксации электронного пучка.

Лекция 11

Трёхволновые взаимодействия

Задачи:

1. Вычислить вероятность рассеяния ленгмюровской волны на ионном звуке.

Лекция 12

Генерация электромагнитных волн ленгмюровской турбулентностью.

Задачи:

1. Вычислить вероятность излучения электромагнитной волны за счёт слияния двух ленгмюровских волн.

78. *Лекция 12. Генерация электромагнитных волн ленгмюровской турбулентностью.*

Лекция 13

Нелинейное затухание Ландау

Задачи:

1. Найти форму области захвата резонансных частиц ленгмюровской волной в релятивистском случае.

Лекция 14

Уравнения Захарова

Задачи:

1. Получить критерий устойчивости ленгмюровской волны по отношению к НЧ возмущениям плотности плазмы в дозвуковом пределе.

Лекция 15

Модуляционная неустойчивость

Задачи:

1. Показать, что в пределе малой амплитуды волны накачки инкремент модуляционной неустойчивости совпадает со скоростью слаботорбулентного процесса $\ell \rightarrow \ell' + s$.

Лекция 16

Параболическое уравнение. Самофокусировка волновых пакетов.

Задачи:

1. Сформулировать критерий Лайтхилла для монохроматической ленгмюровской волны.

86. Лекция 16. Параболическое уравнение. Самофокусировка волновых пакетов.

Лекция 17

Концепция сильной турбулентности

Задачи:

1. Найти спектр сильной ленгмюровской турбулентности в инерционном интервале.