РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт ядерной физики
им. Г. И. Будкера

на правах рукописи

Грозин Андрей Геннадьевич

Правила сумм КХД и эффективная теория тяжелого кварка

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Новосибирск 1998

Содержание

Введение

Диссертация посвящена разработке и применению пертурбативных и непертурбативных методов решения задач квантовой хромодинамики, особенно в области физики тяжелых кварков, и основана на работах [**1**]–[**29**].

Физика тяжелых кварков является одной из наиболее актуальных и быстро развивающихся областей физики высоких энергий. Понимание эффектов сильных взаимодействий в слабых распадах адронов, содержащих тяжелый кварк, необходимо для извлечения фундаментальных электрослабых параметров (таких, как элементы матрицы смешивания Кобаяши–Маскава) из экспериментальных данных о таких распадах. Кроме того, исследование свойств B мезона — простейшего нетривиального адрона, атома водорода квантовой хромодинамики — интересно само по себе. В настоящее время полным ходом идет подготовка к экспериментам на установках нового поколения: B–фабриках в KEK и SLAC, детекторе HERA–B в DESY и других. Целью этих экспериментов является наблюдение несохранения CP четности в распадах B мезонов. В них распады B мезонов будут исследованы с большой статистикой и низкими систематическими ошибками. Поэтому становится необходимым более детальное и точное теоретическое понимание этих распадов.

Эффективная теория тяжелого кварка (HQET) — это эффективная теория поля, которая строится таким образом, чтобы воспроизводить результаты КХД для задач с тяжелым кварком, разложенные до некоторого порядка $(\Lambda/m)^n$, где $\Lambda \ll m$ — характерный масштаб импульсов в рассматриваемой задаче. В ведущем порядке по $1/m$, HQET имеет свойства симметрии, которые не очевидны в исходном лагранжиане КХД. Они позволяют связывать друг с другом различные формфакторы. В ряде случаев, поправки первого порядка по нарушению симметрии обращаются в нуль (теорема Люка). HQET позволяет также производить моделирование процессов с тяжелым кварком на решетке, не требуя, чтобы шаг решетки был мал по сравнению с комптоновской длиной волны тяжелого кварка (что в настоящее время недостижимо). На протяжении последних нескольких лет (начиная примерно с 1990 года) был достигнут значительный прогресс во многих задачах теории адронов с тяжелым кварком, главным образом благодаря использованию HQET. Один из первых обзоров по HQET [**8**] до сих пор можно рекомендовать для первоначального знакомства, поскольку в нем основные результаты HQET выводятся простым и единым методом, основанным на свойствах корреляторов; разумеется, в нем не отражены многие более новые приложения. Недавний прогресс в области вычисления коэффициентов в лагранжиане HQET рассмотрен в обзоре [**15**].

Лагранжиан HQET представляет собой ряд по $1/m$. В него включаются все возможные члены, совместимые с необходимыми симметриями, с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты находятся путем приравнивания нужного количества амплитуд рассеяния в полной КХД и HQET с желаемой точностью по $1/m$ (сшивка). После того, как коэффициенты найдены, все остальные физические величины можно вычислять в рамках эффективной теории, не обращаясь к КХД. Аналогично, операторы КХД представляют собой ряды по $1/m$ со всеми возможными HQET операторами, имеющими нужные квантовые числа. Их коэффициенты находятся путем сшивки матричных элементов. Репараметризационная инвариантность HQET, представляющая собой след от Лоренц–инвариантности полной КХД, связывает коэффициенты при разных степенях $1/m$ в этих разложениях.

В главе 2 произведена перенормировка HQET в ведущем порядке по $1/m$ в двух петлях. Разработан систематический метод вычисления двухпетлевых пропагаторных диаграмм, основанный на рекуррентных соотношениях интегрирования по частям. Далее обсуждаются $1/m$ члены в лагранжиане: кинетическая энергия и хромомагнитное взаимодействие. Коэффициент при операторе кинетической энергии равен 1 вследствие репараметризационной инвариантности. Единственный коэффициент в лагранжиане с точностью до $1/m$ членов, который не известен точно — это коэффициент при операторе хромомагнитного взаимодействия. Он вычисляется с двухпетлевой точностью; находится двухпетлевая аномальная размерность этого оператора в HQET. Она нужна, например, для получения α_s поправки к отношению расщеплений масс B–B^* и D–D^*. Исследуются свойства суммируемости ряда теории возмущений для этого коэффициента — ренормалонные особенности. Затем рассматриваются билинейные тяжело–легкие кварковые токи. Вычислена их двухпетлевая аномальная размерность в HQET. Она нужна, например, для получения α_s поправки к отношению f_B/f_D. Коэффициенты сшивки КХД токов с HQET токами в ведущем порядке по $1/m$ вычислены с двухпетлевой точностью. Из них получается, в частности, α_s^2 поправка к отношению f_{B^*}/f_B. Исследуются ренормалонные особенности в этих коэффициентах. Рассмотрена также однопетлевая перенормировка и сшивка пингвинных операторов размерности 5.

Хотя HQET проще полной КХД, далеко не всякая задача в ней может быть решена исходя из свойств симметрии и пертурбативных вычислений. Для исследования свойств адронов на больших расстояниях требуются непертурбативные методы. Одним из таких методов является моделирование на решетке. В настоящее время, оно не может дать результатов с высокой точностью. Другой метод, который успешно применялся для решения многих непертурбативных проблем — это правила сумм КХД. Для повышения точности правил сумм и установления их областей применимости необходимо вычисление высших пертурбативных и непертурбативных (степенных) поправок. Методы вычисления степенных поправок обсуждаются в главе 1. В ней рассматриваются все кварковые и глюонные конденсаты вплоть до размерности 8. Вычислен их вклад в правило сумм для ρ–мезонного канала. Получены ограничения на кварковый и глюонный конденсаты, следующие из экспериментальных данных о e^+e^- аннигиляции в адроны с изоспином $I = 1$.

Приложения КХД правил сумм в эффективной теории тяжелого кварка рассматриваются в главе 3. Получено правило сумм для тяжелого мезона; большая величина двухпетлевой пертурбативной поправки не дает возможности надежно извлечь из него f_B. Выведены правила сумм для формфактора полулептонного распада $B \to D$ при конечных массах кварков; прослежено, как эти КХД правила сумм воспроизводят структуру формфакторов, требуемую HQET, включая теорему Люка. Получены и проанализированы правила сумм для барионов с тяжелым кварком и их формфакторов. Получены и исследованы HQET правила сумм во внешнем аксиальном поле для констант связи тяжелых мезонов и барионов с мягкими пионами, включая пертурбативную поправку в случае мезонов.

Большой интерес представляет асимптотическое поведение формфакторов тяжелых мезонов при $|v{\cdot}v'| \gg 1$. Оно исследовано в главе 4 при помощи методов, развитых для жестких эксклюзивных процессов в КХД. Изучены волновые функции ведущего и следующего твистов тяжелого мезона. Для них выведены уравнения эволюции типа Бродского–Лепажа. Проанализированы правила сумм для моментов и для самих волновых функций. Оказывается, что формфактор продольно поляризованного B^* имеет точный нуль в канале рассеяния при $v \cdot v' \sim m_b/\Lambda$; формфактор B мезона имеет приближенный нуль во времениподобной области при $v \cdot v' \sim -m_b/\Lambda$. Таким образом, сечения $e^+e^- \to B\overline{B}$ и $D\overline{D}$ обращаются в нуль по параболе в физической области.

В последнее время достигнут большой теоретический прогресс в понимании инклюзивных распадов тяжелых мезонов (и барионов). Они описываются структурными функциями, аналогичными случаю глубоко неупругого рассеяния. Как и в этом последнем случае, имеются очень полезные правила сумм для нескольких первых моментов структурных функций. В главе 5 предложено правило сумм, связывающее второй момент структурной функции со средним квадратом импульса тяжелого кварка в мезоне. Из него получено ограничение снизу для этого квадрата импульса, близкое по величине к имеющимся оценкам из правил сумм КХД. Исследована эволюция структурных функций инклюзивных распадов тяжелого мезона с рождением тяжелого и легкого кварка. В первом случае она перенормируется мультипликативно; во втором — удовлетворяет уравнению типа Грибова–Липатова, ядро которого найдено в двухпетлевом приближении. Получены обобщения правил сумм для структурных функций с мягким экспоненциальным обрезанием. Исследованы ренормалонные особенности структурных функций.

Многие вычисления, результаты которых представлены в диссертации, производились с использованием систем компьютерной алгебры. Наиболее широко применялась система REDUCE, описанная, например, в учебнике [**30**]. В некоторых вычислениях из главы 1 применялась также специализированная система DIRAC [**31**]. Многие интересные задачи никогда не могли бы быть решены вручную из–за огромного объема вычислений. В других случаях системы компьютерной алгебры использовались для повышения надежности результатов. Многие методы решения задач КХД и HQET, предложенные и использованные в диссертации, реализованы в виде пакетов на языке REDUCE.

О влиянии работы на последующее развитие исследований в соответствующей области можно судить по числу ссылок на эту работу. Не следует абсолютизировать этот критерий; тем не менее, существует сильная корреляция между влиянием работы на научное сообщество и числом ссылок. Несколько наиболее цитируемых работ из числа вошедших в диссертацию, по результатам из базы данных SLAC, таковы:

- [**7**] — 73 ссылки;
- [**21**] — 52 ссылки;
- [**9**] — 47 ссылок;
- [**27**] — 30 ссылок;
- [**22**] — 22 ссылки;
- [**19**] — 21 ссылка;
- [**23**] — 19 ссылок;
- [**25**] — 16 ссылок.

Эти числа не являются абсолютно точными (так, я знаю несколько ссылок, не отраженных в базе данных SLAC), но относительные ошибки невелики.

Так, систематический метод вычисления двухпетлевых пропагаторных интегралов в HQET, предложенный в [**7**], вошел в стандартный арсенал исследователей в этой области, и применялся для решения большого числа задач. Свежий пример — недавнее вычисление NNL поправки к потенциалу взаимодействия тяжелых кварков, которая оказалась очень большой. В работе [**9**] введено понятие “наивной неабелианизации”, которое теперь активно применяется многими исследователями.

Обозначения

Приведем здесь некоторые обозначения, которые используются во всей диссертации, чтобы не нужно было каждый раз объяснять их в тексте. Общая информация о КХД и электрослабой теории, включая простые методы вычисления пертурбативных поправок, изложена, например, в учебнике [**30**].

Для γ матриц используются стандартные обозначения, причем

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,. \tag{0.1}$$

Для любого вектора v, $\hat{v} = v_\mu \gamma^\mu$.

Все КХД формулы записываются для цветовой группы $SU(N)$; $T_F = \frac{1}{2}$, операторы Казимира

$$C_F = \frac{N^2-1}{2N}\,, \quad C_A = N\,. \tag{0.2}$$

При $N = 3$ цветах, $C_F = \frac{4}{3}$. Результаты для абелевой калибровочной теории (группа $U(1)$) можно получить, положив $T_F = 1$, $C_F = 1$, $C_A = 0$. При вычислениях с барионами возникает величина

$$C_B = \frac{N+1}{2N}\,. \tag{0.3}$$

Разумеется, писать N в формулах, основанных на том, что в барионе 3 кварка — чистая формальность.

Ковариантная производная в фундаментальном представлении определена как $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, $A_\mu = gA^a_\mu t^a$; в присоединенном представлении $(t^a)^{bc} = if^{acb}$, поэтому $D^{ab}_\mu = \partial_\mu \delta^{ab} + A^{ab}_\mu$, $A^{ab}_\mu = gf^{acb}A^c_\mu$. Тензор напряженности глюонного поля равен $G_{\mu\nu} = gG^a_{\mu\nu}t^a = i[D_\mu, D_\nu]$, а дуальный к нему — $\widetilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}$. Кварковый ток равен $J_\mu = gJ^a_\mu t^a$, $J^a_\mu = D^\nu G^a_{\mu\nu} = g\sum_q \overline{q}\gamma_\mu t^a q$. Если величина A^a преобразуется по присоединенному представлению, то $(D_\mu A) = (D^{ab}_\mu A^b)t^a = [D_\mu, A]$, где $A = A^a t^a$. Член, фиксирующий калибровку в лагранжиане КХД, записывается в виде $-\frac{1}{2a}(\partial^\mu A^a_\mu)^2$ и дает глюонный пропагатор $D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu} - (1-a)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$. В правилах сумм используются вакуумные конденсаты

$$<\overline{q}q>\,, \quad i<\overline{q}G_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}q> = m_0^2<\overline{q}q>\,, \quad <G^2> = <G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}>\,. \tag{0.4}$$

Мы везде используем размерную регуляризацию в $d = 4 - 2\epsilon$ мерном пространстве и $\overline{\text{MS}}$ перенормировку. Перенормированные величины связаны с неперенормированными как

$$q_0 = Z_q^{1/2}q\,, \quad A^a_{0\mu} = Z_A^{1/2}A^a_\mu\,, \quad g_0 = Z_\alpha^{1/2}g\,, \quad a_0 = Z_A a\,, \tag{0.5}$$

где факторы перенормировки имеют минимальную структуру

$$Z = 1 + \frac{Z_{11}}{\epsilon}\frac{\alpha_s}{4\pi} + \left(\frac{Z_{22}}{\epsilon^2} + \frac{Z_{21}}{\epsilon}\right)\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \cdots \tag{0.6}$$

Здесь $\alpha_s = \overline{\mu}^{\,-2\epsilon} \frac{g^2}{4\pi}$ (где $\overline{\mu}^{\,2} = \mu^2 \frac{e^\gamma}{4\pi}$, γ — константа Эйлера) удовлетворяет уравнению ренормгруппы

$$\begin{gathered}
\frac{d \log \alpha_s}{d \log \mu} = -2\epsilon - 2\beta(\alpha_s)\,, \quad \beta(\alpha_s) = \beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} + \beta_1 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \cdots \\
\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_F n_f\,, \quad \beta_1 = \frac{34}{3} C_A^2 - 4 C_F T_F n_f - \frac{20}{3} C_A T_F n_f\,,
\end{gathered} \tag{0.7}$$

где μ — точка нормировки, откуда

$$Z_\alpha = 1 - \beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} + \left(\beta_0^2 - \tfrac{1}{2}\beta_1 \epsilon\right) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\right)^2 + \cdots \tag{0.8}$$

(n_f — число кварковых флейворов). Если константа перенормировки Z калибровочно–инвариантна, то соответствующая аномальная размерность

$$\gamma(\alpha_s) = \frac{d \log Z}{d \log \mu} = \gamma_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} + \gamma_1 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \cdots \tag{0.9}$$

получается дифференцированием $\log Z$ с учетом (0.8), откуда $Z_{11} = -\frac{1}{2}\gamma_0$, $Z_{22} = \frac{1}{8}\gamma_0(\gamma_0 + 2\beta_0)$, $Z_{21} = -\frac{1}{4}\gamma_1$. Если же γ_0 линейно зависит от a, то в Z_{22} появляется дополнительный член от μ–зависимости a (0.5), содержащий аномальную размерность глюонного поля γ_A:

$$Z = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma_0 \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} + \tfrac{1}{8}\left[\gamma_0(\gamma_0 + 2\beta_0) + \gamma_{A0} \frac{d\gamma_0}{da} a - 2\gamma_1 \epsilon\right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\right)^2 + \cdots \tag{0.10}$$

Таким образом, константы перенормировки однозначно восстанавливаются по аномальным размерностям, которые удобнее приводить ввиду их большей компактности:

$$\gamma_q = 2 a C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} + C_F \left[\tfrac{1}{2}(a^2 + 8a + 25) C_A - 3 C_F - 4 T_F n_f\right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \cdots \tag{0.11}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_A = {}& \left[\left(a - \tfrac{13}{3}\right) C_A + \tfrac{8}{3} T_F n_f\right] \frac{\alpha_s}{4\pi} \\
& + \left[\tfrac{1}{4}(2a^2 + 11a - 59) C_A^2 + 2(4 C_F + 5 C_A) T_F n_f\right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{0.12}$$

Для вычисления амплитуд рассеяния применяется схема перенормировки на массовой поверхности. В ней полюсная масса кварка m связана с m_0 как $m_0 = Z_m^{\mathrm{os}} m$. Константа перенормировки волновой функции кварка в этой схеме

$$Z_Q^{\mathrm{os}} = 1 - C_F \frac{d-1}{d-3} \Gamma(\epsilon) \frac{g_0^2 m^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} + \cdots \tag{0.13}$$

В однопетлевом приближении (но не далее) $Z_m^{\mathrm{os}} = Z_Q^{\mathrm{os}}$. Мы не выписываем здесь двухпетлевые выражения, которые довольно громоздки.

Поле тяжелого кварка в HQET обозначается $\widetilde{Q}_v$, или $\widetilde{Q}$ в системе покоя. Константы перенормировки и аномальные размерности в HQET, отличающиеся от КХД, также содержат тильду. Остаточные энергии в HQET обозначаются ε с различными индексами, в частности, ε_0 — энергия мезона в основном состоянии. Для этой величины в литературе устоялось обозначение $\overline{\Lambda}$, представляющееся довольно нелогичным.

При вычислении многих интегралов возникает дилогарифм

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int\limits_0^x \frac{\log(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \,. \tag{0.14}$$

При вычитании вклада континуума в правилах сумм со степенной спектральной плотностью возникают функции

$$\delta_n(x) = \theta(x) \left(1 - e^{-x} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \right) . \tag{0.15}$$

ГЛАВА 1

Высшие степенные поправки в правилах сумм КХД

Эта глава посвящена методам вычисления высших степенных поправок в правилах сумм КХД и их применению к правилу сумм для ρ–мезонного канала, а также извлечению ограничений на вакуумные конденсаты из экспериментальных данных о e^+e^- аннигиляции в адроны с изоспином $I = 1$, и основана на работах [**1**]–[**6**].

Правила сумм КХД [**32**] широко применяются для оценки характеристик адронов, которые не могут быть вычислены в теории возмущений. Для повышения точности правил сумм и установления их областей применимости необходимо вычислять высшие пертурбативные поправки (высшие члены разложения коэффициентных функций по α_s) и высшие непертурбативные (степенные) поправки. Методы вычисления высших степенных поправок обсуждаются в §1.1–1.5 по работе [**6**]. В §1.2 обсуждается систематическая классификация кварковых и глюонных конденсатов и алгоритм сведения произвольного конденсата к выбранному базису; подробно рассмотрены конденсаты вплоть до размерности 8 [**2, 6**]. В этой размерности впервые возникает интересное явление — аномальный кварковый конденсат, который равен комбинации глюонных [**2**]. При вычислении корреляторов естественным образом возникают нелокальные конденсаты. Простейшая их разновидность — билокальные конденсаты. В трехточечных правилах сумм для формфакторов, а также в правилах сумм для волновых функций, возникают неколлинеарные конденсаты. В некоторых приложениях, например, правилах сумм для моментов волновых функций, полезно разлагать их по одной разности координат; коэффициенты таких разложений — билокальные конденсаты. Все эти вопросы обсуждаются в §1.3, основанном на соответствующем параграфе из [**6**].

В §1.4, 1.5 обсуждается вычисление корреляторов токов тяжелых и легких кварков. Разложения всех кварковых конденсатов тяжелого кварка вплоть до размерности 8 по $1/m$, коэффициентами которых являются глюонные конденсаты, получены в §1.4 ([**1, 2**]). Эти разложения не только интересны сами по себе, но и необходимы для получения корреляторов токов легких кварков из результатов для тяжелых кварков путем предельного перехода $m \to 0$. В §1.5 выводится полное выражение для коррелятора векторных токов тяжелых кварков вплоть до конденсатов размерности 8 [**1, 2**], с использованием результатов Николаева и Радюшкина [**33**] для тяжелых кварков. Эквивалентное выражение для вкладов глюонных и билинейных кварковых конденсатов было независимо получено Бродхарстом и Дженералисом [**34, 35**] (их результат содержит 10 кварковых конденсатов размерности 8, хотя независимы только 6, см. §1.2); однако они не получили вклад четырехкварковых конденсатов [**1**].

Наконец, в §1.6 обсуждается приложение этих результатов — извлечение ограничений на кварковый и глюонный конденсат из экспериментальных данных о сечении e^+e^- аннигиляции в адроны с изоспином $I = 1$ [**3**]. Такого рода анализ был впервые произведен Эйдельманом, Курдадзе и Вайнштейном в 1979 году [**36**]. По сравнению с этой работой, мы использовали гораздо больший массив экспериментальных данных — все результаты, доступные на момент написания работы. Мы учитывали не только систематические, но и статистические ошибки, влияние которых оказалось существенным (для нескольких точек вблизи пика ρ–мезона). Мы также использовали все доступные в тот момент выражения для радиационных и степенных поправок. Правдоподобные оценки конденсатов размерности 8 использовались для ограничения области применимости правил сумм. С тех пор (это было 10 лет назад) не появилось ни одного анализа правил сумм в ρ–мезонном канале, имеющего сравнимую степень детальности. Вероятно, пора такой анализ провести, потому что появилось много новых экспериментальных данных, и улучшилось теоретическое понимание этого коррелятора (особенно пертурбативного вклада).

1.1. Калибровка фиксированной точки

Операторное разложение (OPE) широко применяется для исследования корреляторов в квантовой теории поля. В частности, оно является основой метода правил сумм КХД. Пусть $\Pi(p)$ — коррелятор двух локальных токов в импульсном представлении. Тогда OPE имеет вид

$$\Pi(p) = \sum_i c_i(p^2) <O_i> \,, \qquad (1.1.1)$$

где $<O_i>$ — вакуумные средние локальных операторов различных размерностей (называемые вакуумными конденсатами), а $c_i(p^2)$ — коэффициентные функции. Они представляют собой пертурбативные ряды по α_s. Чтобы сделать правила сумм более точными и установить их области применимости, необходимо вычислять как высшие пертурбативные поправки (высшие члены разложения коэффициентных функций по α_s), так и высшие непертурбативные (степенные) поправки.

Вакуум КХД имеет сложную структуру. Чтобы вычислить коррелятор в КХД, мы должны сначала вычислить его во внешнем (вакуумном) кварковом и глюонном поле. Затем мы должны усреднить выражение для коррелятора через эти поля по вакууму. После этого мы получим выражение для коррелятора через вакуумные конденсаты (1.1.1).

Корреляторы бесцветных токов калибровочно–инвариантны. Поэтому мы можем выбирать любую калибровку для внешнего глюонного поля. Удобно использовать калибровку фиксированной точки (Фока–Швингера)

$$x^\mu A^a_\mu(x) = 0 \,. \qquad (1.1.2)$$

В этой калибровке, ряды Тэйлора для $A^a_\mu(x)$ и $q(x)$ записываются в калибровочно–ковариантном виде [**37**]

$$\begin{aligned} A^a_\mu(x) =& \frac{1}{2\cdot 0!} x^\nu G^a_{\nu\mu}(0) + \frac{1}{3\cdot 1!} x^\alpha x^\nu D_\alpha G^a_{\nu\mu}(0) \frac{1}{4\cdot 2!} x^\beta x^\alpha x^\nu D_\beta D_\alpha G^a_{\nu\mu}(0) + O(x^4) \,, \\ q(x) =& q(0) + x^\alpha D_\alpha q(0) + \frac{1}{2!} x^\beta x^\alpha D_\beta D_\alpha q(0) + O(x^3) \end{aligned} \qquad (1.1.3)$$

(и потому $\overline{q}(x) = \overline{q}(0) + \overline{q}(0) \overleftarrow{D}_\alpha x^\alpha + \cdots$). Поэтому только калибровочно–ковариантные величины используются на всех стадиях вычислений.

В этой калибровке теория не является трансляционно–инвариантной. Перенос должен сопровождаться калибровочным преобразованием к другой калибровке фиксированной точки. Корреляторы становятся калибровочно–инвариантными и потому трансляционно–инвариантными после усреднения по вакууму. Мы можем выбрать фиксированную точку калибровки (начало координат в (1.1.2)) в любой из вершин коррелятора для упрощения вычислений. В импульсном представлении, линии внешнего глюонного поля имеют входящие импульсы k_i, и дают $A^a_\mu(k_i)\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}$, где $A^a_\mu(k_i)$ — Фурье–образ (1.1.3), представляющий собой ряд по производным $\delta(k_i)$. Вершина, выбранная как фиксированная точка калибровки, предоставляет общий сток для вакуумных импульсов k_i.

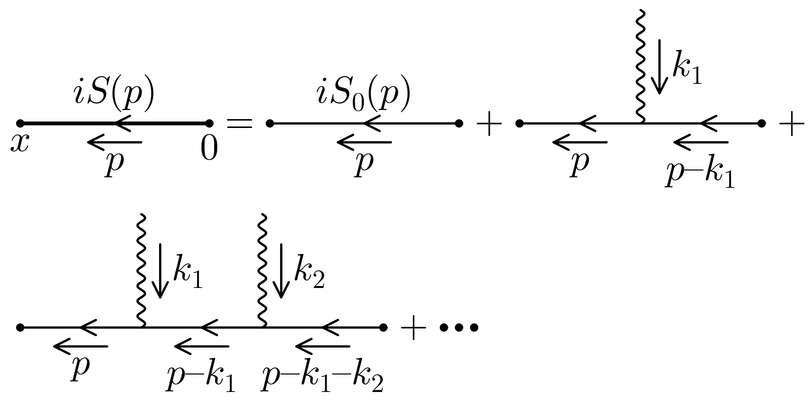


Рис. 1.1. Пропагатор кварка во внешнем глюонном поле.

Кварковый пропагатор (Рис. 1.1) может быть записан как сумма по числу линий внешнего глюонного поля:

$$S(p) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(p)\,, \quad S_0(p) = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\,, \quad S_k(p) = -S_0(p)\hat{A}S_{k-1}(p)\,,$$
$$A_\mu = -i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i)^l}{(l+2)l!}D_{\alpha_1}\dots D_{\alpha_l}G^a_{\nu\mu}t^a\partial^{\alpha_1}\dots\partial^{\alpha_l}\partial^\nu\,. \tag{1.1.4}$$

Удобно использовать рекуррентные соотношения для $S_k(p)$:

$$S_k = S_0\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_{kl}}{l+2}\,, \quad A_{k0} = iG_{\mu\nu}\partial^\mu\gamma^\nu S_{k-1}\,, \quad A_{kl} = -\frac{i}{l}\partial^\alpha D_\alpha A_{k,l-1}\,. \tag{1.1.5}$$

Здесь $\partial_\mu = \partial/\partial p^\mu$ действует на все пропагаторы справа, а D_μ — только на ближайшее $G_{\mu\nu} = gG^a_{\mu\nu}(0)t^a$. Например, удерживая глюонные операторы с размерностью $d \le 4$ (Рис. 1.1), мы получим

$$\begin{aligned} S =& S_0 + \frac{i}{2}G_{\mu\nu}S_0\partial^\mu\gamma^\nu S_0 + \frac{1}{3}D_\alpha G_{\mu\nu}S_0\partial^\alpha\partial^\mu\gamma^\nu S_0 \\ &- \frac{i}{8}D_\beta D_\alpha G_{\mu\nu}S_0\partial^\beta\partial^\alpha\partial^\mu\gamma^\nu S_0 - \frac{1}{4}G_{\rho\sigma}G_{\mu\nu}S_0\partial^\rho\gamma^\sigma S_0\partial^\mu\gamma^\nu S_0\,. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Эти формулы могут использоваться как для массивных, так и для безмассовых кварков. В случае легких кварков, мы можем разложить S_0 по m. Для безмассового кварка, уравнение (1.1.6) дает

$$\begin{aligned} S(p) =& \frac{1}{p^2}\hat{p} - \frac{1}{p^4}p^\mu \widetilde{G}_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma_5 \\ &+ \frac{1}{p^6}\left[-\frac{2}{3}\left(p^2\hat{J} - p^\mu J_\mu \hat{p} + p^\lambda D_\lambda p^\mu G_{\mu\nu}\gamma^\nu\right) - 2ip^\lambda D_\lambda p^\mu \widetilde{G}_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma_5\right] \\ &+ \frac{1}{p^8}\Big[2\left(p^2\gamma^\mu G_{\mu\lambda}G^{\lambda\nu}p_\nu - p^\mu G_{\mu\lambda}G^{\lambda\nu}p_\nu\hat{p}\right) - 2ip^\lambda D_\lambda\left(p^2\hat{J} - p^\mu J_\mu\hat{p}\right) \\ &\quad + \left(4(p^\lambda D_\lambda)^2 - p^2 D^2\right)p^\mu\widetilde{G}_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma_5 - i\left[p^\mu G_{\mu\lambda}, \widetilde{G}^{\lambda\nu}\gamma_\nu\gamma_5\right]\Big]\,. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Заметим, что последний член в (1.1.7) отсутствует в [**37**]. При выводе этой формулы мы использовали соотношения $D^2 G_{\mu\nu} = -D_\mu J_\nu + D_\nu J_\mu + 2i[G_{\mu\lambda}, G^\lambda{}_\nu]$, $D_\nu D_\lambda G^{\mu\nu} = D_\lambda J^\mu - i[G_{\nu\lambda}, G^{\mu\nu}]$, $G_{\mu\lambda}\widetilde{G}^{\lambda\nu} + \widetilde{G}^{\nu\lambda}G_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\delta^\nu_\mu \widetilde{G}_{\rho\sigma}G^{\rho\sigma}$, $G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu} = \widetilde{G}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$. В практических вычислениях часто бывает более удобно подставлять символические выражения для пропагаторов типа (1.1.6) в выражения для диаграмм и затем упрощать полные ответы, вместо того чтобы использовать (1.1.7).

Другой способ вычисления основан на представлении пропагатора (1.1.4) в виде

$$S(p) = \frac{1}{\hat{\mathcal{P}} - m} = \frac{1}{H}\left(\mathcal{P}^2 - m^2 - \frac{i}{2}\mathcal{G}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\left(\hat{\mathcal{P}} + m\right)\,, \tag{1.1.8}$$

$$H = \left(\mathcal{P}^2 - m^2\right)^2 + \frac{i}{2}[\mathcal{P}^2, \mathcal{G}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}] + \frac{1}{4}(\mathcal{G}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})^2 = H_0 + \Delta H\,, \quad H_0 = (p^2 - m^2)^2\,,$$

где $\mathcal{P}_\mu = p_\mu + A_\mu$, $\mathcal{G}_{\mu\nu} = -i[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu]$. Операторное разложение для $S(p)$ получается из разложения по ΔH. Единственный член размерности 2 в ΔH — это оператор $[p^2 - m^2, A_\mu p^\mu]_+$; другие имеют размерность 3 или выше. Этот оператор дает ноль при действии на $1/H_0$. Это свойство позволяет значительно уменьшить число итераций по ΔH.

Чтобы рассмотреть распространение глюона во внешнем глюонном поле, мы должны подставить $A^a_\mu + a^a_\mu$ в лагранжиан КХД, где A^a_μ — внешнее поле, а a^a_μ — квантовое глюонное поле. Тогда лагранжиан становится равен

$$L = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu a^a_\nu)(D^\mu a^{a\nu}) + \frac{1}{2}(D_\mu a^a_\nu)(D^\nu a^{a\mu}) + \frac{1}{2}a^{a\mu}G^{ab}_{\mu\nu}a^{b\nu} + \cdots \tag{1.1.9}$$

Здесь $G^a_{\mu\nu}$ и D_μ включают только внешнее поле A^a_μ, и $G^{ab}_{\mu\nu} = gf^{acb}G^c_{\mu\nu}$. Мы выбираем калибровку фиксированной точки для внешнего поля A^a_μ. Этот лагранжиан все еще калибровочно–инвариантен по отношению к a^a_μ. Мы должны добавить член, фиксирующий калибровку, и соответствующий духовый член. Удобно использовать обобщение Фейнмановской калибровки $-\frac{1}{2}(D_\mu a^{a\mu})^2$. Тогда свободный глюонный пропагатор равен $D^0_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu}/p^2$, а вершины взаимодействия глюона с внешним полем (Рис. 1.2) равны $iA^{ab}_\lambda(p_1+p_2)^\lambda g_{\mu\nu} - iA^{ab}_\mu(p_1-p_2)_\nu - iA^{ab}_\nu(p_2-p_1)_\mu - iG^{ab}_{\mu\nu}$ и $-A^{ac}_\lambda A^{cb\lambda} g_{\mu\nu} - A^{ac}_\mu A^{cb}_\nu + A^{ac}_\mu A^{cb}_\nu$.

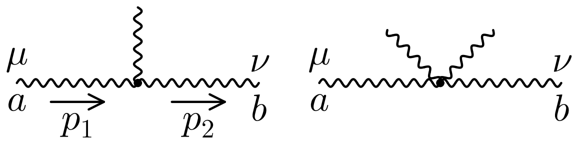


Рис. 1.2. Вершины взаимодействия глюона с внешним глюонным полем.

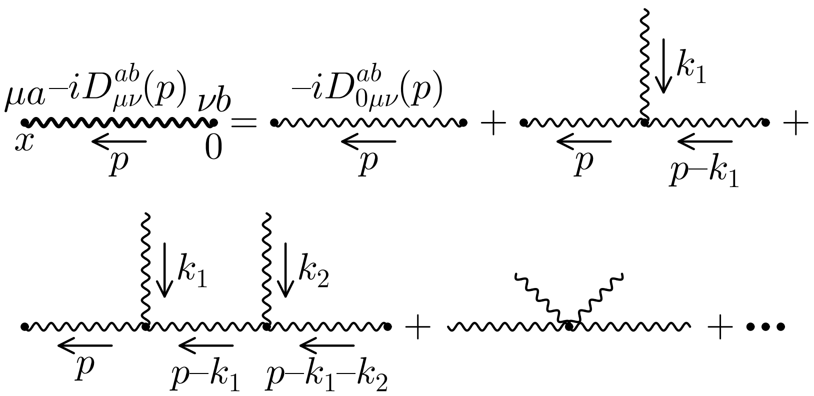


Рис. 1.3. Пропагатор глюона во внешнем глюонном поле.

Удерживая члены с $d \le 4$, мы получаем глюонный пропагатор (Рис. 1.3)

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} = & \frac{1}{p^2} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{p^4} 2G_{\alpha\beta} + \frac{1}{p^6}\left(\frac{2}{3} i p^\mu J_\mu g_{\alpha\beta} + 4ip^\lambda D_\lambda G_{\alpha\beta}\right) \\ & + \frac{1}{p^8}\Big[-2p^\lambda D_\lambda p^\mu J_\mu g_{\alpha\beta} - 2\left(4(p^\lambda D_\lambda)^2 - p^2 D^2\right) G_{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2}\left(p^2 G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 4p^\mu G_{\mu\lambda}G^{\lambda\nu}p_\nu\right) g_{\alpha\beta} + 4p^2 G_{\alpha\lambda}G^\lambda{}_\beta\Big]. \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Здесь использованы матричные обозначения для цветовых индексов.

1.2. Классификация вакуумных конденсатов

Вакуумные конденсаты можно разделить на классы в соответствии с числом кварковых полей, которые в них содержатся. Глюонные конденсаты их не содержат. Билинейные кварковые конденсаты содержат два кварковых поля, и имеют размерности $d \geq 3$. Четырехкварковые конденсаты имеют $d \geq 6$, и так далее. В соответствии с этой классификацией, единичный оператор является глюонным оператором с $d = 0$.

Из предыдущего параграфа ясно, что при вычислении корреляторов билинейных кварковых токов в древесном приближении возникают билинейные кварковые конденсаты вида $<\overline{q}(D \ldots DG)(D \ldots DG) \ldots \gamma \ldots \gamma q>$. Аналогично, в однопетлевом приближении появляются глюонные конденсаты вида $<\mathrm{Tr}(D \ldots DG)(D \ldots DG) \ldots>$ (чтобы цветовой шпур не обращался в ноль, должно быть по крайней мере две группы $(D \ldots DG)$).

Используя формулы $G_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu]$, $(D_\mu A) = [D_\mu, A]$, мы можем легко представить любой билинейный кварковый конденсат размерности $d = m + 3$ как комбинацию членов вида $<\overline{q}D_{\mu_1} \ldots D_{\mu_m}\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_m}q>$, где $\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_m}$ построен из γ^μ и $g^{\mu\nu}$. Выбирая члены с наибольшим числом γ матриц, мы переставляем их таким образом, что их индексы располагаются в том же порядке, что и в $D_{\mu_1} \ldots D_{\mu_m}$. Возникающие при этом дополнительные члены имеют меньше γ матриц. Мы повторяем эту процедуру, переходя к членам с меньшим числом γ матриц, пока не достигнем членов с одной γ матрицей или вообще без γ матриц. В результате, билинейный кварковый конденсат представляется как линейная комбинация членов вида $<\overline{q}O_i q>$, где O_i построены из $\hat{D}$ и D_μ. Вследствие уравнений движения, те члены, в которых $\hat{D}$ стоит рядом с q или $\overline{q}$, сводятся к конденсатам меньшей размерности, умноженным на m.

Выписав все конденсаты $B_i^d = <\overline{q}O_i^m q>$, где O_i^m построены из $\hat{D}$ и D_μ, и ни один $\hat{D}$ не стоит рядом с q или $\overline{q}$, мы получаем некоторый набор билинейных кварковых конденсатов размерности d. Мы только что показали, что любой конденсат размерности d может быть систематическим образом выражен через B_i^d, mB_i^{d-1}, … Это означает, что они образуют базис кварковых конденсатов с размерностями $\leq d$. Но этот базис чрезвычайно неудобен для использования, потому что его конденсаты содержат максимальное число производных, действующих на q. Поэтому нам лучше выбрать базис наиболее удобных d–мерных конденсатов Q_j^d. Мы можем выразить Q_j^d через B_i^d, mB_i^{d-1}, … Решая эту систему линейных уравнений, мы получим выражения для B_i^d через Q_j^d, mQ_j^{d-1}, … Имея эти выражения, мы можем легко разложить любой d–мерный билинейный кварковый конденсат по базисным Q_j^d, mQ_j^{d-1}, …

Руководящий принцип выбора хороших Q_j^d состоит в том, чтобы иметь минимальное число производных, действующих на кварковое поле, и поэтому максимальную размерность глюонных операторов в Q_j^d. Это позволяет разлагать пропагаторы до меньшей степени внешнего поля. Среди таких операторов следует прежде всего выбирать те, которые содержат J_μ, потому что они в действительности являются четырехкварковыми, и их легче оценивать. Они могут быть подавлены в некоторых моделях вакуума (инстантонного типа), в которых вакуумные глюонные поля могут быть сильными, но $D_\nu G^{\mu\nu} \approx 0$.

Для размерностей $d \le 6$ мы имеем

$$B^3 = <\bar{q}q>\,, \quad B^5 = -<\bar{q}D^2q>\,, \quad B^6 = -i<\bar{q}D_\mu\hat{D}D^\mu q>\,. \tag{1.2.1}$$

Мы выбираем базисные конденсаты

$$Q^3 = <\bar{q}q>\,, \quad Q^5 = i<\bar{q}G_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}q>\,, \quad Q^6 = <\bar{q}\hat{J}q>\,. \tag{1.2.2}$$

(Q^5 обычно обозначается как $m_0^2Q^3$). Эти конденсаты выражаются через B_i^d как

$$Q^3 = B^3\,, \quad Q^5 = -2B^5 + 2m^2B^3\,, \quad Q^6 = -2B^6 + 2mB^5\,. \tag{1.2.3}$$

Решая эту линейную систему, мы получаем

$$B^3 = Q^3\,, \quad B^5 = -\frac{1}{2}Q^5 + m^2Q^3\,, \quad B^6 = -\frac{1}{2}Q^6 - \frac{m}{2}Q^5 + m^3Q^3\,. \tag{1.2.4}$$

Для $d = 7$ мы имеем

$$\begin{aligned} &B_1^7 = <\bar{q}D^2D^2q>\,, \quad B_2^7 = <\bar{q}D_\mu D^2D^\mu q>\,, \\ &B_3^7 = <\bar{q}D_\mu D_\nu D^\mu D^\nu q>\,, \quad B_4^7 = <\bar{q}D_\mu\hat{D}^2D^\mu q>\,. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Мы выбираем базисные конденсаты

$$\begin{aligned} &Q_1^7 = <\bar{q}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}q>\,, \quad Q_2^7 = i<\bar{q}G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu}\gamma_5 q>\,, \\ &Q_3^7 = <\bar{q}G_{\mu\lambda}G^{\lambda}{}_{\nu}\sigma^{\mu\nu}q>\,, \quad Q_4^7 = i<\bar{q}D_\mu J_\nu\sigma^{\mu\nu}q>\,. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Здесь конденсат, содержащий $\widetilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}$ и $\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta$, понимается как сокращенное обозначение для выражения, из которого оба ε тензора исключены с помощью

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4!\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\delta]}$, а это выражение имеет смысл при любой размерности пространства d (квадратные скобки означают антисимметризацию). Эти конденсаты выражаются через B^d_i как

$$
\begin{aligned}
&Q^7_1 = 2B^7_2 - 2B^7_3\,,\\
&Q^7_2 = -2B^7_1 - 2B^7_2 + 2B^7_3 + 2B^7_4 - 4mB^6 + 6m^2B^5 - 2m^4B^3\,,\\
&Q^7_3 = 2B^7_2 - 2B^7_3 - B^7_4 + 2mB^6 - m^2B^5\,,\\
&Q^7_4 = -2B^7_1 - 2B^7_2 + 4B^7_3 - 4mB^6 + 4m^2B^5\,.
\end{aligned}
\tag{1.2.7}
$$

Решая эту линейную систему, мы получаем

$$
\begin{aligned}
&B^7_1 = \frac{1}{2}Q^7_1 - \frac{1}{2}Q^7_2 - Q^7_3 - m^2Q^5 + m^4Q^3\,,\\
&B^7_2 = \frac{3}{2}Q^7_1 - \frac{1}{2}Q^7_2 - Q^7_3 + \frac{1}{2}Q^7_4 - mQ^6 - m^2Q^5 + m^4Q^3\,,\\
&B^7_3 = Q^7_1 - \frac{1}{2}Q^7_2 - Q^7_3 + \frac{1}{2}Q^7_4 - mQ^6 - m^2Q^5 + m^4Q^3\,,\\
&B^7_4 = Q^7_1 - Q^7_3 - mQ^6 - \frac{m^2}{2}Q^5 + m^4Q^3\,.
\end{aligned}
\tag{1.2.8}
$$

Аналогично, для $d = 8$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
&B^8_1 = i{<}\overline{q}(D_\mu\hat{D}D^\mu D^2 + D^2D_\mu\hat{D}D^\mu)q{>}\,,\\
&B^8_2 = i{<}\overline{q}(D_\mu\hat{D}D^2D^\mu + D_\mu D^2\hat{D}D^\mu)q{>}\,,\\
&B^8_3 = i{<}\overline{q}(D_\mu\hat{D}D_\nu D^\mu D^\nu + D_\nu D_\mu D^\nu\hat{D}D^\mu)q{>}\,,\\
&B^8_4 = i{<}\overline{q}D^2\hat{D}D^2q{>}\,,\quad B^8_5 = i{<}\overline{q}D_\mu D_\nu\hat{D}D^\nu D^\mu q{>}\,,\\
&B^8_6 = i{<}\overline{q}D_\mu D_\nu\hat{D}D^\mu D^\nu q{>}\,,\quad B^8_7 = i{<}\overline{q}D_\mu\hat{D}^3D^\mu q{>}\,.
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

Операторы, подобные входящим в $B^8_{1\ldots3}$, но со знаком минус между двумя членами, являются C–нечетными, и их вакуумные средние равны нулю.

Для билинейных кварковых конденсатов размерностей $d \geq 8$ возникает новое интересное явление, аналогичное аксиальной аномалии. При размерности пространства $d \neq 4$ мы можем построить конденсат

$$A = i{<}\overline{q}D_\alpha D_\beta D_\gamma D_\delta D_\varepsilon\gamma^{[\alpha}\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^{\varepsilon]}q{>}\,. \tag{1.2.10}$$

Все коэффициенты разложения этого конденсата по глюонным (см. §1.4) содержат шпуры, обращающиеся в ноль в 4–мерном пространстве. Импульсные интегралы в коэффициентах при глюонных конденсатах с $d > 8$ сходятся, а при $d = 8$ они содержат расходимости $1/\epsilon$. В результате, кварковый конденсат A равен комбинации глюонных конденсатов с $d = 8$.

Выбирая аномальный конденсат A в качестве одного из базисных, мы можем выбрать 6 собственно кварковых конденсатов с $d = 8$ в виде

$$\begin{aligned} &Q_1^8 = i{<}\overline{q}[[G^{\mu\lambda}, G_{\lambda\nu}]_+, D_\mu]_+\gamma^\nu q{>}\,, \quad Q_2^8 = -{<}\overline{q}[[G^{\mu\lambda}, \widetilde{G}_{\lambda\nu}], D_\mu]_+\gamma^\nu\gamma_5 q{>}\,, \\ &Q_3^8 = i{<}\overline{q}[\hat{D}G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}]q{>}\,, \quad Q_4^8 = {<}\overline{q}D^2\hat{J}q{>}\,, \\ &Q_5^8 = i{<}\overline{q}[G_{\mu\nu}, J^\mu]\gamma^\nu q{>}\,, \quad Q_6^8 = {<}\overline{q}[\widetilde{G}_{\mu\nu}, J^\mu]_+\gamma^\nu\gamma_5 q{>}\,. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Здесь, как и раньше, выражения, содержащие $\widetilde{G}_{\mu\nu}$ и $\gamma_\mu\gamma_5 = \frac{i}{3!}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma$, понимаются как сокращенные обозначения для выражений, из которых оба ε тензора исключены.

Все операторы в (1.2.11) (как и в (1.2.6), (1.2.2)) являются чисто C–четными. C–сопряжение переставляет все D_μ и γ_μ в обратном порядке и меняет их знак (потому что D_μ превращается в $\overleftarrow{D}_\mu$). Поэтому каждый коммутатор дает множитель -1 в C–четность, а каждый антикоммутатор дает $+1$; мы не должны использовать обычные произведения, если хотим получить оператор с определенной C–четностью. В соответствии с этими правилами, $G_{\mu\nu}$ и все его производные $D_\lambda G_{\mu\nu}, \ldots$ (включая J_μ) являются C–нечетными; γ_μ и $\sigma_{\mu\nu}$ C–нечетны, тогда как 1, γ_5 и $\gamma_\mu\gamma_5$ C–четны.

Конденсаты (1.2.10), (1.2.11) выражаются через (1.2.9) как

$$\begin{aligned} A =& -B_1^8 - B_2^8 + B_3^8 + B_4^8 + B_5^8 - B_6^8 + B_7^8 \\ &+ 2mB_1^7 + 2mB_2^7 - 2mB_3^7 - 2mB_4^7 + 3m^2B^6 - 4m^3B^5 + m^5B^3\,, \\ Q_1^8 =& B_1^8 - B_2^8 + 2B_5^8 - 2B_6^8 - 2mB_1^7 + 2mB_3^7\,, \\ Q_2^8 =& 2B_1^8 - 2B_2^8 - 2B_4^8 + 2B_5^8 - 2B_6^8 + 2B_7^8 \\ &- 2mB_1^7 + 2mB_2^7 + 2mB_3^7 - 2mB_4^7 - 2m^2B^6 + 2m^3B^5\,, \\ Q_3^8 =& -4B_5^8 + 4B_6^8 + 4mB_2^7 - 4mB_3^7\,, \\ Q_4^8 =& 2B_1^8 + 2B_2^8 - 2B_4^8 - 4B_5^8 - 2mB_1^7\,, \\ Q_5^8 =& B_1^8 + B_2^8 - 2B_3^8 - 2mB_1^7 - 2mB_2^7 + 4mB_3^7\,, \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

$$
\begin{aligned}
Q_6^8 =& 3B_1^8 + B_2^8 - 2B_3^8 - 2B_4^8 \\
& - 4mB_1^7 - 2mB_2^7 + 4mB_3^7 - 4m^2B^6 + 4m^3B^5 \,.
\end{aligned}
$$

Решая эту линейную систему, мы получаем

$$
\begin{aligned}
B_1^8 =& A + \frac{1}{2}Q_1^8 - \frac{1}{2}Q_2^8 + \frac{1}{4}Q_3^8 - \frac{1}{2}Q_5^8 + Q_6^8 \\
& + mQ_1^7 - \frac{m}{2}Q_2^7 - 2mQ_3^7 - m^2Q^6 - 2m^3Q^5 + 2m^5Q^3 \,, \\
B_2^8 =& A - \frac{1}{2}Q_1^8 - \frac{1}{2}Q_2^8 - \frac{1}{4}Q_3^8 - \frac{1}{2}Q_5^8 + Q_6^8 \\
& + 3mQ_1^7 - \frac{m}{2}Q_2^7 - 2mQ_3^7 + mQ_4^7 - 3m^2Q^6 - 2m^3Q^5 + 2m^5Q^3 \,, \\
B_3^8 =& A - \frac{1}{2}Q_2^8 - Q_5^8 + Q_6^8 \\
& + 2mQ_1^7 - \frac{m}{2}Q_2^7 - 2mQ_3^7 + mQ_4^7 - 3m^2Q^6 - 2m^3Q^5 + 2m^5Q^3 \,, \\
B_4^8 =& A + \frac{1}{2}Q_1^8 - \frac{1}{2}Q_2^8 + \frac{1}{4}Q_3^8 + \frac{1}{2}Q_6^8 + \frac{m}{2}Q_1^7 - mQ_3^7 - m^3Q^5 + m^5Q^3 \,, \\
B_5^8 =& \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}Q_1^8 - \frac{1}{4}Q_2^8 - \frac{1}{8}Q_3^8 - \frac{1}{4}Q_4^8 - \frac{1}{2}Q_5^8 + \frac{3}{4}Q_6^8 \\
& + \frac{3}{2}mQ_1^7 - \frac{m}{4}Q_2^7 - mQ_3^7 + \frac{m}{2}Q_4^7 - 2m^2Q^6 - m^3Q^5 + m^5Q^3 \,, \\
B_6^8 =& \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}Q_1^8 - \frac{1}{4}Q_2^8 + \frac{1}{8}Q_3^8 - \frac{1}{4}Q_4^8 - \frac{1}{2}Q_5^8 + \frac{3}{4}Q_6^8 \\
& + mQ_1^7 - \frac{m}{4}Q_2^7 - mQ_3^7 + \frac{m}{2}Q_4^7 - 2m^2Q^6 - m^3Q^5 + m^5Q^3 \,, \\
B_7^8 =& A - \frac{1}{2}Q_1^8 + \frac{1}{2}Q_6^8 + mQ_1^7 + \frac{m}{2}Q_2^7 - mQ_3^7 - \frac{3}{2}m^2Q^6 - \frac{m^3}{2}Q^5 + m^5Q^3 \,.
\end{aligned}
\tag{1.2.13}
$$

Проблема классификации четырехкварковых конденсатов значительно более сложна. Даже при $d = 6$ существует бесконечно много конденсатов $<\overline{q}\gamma_{[\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n]}q><\overline{q}\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n]}q>$, $<\overline{q}t^a\gamma_{[\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n]}q><\overline{q}t^a\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n]}q>$. Те из них, которые имеют $n > 4$, являются аномальными и могут быть исключены.

Теперь мы применим подобные методы для классификации глюонных конденсатов. Для каждой размерности $d = 2n$ мы введем линейное пространство (назовем его расширенным пространством). Оно порождается базисом формальных последовательностей E_i^d, построенных из D_μ, в которых каждый индекс встречается дважды. Последовательности, полученные друг из друга при помощи переименований индексов, циклических перестановок (цикличность шпура) и обращения (C–четность), считаются эквивалентными. Физические глюонные конденсаты могут быть систематически разложены по этому базису, и образуют подпространство расширенного пространства. Мы можем выбрать базис в этом подпространстве, составленный из наиболее удобных конденсатов G_j^d, и дополнить его до базиса во всем пространстве, включив в него подмножество E_i^d. После этого, мы можем разложить любой конденсат по E_i^d, и затем перевыразить его через G_j^d и выбранные E_i^d; последние не должны появляться, если мы действительно выбрали полный базис в физическом подпространстве.

Руководящие принципы для выбора хороших базисных конденсатов подобны кварковому случаю. Прежде всего, нужно включить все независимые конденсаты, содержащие J_μ. Количество производных должно быть минимальным.

Есть только один глюонный конденсат с $d = 4$, а именно $G^4 = <\operatorname{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}>$. Расширенное пространство двумерно: $E_1^4 = D^2 D^2$, $E_2^4 = D_\mu D_\nu D^\mu D^\nu$; $G^4 = 2E_1^4 - 2E_2^4$. Но в данном случае от этого нет никакой пользы.

При $d = 6$ расширенное пространство пятимерно:

$$
\begin{aligned}
&E_1^6 = D^2 D^2 D^2 \,, \quad E_2^6 = D^2 D_\mu D_\nu D^\mu D^\nu \,, \quad E_3^6 = D^2 D_\mu D^2 D^\mu \,, \\
&E_4^6 = D_\lambda D_\mu D^\lambda D_\nu D^\mu D^\nu \,, \quad E_5^6 = D_\lambda D_\mu D_\nu D^\lambda D^\mu D^\nu \,.
\end{aligned}
\tag{1.2.14}
$$

Есть два линейно независимых физических конденсата:

$$
G_1^6 = i<\operatorname{Tr} G_\lambda{}^\mu G_\mu{}^\nu G_\nu{}^\lambda> \,, \quad G_2^6 = <\operatorname{Tr} J_\mu J^\mu> \,. \tag{1.2.15}
$$

Они выражаются через E_i^6 как

$$
G_1^6 = E_1^6 - 3E_2^6 + 3E_4^6 - E_5^6 \,, \quad G_2^6 = -2E_1^6 + 8E_2^6 - 2E_3^6 - 4E_4^6 \,. \tag{1.2.16}
$$

Мы можем исключить $E_{4\ldots5}^6$:

$$
\begin{aligned}
E_4^6 &= -\frac{1}{4} G_2^6 - \frac{1}{2} E_1^6 + 2E_2^6 - \frac{1}{2} E_3^6 \,, \\
E_5^6 &= -G_1^6 - \frac{3}{4} G_2^6 - \frac{1}{2} E_1^6 + 3E_2^6 - \frac{3}{2} E_3^6 \,.
\end{aligned}
\tag{1.2.17}
$$

После этого, мы можем разложить любой конденсат с $d = 6$ по (1.2.14) и выразить его через (1.2.15) и $E_{1\ldots3}^6$; последние члены не должны возникать.

При $d = 8$ расширенное пространство 17–мерно. Набор независимых глюонных конденсатов с $d = 8$ был найден в [**33**]. Мы выбираем один из них по–другому:

$$
\begin{aligned}
&G_1^8 = <\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}>\,, \quad G_2^8 = <\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} G^{\mu\nu} G^{\alpha\beta}>\,, \\
&G_3^8 = <\mathrm{Tr}\, G_{\mu\alpha} G^{\alpha\nu} G_{\nu\beta} G^{\beta\mu}>\,, \quad G_4^8 = <\mathrm{Tr}\, G_{\mu\alpha} G^{\alpha\nu} G^{\mu\beta} G_{\beta\nu}>\,, \\
&G_5^8 = i<\mathrm{Tr}\, J^\mu G_{\mu\nu} J^\nu>\,, \quad G_6^8 = i<\mathrm{Tr}\, J^\lambda [D_\lambda G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}]>\,, \\
&G_7^8 = <\mathrm{Tr}\, J_\mu D^2 J^\mu>\,.
\end{aligned}
\tag{1.2.18}
$$

Все конденсаты записаны в явно C–четном виде (четное число коммутаторов). Они могут быть выражены E_i^8. Решая систему линейных уравнений, мы можем исключить $E_{11\ldots17}^8$. После этого, мы можем разложить любой конденсат с $d = 8$ по E_i^8 и выразить его через (1.2.18) и $E_{1\ldots10}^8$; последние члены не должны возникать.

После получения выражений для коррелятора через внешние поля, мы должны усреднить его по вакууму. Один возможный способ — это выписать наиболее общие выражения для вакуумных средних со свободными индексами и найти неизвестные коэффициенты путем решения системы линейных уравнений.

Для кварковых конденсатов с $d \le 6$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
<\overline{q}_\sigma q_\rho> =& \frac{Q^3}{2^2} 1_{\rho\sigma}\,, \quad <\overline{q}_\sigma D_\alpha q_\rho> = -\frac{imQ^3}{2^4} (\gamma_\alpha)_{\rho\sigma}\,, \\
<\overline{q}_\sigma D_\alpha D_\beta q_\rho> =& \frac{1}{2^5} \left[Q^5 \left(g_{\alpha\beta} + \frac{i}{3} \sigma_{\alpha\beta} \right) - 2m^2 Q^3 g_{\alpha\beta} \right]_{\rho\sigma}\,, \\
<\overline{q}_\sigma D_\alpha D_\beta D_\gamma q_\rho> =& \frac{1}{2^6 3^3} \Big[Q^6 (g_{\alpha\beta}\gamma_\gamma + g_{\beta\gamma}\gamma_\alpha - 5 g_{\alpha\gamma}\gamma_\beta - 3i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\delta \gamma_5) \\
& - 3mQ^5 (g_{\alpha\beta}\gamma_\gamma + g_{\beta\gamma}\gamma_\alpha + g_{\alpha\gamma}\gamma_\beta - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\delta \gamma_5) \\
& + 6m^3 Q^3 (g_{\alpha\beta}\gamma_\gamma + g_{\beta\gamma}\gamma_\alpha + g_{\alpha\gamma}\gamma_\beta) \Big]_{\rho\sigma}\,.
\end{aligned}
\tag{1.2.19}
$$

Подобные формулы с $G_{\alpha\beta}$ и его производными можно легко получить при помощи антисимметризации по соответствующим индексам.

Для глюонных конденсатов с $d \le 6$ мы имеем

$$
<g^2 G^a_{\mu\nu} G^b_{\rho\sigma}> = \frac{G^4}{N C_F d(d-1)} \delta^{ab} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})\,,
$$

$$
\begin{aligned}
&<g^2 G^a_{\mu\nu} D_\alpha D_\beta G^b_{\rho\sigma}> = \frac{\delta^{ab}}{N C_F d(d-1)(d^2-4)} \\
&\quad\times \Big[-(d+2) G^6_1 (((g_{\sigma\mu} g_{\nu\alpha} g_{\beta\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma)) - (\alpha \leftrightarrow \beta)) \\
&\qquad + \left[(d-4) G^6_1 + (d-2) G^6_2\right] (((g_{\sigma\mu} g_{\nu\alpha} g_{\beta\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma)) + (\alpha \leftrightarrow \beta)) \\
&\qquad - \left[4(d-1) G^6_1 + 2(d-2) G^6_2\right] g_{\alpha\beta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma)) \Big] , \qquad (1.2.20) \\
&<g^3 G^a_{\mu\nu} G^b_{\alpha\beta} G^c_{\rho\sigma}> = - \frac{2 G^6_1}{N^2 C_F d(d-1)(d-2)} f^{abc} \\
&\quad\times (((g_{\sigma\mu} g_{\nu\alpha} g_{\beta\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma)) - (\alpha \leftrightarrow \beta)) .
\end{aligned}
$$

Мы можем подставить эти соотношения в выражения для корреляторов и получить скалярные выражения. Но такие формулы становятся очень сложными для более высоких размерностей.

Альтернативный и более простой способ — это усреднить выражение для коррелятора по направлениям p. Это делается при помощи рекуррентных соотношений (n четное)

$$
\begin{aligned}
\overline{p_{\mu_1} p_{\mu_2} \ldots p_{\mu_n}} = & \frac{p^2}{d+n-2} (g_{\mu_1\mu_2} \overline{p_{\mu_3} \ldots p_{\mu_n}} + g_{\mu_1\mu_3} \overline{p_{\mu_2} \ldots p_{\mu_n}} + \cdots \\
& + g_{\mu_1\mu_n} \overline{p_{\mu_2} \ldots p_{\mu_{n-1}}}) \qquad (1.2.21)
\end{aligned}
$$

или явной формулы

$$
\overline{p_{\mu_1} p_{\mu_2} \ldots p_{\mu_n}} = \frac{(p^2)^{n/2}}{d(d+2)\ldots(d+n-2)} (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} \ldots g_{\mu_{n-1}\mu_n} + \cdots) , \qquad (1.2.22)
$$

где сумма берется по всем $(n-1)!!$ методам спаривания n индексов. Здесь d — размерность пространства; эти формулы могут применяться для любых размерностей, включая нецелые (размерная регуляризация). После такого усреднения, мы получаем скалярные вакуумные конденсаты, для которых непосредственно применимы вышеописанные методы.

При вычислении трехточечных корреляторов встречаются средние $\overline{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_m} q_{\nu_1} \cdots q_{\nu_n}}$ по ориентациям пары p, q при фиксированной относительной ориентации. Эти средние могут быть вычислены при помощи разложения $q = (qp)p/p^2 + q_\perp$, $q_\perp^2 = (p^2 q^2 - (pq)^2)/p^2$. Сначала мы усредняем по ориентациям $q_\perp$, ортогональным p, в $(d-1)$–мерном пространстве, используя (1.2.22) с $g_{\mu\nu} \to g_{\perp\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$. Затем мы усредняем по ориентациям

p. Ясно, что, если есть только один вектор q, то средние даются формулой (1.2.22), в которой один p^2 заменен на pq. Вот некоторые менее тривиальные средние:

$$
\begin{aligned}
&\overline{p_\alpha p_\beta q_\mu q_\nu} = \frac{1}{(d-1)d(d+2)} \\
&\quad\times \left[((d+1)p^2q^2 - 2(pq)^2) g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + (d(pq)^2 - p^2q^2)(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \right] , \\
&\overline{p_\alpha p_\beta p_\gamma q_\lambda q_\mu q_\nu} = \frac{pq}{(d-1)d(d+2)(d+4)} \\
&\quad\times \left[((d+1)p^2q^2 - 2(pq)^2)(g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} g_{\gamma\nu} + \cdots) + ((d+2)(pq)^2 - 3p^2q^2)(g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} + \cdots) \right] , \\
&\overline{p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta q_\mu q_\nu} = \frac{p^2}{(d-1)d(d+2)(d+4)} \\
&\quad\times \left[((d+3)p^2q^2 - 4(pq)^2) g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \cdots) + (d(pq)^2 - p^2q^2)(g_{\alpha\beta} g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu} + \cdots) \right] .
\end{aligned}
\tag{1.2.23}
$$

Разумеется, эти формулы можно также вывести, выписывая наиболее общие выражения с неопределенными коэффициентами и решая системы линейных уравнений.

1.3. Нелокальные конденсаты

Как пример приложения описанных методов, мы рассмотрим разложения нелокальных вакуумных конденсатов по локальным. Нелокальные конденсаты естественным образом появляются при вычислении корреляторов [**38**]–[**42**]; их разложение по разностям координат дает обычное операторное разложение (1.1.1). Ряды, выведенные в этом параграфе, можно использовать для ускорения вычисления операторного разложения корреляторов с нелокальными конденсатами или для изобретения самосогласованных анзацев для нелокальных конденсатов.

Калибровочно–инвариантный билокальный кварковый конденсат [**39**] имеет структуру

$$
\begin{aligned}
&<\overline{q}_\sigma(0) E(0,x) q_\rho(x)> = \frac{<\overline{q}q>}{4} \left[f_S(x^2) - \frac{i\hat{x}}{d} f_V(x^2) \right]_{\rho\sigma} , \\
&E(0,x) = P \exp\left(-i \int\limits_0^x A_\mu(y) dy^\mu \right) .
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

В калибровке фиксированной точки $E(0,x)=1$, и

$$
\begin{aligned}
f_S(x^2) =& \frac{<\overline{q}(0)q(x)>}{<\overline{q}q>} = 1 + \frac{\frac{1}{2}Q^5 - m^2Q^3}{2!dQ^3}x^2 \\
&+ \frac{3Q_1^7 - \frac{3}{2}Q_2^7 - 3Q_3^7 + Q_4^7 - 2mQ^6 - 3m^2Q^5 + 3m^4Q^3}{4!d(d+2)Q^3}x^4 + O(x^6)\,, \\
f_V(x^2) =& \frac{id<\overline{q}(0)\hat{x}q(x)>}{<\overline{q}q>x^2} = m + \frac{\frac{1}{2}Q^6 + \frac{3}{2}mQ^5 - 3m^3Q^3}{3!(d+2)Q^3}x^2 \\
&+ \Big[5A - \tfrac{5}{2}Q_2^8 + \tfrac{1}{4}Q_3^8 - \frac{1}{2}Q_4^8 - 3Q_5^8 + 5Q_6^8 + 5m(3Q_1^7 - Q_2^7 - 3Q_3^7 + Q_4^7) \\
&\quad - 15m^2(Q^6 + mQ^5 - m^3Q^3)\Big]\frac{x^4}{5!(d+2)(d+4)Q^3} + O(x^6)\,.
\end{aligned}
\tag{1.3.2}
$$

Сначала мы использовали усреднение по направлениям x (1.2.22) и определения B_i^d (1.2.1), (1.2.5), (1.2.9), а затем — выражения для B_i^d через Q_j^d (1.2.4), (1.2.8), (1.2.13).

Калибровочно–инвариантный билокальный глюонный конденсат [**40, 41**] имеет структуру

$$
\begin{aligned}
&<G^a_{\mu\nu}(0)E^{ab}(0,x)G^b_{\rho\sigma}(x)> = \frac{<G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}>}{d(d-1)}K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\,, \\
&K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x) = d(d-1)<\operatorname{Tr} G_{\mu\nu}(0)G_{\rho\sigma}(x)>/G^4 \\
&= (D(x^2)+D_1(x^2))(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - (\rho\leftrightarrow\sigma)) + \frac{dD_1(x^2)}{dx^2}((x_\mu x_\rho g_{\nu\sigma} - (\mu\leftrightarrow\nu)) - (\rho\leftrightarrow\sigma))\,,
\end{aligned}
\tag{1.3.3}
$$

где $E^{ab}(0,x)$ — P–экспонента в присоединенном представлении, равная δ^{ab} в калибровке фиксированной точки. Мы получаем линейную систему

$$
\begin{aligned}
D(x^2) + D_1(x^2) + \frac{2x^2}{d}D_1'(x^2) &= \frac{A(x^2)}{G^4}\,, \\
D(x^2) + D_1(x^2) + x^2D_1'(x^2) &= \frac{B(x^2)}{G^4}\,,
\end{aligned}
\tag{1.3.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
A(x^2) =& <\operatorname{Tr} G_{\mu\nu}(0)G^{\mu\nu}(x)> = G^4 - \frac{2G_1^6 + G_2^6}{D}x^2 \\
&+ \frac{3G_{1-2}^8 + 24G_{3-4}^8 - 36G_5^8 + 10G_6^8 - 6G_7^8}{4!d(d+2)}x^4 + O(x^6)\,,
\end{aligned}
\tag{1.3.5}
$$

$$B(x^2) = \frac{dx^\mu x_\nu}{x^2} < \mathrm{Tr}\, G_{\mu\lambda}(0) G^{\nu\lambda}(x) > = G^4 - \frac{3G_1^6 + 2G_2^6}{d+2} x^2 + \frac{5G_{1-2}^8 + 50G_{3-4}^8 - 84G_5^8 + 24G_6^8 - 18G_7^8}{4!(d+2)(d+4)} x^4 + O(x^6)$$

и $G_{1-2}^8 = G_1^8 - G_2^8$, $G_{3-4}^8 = G_3^8 - G_4^8$. Решение (1.3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} D(x^2) =& - \frac{G_1^6}{(d-2)G^4} x^2 + \frac{2G_{1-2}^8 + 11G_{3-4}^8 - 12G_5^8 + 3G_6^8}{(d^2-4)G^4} \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\,, \\ D_1(x^2) =& 1 - \frac{(d-4)G_1^6 + (d-2)G_2^6}{(d^2-4)G^4} x^2 \\ &+ \frac{(d-6)G_{1-2}^8 + (13d-48)G_{3-4}^8 - 24(d-3)G_5^8 + (7d-20)G_6^8 - 6(d-2)G_7^8}{(d+4)(d^2-4)G^4} \frac{x^4}{4!} \\ &+ O(x^6)\,. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

В абелевом случае выживает только $D_1(x^2)$ [**40**]; этим объясняется тот факт, что $D(x^2)$ (1.3.6) содержит только чисто неабелевы конденсаты G_1^6, G_{1-2}^8, G_{3-4}^8, $G_{5,6}^8$.

Трехточечные корреляторы, правила сумм для волновых функций адронов и некоторые другие приложения естественным образом включают трилокальные объекты, которые мы будем называть неколлинеарными конденсатами. Неколлинеарный кварковый конденсат имеет структуру

$$\begin{aligned} <\overline{q}_\sigma(y) E(y,0) E(0,x) q_\rho(x)> =& \frac{<\overline{q}q>}{4} \\ \times& \left[f_S(x,y) + \frac{Q^5}{4d(d-1)Q^3} f_T(x,y)[\hat{x},\hat{y}] - \frac{i}{d} \left(f_V(x,y)\hat{x} - f_V(y,x)\hat{y} \right) \right]_{\rho\sigma}\,. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

В калибровке фиксированной точки $E(y,0) = E(0,x) = 1$. Разность

$$\begin{aligned} f_S(x,y) - f_S((x-y)^2) =& \frac{<\overline{q}(y)q(x)> - <\overline{q}(0)q(x-y)>}{<\overline{q}q>} \\ =& - \frac{\Delta\left(3Q_1^7 + 2Q_4^7 - 4mQ^6\right)}{24d(d-1)Q^3} + O(x^3, y^3) \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

(где $\Delta = x^2y^2 - (xy)^2$) обращается в ноль, когда x и y коллинеарны, как и следовало ожидать. Коэффициент $f_T(x,y)$ стоит при структуре $[\hat{x},\hat{y}]$, которая обращается в ноль в коллинеарном случае, поэтому он сам не обязан обращаться в ноль:

$$
\begin{aligned}
f_T(x,y) =& \frac{d(d-1)<\overline{q}(y)[\hat{y},\hat{x}]q(x)>}{Q^5\Delta} \\
=& 1+\frac{\left(6Q_1^7-3Q_2^7-6Q_3^7+2Q_4^7-3mQ^6-3m^2Q^5\right)(x-y)^2-\left(3Q_3^7+2Q_4^7\right)xy}{6(d+2)Q^5} \\
& +O(x^4,y^4)\,.
\end{aligned} \tag{1.3.9}
$$

Для векторного матричного элемента мы получаем

$$
i<\overline{q}(y)\hat{x}q(x)> = -i<\overline{q}(y)\hat{y}q(x)>_{x\leftrightarrow y} = \frac{Q^3(x^2-xy)}{d}f_V((x-y)^2) - \frac{\Delta}{12d(d-1)}g(x,y)\,, \tag{1.3.10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
g(x,y) =& Q^6+\frac{1}{40(D+2)}\Big[-20A(x^2-y^2)-30Q_1^8(x^2-xy)+10Q_2^8(x^2-y^2) \\
& -Q_3^8(13x^2-y^2-9xy)-2Q_4^8(2x^2+y^2-6xy)-2Q_5^8(7x^2+6y^2-11xy) \\
& +20Q_6^8(y^2-xy)+60mQ_1^7(x^2-xy)-10mQ_2^7(x^2-y^2)+40mQ_4^7(x^2-xy) \\
& -20m^2Q^6(5x^2+y^2-6xy)\Big]+O(x^3,y^3)\,.
\end{aligned} \tag{1.3.11}
$$

Решая систему двух линейных уравнений, мы окончательно получаем

$$
f_V(x,y) = f_V((x-y)^2) - \frac{y^2g(x,y)+xy\,g(y,x)}{12(d-1)Q^3}\,. \tag{1.3.12}
$$

Неколлинеарный глюонный конденсат имеет структуру

$$
\begin{aligned}
& <G^a_{\mu\nu}(y)E^{ab}(y,0)E^{bc}(0,x)G^c_{\rho\sigma}(x)> = \frac{<G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}>}{d(d-1)}K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x,y)\,, \\
& T_{\mu\nu\rho\sigma} = G^4\left(K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x,y)-K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x-y)\right) \\
& = c_1(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-(\rho\leftrightarrow\sigma))+c_2((x_\mu x_\rho g_{\nu\sigma}-(\mu\leftrightarrow\nu))-(\rho\leftrightarrow\sigma)) \\
& \quad +c_3((y_\mu y_\rho g_{\nu\sigma}-(\mu\leftrightarrow\nu))-(\rho\leftrightarrow\sigma))+c_4((x_\mu y_\rho g_{\nu\sigma}-(\mu\leftrightarrow\nu))-(\rho\leftrightarrow\sigma)) \\
& \quad +c_5((y_\mu x_\rho g_{\nu\sigma}-(\mu\leftrightarrow\nu))-(\rho\leftrightarrow\sigma))+c_6(x_\mu y_\nu-(\mu\leftrightarrow\nu))(x_\rho y_\sigma-(\rho\leftrightarrow\sigma))
\end{aligned} \tag{1.3.13}
$$

с $c_3(x,y) = c_2(y,x)$. Мы получаем

$$
\begin{aligned}
c_1 =& \frac{\Delta\left[-d(3d-7)G^8_{1-2} + 4(d+3)G^8_{3-4} + 2(d-2)(d-3)G^8_6\right]}{12(d+1)(d+2)(d-2)(d-3)}\,,\\
c_2 =& \frac{1}{12(d+1)(d+2)(d-2)(d-3)}\Big\{4(d+1)(d-3)xyG^8_5\\
&+(d-3)\left[d(2y^2-xy)-4y^2-xy\right]G^8_6\\
&-\left[d^2(y^2-xy)-2d(3y^2-xy)+3(y^2+xy)\right]G^8_{1-2}\\
&-\left[(d^2-3)(y^2+2xy)+2d(3y^2-2xy)\right]G^8_{3-4}\Big\}\,,\\
c_3 =& c_2(x\leftrightarrow y)\,,\\
c_4-c_5 =& \frac{1}{12(d^2-4)}\Big[24(d+2)G^6_1 - 3(x-y)^2G^8_{1-2}\\
&-6(4x^2+4y^2-7xy)G^8_{3-4} + (7x^2+7y^2-12xy)(4G^8_5-G^8_6)\Big]\,,\\
c_4+c_5 =& \frac{1}{12(d+1)(d+2)(d-2)(d-3)}\Big\{-4(d+1)(d-3)(x^2+y^2)G^8_5\\
&+(d-3)\left[d(x^2+y^2-4xy)+x^2+y^2+8xy\right]G^8_6\\
&-\left[d^2(x-y)^2-2d(x^2+y^2-6xy)-3(x+y)^2\right]G^8_{1-2}\\
&+2\left[(d^2-3)(x^2+y^2+xy)-2d(x^2+y^2-3xy)\right]G^8_{3-4}\Big\}\,,\\
c_6 =& \frac{(d-4)G^8_{1-2}+(d-1)^2G^8_{3-4}+(d-2)(D-3)G^8_6}{2(d+1)(d+2)(d-2)(d-3)}\,.
\end{aligned}
\tag{1.3.14}
$$

В абелевом случае $K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x,y) = K_{\mu\nu,\rho\sigma}(x-y)$ содержит только член $D_1((x-y)^2)$ (1.3.6), поэтому $T_{\mu\nu,\rho\sigma}$ включает только чисто неабелевы конденсаты.

В некоторых приложениях, таких, как правила сумм для моментов волновых функций, удобно разлагать неколлинеарные конденсаты в ряды по x, сохраняя y конечным. Коэффициенты этих рядов — билокальные конденсаты.

Разлагая неколлинеарный кварковый конденсат $<\overline{q}(y)E(y,0)\Gamma E(0,x)q(x)>$ по x, мы получаем члены типа $<\overline{q}(y)E(y,0)Oq(0)>$, где O содержит производные и глюонные поля в $x=0$. Поэтому мы сталкиваемся с задачей классификации таких билокальных конденсатов. Аналогично §1.2, мы легко можем представить любой конденсат такого типа как линейную комбинацию членов, в которых O построен из $\hat{D}$, (yD) и D_μ, и быть может содержит $\hat{y}$ слева. Члены с $\hat{D}$ справа сводятся к конденсатам низших размерностей, умноженным на m. Члены с (yD) слева сводятся к производным от конденсатов низших размерностей: разлагая равенство $<\overline{q}(y)E(y,0)(Oq)_{x=\alpha y}> = <\overline{q}((1-\alpha)y)E((1-\alpha)y,0)(Oq)_{x=0}>$ по α, мы получаем

$$<\overline{q}(y)E(y,0)(yD)Oq(0)> = -2y^2\frac{d}{dy^2}<\overline{q}(y)E(y,0)Oq(0)>\,. \tag{1.3.15}$$

Имеется два базисных билокальных конденсата размерности 3:

$$B_1^3(y^2) = <\overline{q}(y)E(y,0)q(0)>\,, \quad B_2^3(y^2) = -i<\overline{q}(y)E(y,0)\hat{y}q(0)>\,. \tag{1.3.16}$$

Они могут быть легко выражены через две билокальные функции, обсуждавшихся ранее:

$$B_1^3(y^2) = Q^3 f_S(y^2)\,, \quad B_2^3(y^2) = Q^3 f_V(y^2)\frac{y^2}{d}\,. \tag{1.3.17}$$

Разложения этих функций при малых y^2 даются формулой (1.3.2).

Имеется четыре базисных билокальных конденсата размерности 5:

$$\begin{aligned}
&B_1^5(y^2) = -<\overline{q}(y)E(y,0)D^2q(0)>\,,\\
&B_2^5(y^2) = <\overline{q}(y)E(y,0)\hat{y}\hat{D}(yD)q(0)>\,,\\
&B_3^5(y^2) = i<\overline{q}(y)E(y,0)\hat{y}D^2q(0)>\,,\\
&B_4^5(y^2) = i<\overline{q}(y)E(y,0)\hat{D}(yD)q(0)>\,.
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Мы вводим четыре новых билокальных функции

$$\begin{aligned}
&Q^5 f_1(y^2) = i<\overline{q}(y)E(y,0)G_{\mu\nu}(0)\sigma^{\mu\nu}q(0)>\,,\\
&Q^5 f_2(y^2) = \frac{idy^\mu y_\nu}{y^2}<\overline{q}(y)E(y,0)G_{\lambda\mu}(0)\sigma^{\lambda\nu}q(0)>\,,\\
&Q^6 f_3(y^2) = \frac{2d}{y^2}<\overline{q}(y)E(y,0)y^\mu G_{\mu\nu}(0)\gamma^\nu q(0)>\,,\\
&Q^6 f_4(y^2) = \frac{2id}{y^2}<\overline{q}(y)E(y,0)y^\mu \widetilde{G}_{\mu\nu}(0)\gamma^\nu\gamma_5 q(0)>\,.
\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Решая систему линейных уравнений, мы получаем

$$\begin{aligned}
&B_1^5(y^2) = -\frac{1}{2}Q^5 f_1(y^2) + m^2 Q^3 f_S(y^2)\,,\\
&B_2^5(y^2) = \frac{y^2}{d}\left[Q^5 f_2(y^2) - mQ^3\left(f_V(y^2) + 2y^2 f_V'(y^2)\right)\right]\,,
\end{aligned}$$

$$B_3^5(y^2) = \frac{y^2}{2d}\left[Q^6\left(f_4(y^2) - f_3(y^2)\right) + 2m^2Q^3 f_V(y^2)\right], \quad (1.3.20)$$
$$B_4^5(y^2) = -\frac{y^2}{2d}\left[Q^6 f_3(y^2) + 4dmQ^3 f_S'(y^2)\right].$$

Разложения при малых y^2 имеют вид

$$\begin{aligned}
f_1(y^2) =& 1 + \frac{Q_1^7 - Q_2^7 - 2Q_3^7 - m^2Q^5}{2dQ^5}y^2 + O(y^4)\,,\\
f_2(y^2) =& 1 + \frac{2Q_1^7 - Q_2^7 - 3Q_3^7 - mQ^6 - m^2Q^5}{2(d+2)Q^5}y^2 + O(y^4)\,,\\
f_3(y^2) =& 1 + \frac{6A - 3Q_2^8 - 4Q_5^8 + 6Q_6^8 + 3mQ_2^7 - 6m^2Q^6}{12(d+2)Q^6}y^2 + O(y^4)\,,\\
f_4(y^2) =& 1 - \frac{mQ^5}{Q^6} \qquad (1.3.21)\\
&+ \frac{-6Q_1^8 - 3Q_3^8 - 6Q_5^8 + 4Q_6^8 + 12m\left(-Q_1^7 + Q_2^7 + 2Q_3^7 - mQ^6 + m^2Q^3\right)}{24(d+2)Q^6}y^2\\
&+ O(y^4)\,.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем легко разложить неколлинеарный кварковый конденсат (1.3.7) по малому x, сохраняя y конечным. Мы разлагаем $q(x)$, подставляем $x = (xy/y^2)y + x_\perp$ (с $x_\perp^2 = \Delta/y^2$) и производим $(d-1)$–мерное усреднение (§1.2) по направлениям $x_\perp$, ортогональным y. Затем мы выражаем результат через базисные билокальные конденсаты (1.3.17), (1.3.19) и подставляем (1.3.17), (1.3.20). Окончательно мы получаем результат

$$\begin{aligned}
f_S(x,y) =& f_S(y^2) - 2(xy)f_S'(y^2) + \frac{Q^5\Delta}{4(d-1)Q^3y^2}f_1(y^2)\\
&- \frac{x^2y^2 - d(xy)^2}{(d-1)y^2}\left(f_S'(y^2) + 2y^2 f_S''(y^2)\right) - \frac{m^2\Delta}{2(d-1)y^2}f_S(y^2) + O(x^3)\\
=& f_S((y-x)^2)\\
&+ \frac{\Delta}{(d-1)y^2}\left[\frac{1}{4}\frac{Q^5}{Q^3}f_1(y^2) - df_S'(y^2) - 2y^2 f_S''(y^2) - \frac{m^2}{2}f_S(y^2) + O(x)\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_T(x,y) =& 4d\frac{Q^3}{Q^5}\Bigg\{ f_S'(y^2) + \frac{m}{2d} f_V(y^2) \qquad (1.3.22)\\
& - \frac{xy}{y^2}\left[-\frac{1}{4d}\frac{Q^5}{Q^3} f_2(y^2) + f_S'(y^2) + 2y^2 f_S''(y^2) + \frac{m}{2d}\left(f_V(y^2) + 2y^2 f_V'(y^2)\right)\right]\Bigg\}\\
& + O(x^2)\,,\\
g(y,x) =& 3Q^6\left(f_4(y^2) - f_3(y^2)\right) + 6Q^3\left[2(d+2) f_V'(y^2) + 4y^2 f_V''(y^2) + m^2 f_V(y^2)\right] + O(x)\,,\\
g(x,y) =& \frac{12Q^3}{y^2}\left(d f_V(y^2) + 2y^2 f_V'(y^2) - dm f_S(y^2)\right) - \frac{3xy}{y^2}\Big\{ Q^6\left(f_4(y^2) - 2f_3(y^2)\right)\\
& + 2Q^3\left[6(d+2) f_V'(y^2) + 12y^2 f_V''(y^2) - 4dm f_S'(y^2) + m^2 f_V(y^2)\right]\Big\} + O(x^2)\,.
\end{aligned}
$$

Если y тоже мал, то мы подставляем разложения (1.3.2), (1.3.21) билокальных конденсатов по y^2 и получаем ряды, согласующиеся с (1.3.8), (1.3.9), (1.3.11). Это является сильной проверкой правильности результатов.

Разлагая неколлинеарный глюонный конденсат по x, мы получаем члены типа $<\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu}(y,0) O^{\mu\nu}(0)>$, где $G_{\mu\nu}(y,0) = gG^a_{\mu\nu}(y)E^{ab}(y,0)t^b$ и $O^{\mu\nu}(0)$ построен из $G_{\mu\nu}(0)$ и D_μ. Прямолинейное обобщение систематической процедуры классификации из §1.2 на случай таких билокальных конденсатов кажется невозможным. К счастью, нетрудно найти все базисные билокальные конденсаты вплоть до размерности 6. Два конденсата размерности 4 были введены выше:

$$
A(y^2) = <\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu}(y,0) G^{\mu\nu}(0)>\,, \quad B(y^2) = <\mathrm{Tr}\, G_{\lambda\mu}(y,0) G^{\lambda\nu}(0)> \frac{dy^\mu y_\nu}{y^2}\,. \qquad (1.3.23)
$$

Имеется один билокальный конденсат размерности 5:

$$
C(y^2) = <\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu}(y,0) J^\mu(0)> \frac{dy^\nu}{y^2}\,, \qquad (1.3.24)
$$

и пять конденсатов размерности 6:

$$
\begin{aligned}
F_1(y^2) &= i<\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu}(y,0) G^{\nu\lambda}(0) G_\lambda{}^\mu(0)>\,,\\
F_2(y^2) &= i<\mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu}(y,0) G^{\nu\rho}(0) G^{\sigma\mu}(0)> \frac{dy_\rho y_\sigma}{y^2}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3(y^2) &= i\!<\operatorname{Tr} G_{\mu\rho}(y,0) G_{\sigma\lambda}(0) G^{\lambda\mu}(0)\!>\frac{dy^\rho y^\sigma}{y^2} \\
&= i\!<\operatorname{Tr} G_{\rho\nu}(y,0) G^{\nu\lambda}(0) G_{\lambda\sigma}(0)\!>\frac{dy^\rho y^\sigma}{y^2}\,, \qquad (1.3.25)\\
F_4(y^2) &= <\operatorname{Tr} G_{\mu\nu}(y,0) D^\mu J^\nu(0)>\,,\\
F_5(y^2) &= <\operatorname{Tr} G_{\mu\rho}(y,0) D^\mu J_\sigma(0)>\frac{dy^\rho y^\sigma}{y^2}
\end{aligned}
$$

(эквивалентность двух определений $F_3(y^2)$ следует из C–симметрии). Разложения $A(y^2)$, $B(y^2)$ при малых y^2 (1.3.5) были выведены выше; остальные разложения имеют вид

$$
\begin{aligned}
C(y^2) &= G_2^6 + \frac{8G_5^8 - 3G_6^8 + 6G_7^8}{12(d+2)} y^2 + O(y^4)\,,\\
F_1(y^2) &= G_1^6 + \frac{-4G_{3-4}^8 + 4G_5^8 - G_6^8}{4d} y^2 + O(y^4)\,, \qquad (1.3.26)\\
F_2(y^2) &= G_1^6 + \frac{-G_{1-2}^8 - 4G_{3-4}^8 + 4G_5^8 - G_6^8}{4(d+2)} y^2 + O(y^4)\,,\\
F_3(y^2) &= G_1^6 + \frac{-3G_{3-4}^8 + 4G_5^8 - G_6^8}{2(d+2)} y^2 + O(y^4)\,,\\
F_4(y^2) &= G_2^6 + \frac{2G_5^8 - G_6^8 + G_7^8}{2d} y^2 + O(y^4)\,,\\
F_5(y^2) &= G_2^6 + \frac{-3G_6^8 + 2G_7^8}{4(d+2)} y^2 + O(y^4)\,.
\end{aligned}
$$

Теперь мы можем вывести разложения по билокальным глюонным конденсатам:

$$
\begin{aligned}
c_1 =& \frac{\Delta}{(d+1)(d-2)y^2}\Bigg[\frac{2(d-2)(-dF_1(y^2)+2F_3(y^2))+2F_2(y^2)}{d-3}\\
&- dF_4(y^2) + F_5(y^2) + C(y^2) + 2y^2 C'(y^2)\\
&- (d+2)(dA'(y^2) - 2B'(y^2)) - 2y^2(dA''(y^2) - 2B''(y^2)) + O(x)\Bigg]\,,\\
c_2 =& \frac{1}{(d+1)(d-2)}\Bigg[\frac{(d-5)(-dF_1(y^2)+2F_3(y^2))-(d-1)F_2(y^2)}{d-3}\\
&- dF_4(y^2) + F_5(y^2) + C(y^2) + 2y^2 C'(y^2) + d(d+1)\frac{A(y^2)-B(y^2)}{y^2}\\
&- dA'(y^2) + 2B'(y^2) - 2y^2(dA''(y^2) - 2B''(y^2)) + O(x)\Bigg]\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_3 =& \frac{1}{d-2}\Bigg\{\frac{xy}{y^2}\left(-C(y^2)+2d\frac{A(y^2)-B(y^2)}{y^2}+dA'(y^2)-4B'(y^2)\right) \\
&+\frac{1}{2(d+1)}\frac{x^2}{y^2}\Bigg[\frac{4d(d-1)F_1(y^2)-4F_2(y^2)-2(d+1)(2d-5)F_3(y^2)}{d-3} \\
&+2dF_4(y^2)-dF_5(y^2)-(d+2)(C(y^2)+2y^2C'(y^2)) \\
&-2d(d+1)\frac{A(y^2)-B(y^2)}{y^2}+2d(d+2)A'(y^2)-2(d^2+2d+2)B'(y^2) \\
&+4dy^2A''(y^2)-4(d+2)y^2B''(y^2)\Bigg] \\
&+\frac{1}{2(d+1)}\frac{(xy)^2}{y^4}\Bigg[-2d(3F_1(y^2)+2F_4(y^2))+(d+2)(-2F_2(y^2) \\
&+6F_3(y^2)+F_5(y^2)+3C(y^2)+6y^2C'(y^2))+8d(d+1)\frac{A(y^2)-B(y^2)}{y^2} \\
&-4d(3d+4)A'(y^2)+2(5d^2+10d+8)B'(y^2) \\
&-4d(d+3)y^2A''(y^2)+4(5d+8)y^2B''(y^2)\Bigg]+O(x^3)\Bigg\}, \\
c_4-c_5 =& \frac{1}{d-2}\Bigg[-C(y^2)-dA'(y^2)+\frac{xy}{y^2}\Big(F_2(y^2)+F_3(y^2) \\
&+C(y^2)+2y^2C'(y^2)+d(A'(y^2)+2y^2A''(y^2))\Big)+O(x^2)\Bigg], \\
c_4+c_5 =& \frac{1}{d-2}\Bigg\{C(y^2)-2d\frac{A(y^2)-B(y^2)}{y^2}-dA'(y^2)+4B'(y^2) \\
&+\frac{1}{d+1}\frac{xy}{y^2}\Bigg[\frac{2d(d-5)F_1(y^2)+(d^2-5)F_2(y^2)-(d^2+2d-23)F_3(y^2)}{d-3} \\
&+2dF_4(y^2)-2F_5(y^2)-(d+3)(C(y^2)+2y^2C'(y^2)) \\
&-4d(d+1)\frac{A(y^2)-B(y^2)}{y^2}+d(5d+7)A'(y^2)-4(d^2+2d+2)B'(y^2) \\
&+2d(d+3)y^2A''(y^2)-8(d+2)y^2B''(y^2)\Bigg]+O(x^2)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{1.3.27}
$$

$$c_6 = \frac{1}{(d+1)(d-2)} \left[\frac{(d-5)(dF_1(y^2) - (d-1)F_3(y^2)) + (d-1)F_2(y^2)}{d-3} \right.$$
$$\left. + dF_4(y^2) - (d-1)F_5(y^2) + d(A'(y^2) + 2y^2 A''(y^2)) + O(x) \right] .$$

Подставляя разложения (1.3.5), (1.3.26) билокальных глюонных конденсатов по y^2, мы получаем ряды, совместимые с (1.3.14); это является сильной проверкой правильности результатов.

1.4. Тяжелые кварки

Если масса кварка велика, то все корреляторы могут быть выражены через глюонные конденсаты. В частности, это верно для кварковых конденсатов (корреляторов с одним током):

$$Q_k = \sum_n c_{kn}(m) G_n \,. \tag{1.4.1}$$

Это разложение по $1/m$.

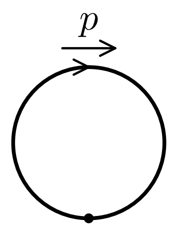


Рис. 1.4. Однопетлевая диаграмма для конденсата тяжелого кварка.

В однопетлевом приближении (Рис. 1.4) кварковые конденсаты даются формулой

$$Q_k = <\overline{q} O_k[D_\mu] q> = -i \int \left(\frac{dp}{2\pi}\right)_d < \operatorname{Tr} O_k[-ip_\mu - iA_\mu] S(p)> , \tag{1.4.2}$$

где A_μ дается (1.1.4). Мы используем $\overline{\mathrm{MS}}$ перенормировку:

$$\left(\frac{dp}{2\pi}\right)_d = \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi}\right)^\epsilon \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \,. \tag{1.4.3}$$

Мы подставляем кварковый пропагатор (1.1.4), (1.1.5) в (1.4.2) и усредняем подынтегральное выражение по направлениям p в d–мерном пространстве. Результат выражается через интегралы

$$I_n = \int \left(\frac{dp}{2\pi}\right)_d \frac{1}{(p^2-m^2)^n} = \frac{i(-1)^n(m^2)^{2-n}}{(4\pi)^2(n-1)!}\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} e^{\gamma\epsilon}\Gamma(n-2+\epsilon)\,. \tag{1.4.4}$$

Коэффициенты c_{kn} с $d_n \leq d_k$ содержат ультрафиолетовые расходимости:

$$c_{kn}^{\text{bare}} = m^{d_k-d_n}\left[\gamma_{kn}\left(\frac{1}{\epsilon} - \log\frac{m^2}{\mu^2}\right) + c'_{kn}\right]\,. \tag{1.4.5}$$

Мы определяем кварковый конденсат $Q_k(\mu)$, нормированный в точке μ, как сумму ряда (1.4.1), из которого удалены полюса $1/\epsilon$.

Мы получаем

$$\begin{aligned} Q^3 = &-\frac{1}{24\pi^2}\Bigg[-6m^3(L+1)N + \frac{1}{m}G^4 - \frac{1}{15m^3}(G_1^6 - 6G_2^6) \qquad (1.4.6a)\\ &+\frac{1}{210m^5}(19G_1^8+16G_2^8-20G_3^8-78G_4^8+84G_5^8-4G_6^8-18G_7^8) + O\left(\frac{1}{m^7}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^5 = &-\frac{1}{12\pi^2}\Bigg[3mLG^4 - \frac{1}{m}(G_1^6 - G_2^6) \qquad (1.4.6b)\\ &+\frac{1}{10m^3}(3G_1^8+2G_2^8-G_3^8-9G_4^8+9G_5^8-\frac{5}{4}G_6^8-G_7^8) + O\left(\frac{1}{m^5}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

$$Q^6 = -\frac{1}{12\pi^2}\left[LG_2^6 + \frac{1}{20m^2}(18G_5^8 - \tfrac{1}{2}G_6^8 - 4G_7^8) + O\left(\frac{1}{m^4}\right)\right], \tag{1.4.6c}$$

$$Q_1^7 = -\frac{1}{12\pi^2}\left[-3m^3(L+1)G^4 + \frac{1}{2m}G_1^8 + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right], \tag{1.4.6d}$$

$$Q_2^7 = \frac{1}{16\pi^2 m}(G_1^8 + G_2^8 - 4G_4^8) + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \tag{1.4.6e}$$

$$Q_3^7 = \frac{1}{4\pi^2}\left[-mLG_1^6 + \frac{1}{6m}\left(G_3^8 - G_4^8 + 2G_5^8 - \tfrac{1}{2}G_6^8\right) + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right], \tag{1.4.6f}$$

$$Q_4^7 = -\frac{1}{4\pi^2}\left[mLG_2^6 + \frac{1}{6m}\left(4G_5^8 - \tfrac{1}{2}G_6^8 - G_7^8\right) + O\left(\frac{1}{m^3}\right)\right], \tag{1.4.6g}$$

$$Q_1^8 = -\frac{1}{12\pi^2}\left[3m^4(L+\tfrac{3}{2})G^4 + L(G_1^8 - 2G_3^8 - 2G_4^8) + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right], \tag{1.4.6h}$$

$$Q_2^8 = \frac{1}{24\pi^2}\left[12m^2(L+1)G_1^6 - L(G_1^8 - G_2^8 - 2G_3^8 + 2G_4^8 - 4G_5^8 + G_6^8) + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right], \tag{1.4.6i}$$

$$Q_3^8 = -\frac{L}{12\pi^2}G_6^8 + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{1.4.6j}$$

$$Q_4^8 = -\frac{L}{12\pi^2}G_7^8 + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{1.4.6k}$$

$$Q_5^8 = \frac{L}{6\pi^2}G_5^8 + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{1.4.6l}$$

$$Q_6^8 = 0 + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{1.4.6m}$$

где $L = \log\frac{\mu^2}{m^2}$. Как мы уже упоминали, ряд (1.4.1) для аномального конденсата A содержит только глюонные конденсаты с $d = 8$:

$$A = -\frac{1}{32\pi^2}(G_1^8 + G_2^8 - 4G_4^8)\,. \tag{1.4.7}$$

Многие результаты (1.4.6), (1.4.7) могут быть получены из простых независимых соображений. При вычислении вклада $d = 8$ в $<\overline{q}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}q>$ (1.4.6d), выделяются те же члены $S(p)$, что и при вычислении вклада $d = 4$ в $<\overline{q}q>$ (1.4.6a). Поэтому можно легко получить (1.4.6d), вставив $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ под знак Tr в (1.4.6a). Аналогично, при вычислении вкладов $d = 8$ в $<\overline{q}G_{\mu\lambda}G^{\lambda}{}_{\nu}\sigma^{\mu\nu}q>$ (1.4.6f) и $i<\overline{q}D_\mu J_\nu\sigma^{\mu\nu}q>$ (1.4.6g), выделяются те же члены $S(p)$, что и при вычислении вклада $d = 6$ в $i<\overline{q}G_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}q>$ (1.4.6b), но эти члены умножаются на $\frac{1}{2}[G_{\mu\lambda}, G^{\lambda}{}_{\nu}]$ или $\frac{i}{2}(D_\mu J_\nu - D_\nu J_\mu)$ вместо $iG_{\mu\nu}$, соответственно. Поэтому (1.4.6f) и (1.4.6g) могут быть получены из (1.4.6b) соответствующей подстановкой. Это предписание однозначно, поскольку все $G_{\mu\nu}$ входят в член $d = 6$ в (1.4.6b) равноправно. Наконец, при вычислении вкладов $d = 8$ в $i<\overline{q}[\hat{D}G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}]q>$ (1.4.6j), $<\overline{q}D^2\hat{J}q>$ (1.4.6k) и $i<\overline{q}[G_{\mu\nu}, J^\mu]\gamma^\nu q>$ (1.4.6l) выделяются те же члены $S(p)$, что и при вычислении вклада $d = 6$ в $<\overline{q}\hat{J}q>$ (1.4.6c), но эти члены умножаются на $i[D_\lambda G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}]$, $D^2 J_\lambda$ или $i[G_{\mu\lambda}, J^\mu]$ вместо J_λ, соответственно. Это позволяет легко получить (1.4.6j), (1.4.6k) и (1.4.6l) из (1.4.6c). В случае вклада $d = 8$ в $i<\overline{q}[\widetilde{G}_{\mu\nu}, J^\mu]\gamma^\nu\gamma_5 q>$ (1.4.6m), не существует глюонного аксиального оператора размерности 3, на который можно было бы умножить $i[\widetilde{G}_{\mu\nu}, J^\mu]$ ($D^\nu\widetilde{G}_{\mu\nu} = 0$, в отличие от векторного оператора $J_\mu = D^\nu G_{\mu\nu}$).

Формулу (1.4.6e) для $i{<}\overline{q}G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu}\gamma_5 q{>}$ можно вывести из выражения для аксиальной аномалии:

$$<\partial_\lambda\left(\overline{q}G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu}\gamma^\lambda\gamma_5 q\right)> = <\overline{q}\partial_\lambda(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu})\gamma^\lambda\gamma_5 q> + <(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu})^{ab}\partial_\lambda(\overline{q}^a\gamma^\lambda\gamma_5 q^b)>$$
$$= 2im<\overline{q}G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu}\gamma_5 q> + \frac{1}{8\pi^2}<\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu})^2> = 0\,.$$

Второе равенство выполняется с точностью $1/m^2$, потому что не существует аксиального глюонного оператора размерности 3, на который можно было бы умножить $\partial_\lambda(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu})$. С учетом $<\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu})^2> = -G_1^8 - G_2^8 + 4G_4^8$, мы получаем (1.4.6e). Далее, нетрудно убедиться, что

$$mQ_2^7 = -2A + <\overline{q}[D^\mu, [G_{\mu\lambda}, \widetilde{G}^{\lambda\nu}]_+]\gamma_\nu\gamma_5 q>\,,$$

где последний член равен нулю с требуемой точностью по той же причине, и мы легко получаем (1.4.7).

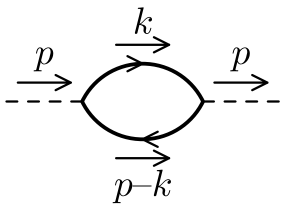


Рис. 1.5. Однопетлевая диаграмма для коррелятора.

Корреляторы двух токов тяжелых кварков могут быть выражены через глюонные конденсаты:

$$\Pi(p) = \sum_n a_n(p^2, m)G_n\,. \tag{1.4.8}$$

Однопетлевая диаграмма (Рис. 1.5) содержит два пропагатора типа (1.1.4), (1.1.5) (не забывайте, что у одного из них сток вакуумных импульсов находится с другой стороны, и он дается формулами, зеркально симметричными к (1.1.4), (1.1.5)!). После дифференцирования мы получаем формулу, содержащую интегралы

$$\int\left(\frac{dk}{2\pi}\right)_d \frac{P(k)}{(k^2-m^2)^n((k-p)^2-m^2)^m}\,. \tag{1.4.9}$$

После объединения знаменателей по формуле Фейнмана и усреднения числителя по направлениям, интегралы сводятся к виду (1.4.4) с $m^2 \to m^2 - x(1-x)p^2$. Остаются одномерные интегралы по Фейнмановскому параметру x вида [**33**]

$$\begin{aligned} J_n(\xi) &= \int\limits_0^1 \frac{dx}{[1+\xi x(1-x)]^n} \qquad (1.4.10) \\ &= \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\left[\left(\frac{a-1}{2a}\right)^n \sqrt{a}\log\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{(2k-1)!!}\left(\frac{a-1}{2a}\right)^{n-k}\right], \end{aligned}$$

где $\xi = -p^2/m^2$, $a = 1 + 4/\xi$. Используя эти формулы, можно вычислить любой коррелятор токов тяжелых кварков через глюонные конденсаты. Простейший пример $d = 4$ рассмотрен в [**37**]; вклады с $d = 6$ и $d = 8$ вычислены в [**33**].

Разложение (1.4.6a) может быть получено из результатов [**33**] для скалярного и псевдоскалярного корреляторов при $p^2 = 0$:

$$\begin{aligned} &\Pi_P(0) = -i\,\mathrm{Tr} < \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m}\gamma_5\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m}\gamma_5 > = \frac{i}{m}\,\mathrm{Tr} < \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m} > , \\ &\Pi_S(0) = i\,\mathrm{Tr} < \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m}\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m} > = i\frac{d}{dm}\,\mathrm{Tr} < \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m} > , \qquad (1.4.11) \\ &<\bar{q}q> = -i\,\mathrm{Tr} < \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m} - \frac{1}{\hat{p}-m} > = -m\left(\Pi_P(0) - \Pi_P^0(0)\right) = \int\limits_m^\infty dm\left(\Pi_S(0) - \Pi_S^0(0)\right), \end{aligned}$$

где $\Pi^0_{P,S}$ — свободные поляризационные операторы.

1.5. Легкие кварки

Рассмотрим тяжелокварковый коррелятор (1.4.8) (Рис. 1.5) при $p^2 \gg m^2$. Мы можем выразить его через глюонные и кварковые конденсаты:

$$\Pi(p) = \Pi_G(p) + \Pi_Q(p)\,, \quad \Pi_G(p) = \sum_n a'_n(p^2,m)G_n\,, \quad \Pi_Q(p) = \sum_k b_k(p^2,m)Q_k\,. \qquad (1.5.1)$$

Здесь $\Pi_G(p)$ соответствует вкладу области, где виртуальности кварка и антикварка на Рис. 1.5 велики ($k^2 \sim p^2$), а $\Pi_Q(p)$ соответствует вкладу областей, где либо кварк, либо антикварк имеет маленькую виртуальность ($k^2 \sim m^2$). Эти вклады принято изображать диаграммами Рис. 1.6.

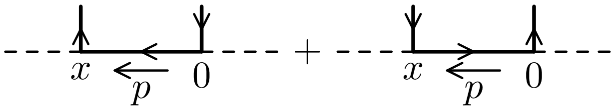


Рис. 1.6. Вклад кварковых конденсатов в коррелятор.

Вклад кварковых конденсатов (Рис. 1.6) в координатном представлении имеет вид

$$\Pi_Q(x) = <\overline{q}(x)\Gamma S(x,0)\Gamma q(0)> + \text{c.c.}\,, \tag{1.5.2}$$

где Γ — некоторая γ матрица, а с.с. означает зарядово–сопряженное выражение. В импульсном представлении

$$\Pi_Q(p) = <\overline{q}\exp(-i\overleftarrow{D}_\alpha\partial^\alpha)\Gamma S(p)\Gamma q> + \text{c.c.} \tag{1.5.3}$$

Мы подставляем $S(p)$ (1.1.4), (1.1.5) и усредняем по направлениям p, и наконец выражаем (1.5.3) через базисные кварковые конденсаты, следуя §1.2. Вклад A не включается, поскольку этот конденсат глюонный.

Получив $\Pi_Q(p)$, мы можем найти $\Pi_G(p)$ из тяжелокваркового коррелятора $\Pi(p)$, используя разложения (1.4.6):

$$\Pi_G(p) = \sum_n a'_n(p^2,m)G_n = \Pi(p)|_G - \Pi_Q(p)|_G = \sum_n a_n(p^2,m)G_n - \sum_{k,n} b_k(p^2,m)c_{kn}(m)G_n\,. \tag{1.5.4}$$

Коэффициенты $a_n(p^2,m)$ имеют сингулярности при $m \to 0$ возникающие из областей $k^2 \sim m^2$. Эти сингулярности должны сократиться в (1.5.4), давая $a'_n(p^2,m)$, конечные при $m \to 0$.

Рассмотрим, например, коррелятор векторных токов $j_\mu = \overline{q}\gamma_\mu q$:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = i\int dx e^{ipx} <Tj_\mu(x)j^+_\nu(0)> = (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})\Pi(p^2)\,. \tag{1.5.5}$$

Для вклада кварковых конденсатов (Рис. 1.6) мы получаем

$$\begin{aligned}\Pi_Q(p^2) =& \frac{1}{p^4}2mQ^3 + \frac{4}{9p^6}\left[Q^6 + 6m^3Q^3\right] + \frac{1}{18p^8}\Big[4Q_1^8 + 2Q_2^8 - Q_3^8 + 2Q_4^8 + 4Q_5^8 \\ &+ 4m\left(7Q_1^7 + 6Q_2^7 + Q_3^7 + Q_4^7\right) - 12m^2Q^6 - 12m^3Q^5 + 108m^5Q^3\Big]\,.\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Подставляя разложения (1.4.6) в (1.5.6), мы получаем $\Pi_Q(p^2)|_G$ для тяжелого кварка при $-p^2 \gg m^2$ через глюонные конденсаты. Оно содержит массовые сингулярности при $m \to 0$, которые совпадают с массовыми сингулярностями $\Pi(p^2)|_G$ из [**33**] при $-p^2 \gg m^2$. Члены размерностей 6 и 8 в (1.4.6a) отвечают за массовые сингулярности $1/(m^2p^4)$ и $1/(m^4p^4)$ в $\Pi_Q(p^2)|_G$, соответственно. Это позволяет проверить их правильность. Коэффициент при Q^5 в корреляторе векторных токов обращается в ноль при $m \to 0$. Поэтому коэффициент при $1/(m^2p^6)$ в $\Pi_Q(p^2)|_G$ определяется только уже проверенным членом размерности 8 в (1.4.6a) и членом размерности 8 в (1.4.6c), что позволяет проверить этот член. Как и следовало ожидать, он содержит только конденсаты G^8_{5-7} с током J_μ. Нетрудно получить формулы, аналогичные (1.5.6), для корреляторов скалярных и псевдоскалярных токов с точностью $1/p^6$. Сравнивая коэффициенты при $1/(m^2p^4)$ и $1/(m^4p^4)$ в них с соответствующими формулами из [**33**], мы получаем еще две независимых проверки члена размерности 8 в (1.4.6a). Сравнение коэффициентов при $1/(m^2p^6)$ позволяет получить две независимых проверки членов размерности 8 в (1.4.6b), с учетом того, что выражения (1.4.6a) и (1.4.6c) уже проверены.

Вклад глюонных конденсатов (1.5.4) равен

$$
\begin{aligned}
\Pi_G(p^2) = &- \frac{(3L-5)N}{36\pi^2} + \frac{Nm^2}{2\pi^2p^2} + \frac{G^4 + 6(2L-1)Nm^4}{24\pi^2p^4} \\
&- \frac{(6L-1)G_2^6 + 9m^2G^4 - 36(3L-5)Nm^6}{162\pi^2p^6} \\
&+ \frac{1}{2592\pi^2p^8}\big[-(60L-143)G_1^8 + (12L-31)G_2^8 + 2(60L-31)G_3^8 \\
&\quad + 18(4L-5)G_4^8 + 36(4L-5)G_5^8 + 12G_6^8 - 2(12L-7)G_7^8 \\
&\quad - 24m^2(15G_1^6 + 4G_2^6) + 144(9L-22)m^4G^4 + 324(12L-23)Nm^8\big] ,
\end{aligned}
\tag{1.5.7}
$$

где $L = \log(-p^2)/\mu^2$. Заметим, что вклады глюонных конденсатов, содержащих ток J_μ, того же порядка, что и неучтенные радиационные поправки к вкладам соответствующих кварковых конденсатов, и должны быть опущены.

Полученные выражения могут быть проверены путем сравнения с результатами для коррелятора во внешних полях. Так, в любом (анти–) самодуальном поле все члены $1/p^{2k}$ с $k \neq 2$ в $\Pi(p^2)$ при $m = 0$ обращаются в ноль [**43**]. Член $1/p^6$, очевидно, удовлетворяет этой теореме (в этом состоит причина отсутствия в нем G_1^6). Нам удалось доказать соотношения между конденсатами размерности 8, справедливые для любого (анти-) самодуального поля, из которых вытекает сокращение членов $1/p^8$.

В обозначениях пространства Минковского, самодуальное (антисамодуальное) поле определяется условием $\widetilde{G}_{\mu\nu} = \mp i G_{\mu\nu}$. Конденсаты, содержащие ток J_μ, равны нулю в таких полях. Мы используем глюонные конденсаты в древесном приближении, и поэтому можем заменить а них операторы $G_{\mu\nu}$ на внешнее поле. Заменяя в (1.2.18) четное число $G_{\mu\nu}$ на $i\widetilde{G}_{\mu\nu}$ и выражая $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ через произведения $g_{\mu_i\nu_j}$, мы получаем соотношения между глюонными конденсатами. Для $d = 8$ они имеют вид

$$G_3^8 = \tfrac{1}{2} G_1^8 - \tfrac{1}{4} G_2^8 \,, \quad G_4^8 = \tfrac{1}{4} G_2^8 \,. \tag{1.5.8}$$

Нам нужны кварковые конденсаты в однопетлевом приближении, перенормированные в схеме $\overline{\text{MS}}$. Вычтем и прибавим вклад глюонных операторов размерностей $d_G \le d$ в разложении кваркового оператора Q_k. Разность не содержит ультрафиолетовых расходимостей, и может быть вычислена в четырехмерном пространстве. Тогда

$$Q_k = Q_k^{d=4} + \Delta Q_k \,, \quad \Delta Q_k = Q_k|_{d_G \le d} - Q_k^{d=4}|_{d_G \le d} \,,$$

где $Q_k^{d=4}$ можно вычислять, например, с использованием калибровочно–инвариантной раздвижки. В калибровке фиксированной точки с центром y,

$$Q_k^{d=4} = -i < \operatorname{Tr} O_k S(x,y) >_{x \to y} .$$

Кварковый пропагатор $S(x,y)$ в самодуальном поле можно выразить через пропагатор скалярной частицы [**44**]:

$$\begin{aligned} S(x,y) = &- \frac{1}{m} \left[\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \delta(x-y) + \overrightarrow{\hat{\mathcal{P}}}_{(x)} \Delta_\pm(x,y) \overleftarrow{\hat{\mathcal{P}}}_{(y)} \right] \\ &+ \overrightarrow{\hat{\mathcal{P}}}_{(x)} \Delta_\pm(x,y) - \Delta_\pm(x,y) \overleftarrow{\hat{\mathcal{P}}}_{(y)} + m \Delta_\pm(x,y) \,, \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

где $\Delta_\pm(x,y) = \Delta(x,y) \frac{1\pm\gamma_5}{2}$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{(x)\mu} = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + A_\mu(x)$, $\overleftarrow{\mathcal{P}}_{(y)\mu} = i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\mu} - A_\mu(y)$. Член $1/m$ связан с нулевыми модами в этом поле. Пропагатор безмассовой скалярной частицы при $\delta = x - y \to 0$ в калибровке фиксированной точки с центром y имеет вид [**43**]

$$\Delta(x,y) = \frac{i}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\delta^2} + S(y) + V_\mu(y) \delta^\mu + T_{\mu\nu}(y) \delta^\mu \delta^\nu + \frac{\delta^2}{128} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + O(\delta^3) \right] \,, \tag{1.5.10}$$

где $T^{\mu}_{\mu}(y)=0$ (коэффициент при δ^2 отличается от [**43**]). Зависимость S, V_μ и $T_{\mu\nu}$ от y определяется физикой больших расстояний — нелокальными свойствами внешнего поля. Для получения $S(x,y)$ по формуле (1.5.9) необходимо дифференцировать как по x, так и по y. Поэтому нам необходимо выражение для $\Delta(x,y)$ в калибровке фиксированной точки с центром в некоторой точке z, не зависящей от x и y. Это выражение отличается от (1.5.10) умножением на $P\exp i\int_x^z d\xi^\mu A_\mu(\xi)$ слева (здесь A_μ берется в калибровке с центром y). Подставляя полученный скалярный пропагатор в (1.5.9), дифференцируя по y и затем полагая $z=y$, мы получаем кварковый пропагатор $S(x,y)$ в калибровке с центром y. Отбрасывая полные производные, которые обращаются в ноль при усреднении по направлениям y, а также члены $1/\delta^2$, которые сократятся с такими же членами в ΔQ_k, мы получаем выражения для кварковых конденсатов:

$$
\begin{aligned}
&Q^3=-\frac{G^4}{16\pi^2 m}\,,\quad Q^5=\frac{G_1^6}{12\pi^2 m}-\frac{<\operatorname{Tr}SG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}>}{\pi^2 m}\,,\\
&Q_1^7=-\frac{G_1^8}{16\pi^2 m}-\frac{<\operatorname{Tr}V^\lambda[D_\lambda G_{\mu\nu},G^{\mu\nu}]_+>}{2\pi^2 m}\,,\quad Q_2^7=-Q_1^7\,,\\
&Q_3^7=\frac{G_1^8-G_2^8}{48\pi^2 m}-\frac{i<\operatorname{Tr}SG_{\lambda\mu}G^{\mu\nu}G_\nu{}^\lambda>}{\pi^2 m}-\frac{<\operatorname{Tr}V^\lambda[D_\lambda G_{\mu\nu},G^{\mu\nu}]>}{2\pi^2 m}\,,\\
&Q_1^8=-mQ_1^7+\Delta Q_1^8\,,\\
&Q_2^8=-\frac{7\left(G_1^8-G_2^8\right)}{48\pi^2}+\frac{2i<\operatorname{Tr}SG_{\lambda\mu}G^{\mu\nu}G_\nu{}^\lambda>}{\pi^2}+\frac{<\operatorname{Tr}V^\lambda[D_\lambda G_{\mu\nu},G^{\mu\nu}]>}{2\pi^2}+\Delta Q_2^8\,,\\
&Q_3^8=-\frac{<\operatorname{Tr}V^\lambda[D_\lambda G_{\mu\nu},G^{\mu\nu}]>}{\pi^2}+\Delta Q_3^8\,.
\end{aligned}
\tag{1.5.11}
$$

Здесь ΔQ_k могут быть представлены в виде

$$\Delta Q_k=\left(\lim_{\epsilon\to0}\lim_{\delta\to0}-\lim_{\delta\to0}\lim_{\epsilon\to0}\right)(-i)\int\left(\frac{dp}{2\pi}\right)_d e^{-ip\delta}<\operatorname{Tr}O_kS(p)>_{d_G\le d_Q}\,.$$

Здесь роль членов с $d_G<d_Q$ состоит только в сокращении членов $1/\delta^2$; члены с $d_G=d$ дают

$$<\operatorname{Tr}O_kS(p)>_{d_G=d_Q}=\frac{1}{(p^2-m^2)^2}\sum_n(c'_n+c''_n\epsilon)G_n\,,$$

$$\Delta Q_k=\left(\lim_{\epsilon\to0}\lim_{\delta\to0}-\lim_{\delta\to0}\lim_{\epsilon\to0}\right)I(\epsilon,\delta)\sum_n(c'_n+c''_n\epsilon)G_n\,,\quad I(\epsilon,\delta)=-i\int\left(\frac{dp}{2\pi}\right)_d\frac{e^{-ip\delta}}{(p^2-m^2)^2}\,.$$

Ясно, что отсутствие логарифмических сингулярностей при $\delta \to 0$ в (1.5.10) приводит к отсутствию расходимостей в конденсатах Q_k при $m = 0$. В соответствии с этим, все коэффициенты при $m^0 \log \frac{\mu^2}{m^2}$ в разложениях (1.4.6) обращаются в ноль в силу $J_\mu = 0$ и (1.5.8). Тогда $\sum_n c'_n G_n = 0$, и

$$\Delta Q_k = \lim_{\epsilon \to 0} I(\epsilon, 0)\epsilon \sum_n c''_n G_n = \frac{1}{16\pi^2} \sum_n c''_n G_n \,.$$

Для получения c''_n необходимо знать $O_n S(p)|_{d_G = d_Q}$ с точностью до членов порядка ϵ. Мы получаем

$$\Delta Q_1^8 = -\frac{G_1^8}{24\pi^2}\,, \quad \Delta Q_2^8 = \frac{7\left(G_1^8 - G_2^8\right)}{48\pi^2}\,, \quad \Delta Q_3^8 = 0 \tag{1.5.12}$$

(последнее — потому, что в самодуальном поле не существует ненулевого глюонного оператора размерности 3).

Исключая неизвестные вклады больших расстояний из (1.5.11), мы получаем общие соотношения для кварковых конденсатов в самодуальных полях

$$Q^3 = -\frac{G^4}{16\pi^2 m}, \quad Q_2^7 = -Q_1^7\,, \quad Q_1^8 = -\frac{G_1^8}{24\pi^2} - mQ_1^7\,, \quad Q_2^8 = \frac{G_1^8 - G_2^8}{24\pi^2} + \tfrac{1}{2}Q_3^8 - 2mQ_3^7\,. \tag{1.5.13}$$

Первое соотношение в (1.5.13) было получено в [**43**] из условия поперечности коррелятора векторных токов. Используя (1.5.8) и (1.5.13), легко проверить, что $1/p^8$ вклад в $\Pi(p^2)$ действительно обращается в ноль в самодуальных полях.

В частности, в поле инстантона

$$\begin{aligned}
S(y) &= \frac{\rho^2}{2\left[\rho^2 + (y - x_0)^2\right]^2}\,, \\
V_\mu(y) &= \frac{\rho^2}{\left[\rho^2 + (y - x_0)^2\right]^3}\left[(y - x_0)_\mu + \tfrac{i}{3}\eta^{\pm}_{\mu\nu a}(y - x_0)^\nu \tau_a\right]\,, \\
T_{\mu\nu}(y) &= 0\,,
\end{aligned} \tag{1.5.14}$$

где x_0 — центр инстантона. Конденсаты в модели инстантонного газа равны

$$
\begin{aligned}
&G^4 = 32\pi^2 <\rho^{-4}>\,, \quad mQ^3 = -2 <\rho^{-4}>\,, \quad G^6_1 = -\tfrac{192}{5}\pi^2 <\rho^{-6}>\,, \quad mQ^5 = -8 <\rho^{-6}>\,,\\
&G^8_1 = \tfrac{1536}{7}\pi^2 <\rho^{-8}>\,, \quad G^8_2 = -\tfrac{512}{7}\pi^2 <\rho^{-8}>\,, \quad G^8_3 = 128\pi^2 <\rho^{-8}>\,, \quad G^8_4 = -\tfrac{128}{7}\pi^2 <\rho^{-8}>\,,\\
&mQ^7_1 = -mQ^7_2 = -\tfrac{32}{5} <\rho^{-8}>\,, \quad mQ^7_3 = \tfrac{64}{5} <\rho^{-8}>\,, \qquad (1.5.15)\\
&Q^8_1 = -\tfrac{96}{35} <\rho^{-8}>\,, \quad Q^8_2 = -\tfrac{1664}{105} <\rho^{-8}>\,, \quad Q^8_3 = -\tfrac{512}{105} <\rho^{-8}>\,,
\end{aligned}
$$

где $<\rho^{-n}> = \int \frac{d\rho}{\rho}\frac{D(\rho)}{\rho^n}$, $D(\rho)$ — инстантонная плотность.

Другой класс внешних полей, для которых корреляторы кварковых токов вычислены без разложения по полю — это ковариантно–постоянные поля [**45**], определяемые соотношением $D_\lambda G_{\mu\nu} = 0$. Конденсаты, содержащие ток J_μ, обращаются в ноль в таких полях. Глюонные конденсаты размерностей $d \le 8$ равны [**45**]

$$
G^4 = 2\,\mathrm{Tr}\left(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2\right)\,, \quad G^8_1 = G^8_2 = 4\,\mathrm{Tr}\left(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2\right)^2\,, \quad G^8_3 = G^8_4 = 2\,\mathrm{Tr}\left(\mathcal{E}^4 + \mathcal{H}^4\right)\,, \qquad (1.5.16)
$$

где цветовые матрицы $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ определяются из уравнений $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = 2\left(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2\right)$, $\left(G_{\mu\nu}\widetilde{G}^{\mu\nu}\right)^2 = -16\mathcal{E}^2\mathcal{H}^2$. Кварковые конденсаты вычисляются из пропагатора в ковариантно–постоянном поле [**45**]:

$$
\begin{aligned}
&Q^3 = Nm^3\frac{L+1}{4\pi^2} - \frac{m}{4\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,I_0\,, \quad Q^5 = -m\frac{L}{4\pi^2} - \frac{m}{2\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,I_1\,,\\
&Q^7_1 = m^3\frac{L+1}{4\pi^2}G^4 - \frac{m}{2\pi^2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\mathcal{E}^2+\mathcal{H}^2\right)I_0\right]\,, \quad Q^7_2 = \frac{1}{8\pi^2 m}\left(G^8_1 - 2G^8_3\right)\,, \qquad (1.5.17)\\
&Q^8_1 = -mQ^7_1 - \frac{m^4}{8\pi^2}G^4 - \frac{L+\frac{1}{2}}{12\pi^2}G^8_1 - \frac{L}{3\pi^2}G^8_3 - \frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\mathcal{E}^2-\mathcal{H}^2\right)I_2\right]\,,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&I_0 = \int\limits_0^\infty ds\, e^{-sm^2}\left(\mathcal{E}\mathcal{H}\coth\mathcal{E}s\,\coth\mathcal{H}s - \frac{1}{s^2}\right)\,,\\
&I_1 = \int\limits_0^\infty ds\, e^{-sm^2}\left(\mathcal{E}^2\mathcal{H}\coth\mathcal{H}s + \mathcal{E}\mathcal{H}^2\coth\mathcal{E}s - \frac{\mathcal{E}^2+\mathcal{H}^2}{s}\right)\,, \qquad (1.5.18)\\
&I_2 = \int\limits_0^\infty ds\, e^{-sm^2}\left(\mathcal{E}^2\mathcal{H}\frac{\coth\mathcal{H}s}{\sinh^2\mathcal{E}s} - \mathcal{E}\mathcal{H}^2\frac{\coth\mathcal{E}s}{\sinh^2\mathcal{H}s} + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}^2-\mathcal{H}^2}{s}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Формулы (1.5.17) нетрудно разложить по $1/m$ до операторов размерности 8; и общие разложения (1.4.6) сводятся к этим рядам в рассматриваемом случае. Формулы (1.5.6), (1.5.7) для $\Pi(p^2)$ сводятся к разложению точного выражения для коррелятора векторных токов [**45**].

В частном случае $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ поле является самодуальным. Выражения для конденсатов при этом согласуются с (1.5.8), (1.5.13) при $S(y) = -\mathcal{H}/4$, $V_\mu(y) = 0$, $T_{\mu\nu}(y) = 0$:

$$\begin{gathered} G^4 = 4\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^2\,, \quad G_1^8 = G_2^8 = 4G_3^8 = 4G_4^8 = 16\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^4\,, \\ Q^3 = -\frac{\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^2}{4\pi^2 m}\,, \quad Q^5 = 0\,, \quad Q_1^7 = -Q_2^7 = -\frac{\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^4}{\pi^2 m}\,, \quad Q_1^8 = \frac{\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^4}{3\pi^2}\,. \end{gathered} \tag{1.5.19}$$

Вышеописанный метод хорош, когда тяжелокварковый коррелятор уже известен. Но если мы хотим вычислить легкокварковый коррелятор с самого начала, то должен существовать более простой путь, чем решать сначала более трудную тяжелокварковую задачу. Такой метод был предложен и использован в [**34, 35**] для вычислений с $d = 8$.

Теперь мы хотим перейти к пределу $m \to 0$ раньше, чем к $d \to 4$. Разность перенормированного и голого кваркового конденсата равна (см. (1.4.5))

$$Q_k - Q_k^{\text{bare}} = -\frac{1}{\epsilon}\sum_{d_n \le d_k} m^{d_k - d_n}\gamma_{kn} G_n \to -\frac{1}{\epsilon}\sum_{d_n = d_k}\gamma_{kn} G_n\,.$$

При $m = 0$ все петлевые интегралы для Q_k^{bare} обращаются в ноль, потому что не содержат масштаба (ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости взаимно сокращаются). Поэтому для глюонного вклада в коррелятор мы получаем (см. (1.5.4))

$$\Pi_G(p) = \Pi(p)|_G + \frac{1}{\epsilon}\sum_{d_n = d_k} b_k(p)\gamma_{kn} G_n\,.$$

Здесь $\Pi(p)|_G$ вычисляется в схеме $\overline{\text{MS}}$ с $m = 0$, а γ_{kn} — коэффициенты смешивания кварковых конденсатов Q_k с глюонными конденсатами G_n той же размерности (коэффициенты при L в (1.4.6)). Опуская $1/\epsilon$ полюса, мы получаем окончательно

$$\Pi_G(p) = \Pi(p)|_G + \sum_{d_n = d_k}\frac{d\,b_k}{d\epsilon}\gamma_{kn} G_n\,. \tag{1.5.20}$$

Коэффициентные функции кварковых конденсатов b_k должны вычисляться при $m = 0$ с точностью до членов, линейных по ϵ (с использованием d–мерной тензорной и γ–матричной алгебры, и в частности d–мерного усреднения, см. §1.2).

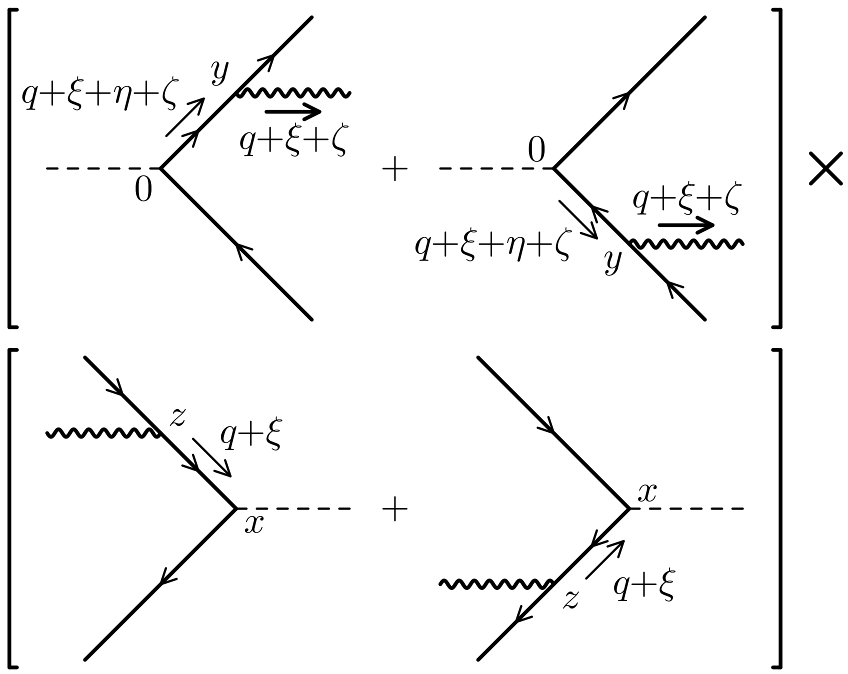


Рис. 1.7. Вклад четырехкварковых конденсатов в коррелятор.

В дополнение к рассмотренным выше, важную роль в правилах сумм играют четырехкварковые вклады (Рис. 1.7). С требуемой точностью, пропагаторы кварка и глюона в калибровке с центром 0 равны

$$S(y,x) = P\exp\left(i\int\limits_x^y A_\mu(z)dz_\mu\right) S(y-x)\left(1-\tfrac{i}{2}G_{\mu\nu}y_\mu x_\nu\right)\left(\frac{\hat{\Delta}}{2\pi^2\Delta^4}+\frac{\widetilde{G}_{\mu\nu}\gamma_\mu\Delta_\nu\gamma_5}{8\pi^2\Delta^2}\right), \tag{1.5.21}$$

$$D_{\mu\nu}(y,x) = P\exp\left(i\int\limits_x^y \mathcal{A}_\mu(z)dz_\mu\right) D_{\mu\nu}(y-x)\left(1-\tfrac{i}{2}\mathcal{G}_{\mu\nu}y_\mu x_\nu\right)\left(\frac{ig_{\mu\nu}}{4\pi^2\Delta^2}-\frac{\mathcal{G}_{\mu\nu}}{8\pi^2}\log(-\Delta^2)\right),$$

где $\Delta = y - x$, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}$ берутся в присоединенном представлении. Здесь трансляционно–неинвариантные части пропагаторов выделены в виде простых множителей. Теперь мы можем записать сумму диаграмм Рис. 1.7 в импульсном представлении как

$$\begin{aligned}\Pi(p^2) =& -\frac{1}{3p^2}\int \frac{d\xi}{(2\pi)^4}\frac{d\eta}{(2\pi)^4}\frac{d\zeta}{(2\pi)^4} dx\,dy\,dz\exp(i\xi x + i\eta y + i\zeta z)\\ &\Big\langle D^{ac}_{\nu\lambda}(p+\xi+\eta)\left(1 - \tfrac{i}{2}\mathcal{G}_{\alpha\beta} z_\alpha y_\beta\right)^{cb}\\ &\Big[\overline{q}\gamma_\mu S(p+\xi+\eta+\zeta)\gamma_\nu t^a q(z) + \overline{q}(z)\gamma_\nu t^a S(-p-\xi-\eta-\zeta)\gamma_\mu q\Big]\\ &\Big[\overline{q}(y)\gamma_\lambda t^b\left(1 - \tfrac{i}{2}G_{\rho\sigma} y_\rho x_\sigma\right) S(p+\xi)\gamma_\mu q(x)\\ &\quad + \overline{q}(x)\gamma_\mu S(-p-\xi)\left(1 - \tfrac{i}{2}G_{\rho\sigma} x_\rho y_\sigma\right)\gamma_\lambda t^b q(y)\Big]\Big\rangle\,,\end{aligned}$$

где для $q(x)$, $q(y)$, $q(z)$ используются разложения (1.1.3). Интегралы по x, y, z дают $\delta(\xi)$, $\delta(\eta)$, $\delta(\zeta)$ и их производные, после чего интегралы по ξ, η, ζ легко берутся. В результате мы получаем

$$\begin{aligned}\Pi(p^2) = &-\frac{1}{3p^2}\Big\langle D^{ac}_{\nu\lambda}(p+\xi+\eta)\left(1 + \tfrac{i}{2}\mathcal{G}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta_\beta}\right)^{cb}\\ &\Big[\overline{q}\gamma_\mu S(p+\xi+\eta+\zeta)\gamma_\nu t^a \exp\left(i\overrightarrow{D}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) q\\ &\quad + \overline{q}\exp\left(i\overleftarrow{D}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\gamma_\nu t^a S(-p-\xi-\eta-\zeta)\gamma_\mu q\Big]\\ &\Big[\overline{q}\exp\left(i\overleftarrow{D}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\gamma_\lambda t^b\left(1 + \tfrac{i}{2}G_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial\eta_\rho}\frac{\partial}{\partial\xi_\sigma}\right) S(p+\xi)\gamma_\mu \exp\left(i\overrightarrow{D}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) q\\ &\quad + \overline{q}\exp\left(i\overleftarrow{D}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\gamma_\mu S(-p-\xi)\left(1 + \tfrac{i}{2}G_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial\xi_\rho}\frac{\partial}{\partial\eta_\sigma}\right)\gamma_\lambda t^b \exp\left(i\overrightarrow{D}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) q\Big]\Big\rangle_{\xi=\eta=\zeta=0}\,.\end{aligned}\tag{1.5.22}$$

Здесь производные действуют на все пропагаторы, зависящие от соответствующей переменной, где бы они ни находились. Окончательно мы получаем

$$\begin{aligned}\Pi(p^2) =& \frac{2}{p^6}<\overline{q}t^a\gamma_\mu\gamma_5 q\cdot\overline{q}t^a\gamma_\mu\gamma_5 q> + \frac{1}{p^8}\Big[\tfrac{7}{9}<f^{abc}G^b_{\mu\nu}\overline{q}t^a\gamma_\mu\gamma_5 q\cdot\overline{q}t^c\gamma_\nu\gamma_5 q>\\ &+ \tfrac{8}{9}<\widetilde{G}^b_{\mu\nu}\left[\overline{q}t^a\gamma_\mu\gamma_5 q, \overline{q}(d^{abc}t^c + \delta^{ab}/N)\gamma_\nu q\right]_+> - \tfrac{5}{3}<\overline{q}t^a\gamma_\mu\gamma_5 q\cdot\left(D^2\right)^{ab}\overline{q}t^b\gamma_\mu\gamma_5 q>\\ &+ \tfrac{7}{9}<\overline{q}\left(t^a\overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu t^a\right)\gamma_\nu q\cdot\overline{q}\left(t^a\overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu t^a\right)\gamma_\nu q>\\ &+ \tfrac{1}{9}<\overline{q}\left(t^a\overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu t^a\right)\gamma_\nu q\cdot\overline{q}\left(t^a\overrightarrow{D}_\nu - \overleftarrow{D}_\nu t^a\right)\gamma_\mu q>\,.\end{aligned}\tag{1.5.23}$$

1.6. Ограничения на параметры КХД из $e^+e^- \to$ адроны$_{I=1}$

Извлечение параметров вакуума КХД (кваркового и глюонного конденсатов и т. д.) из экспериментальных данных представляет значительный интерес. Одним из методов, подходящих для этого, является использование Борелевских правил сумм, связывающих параметры КХД с интегралами от спектральных плотностей корреляторов различных токов. Только такие каналы, в которых спектральные плотности известны из эксперимента с высокой точностью в широком интервале энергий, а теоретическое описание имеет высокую контролируемую точность и слабую модельную зависимость, подходят для этой цели.

Экспериментально измеримы спектральные плотности электромагнитных (из $e^+e^- \to$ адроны) и слабых (из распадов τ) токов. Мы собираемся рассмотреть e^+e^- аннигиляцию в легкие адроны с $I = 1$, для которой доступны хорошие экспериментальные данные. В случае $I = 0$ точность измерений несколько ниже, а теоретическое описание содержит ряд дополнительных параметров (масса s кварка, отличие его конденсата от конденсатов u и d кварков и т. д.) Ограничения на параметры КХД, которые следуют из правил сумм для

$$A_n(M) = \frac{2}{3} \int\limits_0^\infty \frac{ds}{M^2} \left(\frac{s}{M^2}\right)^n e^{-s/M^2} R_{I=1}(s) \tag{1.6.1}$$

при $n = 0, 1$ были впервые рассмотрены в работе [**36**]. Позднее была предпринята попытка усилить эти ограничения [**46**]; мы покажем, что точность результатов, цитируемая в этой работе, сильно преувеличена.

Для определения области применимости правил сумм [**32, 36**], необходимо вычислить высшие степенные и радиационные поправки. С учетом коэффициентных функций, полученных в §1.5, правило сумм имеет вид

$$\begin{aligned} A_0 ={}& 1 + \frac{\alpha_s(M/\Lambda_B)}{\pi} + \frac{g}{M^4}\left(1 + c_g \frac{\alpha_s(M/\Lambda_{\overline{\text{MS}}})}{\pi} + K\frac{g}{M^4}\right) \\ & - \frac{q}{M^6}\left(1 + c_g \frac{\alpha_s(M/\Lambda_{\overline{\text{MS}}})}{\pi} + c_m \frac{m_0^2}{M^2}\right), \\ g ={}& \frac{\pi^2}{3} G\,, \quad q = \frac{448\pi^3}{81} Q\,, \quad G = \frac{\alpha_s}{\pi} <G^2>\,, \quad Q = \alpha_s <\overline{q}q>^2\,. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Здесь учтены пертурбативные поправки $c_g = \frac{7}{6}$ и $c_q = \frac{705}{112}$ [**47**]. Мы пренебрегаем слабой зависимостью Q от точки нормировки, считая ее порядка типичных M. В коэффициентной функции единичного оператора, мы используем стандартное двухпетлевое выражение для α_s с аргументом $\Lambda_B = e^{\gamma/2}\Lambda_{e^+e^-} = \exp\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{299}{108} - 2\zeta(3)\right)\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$, тогда двухпетлевая поправка отсутствует. Двухпетлевые поправки к коэффициентным функциям операторов размерностей 4 и 6 неизвестны, поэтому аргумент α_s в однопетлевых поправках определен только с точностью до множителя порядка единицы. Мы берем его равным $M/\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$; его изменение в несколько раз слабо влияет на результаты при не слишком больших значениях Λ. При выводе (1.6.2), мы пренебрегли всеми членами, пропорциональными токовым массам u и d кварков. Гипотеза факторизации использовалась для четырехкварковых конденсатов (включая билинейные кварковые конденсаты, содержащие J_μ). Их полный вклад дается членом с Q; из результатов §1.5 мы получили $c_m = \frac{103}{224}$.

Вклад остальных конденсатов размерности 8 представлен членом с K. Вклад чисто глюонных конденсатов G^8_{1-4} в приближении факторизации равен $(K_G)_{\mathrm{fac}} = \frac{19}{432}L + \frac{449}{5184}$; если отклонения от факторизованных значений $\left|G^8_n/\left(G^8_n\right)_{\mathrm{fac}} - 1\right| \le \alpha$, то $|K_G - (K_G)_{\mathrm{fac}}| \le |\frac{607}{1296}L - \frac{761}{5184}|\,\alpha$, где $L = \log\frac{M^2}{\mu^2} - \gamma \sim 1$. Применение гипотезы факторизации к вкладу K_Q билинейных кварковых конденсатов несколько проблематично. В качестве грубой оценки можно воспользоваться разложениями (1.4.6) этих конденсатов по $1/m$, если ограничиться в них глюонными конденсатами с $d = 8$, а уже для них использовать факторизацию. Тогда формулы для полного K будут иметь такой же вид, как для K_G, только с $L = \log\frac{M^2}{m^2} - \gamma$, где m — эффективная масса кварка. Отсюда видно, что если нарушение гипотезы факторизации относительно невелико (скажем, $\alpha < 50\%$), то при разумных значениях m величина $|K| < 1$. Гипотеза факторизации может быть справедлива, если типичные вакуумные флуктуации имеют длинноволновую природу, тогда как в коротковолновых моделях она может сильно нарушаться. Так, длинноволновая модель вакуума КХД [**45**] дает значения конденсатов, близкие к факторизованным. В этой модели (для безмассовых кварков) $K = \frac{2}{27}\left(\log\frac{M^4}{12g} + 1 - 2\gamma - 24\zeta'(-1)\right) \sim 0.3$. Интересно, что в поле инстантона, как и во всяком самодуальном поле, $K = 0$ (см. §1.5; при этом следует учесть и вклады конденсатов размерности 7, входящих с m в виде множителя). Поэтому в инстантонных моделях вакуума со слабым перекрытием инстантонов и антиинстантонов величина K также должна быть мала.

Для применимости правил сумм, поправки размерности 8 должны быть малы. При $|K| < 1$ соответствующий вклад не привносит дополнительных ограничений области применимости. Другой вклад содержит независимый параметр m_0^2. Для того, чтобы он был мал, M^2 должно быть велико по сравнению с $c_m m_0^2$. При стандартном значении $m_0^2 \approx 0.8\mathrm{GeV}^2$ этот вклад составляет не более 40% от $1/M^6$ вклада при $M > 0.95\mathrm{GeV}$. Это условие делает область применимости уже, чем это предполагалось в [**36, 46**]. При таком значении m_0^2 и $|K| < 1$, m_0^2 поправка много больше чем K поправка в широкой области параметров G и Q.

Таблица 1.1. Эксперименты по каналам $e^+e^- \to$ адроны$_{I=1}$.

Канал	Энергия, GeV	Детектор	Коллайдер	Число точек	Сист. ошибка
$\pi^+\pi^-$	0.36–0.82	КМД	ВЭПП-2М	24	2%
$\pi^+\pi^-$	0.40–0.82	ОЛЯ	ВЭПП-2М	27	4%
$\pi^+\pi^-$	0.82–1.4	ОЛЯ	ВЭПП-2М	52	4%
$\pi^+\pi^-$	0.4 –2.0	DM2	DCI	12	15%
4π	1.0 –1.4	НД	ВЭПП-2М	20	10%
$2\pi^+2\pi^-$	1.4 –2.0	DM2	DCI	30	20%
$\pi^+\pi^-2\pi^0$	1.4 –2.0	M3N	DCI	26	20%
$\pi^+\pi^-2\pi^0$	1.4 –2.0	$\gamma\gamma 2$	ADONE	13	20%
$3\pi^+3\pi^-$	1.4 –2.0	DM1	DCI	4	20%
$2\pi^+2\pi^-2\pi^0$	1.4 –2.0	M3N	DCI	30	20%
$2\pi^+2\pi^-2\pi^0$	1.4 –2.0	$\gamma\gamma 2$	ADONE	13	20%
$(K\overline{K})_{I=1}$	1.4 –2.0	векторная доминантность		точн. инт.	0
все	2.0 –∞	$\frac{3}{2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right)$		точн. инт.	0

Чтобы получить ограничения на параметры КХД, входящие в теоретическую часть правил сумм, мы требуем ее согласия с экспериментальной частью. Данные экспериментов [**48**], перечисленных в таблице 1.1, были использованы для ее определения. Канал

$\pi^+\pi^-4\pi^0$ не учитывался; имеются указания, что его сечение мало. Для канала $(K\overline{K})_{I=1}$ мы использовали приближение векторной доминантности. Его вклад невелик, и слабо влияет на результаты. В области $\sqrt{s} > 2$GeV мы использовали теоретическую формулу $R_{I=1}(s) = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\alpha_s(\sqrt{s}/\Lambda_{e^+e^-})}{\pi}\right)$, как и в [**36**]. Из этих данных мы вычислили экспериментальную часть правил сумм для A_0, A_1, $A_d = A_1 - A_0$ и $A_r = A_1/A_0$ (теоретическая часть для A_1 получается из (1.6.2) дифференцированием).

Интегралы (1.6.1) представлялись как суммы вкладов отдельных экспериментов. Каждый вклад вычислялся как сумма по экспериментальным точкам. Это приводит к некоторому завышению ошибок, поскольку не учитывается гладкость кривых для сечений. Систематические ошибки рассматривались двумя способами.

В первом способе полагается, что истинное значение R_i (в каждом канале i) находится между $R_i^{\pm} = \overline{R}_i \pm \Delta R_i$, если имеется экспериментальная точка $\overline{R}_i$ с систематической ошибкой ΔR_i. Такой способ применялся в [**36**]. Максимальное (минимальное) значение $A_{0,1}$ достигается тогда, когда все R_i равны R_i^+ (R_i^-). Максимальное значение A_d (A_r) достигается, когда R_i равны R_i^+ при $s > M^2$ ($s > A_r^+ M^2$) и R_i^- при $s < M^2$ ($s < A_r^+ M^2$), аналогично для минимума. Коридоры допустимых значений A_0, A_1 несколько отличаются от [**36**] (где не учитывались ошибки в важном канале $\pi^+\pi^-$ при $\sqrt{s} < 1.4$GeV). Коридор для A_r значительно отличается от [**46**].

Во втором подходе предполагается, что систематические ошибки разных экспериментов нескоррелированы, и потому они складываются квадратично. В этом случае удобно находить оптимальные теоретические параметры путем минимизации функционала

$$\int dM\, \rho(M) \left(A_{th}(M) - A_{\exp}(M)\right)^2 / \overline{\left(\Delta A_{\exp}\right)^2}\,, \tag{1.6.3}$$

где весовая функция $\rho(M)$ характеризует относительную важность близости теоретической части правила сумм к экспериментальной при различных M. Эта функция не определяется из общих соображений; к счастью, ее выбор слабо влияет на результаты, и мы используем $\rho(M) \sim 1/M$.

В обоих подходах статистические ошибки отдельных экспериментальных точек складываются квадратично. Они не являются несущественными, как это предполагалось в предыдущих обработках. Можно ожидать, что допустимые диапазоны теоретических параметров будут несколько завышенными в первом подходе и заниженными во втором.

Основываясь на этих двух методах, мы получили области допустимых значений вакуумных конденсатов G и Q (при фиксированных $\Lambda_{\overline{\rm MS}}$ и m_0^2). В первом подходе, точка на плоскости (G, Q) считалась допустимой, если $G > 0$, $Q > 0$ и соответствующая теоретическая кривая лежит внутри экспериментального коридора при M от M_c до 2GeV. Во втором подходе, пределы интегрирования в (1.6.3) полагались равными M_c и 2GeV. Минимизация функционала (1.6.3) дает линейные выражения для G и Q через экспериментальные точки R_i. Принимая во внимание их ошибки, мы получаем эллиптические допустимые области на плоскости (G, Q). В обоих случаях параметр M_c находился из условия, что $1/M^8$ поправка не превышает 40% от $1/M^6$ при $M > M_c$. Заметим, что мы должны также потребовать малости вкладов с $d = 4$, 6, как в [**36**]. Оказывается, что это условие выполняется при почти всех значениях G, Q из допустимых областей, и слабо влияет на результаты.

Из числа рассмотренных, правила сумм для A_d, A_r оказываются наиболее ограничительными, и дают близкие результаты. В них подавлен вклад области $\sqrt{s}$ между 1.4GeV и 2GeV, в которой экспериментальные данные менее точны. Более того, в этих правилах сумм отсутствует пертурбативная α_s поправка, и потому они слабо зависят от $\Lambda_{\overline{\rm MS}}$. Допустимые области для G и Q, полученные из правила сумм для A_d в обоих подходах, показаны на Рис. 1.8–1.10.

Легко понять, почему полученные области имеют сильно вытянутую форму. Степени M в глюонном (g/M^4) и кварковом (q/M^6) вкладах близки. Поэтому в ограниченной области M увеличение глюонного конденсата может быть приближенно скомпенсировано увеличением кваркового конденсата. Можно без труда получить простую оценку снизу на размер допустимой области. Пусть δ — минимальное расстояние от оптимальной теоретической кривой до границ экспериментального коридора. Тогда точки, для которых $|\delta g/M^4 - \delta q/M^6| < \delta$ при $M > M_c$, наверняка принадлежат допустимой области. Это неравенство описывает узкую длинную полосу с $\delta g_{max} = 8.45 M_c^4 \delta$, $\delta q_{max} = 9.45 M_c^6 \delta$; при фиксированном q, ошибка $\delta g = M_c^4 \delta$, то есть почти на порядок меньше. Полуширирина экспериментального коридора δ в правилах сумм для A_d, A_r порядка 2%. Отсюда следует, что точность результатов [**46**] (в которых к тому же не учтены данные наиболее точных недавних экспериментов) значительно преувеличена.

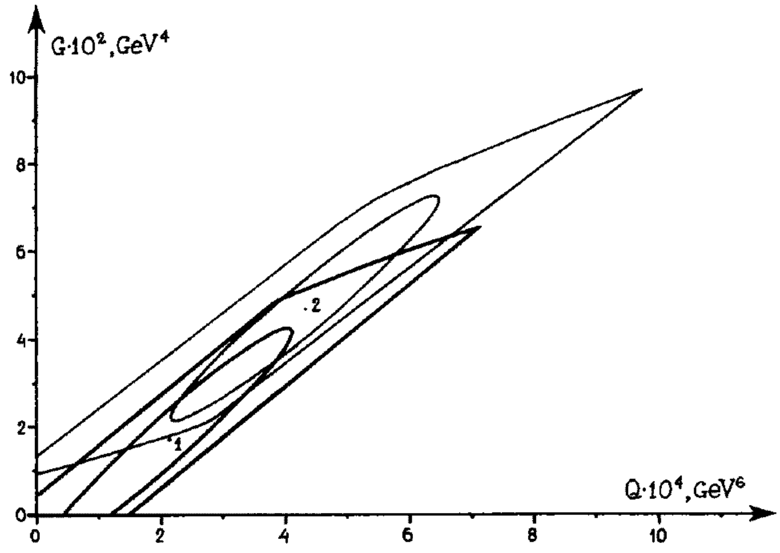


Рис. 1.8. Допустимые области в плоскости (G, Q) при $\Lambda_{\overline{\rm MS}} = 0.1$GeV (1) и 0.2GeV (2) и при $m_0^2 = 0.8$GeV^2. Кривые в первом подходе имеют ножеобразную форму (здесь статистические ошибки опущены). Кривые во втором подходе — эллипсы. Они получены при квадратичном сложении систематических ошибок и удвоенных статистических.

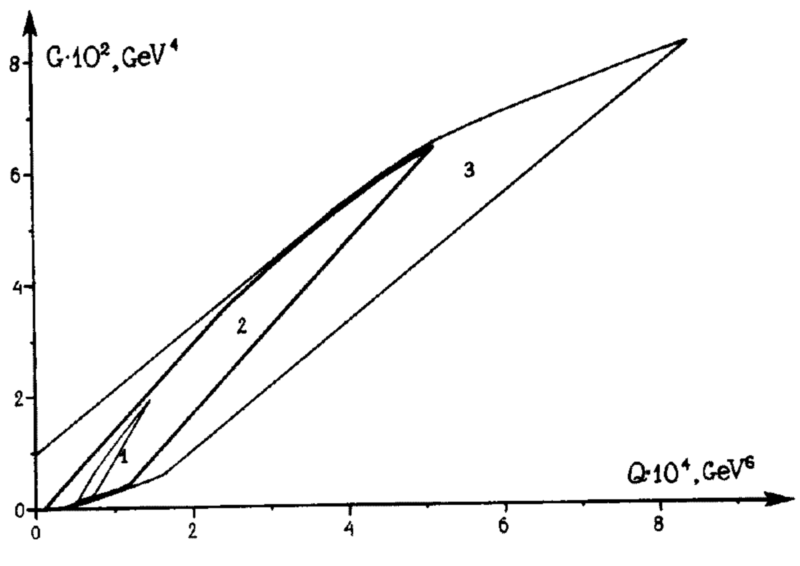


Рис. 1.9. Допустимые области при $m_0^2 = 0.4$ (1), 0.6 (2) и 0.8GeV^2 и $\Lambda_{\overline{\rm MS}} =$ 0.15GeV (в первом подходе).

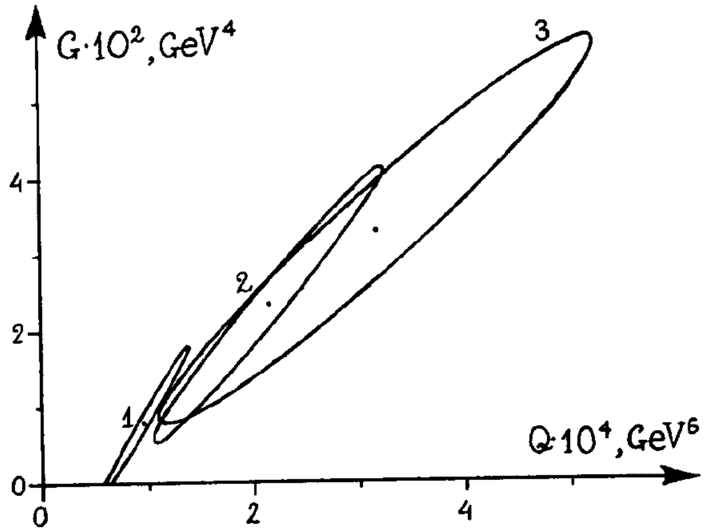


Рис. 1.10. Те же допустимые области во втором подходе.

ГЛАВА 2

Эффективная теория тяжелого кварка

Эта глава посвящена пертурбативным результатам в эффективной теории тяжелого кварка (HQET), и основана на работах [**7**]–[**17**].

В §2.1 рассматривается лагранжиан HQET в ведущем порядке по $1/m$. Излагается систематический способ вычисления двухпетлевых пропагаторных диаграмм, основанный на рекуррентных соотношениях интегрирования по частям [**7**]. Этот метод вошел в стандартный арсенал исследователей в области HQET, и применялся в большом количестве задач (согласно базе данных SLAC, на работу [**7**] имеется 73 ссылки). В §2.1 он применяется для перенормировки поля тяжелого кварка в двух петлях в схеме $\overline{\mathrm{MS}}$, что необходимо для всех ренормгрупповых вычислений в HQET. Рассматривается также перенормировка поля в двух петлях на массовой поверхности [**9**], которая нужна для вычислений типа сшивки.

Поправка $1/m$ к лагранжиану обсуждается в §2.2–2.4. Приводится простое доказательство (без дырок, имеющихся во многих работах), что репараметризационная инвариантность HQET приводит к тому, что коэффициент при операторе кинетической энергии в лагранжиане $C_k(\mu) = 1$ во всех порядках. Единственный коэффициент, который не известен точно — это коэффициент при операторе хромомагнитного взаимодействия $C_m(\mu)$. Он вычисляется в двухпетлевом приближении путем сшивки амплитуд рассеяния тяжелого кварка на массовой поверхности во внешнем поле в линейном порядке по переданному импульсу в полной КХД и эффективной теории [**13**]. Отсюда получается двухпетлевая аномальная размерность хромомагнитного оператора в HQET. Она была одновременно найдена в [**49**] совершенно другим методом, внутри HQET. Рассмотрено влияние ненулевой массы c кварка на хромомагнитное взаимодействие b кварка [**16**]. Для этой цели разработан систематический метод вычисления двухпетлевых диаграмм на массовой поверхности с двумя массами, основанный на интегрировании по частям. Высшие порядки теории возмущений суммируются в приближении большого β_0 [**14**]. Ряд теории возмущений для аномальной размерности сходится. В случае C_m он содержит инфракрасные ренормалоны в точках $u = n/2$. Это приводит к неоднозначностям суммы ряда порядка степенных поправок $(\Lambda/m)^n$. Продемонстрировано, что в физической величине — расщеплении масс B–B^* — ведущая неоднозначность сокращается с ультрафиолетовыми ренормалонными неоднозначностями в адронных матричных элементах, описывающих $1/m^2$ поправку к расщеплению. Исходя из этого, выяснена структура ведущей инфракрасной ренормалонной особенности в C_m в точке $u = 1/2$ вне приближения больших β_0.

Тяжело–легкие кварковые токи обсуждаются в §2.5–2.7. Получена двухпетлевая аномальная размерность тяжело–легкого тока в HQET [**7**] (§2.5). Она не зависит от γ–матричной структуры тока. Эта аномальная размерность была независимо получена в [**50**] с использованием Фейнмановской параметризации, и позднее в [**51**] с использованием разложения по полиномам Гегенбауэра, для более трудного выбора внешних импульсов. В §2.5 вычислены также коэффициенты сшивки тяжело–легких токов в полной КХД с эффективными токами в ведущем порядке в двух петлях [**9**]. Они даются единой формулой для всех γ–матричных структур. Как побочный продукт, получена единая формула для двухпетлевых аномальных размерностей КХД токов $\overline{q}\gamma^{[\mu_1} \ldots \gamma^{\mu_n]}q$, содержащая новый результат для тензорного тока (он независимо выведен в [**52**]). Получены выражения для легких и тяжело–легких кварковых токов в теории с петлями тяжелого флейвора через операторы в низкоэнергетической эффективной теории с двухпетлевой точностью [**17**]. В §2.6 проясняется вопрос о зависимости токов от предписания для γ_5 в размерной регуляризации, и исследуются отношения мезонных матричных элементов [**9**]. Наиболее важное из них — это отношение двух измеримых величин f_{B^*}/f_B. В нем коэффициент при $(\alpha_s/\pi)^2$ порядка 10, так что сходимость ряда теории возмущений плохая. “Наивная неабелианизация” результатов со старшей степенью n_f (которые легко получаются вычислением диаграмм с кварковыми петлями) путем их дополнения до β_0 дает разумное приближение к точным двухпетлевым результатам. В §2.7 коэффициенты сшивки и аномальные размерности изучены во всех порядках в приближении больших β_0 [**9**]. Показано, что в физических величинах неоднозначности, обусловленные инфракрасными ренормалонами в коэффициентах сшивки, компенсируются ультрафиолетовыми ренормалонными неоднозначностями адронных матричных элементов следующей размерности.

В §2.8 обсуждается перенормировка локальных тяжело–легких операторов размерности 5 в HQET [**12**]. Получена однопетлевая матрица аномальных размерностей. Произведена сшивка глюонных и фотонных пингвинных операторов в КХД с HQET операторами в одной петле.

2.1. Лагранжиан HQET в главном порядке

Недавно был предложен интересный новый подход к задачам КХД с одним тяжелым кварком, а именно эффективная теория тяжелого кварка (HQET). В ведущем приближении, тяжелый кварк рассматривается как статический источник глюонного поля; поправки по $1/m$ могут быть систематически учтены как возмущения. Это аналогично упрощению при рассмотрении атома водорода по сравнению с позитронием. В HQET возникают новые симметрии, которые были не очевидны в КХД. Они применяются, например, для получения соотношений между адронными формфакторами. Однако, в КХД даже такая упрощенная задача не может быть решена точно. Для получения количественных результатов применяются приближенные методы, такие, как решеточное моделирование или правила сумм. Здесь HQET позволяет продвинуться гораздо дальше, чем КХД.

Начнем с лагранжиана КХД

$$L = \overline{Q}(i\hat{D} - m)Q + \overline{q}i\hat{D}q - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} + \cdots \tag{2.1.1}$$

где Q — поле тяжелого кварка, q — поля легких кварков (их массы для простоты не выписаны), $G^a_{\mu\nu}$ — напряженность глюонного поля, а точки означают члены, фиксирующие калибровку, и духовые члены. Лагранжиан свободного кварка $\overline{Q}(i\hat{\partial} - m)Q$ дает зависимость энергии от импульса $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$. Мы будем рассматривать задачи с одним тяжелым кварком, находящимся приблизительно в покое, так что все характерные импульсы $|\vec{p}| \ll m$. Тогда мы можем упростить закон дисперсии до $E = m$. Он соответствует лагранжиану $\overline{Q}(i\gamma_0\partial_0 - m)Q$. В таких задачах удобно отсчитывать все энергии от уровня m. Это означает, что вместо истинной энергии E мы будем использовать остаточную энергию $\varepsilon = E - m$. Тогда энергия тяжелого кварка на массовой поверхности

$\varepsilon = 0$ независимо от импульса. Свободный лагранжиан, дающий такой закон дисперсии, есть $\overline{Q} i\gamma_0 \partial_0 Q$. Спин покоящегося тяжелого кварка может быть описан 2–компонентным спинором $\widetilde{Q}$ (мы можем также рассматривать его как 4–компонентный спинор с нулевыми нижними компонентами: $\gamma_0 \widetilde{Q} = \widetilde{Q}$). Вводя взаимодействие с глюонным полем из требования калибровочной инвариантности, мы получаем лагранжиан HQET [**53**]

$$L = \widetilde{Q}^+ iD_0 \widetilde{Q} + \overline{q} i\hat{D} q - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \cdots \tag{2.1.2}$$

Статическое кварковое поле $\widetilde{Q}$ содержит только операторы уничтожения. В теории нет тяжелых антикварков, потому что процессы рождения реальных тяжелых кварк–антикварковых пар энергетически невозможны, а виртуальные пары учитываются в виде локальных взаимодействий легких полей в порядке $1/m^2$ и выше. Тяжелый антикварк (если он присутствует) описывается отдельным полем. Теория поля (2.1.2) не является Лоренц–инвариантной, потому что тяжелый кварк определяет выделенную систему отсчета — свою систему покоя.

Лагранжиан (2.1.2) дает пропагатор статического кварка

$$\widetilde{S}(k) = \frac{1}{k_0 + i0}, \quad \widetilde{S}(x) = \widetilde{S}(x_0)\delta(\vec{x}), \quad \widetilde{S}(t) = -i\theta(t). \tag{2.1.3}$$

В импульсном пространстве, он зависит только от $k_0 = p_0 - m$, но не от $\vec{k} = \vec{p}$, поскольку мы пренебрегли кинетической энергией. Поэтому в координатном пространстве статический кварк не движется. В пропагаторе (2.1.3) подразумевается единичная матрица 2×2. Часто удобно использовать его как матрицу 4×4; в таком случае подразумевается проектор $\frac{1+\gamma_0}{2}$, исключающийе нижние компоненты. Статический кварк взаимодействует только с A_0; вершина имеет вид $ig\delta^\mu_0 t^a$. Петли статического кварка равны нулю, поскольку он распространяется только вперед по времени, Иными словами, в импульсном представлении все полюса по k_0 находятся в одной полуплоскости; замыкая контур интегрирования в другую сторону, получаем ноль.

Можно проследить, как выражения для КХД диаграмм переходят в соответствующие HQET выражения в пределе $m \to \infty$ [**54**]. КХД пропагатор тяжелого кварка имеет вид

$$S(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} = \frac{m(1+\gamma_0) + \hat{k}}{2mk_0 + k^2} = \frac{1+\gamma_0}{2k_0} + O\left(\frac{k}{m}\right). \tag{2.1.4}$$

Вершина $ig\gamma^\mu t^a$, находящаяся между двумя проекторами $\frac{1+\gamma_0}{2}$, может быть заменена на $ig\delta_0^\mu t^a$ (на внешних кварковых линиях тоже можно вставить проекторы). Поэтому любая древесная КХД диаграмма равняется соответствующей HQET диаграмме с точностью до членов $O(k/m)$. В петлях импульсы могут быть сколь угодно велики, и соотношение (2.1.4) может нарушиться. Но области больших петлевых импульсов исключаются перенормировкой в обоих теориях, а для сходящихся интегралов можно использовать (2.1.4).

Лагранжиан (2.1.2) можно переписать в ковариантных обозначениях:

$$L_v = \overline{\widetilde{Q}}_v i v^\mu D_\mu \widetilde{Q}_v + \cdots \tag{2.1.5}$$

где статическое кварковое поле $\widetilde{Q}_v$ — это 4-компонентный спинор, удовлетворяющий соотношению $\hat{v}\widetilde{Q}_v = \widetilde{Q}_v$, а v_μ — скорость кварка. Полный импульс кварка p^μ связан с остаточным импульсом k^μ как

$$p^\mu = m v^\mu + k^\mu \,, \quad |k^\mu| \ll m \,. \tag{2.1.6}$$

Пропагатор статического кварка имеет вид

$$\widetilde{S}(k) = \frac{1+\hat{v}}{2} \frac{1}{v \cdot k + i0} \,, \tag{2.1.7}$$

а вершина $igv^\mu t^a$. В пределе $m \to \infty$ тяжелый кварк не может менять свою скорость v^μ в процессах с ограниченными импульсами k. Поэтому существует правило суперотбора по скорости [**55**]: тяжелые кварки с разными скоростями v^μ могут рассматриваться отдельно, и описываться отдельным полем $\widetilde{Q}_v$. Можно записать формально Лоренц–инвариантный лагранжиан, описывающий статические кварки со всеми скоростями [**55**]; однако, все поля $\widetilde{Q}_v$, кроме нескольких, находятся в вакуумном состоянии, и потому несущественны.

Лагранжиан HQET (2.1.2) обладает $SU(2)$ спиновой симметрией [**56**]–[**59**]. Спин тяжелого кварка не взаимодействует с глюонным полем в пределе $m \to \infty$, потому что его хромомагнитный момент обращается в ноль. Если есть n_h флейворов тяжелых кварков с одинаковой скоростью, то имеется $SU(2n_h)$ спин–флейворная симметрия. Не только ориентация, но и величина спина тяжелого кварка несущественна в HQET. Это дает группу суперсимметрии, называемую суперфлейворной симметрией [**60**]. Обзор HQET и ее приложений можно найти в [**8, 61, 62**].

HQET имеет большие преимущества по сравнению с КХД при решеточном моделировании задач с тяжелыми кварками. Действительно, условия применимости решеточного приближения к задачам о легких адронах состоят в том, что шаг решетки много меньше характерного размера адрона, а полная длина решетки много больше этого размера. Для моделирования КХД с тяжелым кварком, шаг решетки должен быть много меньше комптоновской длины волны тяжелого кварка $1/m$. Для b кварка это в настоящее время невозможно. Лагранжиан HQET не содержит массы тяжелого кварка m, и условия применимости решеточного приближения для него такие же, как для легких адронов [**63**].

Перенормировочные свойства HQET (аномальные размерности и т. д.) отличаются от КХД. Ультрафиолетовое поведение диаграмм в HQET определяется областью петлевых импульсов, много бо́льших всех характерных масштабов процесса, но много меньших массы тяжелого кварка, которая устремляется к бесконечности с самого начала. Оно не имеет ничего общего с ультрафиолетовым поведением соответствующей диаграммы в КХД, которое определяется областью петлевых импульсов, много бо́льших, чем масса тяжелого кварка. В обычной КХД первая область дает гибридные логарифмы; проблема суммирования этих логарифмических поправок весьма нетривиальна. В HQET гибридные логарифмы становятся ультрафиолетовыми логарифмическими расходимостями, которые управляются ренормгруппой с соответствующими аномальными размерностями. Например, корреляторы мезонных токов в КХД содержат большие гибридные логарифмические поправки $\alpha_s \log \frac{m}{\omega}$. Корреляторы соответствующих токов в HQET вместо этого содержат поправки $\alpha_s \log \frac{\omega}{\mu}$, где μ — точка нормировки. Зависимость от μ определяется аномальными размерностями токов; поправки малы при $\mu \sim \omega$.

HQET тесно связана с теорией Вильсоновских линий в КХД [**64**]. Как следует из лагранжиана (2.1.2), пропагатор статического кварка в глюонном поле есть прямая Вильсоновская линия

$$\widetilde{S}(x) = -i\theta(x_0)\delta(\vec{x}) P \exp ig \int A_\mu dx^\mu \,. \tag{2.1.8}$$

Эффективный лагранжиан, совпадающий с лагранжианом HQET (2.1.5), был предложен [**65**] для исследования Вильсоновских линий. Их перенормировочные свойства рассматривались в [**66**]. Однопетлевая перенормировка прямой Вильсоновской линии (пропагатора тяжелого кварка) и угла (тяжело–тяжелого тока, меняющего скорость) известна из [**64**].

Двухпетлевое вычисление [**67**] для прямой Вильсоновской линии неверно; правильный результат был получен в [**68**]. Там также рассматривалась двухпетлевая перенормировка угла, однако авторы не сумели избавиться от всех двойных интегралов. Простой ответ, содержащий только однократные интегралы, получен в [**69, 70**].

Мы будем использовать схему $\overline{\text{MS}}$. Константы перенормировки Z_q, Z_A, Z_α такие же, как в КХД. Константа перенормировки статического кваркового поля $\widetilde{Z}_Q$ определяется из условия конечности перенормированного пропагатора $\widetilde{S}(\omega) = \widetilde{S}_{\text{bare}}(\omega)/\widetilde{Z}_Q$. Если мы обозначим сумму неперенормированных одночастично–неприводимых собственно–энергетических диаграмм статического кварка $-i\widetilde{\Sigma}(\omega)$, то пропагатор $\widetilde{S}_{\text{bare}}(\omega) = \widetilde{S}_0(\omega) + \widetilde{S}_0(\omega)\widetilde{\Sigma}(\omega)\widetilde{S}_0(\omega) + \cdots = 1/(\omega - \widetilde{\Sigma}(\omega))$.

В действительности, имеются две версии HQET: одна с n_f флейворами, как в исходной КХД; и другая с $n_f - 1$ флейворами. В первом случае, HQET модификация КХД пропагатора тяжелого кварка делается вдоль единственной линии тяжелого кварка, проходящей через диаграммы насквозь. В этой формулировке, HQET не помнит, что линия статического кварка имеет один из массивных флейворов, который все еще встречается в петлях. Эта n_f–флейворная HQET имеет ту же β–функцию и ту же $\alpha_s(\mu)$, что и n_f–флейворная КХД. Вторая возможность — это $(n_f - 1)$–флейворная HQET, в которой нет петель внешнего тяжелого флейвора. Эта теория имеет другую β–функцию, и сшивка $\alpha_s(\mu)$ становится нетривиальной. Она наиболее просто выглядит при $\mu = m$: $\alpha_s^{[n_f]}(m) = \alpha_s^{[n_f-1]}(m) + O(\alpha_s^3)$, где член α_s^3 известен. Второй подход лучше подходит при $\mu \ll m$, где существенна $(n_f - 1)$–флейворная эволюция $\alpha_s(\mu)$, а также в решеточной HQET, в которой нет петель тяжелого кварка.

Рассмотрим интегралы, возникающие при вычислении собственно–энергетических диаграмм статического кварка в одной и двух петлях. Запишем однопетлевой интеграл Рис. 2.1a с произвольными индексами в виде

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2)^{\alpha_1}} \left(\frac{\omega}{k_0 + \omega} \right)^{\alpha_2} = \frac{i(-2\omega)^{d-2\alpha_1}}{(4\pi)^{d/2}} I(\alpha_1, \alpha_2) \,. \tag{2.1.9}$$

Его можно вычислить, используя параметризацию

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\infty \frac{y^{\beta-1} dy}{(a+by)^{\alpha+\beta}} \,, \tag{2.1.10}$$

где y имеет размерность энергии. Результат имеет вид

$$I(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Gamma(2\alpha_1+\alpha_2-d)\Gamma(d/2-\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\,. \tag{2.1.11}$$

Все однопетлевые интегралы с целыми индексами выражаются через $I_1 = \Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1+2\epsilon)$ с рациональными коэффициентами.

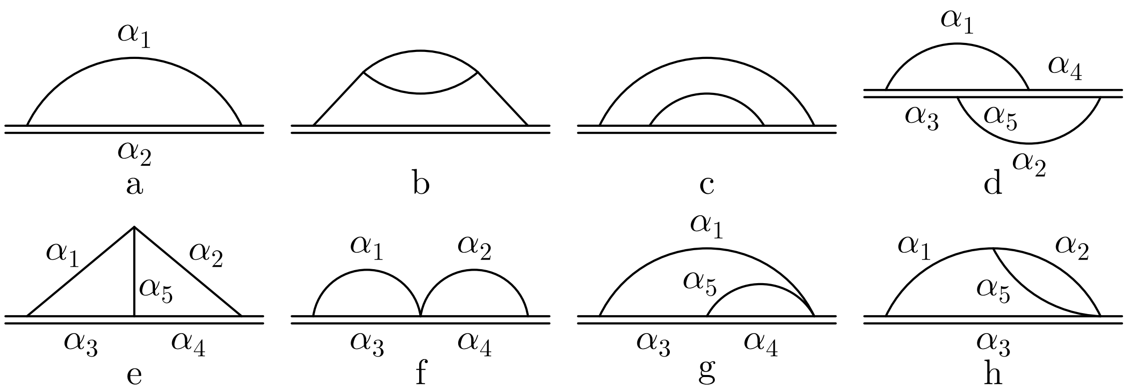


Рис. 2.1. Собственно–энергетические диаграммы в HQET.

Двухпетлевые интегралы Рис. 2.1b,c тривиальны. Домножая подынтегральное выражение Рис. 2.1d на

$$1 = \frac{1}{\omega}\left[(k_0+\omega)+(l_0+\omega)-(k_0+l_0+\omega)\right]\,, \tag{2.1.12}$$

мы можем убить одну из тяжелых линий, сводя этот интеграл к тривиальным, как на Рис. 2.1f,g. Только интеграл Рис. 2.1e не является тривиальным. Мы записываем его как

$$\begin{aligned}&\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\frac{d^d l}{(2\pi)^d}\frac{1}{(-k^2)^{\alpha_1}(-l^2)^{\alpha_2}(-(k-l)^2)^{\alpha_5}}\left(\frac{\omega}{k_0+\omega}\right)^{\alpha_3}\left(\frac{\omega}{l_0+\omega}\right)^{\alpha_4}\\ &= -\frac{(-2\omega)^{2(d-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_5)}}{(4\pi)^d} I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\,.\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Используя метод интегрирования по частям [**71**], мы получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}&(d-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4-2\alpha_5+1)I\\ &= \left[\alpha_1\mathbf{1}^+(\mathbf{5}^- - \mathbf{2}^-) + (2(d-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_5)-\alpha_3-\alpha_4+1)\mathbf{4}^-\right] I\,.\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Они позволяют нам убить одну из линий 2, 4 или 5 на Рис. 2.1e. Результирующие интегралы Рис. 2.1f,g,h тривиальны:

$$\begin{aligned} &I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,0) = I(\alpha_1,\alpha_3)I(\alpha_2,\alpha_4)\,, \\ &I(\alpha_1,0,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) = I(\alpha_1,\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5-d)I(\alpha_5,\alpha_4)\,, \\ &I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0,\alpha_5) = I(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5-d/2,\alpha_3)G(\alpha_2,\alpha_5)\,, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

где

$$G(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-d/2)\Gamma(d/2-\alpha_1)\Gamma(d/2-\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(d-\alpha_1-\alpha_2)} \tag{2.1.16}$$

— однопетлевой безмассовый интеграл. Все двухпетлевые интегралы поэтому выражаются через I_1^2 и $I_2 = \Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+4\epsilon)$ с рациональными коэффициентами. Этот алгоритм реализован в виде пакета на языке REDUCE [**30**].

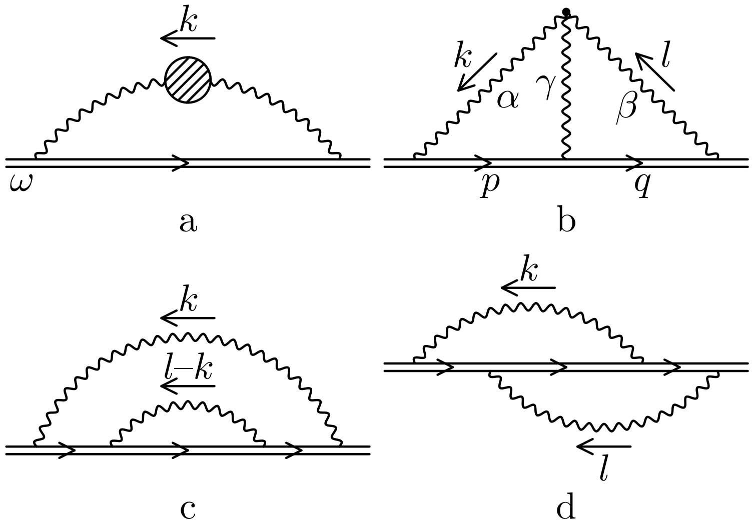


Рис. 2.2. Массовый оператор в HQET в двух петлях.

Используя эти методы, нетрудно вычислить неперенормированный массовый оператор с двухпетлевой точностью (Рис. 2.2). Мы получаем неперенормированный пропагатор

$$\begin{aligned} \omega\widetilde{S}_{\text{bare}}(\omega) = &\frac{\omega}{\omega-\widetilde{\Sigma}(\omega)} = 1 + Z_1\Gamma_1 C_F g_0^2 \\ &+ \left[Z_{A1}C_A\Gamma_1^2 + (Z_{A2}C_A + Z_{F2}C_F + Z_{L2}T_F n_l)\Gamma_2\right] C_F g_0^4 + O(g_0^6)\,, \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

где

$$\Gamma_n = \frac{(-2\omega)^{-2n\epsilon}}{(4\pi)^{nd/2}}\Gamma^n(\epsilon)\Gamma(1+2n\epsilon)\,, \quad \Gamma_2 = (1 + 4\zeta(2)\epsilon^2 - 16\zeta(3)\epsilon^3 + \cdots)\Gamma_1^2\,, \tag{2.1.18}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
&Z_1 = a_0 - \frac{d-1}{d-3}\,, \quad Z_{A1} = -\frac{Z_1}{d-3}\,,\\
&Z_{A2} = \frac{(d-2)^2(d-5)}{2(2d-7)(d-3)^3(d-6)} + \frac{(d^2-4d+5)Z_1}{2(d-3)^2(d-6)} - \frac{(d^2-9d+16)Z_1^2}{8(d-3)(d-6)}\,,\\
&Z_{F2} = \frac{Z_1^2}{2}\,, \quad Z_{L2} = \frac{2(d-2)}{(2d-7)(d-3)(d-6)}\,.
\end{aligned}$$

Теперь мы потребуем, чтобы перенормированный пропагатор $\widetilde{S}(\omega) = \widetilde{S}_{\mathrm{bare}}(\omega)/\widetilde{Z}_Q$ был конечен. Мы подставляем минимальную форму (0.6) и определяем ее коэффициенты из (2.1.17). Из перенормируемости теории следует, что эта константа делает $\widetilde{S}_{\mathrm{bare}}(\omega)/\widetilde{Z}_Q$ конечным для всех ω, что дает нетривиальную проверку наших результатов. Затем, используя μ–зависимость α_s и a, следующую из (0.5), (0.7), (0.12), мы получаем аномальную размерность $\tilde{\gamma}_Q = d\log\widetilde{Z}_Q/d\log\mu$ поля статического кварка $\widetilde{Q}$. Для проверки всей процедуры, мы повторили ее пошагово для безмассового кварка, и получили аномальную размерность γ_q (0.11) кваркового поля в КХД из рекуррентных соотношений [**71**], в согласии с [**72**]. В результате мы получили

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_Q &= (a-3)C_F\frac{\alpha_s}{2\pi} + C_F\left(\frac{3a^2+24a-179}{6}C_A + \frac{32}{3}T_F n_l\right)\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + O(\alpha_s^3)\\
&= \gamma_q - 3C_F\frac{\alpha_s}{2\pi} - C_F\left(\frac{127}{3}C_A - 3C_F - \frac{44}{3}T_F n_l\right)\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + O(\alpha_s^3)\,.
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Вторая форма была независимо получена в [**73**] из перенормировки волновой функции кварка с конечной массой на массовой поверхности. Заметим, что (2.1.19) обращается в ноль в КЭД в перенормированной калибровке Йенни $a = 3$, в которой отсутствует “инфракрасная катастрофа”.

Для вычисления амплитуд рассеяния требуется константа перенормировки волновой функции статического кварка в схеме перенормировки на массовой поверхности. Она дается формулой $\widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}} = \left(1 - (d\widetilde{\Sigma}/d\omega)_{\omega=0}\right)^{-1}$. Только диаграммы с петлей кварка с конечной массой дают вклад, потому что другие диаграммы не содержат масштаба. В двух петлях [**9**]

$$\left.\frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\omega}\right|_{\omega=0} = -iC_F g_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{v^\mu v^\nu}{(vk)^2} \frac{\Pi_{\mu\nu}(k)}{k^4} = -i\frac{C_F g_0^2}{d-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{k^2}{(vk)^2} - 1 \right) \frac{\Pi_\alpha^\alpha(k)}{k^6} \,, \qquad (2.1.20)$$

где $\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) \Pi_\alpha^\alpha(k)/(d-1)$ — вклад петель массивных кварков в поляризационный оператор (его след зависит только от k^2). Метод вычисления интегралов такого рода был предложен в [**9**]. После разложения по скалярным интегралам и перехода к евклидову d–мерному пространству, мы можем усреднить по направлениям v:

$$\overline{(vk)^n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)} (k^2)^{n/2} \qquad (2.1.21)$$

для четных n (положительных или отрицательных) и 0 для нечетных n. После этого остаются массивные вакуумные интегралы, явную формулу для которых можно найти в [**74**]. В результате мы получаем

$$\widetilde{Z}_Q^{\text{os}} = 1 - C_F T_F \frac{g_0^4 \sum m_i^{-4\epsilon}}{(4\pi)^d} I_0^2 \frac{(d-1)(d-2)(d-6)}{2(d-5)(d-7)} \,, \qquad (2.1.22)$$

$$I_0 = \frac{i}{\pi^{d/2}} \int \frac{d^d k}{1 - (v+k)^2} = \frac{2}{d-2} \Gamma(\epsilon) \,, \qquad (2.1.23)$$

где сумма берется по всем флейворам с ненулевыми массами. Заметим, что (2.1.22) имеет негладкое поведение при $m_i \to 0$, которое происходит от инфракрасной области малых импульсов глюонов, где HQET не отличается от КХД. Поэтому константа перенормировки волновой функции массивного кварка в КХД имеет такое же негладкое поведение (см. §2.3 и [**73**]).

В вычислениях такого типа нужна также константа перенормировки волновой функции безмассового кварка в схеме перенормировки на массовой поверхности. Она равна $Z_q^{\text{os}} = [1 - \Sigma_V(0)]^{-1}$, где неперенормированный массовый оператор $\Sigma(p) = \not{p}\Sigma_V(p^2)$. Только диаграммы с петлей массивного кварка дают вклад. В двух петлях [**17**]

$$\Sigma_V(0) = C_F T_F \frac{g_0^4 \sum m_i^{-4\epsilon}}{(4\pi)^d} I_0^2 \frac{(d-1)(d-2)(d-4)(d-6)}{2d(d-5)(d-7)} \,. \qquad (2.1.24)$$

2.2. $1/m$ поправки к лагранжиану

Обозначим наибольший характерный масштаб остаточных энергий k_0 и импульсов $|\vec{k}|$ через Λ. Эффективная теория поля конструируется так, чтобы воспроизвести амплитуды рассеяния на массовой поверхности в КХД, разложенные до некоторого порядка $(\Lambda/m)^n$. Для этого выписывается наиболее общий эффективный лагранжиан, совместимый с требуемыми симметриями, и коэффициенты в нем подгоняются таким образом, чтобы воспроизвести амплитуды КХД на массовой поверхности. Члены с $D_0 Q$ могут быть устранены переопределениями поля.

Наиболее общий лагранжиан вплоть до членов $1/m^3$ имеет вид [**53**], [**75**]–[**77**]

$$
\begin{aligned}
L ={}& \widetilde{Q}^+ iD_0 \widetilde{Q} \\
&+ \frac{C_k}{2m}\widetilde{Q}^+\vec{D}^2\widetilde{Q} - \frac{C_m}{2m}\widetilde{Q}^+\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\widetilde{Q} - \frac{iC_s}{8m^2}\widetilde{Q}^+(\vec{D}\times\vec{E}-\vec{E}\times\vec{D})\cdot\vec{\sigma}\widetilde{Q} - \frac{C_d}{8m^2}\widetilde{Q}^+[\vec{D}\cdot\vec{E}]\widetilde{Q} \\
&+ \frac{C_{k2}}{8m^3}\widetilde{Q}^+\vec{D}^4\widetilde{Q} - \frac{C_{w1}}{8m^3}\widetilde{Q}^+\{\vec{D}^2,\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\}\widetilde{Q} + \frac{C_{w2}}{4m^3}\widetilde{Q}^+D^i\vec{B}\cdot\vec{\sigma}D^i\widetilde{Q} \\
&- \frac{C_{p'p}}{8m^3}\widetilde{Q}^+(\vec{D}\vec{B}\cdot\vec{D}+\vec{D}\cdot\vec{B}\vec{D})\cdot\vec{\sigma}\widetilde{Q} - \frac{iC_M}{8m^3}\widetilde{Q}^+(\vec{D}\cdot[\vec{D}\times\vec{B}]+[\vec{D}\times\vec{B}]\cdot\vec{D})\widetilde{Q} \\
&+ \frac{C_{a1}}{8m^3}\widetilde{Q}^+(\vec{B}^2-\vec{E}^2)\widetilde{Q} - \frac{C_{a2}}{16m^3}\widetilde{Q}^+\vec{E}^2\widetilde{Q} + \frac{C_{a3}}{8m^3}\widetilde{Q}^+\operatorname{Tr}(\vec{B}^2-\vec{E}^2)\widetilde{Q} - \frac{C_{a4}}{16m^3}\widetilde{Q}^+\operatorname{Tr}\vec{E}^2\widetilde{Q} \\
&+ \frac{iC_{b1}}{8m^3}\widetilde{Q}^+(\vec{B}\times\vec{B}-\vec{E}\times\vec{E})\cdot\vec{\sigma}\widetilde{Q} - \frac{iC_{b2}}{8m^3}\widetilde{Q}^+(\vec{E}\times\vec{E})\cdot\vec{\sigma}\widetilde{Q} + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Здесь не выписаны тяжело–легкие контактные взаимодействия, а также члены, включающие только легкие поля. Этот лагранжиан можно переписать в релятивистской форме:

$$
\begin{aligned}
L_v ={}& \overline{\widetilde{Q}}_v iv\cdot D\widetilde{Q}_v - \frac{C_k}{2m}\overline{\widetilde{Q}}_v D_\perp^2\widetilde{Q}_v + \frac{iC_m}{4m}\overline{\widetilde{Q}}_v G_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\widetilde{Q}_v \\
&+ \frac{C_s}{8m^2}\overline{\widetilde{Q}}_v\{D_\perp^\mu, G^{\lambda\nu}\}v_\lambda\sigma_{\mu\nu}\widetilde{Q}_v + \frac{C_d}{8m^2}\overline{\widetilde{Q}}_v v^\mu[D_\perp^\nu G_{\mu\nu}]\widetilde{Q}_v + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

где $D_\perp = D - v(vD)$. Можно изменить скорость v на небольшую величину $\delta v \lesssim \Lambda/m$, не нарушая применимости HQET и не меняя ее предсказаний. Эта репараметризационная инвариантность связывает коэффициенты при разных степенях $1/m$ [**78**].

В борновском приближении, есть более простые способы найти коэффициенты C_i, чем сшивка КХД/HQET: преобразование Фолди–Войтхузена [**79**], или использование уравнений движения [**80**] (либо функциональное интегрирование по нижним компонентам дираковского поля [**81**]) с последующим переопределением поля. В результате получается

$$\begin{aligned} & C_k = C_m = C_d = C_s = C_{k2} = C_{w1} = C_{a1} = C_{b1} = 1\,, \\ & C_{w2} = C_{p'p} = C_M = C_{a2} = C_{a3} = C_{a4} = C_{b2} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Однако, эти алгебраические методы не обобщаются на высшие петли.

Рассмотрим сшивку кварк–кварковой вершинной функции в КХД и HQET. В КХД, перенормированная кварк–кварковая вершина на массовой поверхности

$$-\overline{u}(\hat{p}-m)u \tag{2.2.4}$$

не получает поправок в схеме перенормировки на массовой поверхности. КХД спиноры связаны с HQET спинорами преобразованием Фолди–Войтхузена

$$u = \left(1 + \frac{\hat{k}}{2m} + \frac{k^2}{4m^2} + \cdots\right) u_v\,, \quad \hat{v} u_v = u_v\,. \tag{2.2.5}$$

Выражая КХД вершинную функцию через HQET спиноры, получаем

$$\overline{u}_v \frac{\vec{k}^2}{2m} u_v + \cdots \tag{2.2.6}$$

Обозначим сумму неперенормированных одночастично–неприводимых собственно–энергетических диаграмм тяжелого кварка в HQET в $1/m^0$ порядке как $-i\frac{1+\hat{v}}{2}\widetilde{\Sigma}(\omega)$, $\omega = kv$. В $1/m$ порядке, собственно–энергетические диаграммы с одной хромомагнитной вершиной равны нулю. Пусть сумма неперенормированных диаграмм с одной кинетической вершиной будет $-i\frac{C_k}{2m}\frac{1+\hat{v}}{2}\widetilde{\Sigma}_k(\omega, k_\perp^2)$. Рассмотрим изменение $\widetilde{\Sigma}$ при $v \to v + \delta v$ для бесконечно малого δv ($v\,\delta v = 0$). Все факторы $\frac{1+\hat{v}}{2}$ могут быть скомбинированы в один, и вариация $\delta\hat{v}$ в нем обеспечивает вариацию γ–матричной структуры при $\widetilde{\Sigma}$. Есть два источника изменения $\widetilde{\Sigma}$. Члены, происходящие от разложения знаменателей пропагаторов, дают вставки $ik\delta v$. Члены, происходящие от вершин, дают $igt^a\delta v^\mu$. Теперь рассмотрим изменение $\widetilde{\Sigma}_k$ при $k_\perp \to k_\perp + \delta k_\perp$ для бесконечно малого $\delta k_\perp$. Кварк–кварковые кинетические вершины дают $i\frac{C_k}{m} k\delta k_\perp$; кварк–кварк–глюонные кинетические вершины дают $i\frac{C_k}{m} g t^a \delta k_\perp^\mu$; вершины с двумя глюонами не меняются. Поэтому

$$\frac{\partial \widetilde{\Sigma}_k}{\partial k_\perp^\mu} = 2\frac{\partial \widetilde{\Sigma}}{\partial v^\mu}\,. \tag{2.2.7}$$

Это тождество Уорда репараметризационной инвариантности [**82**]. Учитывая $\frac{\partial \widetilde{\Sigma}_k}{\partial k_\perp^\mu} = 2\frac{\partial \widetilde{\Sigma}_k}{\partial k_\perp^2} k_\perp^\mu$ и $\frac{\partial \widetilde{\Sigma}}{\partial v^\mu} = \frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\omega} k_\perp^\mu$, мы получаем

$$\frac{\partial \widetilde{\Sigma}_k}{\partial k_\perp^2} = \frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\omega}\,. \tag{2.2.8}$$

Правая сторона не зависит от $k_\perp^2$, поэтому

$$\widetilde{\Sigma}_k(\omega, k_\perp^2) = \frac{d\widetilde{\Sigma}(\omega)}{d\omega} k_\perp^2 + \widetilde{\Sigma}_{k0}(\omega)\,. \tag{2.2.9}$$

Этот результат можно понять и более прямым путем. Только диаграммы с кварк–кварковой кинетической вершиной содержат $k_\perp^2$; коэффициент при ней равен $i\frac{C_k}{2m}$. Сумма диаграмм со вставкой единичного оператора равна $-i\frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\omega}$. Заметим, что диаграммы с кварк–кварк–глюонной кинетической вершиной равны нулю, поскольку нет выделенного поперечного направления.

На массовой поверхности ($\omega = 0$), перенормированная кварк–кварковая вершинная функция в HQET равна $\frac{C_k}{2m}\widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}}\overline{u}_v\left[-k_\perp^2 + \widetilde{\Sigma}_k(0,k_\perp^2)\right]u_v = -\frac{C_k}{2m}\widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}}\left[1 - \frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\omega}\right]_{\omega=0} k_\perp^2 \overline{u}_v u_v$. На массовой поверхности, вклад дают только диаграммы частицами с конечной массой в петлях (например, c–кварковые петли в b–кварковой HQET) (Рис. 2.3). Учитывая $(\widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}})^{-1} = 1 - \left.\frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\omega}\right|_{\omega=0}$ и сравнивая с (2.2.6), мы окончательно получаем

$$C_k(\mu) = 1\,. \tag{2.2.10}$$

Этот аргумент работает при произвольном μ; поэтому аномальная размерность оператора кинетической энергии в HQET точно равна нулю. Подобным образом можно убедиться, что

$$C_{k2} = 1\,. \tag{2.2.11}$$

Заметим, что все массивные петли в HQET полностью игнорируются в доказательстве [**83**] “во всех порядках теории возмущений”, поэтому фактически оно применимо только в одной петле.

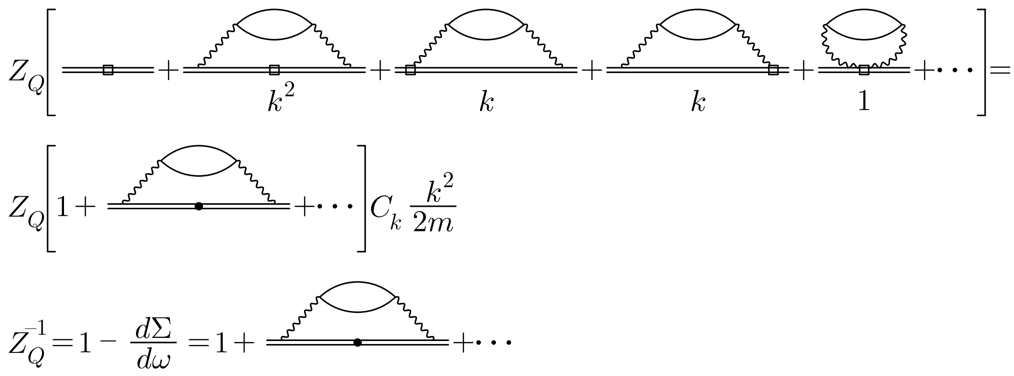


Рис. 2.3. Кварк–кварковая вершинная функция на массовой поверхности в HQET.

Рассмотрим теперь сшивку кварк–кварк–глюонной вершинной функции в КХД и HQET. В КХД, вершинная функция на массовой поверхности характеризуется двумя формфакторами

$$\overline{u}(p')t^a\left(\varepsilon(q^2)\frac{(p+p')^\mu}{2m}+\mu(q^2)\frac{[\hat{q},\gamma^\mu]}{4m}\right)u(p)\,, \tag{2.2.12}$$
$$\varepsilon(q^2)=1+\varepsilon'\frac{q^2}{m^2}+\cdots\,,\quad \mu(q^2)=\mu+\mu'\frac{q^2}{m^2}+\cdots$$

Полный цветовой заряд кварка $\varepsilon(0)=1$ в силу калибровочной инвариантности. Тождества Уорда в формализме фонового поля [**84**] показаны на Рис. 2.4, где жирная точка означает свертку с входящим импульсом глюона q и цветовой поляризацией e^a, вторые равенства верны только для бесконечно малых q (или в случае абелева внешнего поля), и $(t^a)^{bc}=if^{acb}$ в присоединенном представлении (они проще, чем в обычных ковариантных калибровках, см, например, §6.4 учебника [**30**]). Поэтому вершинная функция КХД $\Lambda^a_\mu(p,q)=\Lambda_\mu t^a$ удовлетворяет $\Lambda^a_\mu q^\mu e^a=-\Sigma(p+qe^at^a)+\Sigma(p)$ для бесконечно малых q, или $\Lambda_\mu(p,0)=-\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^\mu}$. Электрический формфактор выделяется проектором $\varepsilon(0)=Z_Q^{\mathrm{os}}\bigl[1+\frac{1}{4}\operatorname{Tr}\Lambda_\mu v^\mu(1+\hat{v})\bigr]$. На массовой поверхности $\frac{1}{4}\operatorname{Tr}\frac{\partial\Sigma}{\partial p^\mu}=(1-(Z_Q^{\mathrm{os}})^{-1})v_\mu$, и поэтому $\varepsilon(0)=1$.

Обозначим сумму неперенормированных вершинных диаграмм в HQET в $1/m^0$ порядке как $igt^av^\mu\frac{1+\hat{v}}{2}[1+\widetilde{\Lambda}(\omega,\Delta)]$, где $\Delta=qv=\omega'-\omega$. Тождество Уорда для пропагатора статического кварка выглядит так же, как для обычного (Рис. 2.4). Поэтому

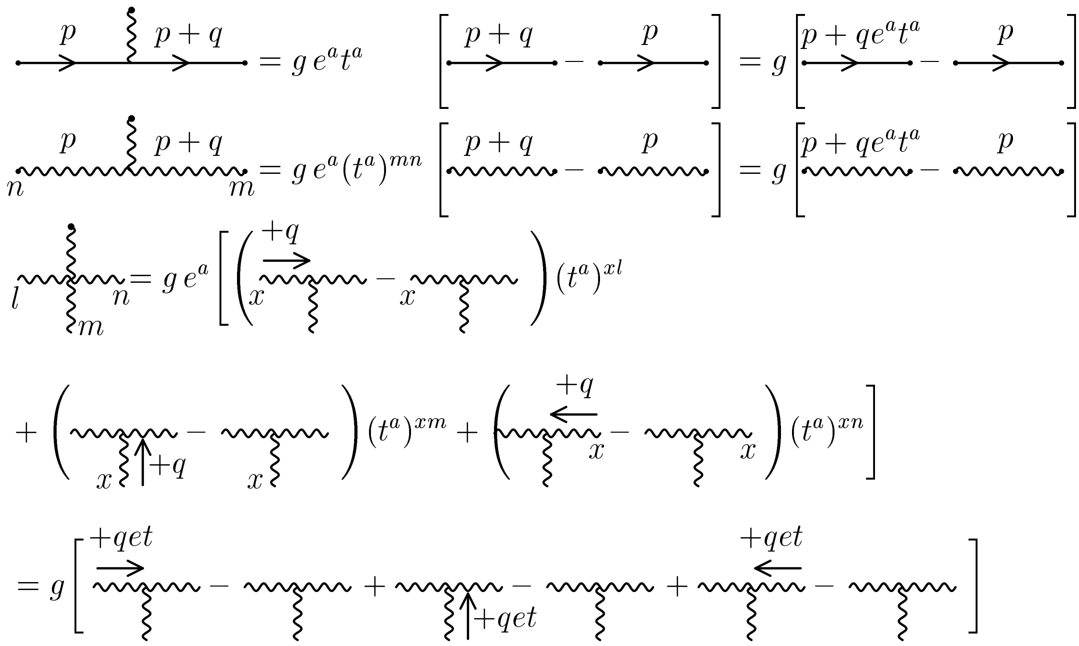


Рис. 2.4. Тождества Уорда в формализме фонового поля

$\Delta e^a t^a \widetilde{\Lambda}(\omega, \Delta) = -\widetilde{\Sigma}(\omega + \Delta e^a t^a) + \widetilde{\Sigma}(\omega)$ для бесконечно малых Δ, или

$$\widetilde{\Lambda}(\omega, 0) = -\frac{d\widetilde{\Sigma}(\omega)}{d\omega} \,. \tag{2.2.13}$$

Интересно, что в абелевом внешнем поле $\widetilde{\Lambda}(\omega, \Delta) = -\frac{\widetilde{\Sigma}(\omega+\Delta)-\widetilde{\Sigma}(\omega)}{\Delta}$. Полный цветовой заряд статического кварка $\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}[1 + \widetilde{\Lambda}(0, 0)] = 1$, как и следовало ожидать.

Вершинная функция в HQET в $1/m$ порядке имеет вид

$$\begin{aligned}
&i\frac{C_k}{2m} g t^a \frac{1+\hat{v}}{2} \left[(1 + \widetilde{\Lambda}_k)(p + p')^\mu_\perp + (\widetilde{\Lambda}_{k0} + \widetilde{\Lambda}_{k1} p_\perp^2 + \widetilde{\Lambda}'_{k1} p'^2_\perp + \widetilde{\Lambda}_{k2} q_\perp^2) v^\mu \right] \\
&\quad + i\frac{C_m}{4m} g t^a \frac{1+\hat{v}}{2} [\hat{q}, \gamma^\mu] \frac{1+\hat{v}}{2} (1 + \widetilde{\Lambda}_m) \,,
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

где $\widetilde{\Lambda}_i$ зависят от ω, Δ; $\widetilde{\Lambda}'_{k1}(\omega, \Delta) = \widetilde{\Lambda}_{k1}(\omega + \Delta, -\Delta)$; $\widetilde{\Lambda}_k(\omega, \Delta) = \widetilde{\Lambda}_k(\omega + \Delta, -\Delta)$, и аналогично для $\widetilde{\Lambda}_{k0}$, $\widetilde{\Lambda}_{k2}$. Подобно тому, как мы это делали выше, мы можем убедиться, что вариация ведущей вершинной функции при $v \to v + \delta v$ совпадает с вариацией вершинной функции кинетической энергии при $p_\perp \to p_\perp + \delta p_\perp$, если $\delta v = \frac{C_k}{m} \delta p_\perp$. Поэтому

$$\widetilde{\Lambda}_k(\omega, \Delta) = \widetilde{\Lambda}(\omega, \Delta) \,, \quad \widetilde{\Lambda}'_{k1}(\omega, \Delta) = \frac{\partial \widetilde{\Lambda}(\omega, \Delta)}{\partial \Delta} \tag{2.2.15}$$

(и следовательно $\widetilde{\Lambda}_{k1}(\omega,\Delta) = \left(\frac{\partial}{\partial\omega} - \frac{\partial}{\partial\Delta}\right)\widetilde{\Lambda}(\omega,\Delta)$). Тождества Уорда Рис. 2.4 дают

$$\widetilde{\Lambda}_{k0}(\omega,0) = -\frac{d\widetilde{\Sigma}_{k0}(\omega)}{d\omega}\,, \quad \widetilde{\Lambda}_{k2}(\omega,0) = 0 \tag{2.2.16}$$

(в абелевом внешнем поле $\widetilde{\Lambda}_{k0}(\omega,\Delta) = -\frac{\widetilde{\Sigma}_{k0}(\omega+\Delta)-\widetilde{\Sigma}_{k0}(\omega)}{\Delta}$, $\widetilde{\Lambda}_{k2}(\omega,\Delta) = 0$).

Репараметризационная инвариантность связывает спин–орбитальную вершинную функцию с хромомагнитной, но мы не будем это обсуждать детально.

Вершинная функция HQET на массовой поверхности в борновском приближении равна

$$\overline{u}_v(k')\left(v^\mu + C_k\frac{(k+k')^\mu}{2m} + C_m\frac{[\hat{q},\gamma^\mu]}{4m} + C_d\frac{q^2}{8m^2}v^\mu + C_s\frac{[\hat{k},\hat{q}]}{8m^2}v^\mu + \cdots\right)u_v(k)\,. \tag{2.2.17}$$

Как мы видели выше, поправок к первым двум членам нет. Другие члены имеют поправки начиная с двухпетлевых, если есть флейвор с конечной массой (такой, как c в b–кварковой HQET). Выражая КХД вершину на массовой поверхности через HQET спиноры, мы получаем

$$\begin{aligned}\overline{u}_v(k')\Bigg[&\varepsilon(q^2)\left(v^\mu + \frac{(k+k')^\mu}{2m} - \frac{q^2+[\hat{k},\hat{q}]}{8m^2}v^\mu + \cdots\right)\\ &+\mu(q^2)\left(\frac{[\hat{q},\gamma^\mu]}{4m} + \frac{q^2+[\hat{k},\hat{q}]}{4m^2}v^\mu + \cdots\right)\Bigg]u_v(k)\,.\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Поэтому коэффициенты в лагранжиане HQET равны

$$C_k = 1\,, \quad C_m = \mu\,, \quad C_d = 8\varepsilon' + 2\mu - 1\,, \quad C_s = 2\mu - 1\,. \tag{2.2.19}$$

К первому равенству поправок нет (2.2.10). Коэффициенты (2.2.19) не являются независимыми:

$$C_s = 2C_m - 1\,. \tag{2.2.20}$$

Вероятно, тождества Уорда репараметризационной инвариантности дают соотношения между поправками, происходящими от петель с конечной массой в HQET, которые обеспечивают отсутствие поправок к (2.2.20). Однако мы не будем прослеживать это детально. Равенство (2.2.20) имеет простой смысл. Спин–орбитальное взаимодействие — это взаимодействие движущегося тяжелого кварка с хромоэлектрическим полем. В системе покоя кварка, это поле приобретает хромомагнитную компоненту. Хромомагнитный момент кварка взаимодействует с ней, давая член $2C_m$. Имеется также Томасовская прецессия, которая компенсирует половину хромомагнитного вклада в борновском приближении. Это чисто кинематический эффект, обусловленный преобразованиями Лоренца, и поэтому к нему нет радиационных поправок.

Аналогично, в $1/m^3$ порядке коэффициенты в лагранжиане HQET равны

$$C_{w1} = 4\mu' + \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\,, \quad C_{w2} = 4\mu' + \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\,, \quad C_{p'p} = \mu - 1\,, \quad C_M = -4\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\,. \quad (2.2.21)$$

Они не являются независимыми:

$$C_{w2} = C_{w1} - 1\,, \quad C_{p'p} = C_m - 1\,, \quad C_M = \tfrac{1}{2}\left(C_m - C_d\right)\,. \quad (2.2.22)$$

Вычисление C_a, C_b требует сшивки амплитуд с двумя глюонами. Вычисление контактных членов требует сшивки амплитуд с легкими кварками.

Перейдем к подробному рассмотрению лагранжиана в $1/m$ порядке. Как мы уже знаем, кинетический коэффициент $C_k(\mu) = 1$, и единственный коэффициент в лагранжиане HQET до уровня $1/m$ включительно, который не известен точно — это хромомагнитный коэффициент $C_m(\mu)$. Наиболее естественно найти его из сшивки КХД с HQET при $\mu \sim m$, когда не возникает больших логарифмов. Для получения C_m при $\mu \ll m$ можно использовать ренормгруппу:

$$C_m(\mu) = C_m(m) \exp\left(- \int\limits_{\alpha_s(m)}^{\alpha_s(\mu)} \frac{\tilde{\gamma}_m(\alpha)}{2\beta(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha} \right)\,, \quad (2.2.23)$$

где $C_m(m) = 1 + C_1 \frac{\alpha_s(m)}{4\pi} + C_2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 + \cdots$, а $\tilde{\gamma}_m = \frac{d \log \widetilde{Z}_m}{d \log \mu}$ — аномальная размерность хромомагнитного оператора в HQET. Если $L = \log m/\mu$ не очень велик, то лучше сохранить все двухпетлевые члены и пренебречь высшими петлями:

$$C_m(\mu) = 1 + \left(C_1 - \tilde{\gamma}_0 L\right) \frac{\alpha_s(m)}{4\pi} + \left[C_2 - \left(C_1 \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\gamma}_1\right) L + \tilde{\gamma}_0 \left(\tilde{\gamma}_0 - \beta_0\right) L^2\right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2\,. \quad (2.2.24)$$

Это приближение работает вплоть до относительно больших L, потому что C_1 численно велик. Если L параметрически велик, то лучше просуммировать главные и следующие логарифмы:

$$C_m(\mu) = \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m)}\right)^{-\frac{\tilde{\gamma}_0}{2\beta_0}} \left[1 + C_1 \frac{\alpha_s(m)}{4\pi} - \frac{\beta_0 \tilde{\gamma}_1 - \beta_1 \tilde{\gamma}_0}{2\beta_0^2} \frac{\alpha_s(\mu) - \alpha_s(m)}{4\pi}\right]\,. \quad (2.2.25)$$

В этом случае мы не можем использовать C_2 без знания $\tilde{\gamma}_2$. Решение (2.2.23) может быть записано в общем виде

$$C_m(\mu) = \hat{C}_m K(\mu)\,, \quad \hat{C}_m = \alpha_s(m)^{\frac{\tilde{\gamma}_0}{2\beta_0}}(1+\delta c)\,, \quad \delta c = c_1 \frac{\alpha_s(m)}{4\pi} + c_2 \left(\frac{\alpha_s(m)}{4\pi}\right)^2 + \cdots \quad (2.2.26)$$

где $\hat{C}_m$ не зависит от масштаба и схемы перенормировки.

В качестве простого приложения рассмотрим расщепление масс B–B^* [**85, 86**][1]

$$m_{B^*} - m_B = \frac{2C_m(\mu)}{3m}\mu_G^2(\mu) + \frac{1}{3m^2}\left[C_m(\mu)\rho_{km}^3(\mu) + C_m^2(\mu)\rho_{mm}^3(\mu) - C_s(\mu)\rho_s^3(\mu)\right]\,, \quad (2.2.27)$$

где $\mu_G^2(\mu)$ и $\rho_s^3(\mu)$ — локальные матричные элементы хромомагнитного и спин–орбитального взаимодействия, а $\rho_{km}^3(\mu)$ и $\rho_{mm}^3(\mu)$ — кинетический–хромомагнитный и двойной хромомагнитный билокальные матричные элементы (последний имеет две γ–матричные структуры 1 и $\sigma_{\mu\nu}$; здесь подразумевается коэффициент при второй). Вводя ренормгрупповые инварианты

$$\begin{aligned}
&\hat{\mu}_G^2 = K(\mu)\mu_G^2(\mu)\,, \quad \hat{\rho}_{km}^3 = K(\mu)\rho_{km}^3(\mu) + \left[1-K(\mu)\right]\rho_s^3(\mu)\,,\\
&\hat{\rho}_{mm}^3 = K^2(\mu)\rho_{mm}^3\,, \quad \hat{\rho}_s^3 = \rho_s^3(\mu)\,,
\end{aligned} \quad (2.2.28)$$

мы можем переписать это в виде

$$m_{B^*} - m_B = \frac{2\hat{C}_m}{3m}\hat{\mu}_m^2 + \frac{1}{3m^2}\left[\hat{C}_m\left(\hat{\rho}_{km}^3 - 2\hat{\rho}_s^3\right) + \hat{C}_m^2\hat{\rho}_{mm}^3 + \hat{\rho}_s^3\right]\,. \quad (2.2.29)$$

Рассмотрим сначала амплитуду рассеяния в HQET (2.2.17). С учетом радиационных поправок, второй и третий члены в этой формуле домножаются на $\tilde{\varepsilon} = \widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}}\tilde{\varepsilon}_0$ и $\tilde{\mu} = \widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}}\tilde{\mu}_0$, соответственно. Диаграммы для неперенормированной вершинной функции оператора кинетической энергии $\tilde{\varepsilon}_0$ в двух петлях показаны на Рис. 2.5. Мы рассматриваем $A_\mu^a v^\mu = 0$, поэтому диаграммы, в которых внешнее поле прикреплено к вершине HQET ведущего порядка $igt^a v^\mu$, не дают вклада. Диаграммы, в которых внешнее поле прикреплено к четырехвостой $1/m$ вершине, не зависят от q, и не дают вклада в структуру, линейную по q. Диаграммы Рис. 2.5e, h имеют нулевой цветовой множитель, Мы провели явное вычисление в произвольной ковариантной калибровке, и убедились, что перенормированный

[1]в [**85**] отсутствует ρ_{mm}^3; в [**86**] эволюция $C_m(\mu)$ в главном логарифмическом приближении имеет неверный знак.

результат $\tilde{\varepsilon} = 1$, в соответствии с общим аргументом, основанным на репараметризационной инвариантности.

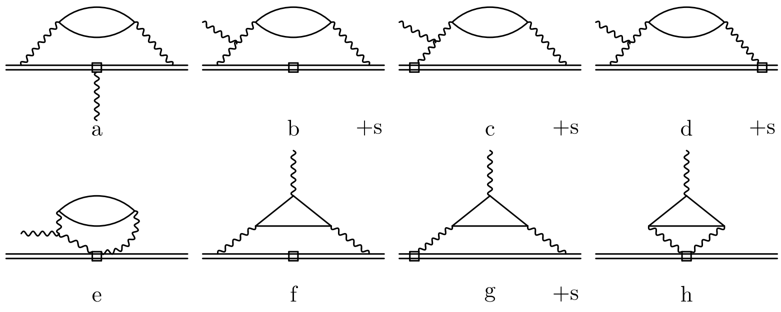


Рис. 2.5. Диаграммы для $\tilde{\varepsilon}_0$; $+\,$s означает прибавление зеркально–симметричной диаграммы.

В случае $\tilde{\mu}_0$, диаграммы Рис. 2.5b, f не существуют. Цветовой множитель Рис. 2.5e, h теперь ненулевой. Единственный вклад с цветовой структурой $C_F T_F$ от Рис. 2.5a компенсируется $\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}$, и мы получаем

$$\tilde{\mu} = 1 + C_A T_F \frac{g_0^4 \sum m^{-4\epsilon}}{(4\pi)^d} I_0^2 \frac{(d-2)(d^2-9d+16)}{4(d-5)(d-7)}\,, \tag{2.2.30}$$

где сумма берется по всем массивным флейворам.

При вычислении амплитуды рассеяния в КХД, разложенной по q, возникают одно– и двухпетлевые массивные интегралы на массовой поверхности. Запишем однопетлевой интеграл Рис. 2.1a с произвольными индексами в виде

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2)^{\alpha_1}(-(k+mv)^2+m^2)^{\alpha_2}} = \frac{i m^{d-2(\alpha_1+\alpha_2)}}{(4\pi)^{d/2}} M(\alpha_1,\alpha_2)\,. \tag{2.2.31}$$

Его можно вычислить, используя Фейнмановскую параметризацию. Вместо этого, мы можем использовать инверсию $k_\mu \to k_\mu/k^2$, после перехода к безразмерному евклидовому петлевому импульсу. Это превращает массивный знаменатель на массовой поверхности в HQET знаменатель, и мы получаем

$$M(\alpha_1,\alpha_2) = I(d-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-d/2)\Gamma(d-2\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(d-\alpha_1-\alpha_2)}\,. \tag{2.2.32}$$

Все однопетлевые интегралы с целыми индексами могут быть выражены через $I_0 = -M(0,1)$ (2.1.23)) с рациональными коэффициентами.

Есть две различных нетривиальных топологии двухпетлевых интегралов. Мы начнем с более простого типа M (Рис. 2.1e):

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-k^2)^{\alpha_1}(-l^2)^{\alpha_2}(-(k-l)^2)^{\alpha_5}(-(k+mv)^2+m^2)^{\alpha_3}(-(l+mv)^2+m^2)^{\alpha_4}}$$
$$= -\frac{m^{2(d-\sum\alpha)}}{(4\pi)^d} M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\,. \tag{2.2.33}$$

Используя инверсию, эти интегралы можно связать с двухпетлевыми HQET интегралами

$$M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) = I(d-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_5, d-\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)\,. \tag{2.2.34}$$

Однако эти HQET интегралы содержат два нецелых индекса, и они не вычисляются методом, описанным в §2.1. Используя рекуррентные соотношения, основанные на интегрировании по частям [**74, 73, 87**], их можно свести к квадрату однопетлевого интеграла I_0^2 и

$$I_1 = -M(1,0,0,1,1) = \frac{4(2d-7)}{(d-3)(3d-8)(3d-10)} \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+2\epsilon)\Gamma(1-4\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)\Gamma(1-3\epsilon)}\Gamma^2(\epsilon) \tag{2.2.35}$$

с рациональными коэффициентами.

Запишем наиболее сложные интегралы типа N (Рис. 2.1d) как

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d l}{(2\pi)^d}$$
$$\frac{1}{(-k^2)^{\alpha_1}(-l^2)^{\alpha_2}(-(k+mv)^2+m^2)^{\alpha_3}(-(l+mv)^2+m^2)^{\alpha_4}(-(k+l+mv)^2+m^2)^{\alpha_5}}$$
$$= -\frac{m^{2(d-\sum\alpha)}}{(4\pi)^d} N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\,. \tag{2.2.36}$$

Используя рекуррентные соотношения, основанные на интегрировании по частям [**74, 73, 87**], их можно свести к I_0^2, I_1 и $I_2 = -N(0,0,1,1,1)$ с рациональными коэффициентами. Вместо базисного интеграла I_2 удобнее использовать сходящийся интеграл $I(\epsilon) = N(1,1,1,1,1)$ [**88, 87**]:

$$I_2 = -N(0,0,1,1,1) = \frac{3(d-2)^2(5d-18)}{2(d-3)(3d-8)(3d-10)} I_0^2 - 2\frac{d-4}{2d-7} I_1 - \frac{16(d-4)^2}{(3d-8)(3d-10)} I(\epsilon)\,,$$
$$I(\epsilon) = N(1,1,1,1,1) = I + O(\epsilon), \quad I = \pi^2 \log 2 - \frac{3}{2}\zeta(3)\,. \tag{2.2.37}$$

Члены $O(\epsilon)$ и $O(\epsilon^2)$ в его разложении были найдены алгебраическими методами [**87**], но не требуются для двухпетлевых вычислений.

Этот алгоритм реализован в пакете RECURSOR [**87**] на языке REDUCE [**30**]; имеется также несколько реализаций на языке FORM. В этом параграфе мы вычислили амплитуду рассеяния тяжелого кварка на массовой поверхности во внешнем поле до членов, линейных по q, используя RECURSOR и, независимо, FORM пакет [**89**], считая все флейворы, кроме внешнего, безмассовыми. Поправка к хромомагнитному моменту b кварка, происходящая от ненулевого значения m_c/m_b, будет вычислена в следующем параграфе.

Мы вычисляем неперенормированные вершинные функции ε_0, μ_0 на перенормированной массовой поверхности. Поэтому удобно использовать в лагранжиане КХД полюсную массу кварка m, и учесть вершину, производимую контрчленом Δm [**74**]. Диаграммы для вершинной функции получаются из диаграмм для массового оператора путем вставления вершины внешнего поля всеми возможными способами (Рис. 2.6). Диаграммы Рис. 2.6c с безмассовым кварком (цветовые структуры $C_F T_F n_l$ и $C_A T_F n_l$), а также Рис. 2.6d, e, содержат только интеграл I_1. Интеграл I_2 содержится только в Рис. 2.6c с тяжелым кварком (цветовые структуры $C_F T_F$ и $C_A T_F$), а также Рис. 2.6g. Диаграмма Рис. 2.6h3 имеет нулевой цветовой фактор.

Мы производим все вычисления в произвольной ковариантной калибровке, и проверяем, что d–мерные результаты для ε_0 и μ_0 калибровочно–инвариантны. Мы проверяем, что $\varepsilon_0 = (Z_Q^{\mathrm{os}})^{-1}$; это равенство справедливо также, если мы используем цветовые факторы для абелева внешнего поля в ε_0. Более того, оно справедливо отдельно для каждой группы диаграмм, полученных из одной диаграммы для массового оператора: сумма их вкладов, при каждом из двух наборов цветовых факторов, дает вклад исходной диаграммы в $(Z_Q^{\mathrm{os}})^{-1}$. Это дает сильную проверку наших программ для ε_0. Программы для вычисления μ_0 получаются заменой только γ–матричного проектора, и потому являются надежными. Если мы используем цветовые факторы для абелева внешнего поля, то мы воспроизводим известный результат для магнитного момента тяжелого кварка; если внутренние калибровочные поля также абелевы, то воспроизводится классический результат для магнитного момента электрона к КЭД. Имея ввиду все эти проверки, мы уверены в правильности нашего окончательного результата для хромомагнитного момента тяжелого кварка.

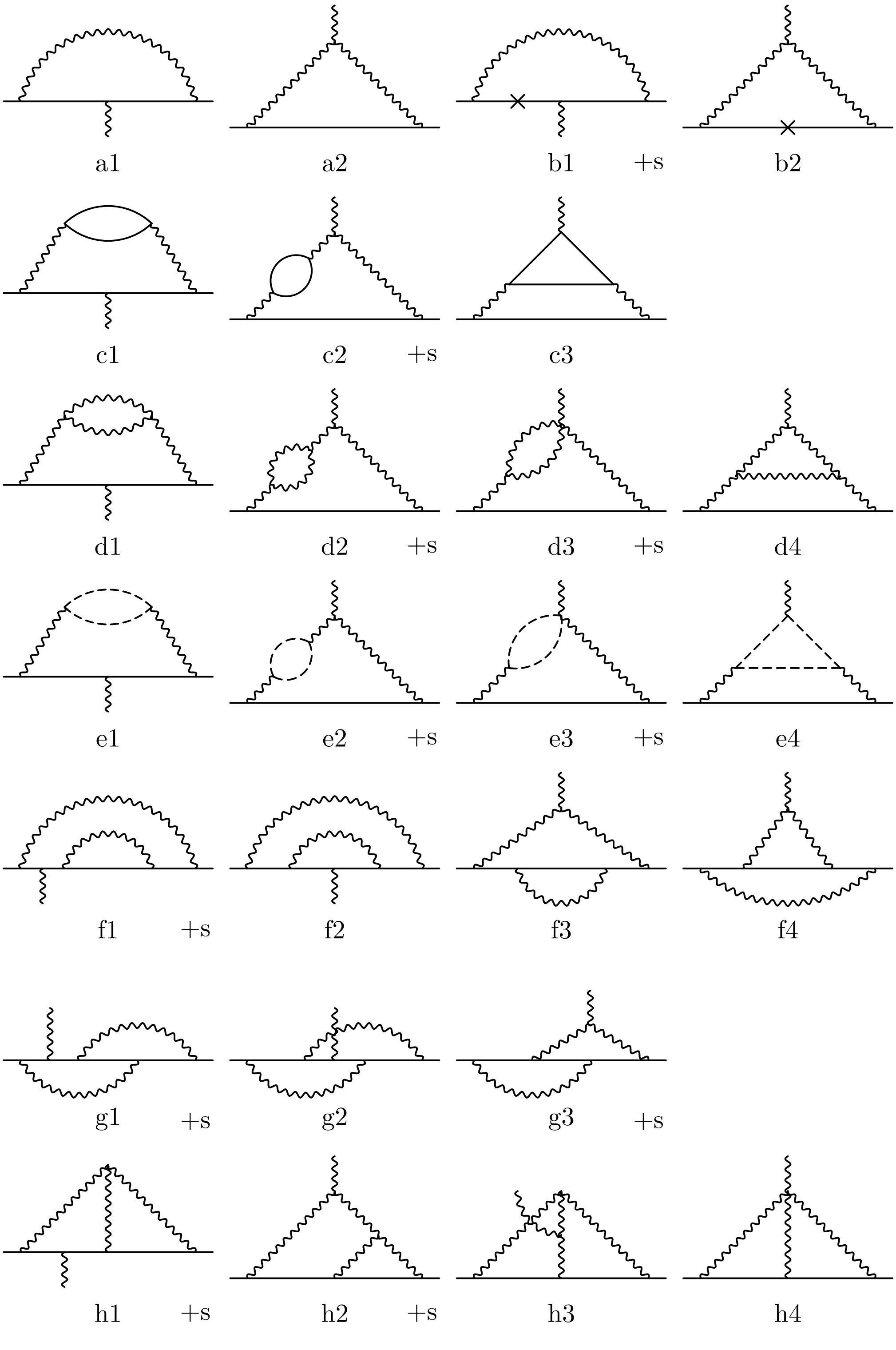


Рис. 2.6. Диаграммы для КХД вершины

Хромомагнитный момент в d измерениях имеет вид

$$\mu = 1 + \frac{g_0^2 m^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-3} \left[2(d-4)(d-5)C_F - (d^2 - 8d + 14)C_A \right] I_0 + \frac{g_0^4 m^{-4\epsilon}}{(4\pi)^d} \sum_{i,j} a_{ij} C_i J_j \,,$$

где цветовые структуры $C_1 = C_F^2$, $C_2 = C_F C_A$, $C_3 = C_A^2$, $C_4 = C_F T_F n_l$, $C_5 = C_A T_F n_l$, $C_6 = C_F T_F$, $C_7 = C_A T_F$, и

$$\begin{aligned}
&J_1 = \frac{(d-2) I_0^2}{16(d-1)(d-3)^2(d-4)^2(d-5)(d-6)(d-7)} \,, \\
&J_2 = \frac{I_1}{16(d-1)(d-3)(d-4)(2d-7)} \,, \quad J_3 = \frac{I_2}{16(d-1)(d-4)^2(d-6)}
\end{aligned}$$

выбраны таким образом, что коэффициенты a_{ij} являются полиномами по d. $\LaTeX$ текст следующего уравнения, в котором перечисляются все ненулевые коэффициенты a_{ij}, сгенерирован REDUCE программой с использованием пакета RLFI Р. Лиски (см. [**30**]):

$$\begin{aligned}
a_{11} =& 4(d-5)(d-6)(d-7)(d^8 - 32d^7 + 460d^6 - 3828d^5 + 19940d^4 - 66032d^3 + 135065d^2 \\
& - 155640d + 77356) \,, \\
a_{12} =& -16(2d-7)(2d^6 - 53d^5 + 557d^4 - 3005d^3 + 8828d^2 - 13450d + 8336) \,, \\
a_{13} =& 8(d-6)(2d^6 - 60d^5 + 682d^4 - 3871d^3 + 11723d^2 - 18066d + 11120) \,, \\
a_{21} =& -2(d-6)(d-7)(2d^9 - 72d^8 + 1175d^7 - 11329d^6 + 70628d^5 - 293546d^4 + 809949d^3 \\
& - 1426799d^2 + 1454100d - 652948) \,, \\
a_{22} =& 4(16d^7 - 474d^6 + 5777d^5 - 37896d^4 + 145361d^3 - 327378d^2 + 402044d - 208160) \,, \\
a_{23} =& -4(d-6)(5d^6 - 146d^5 + 1625d^4 - 9065d^3 + 27085d^2 - 41398d + 25424) \,, \\
a_{31} =& (d-6)(d-7)(d^9 - 35d^8 + 557d^7 - 5259d^6 + 32250d^5 - 132396d^4 + 362076d^3 \\
& - 633794d^2 + 642768d - 287288) \,, \\
a_{32} =& -(3d-8)(6d^6 - 159d^5 + 1672d^4 - 9015d^3 + 26460d^2 - 40276d + 24928) \,, \\
a_{33} =& 2(d-3)(d-6)(3d-8)(d^4 - 23d^3 + 176d^2 - 550d + 596) \,, \\
a_{42} =& -64(d-2)(d-3)(d-4)^2(d^2 - 7d + 11) \,, \\
a_{52} =& 4(d-3)(d-4)(3d-8)(2d^3 - 19d^2 + 57d - 56) \,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{61} =& 4(d-2)(d-3)(d-4)(d-7)(3d^5-85d^4+875d^3-4123d^2+8898d-7008)\,,\\
a_{63} =& -8(d-4)(d^2-9d+16)(d^3-13d^2+26d+16)\,,\\
a_{71} =& -(d-3)(d-4)(9d^7-290d^6+3822d^5-26680d^4+106477d^3-242974d^2\\
&+294012d-145896)\,,\\
a_{73} =& 2(d-4)(3d-8)(d^4-16d^3+75d^2-96d-28)\,.
\end{aligned}
$$

Разлагая по ϵ и перевыражая через $\alpha_s(\mu)$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
\mu =& 1+\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}e^{-2L\epsilon}\left(1-\frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\beta_0\right)\left[2C_F(1+4\epsilon)+C_A\left(\frac{1}{\epsilon}+2+\frac{\pi^2}{12}\epsilon+2\epsilon\right)\right]\\
&+\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 e^{-4L\epsilon}\left[C_F^2\left(-8I+\frac{20}{3}\pi^2-31\right)+C_FC_A\left(\frac{28}{3}\frac{1}{\epsilon}+\frac{4}{3}I+\frac{4}{3}\pi^2+\frac{605}{9}\right)\right.\\
&+C_A^2\left(\frac{7}{3}\frac{1}{\epsilon^2}+\frac{101}{9}\frac{1}{\epsilon}+\frac{4}{3}I-\frac{3}{2}\pi^2+\frac{1057}{27}\right)\\
&+C_FT_Fn_l\left(-\frac{8}{3}\frac{1}{\epsilon}-\frac{196}{9}\right)+C_AT_Fn_l\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{37}{9}\frac{1}{\epsilon}-\frac{5}{9}\pi^2-\frac{371}{27}\right)\\
&\left.+C_FT_F\left(-\frac{8}{3}\frac{1}{\epsilon}-\frac{16}{3}\pi^2+\frac{380}{9}\right)+C_AT_F\left(-\frac{4}{3}\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{8}{3}\frac{1}{\epsilon}+\frac{8}{9}\pi^2-\frac{370}{27}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.2.38}
$$

где $L=\log m/\mu$, $n_f=n_l+1$.

Коэффициенты C_k, C_m в лагранжиане HQET (2.2.1) подбираются таким образом, что амплитуда рассеяния в полной КХД (2.2.12), разложенная до линейных членов по q, совпадает с амплитудой рассеяния в HQET (2.2.17). Инфракрасные сингулярности (точнее, сингулярности на массовой поверхности) одинаковы в обоих теориях. Член с $\hat{q}$ в преобразовании Фолди–Войтхузена (2.2.5) должны учитываться только в членах нулевого порядка, но там он не дает вклада.

Рассмотрим сначала HQET без петель тяжелого кварка. Сравнивая структуру q^μ, мы получаем $\widetilde{Z}_k^{-1}C_k=1$, и потому $C_k(\mu)=1$ (2.2.10). Мы определяем $\widetilde{Z}_m$ из требования, что C_m конечен. Члены $1/\epsilon^2$ в нем удовлетворяют условию согласованности, которое необходимо, чтобы аномальная размерность была конечна при $\epsilon\to 0$. Члены $1/\epsilon$ дают аномальную размерность

$$
\tilde{\gamma}_m = 2C_A\frac{\alpha_s}{4\pi}+\frac{4}{9}C_A(17C_A-13T_Fn_l)\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2\,. \tag{2.2.39}
$$

Коэффициент хромомагнитного взаимодействия при $\mu = m$ равен

$$
\begin{aligned}
C_m(m) = {} & 1 + 2(C_F + C_A)\frac{\alpha_s(m)}{4\pi} \\
& + \left[C_F^2 \left(-8I + \frac{20}{3}\pi^2 - 31 \right) + C_F C_A \left(\frac{4}{3}I + \frac{4}{3}\pi^2 + \frac{269}{9} \right) + C_A^2 \left(\frac{4}{3}I - \frac{17}{9}\pi^2 + \frac{805}{27} \right) \right. \\
& + C_F T_F n_l \left(-\frac{100}{9} \right) + C_A T_F n_l \left(-\frac{4}{9}\pi^2 - \frac{299}{27} \right) \\
& \left. + C_F T_F \left(-\frac{16}{3}\pi^2 + \frac{476}{9} \right) + C_A T_F \left(\pi^2 - \frac{298}{27} \right) \right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 .
\end{aligned}
\tag{2.2.40}
$$

При $N = 3$ цветах, его численное значение

$$
C_m(m) = 1 + \frac{13}{6}\frac{\alpha_s(m)}{\pi} + (21.79 - 1.91 n_l) \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 . \tag{2.2.41}
$$

Двухпетлевая поправка велика: коэффициент при $(\alpha_s/\pi)^2$ равен 14.15 при $n_l = 4$. Точная величина двухпетлевого коэффициента при $n_l = 4$ на 40% меньше ожиданий, основанных на наивной неабелианизации [**9**], то есть она в этом случае не особенно точна, но дает правильный знак и порядок величины. Вклад петли тяжелого кварка в скобку в (2.2.41) составляет всего лишь -0.10. Как однопетлевая, так и двухпетлевая поправка малы при $L \approx 2$ (для $n_l = 4$).

Если мы рассмотрим HQET с петлями тяжелого кварка, то по–прежнему $C_k(\mu) = 1$ (2.2.10). Аномальная размерность (2.2.39) теперь содержит $n_f = n_l + 1$ вместо n_l. Коэффициент хромомагнитного взаимодействия (2.2.40) имеет коэффициент при $C_A T_F$, равный $\frac{10}{9}\pi^2 - \frac{227}{27}$, что дает число 22.14 в скобках в (2.2.41).

2.3. Влияние m_c на хромомагнитное взаимодействие b кварка

Вычисления на массовой поверхности в любой теории, содержащей два массивных поля с различными массами и безмассовое поле, обязательно включают диаграммы типа Рис. 2.7. Такие диаграммы появляются, например, в КЭД с e, μ и τ, в КХД с b и c кварками и в электрослабой теории. Такие диаграммы имеют двухчастичный порог при $p^2 = M^2$ (совпадающий с псевдопорогом, поскольку одна из частиц безмассовая) и трехчастичный порог при $p^2 = (M + 2m)^2$, где p — внешний импульс. Имеется два трехчастичных псевдопорога, при $p^2 = (M - 2m)^2$ и $p^2 = M^2$. Таким образом, массовая поверхность $p^2 = M^2$

означает, что мы находимся одновременно на двухчастичном (псевдо–) пороге и на трехчастичном псевдопороге.

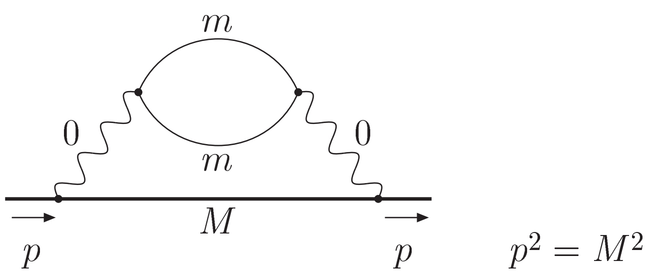


Рис. 2.7. Двухпетлевая собственно–энергетическая диаграмма.

Объединяя тождественные знаменатели, мы можем выразить эти диаграммы через скалярные интегралы (Рис. 2.8)

$$I(n_1, n_2, n_3, n_4) = -\frac{1}{\pi^d} \int \frac{d^d k \, d^d l}{\mathcal{D}_1^{n_1} \mathcal{D}_2^{n_2} \mathcal{D}_3^{n_3} \mathcal{D}_4^{n_4}} \bigg|_{p^2=M^2} , \tag{2.3.1}$$

где

$$\mathcal{D}_1 = M^2 - (p+k)^2 , \quad \mathcal{D}_2 = -k^2 , \quad \mathcal{D}_3 = m^2 - l^2 , \quad \mathcal{D}_4 = m^2 - (k-l)^2 . \tag{2.3.2}$$

Очевидно,

$$I(n_1, n_2, n_4, n_3) = I(n_1, n_2, n_3, n_4) .$$

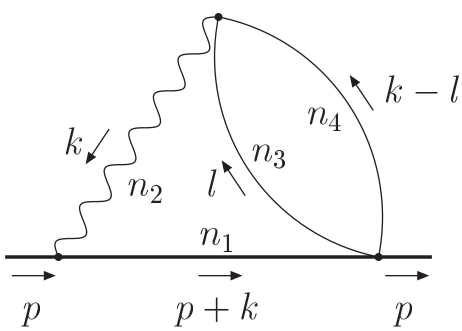


Рис. 2.8. Двухпетлевые интегралы на массовой поверхности с двумя массами.

Некоторые интегралы этого типа уже рассматривались в литературе [**90, 74, 73, 9, 91, 92, 93**]. Здесь мы построим общий алгоритм, основанный на интегрировании по частям [**71**], который сводит любой интеграл (2.3.1) (с целыми n_i) к базису из двух нетривиальных интегралов (известных вблизи четырех измерений до конечных членов по ϵ) и двух тривиальных.

В реальных вычислениях присутствуют также интегралы типа (2.3.1) со скалярными числителями. В некоторых случаях, эти числители не могут быть выражены через знаменатели (2.3.2). Такие интегралы будут обсуждаться ниже; они могут быть сведены к тому же базису, что и интегралы $I(n_1, n_2, n_4, n_3)$.

Недавно было показано [**94**], что любой двухпетлевой пропагаторный интеграл с произвольными массами и внешним импульсом может быть сведен к конечному набору базисных интегралов. Однако, в специальных случаях типа порогов и псевдопорогов, некоторые общие формулы работы [**94**] становятся вырожденными. Поэтому такие случаи требуют специального рассмотрения. В частности, здесь мы предлагаем алгоритм сведения для интегралов (2.3.1), и реализуем его в виде пакета на языке REDUCE [**30**].

Интегралы такого типа появляются при сшивке КХД с HQET в присутствии еще одного массивного флейвора. В этом параграфе мы рассматриваем влияние ненулевой массы c кварка на лагранжиан b кварковой HQET в порядке $1/m_b$.

Интегралы (2.3.1) с $n_3 \le 0$ или $n_4 \le 0$ сводятся к произведениям однопетлевых, и пропорциональны $T_1 = I(1,0,1,0)$ с рациональными коэффициентами. Интегралы с $n_1 \le 0$ являются вакуумными. явная формула для них приведена в [**74**]; они пропорциональны $T_0 = I(0,0,1,1)$ с рациональными коэффициентами. Эти тривиальные базисные интегралы имеют вид

$$T_0 = (m^2)^{d-2}\Gamma^2(1-d/2)\,, \quad T_1 = (Mm)^{d-2}\Gamma^2(1-d/2)\,. \tag{2.3.3}$$

Когда n_1, n_3 и n_4 все положительны, мы применяем метод интегрирования по частям [**71**]. Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial k}\cdot(k-l)$ к подынтегральному выражению (2.3.1) и подставляя $p\cdot l \to (p\cdot k)(k\cdot l)/k^2$ в числителе, мы получаем рекуррентное соотношение

$$4m^2 n_4 \mathbf{4}^+ I = \Big[-2d + n_1 + 2n_2 + 4n_4 - (n_1+2n_2)(\mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-)\mathbf{2}^+ + n_1(\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^- + \mathbf{4}^-)\mathbf{1}^+\Big] I\,. \tag{2.3.4}$$

Вследствие симметрии, мы всегда можем полагать $n_4 \geq n_3$; индекс n_4 может быть понижен до $n_4 = 1$ путем использования (2.3.4). После этого, у нас остаются $I(n_1, n_2, 1, 1)$, плюс тривиальные интегралы, которые выражаются через (2.3.3).

Теперь мы собираемся уменьшать n_1. Для этого, рассмотрим рекуррентные соотношения, получающиеся при применении $\frac{\partial}{\partial k} \cdot k$ и $\frac{\partial}{\partial k} \cdot p$ к подынтегральному выражению (2.3.1):

$$\Big[d - n_1 - 2n_2 - n_4 - n_1 \mathbf{2}^- \mathbf{1}^+ - n_4(\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^-)\mathbf{4}^+\Big] I = 0\,, \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned}\Big[&- 2n_1 + 2n_2 + n_4 + 2n_1(\mathbf{2}^- + 2M^2)\mathbf{1}^+ - (2n_2 + n_4)\mathbf{1}^-\mathbf{2}^+ \\ &+ n_4(\mathbf{1}^-\mathbf{3}^-\mathbf{2}^+ - \mathbf{1}^- + \mathbf{2}^- - \mathbf{3}^-)\mathbf{4}^+\Big] I = 0\,.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Выразим $\mathbf{2}^-\mathbf{4}^+I$ из (2.3.5) и $\mathbf{1}^-\mathbf{4}^+I$ из его $\mathbf{1}^-\mathbf{2}^+$ сдвинутой версии, и подставим их обоих в (2.3.6):

$$\Big[d - 2n_1 - 1 - (d - n_1 - 1)\mathbf{1}^-\mathbf{2}^+ + n_1(\mathbf{2}^- + 4M^2)\mathbf{1}^+\Big] I = 0\,. \tag{2.3.7}$$

Теперь выразим $\mathbf{4}^+I$ из (2.3.4) и подставим его в $\mathbf{2}^+$ сдвинутую версию (2.3.5); прибавляя (2.3.7) и подставляя $n_3 = n_4 = 1$, мы получаем

$$\begin{aligned}4(M^2 - m^2)n_1\mathbf{1}^+ I(n_1, n_2, 1, 1) = &\Big[-3d + 3n_1 + 2n_2 + 5 + (d - n_1 - 1)\mathbf{1}^-\mathbf{2}^+ \\ &- 4m^2(\mathbf{3}^-\mathbf{4}^+ + d - n_1 - 2n_2 - 3)\mathbf{2}^+\Big] I(n_1, n_2, 1, 1)\,.\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Это соотношение позволяет понижать n_1 до $n_1 = 1$ (здесь члены с $\mathbf{3}^-\mathbf{4}^+$ тривиальны). Таким образом, у нас остаются $I(1, n_2, 1, 1)$.

Наконец, подставляя $\mathbf{1}^+I$ из (2.3.8) и его сдвинутую версию $\mathbf{2}^-\mathbf{1}^+I$ в (2.3.7), мы получаем при $n_1 = n_3 = n_4 = 1$

$$\begin{aligned}&\Big[(3d - 2n_2 - 6)\mathbf{2}^- + 4(M^2 + m^2)(2d - 2n_2 - 5) + 16M^2m^2(d - 2n_2 - 4)\mathbf{2}^+\Big] I(1, n_2, 1, 1) \\ &= \Big[(d - 2)\mathbf{1}^-(4m^2\mathbf{2}^+ + 1) - 4m^2\mathbf{3}^-\mathbf{4}^+(4M^2\mathbf{2}^+ + 1)\Big] I(1, n_2, 1, 1)\,.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Это соотношение позволяет понижать или повышать n_2 (интегралы в правой части (2.3.9) тривиальны). Таким образом, все интегралы (2.3.1) могут быть выражены через

$$I_0 = I(1, 0, 1, 1)\,, \qquad I_1 = I(1, 1, 1, 1)\,, \tag{2.3.10}$$

и тривиальные интегралы $T_{0,1}$ (2.3.3), точно в d измерениях.

Базисные интегралы $I_{0,1}$ в d измерениях выражаются через гипергеометрические функции ${}_3F_2$. Используя представление Меллина–Барнса [**95**] для массивного знаменателя $\mathcal{D}_1^{-n_1}$, мы получаем

$$I(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{M^{d-2n_1-2n_2}\, m^{d-2n_3-2n_4}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_3)\Gamma(n_4)}\, \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} ds \left(\frac{M^2}{m^2}\right)^s \Gamma(-s)\, \Gamma\left(n_1+n_2-\tfrac{d}{2}-s\right)$$
$$\times \frac{\Gamma(n_3+s)\,\Gamma(n_4+s)\,\Gamma\left(n_3+n_4-\frac{d}{2}+s\right)\,\Gamma(d-n_1-2n_2+2s)}{\Gamma(n_3+n_4+2s)\,\Gamma(d-n_1-n_2+s)}\,,$$

где n_i не обязательно целые. Здесь контур интегрирования разделяет левые и правые серии полюсов Γ функций в числителе подынтегрального выражения.

Если мы замкнем контур направо, то получится сумма по двум сериям полюсов

$$I(n_1,n_2,n_3,n_4) = (m^2)^{d-n_1-n_2-n_3-n_4}$$
$$\times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-n_1-n_2\right)\,\Gamma(n_1+n_2+n_3+n_4-d)\,\Gamma\left(n_1+n_2+n_3-\frac{d}{2}\right)\,\Gamma\left(n_1+n_2+n_4-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n_3)\,\Gamma(n_4)\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\,\Gamma(2n_1+2n_2+n_3+n_4-d)} \right.$$
$$\times\, {}_5F_4\left(\begin{array}{c} n_1+n_2+n_3-\frac{d}{2},\ n_1+n_2+n_4-\frac{d}{2},\ n_1+n_2+n_3+n_4-d,\ \frac{1}{2}n_1,\ \frac{1}{2}(n_1+1) \\ n_1+n_2+\frac{1}{2}(n_3+n_4)-\frac{d}{2},\ n_1+n_2+\frac{1}{2}(n_3+n_4+1)-\frac{d}{2},\ n_1+n_2-\frac{d}{2}+1,\ \frac{d}{2} \end{array} \left| \frac{M^2}{m^2} \right. \right)$$
$$+ \left(\frac{M^2}{m^2}\right)^{\frac{d}{2}-n_1-n_2} \frac{\Gamma\left(n_1+n_2-\frac{d}{2}\right)\,\Gamma\left(n_3+n_4-\frac{d}{2}\right)\,\Gamma(d-n_1-2n_2)}{\Gamma(n_1)\,\Gamma(n_3+n_4)\,\Gamma(d-n_1-n_2)}$$
$$\left. \times\, {}_5F_4\left(\begin{array}{c} n_3,\ n_4,\ n_3+n_4-\frac{d}{2},\ \frac{1}{2}(d-n_1-2n_2),\ \frac{1}{2}(d-n_1-2n_2+1) \\ \frac{1}{2}(n_3+n_4),\ \frac{1}{2}(n_3+n_4+1),\ d-n_1-n_2,\ \frac{d}{2}-n_1-n_2+1 \end{array} \left| \frac{M^2}{m^2} \right. \right) \right\}, \tag{2.3.11}$$

где

$${}_PF_Q\left(\begin{array}{c} a_1,\dots,a_P \\ c_1,\dots,c_Q \end{array} \left| z \right. \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \dots (a_P)_j}{(c_1)_j \dots (c_Q)_j}\, \frac{z^j}{j!}$$

— обобщенная гипергеометрическая функция, а $(a)_j = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера. Если мы замкнем контур налево, то получится более сложное выражение через гипергеометрические функции m^2/M^2, являющееся аналитическим продолжением (2.3.11). В тривиальных случаях $n_1 = 0$ и $n_3 = 0$ (или $n_4 = 0$), выражение (2.3.11) воспроизводит известные результаты в терминах Γ функций.

При целых (неотрицательных) значениях n_i, обе ${}_5F_4$ функции в (2.3.11) сводятся, при произвольном d, к конечным суммам ${}_3F_2$ функций того же аргумента. Например, для базисных интегралов $I_0 = I(1,0,1,1)$ и $I_1 = I(1,1,1,1)$ мы получаем

$$\frac{I_0}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = -\frac{(m^2)^{1-2\epsilon}}{\epsilon^2(1-\epsilon)} \left\{ \frac{1}{1-2\epsilon}\ {}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1, \frac{1}{2}, -1+2\epsilon \\ 2-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon \end{array} \middle| \frac{M^2}{m^2} \right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{M^2}{m^2}\right)^{1-\epsilon}\ {}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1, \epsilon, \frac{3}{2}-\epsilon \\ 3-2\epsilon, \frac{3}{2} \end{array} \middle| \frac{M^2}{m^2} \right) \right\},$$

$$\frac{I_1}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = -\frac{(m^2)^{-2\epsilon}}{\epsilon^2} \left\{ \frac{1}{2(1-\epsilon)(1+2\epsilon)}\ {}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1, \frac{1}{2}, 2\epsilon \\ 2-\epsilon, \frac{3}{2}+\epsilon \end{array} \middle| \frac{M^2}{m^2} \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{M^2}{m^2}\right)^{-\epsilon} \frac{1}{1-2\epsilon}\ {}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1, \epsilon, \frac{1}{2}-\epsilon \\ 2-2\epsilon, \frac{3}{2} \end{array} \middle| \frac{M^2}{m^2} \right) \right\},$$

точно в $d = 4-2\epsilon$ измерениях. При $M = m$ получаются представления в терминах ${}_3F_2$ функций единичного аргумента [**87**].

Разложения $I_{0,1}$ по ϵ до конечных членов можно получить, с большим или меньшим трудом, из любых двух независимых результатов, вычисленных в [**90, 74, 73, 9, 91, 92**]. Вводя безразмерную переменную

$$r = m/M$$

и дилогарифмические функции [**74, 73**]

$$L_+ = -\operatorname{Li}_2(-r) + \tfrac{1}{2}\log^2 r - \log r\ \log(1+r) - \tfrac{1}{6}\pi^2 = \operatorname{Li}_2(-r^{-1}) + \log r^{-1}\ \log(1+r^{-1}), \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned} L_- &= \operatorname{Li}_2(1-r) + \tfrac{1}{2}\log^2 r + \tfrac{1}{6}\pi^2 = -\operatorname{Li}_2(1-r^{-1}) + \tfrac{1}{6}\pi^2 \\ &= -\operatorname{Li}_2(r) + \tfrac{1}{2}\log^2 r - \log r\ \log(1-r) + \tfrac{1}{3}\pi^2 \quad (r \le 1) \\ &= \operatorname{Li}_2(r^{-1}) + \log r^{-1}\ \log(1-r^{-1}) \quad (r \ge 1)\,, \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

можно представить результаты для $I_{0,1}$ в виде

$$\frac{I_0}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = -\, M^{2-4\epsilon}\left[\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{5}{4\epsilon}+2(1-r^2)^2(L_+ + L_-) - 2\log^2 r + \frac{11}{8}\right]$$
$$- \, m^{2-4\epsilon}\left[\frac{1}{\epsilon^2}+\frac{3}{\epsilon} - 2\log r + 6\right] + O(\epsilon)\,, \tag{2.3.14}$$

$$\frac{I_1}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = M^{-4\epsilon}\left[\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{5}{2\epsilon}+2(1+r)^2 L_+ + 2(1-r)^2 L_- - 2\log^2 r + \frac{19}{2}\right] + O(\epsilon)\,. \tag{2.3.15}$$

Заметим, что

$$L_+ + L_- = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Li}_2(1-r^2) + \log^2 r + \tfrac{1}{12}\pi^2 = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Li}_2(1-r^{-2}) + \tfrac{1}{12}\pi^2\,. \tag{2.3.16}$$

Выражение (2.1.23) соответствует частному случаю более общего результата, представленного в [**93**]. Выражение (2.2.35) эквивалентно результату, представленному в [**91**]. Используя метод, подобный [**92**], можно получить этот результат так. Заметим, что $m^{4\epsilon} I_1$ и $m^{4\epsilon} I(2,0,1,1)$ безразмерны и зависят только от $r = m/M$. Из определения (2.3.1), (2.3.2) следует, что I_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$r^2 \frac{d}{dr}\left[r^{-1}\, m^{4\epsilon}\, I_1\right] = -m^{4\epsilon} I(2,0,1,1)\,. \tag{2.3.17}$$

Поэтому

$$m^{4\epsilon}\, I_1 = r \int\limits_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}\, m^{4\epsilon}\, I(2,0,1,1)\big|_{r\to\rho}\,. \tag{2.3.18}$$

Выражение для $I(2,0,1,1)$ можно найти в [**93**]:

$$\frac{I(2,0,1,1)}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = (M^2)^{-2\epsilon}\left[\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{1}{2\epsilon}-\frac{1}{2} - 2\log^2 r + 2(1-r^2)\,(L_+ + L_-)\right] + O(\epsilon)\,. \tag{2.3.19}$$

Подставляя (2.3.19) в (2.3.18), мы получаем (2.2.35).

Другой вывод следует методу, использовавшемуся в [**91**]. Интегралы (2.3.1) могут быть представлены в виде

$$I(n_1,n_2,n_3,n_4) = -\frac{i}{\pi^{d/2}} \int \frac{\Pi_{12}(k^2)\, d^d k}{\mathcal{D}_1^{n_1}\mathcal{D}_2^{n_2}}\bigg|_{p^2=M^2}\,, \quad \Pi_{n_3 n_4}(k^2) = -\frac{i}{\pi^{d/2}}\int \frac{d^d l}{\mathcal{D}_3^{n_3}\mathcal{D}_4^{n_4}}\,. \tag{2.3.20}$$

Например, для интегралов с $n_3 = 1$ и $n_4 = 2$ мы имеем

$$\Pi_{12}(k^2) = \frac{\lambda^2-1}{4m^2\lambda}\log\frac{\lambda+1}{\lambda-1} + O(\epsilon)\,, \quad \lambda = \sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}\,. \tag{2.3.21}$$

Как известно, $\Pi_{12}(k^2)$ можно представить в виде дисперсионного интеграла $\Pi_{12}(k^2) = \int ds\rho(s)/(s-k^2)$ (явная форма спектральной плотности $\rho(s)$ нам не потребуется).

В качестве первого примера, рассмотрим сходящийся интеграл $I(2,0,1,2)$. Подставляя спектральное представление для Π_{12}, объединяя знаменатели $\mathcal{D}_1^2$ и $(s-k^2)$ по формуле Фейнмана и вычисляя интегралы по k и s, мы получаем

$$I(2,0,1,2) = \int\limits_0^1 dx\, \frac{x}{1-x}\ \left.\Pi_{12}(k^2)\right|_{k^2=-\frac{M^2x^2}{1-x}} + O(\epsilon)\,. \tag{2.3.22}$$

В случае, скажем, $I(3,0,1,2)$, подынтегральное выражение содержит $\left.\left(d\Pi_{12}(k^2)/dk^2\right)\right|_{k^2=-M^2x^2/(1-}$
Второй пример — это $I(2,1,1,2)$. В этом случае, сингулярность на массовой поверхности может быть изолирована при помощи $\Pi_{12}(k^2) = \left[\Pi_{12}(k^2)-\Pi_{12}(0)\right] + \Pi_{12}(0)$. Заметим, что $\left[\Pi_{12}(k^2)-\Pi_{12}(0)\right]/k^2 = \int ds\rho(s)/[s(s-k^2)]$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{I(2,1,1,2)}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = -\frac{(Mm)^{-2-2\epsilon}}{4\epsilon} - \int\limits_0^1 dx\, \frac{x}{1-x}\ \left.\frac{\Pi_{12}(k^2)-\Pi_{12}(0)}{k^2}\right|_{k^2=-\frac{M^2x^2}{1-x}} + O(\epsilon)\,. \tag{2.3.23}$$

Интегралы с $n_2 > 1$ требуют больше вычитаний, а с $n_1 > 2$ содержат производные.

После подстановки (2.3.21), интегралы по x имеют вид

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{A(x)}{\lambda(x)}\log\frac{\lambda(x)+1}{\lambda(x)-1} + B(x)\right] dx\,, \tag{2.3.24}$$

где $\lambda(x) = \left.\lambda\right|_{k^2=-M^2x^2/(1-x)}$ (2.3.21)), а $A(x)$ и $B(x)$ — рациональные функции. Вводя новую переменную y,

$$y = \frac{x(\lambda(x)-1)}{2r}\,, \quad x = \frac{r(1-y^2)}{y+r}\,, \quad \frac{1}{\lambda(x)}\frac{dx}{dy} = -\frac{r(1-y^2)}{(y+r)^2} \tag{2.3.25}$$

(ее пределы изменения от 0 до 1), мы видим, что все выражения становятся рациональными:

$$\lambda(x) = \frac{1+2ry+y^2}{1-y^2}, \quad \frac{\lambda(x)+1}{\lambda(x)-1} = \frac{1+ry}{y(r+y)}\,. \tag{2.3.26}$$

Поэтому, интеграл (2.3.24) выражается через дилогарифмы. Таким образом, из (2.3.22) и (2.3.23) мы получаем

$$I(2,0,1,2) = \frac{L_+ + L_-}{M^2} + O(\epsilon)\,, \quad \frac{I(2,1,1,2)}{\Gamma^2(1+\epsilon)} = \frac{1}{4M^2 m^{2+4\epsilon}} \left[-\frac{1}{\epsilon} + r(L_+ - L_-) + 2 \right] + O(\epsilon)\,. \tag{2.3.27}$$

Этого достаточно, чтобы воспроизвести (2.1.23), (2.2.35).

Подобный метод можно применять к $I(n_1, n_2, n_3, n_4)$ с другими значениями n_i, если возможно произвести подходящие вычитания. Помимо вычитания $\Pi_{n_3 n_4}(0)$ (и высших членов ряда Тэйлора по k^2), можно попробовать вычесть $\Pi_{n_3 n_4}|_{m=0}$.

Вот еще некоторые интересные результаты:

$$\begin{aligned} I(1,0,2,2) &= -2\frac{L_+ + L_-}{M^2} - \frac{L_+ - L_-}{m^2} + O(\epsilon)\,, \\ I(2,0,2,2) &= \frac{1}{4M^2 m^2} \left[r(L_+ - L_-) + 2 - \frac{2r^2 \log r}{1 - r^2} \right] + O(\epsilon)\,. \end{aligned}$$

В частности, удобно выбрать сходящиеся интегралы $I(2,0,1,2)$ и $I(1,0,2,2)$ в качестве базисных.

Рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} (M^2)^{2-n_1-n_2} J(n_1, n_2) &= -\frac{i}{\pi^{d/2}} \int \frac{P(k^2, m) - P(k^2, 0)}{\mathcal{D}_1^{n_1} \mathcal{D}_2^{n_2}} d^d k = I(n_1, n_2, 1, 1)|_{m=0} \\ &- I(n_1, n_2, 1, 1) + 2I(n_1, n_2+1, 1, 0) + \frac{4m^2}{d-2} I(n_1, n_2+1, 1, 1)\,, \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

где

$$\begin{aligned} P(k^2, m) &= -\left(1 + \frac{4m^2}{(d-2)k^2}\right) \Pi_{11}(k^2) - \frac{2}{k^2}\Pi_{10} \\ &= m^{-2\epsilon}\Gamma(1+\epsilon) \left[-\frac{1}{\epsilon} + \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \left(\lambda \log \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - 2 \right) \right] + O(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

пропорционально вкладу кварковой петли в глюонный поляризационный оператор. Когда интеграл не содержит ни ультрафиолетовых, ни инфракрасных расходимостей, его можно вычислять в 4 измерениях. Усредняя $1/\mathcal{D}_1^{n_1}$ по направлениям k в четырехмерном евклидовом пространстве, мы получаем $A_{n_1}/\mathcal{D}_2^{n_1}$, где $A_0 = A_{-1} = 1$, $A_1 = x$, $A_2 = x^2/(2-x)$, и

$k^2 = -M^2x^2/(1-x)$. Поэтому, сходящиеся интегралы даются формулами

$$J(n_1, n_2) = \int\limits_0^1 \Phi_{n_1 n_2}(x) \left[P(k^2, m) - P(k^2, 0)\right]_{k^2 = -\frac{M^2x^2}{1-x}} dx\,, \tag{2.3.30}$$
$$\Phi_{n_1 n_2}(x) = A_{n_1}(x) x^{3-2n_1-2n_2}(1-x)^{n_1+n_2-3}(2-x)\,.$$

Определим [**9**]

$$\begin{aligned}
\Delta_1(r) &= \tfrac{1}{6}\left[2J(1,1) + J(2,0)\right] = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 dx \frac{4-x}{1-x}\left[P(k^2, m) - P(k^2, 0)\right]_{k^2 = -\frac{M^2x^2}{1-x}} \\
&= -(1+r)L_+(r) - (1-r)L_-(r) + \log^2 r + \zeta(2)\,, \\
\Delta_2(r) &= \tfrac{1}{3}\left[J(1,1) - J(2,0)\right] = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 dx \left[P(k^2, m) - P(k^2, 0)\right]_{k^2 = -\frac{M^2x^2}{1-x}} \\
&= -r(1-r^2)L_+(r) + r(1-r^2)L_-(r) + 2r^2(\log r + 1)\,, \qquad (2.3.31) \\
\Delta_3(r) &= \tfrac{1}{6}\left[J(0,1) - J(1,0) - J(2,0)\right] = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 dx\, x \left[P(k^2, m) - P(k^2, 0)\right]_{k^2 = -\frac{M^2x^2}{1-x}} \\
&= -r^3(1+r)L_+(r) + r^3(1-r)L_-(r) - r^2\left(\log r + \frac{3}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Явные выражения для Δ_i (получаемые при помощи подстановки (2.3.25)) дают три независимых проверки наших базисных интегралов. Интеграл, вычисленный в [**74**] — это $\Delta = \frac{1}{4}(\Delta_1 + \Delta_3)$.

Разлагая (2.3.31) при $r \ll 1$ и $r \gg 1$, мы получаем

$$\Delta_k(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[2g_k(2n)\log r + \frac{dg_k(2n)}{dn}\right] r^{2n} + \delta_k\,, \tag{2.3.32}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-2g_k(-2n)\log r + \frac{dg_k(-2n)}{dn}\right] r^{-2n} + \overline{\delta}_k\,, \tag{2.3.33}$$

$$g_1(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,, \quad g_1(0) \to -1\,, \quad \left.\frac{dg_1(-2n)}{dn}\right|_{n=0} \to 2\,,$$
$$\delta_1 = 3\zeta(2)r\,, \quad \overline{\delta}_1 = \log^2 r + \zeta(2)\,,$$
$$g_2(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}\,, \quad \delta_2 = 3\zeta(2)r(1-r^2)\,, \quad \overline{\delta}_2 = 0\,,$$
$$g_3(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\,, \quad g_3(4) \to 1\,, \quad \left.\frac{dg_3(2n)}{dn}\right|_{n=2} \to -2\,,$$
$$\delta_3 = -r^4 \log^2 r + 3\zeta(2) r^3 \left(1 - \tfrac{1}{3} r\right)\,, \quad \overline{\delta}_3 = 0\,.$$

Вклады внешнего флейвора с $m = M$ получаются из

$$\Delta_1(1) = 2\zeta(2)\,, \quad \Delta_2(1) = 2\,, \quad \Delta_3(1) = \zeta(2) - \tfrac{3}{2}\,. \tag{2.3.34}$$

Интегралы

$$(M^2)^{2-n_1-n_2} \bar{J}(n_1, n_2) = -\frac{i}{\pi^{d/2}} \int \frac{P(k^2, m) - P(0, m)}{\mathcal{D}_1^{n_1} \mathcal{D}_2^{n_2}} d^d k = \frac{2(d-1)}{3(d-2)} I(n_1, n_2, 2, 0)$$
$$- I(n_1, n_2, 1, 1) + 2I(n_1, n_2+1, 1, 0) + \frac{4m^2}{d-2} I(n_1, n_2+1, 1, 1) \tag{2.3.35}$$

имеют лучшую инфракрасную сходимость, но худшую ультрафиолетовую. Определим $\bar{\Delta}_{1,2,3}$ как

$$\bar{J}(2, 1) = \bar{\Delta}_1\,, \quad \bar{J}(2, 0) - \bar{J}(1, 1) = \bar{\Delta}_2\,, \tag{2.3.36}$$
$$\bar{J}(0, 1) - \bar{J}(1, 0) - \bar{J}(1, 1) = \bar{\Delta}_3 + \frac{\epsilon}{2-\epsilon} \bar{J}(0, 2)\,. \tag{2.3.37}$$

Последняя комбинация интегралов довольно интересна. При $k \to \infty$, комбинация знаменателей ведет себя как

$$\frac{1}{M^2 \mathcal{D}_2} - \frac{1}{M^2 \mathcal{D}_1} - \frac{1}{\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2} \Rightarrow \frac{\epsilon}{(2-\epsilon)\, k^4} + O\left(\frac{1}{k^6}\right)\,,$$

где члены, обращающиеся в ноль при усреднении по направлениям k, опущены в правой части. Член $O(1/k^6)$ дает ультрафиолетово–сходящийся интеграл. Член $O(\epsilon/k^4)$ мог бы быть опущен при наличии сколь угодно большого ультрафиолетового обрезания. Без обрезания, он дает чисто ультрафиолетовый вклад (подобный аксиальной аномалии, см. §7.2 учебника [**30**]) $\epsilon \bar{J}(0, 2)/(2-\epsilon)$. Член $\bar{\Delta}_3$ может быть вычислен при $d = 4$ через сходящееся интегральное представление с $\Phi_{01}(x) - \Phi_{10}(x) - \Phi_{11}(x)$. Используя (2.3.25), мы получаем

$$\bar{\Delta}_1 = \tfrac{1}{4}(1+r)(4-r+r^2)L_+ + \tfrac{1}{4}(1-r)(4+r+r^2)L_- + \left(\tfrac{5}{3}+\tfrac{1}{2}r^2\right)\log r + \tfrac{14}{9} + \tfrac{1}{2}r^2\,,$$
$$\bar{\Delta}_2 = 3r(1-r^2)(L_+ - L_-) + 2(2-3r^2)\log r + \tfrac{16}{3} - 6r^2\,,$$
$$\bar{\Delta}_3 = 3r(1+r)^2(1-2r)L_+ - 3r(1-r)^2(1+2r)L_- - 3(1-4r^2)\log r + \tfrac{19}{4} - 15r^2\,,$$

что дает еще три независимых проверки наших базисных интегралов. Интеграл, вычисленный в [**73**] — это $\bar{\Delta} = \frac{1}{16}(4\bar{\Delta}_1 + 3\bar{\Delta}_2 - 2\bar{\Delta}_3)$.

При вычислении диаграмм типа Рис. 2.7 с числителями, невозможно выразить $l \cdot p$ через $\mathcal{D}_{1\ldots4}$. Поэтому появляются скалярные интегралы, подобные (2.3.1), но содержащие добавочные числители. Определим интеграл

$$\widetilde{I}(n_1,n_2,n_3,n_4;n_0) = -\frac{1}{\pi^d}\int \frac{d^dk\,d^dl\,\mathcal{N}^{n_0}}{\mathcal{D}_1^{n_1}\mathcal{D}_2^{n_2}\mathcal{D}_3^{n_3}\mathcal{D}_4^{n_4}}\bigg|_{p^2=M^2}\,. \tag{2.3.38}$$

По сравнению с (2.3.1), он содержит множитель $\mathcal{N}^{n_0}$ в числителе, где $n_0 \ge 0$ и

$$\mathcal{N} = (2l-k)\cdot p\,. \tag{2.3.39}$$

Делая замену импульса интегрирования $l \leftrightarrow k-l$, мы получаем

$$\widetilde{I}(n_1,n_2,n_4,n_3;n_0) = (-1)^{n_0}\widetilde{I}(n_1,n_2,n_3,n_4;n_0)\,.$$

В частности, при $n_3 = n_4$ интегралы с нечетным n_0 обращаются в ноль. Интегралы с $n_{3,4} \le 0$ или $n_1 \le 0$ тривиальны, как и раньше.

В принципе, интегралы (2.3.38) можно вычислять, обобщая подстановки типа $p\cdot l \to (p\cdot k)(k\cdot l)/k^2$ на $n_0 > 1$. Однако, они быстро становятся очень громоздкими. Мы используем рекурсивный метод, основанный на интегрировании по частям. Действуя оператором $\frac{\partial}{\partial k}\cdot p$ на подынтегральное выражение, мы получаем рекуррентное соотношение

$$n_4\mathbf{4}^+\mathbf{0}^+\widetilde{I} = \left[-n_1 + n_2 - M^2 n_0\mathbf{0}^- + n_1(\mathbf{2}^- + 2M^2)\mathbf{1}^+ - n_2\mathbf{1}^-\mathbf{2}^+ - \tfrac{1}{2}n_4(\mathbf{1}^- - \mathbf{2}^-)\mathbf{4}^+\right]\widetilde{I}\,. \tag{2.3.40}$$

Мы можем полагать $n_4 \ge n_3$; если $n_4 > 1$, то n_0 и n_4 могут быть оба понижены при помощи (2.3.40). Таким образом, у нас остаются известные интегралы и $\widetilde{I}(n_1,n_2,1,1;n_0)$

с четными n_0. Действуя оператором $\frac{\partial}{\partial k} \cdot l$ на подынтегральное выражение, мы получаем при $n_3 = n_4 = 1$

$$\begin{aligned}
&n_1 \mathbf{1}^+ \mathbf{0}^+ \widetilde{I}(n_1, n_2, 1, 1; n_0) \\
&= \left[-\tfrac{1}{4} n_0 (\mathbf{1}^- - \mathbf{2}^-)\mathbf{0}^- + 2n_1 \mathbf{3}^- \mathbf{1}^+ + 2n_2 \mathbf{3}^- \mathbf{2}^+ + (\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^- + 2m^2)\mathbf{4}^+\right] \widetilde{I}(n_1, n_2, 1, 1; n_0) .
\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Если $n_1 > 1$, то n_0 и n_1 могут быть оба понижены при помощи (2.3.41). Теперь у нас остаются известные интегралы и $\widetilde{I}(1, n_2, 1, 1; n_0)$ с четными n_0. Наконец, действуя оператором $\frac{\partial}{\partial l} \cdot l$ на подынтегральное выражение, мы получаем при $n_1 = n_3 = n_4 = 1$

$$(d + n_0 - 3)\widetilde{I}(1, n_2, 1, 1; n_0) = -(\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^- + 4m^2)\mathbf{4}^+ \widetilde{I}(1, n_2, 1, 1; n_0) . \tag{2.3.42}$$

Правая часть содержит интегралы с тем же n_0, но с $n_4 > 1$; в них, n_0 можно снова понижать при помощи (2.3.40). Таким образом, более общие интегралы (2.3.38) также сводятся к базисным, $I_{0,1}$ и $T_{0,1}$.

Сначала мы вычислим вклад флейвора с массой m (скажем, c кварка) в перенормировку массы и волновой функции в схеме на массовой поверхности флейвора с массой M (скажем, b кварка) (Рис. 2.7). Результаты имеют вид

$$\Delta Z_M = T_F C_F \frac{g_0^4}{(4\pi)^d} \left[-\frac{(d-2)^2(d-5)}{(d-3)(d-6)M^4} \left(\frac{T_0}{2r^2} + T_1 \right) - \frac{d^2 - 9d + 16}{(d-6)M^2} I_0 + \frac{4(d-5)(1+r^2)}{d-6} I_1 \right], \tag{2.3.43}$$

$$\Delta Z_Q = T_F C_F \frac{g_0^4}{(4\pi)^d} \frac{d-1}{1-r^2} \sum_{i=1}^{4} a_i J_i \,, \tag{2.3.44}$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{(d-2)^2 T_0}{(d-3)(d-5)(d-6)M^2 m^2} \,, \quad J_2 = \frac{(d-2)^2 T_1}{(d-1)(d-3)(d-6)M^4} \,, \\
J_3 &= \frac{I_0}{(d-1)(d-6)M^2} \,, \quad J_4 = \frac{I_1}{(d-1)(d-6)} \,,
\end{aligned}$$

с коэффициентами

$$
\begin{aligned}
a_1 =&(2d^4r^4 - d^4r^2 - 39d^3r^4 + 21d^3r^2 - 2d^3 + 272d^2r^4 - 159d^2r^2 + 30d^2 \\
&- 789dr^4 + 509dr^2 - 144d + 770r^4 - 566r^2 + 216)/\left[4(d-2)(d-7)r^2\right], \\
a_2 =&(d^2 + 5dr^2 - 12d - 25r^2 + 31)/2\,, \\
a_3 =&(2d^3r^2 + d^3 - 17d^2r^2 - 12d^2 + 27dr^2 + 47d + 8r^2 - 56)/2\,, \\
a_4 =&2(d^3r^2 - 12d^2r^2 + d^2 - 5dr^4 + 45dr^2 - 6d + 25r^4 - 54r^2 + 5)\,.
\end{aligned}
$$

После разложения по ϵ до конечных членов, эти формулы воспроизводят результаты [**74, 73**].

В случае $m = 0$,

$$
T_0 = T_1 = 0\,, \quad I_1 = -\frac{3d-8}{4(2d-7)} M^2 I_0\,. \tag{2.3.45}
$$

Заметим, что I_0 при $m = 0$ назывался $-M^{2d-6} I_1$ в предыдущем параграфе. ΔZ_Q содержит член $J_1/r^2 \sim T_0/m^4$, который не стремится к нулю при $m \to 0$. Это означает, что нет гладкого предела $m \to 0$ в ΔZ_Q [**73**]. Опуская члены $T_{0,1}$ и затем полагая $m = 0$, мы воспроизводим результаты [**74, 73**] для вкладов безмассового кварка, точно в d измерениях.

В случае $m \to M$,

$$
\begin{aligned}
&T_1 = T_0 \left[1 + \frac{d-2}{2}(1-r^2)\right] + O\big((1-r^2)^2\big)\,, \\
&I_1 = -\frac{3d-8}{4(d-4)M^2} I_0 \left[1 + \frac{1-r^2}{2}\right] - \frac{3(d-2)^2}{8(d-3)(d-4)M^4} T_0 \left[1 + \frac{2d+3}{6}(1-r^2)\right] \\
&\quad + O\big((1-r^2)^2\big)\,.
\end{aligned} \tag{2.3.46}
$$

Заметим, что T_0 и I_0 при $m = M$ назывались $M^{2d-4} I_0^2$ и $-M^{2d-6} I_2$ в предыдущем параграфе. Используя это, мы воспроизводим результаты [**74, 73**] для вкладов кварка массы M, точно в d измерениях.

Теперь мы вычислим вклад $\Delta\mu$ флейвора с массой m (скажем, c) в хромомагнитный момент кварка с массой M (скажем, b) (Рис. 2.6c), используя перенормировку волновой функции (2.3.44). Мы применяем метод фонового поля [**84**]. Разрыв в пределе $m \to 0$ в C_F члене сокращается с Z_Q, но в C_A члене он все еще присутствует. Мы воспроизводим результаты для $m = 0$ (опуская $T_{0,1}$ члены) и $m = M$ из предыдущего параграфа, точно в d измерениях.

Комбинируя этот результат с соответствующим HQET членом (2.2.30), мы получаем

$$\Delta\mu - \Delta\widetilde{\mu}_0 = T_F \frac{g_0^4}{(4\pi)^d} \frac{1}{1-r^2} \left[C_F \sum_{i=1}^{4} a_{Fi} J_i + C_A \sum_{i=1}^{4} a_{Ai} J_i \right], \tag{2.3.47}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
a_{F1} =& (d^3 r^2 - 11 d^2 r^2 - 3d^2 + 33 d r^2 + 30 d - 19 r^2 - 71)/2\,,\\
a_{F2} =& -(d^3 r^2 - 2d^3 - 17 d^2 r^2 + 27 d^2 + 89 d r^2 - 116 d - 133 r^2 + 151)\,,\\
a_{F3} =& d^4 r^2 + 2d^4 - 7d^3 r^2 - 31 d^3 - 7 d^2 r^2 + 168 d^2 + 105 d r^2 - 375 d - 152 r^2 + 296\,,\\
a_{F4} =& 4(d^4 r^2 + d^3 r^4 - 15 d^3 r^2 - 17 d^2 r^4 + 85 d^2 r^2 - d^2 + 89 d r^4 - 221 d r^2 + 6d\\
& - 133 r^4 + 210 r^2 - 5)\,,\\
a_{A1} =& -(d^3 - d^2 r^2 - 13 d^2 + 11 d r^2 + 52 d - 26 r^2 - 64)/8\,,\\
a_{A2} =& (2d^3 r^2 - 3d^3 - 29 d^2 r^2 + 39 d^2 + 129 d r^2 - 156 d - 182 r^2 + 200)/4\,,\\
a_{A3} =& -(3d-8)(d^3 + d^2 r^2 - 11 d^2 - 11 d r^2 + 38 d + 26 r^2 - 44)/4\,,\\
a_{A4} =& -(d^4 r^2 + 2d^3 r^4 - 18 d^3 r^2 + 2d^3 - 29 d^2 r^4 + 114 d^2 r^2 - 18 d^2\\
& + 129 d r^4 - 299 d r^2 + 44 d - 182 r^4 + 282 r^2 - 28)\,.
\end{aligned}$$

Разрыв в пределе $m \to 0$ в C_A члене сократился. Разность этого вклада и вклада безмассового флейвора конечна при $\epsilon \to 0$; она показывает, насколько изменяется коэффициент хромомагнитного взаимодействия b кварка из–за включения ненулевой массы c кварка:

$$\begin{aligned}
&\Delta C_m = T_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[8 C_F A_F + \frac{4}{3} C_A A_A \right], \qquad (2.3.48)\\
&A_F = -r(1+r)(1-r-4r^2) L_+ + r(1-r)(1+r-4r^2) L_- + 6r^2 \left(\log r + \tfrac{4}{3}\right),\\
&A_A = -(1+r)(2+4r-r^2) L_+ - (1-r)(2-4r-r^2) L_- + 2\log^2 r + \tfrac{1}{3}\pi^2 + 2r^2(\log r + 1)
\end{aligned}$$

(заметим, что $A_F = \Delta_2 - 4\Delta_3$). Эта разность обращается в нуль при $r \to 0$, тогда как при $r = 1$ она воспроизводит результат предыдущего параграфа (вариант с петлей тяжелого кварка в HQET).

В случае квантовой электродинамики ($T_F = 1$, $C_F = 1$, $C_A = 0$, $\alpha_s \to \alpha$), формула (2.3.48) тесно связана с вкладом лептона массы m (скажем, e или τ) в магнитный момент лептона массы M (скажем, μ). Прибавляя безмассовый вклад (который был вычтен в (2.3.48)) и выражая $\overline{\text{MS}}$ заряд в однопетлевом члене через заряд на массовой поверхности $\alpha(M) = \alpha\,(1 - \frac{2\alpha}{3\pi}\log r)$, мы находим, что этот вклад дается формулой (2.3.48) с $A_F \to A_F - \frac{2}{3}\log r - \frac{25}{18}$. Он был получен в [**90**]; наш результат согласуется с этой статьей (и имеет более простую форму).

Разлагая (2.3.48) при $r \ll 1$ и $r \gg 1$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
A_F &= \tfrac{1}{2}\pi^2 r + 2(4\log r + 3)r^2 - \tfrac{5}{2}\pi^2 r^3 + 2\left(2\log^2 r - \tfrac{14}{3}\log r + \tfrac{1}{3}\pi^2 + \tfrac{44}{9}\right) r^4 \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty}\left(2g_F(2n)\log r + \frac{dg_F(2n)}{dn}\right) r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-2g_F(-2n)\log r + \frac{dg_F(-2n)}{dn}\right) r^{-2n}\,, \\
A_A &= 3\pi^2 r + 3\left(\log^2 r + 4\log r + \tfrac{1}{6}\pi^2 - 3\right) r^2 - \tfrac{1}{2}\pi^2 r^3 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(2g_A(2n)\log r + \frac{dg_A(2n)}{dn}\right) r^{2n} \\
&= 2\log^2 r + \tfrac{43}{3}\log r + \tfrac{1}{3}\pi^2 + \tfrac{239}{18} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2g_A(-2n)\log r + \frac{dg_A(-2n)}{dn}\right) r^{-2n}\,, \\
g_F(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-3} + \frac{4}{x-4}\,, \quad g_A(x) = -\frac{2}{x} + \frac{6}{x-1} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}\,.
\end{aligned}
$$

Прибавляя $(-\frac{2}{3}\log r - \frac{25}{18})$ к разложениям A_F, мы получаем разложения вклада лептона массы m в магнитный момент лептона массы M в КЭД; они согласуются с разложениями результата [**90**], полученными в [**96**]. Легко также получить любое желаемое число членов разложений при $r \to 1$, используя выражения для L_- через $1 - r$ или $1 - r^{-1}$ (2.3.13) и для $L_+ + L_-$ через $1 - r^2$ или $1 - r^{-2}$ (2.3.16).

Комбинируя (2.3.48) с результатом для $m_c = 0$ (2.2.41), мы получаем численно

$$
C_m(m_b) = 1 + \frac{13}{6}\frac{\alpha_s(m_b)}{\pi} + (14.1439 + \Delta(m_c/m_b))\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2\,, \quad \Delta(0.3 \pm 0.03) = 0.98 \pm 0.07\,. \tag{2.3.49}
$$

Влияние m_c приводит к умеренному увеличению C_m.

2.4. Высшие поправки к хромомагнитному взаимодействию

Ряд теории возмущений для $C_m(\mu)$ можно переписать через β_0 вместо n_f:

$$C_m(\mu) = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{L-1} a_{Ln} \beta_0^n \alpha_s^L = 1 + \frac{1}{\beta_0} f(\beta_0 \alpha_s) + O\left(\frac{1}{\beta_0^2}\right), \tag{2.4.1}$$

где L — число петель. В этом параграфе мы вычислим $C_m(\mu)$ с точностью $1/\beta_0$, пренебрегая $1/\beta_0^2$ членами. Строго говоря. не существует разумного предела КХД, в котором β_0 может считаться большим параметром (кроме, быть может, $n_f \to -\infty$). Однако, удержание только старших степеней β_0 часто дает хорошее приближение к точным многопетлевым результатам (наивная неабелианизация, см. §2.5). Во всяком случае, это дает некоторую информацию о суммируемости ряда теории возмущений.

В первом порядке по $1/\beta_0$, мультипликативные перенормировки сводятся к вычитанию $1/\beta_0$ членов; перенормировка константы связи имеет вид

$$\frac{\beta_0 g_0^2}{(4\pi)^2} = \overline{\mu}^{2\epsilon} \frac{\beta}{1 + \beta/\epsilon}, \quad \beta = \frac{\beta_0 \alpha_s}{4\pi} = \frac{1}{2 \log \mu / \Lambda_{\overline{\text{MS}}}}. \tag{2.4.2}$$

Ряд теории возмущений (2.4.1) может быть переписан как

$$C_m(\mu) = 1 + \frac{1}{\beta_0} \sum_{L=1}^{\infty} \frac{F(\epsilon, L\epsilon)}{L} \left(\frac{\beta}{\epsilon + \beta}\right)^L - (\text{subtractions}) + O\left(\frac{1}{\beta_0^2}\right). \tag{2.4.3}$$

Следуя методам [**97, 98**] (см. также [**9**]), мы разлагаем $F(\epsilon, u)$ по степеням ϵ и u, а также $(\beta/(\epsilon + \beta))^L$ по степеням β/ϵ, и получаем четверной ряд в (2.4.3). Комбинаторные тождества связывают $1/\epsilon$ члены, и потому аномальную размерность хромомагнитного оператора, с Тэйлоровскими коэффициентами $F(\epsilon, 0)$ [**97**]:

$$\tilde{\gamma}_m = \frac{2\beta}{\beta_0} F(-\beta, 0) + O\left(\frac{1}{\beta_0^2}\right). \tag{2.4.4}$$

Конечные члены получают вклады от Тэйлоровксих коэффициентов $F(\epsilon, 0)$ и $F(0, u)$ [**98**]:

$$C_m(\mu) = 1 + \frac{1}{\beta_0} \int\limits_{-\beta}^{0} d\epsilon \frac{F(\epsilon, 0) - F(0, 0)}{\epsilon} + \frac{1}{\beta_0} \int\limits_{0}^{\infty} du\, e^{-u/\beta} \frac{F(0, u) - F(0, 0)}{u} + O\left(\frac{1}{\beta_0^2}\right). \tag{2.4.5}$$

Разделяя в (2.4.5) члены, зависящие от m и от μ, мы получаем ренорминвариантную функцию δc (2.2.26) в виде

$$\delta c = \frac{1}{\beta_0} \int\limits_0^\infty du\, e^{-\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s} u} S(u) + O\left(\frac{1}{\beta_0^2}\right), \quad S(u) = e^{-\frac{5}{3}u} \left. \frac{F(0,u) - F(0,0)}{u} \right|_{\mu=m}, \tag{2.4.6}$$

где α_s берется при $\mu = m$ в V–схеме, и

$$\exp\left(-\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s} u\right) = \left(\frac{\Lambda_V}{m}\right)^{-2u}. \tag{2.4.7}$$

Тот же результат (2.4.5) можно получить, разлагая (2.2.23) при большом β_0. Функция $S(u)$ представляет собой борелевский образ ряда теории возмущений для δc.

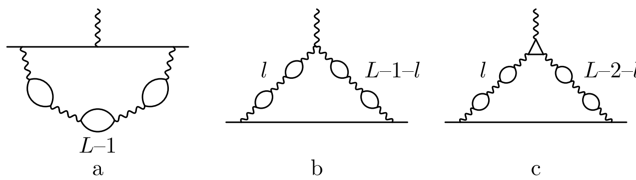


Рис. 2.9. L–петлевые диаграммы с $L-1$ кварковыми петлями.

Коэффициент $C_m(\mu)$ получается сшивкой амплитуд рассеяния кварка на массовой поверхности во внешнем поле в линейном порядке по q в КХД и HQET. Коэффициент при старшей степени β_0 определяется L–петлевыми диаграммами с $L-1$ кварковыми петлями. Все HQET диаграммы обращаются в ноль, поскольку они не содержат масштаба. КХД диаграммы показаны на Рис. 2.9. Все члены сумм Рис. 2.9b, с одинаковы, так что суммирование по l просто дает множитель $L = u/\epsilon$ или $L-1$, соответственно. Результаты имеют вид

$$F(\epsilon, u) = \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2u} e^{\gamma\epsilon} \frac{\Gamma(1+u)\Gamma(1-2u)}{\Gamma(3-u-\epsilon)} D(\epsilon)^{u/\epsilon - 1} N(\epsilon, u), \tag{2.4.8}$$

где

$$D(\epsilon) = 6 e^{\gamma\epsilon} \Gamma(1+\epsilon) B(2-\epsilon, 2-\epsilon) = 1 + \tfrac{5}{3}\epsilon + \cdots \tag{2.4.9}$$

пропорционально вкладу петли легкого кварка, а вклады диаграмм равны

$$\begin{aligned}
&N_a = (2C_F - C_A)(3 + 2u - u^2 - 5\epsilon + 3\epsilon u - 2\epsilon u^2 + 2\epsilon^2 - 2\epsilon^2 u)\,,\\
&N_b = C_A(5 - 2u - 3\epsilon)\frac{u}{\epsilon}\,,\\
&N_c = -C_A\frac{10 - 4u - 28\epsilon + 9\epsilon u + 23\epsilon^2 - 4\epsilon^2 u - 6\epsilon^3}{2(1-\epsilon)}\left(\frac{u}{\epsilon} - 1\right)\,.
\end{aligned}$$

Кроме того, необходимо учесть вклад константы перенормировки волновой функции, умноженной на результат древесного приближения:

$$N_z = -2C_F(3 - 2\epsilon)(1 - u)(1 + u - \epsilon)\,. \tag{2.4.10}$$

Окончательно мы получаем

$$\begin{aligned}
&N(\epsilon, u) = C_F N_F(\epsilon, u) + C_A N_A(\epsilon, u)\,, \quad N_F(\epsilon, u) = 4u(1 + u - 2\epsilon u)\,, \qquad (2.4.11)\\
&N_A(\epsilon, u) = \frac{2 - u - \epsilon}{2(1-\epsilon)}(2 + 3u - 5\epsilon - 6\epsilon u + 2\epsilon^2 + 4\epsilon^2 u)\,.
\end{aligned}$$

Эти формулы воспроизводят известные результаты для $L = u/\epsilon = 1$ и 2 (см. §2.2).

Вычислив $F(\epsilon, u)$, мы можем легко получить аномальную размерность и $C_m(\mu)$ с $1/\beta_0$ точностью. Аномальная размерность

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_m &= C_A\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{\beta(1+2\beta)\Gamma(5+2\beta)}{24(1+\beta)\Gamma^3(2+\beta)\Gamma(1-\beta)} \qquad (2.4.12)\\
&= C_A\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[1 + \frac{13}{6}\frac{\beta_0\alpha_s}{4\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_0\alpha_s}{4\pi}\right)^2 - 2\zeta(3)\left(\frac{\beta_0\alpha_s}{4\pi}\right)^3 + \cdots\right]
\end{aligned}$$

воспроизводит ведущий β_0 член двухпетлевого результата (2.2.39) $\tilde{\gamma}_m = C_A\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[1 + (13\beta_0 - 25C_A)\frac{\alpha_s}{24\pi}\right]$. Ряд теории возмущений (2.4.12) сходится, радиус сходимости $\beta_0|\alpha_s| < 4\pi$.

Далее, полагая $\mu = m$ в (2.4.5) мы получаем

$$\begin{aligned}
C_m(m) =& 1 + \frac{\alpha_s(m)}{4\pi}\left\{2(C_F + C_A) + \left[\frac{25}{3}C_F + \left(\frac{299}{36} + \frac{\pi^2}{3}\right)C_A\right]\frac{\beta_0\alpha_s(m)}{4\pi}\right. \qquad (2.4.13)\\
&\left. + \left[\left(\frac{317}{9} + \frac{4}{3}\pi^2\right)C_F + \left(\frac{3535}{162} + \frac{25}{9}\pi^2 + \frac{14}{3}\zeta(3)\right)C_A\right]\left(\frac{\beta_0\alpha_s(m)}{4\pi}\right)^2 + \cdots\right\},
\end{aligned}$$

что воспроизводит ведущий β_0 член двухпетлевого результата (2.2.40) $C_m(m) = 1 + \frac{13}{6}\frac{\alpha_s(m)}{\pi} + (2.869\beta_0 - 9.761)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$.

Наконец, приведем результаты для поправки δc (2.2.26). Разлагая (2.2.23) по константе связи, мы получаем коэффициенты

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 2C_F + \frac{25}{6}C_A + O(1/\beta_0)\,,\\
c_2 &= \left[\frac{25}{3}C_F + \left(\frac{145}{18} + \frac{\pi^2}{3}\right)C_A\right]\beta_0 + O(\beta_0^0)\,,\\
c_3 &= \left[\left(\frac{317}{9} + \frac{4}{3}\pi^2\right)C_F + \left(\frac{3535}{162} + \frac{25}{9}\pi^2 + 4\zeta(3)\right)C_A\right]\beta_0^2 + O(\beta_0)\,.
\end{aligned}
\tag{2.4.14}
$$

Результат для c_1 воспроизводит ведущий β_0 член точного двухпетлевого результата (§2.2)

$$
c_1 = \left(\frac{25}{6}C_A + 2C_F\right) - \left(\frac{55}{6}C_A + 3C_F\right)\frac{C_A}{\beta_0} + (7C_A + 11C_F)\frac{C_A^2}{\beta_0^2}\,. \tag{2.4.15}
$$

Хотя мы не ожидаем, что высшие коэффициенты, полученные в пределе больших β_0, аккуратно воспроизводят точные значения, мы доверяем качественным чертам этих результатов. Это позволяет получить численную оценку NNLO поправки c_2. Разлагая (2.2.23) до второго порядка по $\alpha_s(m)$ и подставляя трехпетлевую β–функцию, двухпетлевой коэффициент $C_m(m)$ (§2.2) и аномальную размерность $\tilde{\gamma}_m$, мы получаем выражение для c_2, зависящее от неизвестного трехпетлевого коэффициента в аномальной размерности $\tilde{\gamma}_2$. Поскольку аномальная размерность обращается в ноль в абелевом случае [**49**], мы записываем его в виде $\tilde{\gamma}_2 = C_A(-\beta_0^2 + \eta_1\beta_0 + \eta_0)$, где η_1, η_0 неизвестны. Затем мы разлагаем $c_2 = d_{-1}\beta_0 + \sum_{n=0}^{4} d_n(C_A/\beta_0)^n$ и получаем

$$
\begin{aligned}
d_{-1} =& \frac{25}{3}C_F + \left(\frac{145}{18} + \frac{\pi^2}{3}\right)C_A = \frac{635}{18} + \pi^2\,,\\
d_0 =& \left(-31 + \frac{20}{3}\pi^2\right)C_F^2 + \left(-\frac{23}{24} + \frac{4}{3}\pi^2\right)C_F C_A + \left(-\frac{49}{48} - \frac{28}{9}\pi^2\right)C_A^2\\
&+ \left(\frac{476}{9} - \frac{16}{3}\pi^2\right)C_F T_F + \left(-\frac{298}{27} + \pi^2\right)C_A T_F + \frac{\eta_1}{4}C_A\\
&+ \left(\frac{4}{3}\pi^2\log 2 - 2\zeta(3)\right)(C_A^2 + C_F C_A - 6C_F^2)\\
=& -\frac{21353}{432} - \frac{695}{54}\pi^2 + \frac{28}{9}\pi^2\log 2 - \frac{14}{3}\zeta(3) + \frac{3}{4}\eta_1\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
d_1 =& -\frac{3}{4}C_F^2 + \frac{31}{8}C_F C_A - \frac{275}{18}C_A^2 + \frac{\eta_0}{4} = -\frac{370}{3} + \frac{1}{4}\eta_0\,,\\
d_2 =& -\frac{37}{4}C_F^2 + \frac{5}{4}C_F C_A + \frac{6491}{144}C_A^2 = \frac{56771}{144}\,,\\
d_3 =& \frac{55}{2}C_F^2 - \frac{269}{6}C_F C_A - \frac{119}{3}C_A^2 = -\frac{4387}{9}\,,\\
d_4 =& \frac{121}{2}C_F^2 + 77 C_F C_A + \frac{49}{2}C_A^2 = \frac{11449}{18}\,,
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

где численные значения относятся к $N = 3$ цветам. Вследствие хорошей сходимости ряда теории возмущений для аномальной размерности, на которую указывают наши результаты при больших β_0, кажется разумным предположить, что $|\eta_1\beta_0 + \eta_0| < \beta_0^2$, то есть что истинное значение трехпетлевой аномальной размерности отличается от его значения при большом β_0 не более чем на 100%. В этом случае

$$c_2(n_f = 4) = 210.08 \pm 6.25\,, \qquad c_2(n_f = 3) = 238.04 \pm 6.75\,. \tag{2.4.17}$$

Неопределенность, вызванная неизвестными членами в трехпетлевой аномальной размерности, очень мала по сравнению с величиной коэффициента c_2. Используя этот результат совместно с точным однопетлевым коэффициентом c_1 (2.4.15), мы получаем для $n_f = 4$

$$\hat{C}(m) = \left[\alpha_s(m)\right]^{9/25}\,\left[1 + 0.672\alpha_s(m) + (1.33 \pm 0.04)\alpha_s^2(m) + \dots\right]\,. \tag{2.4.18}$$

Ряд теории возмущений для δc расходится, и должен быть обрезан в районе минимального члена. Поэтому пертурбативный результат для Вильсоновского коэффициента содержит внутреннюю неоднозначность. Здесь мы исследуем это в в пределе большого β_0. Однако принято считать, что такое поведение является весьма общим [**99**]. В схемах перенормировки без жесткого инфракрасного обрезания (таких, как размерная регуляризация с минимальным вычитанием), пертурбативное вычисление коэффициентов c_n содержит интегрирования по всем импульсам глюонов, включая мягкие глюоны, т. е. область больших расстояний. Высшие порядки разложения зондируют область все более мягких глюонов, режим, в котором теория возмущений обязана провалиться. Замечательно, что ряд теории возмущений знает об этом провале, и сигнализирует о нем через расходящееся поведение коэффициентов разложения. Теперь мы рассмотрим это явление более детально.

Удобным инструментом для исследования неоднозначностей, возникающих при попытке просуммировать асимптотический ряд теории возмущений, является Борелевский образ ряда, который дается функцией $S(u)$ в интегральном представлении (2.4.6). Из (2.4.8) мы получаем

$$S(u) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(1-2u)}{\Gamma(3-u)} \left[4u(1+u)C_F + \tfrac{1}{2}(2-u)(2+3u)C_A\right] - e^{-\frac{5}{3}u}\frac{C_A}{u} \,. \tag{2.4.19}$$

Лапласовский интеграл (2.4.6), если бы он существовал, определял бы Борелевскую сумму ряда теории возмущений для δc в пределе большого β_0. Однако наличие сингулярностей на контуре интегрирование (т. е. на положительной полуоси) делает интеграл плохо определенным. Эти сингулярности называются инфракрасными ренормалонами. Любой рецепт суммирования ряда теории возмущений содержит произвольное предписание, как поступать с этими сингулярностями. В первом порядке по $1/\beta_0$, это простые полюса в целых и полуцелых точках $u = n/2$. Тем самым вводятся неоднозначности, мерой которых являются вычеты в этих полюсах $\sim (\Lambda_V/m)^n$. Ведущая неоднозначность дается вычетом в ближайшем ренормалонном полюсе $u = 1/2$; она того же порядка, что и минимальный член ряда теории возмущений. Такая же ситуация существует для полюсной массы тяжелого кварка [**100, 101**]: ряд теории возмущений для нее в терминах массы, определенной на малых расстояниях, содержит инфракрасный ренормалонный полюс в точке $u = 1/2$. Сравнивая вычеты, ма получаем для ведущих неоднозначностей

$$\Delta\hat{C}_m = \left(1 + \frac{7}{8}\frac{C_A}{C_F}\right)\frac{\Delta m}{m} \,. \tag{2.4.20}$$

Хромомагнитный оператор в эффективном лагранжиане умножается на $1/m$, где m — полюсная масса. Неоднозначность в этой комбинации $\Delta[\hat{C}/m] = (7C_A)/(8C_F)(\Delta m/m)$ является чисто неабелевой.

Когда разложение по $1/m$ применяется для вычисление какой–нибудь физической величины, например, массового расщепления (2.2.27), результат имеет вид суммы произведений Вильсоновских коэффициентов, определяемых физикой малых расстояний, и адронных матричных элементов, определяемых физикой больших расстояний. В схемах регуляризации без жесткого импульсного обрезания, Вильсоновские коэффициенты содержат вклады больших расстояний, где теория возмущений плохо определена, и эти вклады приводят к инфракрасным ренормалонным неоднозначностям. Аналогично, адронные матричные элементы (которые не вычислимы в теории возмущений) содержат вклады малых расстояний, которые приводят к ультрафиолетовым ренормалонным неоднозначностям. Иными словами, в таких схемах разделение вкладов малых и больших расстояний (в виде Вильсоновских коэффициентов и матричных элементов) неоднозначно. Только когда все вклады комбинируются в физическую величину, получается однозначный результат. Сокращение инфракрасных и ультрафиолетовых ренормалонных неоднозначностей во многих задачах HQET было детально прослежено в [**102**]. Здесь мы рассмотрим случай B–B^* массового расщепления.

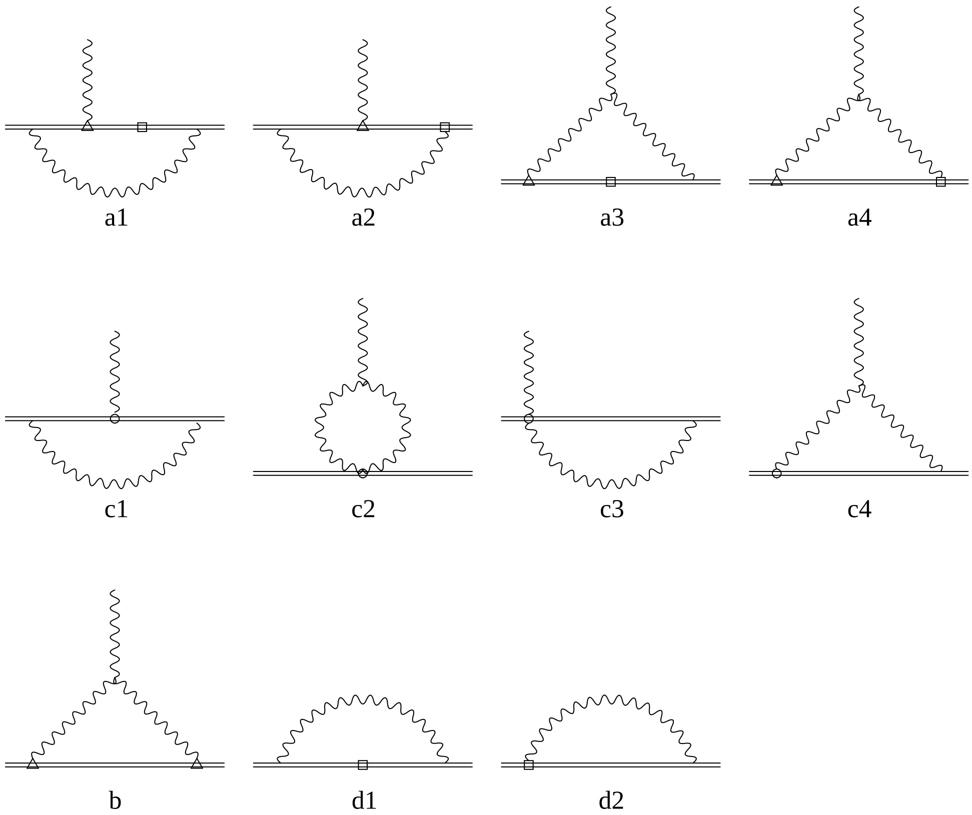


Рис. 2.10. Диаграммы для ρ_i^3; подразумевается, что кварковые петли вставлены всеми возможными способами.

Ультрафиолетовые вклады в адронные параметры ρ_i^3 не зависят от природы внешних состояний, и могут вычисляться с использованием кварковых и глюонных состояний вместо адронных. Соответствующие однопетлевые диаграммы показаны на Рис. 2.10. По размерности, они линейно расходятся в ультрафиолетовой области. В размерной регуляризации такие степенные расходимости не видны. Но они проявляются в расходимости ряда теории возмущений, когда учитываются вклады высших порядков. Мы проанализируем эти вклады в пределе большого β_0, вставляя произвольное число петель легких кварков всеми возможными способами в диаграммы Рис. 2.10. Соответствующие матричные элементы разлагаются до линейных членов по импульсу глюона q и проектируются на структуру хромомагнитного оператора. Внешние кварки находятся вне массовой поверхности, чтобы регуляризовать инфракрасные расходимости. Борелевские образы этих матричных элементов содержат ультрафиолетовые ренормалонные полюса в точке $u = 1/2$. Из соображений размерности, вычеты пропорциональны Λ_V на матричный элемент μ_G^2 хромомагнитного оператора, поскольку это единственный оператор низшей размерности, дающий вклад в расщепление масс. Поэтому ведущие ультрафиолетовые ренормалонные неоднозначности параметров ρ_i^3 пропорциональны $\mu_G^2 \Delta m$. Заметим, что диаграммы, в которых внешний глюон прикреплен к линии тяжелого кварка, а также диаграммы с двухглюонной кинетической или хромомагнитной вершиной, не дают вклада. Диаграмма Рис. 2.10c1 не дает вклада, поскольку спин–орбитальная вершина взаимодействует только с хромоэлектрическим полем. При симметричном выборе внешних импульсов, диаграммы Рис. 2.10c2 и 2.10c3 обращаются в ноль. Следует иметь в виду, что в $1/m$ подавленном вкладе в константу перенормировки волновой функции тяжелого кварка (со вставкой кинетического оператора, Рис. 2.10d1 и d2) имеется ультрафиолетовый ренормалон в $u = 1/2$; соответствующая неоднозначность $\Delta \widetilde{Z}_Q = \frac{3}{2} \Delta m / m$ в нормировке μ_G^2 дает вклад в $\Delta \rho_{km}^3$, и сокращает C_F члены в диаграммах Рис. 2.10a1 и a2. Вычисляя все ненулевые диаграммы описанным выше методом, мы получаем в первом порядке по $1/\beta_0$

$$\Delta \rho_{km}^3 = -\frac{2}{3} \frac{C_A}{C_F} \mu_G^2 \Delta m \,, \quad \Delta \rho_{mm}^3 = -\frac{19}{12} \frac{C_A}{C_F} \mu_G^2 \Delta m \,, \quad \Delta \rho_s^3 = -\frac{1}{2} \frac{C_A}{C_F} \mu_G^2 \Delta m \,. \tag{2.4.21}$$

Сумма ультрафиолетовых неоднозначностей $1/m^2$ вкладов в (2.2.27) компенсирует инфракрасную неоднозначность ведущего члена.

Требование сокращения ренормалонных неоднозначностей в массовом расщеплении (2.2.28) при произвольных m позволяет выяснить структуру ведущей инфракрасной ренормалонной сингулярности в $S(u)$ в точке $u = \frac{1}{2}$, не ограничиваясь пределом большого β_0. Ультрафиолетовая неоднозначность квадратной скобки в (2.2.28) должна быть равна $\hat{\mu}_m^2$ на

$$\Lambda_V = m \, e^{-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_s}} \alpha_s^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} \left[1 + O(\alpha_s)\right]. \tag{2.4.22}$$

Для того, чтобы воспроизвести правильные дробные степени α_s, $S(u)$ в (2.4.6) должна иметь точку ветвления в $u = \frac{1}{2}$ вместо полюса:

$$S(u) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^{1+\beta_1/2\beta_0^2}} \left[2C_F K_1 - \frac{1}{3} C_A K_2 + \frac{19}{12} \frac{C_A K_3}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^{-\tilde{\gamma}_0/2\beta_0}} + \frac{1}{2} \frac{C_A K_4}{\left(\frac{1}{2} - u\right)^{\tilde{\gamma}_0/2\beta_0}} \right], \qquad (2.4.23)$$

где $\tilde{\gamma}_0 = 2C_A$ — однопетлевая аномальная размерность хромомагнитного оператора, и опущенные члены подавлены как $\frac{1}{2} - u$ по сравнению с выписанными. Здесь показатели степени известны точно, а нормировочные константы — только в пределе большого β_0: $K_i = 1 + O(1/\beta_0)$. Далекие коэффициенты ряда теории возмущений для δc ведут себя как

$$c_{n+1} = n!\,(2\beta_0)^n\, n^{\beta_1/2\beta_0^2} \left[4C_F K_1 - \tfrac{2}{3} C_A K_2 + \tfrac{19}{6} C_A K_3 n^{-\tilde{\gamma}_0/2\beta_0} + C_A K_4 n^{\tilde{\gamma}_0/2\beta_0} \right], \qquad (2.4.24)$$

где опущенные члены подавлены как $1/n$ по сравнению с выписанными. При очень больших n последний член доминирует; при умеренных значениях n все вклады существенны.

Чтобы вычислить интеграл (2.4.6), полезно переписать его в виде [**103**]

$$\begin{aligned} 1 + \delta c &= \frac{1}{\beta_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\log\tau\, \frac{w(\tau)}{\log\tau + \log\left(m/\Lambda_V\right)^2} + O(1/\beta_0^2) \\ &= \int\limits_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau}\, w(\tau)\, \frac{\alpha_s(\sqrt{\tau} e^{-5/6} m)}{4\pi} + O(1/\beta_0^2)\,. \end{aligned} \qquad (2.4.25)$$

Функция

$$w(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u_0 - i\infty}^{u_0 + i\infty} du\, S(u)\, \tau^u = C_F w_F(\tau) + C_A w_A(\tau)\,; \quad 0 < u_0 < \tfrac{1}{2}\,, \qquad (2.4.26)$$

которая является обратным преобразованием Меллина Борелевского образа $S(u)$, описывает распределение глюонных виртуальностей в однопетлевых диаграммах Рис. 2.9, которые дают δc. Если ближайший ренормалон находится в точке $u = u_0$, то функция распределения $w(\tau)$ при $\tau \to 0$ ведет себя как τ^{u_0} [**103**]; в данном случае $w(\tau) \sim \sqrt{\tau}$ медленно убывает в области малых виртуальностей. Используя методы, развитые в [**103**], мы получаем

$$\begin{aligned} w_F(\tau) &= \frac{4}{\sqrt{1 + 4/\tau}} - 4\tau + 2\tau^2 \left(\sqrt{1 + 4/\tau} - 1 \right), \\ w_A(\tau) &= \frac{5\tau}{4} \left(\sqrt{1 + 4/\tau} - 1 \right) - \frac{3}{2\sqrt{1 + 4/\tau}} - \theta(\tau - e^{5/3})\,. \end{aligned} \qquad (2.4.27)$$

Эти функции показаны на Рис. 2.11. Контур интегрирования в (2.4.25) проходит через полюс Ландау, расположенный в $\tau_L = (\Lambda_V/m)^2$. Таким образом появляются инфракрасные ренормалоны. Как и в случае исходного интеграла (2.4.6), приходится вводить произвольное предписание, как обращаться с этой сингулярностью. Ренормалонная неоднозначность дается вычетом в этом полюсе: $\Delta\delta c = w(\tau_L)/\beta_0$. Из выражения для функции распределения в области $\tau \ll 1$ мы легко воспроизводим результат (2.4.20).

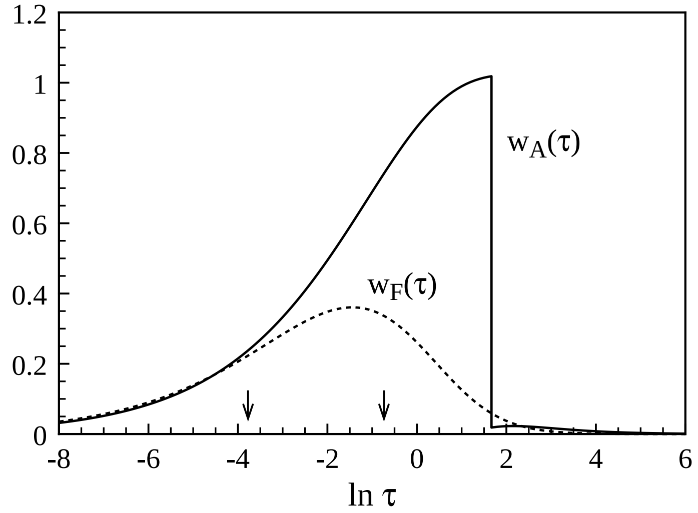


Рис. 2.11. Функции распределения $w_F(\tau)$ (пунктирная линия) и $w_A(\tau)$ (сплошная линия).

Из представления (2.4.25) очевидно, что пертурбативные вычисления включают вклады от области мягких глюонов. В то же время оно дает удобный способ отделить эти вклады больших расстояний от вкладов больших расстояний путем введения жесткого масштаба разделения λ. Мы можем определить коэффициент на малых расстояниях $c_{\rm sd}(m,\lambda)$ как

$$c_{\rm sd}(m,\lambda) = \int\limits_{\lambda^2}^{\infty} \frac{{\rm d}\mu^2}{\mu^2}\, w(\mu^2/m^2)\, \frac{\alpha_s(e^{-5/6}\mu)}{4\pi} + O(1/\beta_0^2)\,. \qquad (2.4.28)$$

Пока λ выбирается достаточно большим, этот коэффициент может быть надежно вычислен в теории возмущений и не содержит ренормалонных неоднозначностей. Вклад больших расстояний, устраненный этой процедурой, должен быть объединен с непертурбативными степенными поправками.

Исследуем теперь некоторые численные следствия наших результатов, сравнивая различные приближения для Вильсоновского коэффициента $\hat{C}$. А именно, вычислим частичные суммы

$$\hat{C}_{(N)}(m) = \big[\alpha_s(m)\big]^{\gamma_0/2\beta_0} \left[1 + \sum_{n=1}^{N} c_n \left(\frac{\alpha_s(m)}{4\pi}\right)^n\right] \tag{2.4.29}$$

для $n_f = 4$ легких флейворов, используя $\alpha_s(m_b) = 0.22$ и $\alpha_s(m_c) = 0.36$ в $\overline{\mathrm{MS}}$ схеме. Отношение коэффициентных функций при этих двух масштабах (при $n_f = 4$) дает пертурбативную величину отношения расщеплений масс B–B^* и D–D^*:

$$\frac{M_{B^*}^2 - M_B^2}{M_{D^*}^2 - M_D^2} = \frac{\hat{C}(m_b)}{\hat{C}(m_c)} \left[1 + \Lambda_{\mathrm{eff}} \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_b}\right) + \dots\right] \approx 0.89\,, \tag{2.4.30}$$

где Λ_{eff} — комбинация адронных параметров ρ_i^3 (2.2.27), и для простоты мы пренебрегли поправками от малых расстояний в $1/m$ членах.

Таблица 2.1. Пертурбативные приближения для Вильсоновских коэффициентов $\hat{C}(m_b)$ и $\hat{C}(m_c)$.

	$\hat{C}_{(N)}(m_b)$		$\hat{C}_{(N)}(m_c)$		$\hat{C}_{(N)}(m_b)/\hat{C}_{(N)}(m_c)$	
N	large–β_0	exact	large–β_0	exact	large–β_0	exact
0	0.580	0.580	0.692	0.692	0.838	0.838
1	0.734	0.659	0.993	0.847	0.739	0.778
2	0.801	0.697(1)	1.207	0.967(4)	0.664	0.721(3)
3	0.850		1.463		0.581	
4	0.898		1.875		0.479	
5	0.958		2.714		0.353	
Borel sum	0.839(38)		1.027(136)		$0.817^{+0.082}_{-0.065}$	
min. term	0.898(48)		1.207(214)		$0.744^{+0.112}_{-0.078}$	
$\mu > 1\,\mathrm{GeV}$	0.774		0.906		0.854	

Наши предсказания для Вильсоновских коэффициентов $\hat{C}(m_b)$ и $\hat{C}(m_c)$ показаны в таблице 2.1. В верхней части таблицы показаны частичные суммы ряда теории возмущений, как в пределе большого β_0, так и точные, где они известны. В пределе большого β_0 расходящееся поведение ряда теории возмущений устанавливается уже в невысоких порядках. На масштабе m_b, минимальный член ряда достигается при $N = 4$, тогда как на масштабе m_c — в районе $N = 2$. Вследствие этого, значения коэффициентных функций при этих двух масштабах все сильнее различаются с ростом N, и их отношение удаляется от экспериментального значения отношения расщеплений масс.

Причиной такого поведения является близколежащий первый ренормалон. Это можно понять, рассматривая функции распределения на Рис. 2.11. Они являются широкими, и простираются далеко в инфракрасную область. Заметим, что точка $\mu = m$ соответствует $\log \tau = 5/3$ в $\overline{\mathrm{MS}}$ схеме. Вклад масштабов выше m практически отсутствует (в случае $w_A(\tau)$ он вычитается $\overline{\mathrm{MS}}$ перенормировкой). С другой стороны, функция распределения убывает при $\tau \to 0$ очень медленно, всего лишь как $\sqrt{\tau}$. Поэтому доминирующий вклад происходит от масштабов, существенно меньших массы тяжелого кварка.[2] В нижней части таблицы 2.1 показаны результаты для Вильсоновских коэффициентов, полученные при вычислении Борелевского интеграла в смысле главного значения. Ошибки отражают ренормалонные неоднозначности, особенно значительные на масштабе m_c. Борелевское суммирование дает значения, близкие к тем, что получаются при обрезании ряда на минимальном члене (в этом случае ошибка есть величина минимального члена). В последней строке показаны вклады малых расстояний в коэффициентные функции (2.4.28), происходящие от виртуальностей выше 1GeV (в V–схеме). Стрелки на Рис. 2.11 показывают положение разделительного масштаба $\lambda = 1\text{GeV}$ (что соответствует 435 MeV в $\overline{\mathrm{MS}}$ схеме). Инфракрасный вклад, который не включается в эту величину, гораздо более значителен на масштабе m_c, чем на масштабе m_b. Получившиеся значения близки к результатам в низших порядках теории возмущений.

[2] Для суммарной функции распределения $w(\tau)$, среднее значение $\log \tau$ составляет -1.310, что соответствует масштабу $\mu_{\mathrm{BLM}} \approx 0.226m$ в $\overline{\mathrm{MS}}$ схеме. Ввиду низкой средней виртуальности, плохая сходимость ряда теории возмущений неудивительна.

Хотя результаты во всех порядках поучительны, не следует забывать, что они получены в очень сомнительном приближении (в пределе большого β_0). В некоторых точно решаемых моделях ряды теории возмущений ведут себя лучше, чем ожидается в этом пределе. Однако, можно доверять качественным наблюдениям, что ряды начинают расходиться в относительно низком порядке, тем более низком, чем меньше масштаб m. Для последовательного включения степенных поправок пертурбативные коэффициенты в главном члене должны быть известны с достаточно высокой точностью. Различные обрезания или схемы суммирования ведут к различным определениям адронных параметров, появляющихся в следующих порядках $1/m$ разложения, таких, как Λ_{eff} (2.4.30). В случае хромомагнитного взаимодействия, вычисление более высоких порядков теории возмущений не принесло бы большой пользы. Принимая во внимание, что ряд для $\hat{C}(m_c)$ начинает расходиться раньше, чем для $\hat{C}(m_b)$, можно ожидать, что оптимальное пертурбативное предсказание для отношения получается при использовании NNLO результата для m_b и NLO результата для m_c:

$$\frac{\hat{C}_{(2)}(m_b)}{\hat{C}_{(1)}(m_c)} \approx 0.80\,. \tag{2.4.31}$$

В пределе большого β_0 соответствующее отношение равно 0.81, и очень близко к отношению интегралов в смысле главного значения. Используя (2.4.31), мы приходим к заключению, что вклад степенной поправки в (2.4.30) составляет около 11%, что соответствует $\Lambda_{\text{eff}} \approx 220$ MeV. То есть, при разумном определении пертурбативного вклада, степенные поправки в $1/m$ разложении вполне контролируемы.

2.5. Тяжело–легкие токи

В этом параграфе мы рассмотрим тяжело–легкие билинейные кварковые токи. Перенормированный HQET ток $\tilde{\jmath}(\mu)$ связан с неперонормированным $\tilde{\jmath}_0 = \overline{q}_0 \Gamma \widetilde{Q}_0$ формулой $\tilde{\jmath}(\mu) = \widetilde{Z}_j^{-1}(\mu)\tilde{\jmath}_0$. Однопетлевая аномальная размерность тяжело–легкого тока в HQET была найдена в [**104**]. Константу перенормировки $\widetilde{Z}_j$ можно найти, вычислив неперенормированную вершинную функцию при нулевом импульсе легкого кварка. Она равна вершинной функции в древесном приближении, умноженной на фактор $\Gamma_0(\omega)$, который не зависит от γ–матричной структуры тока. Константу перенормировки $\widetilde{Z}_j = \widetilde{Z}_\Gamma \widetilde{Z}_Q^{1/2} Z_q^{1/2}$ можно найти из требования, чтобы перенормированная вершинная функция $\Gamma(\omega) = \Gamma_0(\omega)/\widetilde{Z}_\Gamma$ была конечной. Удобно ввести величину $V_0(\omega) = \widetilde{S}_{\text{bare}}(\omega)\Gamma_0(\omega)$. Тогда $\widetilde{Z}_j = Z_V \widetilde{Z}_Q^{-1/2} Z_q^{1/2}$, где Z_V делает $V(\omega) = V_0(\omega)/Z_V$ конечным. Диаграммы для вершинной функции (Рис. 2.12) вычисляются методом, описанным в §2.1. Величина $V_0(\omega)$ оказывается калибровочно–инвариантной:

$$\begin{aligned} V_0(\omega) =& \omega \widetilde{S}_{\text{bare}}(\omega)\Gamma_0(\omega) = 1 + V_1 \Gamma_1 C_F g_0^2 \\ &+ \left[(V_{A1} C_A + V_{F1} C_F)\Gamma_1^2 + (V_{A2} C_A + V_{F2} C_F + V_{L2} T_F n_l)\Gamma_2 \right] C_F g_0^4 + O(g_0^6)\,, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

где

$$\begin{aligned} &V_1 = -\frac{d-1}{d-3}\,, \quad V_{A1} = \frac{d^2-4d-1}{2(d-3)^2(d-4)}\,, \quad V_{F1} = \frac{d-2}{(d-3)(d-4)}\,, \\ &V_{A2} = -\frac{2d^4 - 22d^3 + 89d^2 - 151d + 78}{2(2d-7)(d-3)^2(d-4)(d-6)}\,, \quad V_{F2} = -\frac{(d^2-5d+2)d}{2(d-3)^2(d-4)(d-6)}\,, \\ &V_{L2} = \frac{2(d-2)}{(2d-7)(d-3)(d-6)}\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что аномальная размерность $\tilde{\gamma}_j = \frac{d \log Z_V}{d \log \mu} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_Q + \frac{1}{2}\gamma_q$ калибровочно–инвариантна, как и должно быть. Члены α_s^2/ϵ^2 в (2.5.1) должны быть таковы, что деление на константу делает $V(\omega)$ конечным для всех ω, что является нетривиальной проверкой. В качестве еще одной проверки, мы повторили вычисление $\gamma_{\overline{q}q}$ в КХД тем же методом, и воспроизвели известный результат [**105**]. Эти проверки дают нам уверенность в окончательном результате

$$\tilde{\gamma}_j = -3C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} + C_F \left[C_F \left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\pi^2 \right) + C_A \left(-\frac{49}{6} + \frac{2}{3}\pi^2 \right) + \frac{10}{3} T_F n_f \right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \tag{2.5.2}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_{\overline{q}q} + 4C_F \left[C_A \left(2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + C_F \left(1 - \frac{2}{3}\pi^2 \right) \right] \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 + O(\alpha_s^3)\,. \tag{2.5.3}$$

Вторая форма проверена также вычислением вклада кваркового конденсата в коррелятор токов $\tilde{\jmath}$ (§3.1).

Теперь мы рассмотрим КХД ток $j(\mu) = Z_j^{-1}(\mu) j_0$, $j_0 = \overline{q}_0 \Gamma Q_0$, перенормированный в схеме $\overline{\text{MS}}$. Он разлагается по HQET операторам как

$$j(\mu) = C_\Gamma(\mu)\tilde{\jmath}(\mu) + \frac{1}{m}\sum_i B_i(\mu)\widetilde{O}_i(\mu) + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\,, \tag{2.5.4}$$

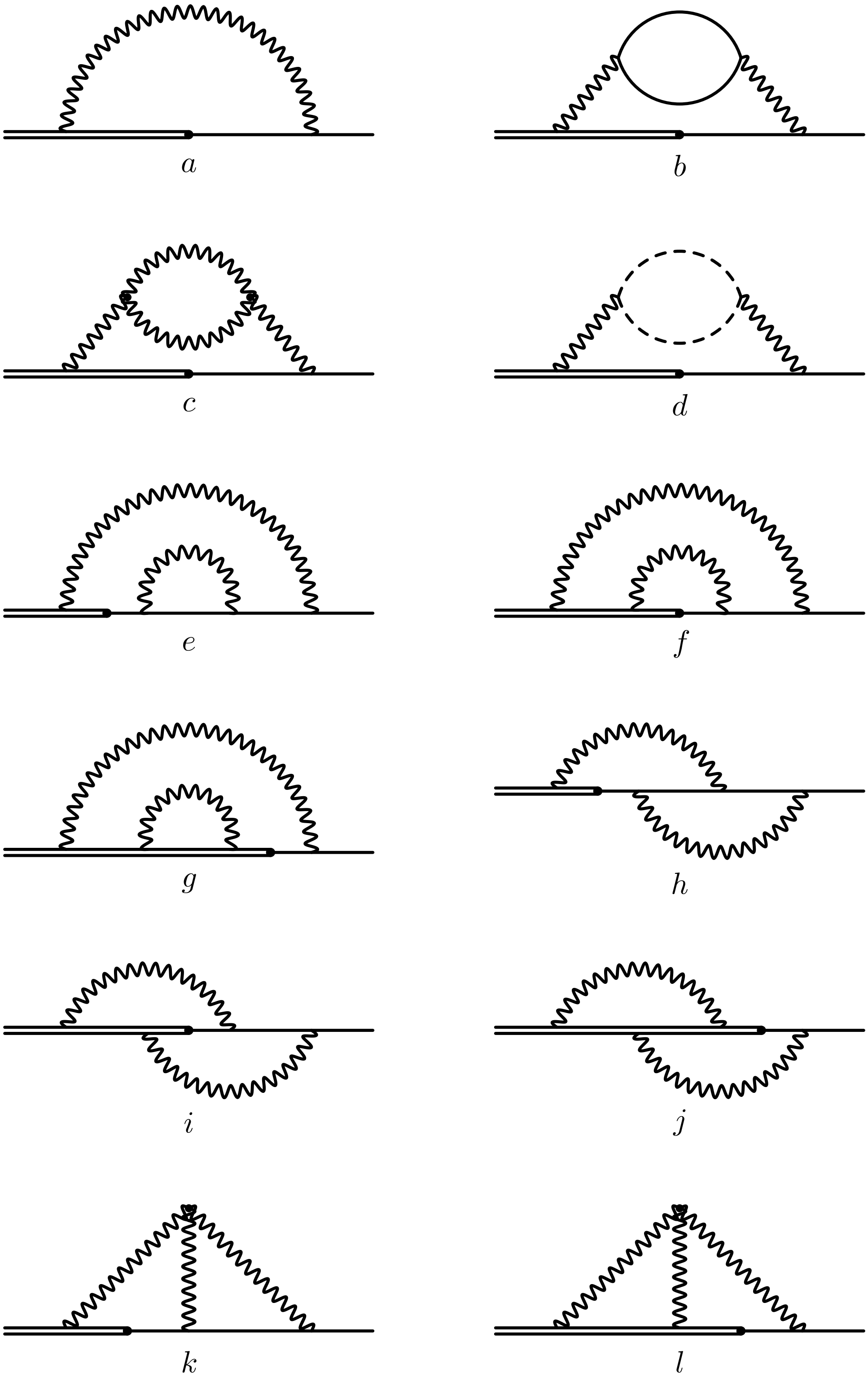


Рис. 2.12. Диаграммы для вершинной функции тяжело–легкого тока.

где $\widetilde{O}_i(\mu)$ — HQET операторы размерности 4 с подходящими квантовыми числами. Смысл операторного разложения (2.5.4) состоит в том, что матричные элементы $j(\mu)$ в ситуациях, поддающихся HQET рассмотрению, после разложения до некоторого порядка по $1/m$ совпадают с матричными элементами правой стороны этого равенства.

Правая сторона (2.5.4) содержит один член размерности 3 тогда, когда что матрица Γ удовлетворяет условию

$$\gamma_0\Gamma = \sigma\Gamma\gamma_0 \quad (\sigma = \pm 1), \quad \gamma_\mu\Gamma\gamma^\mu = 2\sigma h\Gamma\,, \tag{2.5.5}$$

где h — функция размерности d. Для антисимметризованного произведения n γ–матриц $\Gamma = \gamma^{[\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n]}$, мы имеем $h = \eta(n-2+\epsilon)$, где $\eta = -\sigma(-1)^n$.

Естественно производить сшивку на масштабе $\mu \sim m$, где коэффициент сшивки $C_\Gamma(\mu)$ не содержит больших логарифмов. Чтобы связать КХД и HQET токи, нормированные в произвольных точках μ и $\tilde{\mu}$, можно использовать ренормгруппу:

$$\exp\left(-\int\limits_{\alpha_s(m)}^{\alpha_s(\mu)} \frac{\gamma_j(\alpha)}{2\beta(\alpha)}\frac{d\alpha}{\alpha}\right) j(\mu) = C_\Gamma(m)\exp\left(-\int\limits_{\alpha_s(m)}^{\alpha_s(\tilde{\mu})} \frac{\tilde{\gamma}_j(\alpha)}{2\beta(\alpha)}\frac{d\alpha}{\alpha}\right)\tilde{\jmath}(\tilde{\mu}) + O\left(\frac{1}{m}\right)\,. \tag{2.5.6}$$

Коэффициент $C_\Gamma(\mu)$ для произвольной матрицы Γ, удовлетворяющей (2.5.5), был найден в однопетлевом приближении в [**53**]. Коэффициенты сшивки $B_i(\mu)$ в порядке $1/m$ для векторного и аксиального токов были найдены в однопетлевом приближении в [**106, 107**]. Здесь мы найдем двухпетлевую поправку к ведущему коэффициенту сшивки $C_\Gamma(\mu)$.

Как видно из (2.5.6), в общем случае необходимо использовать трехпетлевые аномальные размерности γ_j и $\tilde{\gamma}_j$ совместно с двухпетлевым коэффициентом сшивки $C_\Gamma(m)$. Некоторые КХД аномальные размерности известны на трехпетлевом уровне, однако универсальная аномальная размерность HQET тока известна только с двухпетлевой точностью. Коэффициенты сшивки и аномальные размерности, взятые по отдельности, зависят от схемы перенормировки; эта схемная зависимость сокращается в (2.5.6). Однако, имеются три причины для вычисления $C_\Gamma(m)$ в двух петлях. Во–первых, HQET аномальная размерность не зависит от Дираковской структуры Γ, и потому не входит в важные отношения физических величин, такие как f_{B^*}/f_B; эти отношения схемно–независимы. Во–вторых, предыдущий опыт [**74, 73**] подсказывает, что конечные двухпетлевые эффекты численно доминируют над эффектами трехпетлевых аномальных размерностей для величин на массовой поверхности в схеме $\overline{\text{MS}}$ (или любой другой схеме, имеющей Λ того же порядка). Наконец, трехпетлевой член в $\tilde{\gamma}_j$, возможно, будет вычислен в будущем.

Знание двухпетлевой поправки к $C_\Gamma(m)$ требуется для более точного извлечения КХД матричных элементов, таких как f_B и f_{B^*}, из результатов HQET, полученных, например, из правил сумм или моделирования на решетке. Решеточные HQET (т. е. статические) результаты сначала сшиваются с непрерывной HQET с помощью решеточной теории возмущений, затем эволюционируют от $\mu \sim 1/a$ (где a — шаг решетки) до $\mu \sim m$, и наконец сшиваются с КХД. Поэтому коэффициенты $C_\Gamma(m)$ необходимы как один из ингредиентов для улучшения точности решеточных результатов. Более того, решеточные результаты для отношения f_{B^*}/f_B можно непосредственно сравнивать с нашим пертурбативным результатом для соответствующего отношения коэффициентов сшивки.

Как мы обсуждали в §2.1, существуют две версии HQET — с n_f флейворами и с $n_f - 1$ флейворами. Мы получим коэффициенты сшивки в первом подходе, потребовав, чтобы матричные элементы на массовой поверхности от обоих сторон уравнения (2.5.4) совпадали, как было сделано в [**53**] в одной петле. КХД матричный элемент на массовой поверхности $M(\mu) = \left(Z_Q^{\text{os}} Z_q^{\text{os}}\right)^{1/2} Z_j^{-1}(\mu)\Gamma_0$ получается из неперенормированной вершинной функции Γ_0 путем перенормировки тока и перенормировки волновых функций на массовой поверхности. В нулевом порядке по $1/m$, он должен быть равен $C_\Gamma(\mu)\widetilde{M}(\mu)$, где $\widetilde{M}(\mu) = \left(\widetilde{Z}_Q^{\text{os}} Z_q^{\text{os}}\right)^{1/2} \widetilde{Z}_j^{-1}(\mu)\widetilde{\Gamma}_0$. Отсюда мы получаем

$$C_\Gamma(\mu) = \left(\frac{Z_Q^{\text{os}}}{\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}}\right)^{1/2} \frac{\widetilde{Z}_j(\mu)}{Z_j(\mu)} \frac{\Gamma_0}{\widetilde{\Gamma}_0}\,, \tag{2.5.7}$$

где μ–зависимость происходит только из $Z_j(\mu)$ и $\widetilde{Z}_j(\mu)$, в согласии с (2.5.6).

Неперенормированные вершинные функции Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$ в (2.5.7) можно вычислять при любых импульсах легкого и тяжелого кварка, лежащих на массовой поверхности. Вычисление значительно упрощается, когда оба импульса в HQET равны нулю. Это соответствует импульсу тяжелого кварка $p = mv$ в КХД. Одно– и двухпетлевые диаграммы для вершинной функции показаны на Рис. 2.12.

В кварковой петле диаграммы Рис. 2.12b мы включаем $n_f = n_l + 1$ кварковых флейворов, один из которых — внешний тяжелый флейвор, а остальные n_l легких флейворов имеют массы $m_i < m$, любые из которых могут быть равны нулю. В случае внешнего b

кварка, $n_f = 4+1 = 5$, и только отношение масс $m_c/m_b \sim 0.3$ заметно отлично от нуля. Подчеркнем, что петля внешнего тяжелого флейвора с массой $m_i = m$ включается во все 6 членов в правой части (2.5.7).

Теперь мы рассмотрим 3 HQET величины и 3 КХД величины в правой части (2.5.7), удерживая петлю тяжелого кварка во всех величинах, чтобы получить сшивку n_f–флейворной КХД с n_f–флейворной HQET. В наших результатах, мы будем отдельно указывать вклад петель тяжелого кварка. Его нужно исключить при сравнении континуальных пределов решеточной КХД и HQET, если петли тяжелого кварка опущены в обоих теориях. Сшивка с (n_f-1)–флейворной HQET будет рассмотрена в конце этого параграфа.

Сначала рассмотрим HQET величины $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{Z}_j$ и $\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}$. Все диаграммы для HQET вершинной функции при нулевых внешних импульсах, кроме Рис. 2.12b с массивной кварковой петлей, обращаются в ноль в размерной регуляризации, поскольку не содержат массового масштаба. В действительности, эта диаграмма тоже обращается в ноль. Глюонный пропагатор содержит кварковую петлю и потому является поперечным, т. е. пропорционален $(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2)$. Этот тензор свертывается с v^ν из вершины тяжелого кварка, и с $\hat{k}\gamma^\mu/k^2$ из вершины легкого кварка γ^μ, соседней с пропагатором легкого кварка $\hat{k}/k^2$ с тем же импульсом, что у глюона. Свертка $-\vec{\gamma}\cdot\vec{k}\gamma_0/k^2$ нечетна относительно инверсии пространственного импульса $\vec{k}$, и потому обращается в ноль при интегрировании по петлевому импульсу k. Поэтому $\widetilde{\Gamma}_0 = \Gamma_{\text{B}}$, где $\Gamma_{\text{B}} = \overline{u}_q \Gamma u_Q$ — просто Борновский член. Константа перенормировки тока $\widetilde{Z}_j$ определяется аномальной размерностью (2.5.2). Константа перенормировки волновой функции на массовой поверхности дается формулой (2.1.22).

Теперь перейдем к КХД величинам Γ_0, Z_j и Z_Q^{os}. Константа перенормировки волновой функции на массовой поверхности Z_Q^{os} была получена в двухпетлевом приближении в d измерениях в [**73**], §2.3. Кварковый флейвор с малой, но ненулевой массой дает вклад в Z_Q^{os}, отличающийся от вклада безмассового флейвора. То же верно для $\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}$ (2.1.22). Эти особенности происходят от инфракрасной области малых импульсов глюона, где HQET не отличается от КХД. Поэтому они должны сократиться в отношении $Z_Q^{\text{os}}/\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}$. И действительно, мы обнаружили, что оно имеет гладкий предел при $m_i \to 0$. Это дает сильную проверку вкладов безмассовых и массивных кварковых петель в Z_Q^{os}, полученных в [**73**],

§2.3. Отношение

$$\frac{Z_Q^{\rm os}/\widetilde{Z}_Q^{\rm os}}{(Z_Q^{\rm os}/\widetilde{Z}_Q^{\rm os})_{m_i=0}} = 1 + 2C_F T_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_f} \Delta_Z\left(\frac{m_i}{m}\right) \tag{2.5.8}$$

может быть выражено через интеграл от разности поляризационных операторов с кварком массы m_i в петле и с безмассовым кварком. Эта разность не содержит ни ультрафиолетовых, ни инфракрасных расходимостей. Внешний интеграл по импульсу глюона также сходится, и может вычисляться в 4 измерениях. Все такие интегралы, зависящие от двух масс, которые нам потребуются, могут быть выражены через три базисных дилогарифмических интеграла (2.3.31). Комбинируя $Z_Q^{\rm os}$ (2.3.44) с $\widetilde{Z}_Q^{\rm os}$ (2.1.22), мы получаем

$$\Delta_Z(r) = -4\Delta_1(r) - 2\Delta_2(r) - 12\Delta_3(r)\,. \tag{2.5.9}$$

Константы перенормировки КХД токов Z_j известны в двух петлях для некоторых токов, но не для всех. Мы просто используем минимальный анзац для Z_j и извлекаем его коэффициенты из требования конечности (2.5.7). Таким образом, мы получаем общую формулу для аномальных размерностей билинейных кварковых токов в КХД, и проверяем ее путем сравнения с известными частными случаями.

Наиболее сложная часть задачи — это вычисление неперенормированной вершинной функции в КХД Γ_0. Сначала мы рассмотрим случай, когда все легкие флейворы имеют нулевую массу; эффекты конечных масс легких кварков будут включены позднее. Поскольку мы вычисляем неперенормированную вершинную функцию на перенормированной массовой поверхности $p = mv$, удобно выражать результаты через массу на массовой поверхности m, рассматривая однопетлевой d–мерный контрчлен $\Delta m = m - m_0$ как возмущение.

Сначала мы не делаем никаких предположений о свойствах матрицы Γ, и замечаем, что каждая двухпетлевая диаграмма для Γ_0 может быть записана как сумма членов вида

$$\overline{u}_q \gamma_{\mu_1} \ldots \gamma_{\mu_l} \Gamma \gamma_{\nu_1} \ldots \gamma_{\nu_r} u_Q \cdot I^{\mu_1\ldots\mu_l;\nu_1\ldots\nu_r}\,, \tag{2.5.10}$$

где I — некоторый интеграл по петлевым импульсам, l четно и $l + r \le 8$. После интегрирования, $I^{\mu_1\ldots\mu_l;\nu_1\ldots\nu_r}$ может содержать только $g^{\mu\nu}$ и v^α. Свертки пар γ–матриц слева, а также справа, просто дают дополнительные члены того же вида с меньшим $l + r$. Прежде чем производить остальные свертки, можно переставить γ–матрицы так, что $\hat{v}$ стоят только на крайних местах слева и справа, а индексы свертки слева и справа следуют в противоположном порядке. Дополнительные члены из антикоммутаторов имеют меньше γ–матриц, причем l остается четным. Повторяя эту процедуру для всех $l+r$ от 8 до 0, мы можем привести любую диаграмму к виду

$$D = \overline{u}_q \Big[\Gamma(x_0 + x_1\hat{v}) + \hat{v}\gamma_\alpha\Gamma\gamma^\alpha(x_2 + x_3\hat{v}) + \gamma_\alpha\gamma_\beta\Gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha(x_4 + x_5\hat{v}) + \hat{v}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\Gamma\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha(x_6 + x_7\hat{v}) + \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\Gamma\gamma^\delta\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha x_8 \Big] u_Q \,. \qquad (2.5.11)$$

Теперь предположим, что матрица Γ имеет свойства (2.5.5). Каждая свертка тогда даем множитель $2\sigma h$. Члены с нечетным числом сверток обязательно содержат $\hat{v}$ слева. Он дает дополнительно σ, когда переставляется направо. Там он просто дает $\hat{v}u_Q = u_Q$. Поэтому результат содержит только степени h:

$$D = \left[(x_0 + x_1) + (x_2 + x_3)(2h) + (x_4 + x_5)(2h)^2 + (x_6 + x_7)(2h)^3 + x_8(2h)^4 \right] \Gamma_{\mathrm{B}} \,. \qquad (2.5.12)$$

Коэффициенты $x_0 + x_1$, $x_2 + x_3$, $x_4 + x_5$, $x_6 + x_7$, x_8 для каждой диаграммы можно найти, взяв по отдельности след γ–матриц на линии легкого кварка с L_i и след на линии тяжелого кварка с H_i, используя следующие 5 $L_i \times H_i$: $1 \times (1+\hat{v})$; $\gamma_\mu\hat{v} \times (1+\hat{v})\gamma^\mu$; $\gamma_\mu\gamma_\nu \times (1+\hat{v})\gamma^\nu\gamma^\mu$; $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\hat{v} \times (1+\hat{v})\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu$; $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \times (1+\hat{v})\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu$. Производя ту же операцию с общим видом (2.5.11), мы получаем 5 уравнений, связывающих эти двойные следы с желаемыми коэффициентами. Решая эти уравнения раз и навсегда, мы можем преобразовать подынтегральное выражение любой диаграммы в полином 4 степени по h с коэффициентами, содержащими скалярные произведения v и петлевых импульсов. Для надежности, мы проверили полученный таким образом общий результат для каждой двухпетлевой диаграммы, сравнив его с отдельными вычислениями для 8 конкретных матриц Дирака. Аналогичным образом, однопетлевая диаграмма Рис. 2.12a и диаграмма с массовым контрчленом сводятся к квадратичным полиномам по h.

Все скалярные однопетлевые интегралы сводятся к I_0 (2.1.23), а двухпетлевые — к I_0^2, I_1 (2.2.35) и I_2 (2.2.37), с использованием интегрирования по частям. Это сведение реализовано в REDUCE пакете RECURSOR (§2.2). Чтобы иметь сильную проверку, мы произвели вычисления в произвольной ковариантной калибровке, проверяя, что сумма всех диаграмм для вершины на массовой поверхности, включая вклад массового контрчлена, калибровочно–инвариантна в d измерениях. Результат может быть представлен в виде

$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{\rm B}} = 1 - C_F \frac{g_0^2 m^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} I_0 \frac{(1-h)(d-2+2h)}{2(d-3)} + C_F \frac{g_0^4 m^{-4\epsilon}}{(4\pi)^d} \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{3} a_{jik} C_i J_j h_k \tag{2.5.13}$$

через 4 цветовых фактора, 3 интегральных структуры и 4 функции, специфичных для каждого тока. Мы выбрали цветовые факторы следующим образом: $C_0 = C_F - \frac{1}{2} C_A$; $C_1 = C_F$; $C_2 = T_F n_l$ (из n_l безмассовых петель в диаграмме 2.12b); $C_3 = T_F$ (из петли тяжелого кварка). Интегралы

$$J_0 = \frac{(d-2) I_0^2}{8(d-1)(d-3)^2(d-4)^2(d-5)(d-6)}, \tag{2.5.14}$$
$$J_1 = \frac{I_1}{8(d-1)(d-3)(d-4)(2d-7)}, \quad J_2 = \frac{I_2}{4(d-1)(d-4)^2(d-6)}$$

выбраны так, что коэффициенты a_{jik} полиномиальны по d. Вся зависимость от Γ содержится в $h_k = h^k$ ($k = 0,\ 1,\ 2$), $h_3 = h^3(h+d-4)$. Только диаграммы 2.12f и 2.12i имеют достаточно γ–матриц с обоих сторон от вершины, чтобы дать члены h^3 и h^4; мы обнаружили, что каждая из них дает комбинацию h_3 для каждой интегральной структуры. Интеграл J_2 содержится только в диаграмме 2.12j (с цветовым фактором C_0) и в петле тяжелого кварка в диаграмме 2.12b (с цветовым фактором C_3). Поэтому многие из 48 коэффициентов a_{jik} равны нулю. Все 28 ненулевых коэффициента перечислены здесь:

$$a_{000} = \left(3d^3 - 30d^2 + 101d - 110\right)(d-1)(d-2)(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{001} = -2\left(d^5 - 17d^4 + 109d^3 - 325d^2 + 428d - 172\right)(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{002} = -2\left(5d^4 - 50d^3 + 164d^2 - 156d - 56\right)(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{003} = 8(d-4)^2(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{010} = \left(d^2 - 8d + 10\right)(2d-7)(d-2)(d-4)(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{011} = -2\left(d^3 - 13d^2 + 42d - 32\right)(d-4)^2(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{012} = -2\left(3d^2 - 10d - 4\right)(d-4)^2(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{013} = 8(d-4)^2(d-5)(d-6)\,,$$
$$a_{030} = -2\left(7d^3 - 76d^2 + 255d - 246\right)(d-2)(d-3)(d-4)\,,$$
$$a_{031} = 4\left(3d^4 - 50d^3 + 287d^2 - 660d + 492\right)(d-3)(d-4)\,,$$

$$a_{032} = 32\left(d^2 - 6d + 6\right)(d-3)(d-4)^2 \,,$$

$$a_{100} = -\left(d^4 - 9d^3 + 26d^2 - 24d + 2\right)(3d-8)(d+2) \,,$$

$$a_{101} = 4\left(2d^6 - 31d^5 + 183d^4 - 508d^3 + 642d^2 - 260d - 32\right) \,,$$

$$a_{102} = 4\left(2d^5 - 2d^4 - 139d^3 + 794d^2 - 1600d + 1088\right) \,,$$

$$a_{103} = -16(2d-7)(d-2)(d-4) \,,$$

$$a_{110} = -\left(2d^4 - 24d^3 + 105d^2 - 199d + 134\right)(3d-8)(d-2) \,,$$

$$a_{111} = 2\left(2d^5 - 33d^4 + 210d^3 - 643d^2 + 916d - 448\right)(d-4) \,,$$

$$a_{112} = 2\left(8d^4 - 71d^3 + 211d^2 - 178d - 88\right)(d-4) \,,$$

$$a_{113} = -8(2d-7)(d-3)(d-4) \,,$$

$$a_{120} = 4(3d-8)(d-2)(d-3)(d-4) \,,$$

$$a_{121} = -16(d-2)(d-3)(d-4)^2 \,,$$

$$a_{122} = -16(d-2)(d-3)(d-4) \,,$$

$$a_{200} = -\left(d^3 - 12d^2 + 45d - 46\right)(3d-8)(d-6) \,,$$

$$a_{201} = 2\left(d^3 - 18d^2 + 101d - 184\right)(d-2)(d-6) \,,$$

$$a_{202} = 8\left(d^3 - 12d^2 + 47d - 56\right)(d-6) \,,$$

$$a_{230} = 2\left(d^2 - 5d + 2\right)(3d-8)(d-4) \,,$$

$$a_{231} = -4\left(d^3 - 11d^2 + 30d - 16\right)(d-4) \,,$$

$$a_{232} = -16(d-2)(d-4)^2 \,.$$

Теперь мы завершим вычисление, включив эффект ненулевых масс легких кварков. Разность выражений для диаграммы 2.12b с кварком массы m_i в петле и с безмассовым кварком не содержит ни ультрафиолетовых, ни инфракрасных расходимостей. Поэтому мы вычисляем ее в 4 измерениях, и получаем дополнительный член, который нужно добавить к (2.5.13):

$$\frac{\Delta\Gamma_0}{\Gamma_{\mathrm{B}}} = C_F T_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_l} \Delta_\Gamma\left(\frac{m_i}{m}\right) \,, \qquad (2.5.15)$$

где сумма берется только по легким флейворам, а Δ_Γ может быть выражена через интегралы (2.3.31) как

$$\Delta_\Gamma(r) = \frac{4}{3}\left[-2(1-h^2)\Delta_1(r) - (1+2h-2h^2)\Delta_2(r) + 2h(2-h)\Delta_3(r)\right], \tag{2.5.16}$$

где $\Delta_\Gamma(0) = 0$ по определению. В качестве сильной проверки коэффициентов при цветовых структурах C_3 и C_2 в (2.5.13), происходящих от петель с кварками массы $m_i = m$ и $m_i = 0$ соответственно, мы проверили, что подстановка $d = 4$ в их разности дает то же, что и подстановка $r = 1$ в (2.5.16).

Теперь мы перевыражаем неперенормированную КХД вершину (2.5.13) через константу связи, перенормированную в $\overline{\mathrm{MS}}$, $\alpha_s(\mu)$, используя однопетлевую формулу с $n_f = n_l + 1$ флейворами, и разлагаем результат в ряд Лорана по ϵ. Используя Z_Q^{os} из [**73**], $\widetilde{\Gamma}_0 = \Gamma_{\mathrm{B}}$, $\widetilde{Z}_j(\mu)$ из (2.5.2), и $\widetilde{Z}_Q^{\mathrm{os}}$ из (2.1.22), мы получаем общее выражение для константы перенормировки КХД тока $Z_j(\mu)$ из требования конечности (2.5.7). Тем самым мы находим аномальную размерность КХД тока $j_n(\mu) = \overline{q}\gamma^{[\mu_1} \ldots \gamma^{\mu_n]}q$, которая не зависит от того, являются кварки тяжелыми или легкими. Мы получаем

$$\begin{aligned}\gamma_j = &- C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}(n-1)(n-3)\left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(C_F\frac{5(n-2)^2-19}{2} - C_A\frac{3(n-2)^2-19}{3}\right)\right]\\ &- C_F\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2(n-1)(n-15)\frac{11C_A - 4T_Fn_f}{9}\,.\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Отсутствие сигнатуры η, которая всего лишь различает разные компоненты j, представляет собой сильную проверку. Мы воспроизводим результат [**105**] при $n = 0$, и, конечно, получаем нулевой результат для векторного тока при $n = 1$. Двухпетлевая аномальная размерность векторного тока $\overline{q}\sigma_{\mu\nu}q$ с $n = 2$ могла бы быть найдена известными методами в безмассовой КХД; вместо этого, мы получили ее как побочный продукт более сложного массивного вычисления на массовой поверхности:

$$\gamma_j\big|_{n=2} = C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(-\frac{19}{2}C_F + \frac{257}{18}C_A - \frac{26}{9}T_Fn_f\right)\right]. \tag{2.5.18}$$

Токи с $n = 3$ и $n = 4$ — это несинглетные аксиальный и псевдоскалярный токи с γ_5 ’т Хофта–Велтмана. Их аномальные размерности отличаются, начиная с двухпетлевого уровня, от случая наивной антикоммутирующей γ_5 ($n = 1$ и $n = 0$, соответственно). Это отличие видно в последнем члене (2.5.17), который несимметричен относительно замены $n \to 4-n$. Наши результаты для $n=3$ и $n=4$ согласуются с [**108**] и [**109**], соответственно.

Наконец, мы получаем общее выражение для коэффициентов сшивки с двухпетлевой точностью:

$$\begin{aligned} C_\Gamma(m) = & 1 + C_F \frac{\alpha_s(m)}{4\pi} \left[3(n-2)^2 + (2-\eta)(n-2) - 4\right] \\ & + C_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[C_F a_F + C_A a_A + T_F \sum_{i=1}^{n_f} \left\{a_f + \Delta_j\left(\frac{m_i}{m}\right)\right\}\right], \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

где сумма включает тяжелый флейвор с $m_i = m$. Однопетлевой член совпадает с [**53**]. Коэффициенты в двухпетлевом члене равны

$$\begin{aligned} a_F = & \left(\frac{317}{24} - \frac{10}{3}\zeta(2)\right)(n-2)^4 + 11(n-2)^3 - \frac{11}{2}\eta(n-2)^3 \\ & + \left(-\frac{253}{6} + 48\zeta(2) - \frac{16}{3}I\right)(n-2)^2 - 2\eta(n-2)^2 - 20(n-2) \\ & + \left(\frac{32}{3} - \frac{64}{3}\zeta(2) + \frac{8}{3}I\right)\eta(n-2) + \frac{689}{16} - 81\zeta(2) - 8\zeta(3) + 12I\,, \\ a_A = & \left(-\frac{43}{12} + \frac{4}{3}\zeta(2)\right)(n-2)^4 - 2(n-2)^3 + \eta(n-2)^3 \\ & + \left(\frac{9491}{216} - \frac{52}{3}\zeta(2) + \frac{8}{3}I\right)(n-2)^2 + \frac{143}{18}(n-2) \\ & + \left(-\frac{281}{18} + 8\zeta(2) - \frac{4}{3}I\right)\eta(n-2) - \frac{29017}{432} + 29\zeta(2) + 2\zeta(3) - 6I\,, \\ a_f = & \left(-\frac{445}{54} - \frac{8}{3}\zeta(2)\right)(n-2)^2 - \frac{2}{9}(n-2) + \frac{38}{9}\eta(n-2) + \frac{1745}{108} + \frac{20}{3}\zeta(2)\,. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Массовая поправка $\Delta_j(r) = \Delta_\Gamma(r) + \Delta_Z(r)$ зависит только от $h|_{\epsilon=0} = \eta(n-2)$, поскольку (2.5.9) и (2.5.16) — конечные интегралы в 4 измерениях. Ее общий вид

$$\begin{aligned} \Delta_j(r) = \frac{2}{3}\Big[& 2\left(2(n-2)^2 - 5\right)\Delta_1(r) + \left(4(n-2)^2 - 4\eta(n-2) - 5\right)\Delta_2(r) \\ & - 2\left(2(n-2)^2 - 4\eta(n-2) + 9\right)\Delta_3(r)\Big]. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Вклад тяжелого флейвора с $m_i = m$ пропорционален $a_f + \Delta_j(1)$, где

$$\Delta_j(1) = \frac{2}{3}\left[2(7+2\zeta(2))(n-2)^2 + 4(-5+2\zeta(2))\eta(n-2) + 17 - 38\zeta(2)\right] \tag{2.5.22}$$

всегда противоположна по знаку и близка по модулю к a_f, так что вклад тяжелого флейвора много меньше, чем легкого.

В 4–мерном пространстве–времени имеется 8 различных матриц Γ: антисимметризованные произведения вплоть до 3 пространственных γ–матриц, и они же, умноженные на γ_0. Для каждого тока, мы получаем коэффициент сшивки $C_\Gamma(m)$, выбирая соответствующие значения n и η в формулах (2.5.19)–(2.5.22). С n_l безмассовыми кварками и физическими значениями цветовых факторов, мы получаем численные значения в Таблице 2.2. Два из них совпадают по причине, которую мы скоро рассмотрим. В первом столбце приведены типичные матрицы Γ; $C_\Gamma(m)$, конечно, такой же для других пространственных компонент. Коэффициенты при $(\alpha_s/\pi)^2$ в двухпетлевых поправках записаны в виде суммы трех членов: вклад без кварковых петель; вклад петель легких кварков; и вклад петли тяжелого кварка. Видно, что глюонный вклад обычно порядка 10; каждый легкий флейвор дает вклад порядка 1 с противоположным знаком; вклад тяжелого флейвора порядка 0.1. В большинстве случаев двухпетлевая поправка имеет тот же знак, что и однопетлевая.

Таблица 2.2. Коэффициенты сшивки.

Γ	$C_\Gamma(m)$
1	$1+\frac{2}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi}+(10.92-0.60n_l+0.04)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$
γ_0	$1-\frac{2}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi}-(4.20-0.44n_l+0.07)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$
γ_1	$1-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi}-(11.50-0.79n_l+0.09)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$
$\gamma_0\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$	$1-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi}-(16.19-1.13n_l+0.13)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$
$\gamma_0\gamma_1\gamma_2$	$1-(10.98-0.77n_l+0.11)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$
$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$1+\frac{2}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi}-(2.78-0.42n_l+0.08)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$
$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$1+\frac{10}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi}+(19.75-0.64n_l+0.00)(\frac{\alpha_s}{\pi})^2$

Как мы уже обсуждали, эти результаты относятся к сшивке n_f–флейворной КХД с n_f–флейворной HQET. Малый вклад внешнего флейвора следует опустить при сравнении (n_f-1)–флейворной HQET с континуальным пределом решеточной КХД, в которой петли тяжелого кварка также исключены.

Сшивку с (n_f-1)–флейворной HQET можно провести в два этапа: сначала перейти от n_f–флейворной КХД к n_f–флейворной HQET, а затем от нее к (n_f-1)–флейворной HQET: $\tilde{\jmath}(\mu)=\tilde{C}(\mu)\tilde{\jmath}'(\mu)$,

$$\tilde{C}(\mu)=\left(\frac{Z_q^{\text{os}}}{Z_q^{\text{os}\prime}}\right)^{1/2}\left(\frac{\widetilde{Z}_Q^{\text{os}}}{\widetilde{Z}_Q^{\text{os}\prime}}\right)^{1/2}\frac{\widetilde{Z}_j'(\mu)}{\widetilde{Z}(\mu)}\frac{\widetilde{\Gamma}_0}{\widetilde{\Gamma}_0'}\,. \tag{2.5.23}$$

Используя (2.1.22), (2.1.24), $\widetilde{\Gamma}_0=\widetilde{\Gamma}_0'=1$ и отношение

$$\frac{\widetilde{Z}}{\widetilde{Z}'}=1+C_FT_F\left(\frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\right)^2\left(1-\tfrac{5}{6}\epsilon\right)\,, \tag{2.5.24}$$

которое может быть получено из (2.5.2), мы получаем

$$\tilde{\jmath}(m)=\left[1+\frac{89}{36}C_FT_F\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2\right]\tilde{\jmath}'(m)\,. \tag{2.5.25}$$

Таким образом, сшивка с (n_f-1)–флейворной HQET описывается формулой (2.5.19) с $a_f\to a_f+\frac{89}{36}$. Соответственно, все численные значения коэффициентов при $(\alpha_s/\pi)^2$ в таблице 2.2 должны быть сдвинуты на 0.103 в этом случае.

Аналогичным образом можно рассмотреть разложения билинейных токов легких кварков в КХД с $n_f=n_l+1$ флейворами, один из которых тяжелый, по операторам эффективной КХД с n_l флейворами: $j_n(\mu)=C_n(\mu)j_n'(\mu)$ плюс степенные поправки (см. [**110**] и цитированные там работы). Естественно производить сшивку при $\mu=m$, поскольку $C_n(m)$ не содержит больших логарифмов. Токи в произвольных точках нормировки связаны соотношением

$$\exp\left(-\int\limits_{\alpha_s(m)}^{\alpha_s(\mu)}\frac{\gamma_n(\alpha)}{2\beta(\alpha)}\frac{d\alpha}{\alpha}\right)j_n(\mu)=C_n(m)\exp\left(-\int\limits_{\alpha_s'(m)}^{\alpha_s'(\mu')}\frac{\gamma_n'(\alpha)}{2\beta'(\alpha)}\frac{d\alpha}{\alpha}\right)j_n'(\mu')\,. \tag{2.5.26}$$

Матричный элемент $j_n(\mu)$ на массовой поверхности равен $M(\mu)=Z_q^{\text{os}}Z_j^{-1}(\mu)\Gamma_{j0}$, где Γ_{j0} — неперенормированная вершинная функция. Он должен быть равен $C_n(\mu)M_n'(\mu)$ плюс степенные поправки, где $M_n'(\mu)=Z_q^{\text{os}\prime}Z_j'^{-1}(\mu)\Gamma_{j0}'$. Оба матричных элемента ультрафиолетово–конечны; их инфракрасные расходимости совпадают, поскольку обе теории идентичны в инфракрасной области. Поэтому

$$C_n(\mu)=\frac{Z_q^{\text{os}}}{Z_q^{\text{os}\prime}}\frac{Z_j'(\mu)}{Z_j(\mu)}\frac{\Gamma_{j0}}{\Gamma_{j0}'}\,. \tag{2.5.27}$$

Неперенормированную вершинную функцию можно вычислять при любых импульсах кварков, лежащих на массовой поверхности. Наиболее удобно положить их равными нулю (тем самым исключая степенные поправки в (2.5.27)):

$$\Gamma_{j0} = 1 - C_F T_F \frac{g_0^4 m^{-4\epsilon}}{(4\pi)^d} I_0^2 \frac{(d-2)(d-6)}{2(d-5)(d-7)} \left(\frac{(d-2n)^2}{d} - 1 \right) . \tag{2.5.28}$$

Соответствующие величины в низкоэнергетической теории $Z_q^{\mathrm{os}\prime} = 1$, $\Gamma'_{j0} = 1$. Отношение

$$\frac{Z_j}{Z'_j} = 1 + \frac{1}{4} \left(\gamma_{n0} \Delta\beta_0 - \Delta\gamma_{n1}\epsilon \right) \left(\frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} \right)^2 = 1 + \frac{1}{9} C_F T_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} \right)^2 (n-1) \left[6(n-3) - (n-15)\epsilon \right] \tag{2.5.29}$$

(где $\Delta\beta_0 = -\frac{4}{3} T_F$ и $\Delta\gamma_{n1}$ — вклады одного флейвора) может быть получено из (2.5.17).

Используя

$$\frac{g_0^2 m^{-2\epsilon} \Gamma(1+\epsilon)}{(4\pi)^{d/2}} = \frac{\alpha_s(m)}{4\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) ,$$

мы окончательно получаем [**17**]

$$j_n(m) = \left[1 + C_F T_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{(n-1)(85n-267)}{54} \right] j'_n(m) . \tag{2.5.30}$$

Во всех порядках $j_1 = j'_1$, что естественно, поскольку интеграл от векторного тока есть число кварков минус антикварков, одинаковое в обоих теориях. Кроме того, $m_q (\bar{q} q) = m'_q (\bar{q} q)'$ во всех порядках, так что C_0 можно получить из сшивки масс легких кварков [**110**].

Таким образом, легкие кварковые токи должны подправляться в соответствии с (2.5.30) при пересечении порога тяжелого флейвора; тяжело–легкий HQET ток должен подправляться в соответствии с (2.5.25) при пересечении порога (даже другого флейвора).

2.6. Отношения мезонных матричных элементов

Теперь мы обсудим отношения коэффициентов сшивки: сначала те, которые связаны с различными предписаниями для γ_5 в размерной регуляризации, а затем те, которые дают отношения мезонных матричных элементов.

Известно, что не существует d–мерного обобщения γ_5, которое антикоммутировало бы со всеми γ_μ; равным образом, не существует ковариантного d–мерного обобщения $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ Вместо этого, можно использовать γ_5 'т Хофта–Велтмана

$$\gamma_5^{\mathrm{HV}} = i\, \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 , \tag{2.6.1}$$

что делает многопетлевые вычисления весьма громоздкими, даже при использовании ковариантных определений с антисимметризованными произведениями [**109**]. Однако принято считать, что можно использовать наивно антикоммутирующую γ_5^{AC} в открытых фермионных линиях и петлях с четным числом γ_5 матриц, не сталкиваясь с противоречиями.

Антисимметризованные произведения n и $4-n$ γ–матриц связаны друг с другом умножением на γ_5^{HV}, и имеют разные коэффициенты сшивки. С другой стороны, умножение Γ на наивно антикоммутирующую γ_5^{AC} не меняет h в (2.5.5), и потому не может изменить коэффициента сшивки. Поэтому отношения коэффициентов сшивки с n и $4-n$ антисимметризованными γ–матрицами отражают отличия между разными предписаниями для γ_5.

Матричные элементы в HQET не зависят от предписания для γ_5. Например,

$$<0|\overline{q}\gamma_5^{\mathrm{HV}}\widetilde{Q}|B> = <0|\overline{q}\gamma_5^{\mathrm{AC}}\widetilde{Q}|B>\,. \tag{2.6.2}$$

Чтобы доказать это равенство, рассмотрим коррелятор двух псевдоскалярных токов. В каждой диаграмме пропагатор статического кварка между двумя γ_5–вершинами имеет γ–матричную структуру $(1+\gamma_0)/2$, на которую не влияют глюонные вершины. Поскольку любая γ_5 антикоммутирует с γ_0, мы можем перенести одну γ_5–матрицу и аннигилировать ее с другой, так что на линии тяжелого кварка останется $(1-\gamma_0)/2$ независимо от предписания. Так что коррелятор не зависит от предписания, и его спектральная плотность тоже, и в частности вклад основного состояния. Поэтому мы получаем (2.6.2).

В противоположность этому, КХД матричные элементы не совпадают. Как мы уже обсуждали, псевдоскалярные токи $j^{\mathrm{HV}}(\mu) = Z_{\mathrm{HV}}^{-1}(\mu)\overline{q}_0\gamma_5^{\mathrm{HV}}Q_0$ и $j^{\mathrm{AC}}(\mu) = Z_{\mathrm{AC}}^{-1}(\mu)\overline{q}_0\gamma_5^{\mathrm{AC}}Q_0$, перенормированные в $\overline{\mathrm{MS}}$, имеют разные аномальные размерности начиная с двух петель. Эти токи связаны друг с другом конечной перенормировкой $j^{\mathrm{AC}}(\mu) = Z_P(\mu)j^{\mathrm{HV}}(\mu)$. Член порядка α_s^L в ней можно найти, сравнивая перенормированные матричные элементы в L петлях, или более сложным образом — приравнивая $d\log Z_P/d\log\mu$ разности $\gamma_{j^{\mathrm{HV}}} - \gamma_{j^{\mathrm{AC}}}$ аномальных размерностей в $L+1$ петле. Двухпетлевая константа перенормировки получена обоими методами [**109**]:

$$Z_P(\mu) = 1 - 2C_F\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} + C_F\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2\frac{2(C_A+4T_Fn_f)}{9} + O(\alpha_s^3)\,, \tag{2.6.3}$$

первым методом получен также член $O(\alpha_s^3)$. Этот результат должен получаться при сравнении матричных элементов с кварками с любой массой и импульсом, в частности

$$Z_P(\mu) = \frac{<0|j^{\mathrm{AC}}(\mu)|B>}{<0|j^{\mathrm{HV}}(\mu)|B>} = \frac{C_1(\mu)}{C_{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\mu)}\,, \tag{2.6.4}$$

вследствие равенства (2.6.2). Полагая $\mu = m$ и используя (2.5.19), мы действительно воспроизводим (2.6.3). В частности, двухпетлевые поправки из–за конечной массы (2.5.21) сокращаются в отношении (2.6.4), как и должно быть в результате, который можно получить из трехпетлевых аномальных размерностей, которые не зависят от масс.

Аналогично, 'т Хофт–Велтмановский и наивно антикоммутирующий несинглетные аксиальные токи, перенормированные в $\overline{\mathrm{MS}}$, связаны конечной перенормировкой $j_\mu^{\mathrm{AC}}(\mu) = Z_A(\mu) j_\mu^{\mathrm{HV}}(\mu)$. Константа была вычислена в двух [**108**] и трех петлях [**109**]:

$$Z_A(\mu) = 1 - C_F \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} + C_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \frac{198 C_F - 107 C_A + 4 T_F n_f}{9} + O(\alpha_s^3)\,, \tag{2.6.5}$$

Мы можем проверить ее из двух отношений

$$Z_A(\mu) = \frac{C_{\gamma_0}(\mu)}{C_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\mu)} = \frac{C_{\gamma_3}(\mu)}{C_{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\mu)}\,. \tag{2.6.6}$$

Заметим, что слабый аксиальный ток — это j_μ^{AC}. Только для этого тока КХД перенормировка сохраняет $V - A$ структуру. Поэтому измеримые матричные элементы, такие как f_B, получаются из j_μ^{AC}, а не из нарушающего киральную симметрию 'т Хофт–Велтмановского тока.

Тензорный ток $j_{\mu\nu} = \overline{q}\sigma_{\mu\nu} q$ является особым случаем, потому что включение γ_5^{HV}, дающее $j_{\mu\nu}^{\mathrm{HV}} = \overline{q}\gamma_5^{\mathrm{HV}}\sigma_{\mu\nu} q$, является всего лишь Лоренцевым преобразованием, например, $j_{01}^{\mathrm{HV}} = -i j_{23}$. Поэтому аномальные размерности $j_{\mu\nu}^{\mathrm{HV}}$ и $j_{\mu\nu}^{\mathrm{AC}}$ одинаковы, так что не может существовать нетривиальной конечной перенормировки $Z_T(\mu)$, связывающей эти два тока. Иными словами, у нас есть два метода получения $Z_T(\mu)$:

$$Z_T(\mu) = \frac{C_{\gamma_0\gamma_1}(\mu)}{C_{\gamma_2\gamma_3}(\mu)} = \frac{C_{\gamma_2\gamma_3}(\mu)}{C_{\gamma_0\gamma_1}(\mu)}\,, \tag{2.6.7}$$

что доказывает, что $Z_T(\mu) = 1$ и $C_{\gamma_0\gamma_1}(m) = C_{\gamma_2\gamma_3}(m)$, в согласии с (2.5.19). Нетрудно проследить, как это происходит в нашем вычислении коэффициентов сшивки. При $n = 2$ мы имеем $h = \eta\epsilon$, так что единственный возможный источник различия между $C_{\gamma_0\gamma_1}(\mu)$ и

$C_{\gamma_2\gamma_3}(\mu)$ — это член h/ϵ в Γ_0. Такой член давал бы η–зависящую аномальную размерность в КХД при $n \neq 2$, и потому не может присутствовать.

Формулы (2.6.3), (2.6.5) можно также использовать для проверки сшивки легких токов (2.5.30). Токи j_3, j_4 отличаются от j_1, j_0 вставкой $\gamma_5^{\rm HV}$; вставка $\gamma_5^{\rm AC}$ не меняет коэффициента сшивки. Поэтому $C_3 = C_1 Z'_A/Z_A$, $C_4 = C_0 Z'_P/Z_P$, где Z'_P, Z'_A содержат n_l вместо $n_f = n_l + 1$.

После устранения токов, содержащих 'т Хофт–Велтмановскую γ_5, у нас остаются 4 существенно различных тока. Мы рассмотрим теперь матричные элементы для мезонов в основном состоянии:

$$\begin{gathered}<0|(\overline{q}\gamma_5 Q)_\mu|B> = -i\, m_B f_B^P(\mu)\,, \quad <0|\overline{q}\gamma^\alpha\gamma_5 Q|B> = i\, f_B p^\alpha\,, \\ <0|\overline{q}\gamma^\alpha Q|B^*> = i\, m_{B^*} f_{B^*} e^\alpha\,, \quad <0|(\overline{q}\sigma^{\alpha\beta}Q)_\mu|B^*> = -i\, f_{B^*}^T(\mu)(p^\alpha e^\beta - p^\beta e^\alpha)\,.\end{gathered} \tag{2.6.8}$$

Здесь и дальше мы используем наивно антикоммутирующую γ_5, что является правильным выбором для несинглетных слабых токов. Соответствующие HQET величины совпадают: $\tilde{f}_B^P = \tilde{f}_B = \tilde{f}_{B^*} = \tilde{f}_{B^*}^T$, как следствие спиновой симметрии тяжелого кварка. Поэтому отношения КХД матричных элементов равны отношениям коэффициентов сшивки. Эти отношения не зависят от неизвестной трехпетлевой аномальной размерности и являются схемно–независимыми. Подобные формулы справедливы для P–волновых 0^+, 1^+ мезонов, если вставить дополнительную γ_5 во все токи.

Из уравнений движения следует, что

$$\frac{f_B^P(\mu)}{f_B} = \frac{<0|(\overline{q}\gamma_5 Q)_\mu|B>}{<0|\overline{q}\gamma_5\gamma_0 Q|B>} = \frac{m_B}{\overline{m}(\mu)}\,, \tag{2.6.9}$$

где $\overline{m}(\mu)$ — бегущая масса тяжелого кварка в $\overline{\rm MS}$. В ведущем порядке по $1/m$, мы можем заменить m_B на массу кварка на массовой поверхности, и получить

$$\begin{aligned}\frac{f_B^P(m)}{f_B} =& \frac{m}{\overline{m}(m)} = \frac{C_1(m)}{C_{\gamma_0}(m)} = 1 + C_F \frac{\alpha_s(m)}{\pi} + C_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[C_F \left(\frac{121}{8} + 30\zeta(2) - 8I\right) \right. \\ &\left. + C_A \left(\frac{1111}{24} - 8\zeta(2) + 4I\right) + 8T_F \sum_{i=1}^{n_f} \left\{ -\frac{71}{48} - \zeta(2) + \Delta_1\left(\frac{m_i}{m}\right) + \Delta_3\left(\frac{m_i}{m}\right) \right\} \right] \\ \approx& 1 + \frac{4}{3}\frac{\alpha_s(m)}{\pi} + (16.01 - 1.04 n_l + 0.10)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2\,,\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

где окончательные численные результаты показаны, как в Таблице 2.2, в виде трех вкладов: без кварковых петель; n_l петель безмассовых кварков; и петля тяжелого кварка. Этот результат совпадает с [**74**] (там пропущен фактор C_F в поправке на ненулевую массу легкого кварка).

Наш наиболее важный результат — это отношение двух наблюдаемых матричных элементов:

$$\frac{<0|\overline{q}\vec{\gamma}Q|B^*>}{<0|\overline{q}\gamma_0\gamma_5 Q|B>} = \frac{m_{B^*} f_{B^*} \vec{e}}{m_B f_B}, \tag{2.6.11}$$

которое не зависит от точки нормировки. В ведущем порядке по $1/m$ мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{f_{B^*}}{f_B} =& \frac{C_{\gamma_1}(m)}{C_{\gamma_0}(m)} = 1 - C_F \frac{\alpha_s(m)}{2\pi} + C_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \Bigg[C_F \frac{1}{3}(31 - 128\zeta(2) + 16I) \\ & + C_A \frac{1}{9}(-263 + 144\zeta(2) - 24I) - \frac{16}{3} T_F \sum_{i=1}^{n_f} \left\{ -\frac{19}{12} + \Delta_2\left(\frac{m_i}{m}\right) - 2\Delta_3\left(\frac{m_i}{m}\right) \right\} \Bigg] \\ \approx& 1 - \frac{2}{3}\frac{\alpha_s}{\pi} - (7.75 - 0.35 n_l + 0.03)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 . \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Заметим, что численно это близко к $(\overline{m}(m)/m)^{1/2}$, как видно из (2.6.10).

В любом конечном порядке теории возмущений отношение (2.6.12) определяется комбинацией петлевых интегралов, которая не содержит ни инфракрасных, ни ультрафиолетовых расходимостей. Поэтому все петлевые импульсы порядка m. Чтобы проверить отсутствие инфракрасной чувствительности (которую можно не заметить в размерной регуляризации), мы повторяем однопетлевое вычисление с глюонной массой λ, и находим, что $O(\alpha_s)$ член в (2.6.12) умножается на

$$G\left(\frac{\lambda}{m}\right) = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dk^2}{k^2+\lambda^2} F\left(\frac{k^2}{m^2}\right) = 1 - \frac{2\pi}{3}\frac{\lambda}{m} + O\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right), \tag{2.6.13}$$

$$F(x) = (x+1)\sqrt{x(x+4)} - x(x+3) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \ll 1\,, \\ 2/x, & x \gg 1\,. \end{cases}$$

В общем, все отношения коэффициентов сшивки инфракрасно–безопасны, хотя те, что включают КХД токи с аномальными размерностями, конечно, нуждаются в ультрафиолетовой перенормировке.

Теперь мы покажем, что существование очень тяжелого флейвора, скажем t, не влияет на наблюдаемое отношение f_{B^*}/f_B. Чтобы доказать эту теорему, перепишем (2.6.12) как

$$\frac{f_{B^*}}{f_B} = 1 - C_F \frac{\alpha_s^{[n_f]}(\mu)}{2\pi} + C_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[A + B^{[n_f]}(\mu)\right] ,$$

$$B^{[n_f]}(\mu) = \frac{44}{3} C_A \log\frac{m}{\mu} - \frac{16}{3} T_F \sum_{i=1}^{n_f} \left\{ \log\frac{m}{\mu} - \frac{19}{12} + \Delta_2\left(\frac{m_i}{m}\right) - 2\Delta_3\left(\frac{m_i}{m}\right) \right\} , \qquad (2.6.14)$$

где A — константа, дающая член без кварковых петель в (2.6.12), и мы преобразовали $\overline{\mathrm{MS}}$ константу связи к произвольному масштабу μ, используя однопетлевую β–функцию с n_f флейворами. Явная μ–зависимость в (2.6.14) в порядке $O(\alpha_s^2)$ сокращается неявной зависимостью в $O(\alpha_s)$. Теперь предположим, что мы учли существование очень тяжелого кварка с массой $m_h \gg m$. Для этого мы должны заменить n_f на $n_f + 1$ в (2.6.14), где

$$\frac{\alpha_s^{[n_f+1]}(\mu)}{2\pi} = \frac{\alpha_s^{[n_f]}(\mu)}{2\pi} - \frac{16}{3} T_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left\{ \log\frac{m_h}{\mu} \right\} \qquad (2.6.15)$$

обеспечивает $\alpha_s^{[n_f+1]}(m_h) = \alpha_s^{[n_f]}(m_h)$, и

$$B^{[n_f+1]}(\mu) = B^{[n_f]}(\mu) - \frac{16}{3} T_F \left\{ \log\frac{m}{\mu} - \frac{19}{12} + \Delta_2\left(\frac{m_h}{m}\right) - 2\Delta_3\left(\frac{m_h}{m}\right) \right\} \qquad (2.6.16)$$

включает эффект петли очень тяжелого кварка в диаграмма 2.12b. Используя (2.3.33), мы находим $\Delta_2(r) - 2\Delta_3(r) = \log r + \frac{19}{12} + O(r^{-2}\log r)$ при $r = m_h/m \gg 1$. Поэтому члены в фигурных скобках в (2.6.15) и (2.6.16) сокращаются в любой точке нормировки μ. Интересно, что внешний тяжелый флейвор также дает малый вклад. Его вклад в (2.6.12) подавлен по сравнению с вкладом безмассового кварка множителем

$$1 - \tfrac{12}{19}\left\{\Delta_2(1) - 2\Delta_3(1)\right\} = \tfrac{1}{19}(4\pi^2 - 41) = -0.08\,. \qquad (2.6.17)$$

Сравнимые факторы подавления присутствуют во всех наших результатах.

Обращаясь к численной важности нашего двухпетлевого результата, мы подставляем $n_l = 4$ в (2.6.12) и добавляем $1/m$ поправку из [**111, 112**]:

$$\frac{f_{B^*}}{f_B} = 1 - \frac{2}{3}\frac{\alpha_s(m_b)}{\pi} - \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 (6.37 + \Delta_c) + \frac{1}{m_b}\left(\frac{2}{3}\varepsilon_0 - 8G_2(m_b)\right) + O(\alpha_s^3, \alpha_s/m_b, 1/m_b^2) \qquad (2.6.18)$$

с поправкой на конечную массу c–кварка $\Delta_c = \frac{2}{9}(\Delta_2(m_c/m_b) - 2\Delta_3(m_c/m_b)) = 0.18 \pm 0.01$, для отношения масс $m_c/m_b = 0.28 \pm 0.03$, полученного из $m_b = (4.8 \pm 0.2)\mathrm{GeV}$, с использованием $m_{B,D} = m_{b,c} + \varepsilon_0 + (\mu_\pi^2 - \mu_G^2)/(2m_{b,c})$ и $m_{B^*} = m_B + 2\mu_G^2/(3m_b)$ с кинетическим членом $\mu_\pi^2 = (0.5 \pm 0.1)\mathrm{GeV}^2$. Текущее мировое среднее $\alpha_s(m_Z) = 0.117 \pm 0.005$, проэволюционированное вниз до m_b по трехпетлевой формуле, дает $\alpha_s(m_b) = 0.215 \pm 0.018$. Поэтому однопетлевая поправка равна $-(4.6 \pm 0.4)\%$, а двухпетлевая сравнима с ней: $-(3.1 \pm 0.5)\%$. Другой способ увидеть, что ряд теории возмущений сходится медленно — это сказать, что в схеме наибыстрейшей кажущейся сходимости, в которой двухпетлевая поправка в (2.6.14) обращается в ноль, $\alpha_s(\mu)$ в однопетлевой поправке должна браться в слишком низкой точке нормировки $\mu = m_b/13 = 370$ MeV.

Матричный элемент хромомагнитного взаимодействия $G_2(m_b)$ известен плохо; оценки из правил сумм дают от $G_2(m_b) = -26\mathrm{MeV}$ [**111**] до $G_2(m_b) = +21\mathrm{MeV}$ с большими неопределенностями [**112**]. Полная $1/m$ поправка, включая эффект ε_0, составляет $+(11 \pm 3)\%$ [**111**] или $+(4 \pm 3 \pm 2 \pm 2)\%$ [**112**]. Комбинируя все известные результаты, мы получаем $f_{B^*}/f_B = 1.00 \pm 0.04$, где ошибка отражает различие между [**111, 112**]. Однако неясно, сходится ли ряд теории возмущений достаточно быстро, чтобы пренебречь неизвестной трехпетлевой поправкой.

Для последнего отношения

$$\frac{<0|(\overline{q}\gamma_i\gamma_0 Q)_\mu|B^*>}{<0|\overline{q}\gamma_i Q|B^*>} = \frac{f_{B^*}^T(\mu)}{f_{B^*}} \tag{2.6.19}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{f_{B^*}^T(m)}{f_{B^*}} =& \frac{C_{\gamma_0\gamma_1}(m)}{C_{\gamma_1}(m)} = 1 + C_F\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2\left[C_F\frac{1}{3}\left(\frac{307}{8} - 70\zeta(2) + 8I\right)\right.\\ &+ C_A\frac{1}{3}\left(-\frac{4277}{72} + 24\zeta(2) - 4I\right)\\ &\left.- \frac{8}{3}T_F\sum_{i=1}^{n_f}\left\{-\frac{205}{144} - \zeta(2) + \Delta_1\left(\frac{m_i}{m}\right) + \Delta_3\left(\frac{m_i}{m}\right)\right\}\right]\\ \approx& 1 - (4.69 - 0.34n_l + 0.04)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 .\end{aligned} \tag{2.6.20}$$

Однопетлевой член обращается в нуль при $\mu = m$, но, конечно, появится в любой другой точке нормировки. Если $f_{B^*}^T(\mu)$ требуется в точке нормировки μ, сильно отличающейся от

m, то, в в дополнение к (2.6.20), нужна трехпетлевая аномальная размерность КХД тока $\overline{q}\sigma_{\mu\nu}q$. В настоящий момент она неизвестна, хотя она может быть вычислена стандартными методами безмассовой КХД.

Наконец, обратим внимание на любопытную закономерность в результатах (2.6.10), (2.6.12) и (2.6.20): в каждом из них разумная оценка двухпетлевого члена получается путем простой замены $n_l \to n_l - \frac{11}{2}N$ во вкладе петли легких кварков, который легко вычислить. Мы называем эту замену “наивной неабелианизацией”, поскольку она основана на надежде, что результат в неабелевой теории может быть оценен путем замены абелевой части ведущего члена β–функции на полный неабелев вклад. Наивная неабелианизация в (2.6.10) переоценивает двухпетлевой член на 9%, в (2.6.12) — недооценивает на 31%, а в (2.6.20) — переоценивает на 27%. Замечательно, что наивная неабелианизация ведущих n_f членов в e^+e^- аннигиляции недооценивает трехпетлевой член в R не более чем на 6% (с 4 или 5 активными флейворами), Она может поэтому применяться для оценки в ситуациях, когда ведущий n_f член можно вычислить, а полный результат неизвестен.

2.7. Высшие поправки к тяжело–легким токам

В этом параграфе мы получим коэффициенты сшивки с точностью $1/\beta_0$. Аналогично §2.4, ряд теории возмущений для $C_\Gamma(\mu)$ может быть записан в виде (2.4.3). Функция $F(\epsilon, u)$ имеет вид (2.4.8) с

$$N(\epsilon, u) = -C_F\Big[(3-2\epsilon)(1-u)(1+u-\epsilon) + 2 - u - \epsilon + 2\eta(n-2+\epsilon)u - 2(n-2+\epsilon)^2\Big]. \tag{2.7.1}$$

Первый член происходит от перенормировки волновой функции (2.4.10); остальные члены — из Γ_0, они квадратичны по $h = \eta(n-2+\epsilon)$, поскольку происходят из однопетлевого вычисления. Как и в §2.4, разность аномальных размерностей $\tilde{\gamma}_j - \gamma_j$ имеет вид (2.4.4), а конечный член $C_\Gamma(\mu)$ — (2.4.5). Первый член в этой формуле схемно–зависим и дает сходящийся ряд; второй — схемно–независим, и дает ряд, не суммируемый по Борелю.

Поскольку мы знаем, что γ_j обращается в ноль при $n=1$, мы можем найти и γ_j, и $\tilde{\gamma}_j$ из их разности:

$$\gamma_j = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{(n-1)(d-1-n)}{18B(d/2,d/2)B(d/2+1,3-d/2)}\bigg|_{d=4+2\beta}, \quad \tilde{\gamma}_j = \tfrac{1}{2}\gamma_j\big|_{n=0} \tag{2.7.2}$$

в порядке $1/\beta_0$. Аномальные размерности КХД токов с $n = 0$, 1, 3 согласуются с известными результатами; остальные являются новыми. Интересно, что $\tilde{\gamma}_j - \frac{1}{2}\gamma_{\bar{q}q}$ обращается в ноль в порядке $1/\beta_0$. В двух петлях эта комбинация не содержит n_f (2.5.2). Аномальные размерности КХД кваркового поля q и HQET поля $\widetilde{Q}$ равны

$$\gamma_q = aC_F\frac{\alpha_s}{\pi} - \tfrac{1}{2}\beta\tilde{\gamma}_j\,, \quad \tilde{\gamma}_Q = aC_F\frac{\alpha_s}{\pi} + \tfrac{1}{2}(4+\beta)\tilde{\gamma}_j \tag{2.7.3}$$

в порядке $1/\beta_0$. Зависимость от калибровочного параметра a ограничена одной петлей. Имеется сильная проверка (2.7.3). Аномальная размерность HQET тока равна

$$\tilde{\gamma}_j = \tilde{\gamma}_\Gamma + \tfrac{1}{2}(\gamma_q + \tilde{\gamma}_Q)\,, \tag{2.7.4}$$

где $\tilde{\gamma}_\Gamma = d\log\widetilde{Z}_\Gamma/d\log\mu$, $\widetilde{Z}_\Gamma$ — константа перенормировки HQET вершинной функции. Ее можно получить из $1/\epsilon$ полюса вершинной функции при нулевом импульсе легкого кварка и ненулевой остаточной энергии тяжелого кварка, поскольку в этом случае нет инфракрасных расходимостей. В порядке $1/\beta_0$ все вершинные диаграммы с более чем одной петлей содержат глюонный пропагатор со вставками кварковых петель, который является поперечным. Как мы уже обсуждали, такие диаграммы обращаются в нуль. Поэтому $\tilde{\gamma}_\Gamma$ не содержит многопетлевых вкладов, а однопетлевой обращается в нуль в калибровке Ландау. С учетом этого, аномальные размерности полей (2.7.3) воспроизводят $\tilde{\gamma}_j$.

Легко получить пертурбативные разложения (2.7.2) и (2.7.3) из разложения по ϵ

$$\begin{aligned}\frac{1}{18B(d/2,d/2)B(d/2+1,3-d/2)} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{2k}{3}\right)\epsilon^k}{\exp\left\{\sum_{s=3}^{\infty}\left(3+[-1]^s-2^s\right)\zeta(s)\epsilon^s/s\right\}}\\ &= 1-\tfrac{1}{6}\epsilon-\tfrac{13}{12}\epsilon^2+\left(2\zeta(3)-\tfrac{15}{8}\right)\epsilon^3+\left(3\zeta(4)-\tfrac{125}{48}\right)\epsilon^4+O\left(\epsilon^5\right)\,.\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Оно показывает, в частности, что $\zeta(4)$, которое отсутствует в известных 3– и 4–петлевых аномальных размерностях в КХД, обязано появиться в высших порядках. Ряд теории возмущений (2.7.5) имеет радиус сходимости $|\beta| < 5/2$; аномальные размерности (2.7.2) и (2.7.3) не имеют особенностей при $\beta > -5/2$.

Теперь мы перейдем к рассмотрению $C_\Gamma(\mu)$ (2.4.5). В противоположность первому интегралу, который существует при всех $\beta > -5/2$, подынтегральное выражение второго интеграла содержит особенности на контуре интегрирования — инфракрасные ренормалоны. Они отражают тот факт, что во все более высоких порядках теории возмущений существенной становится область все меньших импульсов глюона. Ренормалонные полюсы расположены в точках $u = n/2$, и их вычеты порядка $\exp(-n/(2\beta)) = (\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}/m)^n$. Если кто–то произвольным образом решит вычислять интеграл в смысле главного значения, то его ответ будет отличаться от ответов тех, кто выбрал какое–нибудь другое предписание, на комбинацию этих вычетов с какими–то множителями. Эти разногласия должны компенсироваться разным выбором матричных элементов высших членов разложения по $1/m$ (2.5.4). Если ввести инфракрасный регулятор, такой, как массу глюона λ, то результаты изменятся на величину порядка $(\lambda/m)^n$, когда ведущий ренормалон расположен в точке $u = n/2$; из (2.6.13) мы еще раз видим, что он находится в $u = 1/2$. Существование таких неоднозначностей неудивительно. Мы интегрируем по всем импульсам глюона, включая инфракрасную область, где существенны непертурбативные эффекты. Поскольку мы не произвели жесткого разделения масштабов, факторизация физики малых и больших расстояний на коэффициентные функции и матричные элементы внутренне неоднозначна; каждое предписание о суммировании соответствует своему набору матричных элементов.

Поправки порядка $1/m$ к матричным элементам мезонов в основном состоянии были вычислены в [**111**] для токов с $n = 1$. Мы произвели соответствующее вычисление для произвольной матрицы Γ и получили общий результат в терминах $h|_{\epsilon=0} = \eta(n-2)$:

$$\frac{<0|j(\mu)|M>}{<0|\tilde{\jmath}(\mu)|M>} = C_\Gamma(\mu) + \frac{1}{m}\left(G_1 + 2d_\Gamma G_2 - \frac{1}{6}\overline{d}_\Gamma(m_M - m)\right) + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \qquad (2.7.6)$$

$$\overline{d}_\Gamma = 1 - 2\eta(n-2)\,, \quad d_\Gamma = \tfrac{1}{2}\left(\overline{d}_\Gamma^2 - 3\right)\,,$$

где M — мезон в основном или возбужденном состоянии, связанный с этим током, а G_1 и G_2 — билокальные матричные элементы кинетической энергии тяжелого кварка и хромомагнитного взаимодействия. Умножение Γ на γ_0 меняет знак $\overline{d}_\Gamma$, не меняя d_Γ, поскольку эта величина получается из $\sigma_{\mu\nu}\Gamma\frac{1+\gamma_0}{2}\sigma^{\mu\nu}\frac{1+\gamma_0}{2} = -2d_\Gamma\Gamma\frac{1+\gamma_0}{2}$. Мы обнаружили, что $\overline{d}_\Gamma = (-1)^{n+1}d_\Gamma$ для всех 8 токов; $d_\Gamma = 3$ для 4 токов, которые связаны с $0^\pm$ мезонами; $d_\Gamma = -1$ для 4 токов, которые связаны с $1^\pm$ мезонами. Мы можем считать S–волновые 0^- и 1^- мезоны в основном состоянии вырожденными, как и P–волновые 0^+ и 1^+ возбужденные мезоны.

С точки зрения HQET, остаточная энергия $\varepsilon_0 = m_B - m_b + O(1/m_b)$, а также матричные элементы $G_{1,2}$, имеют ультрафиолетовые ренормалонные неоднозначности [**100**]. HQET ничего не знает о полюсной массе m_b, поскольку она имеет дело только с остаточными энергиями. Однако HQET собственная энергия $\widetilde{\Sigma}(\omega)$ имеет линейную ультрафиолетовую расходимость, по соглашению исключаемую размерной регуляризацией. Если бы использовалось ультрафиолетовое импульсное обрезание, было бы необходимо ввести остаточный массовый контрчлен, в который поглощалась бы эта линейная расходимость. Матричные элементы $G_{1,2}$ должны приобрести ультрафиолетовые ренормалонные неоднозначности, поскольку они смешиваются с ε_0 [**102**]. Мы теперь определим их, потребовав, чтобы они сократили инфракрасные ренормалонные неоднозначности в (2.7.6).

Положив $\epsilon = 0$, мы получаем

$$F(0,u) = -\frac{C_F}{\beta_0}\left(\frac{\mu e^{\frac{5}{6}}}{m}\right)^{2u}\frac{B(1+u,1-2u)}{2-u}\left[5-u-3u^2+2\eta(n-2)u-2(n-2)^2\right].$$

Сравнивая вычет в полюсе $u=\frac{1}{2}$ со случаем полюсной массы [**100, 101**], мы выражаем неоднозначность коэффициентов сшивки из–за инфракрасного ренормалона в $u=\frac{1}{2}$ через неоднозначность полюсной массы Δm:

$$\Delta C_\Gamma(\mu) = -\frac{1}{3}\left[\frac{15}{4}+\eta(n-2)-2(n-2)^2\right]\frac{\Delta m}{m}, \tag{2.7.7}$$

в любой точке нормировки μ. Эта неоднозначность должна компенсироваться в (2.7.6) ультрафиолетовыми ренормалонными неоднозначностями ΔG_1 и ΔG_2 [**102**]. Поскольку (2.7.7) квадратично по $\eta(n-2)$, мы имеем 3 уравнения с всего лишь 2 неизвестными. Они в самом деле совместны, и дают

$$\Delta G_1 = \tfrac{3}{4}\Delta m, \quad \Delta G_2 = -\tfrac{1}{6}\Delta m. \tag{2.7.8}$$

Этот результат был получен в [**102**], где рассматривались коэффициенты сшивки $\eta=\pm 1$ компонент токов с $n=1$. Однако, 2 неоднозначности (2.7.8) были получены в [**102**] из 2 уравнений, без проверки самосогласованности. Мы имеем такую проверку из одного дополнительного уравнения.

2.8. Тяжело–легкие операторы размерности 5

В этом параграфе мы рассмотрим перенормировку локальных операторов размерности 5 в HQET. Матричные элементы этих операторов появляются, например, в $1/m^2$ порядке разложения слабых переходных формфакторов. В частности, они дают вклад в константы распада тяжелых мезонов. Теоретические предсказания для формфакторов слабых распадов содержат матричные элементы, нормированные в точке m. Наши результаты могут быть использованы, чтобы переписать их через матричные элементы в низкой точке нормировки $\mu \ll m$. Непертурбативные методы вычисления матричных элементов дают результаты, нормированные в низкой точке, такой, как обратный шаг решетки в решеточном моделировании, или характерный Борелевский параметр в КХД правилах сумм.

Наши результаты относятся также к истинным операторам размерности 5 в КХД, таким, как глюонные и фотонные пингвинные операторы, которые появляются в эффективном слабом лагранжиане, нормированном в точке m_b:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = i\, c_g(m_b)\, g_s\, \overline{s}\,(1+\gamma_5) G_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} b + i\, c_\gamma(m_b)\, e\, \overline{s}\,(1+\gamma_5) F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} b + \cdots \tag{2.8.1}$$

Мы получим эффективный лагранжиан в низкой точке нормировки $\mu \ll m_b$. Решеточные вычисления пингвинных матричных элементов обычно проводятся в статической теории (HQET), потому что b кварк слишком тяжел, чтобы его можно было описывать динамическим полем на сегодняшних решетках. Следует подчеркнуть, что эффективная теория применима в области, в которой, в системе покоя тяжелого адрона, легкие кварки и глюоны несут импульсы, много меньшие m. Для двухчастичных распадов, таких, как $B \to K^*\gamma$, поэтому требуется вычислять матричные элементы при нефизических значениях импульса $|\vec{p}_{K^*}| < O(1\text{GeV})$, а затем экстраполировать результат до физического значения $|\vec{p}_{K^*}| = \frac{1}{2}(m_B^2 - m_{K^*}^2)/m_B \simeq 2.56\text{GeV}$. В более сложных процессах, таких, как $B \to X_s\gamma^* \to X_s\,\ell^+\ell^-$, существует область, в которой конечные адроны имеют малые импульсы, и наши результаты непосредственно применимы.

Мы начнем с рассмотрения локальных скалярных операторов размерности 5, не являющихся полными производными. Базис таких операторов в HQET может быть построен из операторов с двумя ковариантными производными, действующими на поле тяжелого кварка. Они имеют вид $\overline{q}\,\Gamma_{\mu\nu} iD^\mu iD^\nu \widetilde{Q}_v$, где $\Gamma_{\mu\nu} \in \{v_\mu v_\nu, g_{\mu\nu}, \gamma_\mu v_\nu, \gamma_\nu v_\mu, [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\}$. Определим

$$\begin{aligned} &O_1 = i\, g_s\, \overline{q}\, \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \widetilde{Q}_v\,, \quad O_2 = g_s\, \overline{q}\, \gamma_\mu v_\nu\, i G^{\mu\nu} \widetilde{Q}_v\,, \quad O_3 = \overline{q}\,(iv\cdot D)^2 \widetilde{Q}_v\,, \\ &O_4 = \overline{q}\,(iD)^2 \widetilde{Q}_v\,, \quad O_5 = \overline{q}\,[i\hat{D}\, iv\cdot D + iv\cdot D\, i\hat{D}]\, \widetilde{Q}_v\,. \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Базис псевдоскалярных операторов $O_i^{(5)}$ может быть получен заменой $\overline{q} \to \overline{q}\,\gamma_5$. Если мы пренебрегаем массой легкого кварка и рассматриваем антикоммутирующую γ_5, то при этом ничего не меняется. Мы будем далее рассматривать скалярные операторы, но следует помнить, что поле легкого кварка q можно заменить на $\gamma_5 q$ или на левые и правые поля q_L,q_R.

Не все операторы в (2.8.2) независимы, если учесть уравнения движения $\overline{q}\,(i\hat{D})^\dagger = 0$ и $iv\cdot D\,\widetilde{Q}_v = 0$. Они приводят к соотношениям $O_3 \mathrel{\hat{=}} 0$, $O_5 \mathrel{\hat{=}} -\,O_2$, и

$$\begin{aligned} O_4 &= \overline{q}\left(\left[(i\hat{D})^\dagger\right]^2 - \tfrac{i}{2} g_s \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\right)\widetilde{Q}_v - (i\partial)^2(\overline{q}\,\widetilde{Q}_v) + 2i\partial_\mu(\overline{q}\,iD^\mu \widetilde{Q}_v) \\ &\mathrel{\hat{=}} -\,\frac{1}{2}\,O_1 + \text{total derivatives}\,, \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

то есть все операторы могут быть сведены к O_1 и O_2.

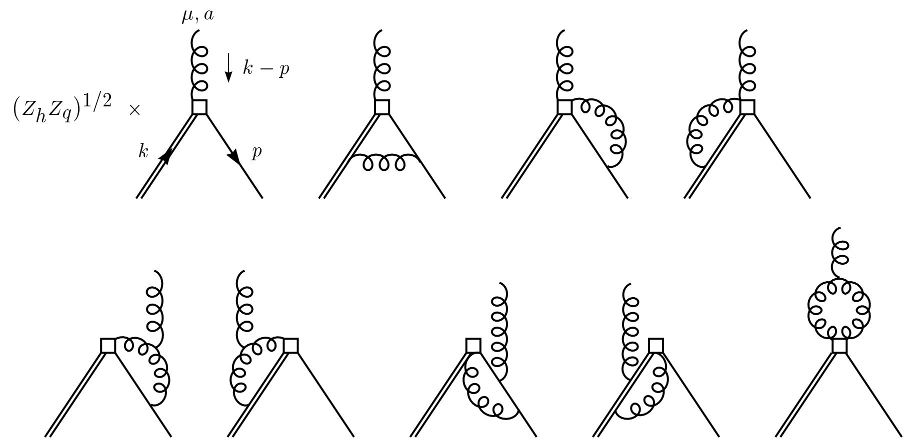


Рис. 2.13. Однопетлевые диаграммы матричных элементов O_1, O_2.

Масштабная зависимость перенормированных операторов O_1, O_2 определяется 2×2 матрицей аномальных размерностей, которая может быть получена вычислением $1/\epsilon$ полюсов в матричных элементов неперенормированных операторов. Соответствующие однопетлевые диаграммы показаны на Рис. 2.13. Константы перенормировки волновых функций тяжелого и легкого кварков в произвольной ковариантной калибровке даются формулами (0.11), (2.1.19). В формализме фонового [**84**] поля глюонное поле не перенормируется: $Z_g Z_A^{1/2} = 1$. Мы вычислили диаграммы Рис. 2.13 в произвольной ковариантной калибровке, при произвольных внешних импульсах (при условии, что их сумма равна нулю). Сумма диаграмм калибровочно–инвариантна; зависимости от внешних импульсов комбинируются так, что результат может быть выражен через матричные элементы базисных операторов (2.8.2). Результат имеет вид

$$<O_1^{\rm bare}> = \left\{1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(C_F - \frac{N}{2}\right)\right\} <O_1> + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(N <O_2> + 3C_F <O_4>\right) ,$$

$$<O_2^{\rm bare}> = \left\{1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(C_F - \frac{3N}{2}\right)\right\} <O_2> + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(\frac{3N}{8} <O_1> + \frac{2C_F}{3} <O_4> + \frac{C_F}{6} <O_5>\right) . \tag{2.8.4}$$

Исключая операторы O_4 и O_5 при помощи соотношений $<O_4> = -\frac{1}{2}<O_1>$ и $<O_5> = -<O_2>$, мы получаем

$$<O_1^{\rm bare}> = \left\{1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{N}{2} - \frac{C_F}{2}\right)\right\} <O_1> + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} N <O_2> ,$$

$$<O_2^{\rm bare}> = \left\{1 + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{3N}{2} + \frac{5C_F}{6}\right)\right\} <O_2> + \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\left(\frac{3N}{8} - \frac{C_F}{3}\right) <O_1> . \tag{2.8.5}$$

Эти результаты определяют матрицу Z_{ij} констант перенормировки: $<O_i^{\rm bare}> = Z_{ij}<O_j>$. Обозначая коэффициент при $1/\epsilon$ в этой матрице как $Z_{ij}^{(1)}$ и используя

$$\gamma_{ij} = -2\alpha_s \frac{\partial}{\partial\alpha_s} Z_{ij}^{(1)} , \tag{2.8.6}$$

мы получаем матрицу аномальных размерностей, входящую в уравнение ренормгруппы для перенормированных операторов

$$\mu\frac{d}{d\mu} O_i + \gamma_{ij} O_j = 0 . \tag{2.8.7}$$

В однопетлевом приближении, результат имеет вид

$$\hat\gamma = \frac{\alpha_s}{4\pi}\begin{pmatrix} N + C_F & -2N \\ -\frac{3}{4}N + \frac{2}{3}C_F & 3N - \frac{5}{3}C_F \end{pmatrix} . \tag{2.8.8}$$

Интересно, что собственные значения матрицы аномальных размерностей (в единицах $\alpha_s/4\pi$)

$$\gamma_\pm = \left(2N - \frac{C_F}{3}\right) \pm \sqrt{\frac{5N^2}{2} - 4NC_F + \frac{16C_F^2}{9}} = \frac{1}{9}\left(50 \pm \sqrt{\frac{1565}{2}}\right) . \tag{2.8.9}$$

иррациональны (обычно в одной петле это рациональные числа). В главном логарифмическом приближении, решение уравнения ренормгруппы (2.8.7) имеет вид

$$O_i(m) = U_{ij}(m,\mu) O_j(\mu)\,, \tag{2.8.10}$$

где

$$\hat{U}(m,\mu) = \hat{V} \begin{pmatrix} r_+ & 0 \\ 0 & r_- \end{pmatrix} \hat{V}^{-1}\,, \qquad r_\pm = \left(\frac{\alpha_s(m)}{\alpha_s(\mu)}\right)^{\gamma_\pm/2\beta_0}\,. \tag{2.8.11}$$

Здесь $\hat{V}$ — матрица, диагонализующая матрицу аномальных размерностей:

$$\hat{V}^{-1}\,\hat{\gamma}\,\hat{V} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ 0 & \gamma_- \end{pmatrix}\,. \tag{2.8.12}$$

Явный вид матрицы эволюции

$$\hat{U}(m,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(r_+ + r_-) - (N - \frac{4}{3}C_F)\Delta & -2N\Delta \\ \\ (-\frac{3}{4}N + \frac{2}{3}C_F)\Delta & \frac{1}{2}(r_+ + r_-) + (N - \frac{4}{3}C_F)\Delta \end{pmatrix}\,, \tag{2.8.13}$$

где $\Delta = (r_+ - r_-)/(\gamma_+ - \gamma_-)$.

Теперь мы рассмотрим перенормировку полного набора локальных скалярных (или псевдоскалярных) операторов размерности 5, включая полные производные. С учетом уравнений движения, полный базис содержит 4 новых оператора, в добавление к O_1, O_2:

$$T_1 = i\partial_\mu(\overline{q}\,iD^\mu \widetilde{Q}_v)\,, \quad T_2 = (iv\cdot\partial)^2(\overline{q}\,\widetilde{Q}_v)\,, \quad T_3 = (i\partial)^2(\overline{q}\,\widetilde{Q}_v)\,, \quad T_4 = i\partial_\mu\, iv\cdot\partial\,(\overline{q}\,\gamma^\mu \widetilde{Q}_v)\,. \tag{2.8.14}$$

В импульсном пространстве, полная производная соответствует импульсу, несомому оператором, и не влияет на его поведение при перенормировке. Поэтому, в отношении ультрафиолетовых расходимостей, T_1 ведет себя как оператор размерности 4, а T_2, T_3 и T_4 — как операторы размерности 3. При перенормировке операторы более низких эффективных размерностей не могут смешиваться с операторами более высоких размерностей. Однако обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому Вильсоновские коэффициенты операторов O_1 и O_2 могут, в принципе, модифицироваться из–за наличия операторов низших размерностей.

Отсюда следует, что матрица аномальных размерностей, управляющая эволюцией операторов O_i и T_i, имеет вид

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} & \hat{A} \\ \hat{0} & \hat{B} \end{pmatrix}, \tag{2.8.15}$$

где $\hat{\gamma}$ — 2×2 матрица, в однопетлевом приближении даваемая формулой (2.8.8). 4×4 матрица $\hat{B}$, описывающая смешивание операторов T_i друг с другом, была вычислена в [**107**]. Во всех порядках теории возмущений, она имеет простой вид

$$\hat{B} = \gamma_{hl}\,\hat{1} + \gamma^a \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8.16}$$

где γ_{hl} — аномальная размерность тяжело–легкого тока размерности 3 (§2.5), а γ^a была определена в [**107**]. В однопетлевом приближении, $\gamma_{hl} = -\gamma^a = \gamma_0(\alpha_s/4\pi)$, где

$$\gamma_0 = -3C_F\,. \tag{2.8.17}$$

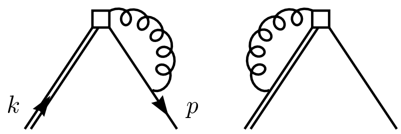


Рис. 2.14. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в матрицу аномальных размерностей $\hat{A}$.

Остается найти 2×4 матрицу $\hat{A}$, описывающую смешивание O_1 и O_2 с операторами T_i. Поскольку эти операторы содержат полные производные, вычисление должно проводиться с ненулевым полным импульсом. Однако, дело упрощается тем, что операторы T_i имеют ненулевые кварковые матричные элементы на древесном уровне. Поэтому матрицу $\hat{A}$ можно получить, рассматривая двухточечную вершинную функцию. Соответствующие однопетлевые диаграммы показаны на Рис. 2.14. Для произвольных импульсов кварков, мы получаем $1/\epsilon$ члены

$$
\begin{aligned}
<O_1^{\rm bare}> &= C_F \, \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} \, \overline{u}_q(p) \, (18p^2) \, u_h(v,k) + \dots \,, \\
<O_2^{\rm bare}> &= C_F \, \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} \, \overline{u}_q(p) \, (4p^2 + 2v\cdot p \, \hat{p}) \, u_h(v,k) + \dots \,.
\end{aligned}
\qquad (2.8.18)
$$

Оба матричных элемента обращаются в нуль на массовой поверхности, что означает отсутствие смешивания операторов размерности 5 O_1 и O_2 с операторами T_i:

$$
\hat{A} = 0 \,, \quad \hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{B} \end{pmatrix} . \qquad (2.8.19)
$$

Иными словами, эволюция операторов T_i не связана с эволюцией операторов O_i. Более того, мы покажем, что, по крайней мере в однопетлевом приближении, T_i не возникают при сшивке операторов КХД с операторами HQET. В этом состоит достоинство нашего выбора базисных операторов (2.8.2), содержащих только производные, действующие на поле тяжелого кварка.

Теперь мы включим в обсуждение локальные операторы, содержащие фотонное поле. Наиболее удобно это сделать, расширив определение ковариантной производной $D^\mu = \partial^\mu - ig_s t_a A_a^\mu - ie\mathcal{A}^\mu$, так что $[iD^\mu, iD^\nu] = ig_s G^{\mu\nu} + ieF^{\mu\nu}$, где $F^{\mu\nu}$ — напряженность электромагнитного поля. Тогда операторы O_1, O_2 в (2.8.2) дополняются аналогичными фотонными операторами

$$
O_1^\gamma = i\, e\, \overline{q}\, \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \widetilde{Q}_v \,, \quad O_2^\gamma = e\, \overline{q}\, \gamma_\mu v_\nu \, iF^{\mu\nu} \widetilde{Q}_v \,. \qquad (2.8.20)
$$

Задача состоит в том, чтобы найти смешивание этих операторов при перенормировке.

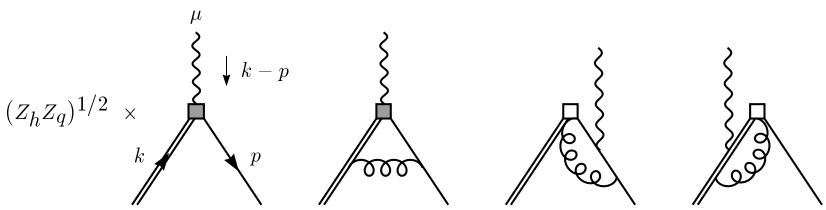


Рис. 2.15. Добавочные однопетлевые диаграммы, необходимые для вычисления матрицы аномальных размерностей в присутствии фотонных операторов.

В ведущем порядке по α, глюонные операторы могут смешиваться с фотонными, но не наоборот. Поэтому мы записываем 4×4 матрицу аномальных размерностей в виде

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} & \hat{X} \\ \hat{0} & \hat{Y} \end{pmatrix} . \tag{2.8.21}$$

2×2 подматрицы $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ могут быть получены из вычисления диаграмм Рис. 2.15. Легко видеть, что значения этих диаграмм могут быть получены из соответствующих диаграмм Рис. 2.14 заменой цветовых множителей: $N \to 0$ при фиксированном C_F. Первые две диаграммы на Рис. 2.15 определяют матрицу $\hat{Y}$ и дают

$$\hat{Y} = \gamma_{hl}\,\hat{1} = \frac{\alpha_s}{4\pi}\,(-3C_F)\,\hat{1} . \tag{2.8.22}$$

Поскольку КХД не чувствует фотонного поля, операторы O_1^γ и O_2^γ перенормируются как тяжело–легкий ток размерности 3 (§2.5). Подматрица $\hat{X}$ получается из третьей диаграммы на Рис. 2.15, тогда как последняя диаграмма равна нулю:

$$\hat{X} = \frac{\alpha_s}{4\pi}\,Q_q C_F \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} , \tag{2.8.23}$$

где Q_q — заряд легкого кварка в единицах e. Заметим, что сумма этих двух матриц воспроизводит “абелеву часть” матрицы $\hat{\gamma}$ (2.8.8), т.е. $\hat{X}/Q_q + \hat{Y} = \lim_{N\to 0}\,\hat{\gamma}$.

Три собственных значения матрицы аномальных размерностей $\hat{\Gamma}$ в единицах $\alpha_s/4\pi$ равны $\gamma_\pm$ (2.8.9) и γ_0 (2.8.17). Решение уравнений ренормгруппы для четырех операторов O_i, O_i^γ может быть получено либо прямой диагонализацией 4×4 матрицы $\hat{\Gamma}$, либо путем решения однородных уравнений для двух операторов O_i^γ, после которого O_i находятся из неоднородных уравнений с подставленным решением для O_i^γ. Фотонные операторы перенормируются мультипликативно:

$$O_i^\gamma(m) = r_0\,O_i^\gamma(\mu)\,; \quad i = 1, 2, \tag{2.8.24}$$

где в главном логарифмическом приближении

$$r_0 = \left(\frac{\alpha_s(m)}{\alpha_s(\mu)}\right)^{\gamma_0/2\beta_0} . \tag{2.8.25}$$

Эволюция глюонных операторов дается формулой

$$\begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix}_m = \hat{U}(m,\mu) \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix}_\mu + \hat{W}(m,\mu)\,\hat{X}_{(0)} \begin{pmatrix} O_1^\gamma \\ O_2^\gamma \end{pmatrix}_\mu , \tag{2.8.26}$$

где $\hat{X}_{(0)}$ — матрица $\hat{X}$ в единицах $\alpha_s/4\pi$, матрица эволюции $\hat{U}$ определена в (2.8.11) и (2.8.13), и

$$\hat{W}(m,\mu) = \hat{V} \begin{pmatrix} \dfrac{r_+ - r_0}{\gamma_+ - \gamma_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_- - r_0}{\gamma_- - \gamma_0} \end{pmatrix} \hat{V}^{-1} . \tag{2.8.27}$$

В качестве приложения, рассмотрим эффективный лагранжиан (2.8.1). В точке нормировки m он содержит глюонный и фотонный пингвинные операторы

$$\mathcal{Q}_g = i\,g_s\,\overline{q}\,\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} Q\,, \qquad \mathcal{Q}_\gamma = i\,e\,\overline{q}\,\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} Q \tag{2.8.28}$$

с известными коэффициентами $c_g(m)$ и $c_\gamma(m)$. Здесь опять q можно заменить на q_L или q_R. Наша цель — записать эффективный лагранжиан в низкой точке нормировки $\mu \ll m$. Каждый из двух пингвинных операторов (нормированный в точке m) разлагается по HQET операторам, нормированным в точке $\mu < m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_g(m) \to O_1(m) &= \sum_{i=1,2} \left[C_i^g(\mu)\, O_i(\mu) + C_i^\gamma(\mu)\, O_i^\gamma \right] , \\ \mathcal{Q}_\gamma(m) \to O_1^\gamma(m) &= \sum_{i=1,2} D_i^\gamma(\mu)\, O_i^\gamma(\mu) . \end{aligned} \tag{2.8.29}$$

В главном логарифмическом приближении, начальные значения коэффициентов в точке m определяются путем сравнения матричных элементов КХД и HQET операторов в древесном приближении. Мы получаем $C_1^g(m) = D_1^\gamma(m) = 1$, все остальные коэффициенты равны нулю. Значения коэффициентов в более низких точках нормировки могут быть получены из решения уравнений ренормгруппы (2.8.24), (2.8.26):

$$D_1^\gamma(\mu) = r_0\,, \qquad D_2^\gamma(\mu) = 0\,, \tag{2.8.30}$$

и

$$
\begin{aligned}
C_1^g(\mu) &= \frac{r_+ + r_-}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4C_F}{3N}\right) C_2^g(\mu)\,,\\
C_2^g(\mu) &= -2N\,\frac{r_+ - r_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\,,\\
C_1^\gamma(\mu) &= 2Q_q C_F \left\{\frac{r_+ - r_0}{\gamma_+ - \gamma_0} + \frac{r_- - r_0}{\gamma_- - \gamma_0}\right\} + 2\left(1 - \frac{C_F}{N}\right) C_2^\gamma(\mu)\,,\\
C_2^\gamma(\mu) &= -\frac{8}{3}\,Q_q\,\frac{NC_F}{\gamma_+ - \gamma_-}\left\{\frac{r_+ - r_0}{\gamma_+ - \gamma_0} - \frac{r_- - r_0}{\gamma_- - \gamma_0}\right\}\,.
\end{aligned}
\qquad (2.8.31)
$$

При $N = 3$ это дает

$$
\begin{aligned}
C_1^g(\mu) &\simeq 0.6966\,r_- + 0.3034\,r_+\,,\\
C_2^g(\mu) &\simeq 0.9652\,(r_- - r_+)\,,\\
C_1^\gamma(\mu) &\simeq Q_q\,(0.7093\,r_- + 0.0600\,r_+ - 0.7693\,r_0)\,,\\
C_2^\gamma(\mu) &\simeq Q_q\,(0.2661\,r_- - 0.1355\,r_+ - 0.1306\,r_0)\,.
\end{aligned}
\qquad (2.8.32)
$$

Например, вычисление коэффициентов для b кварка в точке $\mu = 1$GeV, с использованием $n_f = 4$, $\alpha_s(m_b) = 0.210$ и $\alpha_s(\mu) = 0.458$ дает $D_1^\gamma \simeq 1.21$, $C_1^g \simeq 0.82$, $C_2^g \simeq 0.22$, $C_1^\gamma \simeq -0.26\,Q_q$ и $C_2^\gamma \simeq -0.01\,Q_q$. Эффекты перенормировки обычно порядка 20%, кроме коэффициента C_2^γ, который подавлен как $[\alpha_s \log(m/\mu)]^2$.

Выше мы использовали сшивку КХД пингвинных операторов с HQET операторами в точке m на древесном уровне совместно с решением уравнений ренормгруппы в главном логарифмическом приближении. Это оправдано, если $\log(m/\mu) \gg 1$. Теперь мы обсудим полную однопетлевую сшивку КХД и HQET операторов (см. §2.5). Преимуществом такого подхода является то, что мы сможем включить нелогарифмические члены порядка $O(\alpha_s)$. С другой стороны, мы не сможем суммировать главные логарифмические члены в высших порядках теории возмущений. Последовательное сочетание однопетлевой сшивки с улучшением по ренормгруппе потребовало бы вычисления аномальных размерностей с двухпетлевой точностью, чего мы здесь делать не будем. Однако, когда это вычисление будет сделано, однопетлевые формулы сшивки в точке m, выведенные здесь, будут частью полного NLO анализа.

Чтобы получить выражения для Вильсоновских коэффициентов, мы должны сравнить матричные элементы КХД операторов $\mathcal{Q}_g$ и $\mathcal{Q}_\gamma$ в (2.8.28) с соответствующими матричными элементами HQET операторов O_i и O_i^γ. Сшивка этих матричных элементов определяет коэффициентные функции в каждом порядке теории возмущений. Разности матричных элементов в двух теориях нечувствительны к эффектам больших расстояний, таким, как детали инфракрасного обрезания или природа внешних состояний. Поэтому законно производить сшивку с использованием кварковых и глюонных состояний на массовой поверхности, применяя любую удобную инфракрасную регуляризацию. Мы используем размерную регуляризацию как для ультрафиолетовых, так и для инфракрасных расходимостей. Мы разлагаем Фейнмановские амплитуды по внешним импульсам, после чего в КХД вычислениях остается единственный массовый масштаб — масса тяжелого кварка. Поэтому дают вклад только диаграммы, содержащие пропагатор тяжелого кварка в петле. Аналогично, в HQET не остается массового масштаба, и все петлевые диаграммы обращаются в нуль. Остаются только древесные матричные элементы HQET операторов, умноженные на соответствующие Вильсоновские коэффициентные функции. Именно поэтому эта схема регуляризации особенно экономна для наших целей.

При проведении сшивки, мы должны рассматривать все HQET операторы, имеющие квантовые числа КХД операторов (2.8.28). В дополнение к собственно операторам размерности 5 O_i и O_i^γ, а также полным производным T_i, которые мы обсуждали, сюда относятся также операторы, содержащие массу тяжелого кварка m:

$$\begin{aligned}
&S_1 = m\, iv\cdot\partial\,(\overline{q}\,\widetilde{Q}_v)\,, \quad S_2 = m\, i\partial_\mu(\overline{q}\,\gamma^\mu\widetilde{Q}_v)\,, \quad S_3 = m\,\overline{q}\, iv\cdot D\,\widetilde{Q}_v\,,\\
&S_4 = m\,\overline{q}\, i\hat{D}\widetilde{Q}_v\,, \quad S_5 = m^2\,\overline{q}\,\widetilde{Q}_v\,.
\end{aligned} \tag{2.8.33}$$

Матричные элементы операторов S_3 и $S_4 - S_2$ между физическими состояниями обращаются в нуль в силу уравнений движения. Однако эти операторы могут появиться, когда сшивка производится с использованием нефизических состояний, таких, как кварки и глюоны на массовой поверхности.

Поскольку некоторые операторы (T_2, T_3, T_4, а также S_1, S_2, S_5) не имеют глюонных матричных элементов на древесном уровне, мы должны производить сшивку как кварк–кварковой, так и кварк–кварк–глюонной вершинных функций, с произвольными внешними

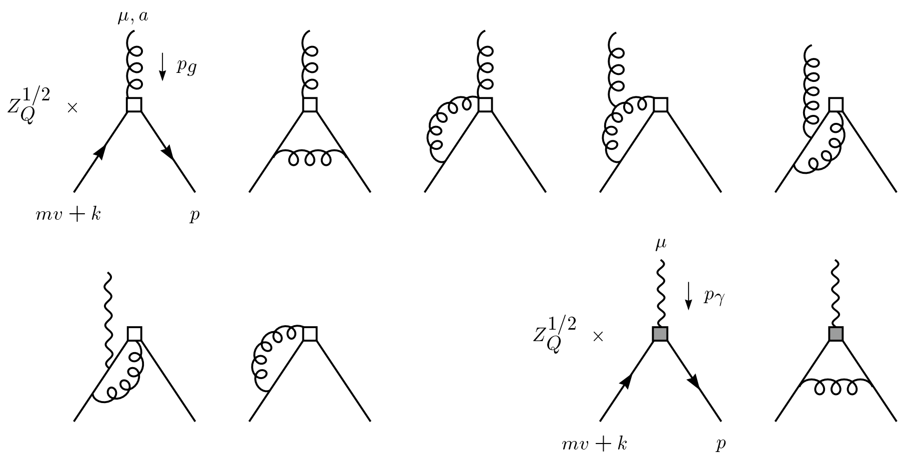


Рис. 2.16. Однопетлевые диаграммы для сшивки глюонного и фотонного пингвинных операторов $\mathcal{Q}_g$ и $\mathcal{Q}_\gamma$.

импульсами, находящимися на массовой поверхности. Соответствующие диаграммы показаны на Рис. 2.16. Мы вычислили эти диаграммы в произвольной ковариантной калибровке, и проверили, что результаты для коэффициентных функций калибровочно инвариантны. Константа перенормировки волновой функции массивного кварка (0.13) калибровочно инвариантна. Поле легкого кварка не перенормируется на массовой поверхности ($Z_q = 1$). Заметим, что только вторая диаграмма на Рис. 2.16 содержит пропагатор легкого кварка в петле. Легко видеть, что вклад этой диаграммы линеен по импульсу внешнего глюона, и не зависит от импульса легкого кварка. Поэтому при сшивке не появляются члены, пропорциональные импульсу легкого кварка, что означает, что операторы T_i и S_1, S_2 не возникают в результате учета радиационных поправок, по крайней мере в порядке $O(\alpha_s)$.

Приведем теперь результаты вычисления диаграмм с глюонным пингвинным оператором $\mathcal{Q}_g$. Сумма всех вкладов равна

$$
\begin{aligned}
<\mathcal{Q}_g> =& C_1^g <O_1> + C_2^g <O_2> + C_1^\gamma <O_1^\gamma> + C_2^\gamma <O_2^\gamma> + C_3^g <O_3> \\
&+ C_S \left(-2<S_3> + <S_4> + 2<S_5>\right) , \qquad (2.8.34)
\end{aligned}
$$

где точные выражения для коэффициентах в произвольной размерности пространства–времени d

$$C_1^g = 1 + \frac{K}{2}\left[(2d^3 - 23d^2 + 71d - 62)C_F - (d^3 - 10d^2 + 25d - 14)N\right] ,$$
$$C_2^g = -K\left[2(d-2)(d-3)(d-4)C_F - (d^3 - 9d^2 + 23d - 14)N\right] ,$$
$$C_1^\gamma = KQ_qC_F\,(d-3)(d^2 - 9d + 16)\,,$$
$$C_2^\gamma = -2KQ_qC_F\,(d-4)(d^2 - 6d + 10)\,, \tag{2.8.35}$$

а также

$$C_3^g = -4KC_F\,(d-1)(d-4)\,, \quad C_S = -2KC_F\,(d-1)(d-3)\,, \tag{2.8.36}$$

где мы использовали сокращение

$$K = \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{d/2-2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(d-2)(d-3)}\,. \tag{2.8.37}$$

Заметим, что операторы O_3 и S_3, индуцированные однопетлевой сшивкой в (2.8.34), обращаются в нуль по уравнениям движения. Они появляются только потому, что сшивка (законно) производится с использованием нефизических кварковых и глюонных состояний вместо физических адронов. Кварковые состояния удовлетворяют условиям на массовой поверхности $v\cdot k = 0$ и $\hat{p} = p^2 = 0$, которые отличаются от истинных уравнений движения в порядке $O(g_s)$. Присутствие в (2.8.34) операторов, обращающихся в нуль по уравнениям движения, не имеет физического значения. Во всех приложениях их можно опустить, поскольку их физические матричные элементы равны нулю. Подобное утверждение справедливо и для операторов S_4, S_5. Тот факт, что они появляются в (2.8.34) в комбинации $S_5 + \frac{1}{2}S_4$, является следствием репараметризационной инвариантности. В самом деле, эта комбинация является HQET образом КХД оператора $m^2\,\overline{q}\,Q$. Но этот оператор имеет вид недиагонального массового члена, который не приводит к наблюдаемым эффектам, и может быть удален переопределением кварковых полей. При этом физические массы кварков сдвигаются на величины $O(G_F\alpha_s m^3)$. Это обсуждение оправдывает *a posteriori* тот факт, что сшивка (2.8.29) КХД операторов $\mathcal{Q}_g$ с HQET операторами включает только истинные операторы размерности 5, сохраняя структуру эффективной теории поля, в которой операторы, усиленные степенями массы тяжелого кварка m, не могут давать вклада в физические матричные элементы.

Подобное вычисление матричного элемента фотонного пингвинного оператора дает

$$<\mathcal{Q}_\gamma> = D_1^\gamma <O_1^\gamma> + D_2^\gamma <O_2^\gamma> , \tag{2.8.38}$$

где нефизические операторы опущены, и

$$D_1^\gamma = 1 + \frac{K}{2} C_F \left(d^2 - 15d + 34\right) , \quad D_2^\gamma = -2KC_F \left(d-4\right)^2 . \tag{2.8.39}$$

Положим теперь $d = 4 - 2\epsilon$, перейдем к пределу $\epsilon \to 0$ и удалим $1/\epsilon$ полюса, используя $\overline{\mathrm{MS}}$ схему вычитаний. При этом мы должны учесть, что не только матричные элементы HQET операторов, но и матричные элементы КХД операторов $\mathcal{Q}_g$ и $\mathcal{Q}_\gamma$ содержат ультрафиолетовые расходимости. Если мы интересуемся эволюцией операторов ниже масштаба m, принимая их значения при $\mu = m$ как данные, мы должны перенормировать КХД операторы в точке $\mu = m$. Это производится 2×2 матрицей $\hat{Z}^{-1}$:

$$\hat{Z}^{-1} = \hat{1} + \frac{\alpha_s}{8\pi} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{d/2-2} \Gamma(2-d/2) \begin{pmatrix} 2C_F & 0 \\ 8Q_q C_F & 10C_F - 4N \end{pmatrix} , \tag{2.8.40}$$

на которую умножается слева 2×4 матрица коэффициентных функций

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_1^g & C_2^g & C_1^\gamma & C_2^\gamma \\ 0 & 0 & D_1^\gamma & D_2^\gamma \end{pmatrix} . \tag{2.8.41}$$

Оставшиеся расходимости удаляются вычитанием $1/\epsilon$ полюсов в схеме $\overline{\mathrm{MS}}$. Результат имеет вид

$$D_1^\gamma(\mu) = 1 - C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{3}{8} \log \frac{\mu^2}{m^2} + 1\right) , \qquad D_2^\gamma(\mu) = 0 , \tag{2.8.42}$$

и

$$\begin{aligned}
C_1^g(\mu) &= 1 + (N + C_F)\,\frac{\alpha_s}{8\pi}\,\log\frac{\mu^2}{m^2} + \left(N - \frac{5}{4}C_F\right)\frac{\alpha_s}{\pi}\,,\\
C_2^g(\mu) &= -N\,\frac{\alpha_s}{4\pi}\,\log\frac{\mu^2}{m^2} - (N - 2C_F)\,\frac{\alpha_s}{2\pi}\,,\\
C_1^\gamma(\mu) &= Q_q C_F\,\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\log\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{2}\right)\,,\\
C_2^\gamma(\mu) &= Q_q C_F\,\frac{\alpha_s}{\pi}\,.
\end{aligned} \tag{2.8.43}$$

Вильсоновские коэффициенты удовлетворяют уравнению ренормгруппы

$$\mu\frac{d}{d\mu}\,\hat{C}(\mu) = \hat{C}(\mu)\,\hat{\Gamma}\,, \tag{2.8.44}$$

где $\hat{\Gamma}$ определена в (2.8.21)–(2.8.23). Тот факт, что результаты явного вычисления коэффициентных функций удовлетворяют этому уравнению, является сильной проверкой.

В качестве примера, мы теперь найдем численные значения коэффициентов для b кварка при $\mu = 1\mathrm{GeV}$, используя $m_b = 4.8\mathrm{GeV}$ и $\alpha_s = \alpha_s(\sqrt{\mu\, m_b}) = 0.282$. Это дает $D_1^\gamma \simeq 1.02$, $C_1^g \simeq 0.97$, $C_2^g \simeq 0.20$, $C_1^\gamma \simeq -0.22\,Q_q$, $C_2^\gamma \simeq 0.12\,Q_q$. Сравнение с результатами в главном логарифмическом приближении (2.8.32) дает представление о важности нелогарифмических поправок. В некоторых случаях, таких, как D_1^γ и C_2^γ, нелогарифмические члены $O(\alpha_s)$ в (2.8.43) довольно существенны. Для этих коэффициентов было бы желательным полное NLO вычисление.

В качестве приложения рассмотрим мезонные константы распада, которые определяются матричными элементами тяжело–легких токов между мезоном и вакуумом. Первые $1/m$ поправки к ним обсуждались в [**111**]. В общем случае, в порядке $1/m^n$ возникают вклады локальных матричных элементов операторов размерности $3 + n$, а также (при $n \geq 1$) вклады матричных элементов нелокальных операторов — T–произведений токов низших размерностей с членами лагранжиана HQET. Наши результаты имеют отношение к локальным поправкам порядка $1/m^2$. Они выражаются через матричные элементы операторов типа $\overline{q}\,\Gamma\, iD^\mu iD^\nu \widetilde{Q}_v$ (есть также вклады операторов, являющихся полными производными; они выражаются через параметры, которые уже встречались в порядке $1/m$). В отличие от рассматривавшихся до сих пор, эти операторы являются векторами или псевдовекторами. Однако наши результаты применимы из–за спиновой симметрии тяжелого кварка. Наиболее общий матричный элемент оператора такого типа может быть записан в форме

$$<0\,|\,\overline{q}\,\Gamma\,iD^\mu iD^\nu \widetilde{Q}_v\,|M(v)>_\mu = \sqrt{m_M}\,\tilde{f}(\mu)\ \mathrm{Tr}\left\{\Theta^{\mu\nu}\,\Gamma\,\mathcal{M}(v)\right\}\ , \tag{2.8.45}$$

где

$$\mathcal{M}(v) = \frac{1+\hat{v}}{2}\begin{cases} -i\gamma_5 & ;\ \text{псевдоскалярный мезон } M(v), \\ \hat{e} & ;\ \text{векторный мезон } M^*(e,v), \end{cases} \tag{2.8.46}$$

— матрица Дирака, представляющая спиновую волновую функцию мезона в HQET [**57, 59**]. Тензор $\Theta^{\mu\nu}$ содержит $\varepsilon_0 = m_M - m$ и еще два параметра λ_E^2 и λ_H^2 (§4.2):

$$\Theta^{\mu\nu} = 2\left[\varepsilon_0^2 + \lambda_H^2(\mu) + \lambda_E^2(\mu)\right]\,(v^\mu v^\nu - g^{\mu\nu}) + 2\lambda_E^2(\mu)\,v^\mu(\gamma^\nu + v^\nu) - \frac{1}{2}\,\lambda_H^2(\mu)\,\sigma^{\mu\nu}\,(1-\hat{v})\,. \tag{2.8.47}$$

Соотношение (2.8.45) справедливо для любой матрицы Γ. Поэтому мы можем положить $\Gamma = \gamma_5(\gamma_\mu v_\nu - \gamma_\nu v_\mu)$ или $\Gamma = -\gamma_5\sigma_{\mu\nu}$, и получить соотношения между параметрами λ_E^2, λ_H^2 и матричными элементами псевдоскалярных операторов $O_1^{(5)}$, $O_2^{(5)}$ между псевдоскалярным мезоном и вакуумом:

$$\begin{aligned} <0\,|\,O_2^{(5)}\,|M(v)> &= -2i\sqrt{m_M}\,\tilde{f}(\mu)\lambda_E^2(\mu)\,, \\ <0\,|\,\tfrac{1}{2}O_1^{(5)} - O_2^{(5)}\,|M(v)> &= -2i\sqrt{m_M}\,\tilde{f}(\mu)\lambda_H^2(\mu)\,. \end{aligned} \tag{2.8.48}$$

Зависимость этих параметров от точки нормировки определяется масштабной зависимостью операторов O_1 и O_2, которая дается матрицей эволюции (2.8.13):

$$\begin{aligned} r_0\,\lambda_E^2(m) &= \left(\frac{r_+ + r_-}{2} - \frac{N}{2}\,\frac{r_+ - r_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\right)\lambda_E^2(\mu) - \left(\frac{3}{2}\,N - \frac{4}{3}\,C_F\right)\frac{r_+ - r_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\,\lambda_H^2(\mu) \\ &\simeq (0.7413\,r_- + 0.2587\,r_+)\,\lambda_E^2(\mu) + 0.4379\,(r_- - r_+)\,\lambda_H^2(\mu)\,, \\ r_0\,\lambda_H^2(m) &= \left(\frac{r_+ + r_-}{2} + \frac{N}{2}\,\frac{r_+ - r_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\right)\lambda_H^2(\mu) - \left(\frac{3}{2}\,N - \frac{4}{3}\,C_F\right)\frac{r_+ - r_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\,\lambda_E^2(\mu) \\ &\simeq (0.7413\,r_+ + 0.2587\,r_-)\,\lambda_H^2(\mu) + 0.4379\,(r_- - r_+)\,\lambda_E^2(\mu)\,, \end{aligned} \tag{2.8.49}$$

где фактор r_0 (2.8.25) в левой части компенсирует масштабную зависимость $\tilde{f}(m) = r_0\tilde{f}(\mu)$.

Обсудим мезонные константы распада в главном логарифмическом приближении. Локальные поправки в разложении по $1/m$ получаются из разложения тяжело–легкого тока

$\overline{q}\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)Q$:

$$Q \to \widetilde{Q}_v + \frac{i\hat{D} - iv\cdot D}{2m}\,\widetilde{Q}_v + \frac{g_s}{4m^2}\,\gamma_\mu v_\nu\, iG^{\mu\nu}\widetilde{Q}_v + \dots\,. \qquad (2.8.50)$$

Соответствующие выражения для констант распада

$$f_M\sqrt{m_M} = 2\tilde{f}(m)\left\{1 - d_M\left(\frac{\varepsilon_0}{6m} + \frac{\lambda_E^2(m)}{12m^2} + \dots\right) + \text{non–local terms}\right\}\,, \qquad (2.8.51)$$

где зависящий от спина коэффициент d_M принимает значения 3 и -1 для псевдоскалярного и векторного мезона, соответственно. Локальная поправка порядка $1/m^2$ определяется параметром λ_E^2, нормированным в точке m. Используя наш результат (2.8.49), можно выразить его через значения λ_E^2 и λ_H^2, нормированные в низкой точке μ, которая обычно является масштабом, характерным для какого–нибудь непертурбативного вычисления этих адронных параметров. Например, КХД правила сумм дают $\lambda_E^2(\mu) \approx 0.11\text{GeV}^2$, $\lambda_H^2(\mu) \approx 0.18\text{GeV}^2$ при $\mu \approx 1\text{GeV}$ (§4.4). Для b кварка это дает $\lambda_E^2(m_b) \approx 0.69\,\lambda_E^2(\mu) + 0.08\,\lambda_H^2(\mu) \approx 0.09\text{GeV}^2$. Именно это значение следует использовать в (2.8.51). Видно, что эта поправка к константе распада B–мезона очень мала, что свидетельствует о хорошей сходимости ряда локальных членов. Для того, чтобы получить предсказание для констант распада в порядке $1/m^2$, необходимо, конечно, включить и нелокальные члены.

ГЛАВА 3

Правила сумм в эффективной теории тяжелого кварка

Эта глава основана на работах [**18**]–[**25**].

В §3.1 обсуждаются правила сумм для тяжелого мезона в HQET [**21**]. С принципиальной точки зрения, применение HQET приводит к существенному прогрессу по сравнению с КХД правилами сумм для тяжело–легких мезонов. В КХД коррелятор содержит два разных больших масштаба: $m \gg \omega \gg \Lambda$. Поэтому есть две разновидности больших логарифмов, и непонятно, как их суммировать. При переходе к коррелятору эффективных токов мы изолируем всю m–зависимость в коэффициенте сшивки. В HQET m не входит; коррелятор содержит один логарифм $\log \omega/\mu$, который управляется ренормгруппой. Если выбрать μ порядка характерного масштаба ω, то больших логарифмов не будет, и ряд теории возмущений должен быстро сходиться. На практике этому мешает большой нелогарифмический член в двухпетлевой поправке. Эта поправка в правиле сумм примерно равна главному пертурбативному члену, так что законность пренебрежения следующими поправками сомнительна. В §3.1 вычислены также одно– и двухпетлевая поправки к вкладу кваркового конденсата. Они не очень велики, но двухпетлевая поправка сравнима с однопетлевой. Рассмотрены члены порядка m_s и m_s^2 в правиле сумм для B_s мезона. Аналогичные результаты (кроме двухпетлевой поправки к вкладу кваркового конденсата и m_s–членов) были несколько позже получены в [**113**].

В §3.2 обсуждаются правила сумм для формфакторов тяжелых мезонов. Они впервые рассматривались в [**18, 19, 114**] (вклад размерности 6 в [**114**] отличается от [**19**], но он численно мал). Эти работы сделаны до возникновения HQET. В [**20**] прослежено, как эти КХД правила сумм воспроизводят структуру формфакторов, требуемую HQET, включая теорему Люка.

Барионы с тяжелым кварком и их формфакторы обсуждаются в §3.3, 3.4 по работам [**22**]–[**24**]. Двухточечные правила сумм для тяжелых барионов были позднее получены также в [**115**]. Работы [**22, 23**] послужили основой для дальнейшего исследования тяжелых барионов методом правил сумм. В [**116**] вычислены двухпетлевые поправки к аномальным размерностям барионных токов в HQET, однопетлевые выражения для которых были получены в [**22**]. С их использованием, в [**117**] получены и проанализированы правила сумм для тяжелых барионов с учетом пертурбативных поправок, уточняющие [**22**]. В [**118**] рассмотрены $1/m$ поправки к правилам сумм для тяжелых барионов и их формфакторов.

В §3.5 константы связи тяжелых мезонов и барионов с мягкими пионами оцениваются из HQET правил сумм во внешнем аксиальном поле [**25**]. Учтена пертурбативная поправка к мезонному коррелятору. С этой поправкой и тремя последовательными степенными поправками, мезонный коррелятор в аксиальном поле становится одним из самых детально изученных корреляторов. Несмотря на это, правило сумм не очень стабильно. Рассмотрены также барионные правила сумм.

3.1. Мезоны

Вследствие спиновой симметрии тяжелого кварка, адроны можно классифицировать по моменту и четности легких полей j^P, которые являются сохраняющимися квантовыми числами. Иными словами, мы можем выключить спин тяжелого кварка, используя суперфлейворную симметрию, и тогда спин и четность адрона будут j^P. Мезоны $\overline{Q}q$ являются КХД аналогом атома водорода. Мезоны в основном состоянии (S–волновые) имеют $j^P = \frac{1}{2}^+$; возбужденные P–волновые мезоны имеют $j^P = \frac{1}{2}^-$ и $\frac{3}{2}^-$. Когда мы включаем спин тяжелого кварка, каждый мезон становится вырожденным дублетом. Его компоненты переводятся друг в друга операциями спиновой симметрии тяжелого кварка. Мы имеем дублет 0^-, 1^- в основном состоянии, и возбужденные P–волновые дублеты 0^+, 1^+ и 1^+, 2^+. Расщепления в этих дублетах (сверхтонкое расщепление) вызваны взаимодействием хромомагнитного момента тяжелого кварка, нарушающим спиновую симметрию, и пропорциональны $1/m$ (§2.2).

Когда тяжелый кварк является скалярным, есть один билинейный тяжело–легкий ток без производных $\tilde{\jmath}_s = \widetilde{Q}_s^+ q$ ($\widetilde{Q}_s^+$ — поле тяжелого антикварка). Он не имеет определенной четности; токи $\tilde{\jmath}_\pm = \frac{1\pm\gamma_0}{2}\tilde{\jmath}_s$ имеют четность $P = \pm 1$, поскольку P–сопряжение действует как $q \to \gamma_0 q$. Ток $\tilde{\jmath}_+$ имеет квантовые числа $\frac{1}{2}^+$ мезона в основном состоянии, а $\tilde{\jmath}_-$ —

P–волнового $\frac{1}{2}^-$ мезона. Токи с квантовыми числами мезонов с бо́льшими j обязательно включают производные.

В случае реального тяжелого кварка со спином $\frac{1}{2}$, есть 4 билинейных тока без производных $\tilde{j} = \overline{\widetilde{Q}}\Gamma q$. В самом деле, из–за $\gamma_0 \widetilde{Q} = \widetilde{Q}$, ток с $\Gamma = \gamma_0$ сводится к $\Gamma = 1$; $\gamma_0\gamma_5$ — к γ_5; σ_{0i} — к γ_i; σ_{ij} — к $\varepsilon_{ijk}\gamma_k\gamma_5$. У нас остаются $\Gamma = \gamma_5$, $\vec{\gamma}$ и 1, $\vec{\gamma}\gamma_5$. Первая пара, с Γ антикоммутирующими с γ_0, имеет квантовые числа S–волнового дублета 0^-, 1^-; вторая пара, с Γ коммутирующими с γ_0 — P–волнового дублета 0^+, 1^+.

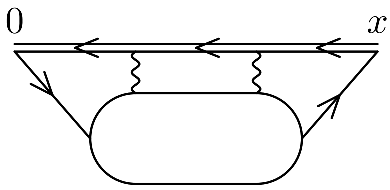


Рис. 3.1. Коррелятор двух HQET тяжело–легких токов

Коррелятор любых двух токов, содержащих статическое кварковое поле, имеет вид (Рис. 3.1)

$$i{<}T\tilde{j}_2(x)\tilde{j}_1^+(0){>} = \delta(\vec{x})\Pi(x_0)\,, \tag{3.1.1}$$
$$\Pi(\omega) = \int \Pi(t)e^{i\omega t}dt\,, \quad \Pi(t) = \int \Pi(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}\,.$$

Он удовлетворяет дисперсионному представлению

$$\Pi(\omega) = \int\limits_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon - \omega - i0} + \cdots \quad \Pi(t) = -\widetilde{S}(t)\int\limits_0^\infty \rho(\omega)e^{-i\omega t}d\omega + \cdots \tag{3.1.2}$$

Вычитательный полином в $\Pi(\omega)$ (обозначенный многоточием) дает $\delta(t)$ и ее производные в $\Pi(t)$. Мы можем аналитически продолжить коррелятор с полуоси $t > 0$ на мнимые $t = -i\tau$. Тогда $\Pi(\tau)$ и $\rho(\omega)$ связаны преобразованием Лапласа

$$\Pi(\tau) = i\int\limits_0^\infty \rho(\omega)e^{-\omega\tau}d\omega\,, \quad \rho(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Pi(\tau)e^{\omega\tau}d\tau\,, \tag{3.1.3}$$

где a лежит правее всех особенностей $\Pi(\tau)$.

Вклад промежуточного состояния $|h>$ с энергией ε в $\Pi(t)$, $\Pi(\omega)$, $\rho(\omega)$ есть

$$\begin{aligned}
\Pi_h(t) &= i{<}0|\tilde{\jmath}_2|h{>}i\widetilde{S}(t)e^{-i\varepsilon t}{<}h|\tilde{\jmath}_1^+|0{>}\,,\\
\Pi_h(\omega) &= i{<}0|\tilde{\jmath}_2|h{>}\frac{i}{\omega-\varepsilon+i0}{<}h|\tilde{\jmath}_1^+|0{>}\,,\\
\rho_h(\omega) &= {<}0|\tilde{\jmath}_2|h{>}{<}h|\tilde{\jmath}_1^+|0{>}\delta(\omega-\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Напомним, что HQET энергия ε означает истинную энергию минус масса тяжелого кварка.

Коррелятор двух мезонных токов со скалярным тяжелым кварком имеет γ–матричную структуру (Рис. 3.1)

$$i{<}T\tilde{\jmath}_s(x)\bar{\tilde{\jmath}}_s(0){>} = \delta(\vec{x})\Pi_s(x_0)\,,\quad \Pi_s = A + B\gamma_0\,. \tag{3.1.5}$$

Для токов с определенной четностью P мы имеем

$$i{<}T\tilde{\jmath}_P(x)\bar{\tilde{\jmath}}_P(0){>} = \delta(\vec{x})\Pi_P(x_0)\frac{1+P\gamma_0}{2}\,,\quad \Pi_P = A + PB = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(1+P\gamma_0)\Pi_s\,. \tag{3.1.6}$$

Вследствие линейных соотношений (3.1.1–3.1.3), одни те же γ–матричные структуры и соотношения между Π_s и Π_P справедливы как в координатном пространстве, так и в импульсном, а также для спектральных плотностей. При вычислении коррелятора с использованием операторного разложения, члены четных размерностей содержат нечетное число γ–матриц вдоль линии легкого кварка, и после интегрирований дают вклад в B; члены нечетных размерностей содержат четное число γ–матриц, и дают вклад в A. Если мы обозначим ${<}0|\tilde{\jmath}_+|M,\frac{1}{2}^+{>} = \tilde{f}_{M,\frac{1}{2}^+}u$, где u — волновая функция мезона M, то вклад мезона в $\rho_s(\omega)$, просуммированный по поляризациям, равен $\tilde{f}^2_{M,\frac{1}{2}^+}\delta(\omega-\varepsilon)\sum u\bar{u}$, или вклад в $\rho_+(\omega)$ равен $\tilde{f}^2_{M,\frac{1}{2}^+}\delta(\omega-\varepsilon)$. Подобные формулы справедливы для $\frac{1}{2}^-$ мезонов.

Теперь включим спин тяжелого кварка. Коррелятор равен (Рис. 3.1)

$$i{<}T\tilde{\jmath}_2(x)\tilde{\jmath}_1^+(0){>} = \delta(\vec{x})\Pi(x_0)\,,\quad \Pi = \mathrm{Tr}\,\Gamma_2\frac{1-\gamma_0}{2}\overline{\Gamma}_1\Pi_s\,. \tag{3.1.7}$$

В Π_s, γ_0 можно заменить на $P=\pm1$ для $\Gamma_{1,2}$, (анти–) коммутирующей с γ_0, и Π_s становится скалярной функцией Π_P:

$$\Pi = \Pi_P\,\mathrm{Tr}\,\Gamma_2\frac{1-\gamma_0}{2}\overline{\Gamma}_1\,. \tag{3.1.8}$$

Корреляторы токов $\bar{\tilde{Q}}\gamma_5 q$ и $\bar{\tilde{Q}}\gamma_i q$ с квантовыми числами 0^-, 1^- мезонов в основном состоянии равны $2\Pi_+$ и $2\delta_{ij}\Pi_+$. Если мы обозначим ${<}0|\bar{\tilde{Q}}\gamma_5 q|M,0^-{>} = \tilde{f}_{M,0^-}$, ${<}0|\bar{\tilde{Q}}\vec{\gamma}q|M,1^-{>} =$

$\tilde{f}_{M,1^-}\vec{e}$ (где $\vec{e}$ — вектор поляризации 1^- мезона), то мезонные вклады в спектральные плотности равны $\tilde{f}^2_{M,0^-}\delta(\omega-\varepsilon_{0^-})$ и $\delta_{ij}\tilde{f}^2_{M,1^-}\delta(\omega-\varepsilon_{1^-})$. Поэтому спиновая симметрия требует, чтобы мезоны в 0^- и 1^- каналах были вырождены ($\varepsilon_{0^-}=\varepsilon_{1^-}=\varepsilon$), и $\tilde{f}_{M,0^-}=\tilde{f}_{M,1^-}=\sqrt{2}\tilde{f}_{M,\frac{1}{2}^+}$. Подобные формулы справедливы и для P–волновых 0^+, 1^+ мезонов.

В КХД мезонные константы обычно определяются как $<0|\overline{Q}\gamma^\mu\gamma_5 q|M,0^-> = f_{M,0^-}p^\mu$, $<0|\overline{Q}\gamma^\mu q|M,1^-> = mf_{M,1^-}e^\mu$, где мезонные состояния нормированы релятивистским образом: $<M,\vec{p}\,'|M,\vec{p}> = 2p_0\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})$. Эта нормировка не имеет смысла в HQET; вместо этого, мы должны использовать нерелятивистскую нормировку $<M,\vec{p}\,'|M,\vec{p}> = \delta(\vec{p}\,'-\vec{p})$. Тогда определения имеют вид $\sqrt{2m}<0|\overline{Q}\gamma_0\gamma_5 q|M,0^-> = mf_{M,0^-}$, $\sqrt{2m}<0|\overline{Q}\vec{\gamma}q|M,1^-> = mf_{M,1^-}\vec{e}$. Окончательно мы получаем

$$f_{M,0^-} = f_{M,1^-} = \frac{2\tilde{f}_{M,\frac{1}{2}^+}}{\sqrt{m}}\,. \tag{3.1.9}$$

К этой формуле имеются поправки, связанные с КХД/HQET сшивкой (§2.5).

Теперь мы перейдем к количественному рассмотрению правил сумм. Мезоны с одним тяжелым кварком рассматривались в рамках нерелятивистских [**119**]–[**121**], релятивистских Борелевских [**122, 35**] и моментных правилах сумм. В КХД правила сумм содержат два сильно отличающихся масштаба m и ω, и никаким выбором точки нормировки μ нельзя избавиться от больших логарифмов. В HQET есть только один масштаб ω, и выбирая $\mu\sim\omega$, мы получаем ряд теории возмущений без больших логарифмов.

Используя метод из §2.1, мы вычисляем пертурбативный коррелятор с двухпетлевой точностью через $\Gamma_{1,2}$ (2.1.18)

$$\Pi_0^{\mathrm{pt}}(\omega) = -\frac{2N\omega^2}{1-2\epsilon}\left[\Gamma_1 + C_F g_0^2\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\left(\frac{1}{1-2\epsilon}\Gamma_1^2 - \frac{1-\epsilon/2}{1-4\epsilon}\Gamma_2\right) + O\left(g_0^4\right)\right]. \tag{3.1.10}$$

Для правил сумм нам нужна спектральная плотность, которая легко получается из скачка (3.1.10) на разрезе, деленного на $2\pi i$. Для надежности мы также получили ее прямым использованием правила Каткоски в d измерениях, и получили

$$\rho_0^{\mathrm{pt}}(\omega) = \rho_0^{(1)}(\omega)\left(1+\delta_2+\delta_2^*+\delta_3+O\left(g_0^4\right)\right)\,,$$

$$\rho_0^{(1)}(\omega) = \frac{N(2\omega)^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(1-2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)}\,, \tag{3.1.11}$$

$$\delta_2 = -\frac{C_F g_0^2(-2\omega)^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(1-\epsilon)\Gamma(1+2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon^2(1-2\epsilon)}\,,$$

$$\delta_3 = \frac{2C_F g_0^2(2\omega)^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(1-\epsilon)(1-\epsilon/2)\Gamma(1-2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon^2(1-4\epsilon)\Gamma(1-4\epsilon)}\,,$$

где $\rho_0^{(1)}$ — ведущий однопетлевой результат, δ_2 — (комплексная) однопетлевая поправка к вершине в диаграмме с двухчастичным разрезом, и δ_3 — вклад трехчастичных разрезов. Выражая g_0^2 через $\alpha_s(\mu)$ и используя $\widetilde{Z}_j$ из §2.5, мы получаем обоими способами перенормированную спектральную плотность

$$\rho^{\mathrm{pt}}(\omega) = N\frac{\omega^2}{2\pi^2}\left[1 + 3C_F\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\left(-2\log\frac{2\omega}{\mu} + \frac{4\pi^2}{9} + \frac{17}{3}\right) + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right]. \tag{3.1.12}$$

Теперь мы можем сравнить эту формулу с результатами гораздо более трудоемких двухпетлевых вычислений КХД корреляторов (псевдо–) скалярных [**123**] и (псевдо–) векторных [**35**] токов для произвольных масс кварков (псевдоскалярные и псевдовекторные результаты были получены для антикоммутирующей γ_5 путем изменения знака массы кварка из скалярных и векторных результатов). Преобразуя $\overline{\mathrm{MS}}$ массу тяжелого кварка в полюсную массу m, используя коэффициенты сшивки для антикоммутирующей γ_5 из §2.5, полагая $q^2 = (m+\omega)^2$ и устремляя $m \to \infty$ при фиксированных ω и $\overline{\mathrm{MS}}$ массе легкого кварка m_q, мы получаем спектральную плотность

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathrm{pt}}(\omega) =& \frac{N\lambda(\omega \pm m_q)}{2\pi^2}\left[1 + \frac{C_F\alpha_s(\mu)}{4\pi}\left\{\frac{6\omega^2 \pm 6\omega m_q - 18m_q^2}{\lambda^2}\log\frac{\mu}{m_q}\right.\right.\\
&+ \frac{8\omega}{\lambda}\left(\mathrm{Li}_2\left(\frac{\omega-\lambda}{\omega+\lambda}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{2\lambda}{\omega+\lambda}\right) + 2\,\mathrm{Li}_2(1)\right) + \frac{17\omega^2 \pm 7\omega m_q - 28m_q^2}{\lambda^2}\\
&\left.\left.+ \frac{10\omega^2 \pm 4\omega m_q - 3m_q^2}{\lambda(\omega \pm m_q)}\log\frac{\omega+\lambda}{m_q} - 16\log\frac{2\lambda}{m_q}\right\} + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right] \qquad (3.1.13)\\
=& \frac{N\omega^2}{2\pi^2}\left[1 + \frac{3C_F\alpha_s(\mu)}{4\pi}\left\{-2\log\frac{2\omega}{\mu} + \frac{4\pi^2}{9} + \frac{17}{3}\right\} + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right]\\
&\pm \frac{N\omega m_q}{2\pi^2}\left[1 + \frac{3C_F\alpha_s(\mu)}{4\pi}\left\{-4\log\frac{2\omega}{\mu} + \frac{4\pi^2}{9} + 8\right\} + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right]\\
&- \frac{Nm_q^2}{4\pi^2}\left[1 + \frac{3C_F\alpha_s(\mu)}{4\pi}\left\{-6\log\frac{2\omega}{\mu} + 2\right\} + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right] + O\left(m_q^3\right)\,,
\end{aligned}$$

где $\lambda = (\omega^2 - m_q^2)^{1/2}$. Согласие (3.1.13) при $m_q \to 0$ с (3.1.12) подтверждает эквивалентность эксклюзивного и инклюзивного определений коэффициента сшивки в одной петле (§2.5). Разложение полного коррелятора дальше, чем до m_q^2, дает $\log m_q$ члены, которые должны быть включены в кварковый конденсат [**35**].

Одно– и двухпетлевые диаграммы для $<\overline{q}q>$ вклада могут быть вычислены тем же методом (§2.1). Мы вычислили все 11 одночастично–неприводимых диаграмм в любой размерности d в произвольной ковариантной калибровке. Комбинируя их с поправками к пропагатору и вершине из §2.1, мы получаем калибровочно–инвариантный $<\overline{q}q>$ вклад в неперенормированный коррелятор

$$\begin{aligned}\Pi_0^3(\omega) = \pm \frac{<\overline{q}_0 q_0>}{4\omega}\Big[&1 + P_1 \Gamma_1 C_F g_0^2 \\ &+ \left\{(P_{A1} C_A + P_{F1} C_F)\Gamma_1^2 + (P_{A2} C_A + P_{F2} C_F + P_{L2} T_F n_l)\Gamma_2\right\} C_F g_0^4 + O\left(g_0^6\right)\Big]\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

со следующими коэффициентами

$$\begin{aligned}
&P_1 = \frac{(d-1)(d-4)}{d-3}\,, \quad P_{A1} = \frac{(d^3 - 8d^2 + 19d - 10)(d-5)}{2(d-3)^2(d-4)}\,, \quad P_{F1} = -\frac{2(2d-9)(d-2)}{(d-3)(d-4)}\,,\\
&P_{A2} = \frac{2d^7 - 51d^6 + 552d^5 - 3245d^4 + 11064d^3 - 21626d^2 + 22080d - 8808}{4(2d-7)(d-3)^2(d-4)(d-6)}\,,\\
&P_{F2} = -\frac{d^6 - 20d^5 + 167d^4 - 728d^3 + 1704d^2 - 1968d + 816}{(d-3)^2(d-4)(d-6)}\,,\\
&P_{L2} = -\frac{4(d-2)(d-4)}{(2d-7)(d-3)(d-6)}\,.
\end{aligned}$$

Расходимости в (3.1.14) связывают аномальные размерности $\tilde{\jmath}$ и $<\overline{q}q>$, подтверждая вторую форму (2.5.2). Перенормированный результат имеет вид

$$\begin{aligned}\Pi^3(\omega) = \pm \frac{<\overline{q}q>_\mu}{2\omega}\Bigg\{&1 + \frac{3}{2} C_F \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \\ &+ C_F \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\right)^2 \left[\left(\left(-\frac{7}{4} + \frac{\zeta(2)}{2}\right) C_A + \left(\frac{1}{2} - 2\zeta(2)\right) C_F + T_F n_l\right) \log\frac{2\omega}{\mu}\right. \\ &\left. + \left(\frac{149}{48} - \frac{3\zeta(2)}{8} + \frac{\zeta(3)}{2}\right) C_A + \left(\frac{11}{8} + \frac{5\zeta(2)}{2} - 2\zeta(3)\right) C_F - \frac{4}{3} T_F n_l\right] + O\left(\alpha_s^3(\mu)\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

В КХД с $n_l = 4$ отношение NNL члена к NL члену велико: $(-3.00\log(2\omega/\mu) + 7.14)\alpha_s(\mu)/\pi$. Оно обращается в нуль при $\mu = 0.185\omega$, что является слишком низкой точкой нормировки для использования в HQET правилах сумм. Сама по себе двухпетлевая поправка невелика: около 15% при $\mu \sim 2\omega \sim 1$ GeV. В правилах сумм для ρ мезона это отношение еще больше.

Вклад кварковых конденсатов в древесном приближении точно выражается через две билокальных функции $f_S(x^2)$, $f_V(x^2)$ (§1.3):

$$\begin{aligned}\Pi^q(\tau) &= -\frac{i}{4}Q^3\left[\pm f_S(-\tau^2) - \frac{\tau}{4}f_V(-\tau^2)\right]\\ &= -\frac{i}{4}\left[\pm Q^3 \mp \frac{Q^5}{16}\tau^2 + \frac{Q^6}{288}\tau^3 \pm \frac{6Q_1^7 - 3Q_2^7 - 6Q_3^7 + 2Q_4^7}{1152}\tau^4\right.\\ &\quad\left. - \frac{20A - 10Q_2^8 + Q_3^8 - 2Q_4^8 - 12Q_5^8 + 20Q_6^8}{23040}\tau^5 + O(\tau^6)\right].\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

или в энергетическом представлении

$$\Pi^q(\omega) = \pm\frac{Q^3}{4\omega} \mp \frac{Q^5}{32\omega^3} - \frac{Q^6}{192\omega^4} \pm \frac{6Q_1^7 - 3Q_2^7 - 6Q_3^7 + 2Q_4^7}{192\omega^5} + O\left(\frac{1}{\omega^6}\right). \tag{3.1.17}$$

Первые три члена согласуются с [**119**] и с пределом $m \to \infty$ релятивистских результатов [**122, 35**].

В калибровке фиксированной точки статический кварк не взаимодействует с глюонами, а G^2 член в пропагаторе легкого кварка обращается в нуль после усреднения по вакууму. Поэтому вклад глюонного конденсата размерности 4 отсутствует в одной петле в нерелятивистском пределе. Мы получаем G^3 член, взяв предел $m \to \infty$ результата [**35**], и пренебрегаем J^2 членом, который сравним с неизвестной радиационной поправкой ко вкладу кваркового конденсата размерности 6 в (3.1.17). Глюонный вклад равен

$$\Pi^g(\omega) = -\frac{<g^3 f^{abc} G_\lambda^{a\mu} G_\mu^{b\nu} G_\nu^{c\lambda}>}{9216\pi^2\omega^4} + O\left(\frac{1}{\omega^6}\right). \tag{3.1.18}$$

Теперь мы выведем окончательную форму правила сумм. Используя двухпетлевую аномальную размерность (2.5.2) и двухпетлевую β–функцию, мы получаем

$$\tilde{f}_M(\mu) = \hat{f}_M \alpha_s^{-2/\beta_0}(\mu)\left(1 - K\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right), \quad K = \frac{5}{12} - \frac{285 - 7\pi^2}{27\beta_0} + \frac{107}{2\beta_0^2}, \tag{3.1.19}$$

где $\hat{f}_M$ — ренормгрупповой инвариант. Радиационная поправка здесь мала: $K = 0.189$ или 0.227 для $n_l = 3$ или 4. Обычные константы распада в КХД f_M связаны с $\tilde{f}_M$ следующим образом:

$$f_M = \frac{2}{\sqrt{m}}\tilde{f}_M(m)\left(1 - C\frac{\alpha_s(m)}{\pi} + O\left(\alpha_s^2\right)\right) + O\left(\frac{1}{m}\right), \tag{3.1.20}$$

где $C = 4/3$ для векторных мезонов и $C = 2/3$ для псевдоскалярных мезонов (для антикоммутирующей γ_5), см. §2.5. По аналогии с (3.1.19) мы также имеем

$$<\bar{q}q>_\mu = <\widehat{\bar{q}q}>\alpha_s^{-4/\beta_0}(\mu)\left(1 - K'\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} + O\left(\alpha_s^2(\mu)\right)\right), \quad K' = \frac{5}{6} - \frac{34}{3\beta_0} + \frac{107}{\beta_0^2},$$

где $<\widehat{\bar{q}q}>$ — (отрицательный) ренормгрупповой инвариант.

Мы принимаем стандартную модель континуума, полагая его равным пертурбативному, начиная с эффективного порога ε_c. Мы используем приближение факторизации [**32**] для кварковых конденсатов размерностей 6 и 7. В последнем случае оно ненадежно, но оно используется лишь как грубое указание, чтобы быть уверенным, что этот вклад остается малым. Мы опускаем двухпетлевой член в (3.1.15); чтобы его использовать, нам понадобилась бы неизвестный трехпетлевой член в $\tilde{\gamma}_j$. Приравнивая теоретическое и феноменологическое выражения для коррелятора при $\tau = 1/E$ (что эквивалентно нерелятивистскому преобразованию Бореля [**119**]), мы получаем

$$\begin{aligned}
\hat{f}_M^2 e^{-\varepsilon_M/E} \approx & \frac{3E^3}{2\pi^2}\delta_2\left(\frac{\varepsilon_c}{E}\right)\alpha_s^{4/\beta_0}(\mu)\left[1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\left(-2\log\frac{2\varepsilon_c}{\mu} + 2L\left(\frac{\varepsilon_c}{E}\right) + 2K + \frac{4\pi^2}{9} + \frac{17}{3}\right)\right] \\
& \mp \frac{<\widehat{\bar{q}q}>}{4}\left[1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\left(2 - \frac{264 - 14\pi^2}{27\beta_0}\right) - \frac{m_0^2}{16E^2} + \frac{\pi<\alpha_s G^2>}{288E^4}\right] \\
& + \alpha_s^{4/\beta_0}(\mu)\frac{\pi\alpha_s<\bar{q}q>^2 - \frac{3}{256\pi^2}<g^3 f^{abc} G^{a\,\mu}_{\lambda} G^{b\,\nu}_{\mu} G^{c\,\lambda}_{\nu}>}{648E^3}, \qquad (3.1.21) \\
L(x) = & \frac{\log x + \gamma + E_1(x) + \frac{1}{2}(3+x)e^{-x} - \frac{3}{2}}{\delta_2(x)} \\
= & \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{16}x + \frac{43}{1600}x^2 + O\left(x^3\right), & x \ll 1, \\ \log x + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(e^{-x}x^2\log x\right), & x \gg 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

где верхний (нижний) знак берется для мезонов в основном (возбужденном) состоянии, γ — константа Эйлера, функция $\delta_2(x)$ определена в (0.15), и $E_1(x) = \int_x^\infty dy\, e^{-y}/y$.

Левая сторона правила сумм (3.1.21) ренормализационно–инвариантна; правая часть тоже, с нашей точностью по $\alpha_s(\mu)$. Пертурбативная поправка всегда превосходит $(-2\log(2\varepsilon_c/\mu) + 11.1)\alpha_s(\mu)/\pi$. При $\mu \sim \varepsilon_c \sim 1$ GeV она порядка 100%. По нашему мнению, она слишком велика, чтобы иметь уверенность в законности пренебрежения неизвестной трехпетлевой поправкой (пертурбативная поправка в правиле сумм для ρ–мезона порядка 10%). Иными словами, в схеме наибыстрейшей кажущейся сходимости, в которой NLO поправка обращается в ноль, мы должны использовать $\mu < 0.008\varepsilon_c \sim 10\text{MeV}$, что недопустимо. Остальные члены можно держать под контролем; радиационная поправка к вкладу кваркового конденсата порядка 15%. Поэтому мы считаем, что надежное определение $\hat{f}_M$ и, следовательно, f_B из правил сумм невозможно.

Поправки порядка $1/m$ исследовались в [**111, 112**] в рамках HQET правил сумм, и в [**124**] путем разложения по $1/m$ релятивистских КХД правил сумм.

3.2. Мезонные формфакторы

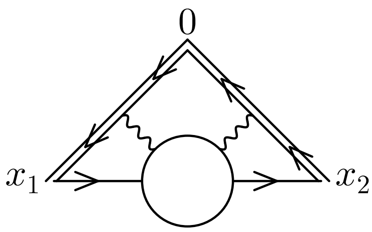


Рис. 3.2. Коррелятор двух HQET тяжело–легких токов и тяжело–тяжелого тока.

Чтобы исследовать адронные формфакторы в HQET, мы рассмотрим корреляторы двух токов $\tilde{\jmath}_{1,2}$, содержащих статические кварковые поля $\widetilde{Q}_{1,2}$ со скоростями $v_{1,2}$, и тяжело–тяжелого тока $\tilde{J}$, меняющего скорость (Рис. 3.2):

$$i^2 \langle T \tilde{\jmath}_2(x_2) \tilde{J}(0) \tilde{\jmath}_1^+(x_1) \rangle = \int\limits_0^\infty dt_2 \delta(x_2 - v_2 t_2) \int\limits_0^\infty dt_1 \delta(x_1 + v_1 t_1) K(t_2, t_1)\,, \qquad (3.2.1)$$

$$K(\omega_2, \omega_1) = \int K(t_2, t_1) e^{i\omega_2 t_2 + i\omega_1 t_1} dt_2 dt_1\,, \quad K(t_2, t_1) = \int K(\omega_2, \omega_1) e^{-i\omega_2 t_2 - i\omega_1 t_1} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{d\omega_1}{2\pi}\,.$$

Они удовлетворяют двойному дисперсионному представлению

$$K(\omega_2, \omega_1) = \int \frac{\rho(\varepsilon_2, \varepsilon_1) d\varepsilon_2 d\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 - \omega_2 - i0)(\varepsilon_1 - \omega_1 - i0)} + \cdots \qquad (3.2.2)$$

$$K(t_2, t_1) = \widetilde{S}(t_2) \widetilde{S}(t_1) \int \rho(\omega_2, \omega_1) e^{-i\omega_2 t_2 - i\omega_1 t_1} d\omega_2 d\omega_1 + \cdots$$

Вычитательные члены в $K(\omega_2, \omega_1)$ (обозначенные многоточием) — полиномы по ω_1 с коэффициентами, являющимися произвольными функциями ω_2 (которые даются однократными дисперсионными интегралами), плюс наоборот. Эти члены дают в $K(t_2, t_1)$ $\delta(t_1)$ и ее производные с коэффициентами, являющимися произвольными функциями t_2, плюс наоборот.

Мы можем аналитически продолжить $K(t_2,t_1)$ с $t_{1,2}>0$ на $t_{1,2}=-i\tau_{1,2}$. Тогда $K(\tau_2,\tau_1)$ и $\rho(\omega_2,\omega_1)$ связаны двойным преобразованием Лапласа

$$K(\tau_2,\tau_1) = -\int \rho(\omega_2,\omega_1) e^{-\omega_2\tau_2-\omega_1\tau_1} d\omega_2 d\omega\,, \tag{3.2.3}$$

$$\rho(\omega_2,\omega_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\tau_2 \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\tau_1 K(\tau_2,\tau_1) e^{\omega_2\tau_2+\omega_1\tau_1}\,.$$

Вклад промежуточных состояний $|h_{1,2}>$ с энергиями $\varepsilon_{1,2}$ в $K(\tau_2,\tau_1)$, $K(\omega_2,\omega_1)$ и $\rho(\omega_2,\omega_1)$ есть

$$\begin{aligned}
K_{h_2h_1}(t_2,t_1) &= i^2 <0|\tilde{\jmath}_2|h_2> i\widetilde{S}(t_2) e^{-i\varepsilon_2 t_2} <h_2|\tilde{J}|h_1> i\widetilde{S}(t_1) e^{-i\varepsilon_1 t_1} <h_1|\tilde{\jmath}_1^+|0>\,,\\
K_{h_2h_1}(\omega_2,\omega_1) &= i^2 <0|\tilde{\jmath}_2|h_2> \frac{i}{\omega_2-\varepsilon_2+i0} <h_2|\tilde{J}|h_1> \frac{i}{\omega_1-\varepsilon_1+i0} <h_1|\tilde{\jmath}_1^+|0>\,,\\
\rho_{h_2h_1}(\omega_2,\omega_1) &= <0|\tilde{\jmath}_2|h_2><h_2|\tilde{J}|h_1><h_1|\tilde{\jmath}_1^+|0> \delta(\omega_2-\varepsilon_2)\delta(\omega_1-\varepsilon_1)\,,
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

где подразумевается сумма по поляризациям $h_{1,2}$. Введем спиновые волновые функции $\psi_{1,2}$ адронов $h_{1,2}$. Тогда $<0|\tilde{\jmath}_{1,2}|h_{1,2}> = \tilde{f}_{1,2}\psi_{1,2}$, $<h_2|\tilde{J}|h_1> = \psi_2^+ \tilde{f}_{21}\psi_1$, где $\tilde{f}_{21}$ — формфакторная матрица в спиновом пространстве. Спектральная плотность коррелятора токов $\tilde{\jmath}_{1,2}^+\psi_{1,2}$ с некоторыми конкретными поляризациями $\psi_{1,2}$ равна $\psi_2^+\rho(\omega_2,\omega_1)\psi_1$. Вклад $|h_{1,2}>$ в нее равен $\tilde{f}_2\tilde{f}_1\psi_2^+\tilde{f}_{21}\psi_1\delta(\omega_2-\varepsilon_2)\delta(\omega_1-\varepsilon_1)$.

Коррелятор двух мезонных токов со скалярным тяжелым кварком $\tilde{\jmath}_{s2}$, $\bar{\tilde{\jmath}}_{s1}$ и скалярного тяжело–тяжелого тока $\tilde{J}_s = \widetilde{Q}_{s1}^+\widetilde{Q}_{s2}$ имеет γ–матричную структуру (Рис. 3.2)

$$K_s = A + B_1\hat{v}_1 + B_2\hat{v}_2 + C\hat{v}_2\hat{v}_1\,. \tag{3.2.5}$$

Для токов $\tilde{\jmath}_{P_2}$, $\bar{\tilde{\jmath}}_{P_1}$ с определенными четностями мы имеем

$$K_{P_2P_1} = A + P_1B_1 + P_2B_2 + P_1P_2C = \frac{\frac{1}{4}\operatorname{Tr}(1+P_1\hat{v}_1)(1+P_2\hat{v}_2)K_s}{1+P_1P_2 v_1\cdot v_2}\,. \tag{3.2.6}$$

Вследствие линейных соотношений (3.2.1–3.2.3), одни те же γ–матричные структуры и соотношения между K_s и $K_{P_2P_1}$ справедливы как в координатном пространстве, так и в импульсном, а также для спектральных плотностей. При вычислении коррелятора с использованием OPE, члены четных размерностей дают вклад в B_1, B_2, а нечетных — в A, C.

Для подсчета формфакторов удобно использовать систему отсчета “кирпичной стены”, в которой скорость $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ направлена по оси z. Проекция момента на z сохраняется: $j_{2z} = j_{1z}$. Отражение в любой плоскости, содержащей z, преобразует состояние $|j, j_z\rangle$ в $Pi^{2j}|j, -j_z\rangle$. Поэтому амплитуда для $-j_{1z}$, $-j_{2z}$ равна амплитуде для j_{1z}, j_{2z} с точностью до фазового множителя; переход $j_z = 0 \to j_z = 0$ разрешен только при сохранении “натуральности” $P(-1)^j$ [**58**]. Например, переходы $\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$, $\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^+ \to \frac{3}{2}^-$ описываются одним формфактором каждый:

$$\begin{aligned}
&<M, \frac{1}{2}^+|\tilde{J}_s|M, \frac{1}{2}^+> = \xi(\cosh\vartheta)\overline{u}_2 u_1 \,, \\
&<M, \frac{1}{2}^-|\tilde{J}_s|M, \frac{1}{2}^+> = \tau_{1/2}(\cosh\vartheta)\overline{u}_2\gamma_5 u_1 \,, \\
&<M, \frac{3}{2}^-|\tilde{J}_s|M, \frac{1}{2}^+> = \tau_{3/2}(\cosh\vartheta)v_1^\mu\overline{u}_{2\mu}u_1 \,,
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

где $\cosh\vartheta = v_1 \cdot v_2$ — косинус угла в пространстве Минковского между мировыми линиями входящего и выходящего тяжелых кварков, а u_μ — волновая функция Рариты–Швингера мезона со спином $\frac{3}{2}$. Вклад $\frac{1}{2}^+$ мезонов в спектральную плотность $\rho_s(\omega_2, \omega_1)$ равен $\tilde{f}_2\tilde{f}_1\xi(\cosh\vartheta)\frac{1+\hat{v}_2}{2}\frac{1+\hat{v}_1}{2}\delta(\omega_2 - \varepsilon_2)\delta(\omega_1 - \varepsilon_1)$, т. е. вклад в $\rho_{++}(\omega_2, \omega_1)$ равен $\tilde{f}_2\tilde{f}_1\xi(\cosh\vartheta)\delta(\omega_2 - \varepsilon_2)\delta(\omega_1 - \varepsilon_1)$. Спектральная плотность коррелятора токов $\bar{\tilde{\jmath}}_{s1,2}u_{1,2}$ с некоторыми определенными поляризациями $u_{1,2}$ есть $\overline{u}_2\rho_s(\omega_2, \omega_1)u_1$. Вклад $\frac{1}{2}^+$ мезонов в нее равен $\tilde{f}_2\tilde{f}_1\overline{u}_2\xi(\cosh\vartheta)u_1\delta(\omega_2 - \varepsilon_2)\delta(\omega_1 - \varepsilon_1)$. Подобные формулы справедливы и для $\frac{1}{2}^-$ мезонов.

Теперь включим спин тяжелого кварка. Коррелятор $\tilde{\jmath}_2 = \overline{\widetilde{Q}}_2\Gamma_2 q$, $\bar{\tilde{\jmath}}_1 = \overline{q}\overline{\Gamma}_1\widetilde{Q}_1$ и $\tilde{J} = \overline{\widetilde{Q}}_1\Gamma\widetilde{Q}_2$ равен (Рис. 3.2)

$$K = \operatorname{Tr}\Gamma_2\frac{1-\hat{v}_2}{2}\Gamma\frac{1-\hat{v}_1}{2}\overline{\Gamma}_1 K_s \,. \tag{3.2.8}$$

В K_s, $\hat{v}_{1,2}$ могут быть заменены на $P_{1,2} = \pm 1$ для $\Gamma_{1,2}$, (анти–) коммутирующих с $\hat{v}_{1,2}$, и K_s превращается в скалярную функцию $K_{P_2P_1}$:

$$K = K_{P_2P_1}\operatorname{Tr}\Gamma_2\frac{1-\hat{v}_2}{2}\Gamma\frac{1-\hat{v}_1}{2}\overline{\Gamma}_1 \,. \tag{3.2.9}$$

Введем токи $\overline{q}\mathcal{M}\widetilde{Q}$, $\mathcal{M} = \overline{\Gamma}\psi$, где ψ — спиновая волновая функция, т. е. $\mathcal{M}_{0^-} = \overline{\gamma}_5 = -\gamma_5$, $\mathcal{M}_{1^-} = \overline{\gamma}_\mu e^\mu = \hat{e}$. Спектральная плотность их коррелятора есть $\rho_{P_2P_1}\operatorname{Tr}\overline{\mathcal{M}}_2\frac{1-\hat{v}_2}{2}\Gamma\mathcal{M}_1$; вклад мезонов в нее равен $\tilde{f}_{M_2}\tilde{f}_{M_1}{<}M_2|\tilde{J}|M_1{>}\delta(\omega_2-\varepsilon_2)\delta(\omega_1-\varepsilon_1)$. Поэтому мы получаем [**56, 57, 59**]

$$<M_2|\tilde{J}|M_1> = \frac{1}{2}\xi(\cosh\vartheta)\,\mathrm{Tr}\,\overline{\mathcal{M}}_2\frac{1-\hat{v}_2}{2}\Gamma\frac{1-\hat{v}_1}{2}\mathcal{M}_1\,. \tag{3.2.10}$$

Эта формула выражает все формфакторы переходов 0^-, 1^- мезонов в основном состоянии в 0^-, 1^- мезоны в основном состоянии под действием любого тяжело–тяжелого тока $\tilde{J}=\overline{\tilde{Q}}_2\Gamma\tilde{Q}_1$ через один универсальный формфактор Исгура–Вайса $\xi(\cosh\vartheta)$. Подобные формулы с $\tau_{1/2}(\cosh\vartheta)$ справедливы для переходов $\frac{1}{2}^+\to\frac{1}{2}^-$; $\mathcal{M}=1$, $\hat{e}\gamma_5$ для 0^+, 1^+ мезонов. Аналогичным образом можно рассмотреть переходы $\frac{1}{2}^+\to\frac{3}{2}^-$ [**125**] (мы слегка изменили обозначения: наши $\tau_{1/2}$ и $\tau_{3/2}$ равны $2\tau_{1/2}$ и $\sqrt{3}\tau_{3/2}$ в обозначениях [**125**]).

Трехточечный коррелятор при $\vartheta=0$ выражается через соответствующий двухточечный:

$$K(t_2,t_1)=\Pi(t_1+t_2)\,,\quad K(\omega_2,\omega_1)=\frac{\Pi(\omega_1)-\Pi(\omega_2)}{\omega_1-\omega_2}\,,\quad \rho(\omega_2,\omega_1)=\rho(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1)\,. \tag{3.2.11}$$

Первые две формы следуют друг из друга при помощи преобразования Фурье. Третья форма необходима и достаточна для первой вследствие (3.1.2); она может быть получена двойным обратным преобразованием Лапласа (3.2.3) однократного прямого преобразования Лапласа (3.1.3) первой формы при мнимом времени. Третья форма может быть также получена из второй путем взятия двойного скачка на разрезе: скачок первого члена по ω_2 равен $\pi i\delta(\omega_2-\omega_1)\Pi(\omega_1)$, а скачок этого выражения по ω_1 равен $\frac{1}{2}(2\pi i)^2\rho(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1)$; второй член дает такой же вклад.

Чтобы доказать первую форму, рассмотрим любую диаграмму для двухточечного коррелятора в координатном пространстве (для простоты, со скалярным тяжелым кварком). Вершины вдоль линии тяжелого кварка имеют времена $t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n$, и производится интегрирование по $t_2,\ldots,t_{n-1}$. Подынтегральное выражение представляет собой интеграл по координатам всех вершин, не принадлежащих линии тяжелого кварка. Теперь рассмотрим все диаграммы для трехточечного коррелятора, получаемые вставлением тяжело–тяжелой вершины со временем t (и $\vartheta=0$) во все возможные позиции вдоль линии тяжелого кварка. Эти диаграммы имеют то же подынтегральное выражение и области

интегрирования $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t < t_m < \cdots < t_{n-1} < t_n$ $(m = 1, \ldots, n)$. Эти области покрывают всю область интегрирования исходной диаграммы. Поэтому сумма этого набора трехточечных диаграмм равна исходной двухточечной диаграмме.

Вторая форма может быть легко доказана в импульсном пространстве по аналогии с тождеством Уорда в КЭД (см., например, §4.3 учебника [**30**]) с использованием соотношения $i\widetilde{S}(\omega_1+\omega')ii\widetilde{S}(\omega_2+\omega') = \frac{i\widetilde{S}(\omega_1)-i\widetilde{S}(\omega_2)}{\omega_1-\omega_2}$ (Рис. 3.3). В частности, из нее следует $K(\omega,\omega) = \frac{d\Pi(\omega)}{d\omega}$.

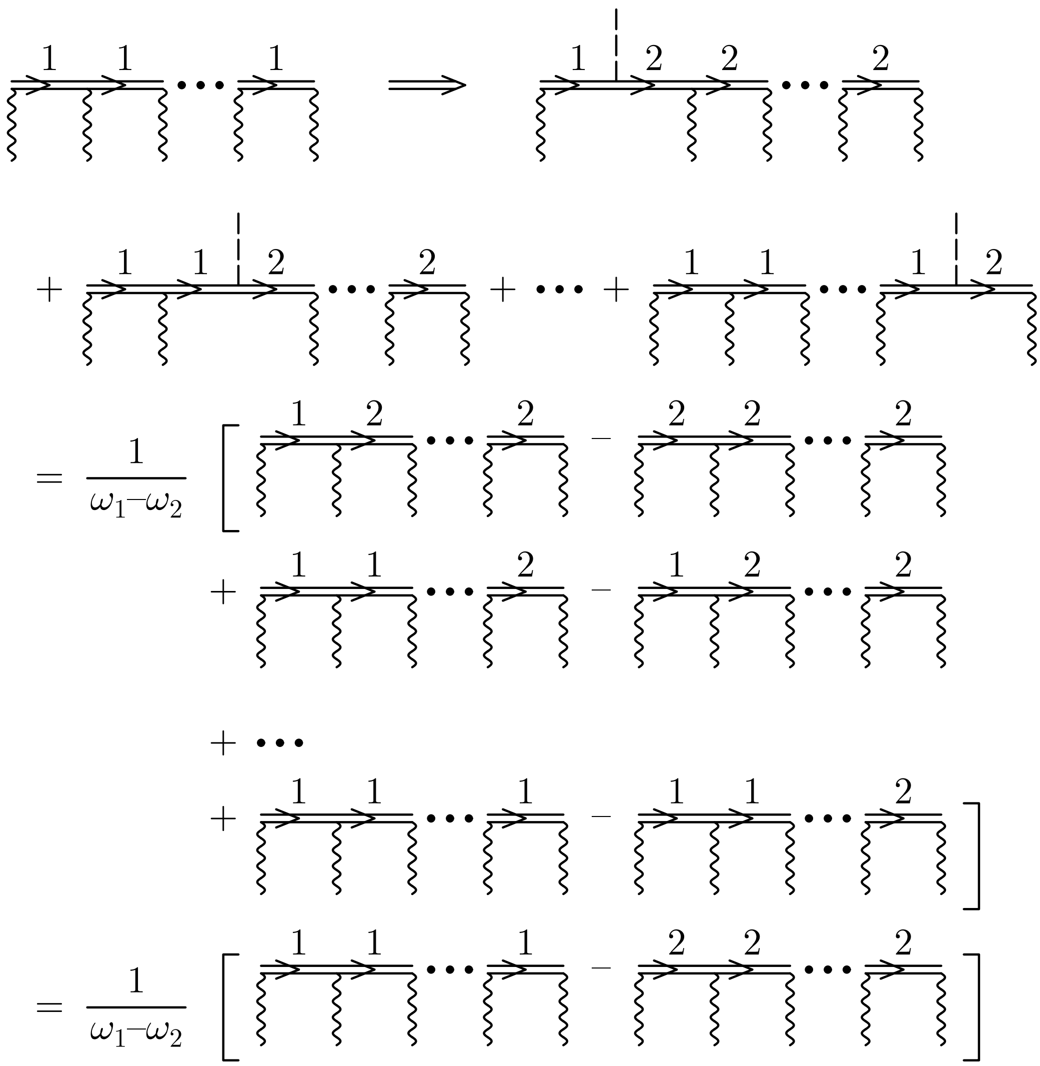


Рис. 3.3. Доказательство тождества Уорда. Цифра 1 (2) около линии тяжелого кварка означает, что его энергия включает ω_1 (ω_2).

Сравнивая мезонные вклады в $\rho(\omega_2, \omega_1)$ и $\rho(\omega)$, мы видим, что

$$\xi(1) = 1 \tag{3.2.12}$$

для любого $\frac{1}{2}^+$ мезона. Для недиагональных переходов $\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$ $\xi(1) = 0$, поскольку $\rho(\omega_2, \omega_1) = 0$ вне диагонали. Физический смысл этого прост: когда ток $\tilde{J}$ заменяет старый тяжелый кварк на новый с той же скоростью и цветом, легкие поля этого не замечают. Формулы для формфакторов при $\vartheta = 0$, эквивалентные (3.2.10, 3.2.12), были впервые предложены в кварковой модели.

Переменная $\cosh\vartheta$ связана с передачей импульса q^2 (для простоты, в случае равных масс тяжелых кварков) формулой $q^2 = 2m^2(1 - \cosh\vartheta)$. Формфакторы являются аналитическими функциями q^2 с разрезом в канале аннигиляции от $4m^2$ до $+\infty$. Поэтому функция Исгура–Вайса $\xi(\cosh\vartheta)$ является аналитической функцией в плоскости $\cosh\vartheta$ с разрезом от -1 до $-\infty$. С геометрической точки зрения, $\cosh\vartheta > 1$ соответствует минковским углам между мировыми линиями входящего и выходящего тяжелых кварков (канал рассеяния или распада); $\cosh\vartheta = 1$ означает прямую мировую линию — вообще никакого перехода; ничего особенного не происходит при $\cosh\vartheta < 1$, только угол становится евклидовым; $\cosh\vartheta = -1$ — действительно особая точка, в которой кварк возвращается по той же мировой линии, по которой пришел; $\cosh\vartheta < -1$ опять соответствует минковским углам, только одна из мировых линий направлена в прошлое (аннигиляция).

Теперь мы рассмотрим некоторые общие ограничения на формфактор Исгура–Вайса. Во время этого рассмотрения мы будем для простоты жить в мире со скалярным b кварком, распадающимся на скалярный c кварк и скалярный W бозон. Их массы можно подобрать так, чтобы получить любое желаемое значение $\cosh\vartheta$. Лагранжиан взаимодействия имеет вид $g(JW^+ + J^+W)$, $J = c^+b$. Матричный элемент этого распада есть просто $M = g$.

До сих пор мы обсуждали эксклюзивные распады B мезона. Инклюзивные распады также можно рассмотреть в HQET [**126**]. Матричный элемент распада $B \to X + W$ (где X — некоторое адронное состояние, содержащее c кварк) имеет структуру $M = g\langle X|J|B\rangle = g\overline{\psi}_2(X)u_1$. Его квадрат, усредненный по поляризациям, равен $\overline{|M|^2} = \frac{g^2}{2}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1+\hat{v}_1}{2}\psi_2(X)\overline{\psi}_2(X)$.

Просуммируем по адронным состояниям X с энергией ε:

$$\begin{aligned}
&W(\varepsilon,\vartheta)=\sum_X \psi_2(X)\overline{\psi}_2(X)\delta(\varepsilon_X-\varepsilon)=a+b\hat{v}_2\,,\\
&d\Gamma(B\to XW)=d\Gamma_0(b\to cW)F(\varepsilon,\vartheta)d\varepsilon\,,\\
&F(\varepsilon,\vartheta)=\sum_X |<X|J|B>|^2\delta(\varepsilon_X-\varepsilon)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\frac{1+\hat{v}_1}{2}W(\varepsilon,\vartheta)=a+b\cosh\vartheta\,.
\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

Вероятность распада мезона $d\Gamma$ отличается от вероятности распада кварка $d\Gamma_0$ умножением на структурную функцию $F(\varepsilon,\vartheta)$, где ε — энергия адронного состояния X (минус масса c кварка) в системе покоя v_2.

Теперь мы явно выпишем некоторые вклады в структурную функцию. Квадраты матричных элементов, усредненные по спинам, для распадов $\frac{1}{2}^+\to\frac{1}{2}^+$, $\frac{1}{2}^+\to\frac{1}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^+\to\frac{3}{2}^-$ (3.2.7) равны

$$\begin{aligned}
&\overline{|M|^2_{1/2^+}}=\frac{g^2\xi^2}{2}\operatorname{Tr}\frac{1+\hat{v}_1}{2}\frac{1+\hat{v}_2}{2}=g^2\xi^2\frac{\cosh\vartheta+1}{2}\,,\\
&\overline{|M|^2_{1/2^-}}=\frac{g^2\tau^2_{1/2}}{2}\operatorname{Tr}\frac{1+\hat{v}_1}{2}\gamma_5\frac{1+\hat{v}_2}{2}\overline{\gamma}_5=g^2\tau^2_{1/2}\frac{\cosh\vartheta-1}{2}\,,\\
&\overline{|M|^2_{3/2^-}}=g^2\tau^2_{3/2}\frac{(\cosh\vartheta+1)^2(\cosh\vartheta-1)}{3}\,.
\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

Здесь мы использовали матрицу плотности Рариты–Швингера. Распад $\frac{1}{2}^+\to\frac{1}{2}^+$ является S–волновым, поэтому $\overline{|M|^2}$ постоянен при $\vartheta\to 0$. Распады $\frac{1}{2}^+\to\frac{1}{2}^-$, $\frac{1}{2}^+\to\frac{3}{2}^-$ являются P–волновыми, поэтому $\overline{|M|^2}\sim\vartheta^2$. Распады на D–волновые мезоны $\frac{3}{2}^+$, $\frac{5}{2}^+$ являются D–волновыми с $\overline{|M|^2}\sim\vartheta^4$, и т. д. Квадраты матричных элементов в канале аннигиляции $W\to\overline{B}D$ отличаются от (3.2.14) отсутствием множителя $\frac{1}{2}$, происходящего от усреднения по спину начального мезона. Первый распад $W\to\frac{1}{2}^-\frac{1}{2}^+$ является P–волновым, второй $W\to\frac{1}{2}^-\frac{1}{2}^-$ — S–волновым, а третий $W\to\frac{1}{2}^-\frac{3}{2}^-$ — D–волновым. Это определяет пороговое поведение (3.2.14) при $\cosh\vartheta\to -1$.

Поэтому инклюзивная структурная функция выражается через эксклюзивные формфакторы как

$$
\begin{aligned}
F(\varepsilon,\vartheta) = & \frac{\cosh\vartheta+1}{2}\sum_{\frac{1}{2}^+}\left(\xi^{(n)}(\cosh\vartheta)\right)^2\delta(\varepsilon-\varepsilon^{(n)}_{1/2^+}) \\
& +\frac{\cosh\vartheta-1}{2}\sum_{\frac{1}{2}^-}\left(\tau^{(n)}_{1/2}(\cosh\vartheta)\right)^2\delta(\varepsilon-\varepsilon^{(n)}_{1/2^-}) \\
& +\frac{(\cosh\vartheta+1)^2(\cosh\vartheta-1)}{3}\sum_{\frac{3}{2}^-}\left(\tau^{(n)}_{3/2}(\cosh\vartheta)\right)^2\delta(\varepsilon-\varepsilon^{(n)}_{3/2^-})+\cdots
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

где суммы берутся по состояниям в соответствующих каналах j^P, а точки означают вклад D и более высоких волн. Структурная функция тождественно равна нулю при $\varepsilon<\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0=\varepsilon^{(0)}_{1/2^-}$ — остаточная энергия мезона в основном состоянии. В этой точке она имеет δ–пик, обусловленный переходом в основное состояние. Далее следуют другие узкие пики, соответствующие переходам в возбужденные состояния. Они разделены щелями порядка Λ. С ростом ε пики становятся шире, и при $\varepsilon\gg\Lambda$ структурная функция становится гладкой функцией ε, определяемой пертурбативным излучением глюонов. В этой области она ведет себя как $1/\varepsilon$ из соображений размерности:

$$
F(\varepsilon,\vartheta)=\frac{1}{\varepsilon}\left(2C_F\frac{\alpha_s}{\pi}(\vartheta\coth\vartheta-1)+O(\alpha_s^2)\right)\,. \tag{3.2.16}
$$

Как мы увидим в §5.2, ведущий член в скобках не случайно равен удвоенной однопетлевой аномальной размерности тяжело–тяжелого тока.

Кварк–адронная дуальность говорит нам, что полная вероятность распада мезона равна кварковой. Это правило сумм Бьеркена [**126**]

$$
\int\limits_0^\infty F(\varepsilon,\cosh\vartheta)d\varepsilon=1\,. \tag{3.2.17}
$$

Другие правила сумм следуют из сохранения энергии–импульса. В начальном состоянии система легких полей имеет определенную энергию ε_0; определенного импульса она не имеет, ее средний импульс $<\vec{p}>=0$, а средний квадрат $<\vec{p}^{\,2}>=\mu_\pi^2$. Когда тяжелый кварк распался и мгновенно изменил скорость, система легких полей этого в первый момент не заметила и осталась в прежнем состоянии. Ее энергия в системе покоя v' равна

$\varepsilon_0 \cosh\vartheta + p_x \sinh\vartheta$; она не имеет определенного значения, ее среднее равно $\varepsilon_0 \cosh\vartheta$, а средний квадрат $\varepsilon_0^2 \cosh^2\vartheta + \frac{\mu_\pi^2}{3}\sinh^2\vartheta$. Поэтому мы получаем правила сумм Волошина [**127**] и BGSUV [**27**]

$$\int\limits_0^\infty F(\varepsilon, \cosh\vartheta)\varepsilon d\varepsilon = \varepsilon_0 \cosh\vartheta\,. \tag{3.2.18}$$

$$\int\limits_0^\infty F(\varepsilon, \cosh\vartheta)\varepsilon^2 d\varepsilon = \varepsilon_0^2 \cosh^2\vartheta + \frac{1}{3}\mu_\pi^2 \sinh^2\vartheta\,. \tag{3.2.19}$$

Более подробно эти правила сумм обсуждаются в Главе 5.

Подставляя явное выражение для структурной функции (3.2.15) в правило сумм Бьеркена, мы получаем [**125**]

$$\frac{\cosh\vartheta+1}{2}\sum_{\frac{1}{2}^+}\xi^2 + \frac{\cosh\vartheta-1}{2}\sum_{\frac{1}{2}^-}\tau_{1/2}^2 + \frac{(\cosh\vartheta+1)^2(\cosh\vartheta-1)}{3}\sum_{\frac{3}{2}^-}\tau_{3/2}^2 + \cdots = 1\,. \tag{3.2.20}$$

Другие правила сумм записываются аналогично. Из (3.2.16) мы видим, что правило сумм Бьеркена логарифмически расходится при больших ε; высшие правила сумм расходятся степенным образом. Поэтому при учете пертурбативных эффектов они нуждаются в обрезании. Этот вопрос будет обсуждаться в §5.2. Простейшим следствием (3.2.20) является то, что вероятность распада на основное состояние $\frac{1}{2}^+$ меньше полной вероятности распада:

$$\xi(\cosh\vartheta) \le \sqrt{\frac{2}{\cosh\vartheta+1}}\,. \tag{3.2.21}$$

Разумеется, при $\cosh\vartheta \gg 1$ большинство распадов являются неупругими, и $\xi(\cosh\vartheta) \ll 1/\sqrt{\cosh\vartheta}$ (см. Главу 4).

Рассмотрим правило сумм Бьеркена (3.2.20) при малых $\cosh\vartheta - 1$, и разложим его до линейных членов. Каналы, обозначенные точками, не дают вклада, поскольку они являются по крайней мере D–волновыми. Высшие резонансы в канале $\frac{1}{2}^+$ не дают вклада, поскольку у них $\xi(\cosh\vartheta) = O(\cosh\vartheta - 1)$. Остается [**125**]

$$\xi'(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sum_{\frac{1}{2}^-}\tau_{1/2}^2(1) - \frac{2}{3}\sum_{\frac{3}{2}^-}\tau_{3/2}^2(1)\,. \tag{3.2.22}$$

Это правило сумм дает неравенство Бьеркена

$$\xi'(1) < -\frac{1}{4} \tag{3.2.23}$$

(оно очевидно также из (3.2.21)). Другие правила сумм записываются аналогично

$$\frac{1}{4}\sum_{\frac{1}{2}^-}\delta_{1/2}\tau_{1/2}^2(1) + \frac{2}{3}\sum_{\frac{3}{2}^-}\delta_{3/2}\tau_{3/2}^2(1) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,, \tag{3.2.24}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{\frac{1}{2}^-}\delta_{1/2}^2\tau_{1/2}^2(1) + \frac{2}{3}\sum_{\frac{3}{2}^-}\delta_{3/2}^2\tau_{3/2}^2(1) = \frac{1}{3}\mu_\pi^2\,, \tag{3.2.25}$$

где $\delta_{1/2} = \varepsilon_{\frac{1}{2}^-} - \varepsilon_0$, $\delta_{3/2} = \varepsilon_{\frac{3}{2}^-} - \varepsilon_0$ — энергии возбуждений. Пусть Δ — минимальная энергия возбуждения в каналах $\frac{1}{2}^-$, $\frac{3}{2}^-$. Тогда, заменяя в левой части (3.2.24) $\delta_{1/2}$ и $\delta_{3/2}$ на Δ, мы ее уменьшаем. Оставшаяся сумма выражается через $\xi'(1)$ в силу правила сумм Бьеркена (3.2.22), и мы получаем неравенство Волошина

$$\xi'(1) > -\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2\Delta} \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 > 2\Delta\left(-\xi'(1) - \frac{1}{4}\right)\,. \tag{3.2.26}$$

Аналогично, заменяя в левой части (3.2.25) $\delta_{1/2}^2$ и $\delta_{3/2}^2$ на $\Delta\delta_{1/2}$ и $\Delta\delta_{3/2}$, мы делаем ее меньше, поэтому

$$\mu_\pi^2 > \frac{3}{2}\Delta\varepsilon_0 > 3\Delta^2\left(-\xi'(1) - \frac{1}{4}\right)\,. \tag{3.2.27}$$

Строго говоря, минимальная энергия возбуждения Δ равна m_π, и эти неравенства очень слабые. Однако в действительности состояния с мягким пионом несущественны в правилах сумм, и первыми существенными состояниями являются ближайшие P–волновые резонансы.

Можно также установить ограничение на формфактор Исгура–Вайса на разрезе [**128**]: вероятность эксклюзивного распада $W \to \overline{B}D$ должна быть меньше, чем полная вероятность распада $W \to \bar{b}c$. Мезонная вероятность распада для каждого флейвора дается формулой (3.2.14) без фактора $\frac{1}{2}$, связанного с усреднением по спину мезона; кварковая вероятность распада равна $\overline{|M|^2} = g^2 N$. Если имеется n_l легких флейворов, для которых $\xi(\cosh\vartheta)$ примерно одинаковы, то

$$n_l|\xi(\cosh\vartheta)|^2|\cosh\vartheta + 1| \le N\,. \tag{3.2.28}$$

В общем случае левая часть есть сумма по легким флейворам. Множитель n_l был ошибочно опущен в [**128**]. При $|\cosh\vartheta| \gg 1$ канал $B\overline{D}$ составляет малую долю полной ширины $W \to b\overline{c}$, и $|\xi(\cosh\vartheta)| \ll 1/\sqrt{|\cosh\vartheta|}$ (см. Главу 4). Неравенство (3.2.28) применимо только достаточно далеко от порога, при $|\cosh\vartheta + 1| \gg \alpha_s^2$. Вблизи порога кулоновское взаимодействие между тяжелыми кварком и антикварком является существенным. Полная ширина не равна своему значению для свободных кварков N; она содержит резонансы на уровнях кваркония (как ниже, так и выше порога). Более того, само понятие формфактора Исгура–Вайса неприменимо в этой области. Картина HQET основана на том, что тяжелые кварки движутся вдоль прямолинейных мировых линий, но при относительных скоростях $v \sim \alpha_s$ они вращаются друг вокруг друга. Имеется большое количество работ, посвященных получению ограничений на формфактор Исгура–Вайса из аналитических свойств и неравенства (3.2.28), дополненного информацией о припороговой области.

Теперь мы перейдем к рассмотрению правил сумм для формфакторов тяжелых мезонов. Правила сумм для формфакторов, основанные на корреляторах трех токов, были введены в [**129**]. Здесь мы рассмотрим КХД правила сумм для формфакторов $B \to D$ и $B \to D^*$ при конечных m_b, m_c, а затем проследим, как в пределе больших масс кварков возникает структура формфакторов, следующая из HQET. Существует альтернативный подход — правила сумм в HQET. В нем ведущий формфактор Исгура–Вайса был рассмотрен в [**130**]–[**134**], а $1/m$ поправочные формфакторы — в [**135, 136**]. Этот подход дает более хорошее понимание источников нарушения спиновой симметрии тяжелого кварка; в вычислениях можно проследить общую структуру формфакторов в HQET и теорему Люка. Однако, первый подход легче обобщить на члены $1/m^2$; он дает более детальную информацию о точности приближения больших масс.

Мы рассматриваем трехточечные корреляторы

$$
\begin{aligned}
K^\mu(p_b,p_c) &= \int dx_b dx_c e^{-ip_bx_b+ip_cx_c} \langle T j_B(x_b) V^\mu(0) j_D^+(x_c) \rangle \\
&= K_+(p_b^2,p_c^2,t)p^\mu + K_-(p_b^2,p_c^2,t)q^\mu\,, \\
K^{\mu\nu}(p_b,p_c) &= K_V(p_b^2,p_c^2,t) i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta\,, \\
K_A^{\mu\nu} &= K_A g^{\mu\nu} + K_{++}p^\mu p^\nu + K_{+-}p^\mu q^\nu + K_{-+}q^\mu p^\nu + K_{--}q^\mu q^\nu\,,
\end{aligned}
\qquad (3.2.29)
$$

где $K^{\mu\nu}$ подобен K^μ с $j^\nu_{D^*}$ вместо j_D; $j_B = \overline{q}\gamma_5 b$, $j_D = \overline{q}\gamma_5 c$, $j^\nu_{D^*} = \overline{q}\gamma^\nu c$ — токи с квантовыми числами B, D, D^*; $K^{\mu\nu}_A$ подобен $K^{\mu\nu}$ с аксиальным током $A^\mu = \overline{c}\gamma^\mu\gamma_5 b$ вместо векторного $V^\mu = \overline{c}\gamma^\mu b$; $p = p_b + p_c$, $q = p_b - p_c$, $t = q^2$.

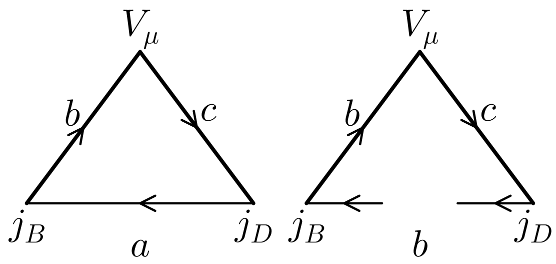


Рис. 3.4. Трехточечный коррелятор.

Мы вычислили пертурбативные двойные спектральные плотности $\rho_i(s_b, s_c, t)$ (Рис. 3.4a) и вклады кварковых конденсатов $K^q_i(p_b^2, p_c^2, t)$ (Рис. 3.4b) вплоть до размерности 6 для инвариантных функций $K_i(p_b^2, p_c^2, t)$. Все результаты были получены с помощью единой программы на языке REDUCE [**30**], в которой менялись лишь несколько строчек с γ–матричной структурой токов. При этом возможность ошибок сокращается по сравнению со случаем, когда для разных каналов используются отдельные программы. Чтобы уменьшить вероятность опечаток, единая программа на языке REDUCE использовалась для генерации LaTeX текста уравнений (с помощью пакета RLFI Р. Лиски) и для алгебраических проверок.

Спектральные плотности получаются из двойного скачка диаграммы Рис. 3.4a делением на $(2\pi i)^2$. Скачок находится по правилу Каткоски, разрезаются все 3 пропагатора. Условие, чтобы аргументы всех 3 δ–функций могли обращаться в нуль одновременно, определяет физическую область в плоскости s_b, s_c, имеющую форму клина с вершиной m_b^2, m_c^2 (Рис. 3.5):

$$m_c^2 x_b^2 + m_b^2 x_c^2 - (m_b^2 + m_c^2 - t) x_b x_c \leq 0\,, \tag{3.2.30}$$

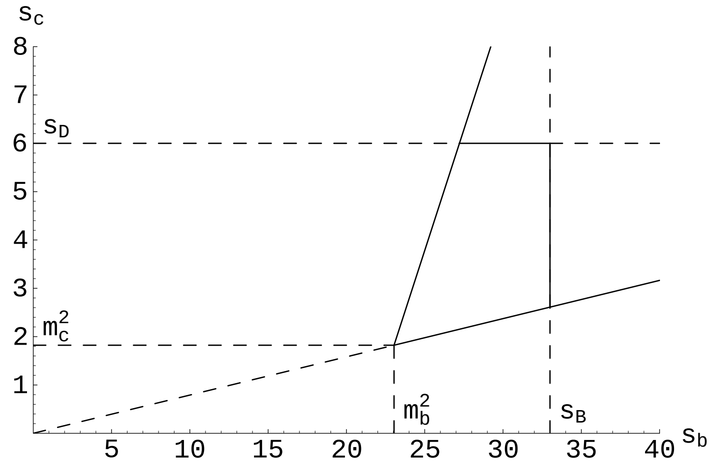


Рис. 3.5. Физическая область в плоскости s_b, s_c (при $t = 0$).

где $x_{b,c} = s_{b,c} - m_{b,c}^2$. Результаты имеют вид

$$
\begin{aligned}
\rho_+ =& \frac{N}{8\pi^2\Delta^{3/2}}\Big[-t(2x_bx_c + (m_b+m_c)a_+) + (m_b-m_c)a_+b\Big]\,,\\
\rho_- =& \frac{N}{8\pi^2\Delta^{3/2}}\Big[-\big((m_b-m_c)^2-t\big)(m_b-m_c)a_+ + 2x_bx_c(x_b-x_c)\\
&+ a_-\big((3m_c-m_b)x_b + (3m_b-m_c)x_c\big)\Big]\,,\\
\rho_V =& \frac{N}{8\pi^2\Delta^{3/2}}\Big[\big((m_b-m_c)^2-t\big)a_+ + (x_b-x_c)a_-\Big]\,,\\
\rho_A =& \frac{N}{8\pi^2\Delta^{3/2}}\Big[\Delta a_+ + 2m_b\big(x_bx_ct + (x_b-x_c)(m_c^2x_b - m_b^2x_c)\big)\Big]\,,\\
\rho_{++} =& \frac{Nm_b}{8\pi^2\Delta^{5/2}}\Big[\Delta t(x_b+x_c) + \Delta\big(6x_bx_c - (m_b^2-m_c^2)(x_b-x_c)\big)\\
&+ 6t(x_b+x_c)(2x_bx_c + m_c^2x_b + m_b^2x_c) - 6x_bx_cb^2\Big]\,,\\
\rho_{+-} =& \frac{N}{8\pi^2\Delta^{5/2}}\Big[-\Delta tx_b(m_b-m_c) - \Delta\Big((x_b-x_c)a_+ - (m_b-m_c)\big((m_b^2+m_c^2)x_b - 2m_b^2x_c\big)\Big)\\
&- 6m_b\big(x_bx_ct + (x_b-x_c)(m_c^2x_b - m_b^2x_c)\big)b\Big]\,,\\
\rho_{-+} =& \frac{N}{8\pi^2\Delta^{5/2}}\Big[-\Delta tx_b(m_b+m_c) + \Delta\Big((x_b-x_c)a_- + (m_b+m_c)\big((m_b^2+m_c^2)x_b - 2m_b^2x_c\big)\Big)\\
&- 6m_b\big(x_bx_ct + (x_b-x_c)(m_c^2x_b - m_b^2x_c)\big)b\Big]\,,
\end{aligned}
$$

$$\rho_{--} = \frac{Nm_b}{8\pi^2\Delta^{5/2}}\Big[\Delta t(x_b - x_c) + \Delta\big(-2x_c(2x_b - x_c) - (3m_c^2 + m_b^2)x_b + (3m_b^3 + m_c^2)x_c\big)$$
$$- 6t(x_b - x_c)(m_c^2 x_b - m_b^2 x_c)$$
$$- 6\big(x_b(x_b - x_c) + (m_b^2 + m_c^2)x_b - 2m_b^2 x_c\big)\big(x_c(x_c - x_b) + (m_c^2 + m_b^2)x_c - 2m_c^2 x_b\big)\Big],$$

где $\Delta = s_b^2 + s_c^2 + t^2 - 2s_bs_c - 2s_bt - 2s_ct$, $a_\pm = m_cx_b \pm m_bx_c$, $b = x_b - x_c + m_b^2 - m_c^2$. При $t > 0$ спектральные плотности имеют неинтегрируемые особенности на параболе $\Delta = 0$, которая касается границы физической области (Рис. 3.5), лежащей ближе к оси s_c, в точке

$$x_b = \frac{d + (m_b^2 - m_c^2 + t)\sqrt{d}}{2t}, \quad x_c = \frac{d + (m_b^2 - m_c^2 - t)\sqrt{d}}{2t}, \tag{3.2.31}$$

где $d = m_b^4 + m_c^4 + t^2 - 2m_b^2m_c^2 - 2m_b^2t - 2m_c^2t$. Выше этой точки двойное дисперсионное представление должно быть модифицировано [**137**].

Результаты для $\overline{q}(\gamma_5, \gamma^\nu)c \to \overline{q}(1, \gamma^\nu\gamma_5)c$, $\overline{b}(\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5)c \to \overline{b}(\gamma^\mu\gamma_5, \gamma^\mu)c$ могут быть легко получены заменой

$$K_i' = -K_i(m_c \to -m_c)\,. \tag{3.2.32}$$

Имеется интересная проверка этих формул. Если мы умножим коррелятор с $\overline{q}\gamma_\nu c$ на p_c^ν и используем тождество $S_q(k)\gamma_\nu S_c(p_c+k)p_c^\nu = m_cS_q(k)S_c(p_c+k) + S_q(k) - S_c(p_c+k)$, то мы получим соответствующий коррелятор с $\overline{q}c$ плюс члены, не имеющие двойной спектральной плотности. Поэтому

$$\rho_A + (s_b + 3s_c - t)\rho_{++} + (s_b - s_c - t)\rho_{+-} = -2\rho_+(m_c \to -m_c)\,,$$
$$-\rho_A + (s_b + 3s_c - t)\rho_{-+} + (s_b - s_c - t)\rho_{--} = -2\rho_-(m_c \to -m_c)\,.$$

Вклады кварковых конденсатов равны

$$\frac{K_+^q}{|{<}\overline{q}q{>}|} = -\frac{m_b + m_c}{2x_bx_c}$$
$$+ \frac{m_0^2}{4}\left[(m_b + m_c)\left(\frac{m_b^2}{x_b^3x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^3x_b} + \frac{c}{3x_b^2x_c^2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2m_b + m_c}{x_b^2x_c} + \frac{2m_c + m_b}{x_c^2x_b}\right)\right]$$
$$+ \frac{m_1^2}{3}\left[-(m_b + m_c)a_+\left(\frac{m_b^2}{x_b^4x_c^2} + \frac{m_c^2}{x_c^4x_b^2} + \frac{2}{3}\frac{(m_b - m_c)^2 - t}{x_b^3x_c^3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\left(\frac{m_b(m_b + 2m_c)}{x_b^3x_c} + \frac{m_c(m_c + 2m_b)}{x_c^3x_b} + \frac{c - 2t}{x_b^2x_c^2}\right) + 4\left(\frac{1}{x_b^2x_c} + \frac{1}{x_c^2x_b}\right)\right],$$

$$
\begin{aligned}
\frac{K_{-}^{q}}{|\langle\overline{q}q\rangle|} =& -\frac{m_b - m_c}{2x_b x_c} + \frac{m_0^2}{4}\left[-(m_b - m_c)\left(\frac{m_b^2}{x_b^3 x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^3 x_b} + \frac{c}{3x_b^2 x_c^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{2}{3}\left(-\frac{3m_b - m_c}{x_b^2 x_c} + \frac{3m_c - m_b}{x_c^2 x_b}\right)\right]\\
&+\frac{m_1^2}{3}\left[(m_b - m_c)a_+\left(\frac{m_b^2}{x_b^4 x_c^2} + \frac{m_c^2}{x_c^4 x_b^2} + \frac{2}{3}\frac{(m_b - m_c)^2 - t}{x_b^3 x_c^3}\right)\right.\\
&\left.-\frac{4}{3}\frac{(m_b x_b + m_c x_c)a_-}{x_b^3 x_c^3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{x_b^2 x_c} - \frac{1}{x_c^2 x_b}\right)\right],\\
\frac{K_{V}^{q}}{|\langle\overline{q}q\rangle|} =& -\frac{1}{2x_b x_c} + \frac{m_0^2}{4}\left[\frac{m_b^2}{x_b^3 x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^3 x_b} + \frac{c}{3x_b^2 x_c^2} + \frac{2}{3x_b^2 x_c}\right]\\
&+\frac{m_1^2}{3}\left[-a_+\left(\frac{m_b^2}{x_b^4 x_c^2} + \frac{m_c^2}{x_c^4 x_b^2} + \frac{2}{3}\frac{(m_b - m_c)^2 - t}{x_b^3 x_c^3}\right)\right.\\
&\left.-\frac{4}{3}\left(-\frac{m_b}{x_b^3 x_c} + \frac{2m_c}{x_c^3 x_b} + \frac{m_b + m_c}{x_b^2 x_c^2}\right)\right],\\
\frac{K_{A}^{q}}{|\langle\overline{q}q\rangle|} =& -\frac{(m_b + m_c)^2 - t}{2x_b x_c} - \frac{1}{2x_b} - \frac{1}{2x_c}\\
&+\frac{m_0^2}{4}\left[\left((m_b + m_c)^2 - t\right)\left(\frac{m_b^2}{x_b^3 x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^3 x_b} + \frac{c}{3x_b^2 x_c^2}\right)\right.\\
&+\frac{m_b^2}{x_b^3} + \frac{m_c^2}{x_c^3} + \frac{3m_b^2 + 4m_c^2 + 9m_b m_c - 4t}{3x_b^2 x_c}\\
&\left.+\frac{2m_b^2 + 3m_c^2 + 3m_b m_c - 2t}{3x_c^2 x_b} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x_b^2} - \frac{1}{x_b x_c}\right)\right]\\
&+\frac{m_1^2}{3}\left[-\left((m_b + m_c)^2 - t\right)a_+\left(\frac{m_b^2}{x_b^4 x_c^2} + \frac{m_c^2}{x_c^4 x_b^2} + \frac{2}{3}\frac{(m_b - m_c)^2 - t}{x_b^3 x_c^3}\right) - \frac{m_b^3}{x_b^4} - \frac{m_c^3}{x_c^4}\right.\\
&+\frac{m_b(3m_b^2 + 2m_c^2 + 3m_b m_c - 2t)}{3x_b^3 x_c} - \frac{m_c(10m_b^2 + 11m_c^2 + 19m_b m_c - 10t)}{3x_c^3 x_b}\\
&-\frac{6m_b^3 + 5m_b^2 m_c + 7m_b m_c^2 - 2m_c^3 - 2(3m_b - m_c)t}{3x_b^2 x_c^2}\\
&\left.+\frac{4}{3}\left(\frac{m_b}{x_b^3} - \frac{2m_c}{x_c^3} + \frac{m_b + 4m_c}{x_b^2 x_c} + \frac{m_b - 2m_c}{x_c^2 x_b}\right)\right],\\
\frac{K_{++}^{q}}{|\langle\overline{q}q\rangle|} =& \frac{1}{2x_b x_c} - \frac{m_0^2}{4}\left[\frac{m_b^2}{x_b^3 x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^3 x_b} + \frac{m_b^2 + 2m_c^2 - 2t}{3x_b^2 x_c^2}\right]\\
&+\frac{m_1^2}{3}\left[m_b\left(\frac{m_b^2}{x_b^4 x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^4 x_b} + \frac{m_b^2 + 2m_c^2 - 2t}{3x_b^3 x_c^2} + \frac{m_c^2 + 2m_b^2 - 2t}{3x_c^3 x_b^2}\right)\right.\\
&\left.+2\left(-\frac{m_b}{x_b^3 x_c} + \frac{m_c}{x_c^3 x_b} + \frac{m_c}{x_b^2 x_c^2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{K^q_{+-}}{|{<}\bar{q}q{>}|} = &- \frac{m_0^2}{12}\left[\frac{m_b(m_b-m_c)}{x_b^2x_c^2} - \frac{2}{x_b^2x_c}\right] \\
&- \frac{m_1^2}{9}\Bigg[(m_b-m_c)\left(-\frac{m_b^2}{x_b^3x_c^2} + \frac{3m_c^2}{x_c^4x_b} + 2\frac{m_b^2+m_c^2-t}{x_b^3x_c^2}\right) \\
&+ 2\left(\frac{m_b}{x_b^3x_c} - \frac{m_c}{x_c^3x_b} + \frac{2m_b-5m_c}{x_b^2x_c^2}\right)\Bigg], \\
\frac{K^q_{-+}}{|{<}\bar{q}q{>}|} = &- \frac{m_0^2}{12}\left[\frac{m_b(m_b+m_c)}{x_b^2x_c^2} - \frac{2}{x_b^2x_c} + \frac{2}{x_c^2x_b}\right] \\
&- \frac{m_1^2}{9}\left[(m_b+m_c)\left(-\frac{m_b^2}{x_b^3x_c^2} + \frac{3m_c^2}{x_c^4x_b} + 2\frac{m_b^2+m_c^2-t}{x_b^3x_c^2}\right) + 2\frac{(x_b-x_c)a_-}{x_b^3x_c^3}\right], \\
\frac{K^q_{--}}{|{<}\bar{q}q{>}|} = &- \frac{1}{2x_bx_c} + \frac{m_0^2}{4}\left[\frac{m_b^2}{x_b^3x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^3x_b} + \frac{3m_b^2+2m_c^2-2t}{3x_b^2x_c^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{x_b^2x_c} + \frac{1}{x_c^2x_b}\right)\right] \\
&+ \frac{m_1^2}{3}\Bigg[m_b\left(-\frac{m_b^2}{x_b^4x_c} + \frac{m_c^2}{x_c^4x_b} - \frac{3m_b^2+2m_c^2-2t}{3x_b^3x_c^2} + \frac{3m_c^2+2m_b^2-2t}{3x_c^3x_b^2}\right) \\
&+ \frac{2}{3}\left(\frac{m_b}{x_b^3x_c} - \frac{3m_c}{x_c^3x_b} + \frac{m_b+3m_c}{x_b^2x_c^2}\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

где $x_{b,c} = p_{b,c}^2 - m_{b,c}^2$; $c = 2m_b^2 + 2m_c^2 - m_bm_c - 2t$; $m_0^2 = i{<}\bar{q}gG^a_{\mu\nu}t^a\sigma^{\mu\nu}q{>}/{<}\bar{q}q{>}$, $m_1^3 = -\frac{1}{4}{<}\bar{q}gJ^a_\mu t^a\gamma^\mu q{>}/{<}\bar{q}q{>} = \frac{C_F}{N}\pi\alpha_s{<}\bar{q}q{>}$ в приближении факторизации.

В пределе $m_b = m_c$, $p_b^2 = p_c^2$, $t = -0$ трехточечный коррелятор K_+ выражается через производную от двухточечного:

$$K_+(p^2,p^2,0) = \frac{d\Pi(p^2)}{dp^2}\,. \qquad (3.2.33)$$

Это тождество Уорда является сильной проверкой наших формул, с учетом известного выражения для двухточечного коррелятора [**35, 122**].

Рассмотрим подробнее применение КХД правил сумм к распаду $B \to Dl\bar{\nu}$, где $l = e$ или μ (мы не будем обсуждать распад на τ, в котором нельзя пренебречь массой лептона). Только векторный слабый ток V_μ (но не аксиальный) имеет матричный элемент $B \to D$:

$$<D|V_\mu|B> = f_+(t)p_\mu + f_-(t)q_\mu\,, \quad p = p_B + p_D\,, \quad q = p_B - p_D\,, \quad t = q^2\,. \qquad (3.2.34)$$

В приближении нулевой массы лептона, формфактор f_- не дает вклада в матричный элемент распада. Будем рассматривать распад в системе покоя B мезона. В качестве двух независимых переменных выберем энергию D мезона E и энергию заряженного лептона E_l. Физическая область в этих переменных изображена на Рис. 3.6. Ее криволинейная

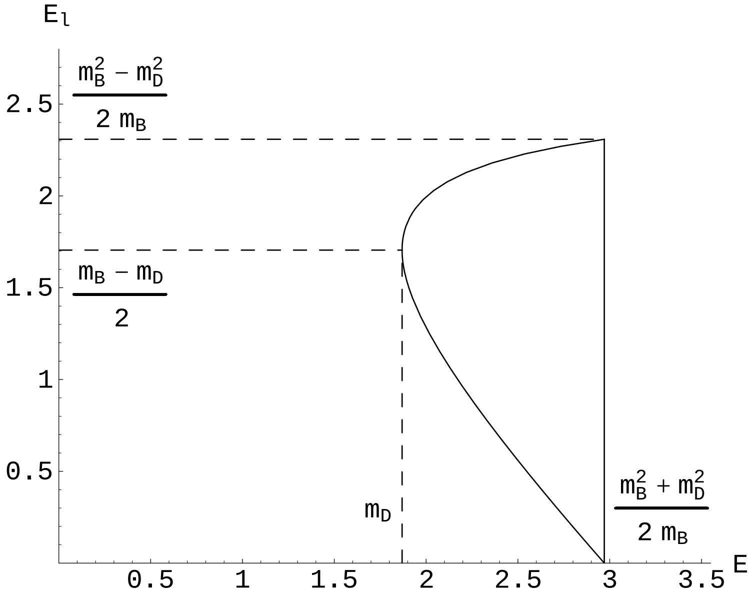


Рис. 3.6. Диаграмма Далитца распада $B \to Dl\overline{\nu}$.

граница определяется уравнением

$$E^2 - m_D^2 = (m_B - E - 2E_l)^2 \tag{3.2.35}$$

(см., например, §4.1 учебника [**30**]). Переменная $t = m_B^2 + m_D^2 - 2m_B E$ может меняться от 0 (в случае, когда $l\overline{\nu}$ летят параллельно) до $t_{\max} = (m_B - m_D)^2$ (когда образовавшийся D мезон покоится). Стандартное вычисление дает для вероятности распада (см., например, §5.3 учебника [**30**])

$$\frac{d^2\Gamma}{dE\,dE_l} = \frac{G^2|V_{cb}|^2 m_B f_+^2(t)}{4\pi^3}\left[2E_\nu E_l - m_B\left(E_{\max} - E\right)\right] , \tag{3.2.36}$$

где $E_\nu = m_B - E - E_l$, $E_{\max} = (m_B^2 + m_D^2)/(2m_B)$. Энергетический спектр D мезонов может быть вычислен в общем виде:

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{G^2|V_{cb}|^2 m_B f_+^2(t)}{12\pi^3} p_D^3 \,. \tag{3.2.37}$$

Пороговое поведение p_D^3 при малых импульсах объясняется тем, что D мезоны рождаются в P волне. Таким образом, задачей теории является вычисление одного формфактора $f_+(t)$ в физической области изменения t.

В ведущем порядке HQET

$$f_{\pm}(t) = \frac{m_D \pm m_B}{2\sqrt{m_B m_D}} \xi(v_B \cdot v_D)\,, \tag{3.2.38}$$

в частности, $f_+(t_{\max}) = 1.14$, $f_-(t_{\max}) = -0.54$. Эти значения были впервые получены в рамках кварковых моделей. В них обычно предполагается доминантность ближайшего векторного мезона в $b\overline{c}$ канале:

$$f_+(t) = \frac{f_+(0)}{1 - t/m_{b\overline{c}}^2}\,. \tag{3.2.39}$$

В пределе больших масс $m_{b\overline{c}} \approx m_B + m_D$, и (3.2.39) согласуется с (3.2.38) при $\xi(\cosh\vartheta) = 2/(1+\cosh\vartheta)$. Потенциальная модель предсказывает $m_{b\overline{c}} = 6.319\mathrm{GeV}$.

В работе [**138**] предложен подход, основанный на малости параметра

$$\xi^2 = \left(\frac{m_B - m_D}{m_B + m_D}\right)^2 \approx 0.23\,. \tag{3.2.40}$$

В нем $f_+(t_{\max}) = 1 + O(\xi^2)$; область изменения t от 0 до $t_{\max} = (m_B - m_D)^2$ является узкой по сравнению с характерным масштабом изменения формфактора $m_{b\overline{c}} \sim m_B + m_D$, поэтому изменение формфактора в физической области также порядка ξ^2. Это изменение можно считать линейным; отклонения от линейности порядка ξ^4.

Для получения формфактора $f_+(t)$ из трехточечных правил сумм рассмотрим скалярную функцию $K_+(p_b^2, p_c^2, t)$ в корреляторе (3.2.29). При $t \le 0$ она удовлетворяет двойному дисперсионному представлению

$$K_+(p_b^2, p_c^2, t) = \int \frac{\rho_+(s_b, s_c, t) ds_b ds_c}{(p_b^2 - s_b + i0)(p_c^2 - s_c + i0)} + \cdots \tag{3.2.41}$$

где точки означают вычитательные члены, полиномиальные по p_b^2 или p_c^2. Коррелятор может быть вычислен двумя способами. С одной стороны, можно записать спектральную плотность через вклады физических состояний. Прокладывая низшие состояния — B мезон между j_B и V_μ и D мезон между V_μ и j_D^+, мы получим вклад

$$\rho_+^{\mathrm{res}} = \frac{f_B m_B^2}{m_b} \frac{f_D m_D^2}{m_c} f_+(t) \delta(s_b - m_B^2) \delta(s_c - m_D^2)\,, \tag{3.2.42}$$

где подставлены матричные элементы $<0|j_B|B> = i f_B m_B^2/m_b$, $<0|j_D|D> = i f_D m_D^2/m_c$. Вклад континуума высших состояний мы аппроксимируем обычным образом:

$$\rho_+^{\mathrm{cont}} = \rho_+^{\mathrm{pert}} \theta(s_b - s_B) \theta(s_c - s_D)\,, \tag{3.2.43}$$

где $\rho_+^{\rm pert}$ — спектральная плотность, вычисленная по теории возмущений, а s_B, s_D — пороги континуума в соответствующих каналах. Константы f_B, f_D и пороги s_B, s_D определялись из двухточечных правил сумм (см. §3.1). С другой стороны, коррелятор в евклидовой области можно вычислить как сумму вклада теории возмущений (Рис 3.4a) и ряда степенных поправок (Рис 3.4b). Первый из них дается дисперсионным интегралом (3.2.41) от спектральной плотности $\rho_+^{\rm pert}$ по всей физической области. Во втором мы удерживаем вклады кварковых конденсатов размерностей 3, 5 и 6. Вклад теории возмущений подавлен из–за наличия петли. Мы не учитываем вклад глюонного конденсата, также содержащий петлю и являющийся малой поправкой к вкладу теории возмущений. В двухточечных правилах сумм для B и D мезонов вклад глюонного конденсата не превышает 1% (§3.1).

Приравнивая эти два выражения для коррелятора и проводя двойное преобразование Бореля по p_b^2 и p_c^2, мы получаем правило сумм для формфактора. Преобразование Бореля позволяет избавиться от неизвестных вычитательных членов; оно приводит к экспоненциальному подавлению вклада высших состояний и к факториальному подавлению коэффициентов при высших степенных поправках. Перенося вклад континуума из физической части в теоретическую и объединяя его с вкладом теории возмущений, мы получаем правило сумм

$$\frac{f_B m_B^2}{m_b}\frac{f_D m_D^2}{m_c} f_+(t) e^{-m_B^2/M_b^2 - m_D^2/M_c^2} = \int\limits_R \rho_+^{\rm pert}(s_b, s_c, t) e^{-s_b/M_b^2 - s_c/M_c^2} + \hat{B}K_+^q(M_b^2, M_c^2, t)\,, \tag{3.2.44}$$

где R — часть физической области в плоскости s_b, s_c, вырезанная условиями $s_b < s_B$, $s_c < s_D$. Борелизованный вклад кварковых конденсатов равен

$$\begin{aligned}\hat{B}K_+^q = &-\frac{(m_b+m_c)\langle\bar{q}q\rangle}{2} e^{-m_b^2/M_b^2 - m_c^2/M_c^2}\Bigg[1 \\ &- m_0^2\left(-\frac{2m_b+m_c}{3(m_b+m_c)M_b^2} + \frac{m_b^2}{4M_b^4} + (b\leftrightarrow c) + \frac{m_b^2+m_c^2-m_bm_c/2-t}{3M_b^2M_c^2}\right) \\ &+ 8\pi\frac{C_F}{N}\alpha_s\langle\bar{q}q\rangle\left(\frac{1}{3(m_b+m_c)M_b^2} - \frac{m_b(m_b+2m_c)}{36(m_b+m_c)M_b^4} - \frac{m_b^3}{72M_b^6}\right. \\ &\left.- \frac{m_b(m_b^2+m_c^2-m_bm_c/2-t)}{36M_b^4M_c^2} + (b\leftrightarrow c) - \frac{m_b^2+m_c^2-m_bm_c/2-2t}{9(m_b+m_c)M_b^2M_c^2}\right)\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

Выражение для формфактора $f_+(t)$, получаемое из правила сумм (3.2.44), содержит два произвольных Борелевских параметра M_b^2 и M_c^2. В области применимости правила сумм значение $f_+(t)$ не должно зависеть от этих параметров. Для его применимости необходимо, во–первых, чтобы ряд степенных поправок достаточно быстро сходился, чтобы можно было ограничиться несколькими первыми его членами. Во–вторых, мы заменили вклад континуума грубой моделью (3.2.43). Чтобы это приближение не сказалось существенно на точности правила сумм, вклад континуума в $f_+(t)$ должен быть мал по сравнению с получаемым значением формфактора.

Мы используем стандартные значения конденсатов $\alpha_s{<}\bar{q}q{>}^2 = 1.8 \cdot 10^{-4}\mathrm{GeV}^6$, $m_0^2 = 0.8\mathrm{GeV}^2$ в точке нормировки 500MeV. Выбирая точку нормировки, несколько бо́льшую m_c^2, мы получаем ${<}\bar{q}q{>} = -(260\mathrm{MeV})^3$, $m_0^2 = 0.63\mathrm{GeV}^2$. Для m_b, f_B, s_B и m_c, f_D, s_D мы использовали значения из работы [**122**], в которой использовался тот же метод, что и здесь — релятивистские борелизованные правила сумм.

Рассмотрим сначала правила сумм для $f_+(0)$ и $f'_+(0)$, которые в значительной мере определяют формфактор во всей физической области, поскольку зависимость от t близка к линейной. При $t = 0$ интеграл от ρ_+^{pert} в (3.2.44) вычисляется аналитически, и выражается через интегральные экспоненты. Мы не будем приводить получающееся в результате длинное выражение.

Начнем с простой оценки: возьмем M_b^2, $M_c^2 \to \infty$, что соответствует гипотезе локальной дуальности. Тогда остается вклад теории возмущений и кваркового конденсата ${<}\bar{q}q{>}$. Численно они дают 0.33 и 0.16, соответственно, т. е. $f_+(0) = 0.5$. Конечно, эта оценка не очень надежна.

Правило сумм применимо тогда, когда степенные поправки $m_0^2{<}\bar{q}q{>}$ и $\alpha_s{<}\bar{q}q{>}^2$ малы по сравнению с главным членом ${<}\bar{q}q{>}$. Кроме того, вклад континуума должен быть мал по сравнению с полным результатом. На Рис. 3.7 изображены изолинии степенных поправок и вклада континуума. Вклад поправки $\alpha_s{<}\bar{q}q{>}^2$ не превышает 1%, т. е. она несущественна. Этого и следовало ожидать, поскольку ее вклад в двухточечные правила сумм пренебрежимо мал (§3.1). Рабочая область правила сумм, за которую мы принимаем область, за которую мы принимаем область, ограниченную линиями 50% степенной поправки m_0^2 и 50% вклада континуума, довольно широка. В ее средней части степенная поправка и вклад

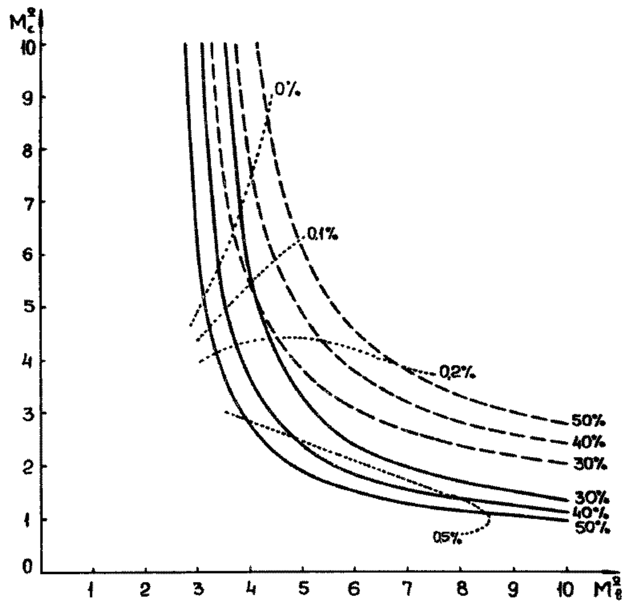


Рис. 3.7. Изолинии вклада степенных поправок размерности 5 (сплошные) и 6 (точечные) по отношению к главному вкладу (размерности 3); изолинии вклада континуума по отношению к полному результату (штриховые).

континуума не превышают 25%. В рабочей области (в отличие от предела M_b^2, $M_c^2 \to \infty$) вклад теории возмущений не превышает 50% от вклада $<\bar{q}q>$.

Если правило сумм применимо, то величина $f_+(0)$ должна быть примерно постоянной в этой рабочей области. Рис. 3.8–3.10 демонстрируют, что действительно имеется хорошее плато, и $f_+(0) = 0.7 \div 0.75$. Реально неопределенность $f_+(0)$ значительно больше, т. к. параметры f_B, f_D и другие известны плохо. Из правила сумм извлекается $f_B f_D f_+(0)$, поэтому после уточнения f_B и f_D неопределенность $f_+(0)$ сильно уменьшиться.

Перейдем к рассмотрению производной $f'_+(0)$, которую запишем в виде $f_+(0)/m_*^2$. Параметр m_*^2 имеет смысл характерного масштаба изменения формфактора, в предположении доминантности векторного $b\bar{c}$ мезона (3.2.39) он равен $m_{b\bar{c}}$. При извлечении m_*^2 из правила сумм сокращаются плохо известные величины f_B, f_D. Вклад теории возмущений здесь также вычисляется аналитически; производная от интеграла содержит член с производной от ρ_+^{pert} и член, обусловленный зависимостью границ области интегрирования (3.2.30) от t. Получаемое выражение еще более громоздко. Вклад конденсатов легко находится

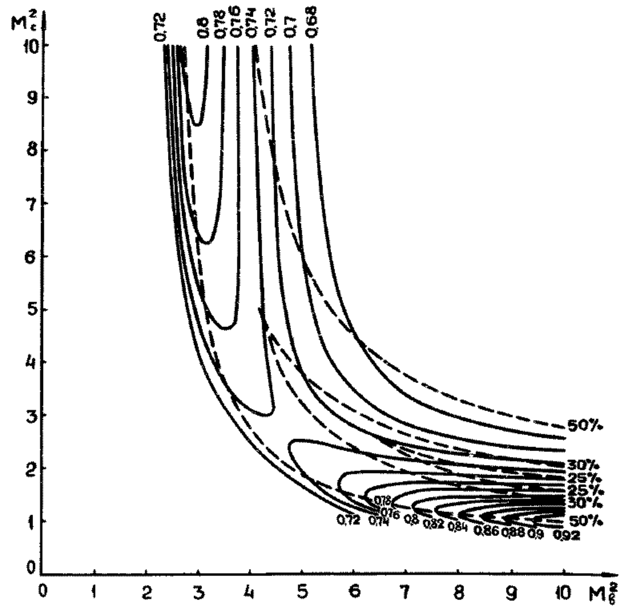


Рис. 3.8. Изолинии $f_+(0)$. Штриховой линией изображена рабочая область правила сумм (50%) и ее наиболее надежная часть (30%). Видно, что имеется перевал и обширное плато с $f_+(0) = 0.72 \pm 0.02$. Стабильность правила сумм нарушается на краях рабочей облвсти — при больших M_b^2 и маленьких M_c^2 (и в меньшей степени при больших M_c^2 и маленьких M_b^2). Вероятно, в этих областях существенны высшие степенные поправки, содержащие высокие степени меньшего из борелевских параметров M_b^2, M_c^2.

дифференцированием формулы (3.2.45). При этом вклад кваркового конденсата $<\overline{q}q>$, который был главным членом в правиле сумм для $f_+(0)$, обращается в ноль. В пределе M_b^2, $M_c^2 \to \infty$ вклад в $f'_+(0)$ дает только диаграмма теории возмущений; используя $f_+(0)$ в этом же пределе, мы получаем $m_* = 5.3\mathrm{GeV}$.

Из–за случайного обращения в ноль главного члена, мы не можем обоснованно определить область хорошей сходимости ряда степенных поправок. Ясно, что эта область не может ограничиваться поправкой размерности 6, роль которой в рассматриваемой задаче совершенно пренебрежима. Фактически поправки размерностей 5 и 6 являются первыми (после главного члена размерности 3) членами разных рядов степенных поправок, каждый из которых по отдельности должен хорошо сходиться. Однако разные правила сумм для

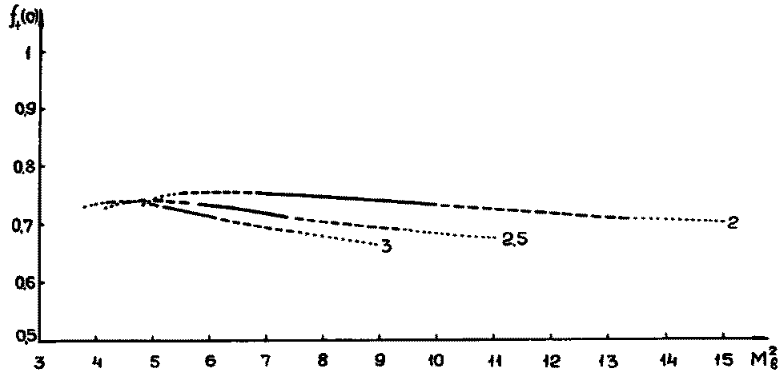


Рис. 3.9. Зависимость $f_+(0)$ от M_b^2 при нескольких значениях M_c^2 (указанных около кривых). Сплошные кривые — область, где степенная поправка и вклад континуума не превышают 30%, штриховые — 40%, точечные — 50%.

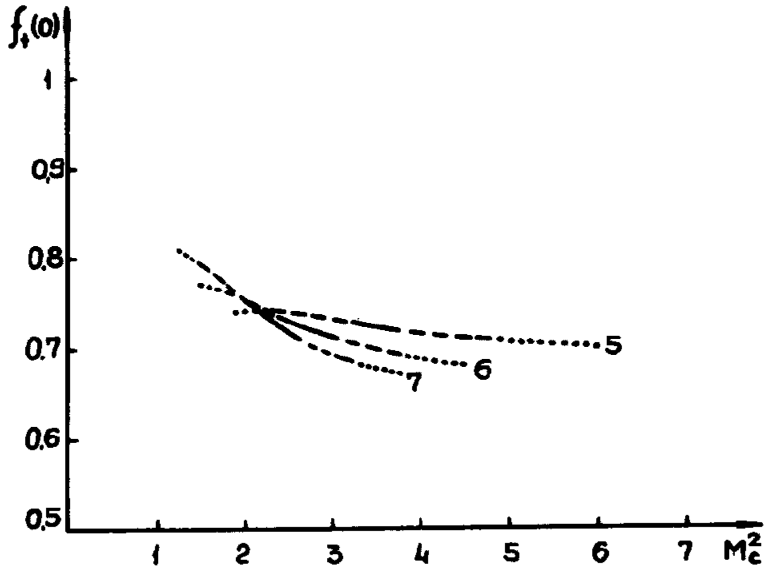


Рис. 3.10. Зависимость $f_+(0)$ от M_c^2 при нескольких значениях M_b^2.

одной физической задачи должны иметь примерно одинаковую область применимости. Физические малые параметры разложения в обоих случаях одни и те же, несмотря на случайные обращения в ноль некоторых коэффициентов. Поэтому мы приводим на Рис. 3.11–3.13 графики m_* в той же области, что и в случае правила сумм для $f_+(0)$. В качестве $f_+(0)$

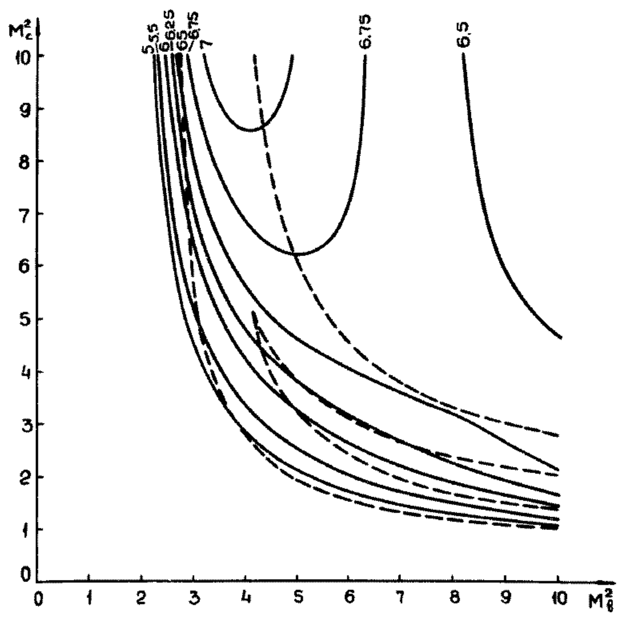


Рис. 3.11. Изолинии m_*. Штриховой линией изображена рабочая область правила сумм для $f_+(0)$. Видно, что имеется обширное плато с $m_* = 6 \div 6.5\mathrm{GeV}$. Как и в случае $f_+(0)$, стабильность правила сумм нарушается, когда одна из борелевских масс велика, а другая мала. Плато расположено при несколько бо́льших M_b^2, M_c^2, чем в случае $f_+(0)$. Вероятно, это свидетельствует о большей роли степенных поправок в правиле сумм для $f'_+(0)$.

в каждой точке M_b^2, M_c^2 берется значение, полученное из правила сумм в этой же точке. Из рисунка видно, что m_* согласуется с массой векторного $b\overline{c}$ мезона $m_{b\overline{c}} \approx 6.3\mathrm{GeV}$ с точностью $\pm(0.5 \div 1)\mathrm{GeV}$.

Обычное дисперсионное представление (3.2.41) неприменимо при $t > 0$. Однако точка $t = 0$ не является особой для $f_+(t)$. Если считать, формула (3.2.44) применима в некоторой области борелевских параметров при $t \leq 0$, то можно аналитически продолжить ее в область положительных t. Это эквивалентно вычислению $f_+(0)$, $f'_+(0)$ и всех высших производных из правил сумм при этих M_b^2, M_c^2. Такая экстраполяция заведомо теряет применимость, когда точка касания (3.2.31) достигает области интегрирования R. Это происходит при

$$t^* = (m_b^2 - m_c^2)\frac{1 + x - \sqrt{1+2x}}{x}\,, \quad x = \frac{2(m_b^2 - m_c^2)s_D}{(s_d + m_c^2)^2}\,, \quad t^* \approx 15\mathrm{GeV}^2\,, \qquad (3.2.46)$$

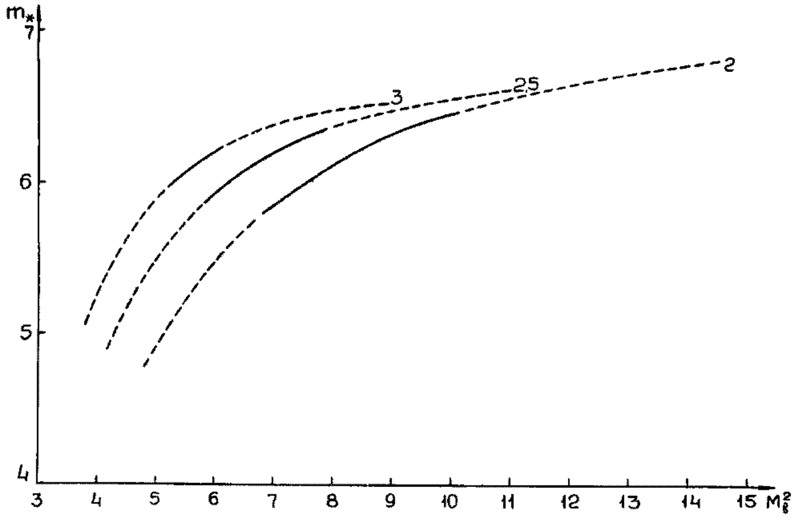


Рис. 3.12. Зависимость m_* от M_b^2 при нескольких значениях M_c^2. Сплошные линии — область, где степенная поправка и вклад континуума в правиле сумм для $f_+(0)$ не превышают 30%, штриховые — 50%.

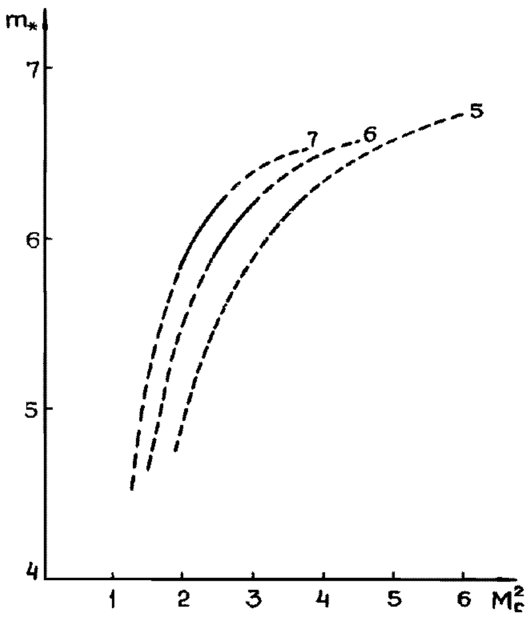


Рис. 3.13. Зависимость m_* от M_c^2 при нескольких значениях M_b^2.

т. е. несколько правее $t_{\max} \approx 11.6\text{GeV}^2$. На Рис. 3.14 изображены кривые $f_+(t)$, полученные при нескольких M_b^2, M_c^2. Они неплохо согласуются с изображенной там же кривой, следующей из доминантности векторного $b\bar{c}$ мезона и значения $f_+(t_{\max})$ (3.2.38). Если уменьшить

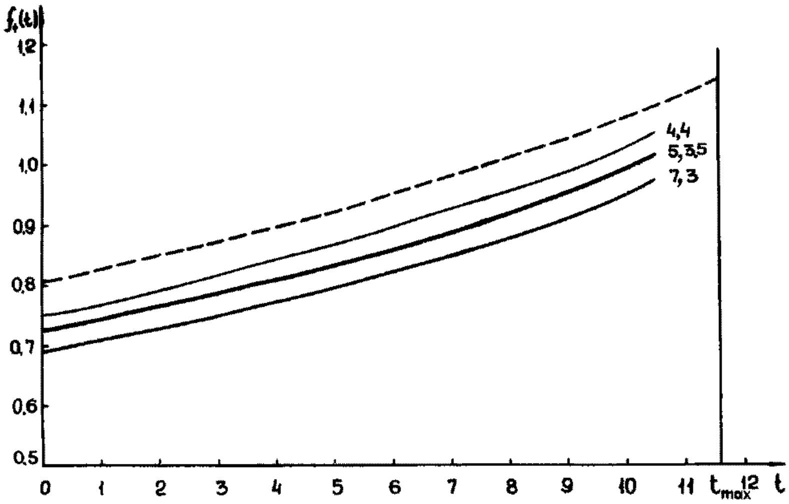


Рис. 3.14. Формфактор $f_+(t)$: штриховая кривая — по формулам (3.2.38), (3.2.39); сплошные линии — правило сумм (3.2.44) при нескольких M_b^2, M_c^2. Результаты для всех M_b^2, M_c^2 из средней части рабочей области близки к жирной кривой.

$f_B f_D$ на 10% (что вполне возможно с учетом их точности), согласие станет практически полным.

Теперь мы проследим, как правила сумм КХД в пределе больших масс воспроизводят структуру формфакторов, следующую из HQET, и получим правила сумм для $1/m$ поправочных формфакторов. Для этого удобно использовать определения формфакторов, не содержащие масс. Матричные элементы векторного тока для $B \to D^{(*)}$ распадов

$$\begin{aligned} &<D|V^\mu|B> = \sqrt{m_B m_D}\left(\xi_+(v+v')^\mu + \xi_-(v-v')^\mu\right) , \\ &<D^*|V^\mu|B> = \sqrt{m_B m_{D^*}}\xi_V i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}e_\nu^* v'_\alpha v_\beta \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

в ведущем порядке по $1/m$ выражаются через формфактор Исгура–Вайса: $\xi_+ = \xi_V = \xi(\cosh\vartheta)$, $\xi_- = 0$, где $\cosh\vartheta = vv'$, v, v' — 4–скорости B, $D^{(*)}$, $\xi(1) = 1$ [**56**]. Первые $1/m_{b,c}$ поправки содержат 4 новые функции [**139**]:

$$\xi_+ = \xi\left[1 + \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_b}\right)\rho_1\right] , \quad \xi_- = \xi\left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_b}\right)\left(-\frac{\varepsilon_0}{2} + \rho_4\right) , \tag{3.2.48}$$

$$\xi_V = \xi\left[1 + \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_b}\right)\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\rho_2}{m_c} + \frac{\rho_1 - \rho_4}{m_b}\right] ,$$

где энергия основного состояния в HQET $\varepsilon_0 = m_B - m_b = m_D - m_c = m_{D^*} - m_c$ (эти разности равны с точностью до $1/m$ поправок). Здесь $\rho_1 = \chi_1 - 2(\cosh\vartheta - 1)\chi_2 + 6\chi_3$, $\rho_2 = \chi_1 - 2\chi_3$, $\rho_4 = \xi_3$ (см. определения в §4.1). Теорема Люка [**139, 140**] утверждает, что $\rho_1(1) = 0$, $\rho_2(1) = 0$.

Чтобы рассмотреть предел $m_{b,c} \to \infty$, мы перейдем к новым переменным $p_{b,c}^2 = m_{b,c}^2 + 2m_{b,c}\omega_{b,c}$, $t = m_b^2 + m_c^2 - 2m_b m_c \cosh\vartheta$. В этих переменных носитель пертурбативной спектральной плотности (3.2.49) является клином

$$e^{-\vartheta} < \omega_b/\omega_c < e^{\vartheta} \,. \tag{3.2.49}$$

При $t > 0$ парабола, на которой сингулярны спектральные плотности, касается границы физической области (3.2.49) в точке (3.2.31)

$$\omega_b^* = \frac{m_b m_c \sinh\vartheta}{t}\left(m_b - m_c e^{-\vartheta}\right) \,, \quad \omega_c^* = \frac{m_b m_c \sinh\vartheta}{t}\left(-m_c + m_b e^{\vartheta}\right) \,. \tag{3.2.50}$$

В пределе $m_{b,c} \to \infty$, эта точка уходит на бесконечность, и потому лежит вне области дуальности низшего мезона, которая существенна для правил сумм.

Производя двойное преобразование Бореля от переменных $\omega_{b,c}$ к $E_{b,c}$, мы получаем КХД правила сумм (при конечных $m_{b,c}$)

$$\begin{aligned}
&\frac{f_B m_B^2}{m_b}\frac{f_D m_D^2}{m_c}\xi_\pm(\cosh\vartheta)e^{-(\varepsilon_B+\varepsilon_D)/(2E)}\\
&= \frac{2m_b m_c}{\sqrt{m_B m_D}}\Bigg\{\int\left[(m_B \pm m_D)\rho_+ + (m_B \mp m_D)\rho_-\right]e^{-(\omega_b+\omega_c)/(2E)}d\omega_b d\omega_c\\
&\quad + 4E^2\hat{B}\left[(m_B \pm m_D)K_+^q + (m_B \mp m_D)K_-^q\right]\Bigg\} \,,
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{f_B m_B^2}{m_b}f_{D^*}m_{D^*}\xi_V(\cosh\vartheta)e^{-(\varepsilon_B+\varepsilon_{D^*})/(2E)}\\
&= 8m_b m_c\sqrt{m_B m_{D^*}}\left\{\int\rho_V e^{-(\omega_b+\omega_c)/(2E)}d\omega_b d\omega_c + 4E^2\hat{B}K_V^q\right\} \,,
\end{aligned}$$

где мы положили $E_b = E_c = 2E$; $m_B^2 = m_b^2 + 2m_b\varepsilon_B$, и аналогично для $D^{(*)}$. Интегралы вычисляются по части клина (3.2.49), дуальной низшему мезону в обоих каналах, т. е. по клину минус область континуума высших состояний. Удобно ввести переменные ω, η вместо $\omega_{b,c} = \omega\left(1 \pm \eta\tanh^2\frac{\vartheta}{2}\right)$, так что физическая область (3.2.49) соответствует $-1 < \eta < 1$, и измерять величины с размерностью энергии (такие, как E) в единицах k, $k^3 =$

$\frac{\pi^2}{6}\,|{<}\bar{q}q{>}|$ $(m_0 = 4kE_0)$. Разлагая до первого порядка по $1/m_{b,c}$, мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{f_B m_B^2 f_D m_D^2}{(m_b m_c)^{3/2}|{<}\bar{q}q{>}|} e^{-(\varepsilon_B+\varepsilon_D)/(2E)} \xi_+(\cosh\vartheta) =& A(\vartheta, E) + \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_b}\right) kB_1(\vartheta, E)\,,\\
\frac{f_B m_B^2 f_D m_D^2}{(m_b m_c)^{3/2}|{<}\bar{q}q{>}|} e^{-(\varepsilon_B+\varepsilon_D)/(2E)} \xi_-(\cosh\vartheta) =& \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_b}\right)\left[-\frac{\varepsilon_0}{2}A(\vartheta, E) + kB_4(\vartheta, E)\right]\,,\\
\frac{f_B m_B^2 f_{D^*} m_{D^*}}{m_b^{3/2} m_c^{1/2}|{<}\bar{q}q{>}|} e^{-(\varepsilon_B+\varepsilon_D)/(2E)} \xi_V(\cosh\vartheta) =& \left[1 + \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_b}\right)\frac{\varepsilon_0}{2}\right] A(\vartheta, E) \qquad (3.2.52)\\
&+ \frac{kB_2(\vartheta, E)}{m_c} + \frac{k\left(B_1(\vartheta, E) - B_4(\vartheta, E)\right)}{m_b}\,.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A(\vartheta, E) =& \frac{1}{4\cosh^4\frac{\vartheta}{2}} \int \omega^2 e^{-\omega/E} d\eta d\omega + 1 - \frac{2\cosh\vartheta + 1}{3}\frac{E_0^2}{E^2} + \frac{\alpha_s \cosh\vartheta}{27\pi E^3}\,,\\
B_1(\vartheta, E) =& \frac{1}{16\cosh^6\frac{\vartheta}{2}} \int \left(\cosh\vartheta - 5 - \eta^2\cosh\vartheta + \eta^2\right)\omega^3 e^{-\omega/E} d\eta d\omega\\
&+ 2\frac{E_0^2}{E} + \frac{\alpha_s(4\cosh\vartheta - 1)}{27\pi E^2}\,, \qquad (3.2.53)\\
B_2(\vartheta, E) =& -\frac{1}{8\cosh^6\frac{\vartheta}{2}} \int (3 - \eta^2)\omega^3 e^{-\omega/E} d\eta d\omega - \frac{8\alpha_s}{27\pi E^2}\,,\\
B_3(\vartheta, E) =& \frac{1}{8\cosh^4\frac{\vartheta}{2}} \int (1 - \eta^2)\omega^3 e^{-\omega/E} d\eta d\omega + \frac{2E_0^2}{3E} + \frac{\alpha_s(4\cosh\vartheta + 1)}{27\pi E^2}\,.
\end{aligned}$$

Подобное разложение двухточечных правил сумм дает

$$\begin{aligned}
\frac{f_D^2 m_D^4}{m_c^3|{<}\bar{q}q{>}|} e^{-\varepsilon_D/E} &= A(0, E) + \frac{2kB_1(0, E)}{m_c}\,, \qquad (3.2.54)\\
\frac{f_{D^*}^2 m_{D^*}^2}{m_c|{<}\bar{q}q{>}|} e^{-\varepsilon_{D^*}/E} &= A(0, E) + \frac{2kB_2(0, E)}{m_c}
\end{aligned}$$

(правило сумм для f_B подобно случаю f_D). Из (3.2.52) и (3.2.54) мы получаем правила сумм для $\xi(\cosh\vartheta)$ [**130, 131**] и для $\rho_{1,2,4}(\cosh\vartheta)$

$$\begin{aligned}
\xi(\cosh\vartheta) = \frac{A(\vartheta, E)}{A(0, E)}\,, \quad \rho_1(\cosh\vartheta)/k = \frac{B_1(\vartheta, E)}{A(\vartheta, E)} - \frac{B_1(0, E)}{A(0, E)}\,, \qquad (3.2.55)\\
\rho_2(\cosh\vartheta)/k = \frac{B_2(\vartheta, E)}{A(\vartheta, E)} - \frac{B_2(0, E)}{A(0, E)}\,, \quad \rho_4(\cosh\vartheta)/k = \frac{B_4(\vartheta, E)}{A(\vartheta, E)}\,.
\end{aligned}$$

Результаты $1/m$ разложения КХД правил сумм удовлетворяют структуре (3.2.48) и теореме Люка. Легко объяснить, почему $\rho_1(1) = 0$. При конечных $m_b = m_c$, $q \to 0$ трехточечный коррелятор связан с двухточечным коррелятором тождеством Уорда (3.2.33), и потому КХД правило сумм воспроизводит точный результат $\xi_+(t=0)=1$. При бесконечных $m_{b,c}$, тождество Уорда (3.2.11) дает $K(\omega,\omega)=\frac{d\Pi(\omega)}{d\omega}$, и потому HQET правило сумм воспроизводит точный результат $\xi(1)=1$. Значит, из (3.2.48) следует $\rho_1(1)=0$. Поэтому не случайно, что $1/m$ поправка в правиле сумм для f_D (3.2.54) описывается той же функцией B_1, что и в правиле сумм для ξ_+ (3.2.52), только при $\vartheta=0$. Подобный факт для правила сумм для f_{D^*} (3.2.54) и $1/m_c$ поправки к ξ_V (3.2.52) выглядит как чудо в рамках КХД правил сумм, но он ведет к теореме Люка для ρ_2 в (3.2.55). Зависимость между $1/m_b$ поправкой к ξ_V и $1/m$ поправками к $\xi_\pm$ в (3.2.52) — это еще одно чудо. Из (3.2.54) мы получаем (подобно [**124**])

$$f_D=\frac{2\tilde{f}}{\sqrt{m_c}}\left(1+\frac{c_1}{m_c}\right)\,,\quad f_{D^*}=\frac{2\tilde{f}}{\sqrt{m_c}}\left(1+\frac{c_2}{m_c}\right)\,,\tag{3.2.56}$$

где коэффициенты даются правилами сумм

$$\frac{4\tilde{f}^2}{|\langle\overline{q}q\rangle|}e^{-\varepsilon_0/E}=A(0,E)\,,\quad c_1/k=\frac{B_1(0,E)}{A(0,E)}-2\varepsilon_0/k\,,\quad c_2/k=\frac{B_2(0,E)}{A(0,E)}-\varepsilon_0/k\,.\tag{3.2.57}$$

При стандартных значениях конденсатов, $k=260$–280MeV, $E_0=\frac{m_0}{4k}=0.85$. Двухточечное правило сумм (3.2.57) для $\tilde{f}^2$ было проанализировано в [**119**]. Порог континуума равен $\varepsilon_c=3$, а энергия мезона $\varepsilon_0=1.65$ в области плато по борелевскому параметру $E=1.7$–2.5 (все в единицах k). Известно, что пертурбативная поправка к этим результатам велика (§3.1). Но эта поправка неизвестна в трехточечном КХД правиле сумм. Можно надеяться, что она частично скомпенсируется в отношении трехточечного правила сумм к двухточечному. Для согласованности, мы используем двухточечные результаты без пертурбативных поправок как входные данные для анализа трехточечных правил сумм. В любом случае, даже грубая оценка ρ_i представляет интерес.

В случае трехточечных правил сумм, например, для $\xi(\cosh\vartheta)$ (3.2.55), спектральная плотность континуума высших состояний моделируется пертурбативной спектральной плотностью с некоторой гладкой кривой в качестве порога континуума (Рис. 3.15). При $\vartheta\to 0$ клин становится бесконечно узким, и континуум начинается в точке ε_c для согласованности с двухточечными правилами сумм. Площадь клина $\sim\vartheta$, поэтому спектральная плотность должна быть $\sim 1/\vartheta$, чтобы дать пертурбативный вклад ~ 1 (конечно, явное вычисление подтверждает это). Простейшая модель континуума — с прямолинейным порогом. Если вместо этого выбрать какую–нибудь гладкую кривую, то изменение площади

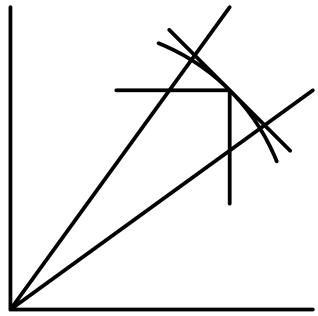


Рис. 3.15. Модели континуума.

будет $\sim \vartheta^3$ (Рис. 3.15), и изменение $\xi(\cosh\vartheta)$ будет $\sim \vartheta^2$. Это влияет на наклон $\xi(\cosh\vartheta)$ в 1; эта свобода аналогична свободе выбора порога континуума в двухточечном правиле сумм (3.2.57) для $\tilde{f}^2$, и не должна быть особенно значительной, если выполнены условия применимости правила сумм. Но если выбрать порог континуума с изломом в физической области (как в [**130**]), то разность площадей будет $\sim \vartheta^2$ (Рис. 3.15), и изменение $\xi(\cosh\vartheta)$ будет $\sim \vartheta$. Это дает бесконечный наклон $\xi(\cosh\vartheta)$ в 1, что противоречит его аналитическим свойствам. Кроме того, нет никаких физических причин, чтобы порог континуума был негладким. Мы ограничимся простейшей моделью континуума с прямолинейным порогом [**132**]; зависимость от кривизны порога рассматривалась в [**131**].

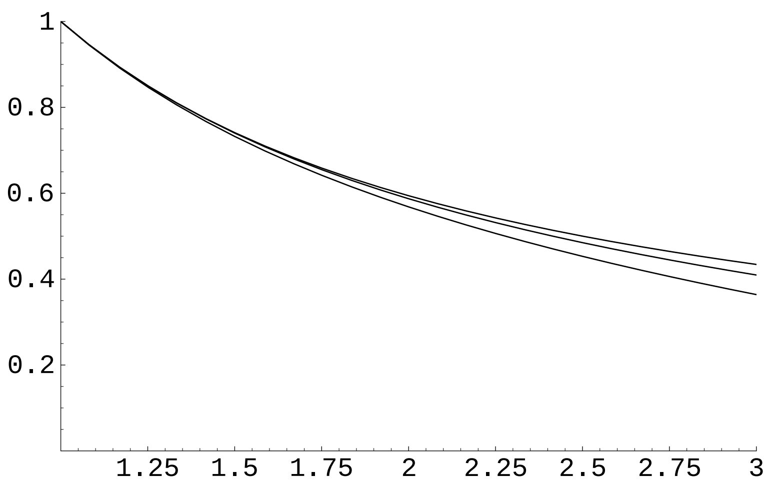


Рис. 3.16. Формфактор Исгура–Вайса $\xi(\cosh\vartheta)$ при значениях борелевского параметра $E = 1.7$, 2 и 2.5.

Правило сумм для $\xi(\cosh\vartheta)$ хорошо известно [**130, 131**]. Оно содержит два вклада: пертурбативный и кваркового конденсата. Вклад кваркового конденсата постоянен (с точностью до эффектов нелокальности, обсуждавшихся в [**130**]). Пертурбативный вклад содержит пропагатор легкого кварка из точки x_c в точку x_b, и падает как $1/(x_b - x_c)^4$. Евклидовы расстояния от 0 до x_b и от 0 до x_c равны $1/(2E)$; угол между этими линиями ϑ. Поэтому расстояние от x_b до x_c равно $\cosh\frac{\vartheta}{2}/E$. Пертурбативный вклад подавлен как $1/\cosh^4\frac{\vartheta}{2}$ по сравнению с двухточечным (прямолинейным) случаем. Это ведет к убыванию $\xi(\cosh\vartheta)$ с ростом ϑ. Графики $\xi(\cosh\vartheta)$ при нескольких значениях борелевского параметра показаны на Рис. 3.16; видна замечательная стабильность.

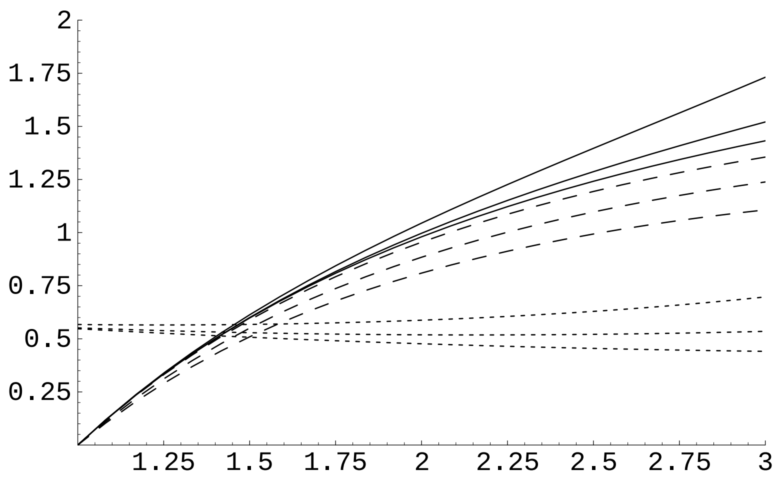


Рис. 3.17. $1/m$ поправочные формфакторы $\rho_1(\cosh\vartheta)/k$ (сплошные кривые), $\rho_2(\cosh\vartheta)/k$ (штриховые кривые) и $\rho_4(\cosh\vartheta)/k$ (точечные кривые) при значениях борелевского параметра $E = 1.7$, 2 и 2.5.

Теперь приведем результаты для $1/m$ поправочных формфакторов $\rho_{1,2,4}(\cosh\vartheta)$. Из правил сумм (3.2.55) видно, что их масштаб задается единицей $k = \left(\frac{\pi^2}{6}|<\overline{q}q>|\right)^{1/3} = 260$–280MeV. Безразмерные функции в правилах сумм не содержат больших численных множителей. Численный анализ подтверждает это заключение; результаты показаны на Рис. 3.17. Кривые $\rho_{1,2}(\cosh\vartheta)$ пришпилены в начале координат теоремой Люка; при $\cosh\vartheta > 1$ они растут и достигают значений порядка k. С другой стороны, $\rho_4(\cosh\vartheta)$ мала и примерно постоянна. Вариации результатов с изменением борелевского параметра E позволяют оценить их точность.

3.3. Барионы

Для барионов в основном состоянии, спины легких кварков могут сложиться в $j^P = 0^+$ или 1^+. В первом случае их спиновая волновая функция антисимметрична; статистика Ферми и антисимметрия по цвету требуют антисимметричной флейворной волновой функции. Поэтому легкие кварки должны быть разными; если это u, d, то изоспин $I = 0$. При выключенном спине тяжелого кварка мы имеем 0^+ $I = 0$ барион Λ_Q. Если один из легких кварков s, мы получаем изодублет Ξ'_Q, образующий вместе с Λ_Q антитриплет $SU(3)$. В случае 1^+ флейворная волновая функция симметрична; если легкие кварки это u, d, то изоспин $I = 1$. Поэтому мы имеем 1^+ изотриплет Σ_Q; с одним s кварком — изодублет Ξ_Q; с двумя s кварками — изосинглет Ω_Q. Вместе они образуют секстет $SU(3)$. При включенном спине тяжелого кварка, скалярные барионы Λ_Q, Ξ'_Q становятся $\frac{1}{2}^+$; векторные барионы превращаются в вырожденные $\frac{1}{2}^+$, $\frac{3}{2}^+$ дублеты Σ_Q, Σ^*_Q; Ξ_Q, Ξ^*_Q; Ω_Q, Ω^*_Q.

Барионные токи со скалярным тяжелым кварком имеют вид $\tilde{\jmath}_s = \varepsilon^{abc}(q^{Ta}C\Gamma\tau q^b)\widetilde{Q}^c_s$, где q^T означает q транспонированное, а C — матрица зарядового сопряжения (поскольку $q^T C$ преобразуется как $\overline{q}$ под действием группы Лоренца). Здесь τ — флейворная матрица, симметричная для 0^+ барионов и антисимметричная для 1^+. Мы будем сокращенно записывать его в виде $\tilde{\jmath}_s = (q^T C\Gamma q)\widetilde{Q}_s$. Легкая кварковая пара с $j^P = 0^+$ соответствует току $a = q^T C\gamma_5 q$, а с 1^+ — $\vec{a} = q^T C\vec{\gamma} q$ (это легко проверить, используя P–сопряжение $q \to \gamma_0 q$). Можно также вставить γ_0 в эти токи, не меняя их квантовых чисел. Поэтому токи со скалярным тяжелым кварком с квантовыми числами Λ_Q, Σ_Q есть $\tilde{\jmath}_{\Lambda s} = a\widetilde{Q}_s$, $\vec{\tilde{\jmath}}_{\Sigma s} = \vec{a}\widetilde{Q}_s$.

С реальным спином $\frac{1}{2}$ тяжелого кварка, ток $\tilde{\jmath} = a\widetilde{Q}$ имеет спин $\frac{1}{2}$; ток $\vec{\tilde{\jmath}} = \vec{a}\widetilde{Q}$ содержит компоненты со спинами $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$. Часть $\vec{\tilde{\jmath}}_{3/2} = \vec{\tilde{\jmath}} + \frac{1}{3}\vec{\gamma}\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\tilde{\jmath}}$ удовлетворяет условию $\vec{\gamma}\cdot\vec{\tilde{\jmath}}_{3/2} = 0$, и потому имеет спин $\frac{3}{2}$. Другая часть $\vec{\tilde{\jmath}}_{1/2} = -\frac{1}{3}\vec{\gamma}\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\tilde{\jmath}} = \frac{1}{3}\vec{\gamma}\gamma_5\tilde{\jmath}_{1/2}$, $\tilde{\jmath}_{1/2} = \vec{a}\cdot\vec{\gamma}\,\gamma_5\widetilde{Q}$ имеет спин $\frac{1}{2}$. Окончательно мы получаем токи $\tilde{\jmath} = (q^T C\Gamma q)\Gamma'\widetilde{Q}$ с квантовыми числами Λ_Q, Σ_Q, Σ^*_Q

$$\tilde{\jmath}_{\Lambda 1} = (q^T C\gamma_5 q)\widetilde{Q}\,, \quad \tilde{\jmath}_{\Sigma 1} = (q^T C\vec{\gamma} q)\cdot\vec{\gamma}\,\gamma_5\widetilde{Q}\,, \quad \vec{\tilde{\jmath}}_{\Sigma^* 1} = (q^T C\vec{\gamma} q)\widetilde{Q} + \frac{1}{3}\vec{\gamma}(q^T C\vec{\gamma} q)\cdot\vec{\gamma}\widetilde{Q}\,, \tag{3.3.1}$$

и подобные токи $\tilde{\jmath}_{\Lambda 2}$, $\tilde{\jmath}_{\Sigma 2}$, $\vec{\tilde{\jmath}}_{\Sigma^* 2}$ с дополнительной γ_0 внутри скобки.

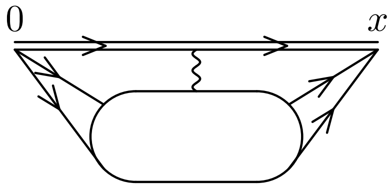


Рис. 3.18. Коррелятор двух HQET барионных токов.

Корреляторы двух барионных токов со скалярным тяжелым кварком имеют структуру (Рис. 3.18)

$$i{<}T\tilde{\jmath}_{\Lambda s}(x)\tilde{\jmath}^{+}_{\Lambda s}(0){>} = \delta(\vec{x})\,\mathrm{Tr}\,\tau^{+}\tau\,\Pi_{\Lambda}(x_0)\,, \quad i{<}T\tilde{\jmath}_{\Sigma si}(x)\tilde{\jmath}^{+}_{\Sigma sj}(0){>} = \delta_{ij}\delta(\vec{x})\,\mathrm{Tr}\,\tau^{+}\tau\,\Pi_{\Sigma}(x_0)\,. \tag{3.3.2}$$

В дальнейшем мы будем для простоты подразумевать нормировку $\mathrm{Tr}\,\tau^{+}\tau = 1$. Если мы обозначим ${<}0|\tilde{\jmath}_{\Lambda}|\Lambda_Q, 0^{+}{>} = \tilde{f}_{\Lambda,0^{+}}$, ${<}0|\vec{\tilde{\jmath}}_{\Sigma}|\Sigma_Q, 1^{+}{>} = \tilde{f}_{\Sigma,1^{+}}\vec{e}$, то барионный вклад в $\rho_{\Lambda,\Sigma}(\omega)$ равен $\tilde{f}^{2}_{\Lambda,\Sigma}\delta(\omega-\varepsilon_{\Lambda,\Sigma})$.

Теперь включим спин тяжелого кварка. Корреляторы равны (Рис. 3.18)

$$\Pi = \left(\Gamma'_1 \frac{1+\gamma_0}{2} \overline{\Gamma}'_2\right) \Pi_s\,, \tag{3.3.3}$$

где могут быть свертки по тензорным индексам между Π_s и $\Gamma'_{1,2}$. Такие же соотношения выполняются для $\Pi(t)$, $\Pi(\omega)$ и $\rho(\omega)$. Для Λ_Q, Σ_Q, Σ^{*}_Q мы получаем

$$\begin{aligned} &\rho_{\Lambda} = \frac{1+\gamma_0}{2}\rho_{\Lambda s}\,, \quad \rho_{\Sigma} = \gamma_i\gamma_5\frac{1+\gamma_0}{2}\gamma_j\gamma_5\delta_{ij}\rho_{\Sigma s} = 3\frac{1+\gamma_0}{2}\rho_{\Sigma s}\,, \\ &\rho_{\Sigma^{*}} = \left(\delta_{ii'} - \frac{1}{3}\gamma_i\gamma_{i'}\right)\frac{1+\gamma_0}{2}\left(\delta_{jj'} - \frac{1}{3}\gamma_j\gamma_{j'}\right)\delta_{i'j'}\rho_{\Sigma s} = \frac{1+\gamma_0}{2}\left(\delta_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_i\gamma_j\right)\rho_{\Sigma s}\,. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Если мы обозначим ${<}0|\tilde{\jmath}_{\Lambda}|\Lambda_Q, \frac{1}{2}^{+}{>} = \tilde{f}_{\Lambda,\frac{1}{2}^{+}}u$, ${<}0|\tilde{\jmath}_{\Sigma}|\Sigma_Q, \frac{1}{2}^{+}{>} = \tilde{f}_{\Sigma,\frac{1}{2}^{+}}u$, ${<}0|\vec{\tilde{\jmath}}_{\Sigma^{*}}|\Sigma^{*}_Q, \frac{3}{2}^{+}{>} = \tilde{f}_{\Sigma^{*},\frac{3}{2}^{+}}\vec{u}$, то барионные вклады в (3.3.4) равны $\frac{1+\gamma_0}{2}\tilde{f}^{2}_{\Lambda,\frac{1}{2}^{+}}\delta(\omega-\varepsilon_{\Lambda})$, $\frac{1+\gamma_0}{2}\tilde{f}^{2}_{\Sigma,\frac{1}{2}^{+}}\delta(\omega-\varepsilon_{\Sigma})$, $\frac{1+\gamma_0}{2}\left(\delta_{ij}+\frac{1}{3}\gamma_i\gamma_j\right)\tilde{f}^{2}_{\Sigma^{*},\frac{3}{2}^{+}}\delta(\omega-\varepsilon_{\Sigma})$. Поскольку Λ_Q — синглет по спиновой симметрии, в этом канале спиновая симметрия не дает интересных предсказаний. Барионы в каналах Σ_Q и Σ^{*}_Q вырождены: $\varepsilon_{\Sigma,\frac{1}{2}^{+}} = \varepsilon_{\Sigma^{*},\frac{3}{2}^{+}} = \varepsilon_{\Sigma,1^{+}}$, и $\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{f}_{\Sigma,\frac{1}{2}^{+}} = \tilde{f}_{\Sigma^{*},\frac{3}{2}^{+}} = \tilde{f}_{\Sigma,1^{+}}$. Заметим, что обе стороны определения ${<}0|j|B{>} = f_B u$ приобретают один и тот же множитель $\sqrt{2m}$ при переходе от релятивистской нормировки к нерелятивистской. Поэтому КХД величины $f_B = \tilde{f}_B$ не зависят от m (ср. с (3.1.9)).

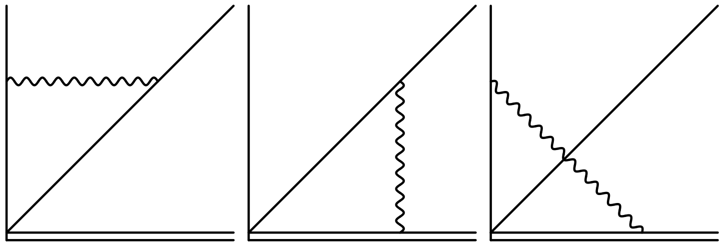


Рис. 3.19. Однопетлевая вершинная функция.

Рассмотрим перенормировку этих токов в одной петле. Неперенормированный ток $\tilde{\jmath}_0 = q_0 q_0 \widetilde{Q}_0 = \widetilde{Z}_j \tilde{\jmath}$, или $qq\widetilde{Q} = \widetilde{Z}_\Gamma \tilde{\jmath}$, где $\widetilde{Z}_j = Z_q \widetilde{Z}_Q^{1/2} \widetilde{Z}_\Gamma$. Тогда матричный элемент $\widetilde{\Gamma} = <0|qq\widetilde{Q}|qq\widetilde{Q}> = \widetilde{Z}_\Gamma <0|\tilde{\jmath}|qq\widetilde{Q}>$, где матричный элемент $\tilde{\jmath}$ конечен. Вычисляя ультрафиолетовую расходимость вершины Γ (Рис. 3.19) в Фейнмановской калибровке, мы получаем $\widetilde{Z}_\Gamma = 1 + C_B \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} \left(\frac{H^2}{4} + 2 \right)$, где $\gamma_\mu \Gamma \gamma^\mu = H\Gamma$, а C_B определено в (0.3). Используя Z_q и $\widetilde{Z}_Q$, мы получаем $\widetilde{Z}_j = \widetilde{Z}_\Gamma$; отсюда аномальные размерности $\tilde{\gamma}_j = \frac{d \log \widetilde{Z}_j}{d \log \mu}$ равны

$$\tilde{\gamma}_j = -C_B \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{H^2}{4} + 2 \right) , \quad \tilde{\gamma}_{\Lambda 1} = -3 C_B \frac{\alpha_s}{\pi} , \quad \tilde{\gamma}_{\Lambda 2} = \tilde{\gamma}_{\Sigma 1} = -\frac{3}{2} C_B \frac{\alpha_s}{\pi} , \quad \tilde{\gamma}_{\Sigma 2} = -C_B \frac{\alpha_s}{\pi} . \tag{3.3.5}$$

Они зависят только от легко–кварковой части тока. Двухпетлевые поправки к (3.3.5) были вычислены в [**116**]. Они зависят от предписания для γ_5. Токи с разными γ_5 связаны друг с другом конечными перенормировками; в одной петле они получаются из мезонных (§2.6) заменой $C_F \to C_B$.

Теперь мы установим сшивку КХД токов с HQET токами. КХД ток $(q^T C \Gamma q) \Gamma' Q$ соответствует эффективному току $A\tilde{\jmath}$, если они имеют одинаковые матричные элементы на массовой поверхности. Мы имеем токи $j = Z_\Gamma^{-1} Z_q^{-1} Z_Q^{-1/2} q_{\mathrm{os}} q_{\mathrm{os}} Q_{\mathrm{os}}$, $\tilde{\jmath} = \widetilde{Z}_\Gamma^{-1} Z_q^{-1} \widetilde{Z}_Q^{-1/2} q_{\mathrm{os}} q_{\mathrm{os}} \widetilde{Q}_{\mathrm{os}}$. Поэтому матричные элементы имеют вид $<0|j|qqQ> = Z_\Gamma^{-1} Z_q^{-1} Z_Q^{-1/2} \Gamma$, $<0|\tilde{\jmath}|qqQ> = \widetilde{Z}_\Gamma^{-1} Z_q^{-1} \widetilde{Z}_Q^{-1/2} \widetilde{\Gamma}$, где вершины Γ, $\widetilde{\Gamma}$ изображены на Рис. 3.19. Поэтому константа сшивки равна

$$A = A_Q \frac{\Gamma / Z_\Gamma}{\widetilde{\Gamma} / \widetilde{Z}_\Gamma} , \quad A_Q = \left(\frac{\widetilde{Z}_Q}{Z_Q} \right)^{1/2} = 1 + C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{3}{2} L - 2 \right) . \tag{3.3.6}$$

Мы выбираем все импульсы кварков в HQET равными нулю; это соответствует импульсу тяжелого кварка mv в КХД. Тогда петли в HQET обращаются в ноль. Диаграмма Рис. 3.19a не дает вклада в Γ (но дает в Z_Γ). Логарифмические члены в константах сшивки определяются разностями между КХД и HQET аномальными размерностями.

Выбор КХД токов, соответствующих HQET токам (3.3.1), неоднозначен. Мы ограничимся простейшим вариантом с $\Gamma' \to \frac{1+\gamma_0}{2}\Gamma'\frac{1+\gamma_0}{2}$. Если мы обозначим $<(q^T C[\sigma_{\mu\nu},\Gamma]q)\frac{1+\gamma_0}{2}\Gamma'\frac{1+\gamma_0}{2}\sigma^{\mu\nu}Q> = f(d)<j>$, то константа сшивки $A = A_Q\big[1 + C_B\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\frac{f}{4}(L-3)+\frac{1}{2}\frac{df}{d\,d}\right)\big]$. Индексы μ, ν чисто пространственные, поэтому константы сшивки одинаковы для пар токов с $\Gamma \to \gamma_0\Gamma$. Окончательно мы получаем (для антикоммутирующей γ_5)

$$\begin{aligned}
&(q^T C\gamma_5 q)\frac{1+\gamma_0}{2}Q = A_Q\tilde{\jmath}_{\Lambda 1}\,, \qquad (3.3.7)\\
&-(q^T C\gamma_\mu q)\frac{1+\gamma_0}{2}\gamma^\mu\gamma_5\frac{1+\gamma_0}{2}Q = A_Q\left[1 - C_B\frac{\alpha_s}{4\pi}(2L-4)\right]\tilde{\jmath}_{\Sigma 1}\,,\\
&\frac{1}{d-1}(q^T C\gamma_\nu q)\frac{1+\gamma_0}{2}[(d-2)(g^{\mu\nu}-v^\mu v^\nu)-\sigma^{\mu\nu}]\frac{1+\gamma_0}{2}Q = A_Q\left[1 - C_B\frac{\alpha_s}{4\pi}(L-3)\right]\tilde{\jmath}^{\mu}_{\Sigma^* 1}\,.
\end{aligned}$$

Эти уравнения должны использоваться для получения КХД матричных элементов из HQET матричных элементов, полученных, например, из HQET правил сумм.

Теперь мы рассмотрим правила сумм для тяжелых барионов, по аналогии с анализом легких барионов, проведенным в [**141, 142**]. В каждом из каналов $j^P = 0^+$ и 1^+ существуют два диагональных и один недиагональный коррелятор. Операторные разложения диагональных корреляторов содержат члены четных размерностей. Мы учитываем пертурбативный член (Рис. 3.20a, $d=0$); вклад глюонного конденсата (Рис. 3.20b, $d=4$); вклад $<\overline{q}q>^2$ (Рис. 3.20c, $d = 6, 8\ldots$). Диаграмма Рис. 3.20d дает вклад размерности 6; он того же порядка, что и неизвестная радиационная поправка к диаграмме Рис. 3.20c, и мы его не учитываем. Мы используем калибровку фиксированной точки, в которой тяжелый кварк не взаимодействует с глюонами. Мы получаем

$$\Pi_{a+b}(t) = -\frac{N!\,\widetilde{S}(t)}{\pi^4 t^6}\left[1 + c\frac{\pi\alpha_s<G^2>t^4}{32N(N-1)}\right]\,, \quad \Pi_c(t) = \frac{N!\,\widetilde{S}(t)}{4N^2}<\overline{q}(0)q(t)>^2\,. \qquad (3.3.8)$$

Члены Π_{a+b} оказываются тождественными в корреляторах $\tilde{\jmath}_1\tilde{\jmath}_1$ и $\tilde{\jmath}_2\tilde{\jmath}_2$; $c=1$ для Λ_Q и $-\frac{1}{3}$ для $\Sigma_Q^{(*)}$. Мы факторизовали четырехкварковый конденсат в Π_c на два двухкварковых. В этом приближении Π_c также одинаков в обоих диагональных корреляторах (заметим, что

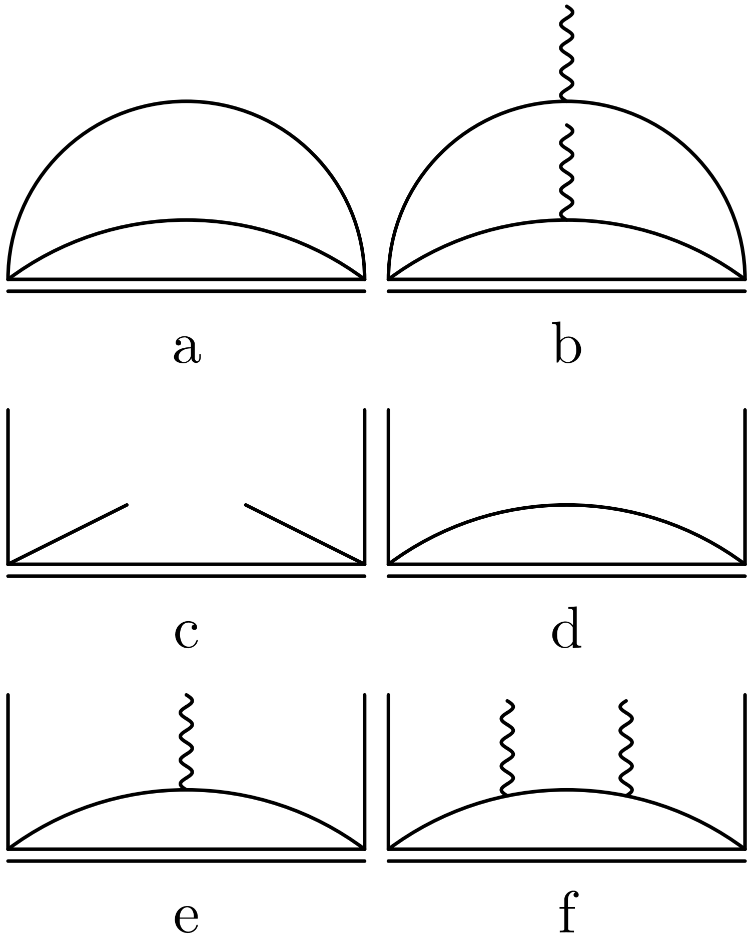


Рис. 3.20. Двухточечный коррелятор.

факторизация [**32**] тщательно проверена только для произведений векторных и аксиальных токов). Эти корреляторы не могут точно совпадать по крайней мере потому, что $\tilde{\jmath}_1$ и $\tilde{\jmath}_2$ имеют разные аномальные размерности (3.3.5).

Нелокальный кварковый конденсат $<\overline{q}(0)q(x)> = <\overline{q}q>\left(1 + \frac{m_0^2 x^2}{16} + \frac{\pi\alpha_s <G^2>}{96N} + \cdots\right)$, где в последнем члене для кварк–глюонных конденсатов размерности 7 использована факторизация. В [**39**] вместо этого был предложен гауссовый анзац $<\overline{q}(0)q(x)> = <\overline{q}q> \exp\left(\frac{m_0^2 x^2}{16}\right)$. Член x^4 в нем примерно в 3 раза больше, чем оценка по факторизации.

Пертурбативный ($d = 0$) и $<\overline{q}q>^2$ ($d = 6$) члены впервые рассматривались в [**119**] Мы согласны с пертурбативным результатом. Член $<\overline{q}q>^2$ в [**119**] имел разные знаки для Λ_Q и Σ_Q, тогда как в (3.3.8) эти знаки совпадают. Поэтому результаты [**119**] о Σ_Q и его отличии от Λ_Q неверны.

Операторное разложение недиагональных корреляторов содержит члены нечетных размерностей. Диаграмма Рис. 3.20d дает члены с $d = 3,\ 5,\ 7\ \ldots$; Рис. 3.20f — $d = 7\ \ldots$. Диаграмма Рис. 3.20c дает член $<\overline{q}q>^3$ размерности 9. Мы получаем

$$\Pi_d(t) = -i\frac{N!<\overline{q}q>\widetilde{S}(t)}{\pi^2 N t^3}\left[1+\frac{m_0^2t^2}{16}+\frac{\pi\alpha_s<G^2>t^4}{96N}\right], \tag{3.3.9}$$
$$\Pi_e(t) = ic\frac{N!<\overline{q}q>\widetilde{S}(t)}{16\pi^2N(N-1)t}\left[m_0^2+\frac{\pi\alpha_s<G^2>t^2}{6N}\right], \quad \Pi_c(t) = i\frac{C_F N!\,\pi\alpha_s<\overline{q}q>\widetilde{S}(t)t^3}{144N^3}.$$

Для кварк–глюонных конденсатов размерности 7 использовано приближение факторизации, поэтому эти члены представляют собой лишь грубую оценку. В этом приближении диаграмма Рис. 3.20f не дает вклада.

Приведем также формулы для спектральных плотностей. Член $\widetilde{S}(t)/t^n$ $(n \geq 1)$ в $\Pi(t)$ дает $i^n\theta(\omega)\omega^{n-1}/(n-1)!$ в $\rho(\omega)$; член $\widetilde{S}(t)t^n$ $(n \geq 0)$ соответствует $(-i)^{n+2}\delta^{(n)}(\omega)$. Для диагональных и недиагональных корреляторов мы получаем

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{d}}(\omega) =& \frac{N!}{\pi^4}\theta(\omega)\left[\frac{\omega^5}{5!}+c\frac{\pi\alpha_s<G^2>\omega}{32N(N-1)}\right]-\frac{N!<\overline{q}q>^2}{4N^2}\left[\delta(\omega)-\frac{m_0^2}{8}\delta''(\omega)+\cdots\right],\\ \rho_{\mathrm{n}}(\omega) =& \frac{N!<\overline{q}q>}{\pi^2N}\left[\theta(\omega)\frac{\omega^2}{2}-\tfrac{1}{16}\left(1-\tfrac{c}{N-1}\right)\left(m_0^2\theta(\omega)+\frac{\pi\alpha_s<G^2>}{6N}\delta'(\omega)\right)\right.\\ &\left.-\frac{C_F\pi^3\alpha_s<\overline{q}q>^3}{144N^2}\delta'''(\omega)\right].\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Мы также проверили ведущие члены в этих формулах прямым применением правил Каткоски в импульсном пространстве.

Мы приравниваем OPE выражения (3.3.8–3.3.9) для $\Pi(\tau)$ дисперсионному представлению (3.1.3) с модельной спектральной плотностью, содержащей низший барион и континуум. Эта процедура эквивалентна нерелятивистским Борелевским правилам сумм [**119**]. Мы принимаем стандартную модель континуума: его спектральная плотность равна теоретической (3.3.10), начиная с порога континуума ε_c (разумеется, члены $\delta^{(n)}(\omega)$ вклада не дают). Таким образом, вклад континуума вычитается из теоретической части правил сумм, оставляя интеграл по интервалу дуальности низшего бариона (до ε_c). Член $\widetilde{S}(t)/t^n$ после вычитания вклада континуума приобретает множитель $\delta_{n-1}(\omega_c\tau)$ (0.15). Поэтому формулы (3.3.10) не являются необходимыми для построения правил сумм.

Два диагональных коррелятора дают одинаковые правила сумм для $<0|\tilde{\jmath}_1|B>$ и $<0|\tilde{\jmath}_2|B>$. Поэтому эти матричные элементы совпадают с принятой точностью. Следуя [**119**], мы вводим безразмерные переменные $\tau = \frac{1}{kE}$, $f^2 = \frac{N!<\overline{q}q>^2}{2N^2}n$, $m_0 = 4kE_0$, $\frac{\pi\alpha_s<G^2>}{32N(N-1)} = (kE_G)^4$, $\varepsilon_c = kE_c$, $\varepsilon_0 = kE_r$, $k^3 = -\frac{\pi^2}{2N}<\overline{q}q>$. Мы получаем правила сумм

$$\begin{aligned} ne^{-E_r/E} =& E^6\left[\delta_5\left(\frac{E_c}{E}\right) + c\frac{E_G^4}{E^4}\delta_1\left(\frac{E_c}{E}\right)\right] + \exp\left(-2\frac{E_0^2}{E^2}\right) \\ =& 2E^3\left[\delta_2\left(\frac{E_c}{E}\right) - \left(1-\tfrac{c}{2}\right)\frac{E_0^2}{E^2}\delta_0\left(\frac{E_c}{E}\right) + \tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{c}{2}\right)\frac{E_G^4}{E^4} + \frac{\alpha_s}{27\pi}\frac{1}{E^6}\right]. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

В диагональном правиле сумм мы использовали гауссовый анзац для нелокального кваркового конденсата. Недиагональное правило сумм используется при бóльших E, где нелокальность не так существенна. Для согласованности, мы использовали оценки, основанные на факторизации, для всех диаграмм Рис. 3.20d–f (включая эффекты нелокальности).

Заметим, что $<0|\tilde{\jmath}_1|B>$ и $<0|\tilde{\jmath}_2|B>$ не могут быть всегда равны, поскольку они имеют разные аномальные размерности; поэтому эффекты аномальных размерностей находятся вне нашего контроля. Мы получаем матричные элементы, нормированные на масштабе типичных Борелевских параметров; если мы хотим иметь их в другой точке нормировки (например, при $\mu = m$ для сшивки с КХД), то мы должны использовать аномальные размерности (3.3.5).

При стандартном значении кваркового конденсата единица энергии $k = 280$MeV. Легкие барионы описываются лучше [**142**], если кварковый конденсат уменьшить на 20%. Это дает $k = 260$MeV; это значение использовалось также в [**119**]. Мы также принимаем его; стандартные значения m_0^2 и $<G^2>$ тогда дают $E_0 = 0.85$, $E_G = 0.60$.

Результаты анализа диагональных правил сумм показаны на Рис. 3.21, 3.22. В выбранном диапазоне Борелевских параметров E, пертурбативный вклад и вклады глюонного и кваркового конденсатов составляют для Λ_Q 60–40%, 25–15% и 30–35%, соответственно. Для $\Sigma_Q^{(*)}$ вклад глюонного конденсата в 3 раза меньше и имеет другой знак. Вклад континуума (который вычитается их теоретической части правила сумм) быстро растет; на правом краю интервала он в несколько раз больше полного результата. Это означает, что относительная ошибка из–за грубой модели континуума умножается на 1–5 в полном результате. С другой стороны, вклад плохо известных высших степенных поправок (с $d \geq 8$)

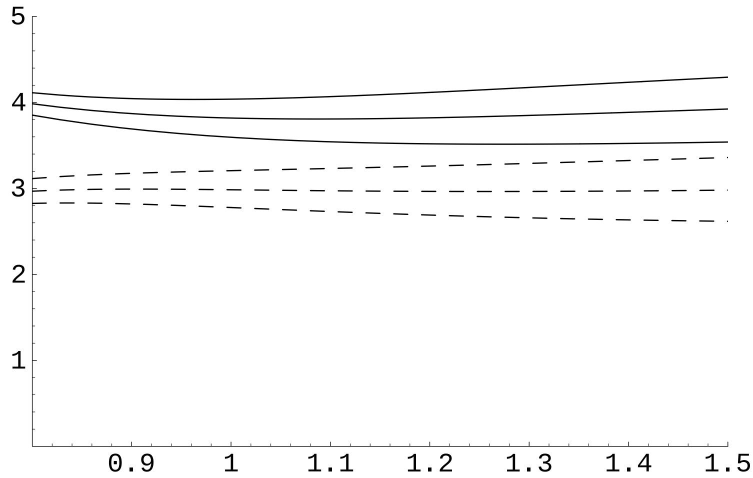


Рис. 3.21. Диагональные правила сумм. E_r как функция E при различных E_c из логарифмической производной правила сумм: сплошные линии — результаты для Λ_Q при $E_c = 4.1$, 4.6, 5.1; пунктирные линии — результаты для $\Sigma_Q^{(*)}$ при $E_c = 5.1$, 5.6, 6.1.

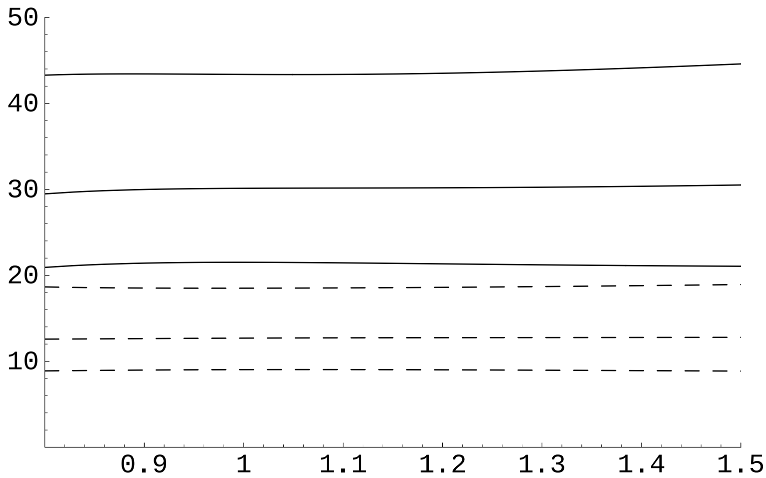


Рис. 3.22. Диагональные правила сумм. n как функция E при различных E_c, E_r: сплошные линии — результаты для Λ_Q при $E_c = 4.1$, $E_r = 2.75$; $E_c = 4.6$, $E_r = 2.95$; $E_c = 5.1$, $E_r = 3.2$; пунктирные линии — результаты для $\Sigma_Q^{(*)}$ при $E_c = 5.1$, $E_r = 3.6$; $E_c = 5.6$, $E_r = 3.8$; $E_c = 6.1$, $E_r = 4.05$.

становится большим на левом краю интервала. А именно, нелокальный кварковый конденсат в этой точке в несколько раз меньше локального, и вклад с $d = 6$ почти полностью компенсируется вкладами с $d \geq 8$. Замечательная стабильность правил сумм в нижней части интервала является косвенным аргументом в пользу гауссова анзаца для нелокального кваркового конденсата (результаты с факторизационным анзацем, например, не столь стабильны в этой области).

Мы получаем

$$\begin{aligned}
\Lambda_Q: &\quad \varepsilon = 780\text{MeV}\,, \quad \omega_c = 1200\text{MeV}\,, \quad f = (1.8\text{–}2.7)\cdot 10^{-2}\text{GeV}^3\,,\\
\Sigma_Q^{(*)}: &\quad \varepsilon = 990\text{MeV}\,, \quad \omega_c = 1460\text{MeV}\,, \quad f = (2.9\text{–}4.1)\cdot 10^{-2}\text{GeV}^3\,.
\end{aligned}$$

Подставляя экспериментальное значение $m_{\Lambda_b} = 5640 \pm 50 \pm 30\text{MeV}$, мы получаем $m_b = 4860\text{MeV}$. Расщепление Λ_b–Σ_b равно 210MeV, в согласии с ожиданиями потенциальной модели 190MeV. Расстояния от низших барионов до порога континуума в каналах Λ_b и Σ_b составляют 420MeV и 470MeV; они примерно соответствуют расстояниям до первых возбужденных состояний в этих каналах, ожидаемых в потенциальной модели: 460MeV и 405MeV.

Результаты [**119**] для Λ_Q есть $\varepsilon = 700\text{MeV}$, $f = 2\cdot 10^{-3}\text{GeV}^3$; это на порядок меньше, чем нужно. Правило сумм для Σ_Q в [**119**] ошибочно. Λ_c и Σ_c рассматривались в [**121**] в рамках релятивистских правил сумм. Два матричных элемента там сводятся к $<0|\tilde{\jmath}_{\Lambda 1}|\Lambda_c>$ в пределе тяжелого кварка, и дают $f_{\Lambda_c 1} = 3.2\cdot 10^{-2}\text{GeV}^3$ и $4\cdot 10^{-2}\text{GeV}^3$; один матричный элемент сводится к $<0|\tilde{\jmath}_{\Sigma 2}|\Sigma_c>$ и дает $f_{\Sigma_c 2} = 7.2\cdot 10^{-2}\text{GeV}^3$.

Результаты анализа недиагональных правил сумм показаны на Рис. 3.23, 3.24. В выбранном диапазоне Борелевских параметров E, m_0^2 поправка в правиле сумм для Λ_Q уменьшается, начиная с 40%; в случае $\Sigma_Q^{(*)}$ она в 7/3 раз больше. Поэтому левая часть интервала ненадежна для $\Sigma_Q^{(*)}$. По оценкам, вклад плохо известных поправок с $d \geq 7$ не превышает 10%. Вклад континуума растет не так сильно, как в диагональном случае, позволяя нам использовать бо́льшие значения E. Правило сумм для Λ_Q предпочитает несколько меньшие значения эффективного порога континуума, чем в диагональном случае, и дает те же результаты для энергии и вычета. Правило сумм для $\Sigma_Q^{(*)}$ дает несколько завышенные значения энергии и вычета. В общем, согласие этих двух независимых наборов правил сумм дает нам больше уверенности в результатах.

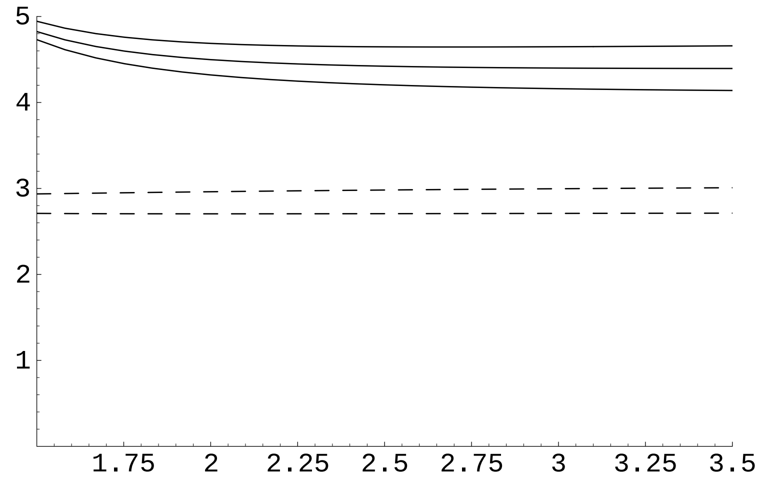


Рис. 3.23. Недиагональные правила сумм. E_r как функция E при различных E_c из логарифмической производной правила сумм: сплошные линии — результаты для Λ_Q при $E_c = 3.4$, 3.0; пунктирные линии — результаты для $\Sigma_Q^{(*)}$ при $E_c = 5.1$, 5.6, 6.1.

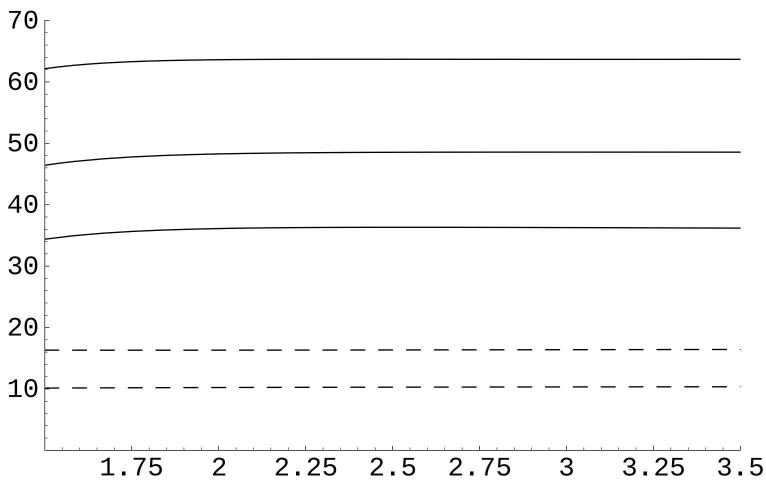


Рис. 3.24. Недиагональные правила сумм. n как функция E при различных E_c, E_r: сплошные линии — результаты для Λ_Q при $E_c = 3.4$, $E_r = 2.65$; $E_c = 3.9$, $E_r = 2.95$; пунктирные линии — результаты для $\Sigma_Q^{(*)}$ при $E_c = 5.1$, $E_r = 4.2$; $E_c = 5.6$, $E_r = 4.4$; $E_c = 6.1$, $E_r = 4.65$.

3.4. Барионные формфакторы

Корреляторы двух барионных токов со скалярным тяжелым кварком и скалярного тяжело–тяжелого тока $\tilde{J}_s$ имеют структуру (Рис. 3.25)

$$i^2 \langle T\tilde{\jmath}_{\Lambda s}(x_2)\tilde{J}_s(0)\tilde{\jmath}^+_{\Lambda s}(x_2)\rangle = \operatorname{Tr}\tau^+\tau \int\limits_0^\infty dt_2\delta(x_2 - v_2 t_2)\int\limits_0^\infty dt_1\delta(x_1 + v_1 t_1) K_\Lambda(t_2, t_1)\,,$$

$$i^2 \langle T\tilde{\jmath}^\mu_{\Sigma s}(x_2)\tilde{J}_s(0)\tilde{\jmath}^{\nu+}_{\Sigma s}(x_2)\rangle = \operatorname{Tr}\tau^+\tau \int\limits_0^\infty dt_2\delta(x_2 - v_2 t_2)\int\limits_0^\infty dt_1\delta(x_1 + v_1 t_1) K^{\mu\nu}_\Sigma(t_2, t_1)\,,$$

$$K^{\mu\nu}_\Sigma = K_{\Sigma||} e^\mu_{2||} e^\nu_{1||} + K_{\Sigma\perp} g^{\mu\nu}_\perp\,, \tag{3.4.1}$$

где $e_{1||} = (v_2 - \cosh\vartheta v_1)/\sinh\vartheta$, $e_{2||} = -(v_1 - \cosh\vartheta v_2)/\sinh\vartheta$ — векторы поляризации Σ_Q в плоскости рассеяния, $g^{\mu\nu}_\perp = \sum e^\mu_\perp e^\nu_\perp = \left[\cosh\vartheta(v^\mu_1 v^\nu_2 + v^\mu_2 v^\nu_1) - v^\mu_1 v^\nu_1 - v^\mu_2 v^\nu_2\right]/\sinh^2\vartheta - g^{\mu\nu}$.

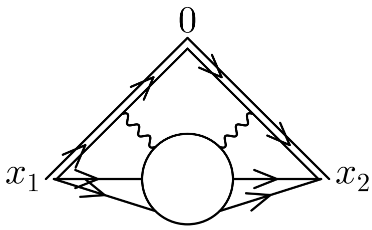


Рис. 3.25. Коррелятор двух HQET барионных токов и тяжело–тяжелого тока.

В соответствие с правилами [**58**] (§3.2), переход $\Lambda_Q \to \Lambda_Q$ описывается одним формфактором ($j_{1z} = j_{2z} = 0$); $\Lambda_Q \to \Sigma_Q$ запрещен по натуральности; $\Sigma_Q \to \Sigma_Q$ описывается двумя формфакторами ($j_{1z} = j_{2z} = 0$ и ± 1):

$$\langle\Lambda_Q|\tilde{J}_s|\Lambda_Q\rangle = \xi_\Lambda(\cosh\vartheta)\,, \tag{3.4.2}$$

$$\langle\Sigma_Q|\tilde{J}_s|\Sigma_Q\rangle = \xi^{\mu\nu}_\Sigma e^*_{2\mu} e_{1\nu}\,, \quad \xi^{\mu\nu}_\Sigma = \xi_{\Sigma||}(\cosh\vartheta) e^\mu_{2||} e^\nu_{1||} + \xi_{\Sigma\perp}(\cosh\vartheta) g^{\mu\nu}_\perp\,.$$

Вклад Λ_Q, Σ_Q в $\rho_{\Lambda,\Sigma||,\Sigma\perp}(\omega_2, \omega_1)$ равен $\tilde{f}^2_{\Lambda,\Sigma}\xi_{\Lambda,\Sigma||,\Sigma\perp}\delta(\omega_2 - \varepsilon_{\Lambda,\Sigma})\delta(\omega_1 - \varepsilon_{\Lambda,\Sigma})$. Спектральная плотность коррелятора токов $\tilde{\jmath}^+_{\Sigma\mu} e^\mu$ с некоторыми определенными поляризациями $e_{1,2}$ есть $\rho^{\mu\nu}_\Sigma e^*_{2\mu} e_{1\nu}$; вклад Σ_Q в нее равен $\tilde{f}^2_\Sigma \xi^{\mu\nu}_\Sigma e^*_{2\mu} e_{1\nu}\delta(\omega_2 - \varepsilon_\Sigma)\delta(\omega_1 - \varepsilon_\Sigma)$.

Теперь включим спин тяжелого кварка. Корреляторы равны (Рис. 3.25)

$$K = \left(\Gamma'_2 \frac{1 + \hat{v}_2}{2} \Gamma \frac{1 + \hat{v}_1}{2} \overline{\Gamma}'_1\right) K_s\,. \tag{3.4.3}$$

Введем токи $\bar{\tilde{j}}u = (\overline{q}\overline{\Gamma}C^{-1}\overline{q}^T)\overline{\widetilde{Q}}\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \overline{\Gamma}'u$. Переписывая (3.3.1) в ковариантной форме $\tilde{j}_{\Sigma 1} = (q^T C\gamma^\mu q)\Gamma'_\mu \widetilde{Q}$, $\tilde{j}_{\Sigma^*\nu 1} = (q^T C\gamma^\mu q)\Gamma'_{\mu\nu}\widetilde{Q}$, мы получаем $\mathcal{B}_\Lambda = u$, $\mathcal{B}^\mu_\Sigma = -(\gamma^\mu + v^\mu)u$, $\mathcal{B}^\mu_{\Sigma^*} = u^\mu$. Спектральная плотность коррелятора равна $\left(\overline{\mathcal{B}}_2\frac{1+\hat{v}_2}{2}\Gamma\frac{1+\hat{v}_2}{2}\mathcal{B}_1\right)\rho_s$ (где могут быть свертки по тензорным индексам между ρ_s и $\mathcal{B}_{1,2}$); вклад барионов в нее равен $\tilde{f}_{B_2}\tilde{f}_{B_1}{<}B_2|\tilde{J}|B_1{>}\delta(\omega_2-\varepsilon_2)\delta(\omega_1-\varepsilon_1)$. Поэтому мы получаем [**143**]–[**145**]

$$\begin{aligned}
&{<}\Lambda_Q|\tilde{J}|\Lambda_Q{>} = \xi_\Lambda(\cosh\vartheta)\overline{u}_2\Gamma u_1\,,\\
&{<}\Sigma_Q|\tilde{J}|\Sigma_Q{>} = \frac{1}{3}\xi^{\mu\nu}_\Sigma\overline{u}_2(\gamma_\mu+v_{2\mu})\gamma_5\Gamma(\gamma_\nu-v_{1\nu})\gamma_5 u_1\,,\\
&{<}\Sigma^*_Q|\tilde{J}|\Sigma_Q{>} = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi^{\mu\nu}_\Sigma\overline{u}_{2\mu}\Gamma(\gamma_\nu-v_{1\nu})\gamma_5 u_1\,,\\
&{<}\Sigma^*_Q|\tilde{J}|\Sigma^*_Q{>} = \xi^{\mu\nu}_\Sigma\overline{u}_{2\mu}\Gamma u_{1\nu}\,.
\end{aligned}\tag{3.4.4}$$

Результат для Λ_Q особенно прост, потому что легкие поля имею $j^P = 0^+$, и спин Λ_Q переносится тяжелым кварком.

В точке $\vartheta = 0$

$$\xi_\Lambda(1) = \xi_{\Sigma||}(1) = \xi_{\Sigma\perp}(1) = 1 \tag{3.4.5}$$

(в этой точке $\xi_{\Sigma ij} = \delta_{ij}$, поскольку нет выделенного направления).

Теперь мы рассмотрим правила сумм для формфакторов тяжелых барионов. Для диагональных корреляторов мы получаем (Рис. 3.26)

$$\begin{aligned}
K_{a+b}(t_1,t_2) &= -i\frac{N!\,\widetilde{S}(t_1)\widetilde{S}(t_2)a}{\pi^4(x^2)^4}\left[1+\frac{\pi\alpha_s{<}G^2{>}}{96N(N-1)}\left(4(N-2)t_1^2t_2^2\sinh^2\vartheta+3c(x^2)^2\right)\right],\\
K_c(t_1,t_2) &= i\frac{N!\,\widetilde{S}(t_1)\widetilde{S}(t_2)}{4N^2}{<}\overline{q}(-v_2t_2)q(v_1t_1){>}^2\,,
\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

где $x = v_1t_1+v_2t_2$, $x^2 = t_1^2+t_2^2+2\cosh\vartheta\,t_1t_2$; $a = x^2$ для случаев $\Lambda 1$, $\Sigma_{||}2$, $\Sigma_\perp 1$ (1, 2 относятся к корреляторам токов $\tilde{j}_{1,2}$), и $a = y^2 = \cosh\vartheta\,(t_1^2+t_2^2)+2t_1t_2$ для случаев Λ_2, $\Sigma_{||}1$, $\Sigma_\perp 2$; $c = 1$ для $\Lambda 1$, $c = \frac{1}{3}\left(1+2\cosh\vartheta\,\frac{x^2}{y^2}\right)$ для $\Lambda 2$, $c = \frac{1}{3}\left(1-2\cosh\vartheta\,\frac{x^2}{y^2}\right)$ для $\Sigma_{||}1$, $c = -\frac{1}{3}$ для $\Sigma_{||}2$, $\Sigma_\perp 1$, $\Sigma_\perp 2$. Эти результаты согласуются с (3.3.8) при $\vartheta = 0$.

Неколлинеарный кварковый конденсат ${<}\overline{q}(x)q(y){>}$ в 0–калибровке (т. е. в калибровке фиксированной точки $(x-x_0)_\mu A^\mu(x) = 0$ с $x_0 = 0$) можно переписать в калибровочно–инвариантной форме ${<}\overline{q}(x)E(x,0)E(0,y)q(y){>}$. Используя трансляционную инвариантность, его можно переписать как ${<}\overline{q}(0)E(0,-x)E(-x,y-x)q(y-x){>}$, или ${<}\overline{q}(0)E(-x,y-$

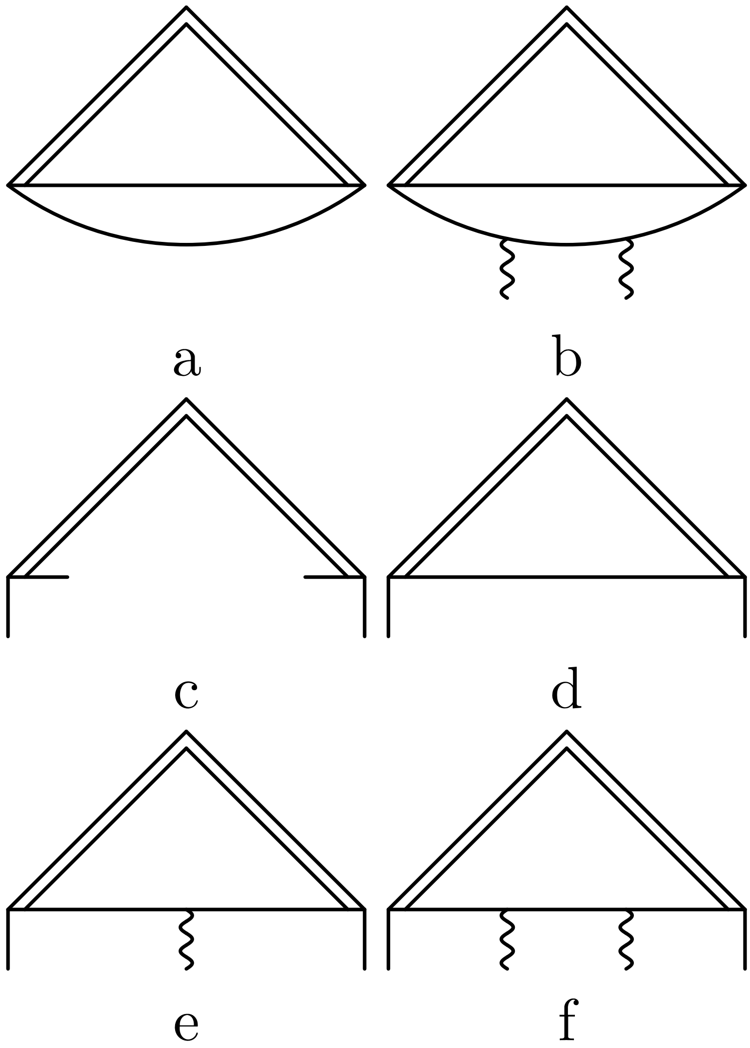


Рис. 3.26. Трехточечный коррелятор.

$x)q(y-x)>$ в новой 0–калибровке. В приближении факторизации (дающем только грубую оценку) мы можем заменить $E(x,y)$ в этой формуле на $<\frac{1}{N}\operatorname{Tr}E(x,y)> = 1+\frac{\pi\alpha_s<G^2>}{24N}((xy)^2-x^2y^2)$. Это дает $<\overline{q}(-v_2t_2)q(v_1t_1)> = <\overline{q}q>\left[1+\frac{\pi\alpha_s<G^2>t_1^2t_2^2\sinh^2\vartheta}{24N}\right]$.

Для недиагональных корреляторов мы получаем (Рис. 3.26)

$$K_{d+f}(t_1,t_2) = -\frac{N!\,\widetilde{S}(t_1)\widetilde{S}(t_2)<\overline{q}q>}{\pi^2N(x^2)^2}\Bigg[a\left(1+\frac{m_0^2x^2}{16}+\frac{\pi\alpha_s<G^2>}{96N}\left((x^2)^2+2t_1^2t_2^2\sinh^2\vartheta\right)\right)$$

$$+\,b\frac{t_1t_2\sinh^2\vartheta}{48}\left(m_0^2+\frac{\pi\alpha_s<G^2>}{3N}\right)\Bigg], \qquad (3.4.7)$$

$$K_e(t_1,t_2) = \frac{N!\,\widetilde{S}(t_1)\widetilde{S}(t_2)<\overline{q}q>}{16\pi^2 N(N-1)} \left[ac\left(\frac{m_0^2}{x^2} + \frac{\pi\alpha_s<G^2>}{6N}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} b \frac{t_1 t_2 \sinh^2\vartheta}{(x^2)^2}\left(m_0^2 + \frac{\pi\alpha_s<G^2>}{N}\left(\frac{a}{b} t_1 t_2 + \frac{x^2}{3}\right)\right)\right],$$
$$K_c(t_1,t_2) = \frac{C_F N!\,\widetilde{S}(t_1)\widetilde{S}(t_2)\pi\alpha_s<\overline{q}q>^3(t_1 + \cosh\vartheta t_2)d}{144N^3},$$

где $a = t_1 + \cosh\vartheta t_2$, $b = t_2$, $d = 1$ для Λ и $\Sigma_\perp$, $a = t_2 + \cosh\vartheta t_1$, $b = t_1$, $d = \cosh\vartheta$ для $\Sigma_{||}$; $c = 1$ для Λ, $c = -\frac{1}{3}$ для $\Sigma_{||}$, $\Sigma_\perp$. Эти результаты согласуются с (3.3.9) при $\vartheta = 0$.

Все рассмотренные корреляторы имеют вид $K(\tau_1,\tau_2) = P(\tau_1,\tau_2)/(-x^2)^n$, где $P(\tau_1,\tau_2)$ — полином, а $-x^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + 2\cosh\vartheta\tau_1\tau_2$. Удобно ввести новые переменные $z_1 = e^{\vartheta/2}\tau_1 + e^{-\vartheta/2}\tau_2$, $z_2 = e^{\vartheta/2}\tau_2 + e^{-\vartheta/2}\tau_1$, $\Omega_1 = e^{\vartheta/2}\omega_1 - e^{-\vartheta/2}\omega_2$, $\Omega_2 = e^{\vartheta/2}\omega_2 - e^{-\vartheta/2}\omega_1$. Мы имеем $-x^2 = z_1 z_2$, $\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 = (\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2)/2\sinh\vartheta$, и интегралы для $\rho(\omega_1,\omega_2)$ (3.2.3) факторизуются. Они отличны от нуля только в области $\Omega_1 \ge 0$, $\Omega_2 \ge 0$. Эта область имеет форму клина $e^{-\vartheta} \le \omega_2/\omega_1 \le e^{\vartheta}$ (Рис. 3.15). Поэтому удобно использовать параметризацию $\omega_{1,2} = \omega(1 \pm \eta\tanh\frac{\vartheta}{2})$ (или $\Omega_{1,2} = 2\omega\sinh\frac{\vartheta}{2}(1\pm\eta)$), в которой физическая область есть $-1 \le \eta \le 1$. Из (3.2.2) очевидно, что в пределе $\vartheta \to 0$ $K(t_1,t_2)$ зависит только от $t_1 + t_2$, как и должно быть (3.2.33), и дается однократным дисперсионным представлением (3.1.2) со спектральной плотностью $\lim_{\vartheta\to 0}\rho(\omega,\vartheta)$, где

$$\rho(\omega,\vartheta) = 2\omega\tanh\tfrac{\vartheta}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\rho(\omega(1+\eta\tanh\tfrac{\vartheta}{2}), \omega(1-\eta\tanh\tfrac{\vartheta}{2}))d\eta\,. \qquad (3.4.8)$$

Для диагональных корреляторов мы получаем

$$\rho = \frac{N!}{2\pi^4\sinh\vartheta}\left[\frac{\omega^4 A(\eta)}{5!\,\cosh^4\frac{\vartheta}{2}} + \frac{\pi\alpha_s<G^2>}{32N(N-1)}\left(\frac{N-2}{6\sinh^2\vartheta}B(\eta) + C(\eta)\right)\right], \qquad (3.4.9)$$

где $A(\eta) = \frac{15}{8}(1-\eta^2)^2$, $B(\eta) = \delta'(1+\eta) + \delta'(1-\eta) - \left(3 + 8\sinh^2\frac{\vartheta}{2}\right)(\delta(1+\eta) + \delta(1-\eta) - 1) + 8\sinh^4\frac{\vartheta}{2}$ для $\Lambda 1$, $\Sigma_{||}2$, $\Sigma_\perp 1$; $A(\eta) = \frac{5}{4}(1-\eta^4)$, $B(\eta) = \frac{1}{3}(\delta''(1+\eta) + \delta''(1-\eta)) - \left(1 + 4\sinh^2\frac{\vartheta}{2}\right)(\delta'(1+\eta) + \delta'(1-\eta)) + 2\left(1 + 2\sinh^2\frac{\vartheta}{2} + 4\sinh^4\frac{\vartheta}{2}\right)(\delta(1+\eta) + \delta(1-\eta) - 1) + 8\sinh^4\frac{\vartheta}{2}$ для $\Lambda 2$, $\Sigma_{||}1$, $\Sigma_\perp 2$; $C(\eta) = 1$ для $\Lambda 1$, $C(\eta) = \frac{1}{3}(\delta(1+\eta) + \delta(1-\eta) + 2\cosh\vartheta)$ для $\Lambda 2$, $C(\eta) = \frac{1}{3}(\delta(1+\eta) + \delta(1-\eta) - 2\cosh\vartheta)$ для $\Sigma_{||}1$, $C(\eta) = -\frac{1}{3}$ for $\Sigma_{||}2$, $\Sigma_\perp 1$, $C(\eta) =$

$-\frac{1}{3}\left(\delta(1+\eta)+\delta(1-\eta)\right)$ для $\Sigma_\perp 2$. Для недиагональных корреляторов мы получаем

$$\rho = \frac{<\overline{q}q>\omega}{2\pi^2 \sinh\vartheta}\left[1 \pm \eta\tanh\frac{\vartheta}{2} - (1-\tfrac{c}{2})\,\frac{m_0^2\cosh\frac{\vartheta}{2}}{8\omega^2}\left(e^{\vartheta/2}\delta(1\mp\eta) + e^{-\vartheta/2}\delta(1\pm\eta)\right)\right]. \quad (3.4.10)$$

В этой формуле мы положили $N = 3$, потому что в этом случае она значительно упрощается. Верхние знаки в ней используются для Λ, $\Sigma_\perp$, а нижние — для $\Sigma_{||}$; $c = 1$ для Λ, $c = -\frac{1}{3}$ для $\Sigma_{||,\perp}$. Члены с двумя δ–функциями, которые отличны от нуля только в начале координат $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, опущены в формулах (3.4.9–3.4.10). Эти формулы согласуются с (3.3.10) при $\vartheta = 0$ (3.4.8). Мы также проверили главные члены в этих формулах прямым использованием правил Каткоски в импульсном пространстве.

Чтобы получить информацию о формфакторах низших барионов, мы приравниваем основанные на OPE выражения (3.4.6–3.4.7) для $K(\tau_1,\tau_2)$ двойному дисперсионному представлению (3.2.3) с модельной спектральной плотностью, содержащей вклад низших барионов в обоих каналах, вклад континуума и смешанные вклады с низшим барионом в одном канале и континуумом в другом. Последний вклад экспоненциально подавлен при достаточно больших $\tau_{1,2}$, и мы пренебрегаем им, как обычно [**129**]. Вычитательные члены не дают вклада, когда как τ_1, так и τ_2 отличны от нуля. Области применимости правил сумм симметричны относительно перестановки τ_1 и τ_2 (или почти симметричны в недиагональном случае). Поэтому мы не потеряем существенной информации, если ограничимся диагональю $\tau_1 = \tau_2 = \tau/2$.

Вклад низших барионов в обоих каналах в $K(t_1,t_2)$ имеет вид $\frac{1}{2}f_1 f_2^* e^{-i\varepsilon_1 t_1 - i\varepsilon_2 t_2}\xi(\cosh\vartheta)$, где $\xi(\cosh\vartheta)$ — скалярная функция для $j^\pi = 0^+$ и $\xi_{\mu\nu} = \xi_{||}e_{1||\mu}e_{2||\nu} + \xi_\perp g_{\perp\mu\nu}$ для $j^\pi = 1^+$. Вклад в двойную спектральную плотность равен $\frac{1}{2}f_1 f_2^*\xi(\cosh\vartheta)\delta(\omega_1-\varepsilon_1)\delta(\omega_2-\varepsilon_2)$.

Мы принимаем стандартную модель континуума: его спектральная плотность равна теоретической (3.4.9–3.4.10), начиная с некоторой гладкой кривой — порога континуума. Мы выбираем простейший вариант — прямолинейный порог континуума (Рис. 3.15). Такая треугольная модель континуума хорошо работает в случае пионного формфактора [**129**]. В случае прямолинейного порога при $\tau_1 = \tau_2$, нам не обязательно знать $\rho(\omega_1,\omega_2)$, чтобы записать правило сумм; достаточно однократной спектральной плотности $\rho(\omega,\vartheta)$ (3.4.8). Более того, вклады в эту функцию пропорциональна ω^n, где n очевидны по размерности. Поэтому мы можем просто домножить члены результатов в координатном пространстве (3.4.6–3.4.7) при $t_1 = t_2 = -i\tau/2$ на соответствующий фактор $\delta_n(\varepsilon_c\tau)$.

Используя безразмерные переменные, мы получаем правила сумм

$$n\xi(\cosh\vartheta)e^{-E_r/E} = E^6\left[\frac{\delta_5(E_c/E)}{\cosh^6\frac{\vartheta}{2}} + \frac{E_G^4}{E^4}\frac{\delta_1(E_c/E)}{\cosh^2\frac{\vartheta}{2}}\left(c + \tfrac{2}{3}\sinh^2\tfrac{\vartheta}{2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\vartheta}{2}} + \frac{\delta}{2}\right)\right)\right]$$
$$+\exp\left(-2\frac{E_0^2}{E^2}\cosh^2\tfrac{\vartheta}{2} + \tfrac{4}{3}\frac{E_G^4}{E^4}\sinh^2\vartheta\right) \tag{3.4.11}$$
$$= 2E^3\left[\frac{\delta_2(E_c/E)}{\cosh^2\frac{\vartheta}{2}} - \left(1-\tfrac{c}{2}\right)\frac{E_0^2}{E^2}\delta_0(E_c/E) + \tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{c}{2}\right)\frac{E_G^4}{E^4}\cosh^2\tfrac{\vartheta}{2}\right] + \frac{\alpha_s d\cosh^4\frac{\vartheta}{2}}{27\pi E^3}.$$

Здесь $c = 1$ для Λ и $c = -\frac{1}{3}$ для Σ; в диагональном правиле сумм $\delta = 1$ для $\Lambda 2$, $\delta = -1$ для $\Sigma_{||}1$, а иначе $\delta = 0$; в недиагональном правиле сумм $d = \cosh\vartheta$ для $\Sigma_{||}$, а иначе $d = 1$. В диагональном правиле сумм мы включили эффект неколлинеарности в нелокальном кварковом конденсате в экспоненту; это лишь грубая оценка, и она не должна использоваться, если этот член не очень мал. При $\vartheta = 0$ эти правила сумм совпадают с (3.3.11). Деля (3.4.11) на (3.3.11), мы получаем формулы для формфакторов, которые не содержат E_r и n; нормировка при $\vartheta = 0$ автоматически является правильной.

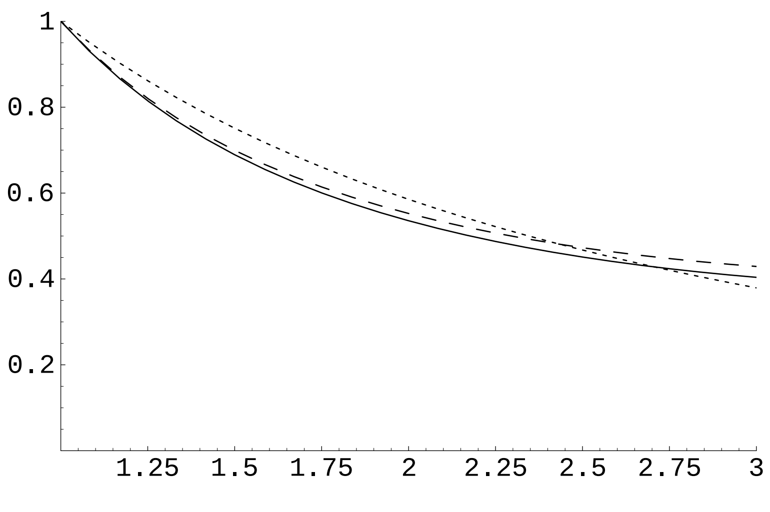


Рис. 3.27. Правила сумм для формфакторов Λ_Q: сплошная линия — диагональное правило сумм 1 при $E_c = 4.6$, $E = 1.2$; штриховая линия — диагональное правило сумм 2 при тех же значениях; точечная линия — недиагональное правило сумм при $E_c = 3.9$, $E = 3$.

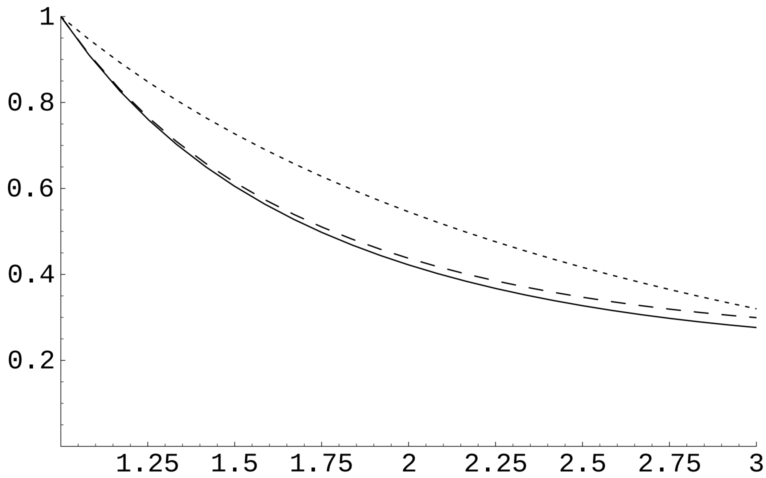


Рис. 3.28. Правила сумм для формфакторов $\Sigma_Q^{(*)}$: сплошная линия — диагональное правило сумм для $\Sigma_{||}$ при $E_c = 5.6$, $E = 1.2$; штриховая линия — диагональное правило сумм 2 для $\Sigma_{||}$ и оба диагональных правила сумм для $\Sigma_\perp$ при тех же значениях; точечная линия — недиагональное правило сумм для $\Sigma_{||}$ при $E_c = 5.6$, $E = 3$ (кривая для $\Sigma_\perp$ отличается меньше, чем на толщину линии).

Результаты анализа правил сумм для формфакторов $\xi(\cosh\vartheta)$ показаны на Рис. 3.27, 3.28. Мы взяли наилучшие значения порогов континуума E_c и интервалы Борелевских параметров E из двухточечных правил сумм. Изменения этих параметров в разумных пределах ведут лишь к незначительным изменениям этих кривых. Диагональные правила сумм очень стабильны по отношению к изменениям E, однако лишь при $E \geq 1.2$; эта граница выше, чем в двухточечном случае. Это может объясняться не очень аккуратным учетом эффекта неколлинеарности нелокального кваркового конденсата. В случае Λ_Q два диагональных правила сумм находятся в разумном согласии друг с другом; недиагональное предсказывает несколько меньший наклон и более прямолинейную форму, но не находится в резком противоречии с диагональными. В случае $\Sigma_Q^{(*)}$, второе диагональное правило сумм предсказывает равные формфакторы для продольной и поперечной поляризаций легких полей; первое дает такой же результат для $\Sigma_\perp$, но несколько другой для $\Sigma_{||}$. Поэтому точность подхода не позволяет нам различить $\xi_{||}(\cosh\vartheta)$ и $\xi_\perp(\cosh\vartheta)$. Результаты диагональных правил сумм находятся в разумном согласии друг с другом. С другой стороны, недиагональные правила сумм предсказывают существенно меньший наклон и более прямолинейную форму. Недиагональные правила сумм для $\Sigma_{||}$ и $\Sigma_\perp$ отличаются только в очень маленьком члене $<\overline{q}q>^3$ размерности 9, так что кривые на рисунке неразличимы. Напомним, что в двухточечном случае согласие между недиагональным правилом сумм и диагональными для $\Sigma_Q^{(*)}$ также было значительно хуже, чем для Λ_Q.

Заметим, что в случае нуклонных формфакторов детальный анализ правил сумм оказался невозможным, и был использован упрощенный подход локальной дуальности [**146**]. Он соответствует работе при бесконечных Борелевских параметрах и использованию порога континуума из двухточечных правил сумм. Более того, использовался только один коррелятор, так что никакие проверки самосогласованности не были возможны. Здесь мы находимся в несколько лучшем положении: мы действительно имеем широкий интервал стабильности по Борелевским параметрам, и сравнение различных корреляторов позволяет нам оценить точность (хотя она и невысока).

3.5. Константы связи тяжелых адронов с мягкими пионами

Хорошо известно, что лагранжиан КХД с n_l безмассовыми флейворами имеет $SU(n_l)_L\times SU(n_l)_R$ симметрию, спонтанно нарушенную до $SU(n_l)_V$, что дает (n_l^2-1)–плет псевдоскалярных безмассовых Голдстоуновских мезонов (пионов) π^i_j ($\pi^i_i=0$). Их взаимодействия при малых импульсах описываются киральным лагранжианом

$$L_\pi=\frac{f_\pi^2}{8}\operatorname{Tr}\partial_\mu\Sigma^+\partial^\mu\Sigma+\cdots\quad \Sigma=\exp\frac{2i\pi}{f_\pi}\,, \tag{3.5.1}$$

где пионная константа $f_\pi\approx 132\text{MeV}$ определена как

$$<0|j^i_{j\mu}|\pi>=if_\pi e^i_j p_\mu,\quad j^i_{j\mu}=\overline{q}_j\gamma_\mu\gamma_5 q^i\to i\frac{f_\pi^2}{2}\left(\Sigma^+\partial_\mu\Sigma-\Sigma\partial_\mu\Sigma^+\right)^i_j \tag{3.5.2}$$

(e^i_j — флейворная волновая функция пиона), а точки означают члены с бо́льшим числом производных. Массы легких кварков могут быть включены по теории возмущений, и дают добавочные члены в (3.5.1). Преобразования $SU(n_l)_L\times SU(n_l)_R$ действуют как $\Sigma\to L\Sigma R^+$. Определим $\xi=\exp i\pi/f_\pi$, $\Sigma=\xi^2$; она преобразуется как $\xi\to L\xi U^+=U\xi R^+$, где U — некоторая $SU(n_l)$ матрица, зависящая от $\pi(x)$. Вектор $v_\mu=\frac{1}{2}(\xi^+\partial_\mu\xi+\xi\partial_\mu\xi^+)$ и аксиальный вектор $a_\mu=\frac{i}{2}(\xi^+\partial_\mu\xi-\xi\partial_\mu\xi^+)$ преобразуются как $v_\mu\to U(v_\mu+\partial_\mu)U^+$, $a_\mu\to Ua_\mu U^+$.

Имеется свобода выбора закона преобразования полей материи ψ^i, поскольку их всегда можно умножить на матрицу, зависящую от π. Единственное требование — это правильные преобразования по отношению к $SU(n_l)_V$ ($L = R$). Удобно выбрать $\psi \to U\psi$. Тогда ковариантная производная $D_\mu = \partial_\mu + v_\mu$ преобразуется как $D_\mu\psi \to UD_\mu\psi$. Ковариантные производные тензоров с бо́льщим числом флейворных индексов определяются аналогично.

Мезоны $\overline{Q}q$ со скалярным тяжелым кварком образуют $j^P = \frac{1}{2}^+$ n_l–плет ψ^i. Барионы Qqq могут иметь $j^P = 0^+$ или 1^+, что дает скалярный $n_l(n_l-1)/2$–плет Λ^{ik}, антисимметричный по флейвору, и векторный $n_l(n_l+1)/2$–плет $\vec{\Sigma}^{\,ik}$, симметричный по флейвору. Взаимодействие этих адронов в основном состоянии с мягкими пионами описывается киральной теорией тяжелых адронов (HHCT) [**147**]. Ее лагранжиан при выключенном спине тяжелого кварка имеет вид

$$\begin{aligned} L =& L_\pi + \overline{\psi}_i iD_0\psi^i + \Lambda^*_{ij} iD_0\Lambda^{ij} + \vec{\Sigma}^{\,*}_{ij}\cdot(iD_0 - \Delta)\vec{\Sigma}^{\,ij} \\ &+ g_1\overline{\psi}_i\hat{a}^{\,i}_{\,j}\gamma_5\psi^j + 2ig_2\vec{\Sigma}^{\,*}_{ik}\cdot\vec{a}^{\,i}_{\,j}\times\vec{\Sigma}^{\,jk} + 2g_3\left(\Lambda^*_{ik}\vec{a}^{\,i}_{\,j}\cdot\vec{\Sigma}^{\,jk} + \vec{\Sigma}^{\,*}_{ik}\cdot\vec{a}^{\,i}_{\,j}\Lambda^{jk}\right)\,, \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

где Δ — расщепление масс Σ–Λ. Возможность рассмотрения $\Sigma\Lambda\pi$ взаимодействия в HHCT основывается на том, что это расщепление мало по сравнению с масштабом нарушения киральной симметрии, хотя формально оба они порядка характерного адронного масштаба масс. Матричные элементы аксиального тока между тяжелыми адронами легко получаются с использованием PCAC:

$$<M'|\vec{j}^{\,i}_j|M> = g_1\overline{u}'_j\vec{\gamma}\gamma_5 u^i\,,\quad <\Sigma'|\vec{j}^{\,i}_j|\Sigma> = 2ig_2\vec{e}^{\,\prime*}_{jk}\times\vec{e}^{\,ik}\,,\quad <\Lambda|\vec{j}^{\,i}_j|\Sigma> = 2g_3 e^*_{jk}\vec{e}^{\,ik}\,, \tag{3.5.4}$$

где u^i, e^{ij}, $\vec{e}^{\,ij}$ — волновые функции M, Λ, Σ, и подразумевается нерелятивистская нормировка состояний и волновых функций. Если мы включим спин тяжелого кварка, то получится обычный лагранжиан HHCT [**147**].

Константы связи HHCT g_i в принципе вычислимы в нижележащей теории — HQET, но это сложная непертурбативная проблема. Некоторая экспериментальная информация доступна только о g_1 и g_3. Если мы пренебрежем $1/m_c$ поправками, то $\Gamma(D^{*+}\to D^0\pi^+) = g_1^2 p_\pi^3/(6\pi f_\pi^2)$, и аналогично для $D^+\pi^0$ (с дополнительной $1/2$). Экспериментальный верхний предел $\Gamma(D^{*+}) < 0.131\mathrm{MeV}$ вместе с бранчингом $B(D^{*+}\to D^0\pi^+) = 68\%$ дает $g_1 < 0.68$. Совместный анализ пионных и радиационных распадов D^* [**148**] дает $g_1 \sim 0.4$–0.7. Недавнее измерение CLEO распада $\Sigma_c^* \to \Lambda_c \pi$ дает $g_3 = 0.7 \pm 0.1$. Распад $\Sigma_c^* \to \Sigma_c \pi$ кинематически запрещен; поэтому прямое измерение g_2 невозможно.

В конституентной кварковой модели g_1 — это аксиальный заряд g конституентного легкого кварка в тяжелом мезоне. Более того, согласно фольклорному определению "конституентный кварк это B мезон минус b кварк", это наиболее чистое определение g конституентного кварка. Барионные константы связи $g_{2,3}$ также равны g в этой модели. Наивная оценка — это $g \approx 1$; аксиальный заряд нуклона равен $g_A = \frac{5}{3} g$ в конституентной модели, и чтобы получить $g_A = 1.25$, мы должны положить $g = 0.75$.

Правила сумм успешно применялись для решения многих непертурбативных проблем в КХД и HQET. Токи с квантовыми числами мезонов и барионов в основном состоянии при выключенном спине тяжелого кварка имеют вид

$$j_M^i = \widetilde{Q}^* \frac{1+\gamma_0}{2} q^i, \quad j_{\Lambda 1}^{ij} = (q^{T[i} C \gamma_5 q^{j]}) \widetilde{Q}, \quad \vec{\jmath}_{\Sigma 1}^{\,ij} = (q^{T(i} C \vec{\gamma} q^{j)}) \widetilde{Q}\,, \tag{3.5.5}$$

где (ij) и $[ij]$ означают симметризацию и антисимметризацию. Есть также токи $j_{\Lambda 2}^{ij}$ и $\vec{\jmath}_{\Sigma 2}^{\,ij}$ с добавочной γ_0. Результаты правил сумм находятся в качественном согласии с конституентной кварковой моделью: пропагатор безмассового кварка плюс вклад кваркового конденсата достаточно хорошо имитируют распространение конституентного кварка.

Метод правил сумм был обобщен на случай постоянного внешнего поля для вычисления статических характеристик адронов, таких, как магнитные моменты [**149**]. Правила сумм в постоянном аксиальном поле использовались [**150**] для вычисления g_A легких барионов. В этом параграфе мы используем HQET правила сумм в аксиальном поле для оценки $g_{1,2,3}$.

Мы вводим внешнее аксиальное поле $A_{j\mu}^i$ ($A_{i\mu}^i = 0$), добавляя член

$$\Delta L = j_j^{i\mu} A_{i\mu}^j \tag{3.5.6}$$

к лагранжиану. Мы собираемся вычислять корреляторы токов (3.5.5) с точностью до членов, линейных по A (эти члены обозначены индексом A). Пропагатор легкого кварка в калибровке $x_\mu A^\mu(x) = 0$ получает вклад (первый член которого был найден в [**150**])

$$S_{jA}^i(x,0) = -\frac{i A_j^i \cdot x}{2\pi^2} \left(\frac{\hat{x}\gamma_5}{x^4} - \frac{x^\mu \widetilde{G}_{\mu\nu} \gamma^\nu}{4x^2} \right) + \cdots \tag{3.5.7}$$

Член G^2 в S_A обращается в нуль после усреднения по вакууму; мы не собираемся вычислять глюонные поправки более высоких размерностей, чем G^2, и поэтому можем опустить этот член. Аксиальное поле индуцирует кварковые конденсаты

$$\begin{aligned} <q^{ia\alpha}(x)\overline{q}_{jb\beta}(0)>_A &= \frac{\delta^a_b}{4N}\left\{\left[f^2\hat{A}^{\,i}_j + \frac{i}{6}<\overline{q}q>[\hat{A}^{\,i}_j,\hat{x}] + \frac{m_1^2 f_\pi^2}{36}\left(5x^2\hat{A}^{\,i}_j - 2A^i_j\cdot x\hat{x}\right)\right]\gamma_5\right\}^\alpha_\beta , \\ <q^{ia\alpha} g\widetilde{G}^{\,A}_{\mu\nu}\overline{q}_{jb\beta}>_A &= -\frac{\left(t^A\right)^a_b}{12C_F N} m_1^2 f_\pi^2\left(A^i_{j\mu}\gamma_\nu - A^i_{j\nu}\gamma_\mu\right)^\alpha_\beta , \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

где $m_1^2 \approx 0.2\mathrm{GeV}^2$ [**151, 120**] определяется как $<0|\overline{d}g\widetilde{G}_{\mu\nu}\gamma^\nu u|\pi^+> = im_1^2 f_\pi p_\mu$ (правило сумм, рассмотренное в [**120**], приводит к соотношению $m_1^2 \approx m_0^2/4$). Мы подразумеваем $p\cdot A = 0$, где $p\to 0$ — импульс поля A; в общем случае эти формулы должны содержать $A_\perp = A - (A\cdot p/p^2)p$.

Константа связи $D^*D\pi$ оценивалась [**152**] из правил сумм во внешнем аксиальном поле при конечном m_c с точностью до члена m_1^2. Этот член неверен; однако, он довольно мал. Предел больших m_c анализировался в [**153**]. По нашему мнению, рассмотрение феноменологической стороны правила сумм в этой работе не вполне убедительно. В [**154**] рассматривался матричный элемент между вакуумом и мягким пионом от произведения двух токов; этот подход эквивалентен правилам сумм во внешнем поле. В этой работе рассматривалась как конечная, так и бесконечная масса, и была вычислена следующая степенная поправка (численно она мала). Правила сумм на световом конусе как для конечной, так и для бесконечной массы кварка рассматривались в [**155**]. В этом подходе ведущий член в корреляторе и степенные поправки определяются пионными волновыми функциями ведущего и следующих твистов в точке $x = 1/2$. Их значения определяются из КХД правил сумм [**156**], и не столь точно известны, как параметры правил сумм во внешнем поле f_π и $<\overline{q}q>$. В пределе мягких пионов воспроизводятся формулы из [**154**] (без последней степенной поправки).

Во всех этих работах не обсуждались пертурбативные поправки к правилам сумм. Здесь мы учтем NLO пертурбативный член в пределе бесконечной массы. С учетом этого члена, коррелятор, используемый в правиле сумм для g_1, становится одним из самых детально изученных: в добавление к ведущему члену, известны одна пертурбативная и три последовательные степенные поправки. Несмотря на это, правило сумм не очень стабильно. Мы также обсудим правила сумм для барионных констант связи $g_{2,3}$.

Коррелятор мезонных токов (3.5.5) имеет A–член

$$i{<}Tj^i(x)\overline{\jmath}_j(0){>}_A = \frac{1+\gamma_0}{2}\hat{A}^i_j\gamma_5\frac{1+\gamma_0}{2}\delta(\vec{x})\Pi_A(x_0)\,, \tag{3.5.9}$$

который зависит только от $\vec{A}^i_j$, но не от A^i_{j0}. Он удовлетворяет дисперсионному представлению при любом $A^i_{j\mu}$. Мезонный вклад при $A^i_{j\mu}=0$ равен $\rho(\omega)=\tilde{f}^2\delta(\omega-\varepsilon_0)$. Включение внешнего поля дает сдвиг энергии $\varepsilon_0\to\varepsilon_0-g_1\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{A}$ ($s_n=\frac{1}{2}\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{n}=\pm\frac{1}{2}$ — проекция спина мезона). Поэтому мезонный вклад в A–член равен $\rho_A(\omega)=g_1\tilde{f}^2\delta'(\omega-\varepsilon_0)+c\delta(\omega-\varepsilon_0)$, где второй член происходит от изменения $\tilde{f}^2$. Кроме него, есть плавный вклад континуума $\rho_A^{\mathrm{cont}}(\omega)$. Поэтому мы получаем

$$\Pi_A(\omega)=\frac{g_1\tilde{f}^2}{(\omega-\varepsilon_0)^2}+\frac{c}{\omega-\varepsilon_0}+\Pi_A^{\mathrm{cont}}(\omega)\,. \tag{3.5.10}$$

Иными словами, вклад низшего мезона в обоих каналах (Рис. 3.29a) дает двойной полюс в точке $\omega=\varepsilon_0$; смешанный вклад основного и высших состояний (Рис. 3.29b) после разложения на элементарные дроби дает однократный полюс в точке $\omega=\varepsilon_0$ плюс член, спектральная плотность которого находится в области континуума; вклады высших состояний (Рис. 3.29c) имеют спектральную плотность только в области континуума.

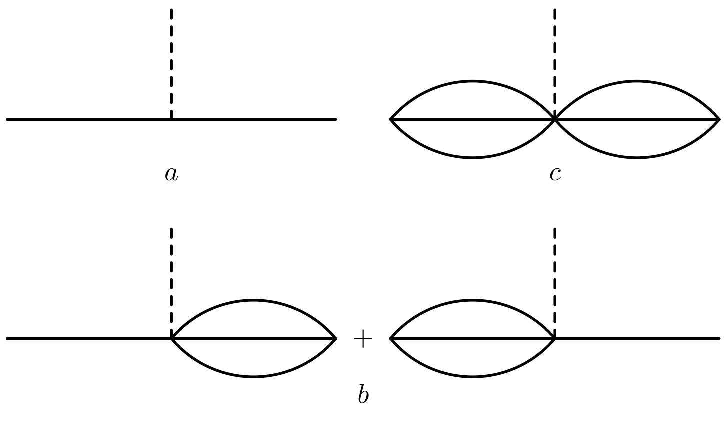


Рис. 3.29. Вклады физических состояний в коррелятор во внешнем поле.

Мы можем также вычислить коррелятор, используя OPE. Ведущая пертурбативная диаграмма (Рис. 3.30a) обращается в ноль. В действительности, все диаграммы с неразрезанной линией легкого кварка, включая вклад глюонного конденсата (Рис. 3.30b) и поправки от высших петель (Рис. 3.30c), обращаются в ноль. Причина состоит в том, что

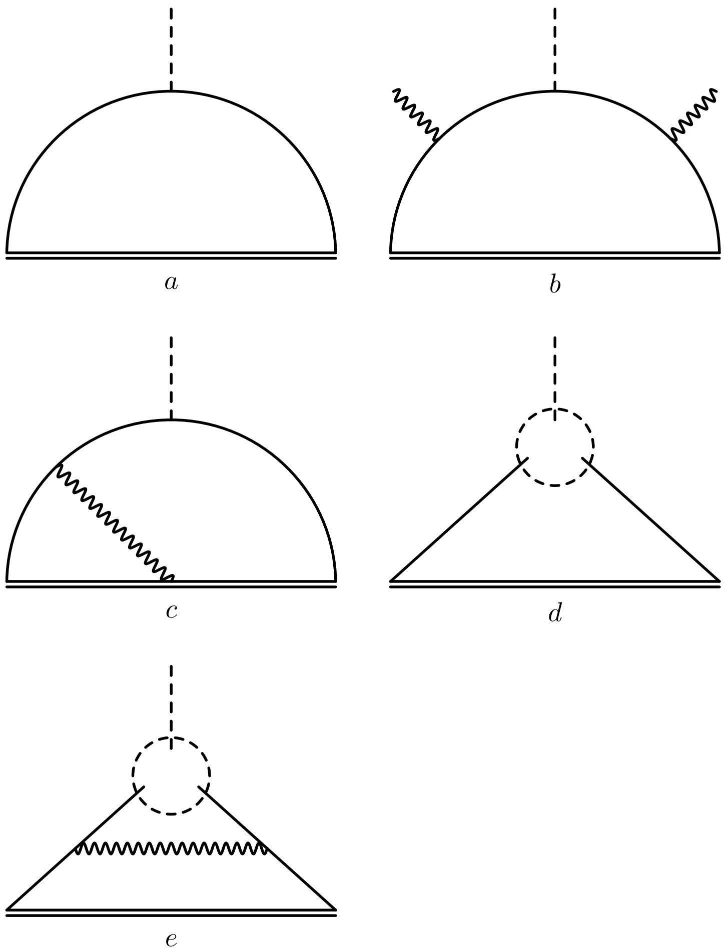


Рис. 3.30. Коррелятор мезонных токов в аксиальном внешнем поле.

мы можем антикоммутировать γ_5 и получить коррелятор двух токов (один из которых содержит γ_5) в постоянном пространственном векторном поле. В силу тождества Уорда он равен производной от коррелятора без внешнего поля по пространственному импульсу, текущему по линии легкого кварка. Она равна минус производной по импульсу, текущему по линии тяжелого кварка. Но HQET пропагатор не зависит от пространственного импульса, и потому производная обращается в ноль. Мы проверили явным вычислением, используя метод из §2.1, что двухпетлевая поправка (Рис. 3.30c) действительно равна нулю в случае наивно антикоммутирующей γ_5 (которую и следует использовать в слабом токе).

Диаграмма с разрезанной линией (Рис. 3.30c) дает

$$\Pi_A(t) = \frac{f_\pi^2}{4}\left(1 - \frac{i<\overline{q}q>t}{3f_\pi^2} + \frac{5}{36}m_1^2 t^2 - \frac{i m_0^2<\overline{q}q>t^3}{48 f_\pi^2}\right) . \tag{3.5.11}$$

Таким образом, возникновение g_A конституентного кварка полностью обусловлено взаимодействием с кварковым конденсатом. Четвертый член в (3.5.11) взят из [**154**]. Коррелятор (3.5.11) соответствует спектральной плотности

$$\rho_A(\omega) = \frac{f_\pi^2}{4}\left(\delta(\omega) - \frac{<\overline{q}q>}{3f_\pi^2}\delta'(\omega) - \frac{5}{36}m_1^2\delta''(\omega) + \frac{m_0^2<\overline{q}q>}{48 f_\pi^2}\delta'''(\omega)\right) . \tag{3.5.12}$$

Мы вычислили пертурбативную поправку к вкладу ведущей размерности. Достаточно вычислить только одночастично–неприводимые диаграммы (Рис. 3.30e), остальные вклады можно взять в §2.1. Коррелятор неперенормированных токов в $d = 4 - 2\epsilon$ измерениях равен

$$\Pi_A^0(\omega) = \frac{if^2}{4\omega}\left[1 + \frac{C_F g_0^2(-2\omega)^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(d-2)(d-7)}{2(d-3)}\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1+2\epsilon)\right] . \tag{3.5.13}$$

После перенормировки тяжело–легких HQET токов получается конечный результат

$$\Pi_A(\omega) = \frac{if_\pi^2}{4\omega}\left[1 + C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(-6\log\frac{-2\omega}{\mu} + 5\right)\right] , \quad \rho_A(\omega) = \frac{f_\pi^2}{4}\left[\delta(\omega) - 6C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}\frac{1}{\omega}\right] . \tag{3.5.14}$$

Чтобы получить результат в координатном пространстве при $t = -i\tau$, нужно вычислить точную d–мерную спектральную плотность, взять ее преобразование Лапласа и перейти к пределу $d \to 4$ в самом конце:

$$\Pi_A(\tau) = \frac{f_\pi^2}{4}\left[1 + C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(6\log\frac{\mu\tau}{2} + 6\gamma + 5\right)\right] , \tag{3.5.15}$$

где γ — константа Эйлера. Используя методы из §2.1, нетрудно вычислить двухпетлевую поправку к (3.5.14). Мы не стали выводить NNL член в правиле сумм для $g_1\tilde{f}^2$, поскольку правило сумм для $\tilde{f}^2$ известно только с NL точностью (§3.1).

Как обычно, мы предполагаем, что вклад возбужденных состояний дуален теоретической спектральной плотности (3.5.14) выше эффективного порога континуума ε_c. Приравнивая феноменологическое выражение для коррелятора к теоретическому при мнимом времени $t = -i/E$, мы получаем правило сумм

$$\left(\frac{g_1\tilde{f}^2(\mu)}{E} + c\right) e^{-\varepsilon_0/E} = \frac{f_\pi^2}{4}\left[1 + C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(-6\log\frac{2\varepsilon_c}{\mu} + 6\,\mathrm{Ein}\left(\frac{\varepsilon_c}{E}\right) + 5\right)\right.$$
$$\left. - \frac{<\overline{q}q>}{3f_\pi^2 E} - \frac{5}{36}\frac{m_1^2}{E^2} + \frac{m_0^2<\overline{q}q>}{48f_\pi^2 E^3}\right], \qquad (3.5.16)$$

где

$$\mathrm{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt = \begin{cases} \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} - \cdots & x \ll 1\,, \\ \log x + \gamma + O(e^{-x}/x), & x \gg 1\,. \end{cases} \qquad (3.5.17)$$

Зависимость от μ правой части (3.5.16) совпадает с зависимостью левой части с принятой точностью; Поправка составляет 25–30% при $\mu = 1$ GeV, и поэтому ее следует учитывать.

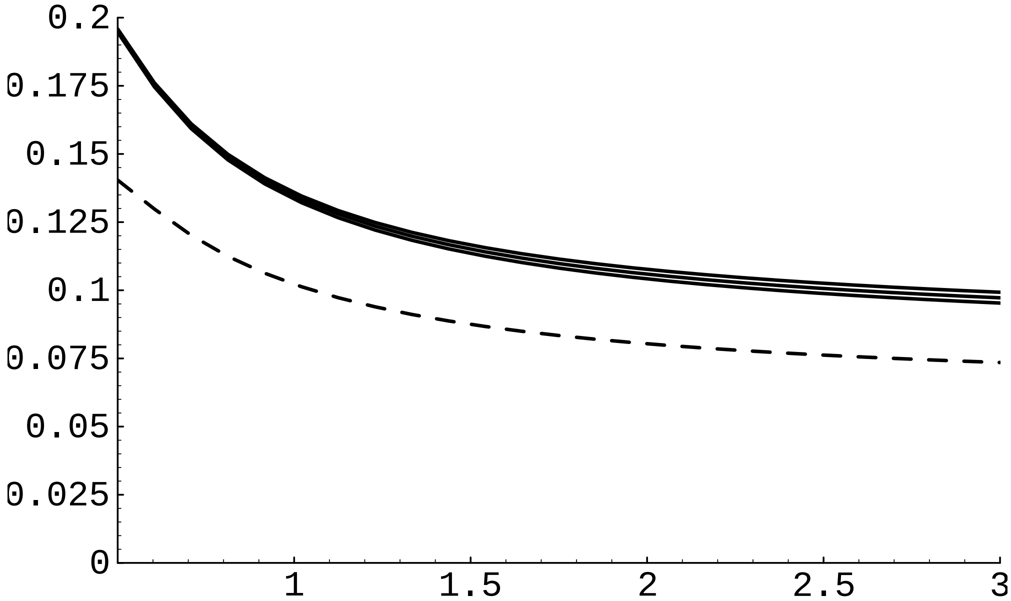


Рис. 3.31. $g_1F^2/(380\mathrm{MeV})^3$ как функция Борелевского параметра E: штриховая линия — без пертурбативной поправки, сплошная линия — с пертурбативной поправкой ($\varepsilon_0 = 500$MeV [**113**], $\mu = 1$GeV, $\alpha_s = 0.34$, $<\overline{q}q> = -(240\mathrm{MeV})^3$, порог континуума $\varepsilon_c = 1$GeV, 1.25GeV, 1.5GeV).

Мы можем умножить (3.5.16) на $\exp(\varepsilon_0/E)$ и продифференцировать по E, чтобы исключить c. Эта процедура эквивалентна нахождению плато, линейного по Борелевскому параметру [**149**]. Результат показан на Рис. 3.31. Значение $\tilde{f}$ является предметом дискуссии в текущей литературе. Мы выбрали среднее значение из [**113**] $\tilde{f}^2 = (380\mathrm{MeV})^3$ в качестве точки отсчета; правило сумм дает $g_1\tilde{f}^2$, поэтому меньшие значения $\tilde{f}^2$ ведут к бо́льшим значениям g_1. Ряд OPE (3.5.16) ведет себя как $1+270\mathrm{MeV}/E-(170\mathrm{MeV}/E)^2-(240\mathrm{MeV}/E)^3$, поэтому кажется, что разложение применимо при $E>500\mathrm{MeV}$. Это близко к нижней границе области применимости правила сумм для $\tilde{f}^2$ [**119**]. Вклад континуума мал вплоть до очень больших значений E, потому что континуум появляется только на уровне α_s/π (3.5.14). При больших E правило сумм (3.5.16) (без пертурбативной поправки) дает

$$g_1\tilde{f}^2=\tfrac{1}{4}f_\pi^2\varepsilon_0-\tfrac{1}{12}{<}\overline{q}q{>}\,. \tag{3.5.18}$$

При меньших E стабильность правила сумм не очень хорошая. Наша окончательная численная оценка есть $g_1\tilde{f}^2/(380\mathrm{MeV})^3=0.1\div 0.2$. Эффект пертурбативной поправки умеренный, а зависимость от порога континуума очень слабая.

Численные результаты предыдущих работ отличаются друг от друга в большой степени из–за разного выбора значения $\tilde{f}^2$. Выраженные в общем масштабе, они удивительно близки: $g_1\tilde{f}^2/(380\mathrm{MeV})^3=0.16\pm0.03$ [**153**], 0.16 ± 0.04 [**154**], 0.17 ± 0.01 [**155**] (в последнем результате указана только ошибка, связанная с зависимостью от Борелевского параметра, но не с неточностью волновой функции пиона при $x=1/2$). Пертурбативная поправка в предыдущих работах не учитывалась, так что спектральная плотность континуума была равна нулю. Овчинников [**153**] включил первое возбужденное состояние в феноменологическую часть, предполагая его энергию известной. Однако он включил только член $\delta(\omega-\varepsilon')$ в $\rho_A(\omega)$, но не $\delta'(\omega-\varepsilon')$. Мы не видим оправданий для такого предположения. Учет $c_2\delta'(\omega-\varepsilon')$ добавил бы в задачу еще один неизвестный параметр.

Перейдем теперь к рассмотрению барионов. Корреляторы $\Sigma\Sigma$ и $\Lambda\Sigma$ токов имеют A–члены

$$\begin{gathered}
i{<}Tj^{ij}_{\Sigma l}(x)j^*_{\Sigma i'j'm}(0){>}_A=i\varepsilon_{lmn}A^{(i}_{n(i'}\delta^{j)}_{j')}\delta(\vec{x})\Pi_A(x_0)\,,\\
i{<}Tj^{ij}_{\Lambda}(x)\vec{\jmath}^{\,*}_{\Sigma i'j'}(0){>}_A=\vec{A}^{\,[i}_{\,(i'}\delta^{j]}_{j')}\delta(\vec{x})\Pi_A(x_0)\,.
\end{gathered} \tag{3.5.19}$$

Мы определим $<0|j_\Lambda^{ij}|\Lambda> = f_\Lambda e_\Lambda^{ij}$, $<0|\vec{j}_\Sigma^{ij}|\Sigma> = f_\Sigma \vec{e}_\Sigma^{\,ij}$, тогда вклады физических состояний в корреляторы (Рис. 3.29) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\Pi_A(\omega) &= \frac{2g_2 f_\Sigma^2}{(\omega-\varepsilon_\Sigma)^2} + \frac{c}{\omega-\varepsilon_\Sigma} + \cdots \\
\Pi_A(\omega) &= \frac{2g_3 f_\Lambda f_\Sigma}{(\omega-\varepsilon_\Lambda)(\omega-\varepsilon_\Sigma)} + \frac{c_\Lambda}{\omega-\varepsilon_\Lambda} + \frac{c_\Sigma}{\omega-\varepsilon_\Sigma} + \cdots
\end{aligned}
\tag{3.5.20}
$$

Невозможно однозначно отделить g_3 член от вкладов Λ–возбужденные состояния и Σ–возбужденные состояния. Это можно сделать приближенно, если $\Delta = \varepsilon_\Sigma - \varepsilon_\Lambda \ll \varepsilon_c - \varepsilon_{\Lambda,\Sigma}$, поскольку в этом случае разложение первого члена на элементарные дроби дало бы большие вклады $c_{\Lambda,\Sigma} \sim 1/\Delta$ с противоположными знаками, тогда как естественный масштаб $c_{\Lambda,\Sigma}$ в (3.5.20) есть $c_{\Lambda,\Sigma} \sim 1/(\varepsilon_c - \varepsilon_{\Lambda,\Sigma})$. Это не дефект правил сумм, а неопределенность, внутренне присущая g_3, которая может быть определена, только когда расщепление Δ мало по сравнению с масштабом нарушения киральной симметрии. Мы выбираем требование $c_\Lambda = c_\Sigma$; условия $c_\Lambda = 0$ или $c_\Sigma = 0$ были бы не хуже.

Барионные корреляторы в рамках OPE описываются диаграммами на Рис. 3.32. Диаграммы Рис. 3.32a–c с неразрезанной кварковой линией, взаимодействующей с аксиальным полем, обращаются в нуль вследствие (3.5.7). Мы используем факторизацию для четырехкваркового конденсата на Рис. 3.32e. В этом приближении пары диагональных корреляторов $<j_1 j_1>$ и $<j_2 j_2>$ совпадает как для $\Sigma\Sigma$, так и для $\Lambda\Sigma$; совпадают также $<j_{\Lambda 1} j_{\Sigma 2}>$ и $<j_{\Lambda 2} j_{\Sigma 1}>$. Это похоже на обычные барионные правила сумм (§3.3) и подтверждает наблюдение, что $f_{\Lambda 1} = f_{\Lambda 2}$ и $f_{\Sigma 1} = f_{\Sigma 2}$ в приближении факторизации в правилах сумм. Только конденсаты четных размерностей дают вклад в диагональный $\Sigma\Sigma$ и недиагональный $\Lambda\Sigma$ корреляторы:

$$
\Pi_A(t) = \frac{2N!\, f_\pi^2}{N\pi^2 t^3}\left[1 + \left(\frac{5}{3} \pm \frac{C_B}{C_F}\right)\frac{m_1^2 t^2}{12} + \frac{\pi^2 <\overline{q}q>^2 t^4}{6N f_\pi^2}\right], \tag{3.5.21}
$$

где $C_B/C_F = 1/(N-1)$ (этот член происходит от диаграммы Рис. 3.32f). Только конденсаты нечетных размерностей дают вклад в недиагональный $\Sigma\Sigma$ и диагональный $\Lambda\Sigma$ корреляторы:

$$
\Pi_A(t) = \frac{2N!\,<\overline{q}q>}{3N\pi^2 t^2}\left[1 - \frac{3\pi^2 f_\pi^2 t^2}{2N}\left(1 + \tfrac{1}{16} m_0^2 t^2 + \tfrac{5}{36} m_1^2 t^2\right)\right]. \tag{3.5.22}
$$

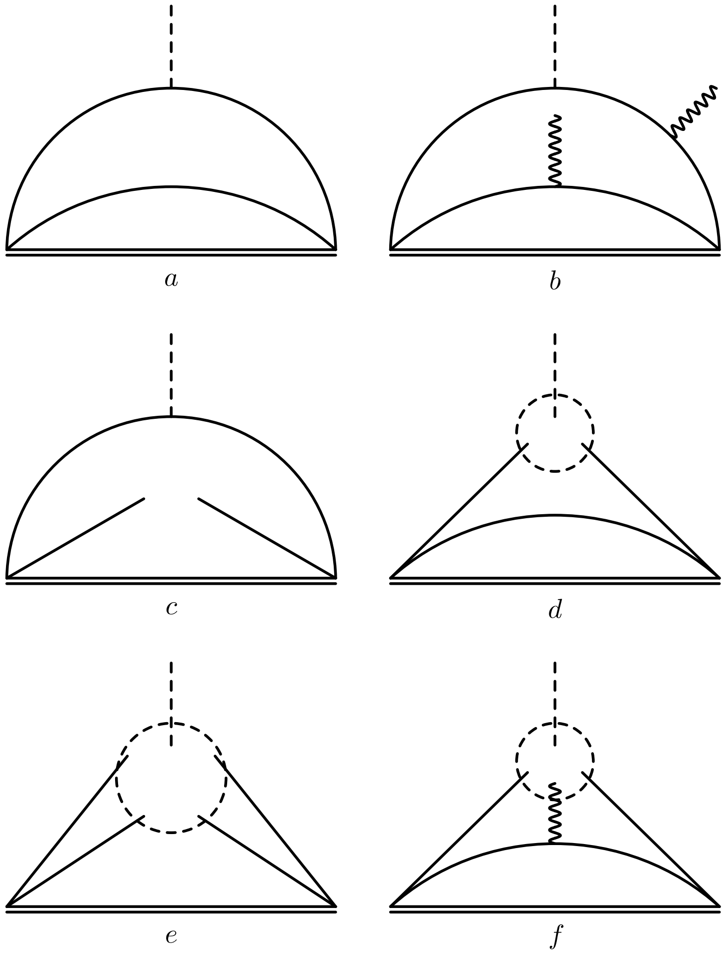


Рис. 3.32. Коррелятор барионных токов в аксиальном внешнем поле.

Эти корреляторы соответствуют спектральным плотностям

$$\rho_A(\omega) = \frac{N!\,f_\pi^2}{N\pi^2}\left[\omega^2 - \left(\frac{5}{3} \pm \frac{C_B}{C_F}\right)\frac{m_1^2}{6}\right]\,, \quad \rho_A(\omega) = -\frac{2N!\,{<}\overline{q}q{>}\omega}{3N\pi^2} \tag{3.5.23}$$

(плюс $\delta(\omega)$ и ее производные). Мы используем стандартную модель континуума $\rho_A^{\text{cont}}(\omega) = \rho_A^{\text{theor}}\theta(\omega - \varepsilon_c)$. Приравнивая OPE (3.5.21), (3.5.22) и спектральное представление при $t = -i/E$, мы получаем правила сумм

$$\begin{aligned}\left(\frac{2g_2 f_\Sigma^2}{E} + c\right)e^{-\varepsilon_\Sigma/E} &= \frac{4f_\pi^2}{\pi^2}E^3\left[\delta_2\left(\varepsilon_c/E\right) - \frac{13m_1^2}{72E^2}\delta_0\left(\varepsilon_c/E\right) + \frac{\pi^2{<}\overline{q}q{>}^2}{18f_\pi^2 E^4}\right]\\ &= -\frac{4{<}\overline{q}q{>}}{\pi^2}E^2\left[\delta_1\left(\varepsilon_c/E\right) + \frac{\pi^2 f_\pi^2}{2E^2}\left(1 - \frac{m_0^2}{16E^2} - \frac{5m_1^2}{36E^2}\right)\right]\,,\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

$$\left(\frac{2g_3 f_\Lambda f_\Sigma}{\Delta}\tanh\frac{\Delta}{2E}+\frac{c}{2}\right)\left(e^{-\varepsilon_\Lambda/E}+e^{-\varepsilon_\Sigma/E}\right)$$
$$=\frac{4f_\pi^2}{\pi^2}E^3\left[\delta_2\left(\varepsilon_c/E\right)-\frac{7m_1^2}{72E^2}\delta_0\left(\varepsilon_c/E\right)+\frac{\pi^2{<}\bar{q}q{>}^2}{18f_\pi^2E^4}\right]$$
$$=-\frac{4{<}\bar{q}q{>}}{\pi^2}E^2\left[\delta_1\left(\varepsilon_c/E\right)+\frac{\pi^2 f_\pi^2}{2E^2}\left(1-\frac{m_0^2}{16E^2}-\frac{5m_1^2}{36E^2}\right)\right]. \qquad (3.5.25)$$

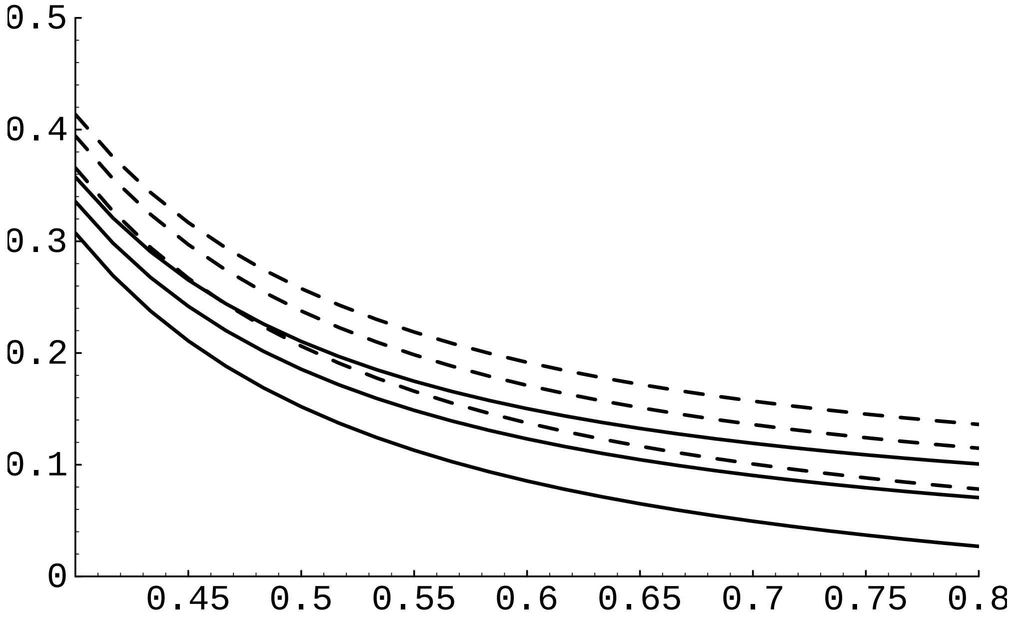
Теперь мы перейдем к численному анализу. Мы принимаем энергии и вычеты Λ и Σ, полученные из правил сумм (§3.3, [**117**]):

$$\varepsilon_\Lambda = 0.8\mathrm{GeV}\,,\quad f_\Lambda = 0.03\mathrm{GeV}^3\,,\quad \varepsilon_\Sigma = 1.0\mathrm{GeV}\,,\quad f_\Sigma = 0.04\mathrm{GeV}^3\,.$$

Мы полагаем эффективный порог континуума в A–членах Σ–Σ корреляторов таким же, как и без внешнего поля: $\varepsilon_c = (1.3 \pm 0.1)$GeV; для Λ–Σ корреляторов мы используем $\varepsilon_c = (1.1 \pm 0.1)$GeV.

Рис. 3.33a показывает результаты для $g_2 f_\Sigma^2/(1.6\cdot 10^{-3}\mathrm{GeV}^6)$ и $g_3 f_\Lambda f_\Sigma/(1.2\cdot 10^{-3}\mathrm{GeV}^6)$, полученные из диагонального Σ–Σ и недиагонального Λ–Σ корреляторов (первые формулы в (3.5.24) и (3.5.25)). Спектральная плотность (3.5.23) ведет себя как ω^2, поэтому вклад континуума в правила сумм быстро растет: он равен результату при $E \approx 600$MeV и в 3 раза больше результата при $E \approx 900$MeV. Если мы предположим, что ошибка во вкладе континуума составляет, скажем, 30%, то мы не можем доверять правилам сумм при $E > 900$MeV. Нижняя граница области применимости определяется сходимостью рядов OPE для корреляторов. Он ведет себя как $1-(190\mathrm{MeV}/E)^2+(245\mathrm{MeV}/E)^4$ для Σ–Σ коррелятора; в случае Λ–Σ 140MeV входит вместо 190MeV. Кажется, что OPE должно быть применимо при $E > 400$MeV. Правила сумм в этом окне нестабильны, и потому не дают никаких определенных предсказаний.

Рис. 3.33b показывает результаты для $g_2 f_\Sigma^2/(1.6\cdot 10^{-3}\mathrm{GeV}^6)$ и $g_3 f_\Lambda f_\Sigma/(1.2\cdot 10^{-3}\mathrm{GeV}^6)$, полученные из недиагонального Σ–Σ и диагонального Λ–Σ корреляторов (вторые формулы в (3.5.24) и (3.5.25)). Спектральная плотность (3.5.23) ведет себя как ω, и вклад континуума растет не так быстро: он равен результату при $E \approx 1$GeV и в 3 раза больше результата при $E \approx 1.6$GeV. Ряд OPE ведет себя как $1+(290\mathrm{MeV}/E)^2\left[1-(150\mathrm{MeV}/E)^2\right]$, и область применимости начинается при бóльших E. Стабильность этих правил сумм лучше. Они дают $g_{2,3} = 0.4 \div 0.7$.



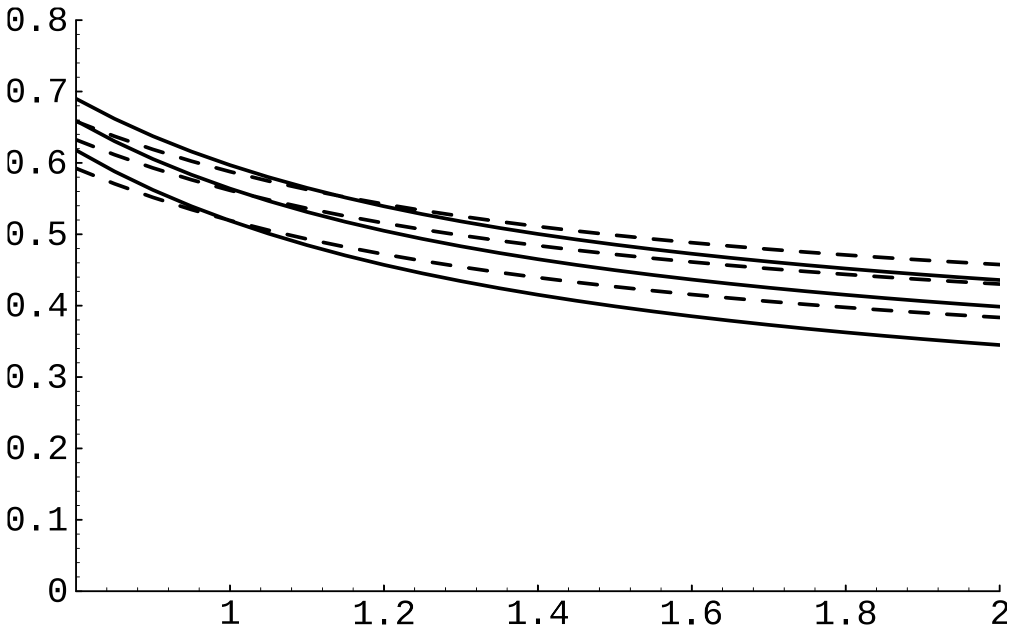


Рис. 3.33. Правила сумм для $g_{2,3}$ (сплошные и штриховые линии): a — диагональное $\Sigma\Sigma$ и недиагональное $\Lambda\Sigma$ правила сумм; b — недиагональное $\Sigma\Sigma$ и диагональное $\Lambda\Sigma$ правила сумм.

ГЛАВА 4

Асимптотика формфакторов тяжелых мезонов

Эта глава посвящена исследованию асимптотики формфакторов тяжелых мезонов методами, развитыми для жестких эксклюзивных процессов в КХД, и основана на работе [**26**].

4.1. Введение

В эффективной теории тяжелого кварка спин тяжелого кварка не взаимодействует с глюонами в ведущем порядке по $1/m$ (где m — масса тяжелого кварка). Поэтому его можно вращать (спиновая симметрия) или даже выключить (суперфлейворная симметрия), не влияя на динамику.

В ведущем порядке по $1/m$, переходы между мезонами в основном состоянии описываются одним формфактором Исгура–Вайса [**56, 57**]:

$$<M(v')|\widetilde{Q}_v^* \widetilde{Q}_{v'}|M(v)> = \xi(v \cdot v')\, \overline{u}(v')\, u(v)\,, \tag{4.1.1}$$

где v, v' — скорости мезонов. В следующем порядке, появляются $1/m$ поправки к токам и к лагранжиану HQET [**139**]. Поправки первого типа могут быть выражены через матричные элементы операторов размерности 4

$$<M(v')|(iD^{\mu+}\widetilde{Q}_v^*)\widetilde{Q}_{v'}|M(v)> = \overline{u}(v')\, \xi^\mu(v,v')\, u(v)\,, \tag{4.1.2}$$

где

$$\xi^\mu(v,v') = \xi_+(v\cdot v')(v+v')^\mu + \xi_-(v\cdot v')(v-v')^\mu + \xi_3(v\cdot v')\,\gamma^\mu\,. \tag{4.1.3}$$

Уравнения движения, $iv \cdot D\widetilde{Q}_v = 0$, могут быть использованы, чтобы связать $\xi_\pm$ с ξ_3 [**139**]. Результат имеет вид

$$\xi_+ = \frac{\frac{1}{2}(v\cdot v' - 1)\,\varepsilon_0\,\xi - \xi_3}{v\cdot v' + 1}\,, \quad \xi_- = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\xi\,, \tag{4.1.4}$$

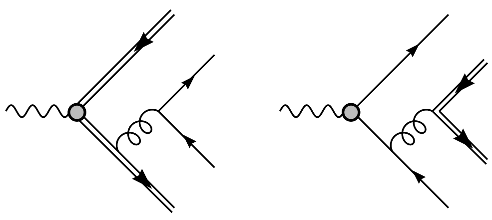
где ε_0 — энергия мезона, т. е. разность между массой мезона и тяжелого кварка. Поэтому остается только один независимый формфактор. Поправки $1/m$ к лагранжиану дают матричные элементы нелокальных операторов:

$$
\begin{aligned}
&<M(v')|\, i\int dx\, T\{\widetilde{Q}_v^*\widetilde{Q}_{v'}(0), \widetilde{Q}_v^*(iD)^2\widetilde{Q}_v(x)\}|M(v)> = 2\chi_1(v\cdot v')\,\overline{u}(v')u(v)\,,\\
&<M(v')|\, i\int dx\, T\{\widetilde{Q}_v^*\widetilde{Q}_{v'}(0), \widetilde{Q}_v^*\, iG^{\mu\nu}\widetilde{Q}_v(x)\}|M(v)> = 2\overline{u}(v')\,\chi^{\mu\nu}(v,v')\,u(v)\,,
\end{aligned}
\tag{4.1.5}
$$

где

$$
\chi^{\mu\nu}(v,v') = \chi_2(v\cdot v')(\gamma^\mu v'^\nu - \gamma^\nu v'^\mu) - 2\chi_3(v\cdot v')\sigma^{\mu\nu}\,. \tag{4.1.6}
$$

Во втором матричном элементе (4.1.5), индексы μ и ν ограничены подпространством, ортогональным v. Явные выражения для формфакторов мезонов через ξ, ξ_3 и χ_i приведены в [**139**]. При умеренных значениях $v\cdot v'$, эти функции подробно изучались в рамках правил сумм КХД, как в ведущем [**130**]–[**134**], так и в следующем [**135, 20, 136**] порядке $1/m$ разложения (§3.2). Здесь мы рассмотрим поведение формфакторов в области $|v\cdot v'|\gg 1$. Она недоступна в слабых полулептонных распадах, но может быть (по крайней мере в принципе) исследована в реакции $e^+e^- \to M^{(*)}\overline{M}^{(*)}$. Используя методы, развитые для жестких эксклюзивных процессов, мы вычислим асимптотическое поведение формфакторов модельно–независимым образом.



(a) (b)

Рис. 4.1. Вклад обмена жестким глюоном в формфактор тяжелого мезона.

Наши результаты могут быть резюмированы следующим образом. При $|v\cdot v'|\gg 1$, передача импульса легкому кварку велика: $q^2_{\rm light}\sim -\Lambda^2\, v\cdot v'$, где Λ порядка типичного масштаба масс адронов. Как показано на Рис. 4.1a, этот импульс передается жестким глюоном, и применимы методы, развитые для жестких эксклюзивных процессов в КХД [**157, 158**] (см. обзоры [**159, 160**]). В системе “кирпичной стены”, где $\vec{v}\,' = -\vec{v}$, проекция полного момента импульса на ось z (направленную вдоль $\vec{v}$) равна проекции спина мезона (напомним, что спин тяжелого кварка выключен). Поскольку она сохраняется, спиральность мезона $\pm\frac{1}{2}$ меняет знак [**58**]. Поэтому асимптотическое поведение формфактора Исгура–Вайса определяется интерференцией между волновыми функциями ведущего твиста (кварк–антикварковой) и неведущего твиста (кварк–антикварковой и кварк–антикварк–глюонной). Оно дается оценкой

$$\xi(v \cdot v') \sim \frac{\alpha_s \tilde{f}^2}{\Lambda^3 (v \cdot v')^2}\,. \tag{4.1.7}$$

Ситуация аналогична известному случаю π–ρ формфактора [**159**]. В порядке $1/m$, однако, некоторые вклады включают только волновую функцию ведущего твиста. Они сохраняют спиральность мезона, и ведут себя как

$$\frac{\xi_3(v \cdot v')}{m} \sim \frac{v \cdot v'\, \chi_2(v \cdot v')}{m} \sim \frac{\alpha_s \tilde{f}^2}{m \Lambda^2\, v \cdot v'}\,. \tag{4.1.8}$$

Ведущий порядок $1/m$ разложения, даваемый функцией Исгура–Вайса, доминирует при $|v \cdot v'| \ll m/\Lambda$. При $|v \cdot v'| \gg m/\Lambda$, однако, вклады ξ_3 и χ_2 в (4.1.8) становятся главными. Они нарушают спиновую симметрию тяжелого кварка, т. е. дают неуниверсальные вклады в различные мезонные формфакторы. Члены высшего порядка ($1/m^2$ и выше) не могут убывать медленнее, чем $1/(v \cdot v')$, поскольку это поведение соответствует ведущему твисту, и потому всегда остаются малыми поправками.

Полезно посмотреть на эту ситуацию с противоположной точки зрения. При асимптотически больших $|q^2| \simeq 2m^2 |v \cdot v'| \gg m^2/x$ (где q — импульс, переданный мезону, и $x \sim \Lambda/m$ — доля импульса мезона, несомая легким кварком), формфактор тяжелого мезона ведет себя так же, как и пиона [**157**]–[**160**]:

$$F(q^2) \sim \frac{\alpha_s f_M^2}{x^2 q^2}\,, \tag{4.1.9}$$

что точно соответствует (4.1.8). Однако, существует вклад в поправку неведущего твиста ($1/q^4$), который пропорционален m^2. Он становится важным при умеренных q^2:

$$F(q^2) \sim \frac{\alpha_s m^2 f_M^2}{x^3 q^4}\,. \tag{4.1.10}$$

Этот вклад точно соответствует (4.1.7). Он доминирует при $|q^2| \ll m^2 x$. Высшие степенные поправки ($1/q^6$ и выше) не могут быть усилены сильнее, чем m^2, поскольку иначе формфактор бы расходился в пределе больших масс, и потому всегда остаются малыми поправками.

До сих пор мы рассматривали формфакторы для переходов, индуцированных токами, содержащими только тяжелые кварки. В случая, скажем, электромагнитного тока, который содержит также поля легких кварков, появляются вклады типа Рис. 4.1b. Однако, они ведут себя как

$$\frac{\alpha_s \tilde{f}^2}{m^3\, v \cdot v'} \sim \frac{\alpha_s f_M^2}{q^2}\,, \tag{4.1.11}$$

и потому ими можно пренебречь.

Резюмируя: при $1 \ll |v \cdot v'| \ll m/\Lambda$ главный вклад в формфакторы мезонов происходит от универсальной функции Исгура–Вайса. Он включает обмен продольным жестким глюоном и изменение спиральности мезона, что соответствует интерференции между волновыми функциями ведущего и неведущего твиста. При $|v \cdot v'| \gg m/\Lambda$, с другой стороны, ситуация становится такой же, как в безмассовой КХД. Асимптотическое поведение формфакторов мезонов определяется вкладами ведущего твиста, которые не являются универсальными. Они управляются обменом поперечным жестким глюоном, сохраняющим спиральность мезона. Сумма этих двух вкладов описывает асимптотическое поведение формфакторов во всей области $|v \cdot v'| \gg 1$. Описанная здесь простая картина слегка модифицируется эффектами глюонного излучения, которые могут быть рассмотрены в теории возмущений, улучшенной по ренормгруппе. Они ведут к небольшому дополнительному степенному подавлению формфакторов.

Здесь уместны некоторые замечания о литературе, посвященной приложению пертурбативной КХД к вычислению формфакторов тяжелых мезонов. Простая модель мезона из двух тяжелых кварков разных масс была рассмотрена в [**161**]. Было замечено, что некоторые формфакторы должны иметь нули в физической области. Мы подтверждаем это интересное наблюдение, хотя и не соглашаемся с некоторыми результатами этой работы (см. §4.5). Подобная модель была также рассмотрена в [**162**] и ряде других работ. Там использовалась одна спиновая структура волновой функции тяжелого мезона, которая определяется из условия, что легкий кварк находится в покое в системе покоя мезона.

Поэтому все кварк–антикварковые волновые функции имеют общую форму, которая принимается равной $\delta(\omega-\mu)$, где μ — конституентная масса легкого кварка. Как мы увидим ниже, реалистические волновые функции тяжелого мезона $\varphi_+(\omega)$ и $\varphi_-(\omega)$ не совпадают, и не могут быть с достаточной точностью приближены функцией с острым пиком. Интегралы для формфакторов получают существенные вклады от области малых ω, которая отсутствует в приближении острого пика. Поэтому результаты, полученные в такой конституентной кварковой модели, могут в лучшем случае рассматриваться как грубые оценки. Пертурбативная КХД и кварковая модель недавно применялись для полулептонных распадов $\overline{B} \to D^{(*)}\ell\,\overline{\nu}$, для которых $1 < v\cdot v' < 1.6$. По нашему мнению, такие значения $v\cdot v'$ слишком малы, чтобы рассматривать глюон с $k_g^2 \sim -\Lambda^2\, v\cdot v'$ пертурбативно.

4.2. Кварк–антикварковые волновые функции

Мы определим кварк–антикварковые волновые функции $\tilde{\varphi}_\pm(t)$ тяжелого мезона через матричный элемент билокального оператора

$$\widetilde{O}(t) = \widetilde{Q}^*(0)\,E(0,z)\,q(z)\,; \quad t = v\cdot z\,, \tag{4.2.1}$$

где z — светоподобный вектор ($z^2=0$), и

$$E(x,y) = P\exp\left(-i\int\limits_x^y dz^\mu\,A_\mu(z)\right) \tag{4.2.2}$$

обеспечивает калибровочную инвариантность. В светоподобной калибровке ($A_+ = 0$) $E(0,z) = 1$. Поскольку в этом параграфе мы рассматриваем одно поле тяжелого кварка $\widetilde{Q}_v^*$, мы будем для простоты опускать индекс скорости. Аналогично, мы будем писать M и u вместо $M(v)$ и $u(v)$. Мезонный матричный элемент оператора $\widetilde{O}(t)$ имеет две γ–матричных структуры, u и $\hat{z}\,u$, и мы определяем

$$<0|\widetilde{O}(t)|M> = \tilde{f}\left(\tilde{\varphi}_+(t) + \frac{1}{2t}\left[\tilde{\varphi}_-(t) - \tilde{\varphi}_+(t)\right]\hat{z}\right)u\,. \tag{4.2.3}$$

Удобно ввести два светоподобных вектора $n_\pm^\mu = (1,0,0,\mp1)$, так что $n_\pm^2 = 0$ и $n_+\cdot n_- = 2$. Любой вектор a^μ может быть разложен как $a^\mu = \frac{1}{2}(a_+ n_-^\mu + a_- n_+^\mu) + a_\perp^\mu$, где $a_\pm = a\cdot n_\pm$. Отсюда следует $a\cdot b = \frac{1}{2}(a_+b_- + a_-b_+) - \vec{a}_\perp\cdot\vec{b}_\perp$. Если мезон находится в покое ($v_+ = v_- = 1$), то мы можем переписать (4.2.3) как

$$<0\,|\widetilde{O}(t)|M> = \tfrac{1}{2}\tilde{f}\left[\tilde{\varphi}_+(t)\gamma_- + \tilde{\varphi}_-(t)\gamma_+\right] u\,. \tag{4.2.4}$$

Для мезона с произвольной скоростью в плоскости n_+–n_-,

$$<0\,|\widetilde{O}(t)|M> = \tfrac{1}{2}\tilde{f}\left[\tilde{\varphi}_+(t)\, v_+\gamma_- + \tilde{\varphi}_-(t)\, v_-\gamma_+\right] u\,. \tag{4.2.5}$$

Если мы введем быстроту ϑ как

$$v^\mu = (\cosh\vartheta, 0, 0, \sinh\vartheta)\,, \tag{4.2.6}$$

то $v_+ = e^\vartheta$ и $v_- = e^{-\vartheta}$. Поэтому для быстро движущегося мезона $\tilde{\varphi}_+$ является волновой функцией ведущего твиста, тогда как $\tilde{\varphi}_-$ имеет неведущий твист. Удобно спроектировать на эти волновые функции при помощи

$$<0\,|\widetilde{O}_\pm(t)|M> = \tilde{f}\,\tilde{\varphi}_\pm(t)\,\gamma_\pm u\,, \quad \widetilde{O}_\pm(t) = \gamma_\pm \widetilde{O}(t)\,. \tag{4.2.7}$$

Волновые функции $\tilde{\varphi}_\pm(t)$ зависят от светоподобной раздвижки t. Мы определяем волновые функции в импульсном пространстве как

$$\varphi_\pm(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\,\tilde{\varphi}_\pm(t)\,e^{i\omega t}\,, \quad \tilde{\varphi}_\pm(t) = \int d\omega\,\varphi_\pm(\omega)\,e^{-i\omega t}\,. \tag{4.2.8}$$

Переменная ω имеет смысл светоподобной проекции p_+ импульса легкого кварка в системе покоя тяжелого мезона. Положение сингулярностей в комплексной плоскости t таково, что $\varphi_\pm(\omega)$ обращается в ноль при $\omega < 0$. Волновые функции нормированы как

$$\tilde{\varphi}_\pm(0) = \int\limits_0^\infty d\omega\,\varphi_\pm(\omega) = 1\,. \tag{4.2.9}$$

Мы можем формально ввести операторы $O_\pm(\omega)$ так, что

$$<0\,|O_\pm(\omega)|M> = \tilde{f}\,\varphi_\pm(\omega)\,\gamma_\pm u\,. \tag{4.2.10}$$

Отсюда следует

$$O_\pm(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\,\widetilde{O}_\pm(t)\,e^{i\omega t} = \widetilde{Q}^*(0)\,\gamma_\pm\,\delta(iD_+ - \omega)\,q(0)\,, \quad \widetilde{O}_\pm(t) = \int d\omega\,O_\pm(\omega)\,e^{-i\omega t}\,. \tag{4.2.11}$$

Разлагая по степеням t определения (4.2.8) и (4.2.11), мы получаем

$$\widetilde{O}_\pm(t) = \sum_{n=0}^{\infty} O_\pm^{(n)} \frac{(-it)^n}{n!}\,, \quad \tilde{\varphi}_\pm(t) = \sum_{n=0}^{\infty} <\omega^n>_\pm \frac{(-it)^n}{n!}\,, \tag{4.2.12}$$

где

$$O_\pm^{(n)} = \int d\omega\, O_\pm(\omega)\, \omega^n = \widetilde{Q}^* \gamma_\pm (iD_+)^n q\,, \quad <\omega^n>_\pm = \int d\omega\, \varphi_\pm(\omega)\, \omega^n\,. \tag{4.2.13}$$

Из уравнения (4.2.10) тогда следует соотношение между моментами волновых функций и матричными элементами локальных операторов $O_\pm^{(n)}$:

$$<0\,|O_\pm^{(n)}|M> = \tilde{f}\,<\omega^n>_\pm \gamma_\pm u\,. \tag{4.2.14}$$

Используя уравнения движения, мы можем выразить первые моменты волновых функций через ε_0. В общем случае, мы можем записать

$$<0\,|\widetilde{Q}^* iD^\mu q|M> = \tilde{f}\,(av^\mu + b\gamma^\mu)u\,. \tag{4.2.15}$$

Уравнение движения для легкого кварка, $i\hat{D}\,q = 0$, приводит к $(a + 4b) = 0$. Уравнение движения для тяжелого кварка, $iv \cdot D\widetilde{Q} = 0$, дает

$$<0\,|\widetilde{Q}^* iv \cdot D\, q|M> = iv \cdot \partial <0\,|\widetilde{Q}^* q|M> = \varepsilon_0 <0\,|\widetilde{Q}^* q|M>\,, \tag{4.2.16}$$

где $\varepsilon_0 = m_M - m$ — энергия мезона M в HQET. Это соотношение приводит к $a + b = \varepsilon_0$, и потому

$$<0\,|\widetilde{Q}^* iD^\mu q|M> = \tfrac{1}{3}\tilde{f}\varepsilon_0\,(4v^\mu - \gamma^\mu)u\,. \tag{4.2.17}$$

Используя этот результат, мы получаем первые моменты волновых функций

$$<\omega>_+ = \tfrac{4}{3}\varepsilon_0\,, \quad <\omega>_- = \tfrac{2}{3}\varepsilon_0\,. \tag{4.2.18}$$

Аналогичным образом можно проанализировать вторые моменты. Рассмотрим матричный элемент

$$<0\,|\widetilde{Q}^* iD^\mu iD^\nu q|M> = \tilde{f}\,\Theta^{\mu\nu} u\,, \tag{4.2.19}$$

где наиболее общая форма $\Theta^{\mu\nu}$ есть

$$\Theta^{\mu\nu} = c_1 v^\mu v^\nu + c_2 g^{\mu\nu} + c_3(\gamma^\mu v^\nu + \gamma^\nu v^\mu) + c_4(\gamma^\mu v^\nu - \gamma^\nu v^\mu) - c_5\sigma^{\mu\nu}\,. \tag{4.2.20}$$

Уравнения движения приводят к трем соотношениям между пятью параметрами c_i, откуда следует, что матричный элемент (4.2.19) полностью определяется своей антисимметричной частью, т. е. матричным элементом глюонного поля $iG^{\mu\nu} = [iD^\mu, iD^\nu]$. По причинам, которые скоро станут ясны, мы вводим два адронных параметра λ_E^2 и λ_H^2:

$$c_4 = \tfrac{1}{6}(\lambda_H^2 - \lambda_E^2)\,, \quad c_5 = \tfrac{1}{6}\lambda_H^2 \tag{4.2.21}$$

(их перенормировка рассматривалась в §2.8). В терминах этих величин, мы получаем

$$\begin{aligned} <0\,|\widetilde{Q}^* iG^{\mu\nu} q|M> =& \tfrac{1}{3}\tilde{f}\left[(\lambda_H^2 - \lambda_E^2)(\gamma^\mu v^\nu - \gamma^\nu v^\mu) - \lambda_H^2 \sigma^{\mu\nu}\right] u\,, \\ <0\,|\widetilde{Q}^* \tfrac{1}{2}[iD^\mu, iD^\nu]_+\, q|M> =& \tfrac{1}{3}\tilde{f}\left[(6\varepsilon_0^2 + 2\lambda_E^2 + \lambda_H^2) v^\mu v^\nu - (\varepsilon_0^2 + \lambda_E^2 + \lambda_H^2) g^{\mu\nu}\right. \\ & \left. - (\varepsilon_0^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_E^2)(\gamma^\mu v^\nu + \gamma^\nu v^\mu)\right] u\,. \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Из второго соотношения следует, что вторые моменты волновых функций равны

$$<\omega^2>_+ = 2\varepsilon_0^2 + \tfrac{2}{3}\lambda_E^2 + \tfrac{1}{3}\lambda_H^2\,, \quad <\omega^2>_- = \tfrac{2}{3}\varepsilon_0^2 + \tfrac{1}{3}\lambda_H^2\,. \tag{4.2.23}$$

То есть моменты $<\omega^2>_\pm$ связаны с нормировочными интегралами кварк–антикварк–глюонных волновых функций.

Наше определение (4.2.21) таково, что в системе покоя тяжелого мезона величины λ_E^2 и λ_H^2 параметризуют матричные элементы хромоэлектрического и хромомагнитного полей. Определяя $E_i = G_{0i}$, $H_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}G_{jk}$, и $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$, мы получаем

$$<0\,|\widetilde{Q}^* i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\,q|M> = \tilde{f}\lambda_E^2 u\,, \quad -<0\,|\widetilde{Q}^*\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\,q|M> = \tilde{f}\lambda_H^2 u\,. \tag{4.2.24}$$

В заключение этого параграфа, мы включим спин тяжелого кварка, и выразим многочисленные кварк–антикварковые волновые функции псевдоскалярных и векторных мезонов в основном состоянии, M и M^*, через волновые функции в HQET $\varphi_\pm$. Для псевдоскалярного мезона M, матричные элементы псевдоскалярного, аксиального и тензорного токов отличны от нуля. Мы определяем четыре волновых функции[1]

$$
\begin{aligned}
<0\,|\overline{Q}(0)\,\gamma_5\,q(z)|M> &= -\,i f_M m_M\,\tilde{\varphi}_P\,,\\
<0\,|\overline{Q}(0)\,\gamma^\mu\gamma_5\,q(z)|M> &= f_M[i\tilde{\varphi}_{A1}\,p^\mu - m_M\,\tilde{\varphi}_{A2}\,z^\mu]\,,\\
<0\,|\overline{Q}(0)\,\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\,q(z)|M> &= f_M\,\tilde{\varphi}_T\,(p^\mu z^\nu - p^\nu z^\mu)\,,
\end{aligned}
\tag{4.2.25}
$$

где $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_i(p\cdot z) = \tilde{\varphi}_i(m_M t)$. Для простоты мы опустили $E(0,z)$, т. е. использовали калибровку $A_+ = 0$. В пределе тяжелого кварка мы получаем

$$
\tilde{\varphi}_P = \frac{\tilde{\varphi}_+(t)+\tilde{\varphi}_-(t)}{2}\,,\quad \tilde{\varphi}_{A1} = \tilde{\varphi}_+(t)\,,\quad \tilde{\varphi}_{A2} = \tilde{\varphi}_T = \frac{i}{2}\,\frac{\tilde{\varphi}_+(t)-\tilde{\varphi}_-(t)}{t}\,.
\tag{4.2.26}
$$

Условия нормировки при $t = 0$ в этом пределе имеют вид

$$
\tilde{\varphi}_P(0) = \tilde{\varphi}_{A1}(0) = 1\,,\quad \tilde{\varphi}_{A2}(0) = \tilde{\varphi}_T(0) = \frac{\varepsilon_0}{3}\,,
\tag{4.2.27}
$$

где второе соотношение следует из (4.2.12) и (4.2.18).

Для векторного мезона M^* с вектором поляризации e, матричные элементы скалярного, векторного, аксиального и тензорного токов отличны от нуля, и мы вводим шесть волновых функций:

$$
\begin{aligned}
<0\,|\overline{Q}(0)\,q(z)|M^*> &= i f_{M^*} m_{M^*}\,\tilde{\varphi}_S\,z\cdot e\,,\\
<0\,|\overline{Q}(0)\,\gamma^\mu\,q(z)|M^*> &= f_{M^*}\Big[m_{M^*}\,\tilde{\varphi}_{V1}\,e^\mu + i\tilde{\varphi}_{V2}\,(p\cdot z\,e^\mu - e\cdot z\,p^\mu)\Big]\,,\\
<0\,|\overline{Q}(0)\,\gamma^\mu\gamma_5\,q(z)|M^*> &= f_{M^*}\tilde{\varphi}_A\,\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} z_\alpha p_\beta e_\gamma\,,\\
<0\,|\overline{Q}(0)\,\sigma^{\mu\nu}\,q(z)|M^*> &= -\,i\,f_{M^*}\Big[i\tilde{\varphi}_{T1}\,(e^\mu p^\nu - e^\nu p^\mu) - m_{M^*}\,\tilde{\varphi}_{T2}\,(e^\mu z^\nu - e^\nu z^\mu)\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.28}
$$

В пределе тяжелого кварка

$$
\tilde{\varphi}_{V1} = \tilde{\varphi}_{T1} = \tilde{\varphi}_+(t)\,,\quad \tilde{\varphi}_S = \tilde{\varphi}_{V2} = \tilde{\varphi}_A = \tilde{\varphi}_{T2} = \frac{i}{2}\,\frac{\tilde{\varphi}_+(t)-\tilde{\varphi}_-(t)}{t}\,,
\tag{4.2.29}
$$

с условиями нормировки

$$
\tilde{\varphi}_{V1}(0) = \tilde{\varphi}_{T1}(0) = 1\,,\quad \tilde{\varphi}_S(0) = \tilde{\varphi}_{V2}(0) = \tilde{\varphi}_A(0) = \tilde{\varphi}_{T2}(0) = \frac{\varepsilon_0}{3}\,.
\tag{4.2.30}
$$

[1]В отличие от обозначений, используемых в остальных формулах этой главы, здесь и в (4.2.28) мы пользуемся релятивистской нормировкой состояний.

Волновые функции в импульсном представлении в КХД определяются как

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int d(p\cdot z)\, \tilde{\varphi}_i(p\cdot z)\, e^{-ixp\cdot z}\,, \tag{4.2.31}$$

так что $x = \omega/m_M$. На основании поведения собственных функций уравнений эволюции, а также аргументов, основанных на правилах сумм, обычно полагают, что для псевдоскалярных мезонов $\varphi_{A1}(x) \sim x$ и $\varphi_P(x) \sim 1$ при $x \to 0$ [**159**]. Отсюда для волновых функций в HQET следует

$$\varphi_+(\omega) \sim \omega\,, \quad \varphi_-(\omega) \sim 1 \tag{4.2.32}$$

при $\omega \to 0$. В §4.4 мы действительно получим такое поведение из явного вычисления волновых функций с использованием правил сумм КХД.

4.3. Уравнения эволюции

Определения предыдущего параграфа несколько формальны, поскольку используемые операторы нуждаются в перенормировке. В этом параграфе мы обсудим, как устранить ультрафиолетовые расходимости в их матричных элементах.

Мы используем $\overline{\mathrm{MS}}$ перенормировку в $d = 4 - 2\epsilon$ мерном пространстве. Голые и перенормированные операторы связаны соотношением

$$O_\pm^{\mathrm{bare}}(\omega) = \int d\omega'\, Z_\pm(\omega,\omega')\, O_\pm(\omega')\,, \tag{4.3.1}$$

где

$$Z_\pm(\omega,\omega') = \delta(\omega-\omega') - \frac{1}{2\epsilon}\, z_\pm(\omega,\omega') + \cdots\,, \tag{4.3.2}$$

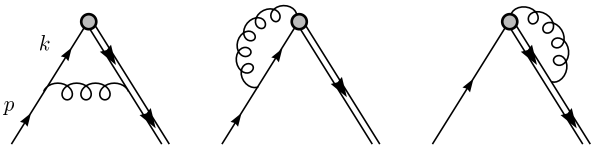
а многоточие представляет высшие полюса по $1/\epsilon$. Операторы $O_\pm(\omega)$ и потому их матричные элементы $\tilde{f}\varphi_\pm(\omega)$ удовлетворяют уравнению ренормгруппы

$$\frac{d\,\tilde{f}\varphi_\pm(\omega)}{d\log\mu} + \int d\omega'\, \Gamma_\pm(\omega,\omega')\, \tilde{f}\varphi_\pm(\omega') = 0\,, \tag{4.3.3}$$

где аномальные размерности $\Gamma_\pm(\omega,\omega')$ даются формулой

$$\Gamma_\pm(\omega,\omega') = \alpha_s \frac{\partial}{\partial\alpha_s}\, z_\pm(\omega,\omega')\,. \tag{4.3.4}$$

Уравнение (4.3.3) аналогично уравнению эволюции Бродского–Лепажа в КХД [**158**].



(a) (b) (c)

Рис. 4.2. Однопетлевые диаграммы для матричного элемента $<0\,|O_\pm^{\mathrm{bare}}(\omega)|\omega'>$.

Чтобы получить аномальные размерности $\Gamma_\pm(\omega,\omega')$ в однопетлевом приближении, рассмотрим матричные элементы $<0\,|O_\pm^{\mathrm{bare}}(\omega)|\omega'>$, где $|\omega'>$ представляет состояние, содержащее тяжелый скалярный антикварк, находящийся в покое, и легкий кварк с импульсом $p_+ = \omega'$. В соответствии с (4.3.1), эти матричные элементы равны $Z_\pm(\omega,\omega')\,\gamma_\pm u$. Соответствующие одночастично–неприводимые диаграммы показаны на Рис. 4.2. Хотя операторы $O_\pm(\omega)$ и (4.2.11) принимают особенно простой вид в калибровке $A_+ = 0$, мы не будем использовать такую сингулярную калибровку, а будем работать в калибровке Фейнмана.[2] Чтобы получить правила Фейнмана для вершин, содержащих операторы $O_\pm(\omega)$, мы начинаем с их определения как преобразования Фурье нелокальных операторов $\tilde{O}_\pm(t)$, и получаем в первом порядке по глюонному полю

$$O_\pm(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{i\omega t}\left\{\widetilde{Q}^*(0)\,\gamma_\pm\, e^{t\partial_+}\, q(0) - i\int d\tau\, \widetilde{Q}^*(0)\,\gamma_\pm\, e^{\tau\partial_+}\, A_+(0)\, e^{(t-\tau)\partial_+}\, q(0) + \cdots\right\}. \tag{4.3.5}$$

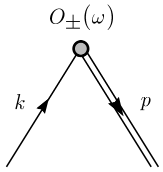
Теперь несложно вывести правила Фейнмана, показанные на Рис. 4.3.

Проследим вычисление диаграмм Рис. 4.2. Вклад первой диаграммы равен

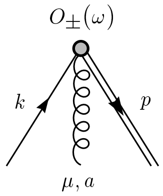
$$-iC_F\,\frac{\alpha_s}{2\pi}\,\mu^{2\epsilon}\int dk_+ dk_-\,\frac{d^{2-2\epsilon}k_\perp}{(2\pi)^{2-2\epsilon}}\,\frac{\delta(k_+-\omega)\,\gamma_\pm\,\hat{k}\,u}{(k^0-i0)(k^2+i0)[(k-p)^2+i0]}\,. \tag{4.3.6}$$

Интеграл по k_+ тривиален, а по k_- вычисляется по вычетам. Полюса подынтегрального выражения расположены в точках $k_- = -\omega + i0$, $k_- = (\vec{k}_\perp^2 - i0)/\omega$ и $k_- = (\vec{k}_\perp^2 - i0)/(\omega-\omega')$. При $\omega < 0$ все полюса лежат в верхней полуплоскости, и интеграл обращается в ноль. При $\omega > 0$, необходимо различать случаи $\omega > \omega'$ и $\omega < \omega'$. При $\omega > \omega'$ мы замыкаем контур в верхней полуплоскости и полагаем $k_- = -\omega$. При $\omega < \omega'$ мы замыкаем контур в нижней полуплоскости и полагаем $k_- = \vec{k}_\perp^2/\omega$. Только во втором случае и для минус

[2] Мы повторили вычисление $\Gamma_+(\omega,\omega')$ в светоподобной калибровке и получили тот же результат, что и в Фейнмановской; однако, нам не удалось воспроизвести результат для $\Gamma_-(\omega,\omega')$.



$$= \quad \gamma_\pm\, \delta(k_+ - \omega)$$



$$= \quad g_s\, t_a\, n_+^\mu\, \gamma_\pm \frac{\delta(k_+ - \omega) - \delta(p_+ - \omega)}{k_+ - p_+}$$

Рис. 4.3. Правила Фейнмана для вершин, содержащих $O_\pm(\omega)$.

компоненты имеется ультрафиолетовая расходимость, возникающая при интегрировании по $k_\perp$. Сохраняя только расходящийся член, мы получаем вклад в $Z_\pm(\omega, \omega')$:

$$C_F \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} (1 \mp 1) \frac{1}{\omega'} \theta(\omega' - \omega)\,. \tag{4.3.7}$$

Две другие диаграммы на Рис. 4.2 вычисляются аналогично. Во второй, ультрафиолетовая расходимость возникает для плюс компоненты при $k_+ < \omega'$. Ее вклад в $Z_\pm(\omega, \omega')$ равен

$$\begin{aligned} &- C_F \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} (1 \pm 1) \int dk_+ \frac{k_+}{\omega'} \frac{\delta(k_+ - \omega) - \delta(\omega' - \omega)}{k_+ - \omega'} \\ = &- C_F \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon} (1 \pm 1) \left\{ \left[\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{(\omega - \omega')_+} \right] \theta(\omega' - \omega) - \delta(\omega' - \omega) \right\}. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Обобщенная функция $1/(\omega - \omega')_+$ определяется таким образом, что

$$\int d\omega \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega')_+} = \int d\omega \frac{f(\omega) - f(\omega')}{\omega - \omega'} \tag{4.3.9}$$

для любой гладкой функции $f(\omega)$. Третья диаграмма имеет ультрафиолетовую расходимость при $k_+ > \omega'$. Ее вклад равен

$$C_F \frac{\alpha_s}{2\pi\epsilon} \frac{1}{(\omega - \omega')_+} \theta(\omega - \omega')\,. \tag{4.3.10}$$

Наконец, мы должны прибавить вклад перенормировки волновых функций на внешних линиях:

$$\widetilde{Z}_Q^{1/2} Z_q^{1/2}\, \delta(\omega - \omega') = \left(1 + C_F \frac{\alpha_s}{8\pi\epsilon}\right) \delta(\omega - \omega')\,. \tag{4.3.11}$$

Собирая все члены, мы получаем величину $z_\pm(\omega,\omega')$, определенную в (4.3.2):

$$z_\pm(\omega,\omega') = C_F\,\frac{\alpha_s}{\pi}\left\{\pm\frac{\theta(\omega'-\omega)}{\omega'} - \frac{\theta(\omega-\omega')}{(\omega-\omega')_+} - \frac{3}{4}\,\delta(\omega-\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1\pm 1)\left[\frac{\theta(\omega'-\omega)}{(\omega-\omega')_+} - \delta(\omega-\omega')\right]\right\}. \qquad (4.3.12)$$

В однопетлевом приближении, аномальные размерности даются тем же выражением. Поэтому мы получаем

$$\Gamma_+(\omega,\omega') = C_F\,\frac{\alpha_s}{\pi}\left[-\frac{1}{|\omega-\omega'|_+} + \frac{\theta(\omega'-\omega)}{\omega'} - \frac{5}{4}\delta(\omega-\omega')\right],$$
$$\Gamma_-(\omega,\omega') = C_F\,\frac{\alpha_s}{\pi}\left[-\frac{\theta(\omega-\omega')}{(\omega-\omega')_+} - \frac{\theta(\omega'-\omega)}{\omega'} - \frac{1}{4}\delta(\omega-\omega')\right]. \qquad (4.3.13)$$

В знакомом случае волновых функций адронов из легких кварков в КХД, перенормировка нелокальных операторов, аналогичных $O_\pm(\omega)$, была бы достаточной для перенормировки локальных операторов, аналогичных $O_\pm^{(n)}$ в (4.2.13). Перенормировка волновых функций $\varphi_i(x)$ делает их моменты $<x^n>_i$ конечными. К сожалению, это не так для волновых функций тяжелых мезонов в HQET. Причина этого неожиданного факта состоит в том, что в HQET волновые функции зависят от размерной переменной ω, которая меняется от 0 до ∞. Поэтому уравнение (4.2.13) несправедливо для перенормированных операторов; интегралы по ω содержат дополнительные ультрафиолетовые расходимости, еще не удаленные перенормировкой $O_\pm(\omega)$. Эти расходимости должны быть удалены дополнительно.

Рассмотрим, например, простейший случай $n=0$. Тогда голые операторы $O_\pm^{(0),\mathrm{bare}} = \widetilde{Q}^*\gamma_\pm q$ являются являются локальными тяжело–легкими билокальными токами размерности 3, которые перенормируются следующим образом:

$$O_\pm^{(0),\mathrm{bare}} = Z_0\,O_\pm^{(0)} = \left(1 - \frac{1}{2\epsilon}\,\Gamma_0 + \cdots\right)O_\pm^{(0)}, \qquad (4.3.14)$$

где

$$\Gamma_0 = -\frac{3}{4}\,C_F\,\frac{\alpha_s}{\pi} \qquad (4.3.15)$$

— хорошо известная гибридная аномальная размерность (§2.5). С другой стороны, эти голые операторы могут быть выражены как интегралы от перенормированных операторов

$O_\pm(\omega)$ с использованием (4.3.1). Это дает:

$$O_\pm^{(0),\mathrm{bare}} = \int d\omega\, d\omega'\, Z_\pm(\omega,\omega')\, O_\pm(\omega') = \left(\int d\omega\, Z_\pm(\omega,\omega')\right) \int d\omega\, O_\pm(\omega)\,. \tag{4.3.16}$$

Как уже упоминалось, последний интеграл от перенормированных операторов $O_\pm(\omega)$ содержит ультрафиолетовую расходимость при $\omega \to \infty$, и мы определим

$$\int d\omega\, O_\pm(\omega) = Z'_\pm\, O_\pm^{(0)} = \left(1 - \frac{1}{2\epsilon}\,\Gamma'_\pm + \cdots\right) O_\pm^{(0)}\,. \tag{4.3.17}$$

Комбинируя (4.3.14), (4.3.16) и (4.3.17), мы находим

$$Z_0 = Z'_\pm \int d\omega\, Z_\pm(\omega,\omega')\,, \quad \Gamma_0 = \Gamma'_\pm + \int d\omega\, \Gamma_\pm(\omega,\omega')\,. \tag{4.3.18}$$

С использованием явных выражений (4.3.13), мы получаем

$$Z'_\pm = 1 \pm C_F\, \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\,, \quad \Gamma'_\pm = \mp C_F\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\,. \tag{4.3.19}$$

Чтобы детально посмотреть, как это работает, мы вычислим ультрафиолетовую расходимость матричного элемента $<0\,|O_\pm^{(0),\mathrm{bare}}|\omega'>$ в однопетлевом приближении, оставляя интегрирование по k_+ на последок. Единственная одночастично–неприводимая диаграмма показана на Рис. 4.2a. Ее вклад равен:

$$\begin{aligned} 2C_F\,\alpha_s\gamma_\pm\, u\, \mu^{2\epsilon}\Bigg\{ \pm \int_{\omega'}^{\infty} d\omega\, \omega \int \frac{d^{2-2\epsilon}k_\perp}{(2\pi)^{2-2\epsilon}}\, \frac{1}{(\vec{k}_\perp^2 + \omega^2 - i0)\left[\vec{k}_\perp^2 + \omega(\omega-\omega') - i0\right]} \\ + \frac{1}{\omega'} \int_0^{\omega'} d\omega\, \omega \int \frac{d^{2-2\epsilon}k_\perp}{(2\pi)^{2-2\epsilon}}\, \frac{k_\pm}{(\vec{k}_\perp^2 + \omega^2 - i0)(\vec{k}_\perp^2 - i0)} \Bigg\}\,, \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

где в числителе второго интеграла мы должны подставить $k_- = \vec{k}_\perp^2/\omega$. Это выражение показывает происхождение двух типов ультрафиолетовых расходимостей. Интеграл по $k_\perp$ в первом члене сходится, но имеется логарифмическая расходимость в оставшемся интеграле по ω. Во втором члене, интегрирование по ω имеет конечный верхний предел, но интеграл по $k_\perp$ расходится для минус компоненты. Сохраняя только полюса $1/\epsilon$, мы получаем

$$C_F\, \frac{\alpha_s}{2\pi}\, \gamma_\pm\, u \left\{ \pm\, \omega'^{2\epsilon} \int_{\omega'}^{\infty} d\omega\, \omega^{-1-2\epsilon} + (1 \mp 1)\, \frac{1}{2\epsilon} + \cdots \right\} = C_F\, \frac{\alpha_s}{4\pi\epsilon}\, \gamma_\pm\, u\,. \tag{4.3.21}$$

Добавляя сюда вклады перенормировки волновых функций на внешних линиях, мы получаем выражения для Z_0 (4.3.14) и Γ_0 (4.3.15). Вклад в (4.3.21), возникающий из логарифмической расходимости интеграла по ω, удаляется фактором $Z'_\pm$ (4.3.17), тогда как остальные вклады удаляются перенормировкой операторов $O_\pm(\omega)$.

4.4. Правила сумм

Первые моменты волновых функций $\varphi_\pm(\omega)$ точно известны из уравнений движения, как показано в (4.2.18). Однако, они только устанавливают масштаб ω. Чтобы получить информацию о форме волновых функций, мы должны узнать рассмотреть более высокие моменты. В этом параграфе мы используем правила сумм КХД для изучения параметров λ_E^2 и λ_H^2, которые, в соответствии с (4.2.23), определяют вторые моменты $\varphi_\pm(\omega)$.

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} O_E &= \widetilde{Q}^* i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\, q = i\, v_\nu v^\alpha\, \widetilde{Q}^* G^{\mu\nu}\sigma_{\mu\alpha}\, q\,, \\ O_H &= -\widetilde{Q}^*\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\, q = i\, \left(\tfrac{1}{2}\delta^\alpha_\nu - v_\nu v^\alpha\right) \widetilde{Q}^* G^{\mu\nu}\sigma_{\mu\alpha}\, q\,, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

матричные элементы которых дают $\tilde{f}\lambda_E^2$ и $\tilde{f}\lambda_H^2$, соответственно. Чтобы получить правило сумм для λ_E^2 (правило сумм для λ_H^2 выводится аналогично), мы рассмотрим коррелятор

$$<0\,|T\{O_E(x), \overline{q}\,\tfrac{1}{2}(1+\hat{v})\widetilde{Q}(0)\}|\,0> = \frac{1+\hat{v}}{2}\,\theta(v\cdot x)\,\delta(\vec{x}_\perp)\,\Pi_E(v\cdot x)\,, \tag{4.4.2}$$

где $\vec{x}_\perp$ — составляющая x, ортогональная v. Оператор $\overline{q}\,\frac{1}{2}(1+\hat{v})\widetilde{Q}$ имеет квантовые числа мезона в основном состоянии. Мы аналитически продолжаем $\Pi_E(v\cdot x)$ на $v\cdot x = -i\tau$. Коррелятор выражается через спектральную плотность $\rho_E(\omega)$:

$$\Pi_E(\tau) = \int\limits_0^\infty d\varepsilon\, \rho_E(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\tau}\,, \tag{4.4.3}$$

которая содержит вклад $\tilde{f}^2\lambda_E^2\delta(\varepsilon-\varepsilon_0)$ мезона в основном состоянии, а также континуума возбужденных состояний. Поэтому феноменологическое выражение для коррелятора имеет вид

$$\Pi_E(\tau) = \tilde{f}^2\lambda_E^2 e^{-\varepsilon_0\tau} + \Pi_E^{\mathrm{cont}}(\tau)\,. \tag{4.4.4}$$

При достаточно малых значениях τ, коррелятор может быть вычислен в КХД с использованием операторного разложения [**32**]. Теоретическая спектральная плотность $\rho_E^{\text{th}}(\varepsilon)$ содержит пертурбативные и непертурбативные вклады. Последние пропорциональны вакуумным средним локальных калибровочно–инвариантных операторов. Вклад континуума в (4.4.4) обычно моделируется теоретической спектральной плотностью, начиная с порога континуума ε_c. Приравнивая два выражения для $\Pi_E(\tau)$, мы получаем правило сумм

$$\tilde{f}^2\lambda_E^2 e^{-\varepsilon_0\tau} = \int\limits_0^{\varepsilon_c} d\varepsilon\,\rho_E^{\text{th}}(\varepsilon)\,e^{-\varepsilon\tau}\,. \tag{4.4.5}$$

Подобное правило сумм справедливо и для $f^2\lambda_H^2$.

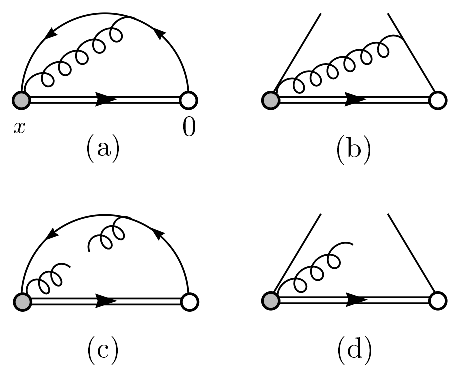


Рис. 4.4. Диаграммы для корреляторов Π_E и Π_H.

Ведущие вклады в операторные разложения корреляторов показаны на Рис. 4.4. Мы включаем пертурбативный вклад, а также вклады кваркового конденсата $<\bar{q}q>$ (размерность $d=3$), глюонного конденсата $<G^2>$ ($d=4$) и конденсата $i<\bar{q}\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}q>$ ($d=5$). При вычислении непертурбативных вкладов, удобно использовать калибровку фиксированной точки $x_\mu A^\mu(x)=0$; тогда тяжелый кварк не взаимодействует с глюонами. Мы получаем правила сумм:

$$\tilde{f}^2\lambda_E^2 e^{-\varepsilon_0\tau} = -\,NC_F\,\frac{\alpha_s}{\pi^3\tau^5}\,\delta_4(\varepsilon_c\tau) - \frac{m_0^2<\bar{q}q>}{16}\,, \tag{4.4.6}$$

$$\tilde{f}^2\lambda_H^2 e^{-\varepsilon_0\tau} = -\,NC_F\,\frac{\alpha_s}{2\pi^3\tau^5}\,\delta_4(\varepsilon_c\tau) - C_F\,\frac{3\alpha_s}{4\pi\tau^2}<\bar{q}q>\delta_1(\varepsilon_c\tau) + \frac{\alpha_s<G^2>}{16\pi\tau}\,\delta_0(\varepsilon_c\tau) - \frac{m_0^2<\bar{q}q>}{16}\,,$$

где функция $\delta_n(x)$ определена в (0.15). Тот факт, что правило сумм для λ_E^2 не содержит вкладов кваркового и глюонного конденсатов, следует из того, что в калибровке фиксированной точки легкий кварк взаимодействует только с магнитной компонентой глюонного поля [**37**]. Можно точно учесть вклады кварковых операторов всех размерностей (в главном порядке по α_s) при помощи билокальных функций (1.3.19):

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^2 \lambda_E^2 e^{-\varepsilon_0 \tau} &= -\, N C_F \, \frac{\alpha_s}{\pi^3 \tau^5} \, \delta_4(\varepsilon_c \tau) - \frac{m_0^2 <\overline{q}q>}{16} \, f^{(2)}(-\tau^2) \,, \\
\tilde{f}^2 \lambda_H^2 e^{-\varepsilon_0 \tau} &= -\, N C_F \, \frac{\alpha_s}{2\pi^3 \tau^5} \, \delta_4(\varepsilon_c \tau) - C_F \, \frac{3\alpha_s}{4\pi \tau^2} <\overline{q}q> \delta_1(\varepsilon_c \tau) \\
&\quad + \frac{\alpha_s <G^2>}{16\pi\tau} \, \delta_0(\varepsilon_c \tau) - \frac{m_0^2 <\overline{q}q>}{16} \left[2 f^{(1)}(-\tau^2) - f^{(2)}(-\tau^2) \right] . \qquad (4.4.7)
\end{aligned}$$

Однако, поскольку величины конденсатов (1.2.6) размерности 7 неизвестны, мы их не учитываем.

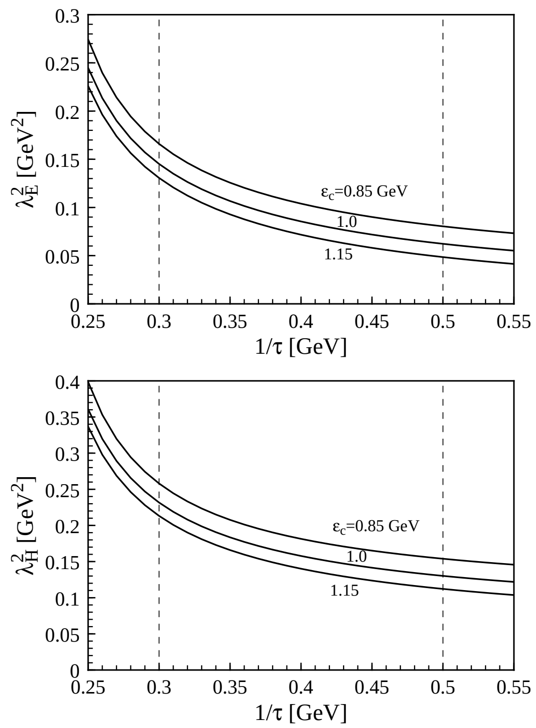


Рис. 4.5. Результаты правил сумм для λ_E^2 (верхний график) и λ_H^2 (нижний график) в зависимости от $1/\tau$, для трех значений порога континуума ε_c. Окно стабильности лежит между штриховыми линиями.

Удобно разделить правила сумм (4.4.6) на правило сумм для $\tilde{f}^2$, выведенное в [**119**]:

$$\tilde{f}^2 e^{-\varepsilon_0\tau} = \frac{N}{2\pi^2\tau^3}\,\delta_2(\varepsilon_c\tau) - \frac{<\overline{q}q>}{4}\left(1 - \frac{m_0^2\tau^2}{16}\right). \tag{4.4.8}$$

Эта процедура дает выражения для λ_E^2 и λ_H^2 через τ, порог континуума ε_c и вакуумные конденсаты. Мы используем стандартные значения [**32**]

$$<\overline{q}q> = -(0.23\mathrm{GeV})^3\,,\quad \alpha_s<G^2> = 0.04\mathrm{GeV}^4\,,\quad m_0^2 = 0.8\mathrm{GeV}^2\,, \tag{4.4.9}$$

а также $\alpha_s = 0.4$. Значение порога континуума, извлеченное из анализа правила сумм (4.4.8) равно $\varepsilon_c = 1.00 \pm 0.15$GeV. Параметр τ должен находиться в интервале $0.3\mathrm{GeV} < 1/\tau < 0.5\mathrm{GeV}$, который называется окном стабильности. Численные результаты для λ_E^2 и λ_H^2 как функции $1/\tau$ показаны на Рис. 4.5. Видно, что результаты заметно зависят от параметраr τ, что не является неожиданным для матричных элементов операторов высокой размерности, таких как O_E и O_H. Однако, взяв среднее по окну стабильности, определенному из правила сумм (4.4.8), мы получаем оценку:

$$\lambda_E^2 = (0.11 \pm 0.06)\mathrm{GeV}^2\,,\quad \lambda_H^2 = (0.18 \pm 0.07)\mathrm{GeV}^2\,. \tag{4.4.10}$$

В единицах $\varepsilon_0 \approx 0.55$GeV [**113**], это дает $\lambda_E^2/\varepsilon_0^2 = 0.36 \pm 0.20$ и $\lambda_H^2/\varepsilon_0^2 = 0.60 \pm 0.23$.

В соответствии с (4.2.23), параметры λ_E^2 и λ_H^2 определяют, совместно с ε_0^2, вторые моменты мезонных волновых функций. Чтобы больше узнать об их форме, мы теперь построим правила сумм для самих функций $\varphi_\pm(\omega)$. Для этого мы начнем с коррелятора[3]

$$<0\,|T\{\widetilde{O}_\pm(t), \overline{q}\,\tfrac{1}{2}(1+\hat{v})\widetilde{Q}(-x)\}|\,0> = \gamma_\pm\,\frac{1+\hat{v}}{2}\,\theta(v\cdot x)\,\delta(\vec{x}_\perp)\,\widetilde{\Pi}_\pm(v\cdot x, t)\,, \tag{4.4.11}$$

где операторы $\widetilde{O}_\pm(t)$ были определены в (4.2.7), и аналитически продолжаем $\widetilde{\Pi}_\pm(v\cdot x, t)$ на $v\cdot x = -i\tau$. Используя пропагатор легкого кварка в координатном представлении [**37**], мы

[3]Разлагая этот коррелятор по степеням t, можно восстановить, в соответствии с (4.2.12) и (4.2.14), правила сумм для моментов $\tilde{f}^2<\omega^n>_\pm$. В низшем порядке получается правило сумм (4.4.8). Правило сумм для $\tilde{f}^2<\omega>_+$ рассматривалось в [**120**]; однако, вклад конденсата размерности 5 имел неверный знак. Заметим, что, вследствие (4.2.18), правила сумм для $\tilde{f}^2<\omega>_\pm$ получаются из (4.4.8) дифференцированием по τ. Взяв линейные комбинации правил сумм для $\tilde{f}^2<\omega^2>_\pm$, мы вновь получаем правила сумм для λ_E^2 и λ_H^2.

легко получаем вклад диаграмм Рис. 4.6a,b:

$$\widetilde{\Pi}_{+}^{(1)}(\tau,t)=\frac{N}{2\pi^2\tau(\tau+2it)^2}\left(1-\frac{\pi\alpha_s\langle G^2\rangle\tau^2t^2}{48N}\right)\,,$$
$$\widetilde{\Pi}_{-}^{(1)}(\tau,t)=\frac{N}{2\pi^2\tau^2(\tau+2it)}\left(1-\frac{\pi\alpha_s\langle G^2\rangle\tau^2t^2}{48N}\right)\,. \qquad (4.4.12)$$

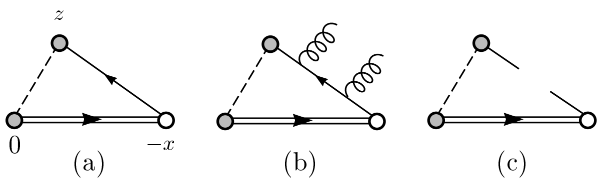


Рис. 4.6. Диаграммы для корреляторов билокальных операторов $\tilde{O}_{\pm}(t)$ с локальным током.

Вклад с разорванной линией легкого кварка Рис. 4.6c содержит неколлинеарный кварковый конденсат (1.3.7). Пренебрегая функцией $f_V(x,y)$, операторное разложение которой содержит кварковые конденсаты четных размерностей $d\geq 6$ (их вклад в правила сумм для тяжелых мезонов пренебрежимо мал [**119**]), мы получаем

$$\widetilde{\Pi}_{\pm}^{(2)}(v\cdot x,t)=-\tfrac{1}{4}\langle\overline{q}q\rangle\left[f_S(z,-x)\pm\tfrac{1}{24}\,m_0^2v\cdot x\,t\,f_T(z,-x)\right]\,, \qquad (4.4.13)$$

где $z^2=0$, $x^2=(v\cdot x)^2$ и $z\cdot x=v\cdot x\,t$. Для простоты, мы сохраним только ведущий член в разложении $f_S(x,y)$ (1.3.22). Билокальный кварковый конденсат может быть удобно представлен как [**39**]

$$f_S(x^2)=\int d\nu\,\tilde{f}_S(\nu)\,e^{\nu x^2}\,, \qquad (4.4.14)$$

где

$$\int d\nu\,\tilde{f}_S(\nu)=1\,,\quad \int d\nu\,\nu\,\tilde{f}_S(\nu)=\frac{m_0^2}{16}\,, \qquad (4.4.15)$$

и т. д. Функция $\tilde{f}_S(\nu)$ может быть интерпретирована как распределение вакуумных кварков по виртуальности. Локальное операторное разложение (1.3.2) соответствует разложению

$$\tilde{f}_S(\nu)=\delta(\nu)-\frac{m_0^2}{16}\,\delta'(\nu)+\cdots\,. \qquad (4.4.16)$$

Поскольку фактор $E(0,x)$ in (1.3.2) может быть интерпретирован как пропагатор тяжелого кварка, асимптотика $f_S(x^2)$ при больших $-x^2$ имеет вид

$$f_S(x^2) \sim e^{-\varepsilon_0\sqrt{-x^2}}\,. \tag{4.4.17}$$

Это фиксирует поведение $\tilde{f}_S(\nu)$ при $\nu \to 0$. Простой анзац для этой функции был предложен в [**42**]:

$$\tilde{f}_S(\nu) = N \exp\left(-\frac{\varepsilon_0^2}{4\nu} - \sigma\nu\right)\,, \tag{4.4.18}$$

где N и σ фиксируются условиями (4.4.15). Мы получаем

$$\widetilde{\Pi}^{(2)}_{\pm}(\tau,t) = -\tfrac{1}{4}<\overline{q}q> \int d\nu\, \tilde{f}_S(\nu)\, e^{-\nu\tau(\tau+2it)}\,. \tag{4.4.19}$$

Теперь мы производим преобразование Фурье корреляторов (4.4.11), и получаем

$$<0\,|T\{O_\pm(\omega), \overline{q}\,\tfrac{1}{2}(1+\hat{v})\widetilde{Q}(-x)\}|\,0> = \gamma_\pm\,\frac{1+\hat{v}}{2}\,\theta(v\cdot x)\,\delta(\vec{x}_\perp)\,\Pi_\pm(v\cdot x,\omega)\,. \tag{4.4.20}$$

Пертурбативные члены в (4.4.12) дают

$$\Pi^{(1)}_{+}(\tau,\omega) = \frac{N}{8\pi^2\tau}\,\omega\, e^{-\omega\tau/2}\,,\quad \Pi^{(1)}_{-}(\tau,\omega) = \frac{N}{4\pi^2\tau^2}\, e^{-\omega\tau/2}\,. \tag{4.4.21}$$

Вклады глюонного конденсата приводят к сингулярному поведению вида $\delta(\omega)$ и $\delta'(\omega)$. Эти члены приобрели бы конечную ширину при учете нелокальности глюонного конденсата [**41**]. Мы пренебрежем этими вкладами. Преобразование Фурье вклада кваркового конденсата (4.4.19) дается выражением

$$\Pi^{(2)}_{\pm}(\tau,\omega) = -\frac{<\overline{q}q>}{8\tau}\,\tilde{f}_S\left(\frac{\omega}{2\tau}\right)\, e^{-\omega\tau/2}\,, \tag{4.4.22}$$

т. е. оно прямо определяется распределением вакуумных кварков по виртуальности.

Чтобы произвести вычитание континуума в пертурбативных вкладах (4.4.21), мы вычисляем соответствующие спектральные плотности при помощи обратного преобразования Лапласа, и получаем правила сумм

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^2\varphi_+(\omega)\, e^{-\varepsilon_0\tau} &= \frac{N}{8\pi^2\tau}\,\omega\, e^{-\omega\tau/2}\,\delta_0\left[\left(\varepsilon_c - \tfrac{\omega}{2}\right)\tau\right] - \frac{<\overline{q}q>}{8\tau}\,\tilde{f}_S\left(\frac{\omega}{2\tau}\right)\, e^{-\omega\tau/2}\,,\\
\tilde{f}^2\varphi_-(\omega)\, e^{-\varepsilon_0\tau} &= \frac{N}{4\pi^2\tau^2}\, e^{-\omega\tau/2}\,\delta_1\left[\left(\varepsilon_c - \tfrac{\omega}{2}\right)\tau\right] - \frac{<\overline{q}q>}{8\tau}\,\tilde{f}_S\left(\frac{\omega}{2\tau}\right)\, e^{-\omega\tau/2}\,.
\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

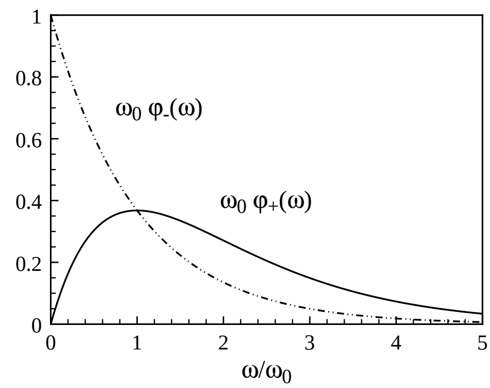


Рис. 4.7. Модельные волновые функции $\varphi_\pm(\omega)$, определенные в (4.4.24).

Вклад кваркового конденсата быстро убывает как при $\omega \to 0$, так и при $\omega \to \infty$. Пертурбативные вклады обращаются в ноль при $\omega > 2\varepsilon_c$. Они подсказывают модельные формы

$$\varphi_+(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0^2}\, e^{-\omega/\omega_0}\,, \quad \varphi_-(\omega) = \frac{1}{\omega_0}\, e^{-\omega/\omega_0}\,, \tag{4.4.24}$$

которые имеют правильное поведение при $\omega \to 0$ (см. (4.2.32)). Эти функции показаны на Рис. 4.7. Параметр $\omega_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_0$ фиксирован условиями (4.2.18). В этой простой модели, вторые моменты равны $<\omega^2>_+ = 3<\omega^2>_- = \frac{8}{3}\varepsilon_0^2$. Это соответствует $\lambda_E^2 = \lambda_H^2 = \frac{2}{3}\varepsilon_0^2$, что не противоречит оценкам из правил сумм, полученным выше.

4.5. Асимптотика формфакторов

Теперь мы используем результаты предыдущих параграфов, чтобы проанализировать асимптотическое поведение формфакторов тяжелых мезонов. Вклад кварк–антикварковых волновых функций в формфактор Исгура–Вайса изображается диаграммами на Рис. 4.8a,b. Мезоны имеют скорости v и v'; мы работаем в системе “кирпичной стенки”, в которой они движутся в противоположных направлениях с быстротами $\pm\vartheta/2$, так что $v \cdot v' = \cosh\vartheta$; $v_+ = e^{\vartheta/2}$ и $v_- = e^{-\vartheta/2}$, $v'_- = e^{\vartheta/2}$ и $v'_+ = e^{-\vartheta/2}$. В пределе больших ϑ, легкий кварк в начальном мезоне имеет большой $p_+ = \omega e^{\vartheta/2}$ и малый p_-, тогда как в конечном мезоне он имеет большой $p'_- = \omega' e^{\vartheta/2}$ и малый p'_+. Роли плюс/минус направлений для конечного мезона противоположны по сравнению с начальным. Виртуальности глюона и тяжелого кварка обе велики: $k_g^2 = (p'-p)^2 \simeq -\omega\omega' e^{\vartheta}$ и $v \cdot k_Q \simeq v \cdot p' \simeq \frac{1}{2}\omega' e^{\vartheta}$ (Рис. 4.8a) или $v' \cdot k_Q \simeq v' \cdot p \simeq \frac{1}{2}\omega e^{\vartheta}$ (Fig. 4.8b), соответственно.

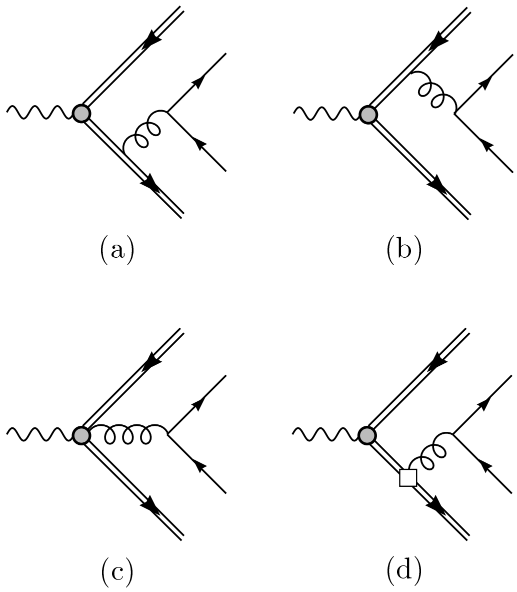


Рис. 4.8. Вклад обмена жестким глюоном в мезонные формфакторы.

При больших ϑ, вклад диаграммы Рис. 4.8a в матричный элемент (4.1.1), определяющий функцию Исгура–Вайса, равен

$$
\begin{aligned}
&2\pi\alpha_s \frac{C_F}{N} \tilde{f}^2 e^{-2\vartheta} \int \frac{d\omega\, d\omega'}{\omega\omega'^2} && (4.5.1)\\
&\overline{u}(v') \left[\varphi_+(\omega')\gamma_+ e^{\vartheta/2} + \varphi_-(\omega')\gamma_- e^{-\vartheta/2}\right] \hat{v} \left[\varphi_+(\omega)\gamma_- e^{\vartheta/2} + \varphi_-(\omega)\gamma_+ e^{-\vartheta/2}\right] u(v)\,,
\end{aligned}
$$

где $\hat{v} = \frac{1}{2}\left(\gamma_- e^{\vartheta/2} + \gamma_+ e^{-\vartheta/2}\right)$. Ведущий вклад содержит произведение $\varphi_+(\omega')\,\varphi_-(\omega)$, т. е. волновая функция неведущего твиста берется с той стороны, с которой происходит глюонный обмен. Добавляя вклад диаграммы Рис. 4.8b, мы получаем

$$
\xi(\cosh\vartheta) = 16\pi\alpha_s \frac{C_F}{N} \tilde{f}^2 <\omega^{-2}>_+ <\omega^{-1}>_- e^{-2\vartheta}\,. \tag{4.5.2}
$$

На основании предположений о поведении волновых функций при $\omega \to 0$ (см. (4.2.32)), мы ожидаем, что $<\omega^{-2}>_+$ и $<\omega^{-1}>_-$ оба логарифмически расходятся при ω. Эта расходимость обрезается поперечными импульсами и виртуальностями легких кварков в мезонах, подобно случаю π–ρ формфактора в КХД [**159**]. Заменяя q^2 на $q^2 - \Lambda^2$ в глюонном пропагаторе (где Λ порядка типичного адронного масштаба), мы получаем

$$
<\omega^{-2}>_+ <\omega^{-1}>_- \to \int \frac{d\omega\, d\omega'}{\omega\omega' + \Lambda^2 e^{-\vartheta}} \varphi'_+(\omega)\,\varphi_-(\omega') = \varphi'_+(0)\,\varphi_-(0)\,\frac{\vartheta^2}{2} + O(\vartheta)\,. \tag{4.5.3}
$$

К сожалению, неведущие члены порядка ϑ не могут быть вычислены без знания деталей инфракрасного обрезания.

Рассмотрим теперь формфакторы ξ_i и χ_i, определенные в (4.1.2)–(4.1.6), которые появляются в порядка $1/m$. Поскольку из вклады в мезонные формфакторы подавлены как Λ/m по отношению к функции Исгура–Вайса, они могут стать существенными только если они медленнее убывают при больших ϑ. Поэтому достаточно сохранить только вклады, в которых волновая функция ведущего твиста появляется с обоих сторон. Тогда спиральность легкого кварка сохраняется, и глюон поляризован ортогонально к плоскости v–v'. Рассмотрим сначала функции ξ_i. Единственный способ получить волновые функции ведущего твиста с обоих сторон — это прикрепить глюон к вершине тока, как показано на Рис. 4.8c. Мы получаем

$$4\pi\alpha_s \frac{C_F}{N} \tilde{f}^2 e^{-\vartheta} \, \overline{u}(v')\gamma^\mu u(v) \int \frac{d\omega\, d\omega'}{\omega\omega'} \varphi_+(\omega)\, \varphi_+(\omega')\,, \tag{4.5.4}$$

т. е. только функция ξ_3 получает вклад ведущего твиста:

$$\xi_3(\cosh\vartheta) = 4\pi\alpha_s \frac{C_F}{N} \tilde{f}^2 <\omega^{-1}>_+^2 e^{-\vartheta}\,. \tag{4.5.5}$$

Здесь интеграл инфракрасно сходится, как в случае формфактора пиона в КХД [**157**]–[**160**]. Теперь рассмотрим функции χ_i. Сохранение спиральности легкого кварка означает, что в матричном элементе должно быть нечетное число γ матриц. Поэтому только функция χ_2 в (4.1.6) получает ведущий вклад. Вычисляя диаграмму Рис. 4.8d, мы получаем

$$-8\pi\alpha_s \frac{C_F}{N} \tilde{f}^2 e^{-2\vartheta} \int \frac{d\omega\, d\omega'}{\omega\omega'^2} \varphi_+(\omega)\, \varphi_+(\omega')\, \overline{u}(v')(\gamma^\mu k_g^\nu - \gamma^\nu k_g^\mu)u(v)\,, \tag{4.5.6}$$

где $k_g = \omega' v' - \omega v$ — импульс глюона. Поскольку индексы μ и ν ограничены подпространством, ортогональным к v, можно сохранить только первый член в k_g. Учитывая определение χ_2 (4.1.5), (4.1.6), мы получаем

$$\chi_2(\cosh\vartheta) = -\xi_3(\cosh\vartheta)\, e^{-\vartheta}\,. \tag{4.5.7}$$

Заметим, что в выражениях для мезонных формфакторов χ_2 умножается на $\cosh\vartheta$ [**139**], так что его вклады того же порядка, что и вклады ξ_3.

Теперь мы сравним асимптотические результаты для ведущих и неведущих функций Исгура–Вайса (4.5.2), (4.5.5) и (4.5.7) с пределом больших ϑ двухпетлевых правил сумм

КХД для этих функций, которые были получены в [**134, 136**]. При больших $v \cdot v'$, трехточечные корреляторы, которые рассматривались в этих правилах сумм, факторизуются в свертку двухточечных корреляторов (4.4.20) и жесткой амплитуды рассеяния. В этом пределе остаются только диаграммы с обменом глюоном между тяжелым и легким кварком. Мы нашли, что результаты правил сумм действительно воспроизводят правильное асимптотическое поведение; в частности, выполняется соотношение (4.5.7) между χ_2 и ξ_3. Для нормировочных множителей в выражениях для ξ (4.5.2) и ξ_3 (4.5.5) мы получаем из [**134, 136**]:

$$\tilde{f}^2 \varphi'_+(0)\, \varphi_-(0) = \frac{N^2}{4\pi^4 f^2 \tau^3}\, e^{\varepsilon_0 \tau}\, \delta_2(\varepsilon_c \tau)\,, \quad \tilde{f}^2 {<}\omega^{-1}{>}_+^2 = \frac{N^2}{\pi^4 f^2 \tau^4}\, e^{\varepsilon_0 \tau}\, \delta_3(\varepsilon_c \tau)\,. \tag{4.5.8}$$

Мы сохранили только пертурбативный вклад, поскольку вклады конденсатов не вычислены в порядке α_s. Заметим, в частности, что вклад кваркового конденсата в правило сумм для функции Исгура–Вайса постоянен, и, казалось бы, доминирует при больших $v \cdot v'$. Однако, при учете нелокальности кваркового конденсата, этот вклад быстро стремится к нулю [**130**]. Выражения (4.5.8) могут быть легко воспроизведены из правил сумм для волновых функций $\varphi_\pm(\omega)$, полученных в §4.4. Правило сумм для произведения $\varphi_+(\omega)\varphi_\pm(\omega')$ при равных Борелевских параметрах имеет вид

$$\tilde{f}^4 \varphi_+(\omega)\, \varphi_\pm(\omega')\, e^{-\varepsilon_0 \tau} = \int d\varepsilon\, d\varepsilon'\, \rho_+(\omega, \varepsilon)\, \rho_\pm(\omega', \varepsilon')\, e^{-(\varepsilon+\varepsilon')\tau/2}\,, \tag{4.5.9}$$

где $\rho_\pm(\omega, \varepsilon)$ — спектральные плотности корреляторов (4.4.20), и интеграл берется по дополнению области континуума. Точный вид результата зависит от модели континуума. Квадратная модель (Рис. 4.9) ведет к точной факторизации в (4.5.9). С другой стороны, хорошо известно, что при малых ϑ квадратная модель континуума непоследовательна, т. к. она ведет к нефизическому бесконечному наклону функции Исгура–Вайса в точке $v \cdot v' = 1$ (§3.2). Этот недостаток устраняется использованием треугольной модели [**132**]. Эта модель использовалась в вычислениях [**134, 136**]. Если мы применим ее в (4.5.9), то мы действительно воспроизведем (4.5.8). Это сильная проверка как настоящего подхода, так и двухпетлевых вычислений [**134, 136**]. Однако, в этом случае правило сумм (4.5.9) не факторизуется, что означает, что треугольная модель не вполне согласована в этом пределе, и квадратная модель является предпочтительной.

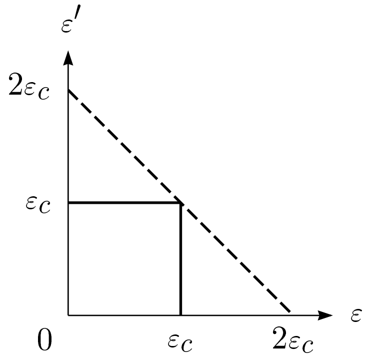


Рис. 4.9. Квадратная (сплошная линия) и треугольная (пунктир) модель континуума.

Обсудим область применимости асимптотических результатов. Правила сумм заставляют предположить, что мягкие вклады в функцию Исгура–Вайса убывают как $1/(v \cdot v')^2$ [**130, 131**] (§3.2). Если это так, то асимптотически главный вклад (4.5.2), (4.5.3) доминирует только при $\log(v \cdot v') \gg 1$ и $\alpha_s \log^2(v \cdot v') \gg 1$. Поскольку $\log(v \cdot v')$ не является, в большинстве приложений, большим параметром, асимптотические результаты для функции Исгура–Вайса могут рассматриваться только как грубая оценка. Асимптотический режим начинается не ранее $v \cdot v' = O(100)$. Правила сумм также показывают, что мягкие вклады в ξ_3 убывают как $1/(v \cdot v')^2$ [**135, 20**] (§3.2). Поэтому наши предсказания для функций ξ_3 и χ_2 значительно более точны. Асимптотическое поведение устанавливается при $\alpha_s\, v \cdot v' \gg 1$, что требует $v \cdot v' = O(10)$.

Правило сумм для функции Исгура–Вайса имеет встроенную модель инфракрасного обрезания, и поэтому мы можем оценить неведущий член $O(\vartheta)$ в (4.5.3):

$$\xi(\cosh\vartheta) \sim e^{-2\vartheta} \left\{ \vartheta^2 + [4L(\varepsilon_c\tau) - 5]\, \vartheta + \cdots \right\}, \tag{4.5.10}$$

где

$$L(x_c) = \frac{\int\limits_0^{x_c} dx\, x^2 e^{-x} \log 2x}{\int\limits_0^{x_c} dx\, x^2 e^{-x}}\,. \tag{4.5.11}$$

В существенной области $\varepsilon_c\tau \approx 2.5$, мы получаем $(4L - 5) \approx -0.7$, что означает, что этот неведущий член отрицателен, и имеет коэффициент порядка единицы.

Для удобства, приведем здесь выражения для формфакторов, полученные при использовании модельных волновых функций (4.4.24):

$$\xi(v \cdot v') \approx 3\pi\alpha_s \frac{\tilde{f}^2}{\varepsilon_0^3} \frac{\log^2(v \cdot v')}{(v \cdot v')^2}, \quad \xi_3(v \cdot v') \approx 2\pi\alpha_s \frac{\tilde{f}^2}{\varepsilon_0^2} \frac{1}{v \cdot v'}. \tag{4.5.12}$$

Один важный физический аспект асимптотики формфакторов до сих пор не учитывался. Поскольку кварки значительно ускоряются, они излучают тормозные глюоны, что приводит к дополнительному судаковскому подавлению упругих переходов. В силу бесцветности мезонов, дважды логарифмические члены типа $[\alpha_s \log^2(v \cdot v')]^n$ сокращаются; однако остаются одинарные логарифмы $v \cdot v'$, усиленные логарифмами массы тяжелого кварка. Они возникают от излучения глюонов с энергиями $\mu < E_g < m$ ($\mu \ll m$, см. ниже). Поэтому в теории возмущений возникают большие поправки типа $[\alpha_s \log(m/\mu) \log(v \cdot v')]^n$. Ситуация подобна возникающей для пионного формфактора в области $x \to 0$, где один кварк несет почти весь импульс пиона [**159**].

Эти большие логарифмы не содержатся в формфакторах HQET, которые нормированы на масштабе $\mu \ll m$.[4] Они возникают, когда мы связываем формфакторы в HQET с физическими мезонными формфакторами, используя процедуру сшивки. В ней появляются коэффициентные функции $C_n(m/\mu, v \cdot v')$, которые могут быть вычислены в теории возмущений, улучшенной по ренормгруппе (см. обзор [**61**]). В случае переходов между тяжелыми мезонами, репараметризационная инвариантность [**78**] гарантирует, что коэффициентные функции, на которые умножаются неведущие формфакторы χ_2 и ξ_3, совпадают с той, на которую умножается ведущий формфактор Исгура–Вайса ξ [**163**]. В главном логарифмическом приближении (которое достаточно для рассмотрения упомянутых больших логарифмов) все формфакторы HQET умножаются на универсальный коэффициент

$$C(m/\mu, v \cdot v') = \left(\frac{\alpha_s(m)}{\alpha_s(\mu)} \right)^{a(v \cdot v')}, \tag{4.5.13}$$

где ($v \cdot v' = \cosh \vartheta$)

$$a(v \cdot v') = \frac{2C_F}{\beta_0} (\vartheta \coth \vartheta - 1) = \frac{2C_F}{\beta_0} \left[\vartheta - 1 + O(e^{-\vartheta}) \right]. \tag{4.5.14}$$

[4] На практике, масштаб μ должен выбираться так, чтобы не было больших логарифмов в поправках к формфакторам в HQET.

При больших ϑ, мы получаем

$$C \to \left(\frac{e}{2v\cdot v'}\right)^{\eta} = e^{-\eta(\vartheta-1)}\,, \tag{4.5.15}$$

где

$$\eta = \frac{2C_F}{\beta_0}\log\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m)}\,. \tag{4.5.16}$$

Это выражение суммирует судаковские логарифмы во всех порядках теории возмущений. Эффект глюонных поправок состоит в дополнительном степенном подавлении мезонных формфакторов при больших $v\cdot v'$. Используя $\mu \approx 1$GeV, мы находим, что для распадов B–мезона степень $\eta \approx 0.2$–0.3, т. е. этот эффект невелик.

Используя результаты этого параграфа, нетрудно вывести асимптотические выражения для всех формфакторов переходов между тяжелыми псевдоскалярными и векторными мезонами. Формулы, выражающие мезонные формфакторы через функции Исгура–Вайса, можно найти, например, в [**139, 164**]. Здесь мы ограничимся результатами для матричных элементов векторного тока $V^\mu = \bar{b}\gamma^\mu b$ между B–мезонными состояниями:

$$\begin{aligned}
<B(v')|V^\mu|B(v)> &= h_+\,(v+v')^\mu\,,\\
<B^*(e',v')|V^\mu|B(v)> &= h_{\mathrm{V}}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}e'^*_\nu v'_\alpha v_\beta\,,\\
<B^*_{\mathrm{L}}(v')|V^\mu|B^*_{\mathrm{L}}(v)> &= h_{\mathrm{L}}\,(v+v')^\mu\,,\\
<B^*_{\mathrm{T}}(e',v')|V^\mu|B^*_{\mathrm{T}}(e,v)> &= -h_{\mathrm{T}}\,e\cdot e'^*\,(v+v')^\mu\,,\\
<B^*_{\mathrm{T}}(e',v')|V^\mu|B^*_{\mathrm{L}}(v)> &= \sinh\vartheta\,h_{\mathrm{TL}}\,e'^{*\mu}\,,
\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

где L и T относятся к продольной (в плоскости v–v') и поперечной поляризации. Мы получаем

$$\begin{aligned}
h_+ &= C\left(\xi - \frac{4}{m_b}\cosh\vartheta\,\chi_2\right) = C\left(\xi + \frac{2}{m_b}\xi_3\right)\,,\\
h_{\mathrm{V}} &= C\left[\xi - \frac{1}{m_b}\left(\xi_3 + 2\cosh\vartheta\,\chi_2\right)\right] = C\xi\,,\\
h_{\mathrm{L}} &= C\left(\xi + \frac{4}{m_b}\cosh\vartheta\,\chi_2\right) = C\left(\xi - \frac{2}{m_b}\xi_3\right)\,,
\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

$$h_{\rm T} = C\xi\,,$$

$$h_{\rm TL} = C\left[\xi + \frac{1}{m_b}\left(\xi_3 + 2\cosh\vartheta\,\chi_2\right)\right] = C\xi\,.$$

Наиболее яркая черта этих результатов — это то, что формфактор продольно поляризованного B^* мезона, являющийся положительным при $\cosh\vartheta \ll m_b/\Lambda$, становится отрицательным при $\cosh\vartheta \gg m_b/\Lambda$, и потому имеет ноль при некотором промежуточном значении $\cosh\vartheta \sim m_b/\Lambda$. Поскольку при пространственноподобных q^2, соответствующих $v \cdot v' > 1$, формфакторы действительны, существование этого нуля является точным утверждением, на которое не влияют неучтенные поправки. Этот факт не является специфичным для тяжелых мезонов. Формфактор, скажем, продольно поляризованного ρ–мезона также имеет ноль при некотором отрицательном значении q^2 [**159**]. С другой стороны, при времениподобных q^2, формфактор псевдоскалярного B–мезона имеет ноль, и он расположен в физической области рождения $B\overline{B}$ пар в e^+e^- аннигиляции. Строго говоря, формфакторы при времениподобных q^2 имеют мнимую часть, и ноль не является абсолютно точным. Однако, в нашем приближении мнимая часть пренебрежимо мала.[5]

Модельно–независимые результаты, полученные в этом параграфе, можно проверить в простой модели мезона из двух тяжелых кварков с массами m и μ, такими, что $m \gg \mu \gg \Lambda$. В этом случае $\varphi_+(\omega) = \varphi_-(\omega) = \delta(\omega - \mu)$ и $<\omega^n>_\pm = \mu^n$. Заметим, что формулы (4.2.18) и (4.2.23) для низших моментов основаны на уравнениях движения для безмассового кварка, и не применимы в этом случае. Рассмотрим формфактор h_+ в (4.5.17). Удобно вычислять его из соотношения $(\cosh\vartheta + 1)\,h_+ = <B(v')|v_\mu V^\mu|B(v)>$. Простое вычисление диаграмм Рис. 4.8a, b дает

$$h_+ = 2\pi\alpha_s\,\frac{C_F}{N}\,\frac{\tilde{f}^2}{\mu^2}\,e^{-2\vartheta}\,{\rm Tr}\left[\gamma_\mu\,\Phi\,\gamma^\mu S\,\hat{v}\,\overline{\Phi}' + \Phi\,\hat{v}\,S'\gamma_\mu\overline{\Phi}'\gamma^\mu\right]\,, \qquad (4.5.19)$$

где $\Phi = \gamma_5(1-\hat{v})$ и $\overline{\Phi}' = -(1-\hat{v}')\gamma_5$ — спиновые структуры для псевдоскалярного мезона. Пропагаторы тяжелого кварка на Рис. 4.8a,b даются формулами

$$S = \frac{m(1-\hat{v}) + \mu\hat{v}'}{-m\mu e^{\vartheta}} \qquad (4.5.20)$$

[5]Заметим также, что любой механизм, приводящий к общему фазовому множителю в формфакторе, такой, как взаимодействие в конечном состоянии, не нарушает существования нуля.

и $S' = S(v \leftrightarrow v')$. Если мы сохраняем член, пропорциональный m, в числителе (4.5.20), то глюон поляризован продольно; две диаграммы дают равные вклады, и мы воспроизводим вклад функции ξ (4.5.2) в формфактор h_+ (4.5.18). Если, с другой стороны, мы сохраняем член $\hat{v}'$, то мы теряем фактор μ/m, но выигрываем фактор e^{ϑ} в шпуре. Тогда дает вклад только первая диаграмма; глюон поляризован поперечно, и мы воспроизводим вклад функции ξ_3 (4.5.5) в формфактор h_+. В этой модели, формфактор псевдоскалярного мезона имеет ноль при $q^2 = 2m^3/\mu$. Вычисление можно повторить для векторных мезонов, пользуясь спиновыми структурами $\Phi = \hat{e}(1-\hat{v})$ и $\overline{\Phi}' = (1-\hat{v}')\hat{e}'$. В частности, формфактор продольно поляризованного векторного мезона имеет ноль при $q^2 = -2m^3/\mu$. Другие формфакторы могут быть вычислены подобным образом; наши результаты совпадают с [**162**]. Эта модель рассматривалась Бродским и Джи [**161**], которые впервые обнаружили ноль псевдоскалярного формфактора в физической области больших положительных q^2. Однако, их утверждение, что формфактор продольно поляризованного векторного мезона ведет себя таким же образом, неверно. На самом деле он имеет ноль при больших отрицательных q^2.

4.6. Приложения

Наконец, рассмотрим приложение наших результатов к вычислению сечений реакций $e^+e^- \to B^{(*)}\overline{B}^{(*)}$ в области $s \gg 4m_B^2$. Напомним, что член в электромагнитном токе, связанный с легкими кварками, не дает существенного вклада в асимптотической области. Поэтому можно использовать формулы (4.5.18) для формфакторов. Как обычно, определим

$$R_X = \frac{\sigma(e^+e^- \to X)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}\,. \tag{4.6.1}$$

Используя формфакторы (4.5.17), мы получаем для $x = \sqrt{s}/m_B \gg 1$:

$$\begin{aligned}
&R_1 = R_{BB^*+B_{\mathrm{T}}^*B_{\mathrm{L}}^*} = \frac{z_b^2}{2}\,x^2|C|^2|\xi|^2\,,\\
&R_2 = R_{BB} = \frac{z_b^2}{4}\,|C|^2\left|\xi + \frac{2}{m_b}\,\xi_3\right|^2\,,\\
&R_3 = R_{B_{\mathrm{L}}^*B_{\mathrm{L}}^*} = \frac{z_b^2}{4}\,|C|^2\left|\xi - \frac{2}{m_b}\,\xi_3\right|^2\,,\\
&R_4 = R_{B_{\mathrm{T}}^*B_{\mathrm{T}}^*} = \frac{z_b^2}{2}\,|C|^2|\xi|^2\,,
\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

где формфакторы зависят от $v\cdot v' \simeq -\frac{1}{2}x^2$, и $|C| = (e/x^2)^{-\eta}$ со степенью η, даваемой (4.5.16). Здесь $z_b = -\frac{1}{3}$ — заряд b кварка. На Рис. 4.10 показаны наши предсказания для сечений рождения $B^{(*)}\overline{B}^{(*)}$ в зависимости от x, полученные с использованием модельных волновых функций (4.4.24), для которых

$$\xi(x) \approx 48\pi \frac{\alpha_s \tilde{f}^2}{\varepsilon_0^3} \frac{\log^2 x}{x^4}\,, \quad \xi_3(x) \approx -4\pi \frac{\alpha_s \tilde{f}^2}{\varepsilon_0^2} \frac{1}{x^2}\,. \tag{4.6.3}$$

Для простоты, мы пренебрегли глюонными эффектами, положив $C = 1$ в (4.6.2). Сечение R_1 доминирует в широкой области из–за кинематического множителя x^2. Это означает, что рождаются главным образом пары BB^* и $B_{\rm T}^* B_{\rm L}^*$, с $R \sim 1/x^6$ и угловым распределением $1 + \cos^2\theta$ [**165**]. Сечение рождения $B\overline{B}$ обращается в ноль при некотором $x_0 \sim \sqrt{m_b/\Lambda}$, поскольку $\xi \sim \log^2 x/x^4$ и $\xi_3 \sim -\Lambda/x^2$. В нашей простой модели

$$x_0 \approx \sqrt{\frac{6m_b}{\varepsilon_0}}\, \log x_0 \approx 25\,. \tag{4.6.4}$$

Мы опять подчеркиваем, что точность этой формулы невысока из–за плохого знания асимптотики функции Исгура–Вайса. При $1 \ll x \ll x_0$, сечения R_2, R_3 и R_4 одного порядка и ведут себя как $1/x^8$ [**165**]. При $x \gg x_0$ поведение меняется. Вклад ξ_3 в сечения R_2 и R_3 становится больше вклада функции Исгура–Вайса ξ, так что R_2 и R_3 ведут себя как $1/x^4$ и доминируют над R_4. При очень больших x сечения R_2 и R_3 доминируют даже над R_1, которое ведет себя как $1/x^6$. Однако, из=за дваждылогарифмического усиления функции Исгура–Вайса, это произойдет при очень больших $x > x_1$, где в нашей модели

$$x_1 \approx \frac{6m_b}{\varepsilon_0} \log^2 x_1 \approx 3500\,. \tag{4.6.5}$$

В далекой асимптотике $x \gg x_1$, рождаются главным образом пары BB и $B_{\rm L}^* B_{\rm L}^*$, с $R \sim 1/s^2$ и угловым распределением $\sin^2\vartheta$.

Эти качественные черты, которые не зависят от конкретного выбора формы мезонных волновых функций, ясно видны на Рис. 4.10. К сожалению, сечения рождения $B^{(*)}\overline{B}^{(*)}$ при больших x так малы, что вряд ли возможно из экспериментальное изучение. Ситуация несколько лучше в случае рождения пар очарованных мезонов. Все формулы применимы для этого случая с очевидными подстановками ($m_b \to m_c$, $z_b \to z_c = \frac{2}{3}$). Мы получаем $x_0 \approx 8$ для рождения пар D–мезонов, что соответствует умеренным энергиям порядка

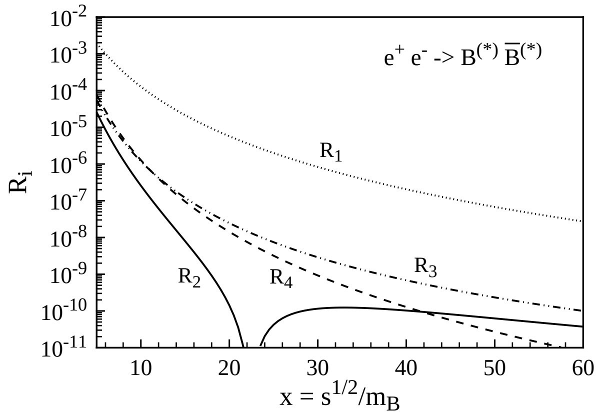


Рис. 4.10. Отношения сечений R_i для рождения $B\overline{B}$ пар в e^+e^- аннигиляции при больших x. Мы используем формфакторы (4.6.3) с $\varepsilon_0 = 550$MeV и $\alpha_s\tilde{f}^2/\varepsilon_0^3 = 0.06$.

15GeV. Второе изменение режима, однако, все еще происходит слишком далеко ($x_1 \approx 650$), чтобы представлять интерес. Предсказания для сечений показаны на Рис. 4.11.

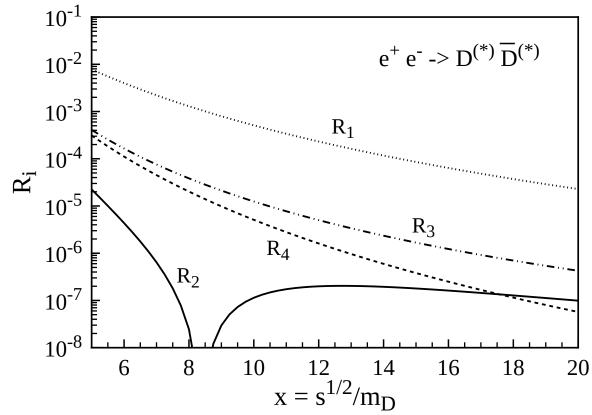


Рис. 4.11. Отношения сечений R_i для рождения $D\overline{D}$ пар в e^+e^- аннигиляции при больших x.

ГЛАВА 5

Правила сумм для инклюзивных распадов тяжелых мезонов

Эта глава посвящена свойствам структурных функций инклюзивных распадов тяжелых мезонов, и основана на работах [**27**]–[**29**].

В §5.1 предложено правило сумм для второго момента структурной функции в пределе малых скоростей [**27**]. Оно позволяет, в принципе, извлечь средний квадрат импульса b кварка в B мезоне μ_π^2 из дифференциального распределения по инвариантной массе и энергии адронной системы в инклюзивном распаде B. Пока оно не измерено, можно получить лишь оценку снизу на μ_π^2.

В §5.2, 5.3 рассматриваются структурные функции в распадах на тяжелый и легкий кварк [**28**]. Они выражаются через Фурье–образ матричного элемента Вильсоновской линии со времениподобным и светоподобным сегментом, соответственно. В первом случае эта функция перенормируется мультипликативно, а во втором — удовлетворяет уравнению эволюции типа Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи (ГЛАП). Предложено решение проблемы обрезания правил сумм Бьеркена, Волошина и BGSUV [**27**] при больших энергиях: вводится мягкое экспоненциальное обрезание вида $e^{-\varepsilon\tau}$, и все величины берутся в точке нормировки $\mu = 1/\tau$; после этого остаются вычислимые пертурбативные поправки, не содержащие больших логарифмов. Ренормалонные вклады в Вильсоновские линии рассмотрены в модели, основанной на бегущей константе связи, аргументом которой является поперечный импульс. Ведущая неоднозначность, связанная с ренормалоном в точке $u = 1/2$, сокращается с неоднозначностью массы тяжелого кварка. Следующая, связанная с $u = 1$, — с ультрафиолетовым ренормалоном в μ_π^2 (подчеркнем, что эта модель отличается от приближения больших β_0, в которой такой ренормалон отсутствует в ведущем порядке).

5.1. Правила сумм в пределе малых скоростей

Недавно было предложено [**166, 167**] применить операторное разложение к инклюзивным распадам адронов, содержащих тяжелый кварк. Полные ширины распада [**168**] разлагаются по $1/m$; в числителях содержатся адронные матричные элементы операторов различных размерностей. Дифференциальные ширины в области больших инвариантных масс конечной адронной системы [**169**]–[**173**] параметризуются теми же матричными элементами. В области малых инвариантных масс операторное разложение становится неприменимым, и требуется суммирование подпоследовательностей главных членов. При этом возникают структурные функции тяжелых адронов [**174, 175**], аналогично случаю глубоко неупругого рассеяния.

Операторное разложение позволяет вывести различные полезные правила сумм для распадов тяжелых адронов в пределе малых скоростей [**176, 86**]. Непертурбативные поправки включаются в теоретическую часть правил сумм в виде разложения по $1/m$. Первое правило сумм [**176**] использовалось для оценки отклонения формфактора перехода $B \to D^*$ при нулевой отдаче от единицы в порядке $(\Lambda_{\overline{\text{MS}}}/m)^2$. Второе правило сумм [**86**] дает теоретико–полевое доказательство неравенства

$$\mu_\pi^2 > \mu_G^2\,, \tag{5.1.1}$$

где μ_π^2 и μ_G^2 определены в §2.1 (которое было получено в квантовомеханическом подходе [**175, 177**]). Здесь мы получим подобное правило сумм в пределе малых скоростей, которое связывает μ_π^2 со средним квадратом энергии возбуждения конечного адронного состояния X_c в полулептонном распаде $B \to X_c$. В настоящее время, соответствующее инклюзивное распределение еще не измерено. Однако, мы используем существующие данные о распаде $B \to D^* l\nu$ вблизи точки нулевой отдачи, чтобы получить новое ограничение снизу на μ_π^2, которое не связано с μ_G^2. Ограничение содержит наклон функции Исгура–Вайса, извлекаемый из импульсной зависимости распада $B \to D^*$. Численно, это ограничение близко к (5.1.1).

Общий метод, позволяющий выводить правила сумм в пределе малых скоростей, представлен в [**86**]. Операторное разложение применяется к оператору перехода [**166, 167**]

$$\hat{T}_{ab}(q) = i \int d^4x \; e^{iqx} \, T\{j_a^+(x) j_b(0)\} \,, \tag{5.1.2}$$

где j_a — ток $\bar{c}\Gamma_a b$ с произвольной Дираковской матрицей Γ_a; q — импульс, уносимый лептонной парой. Среднее от $\hat{T}_{ab}$ по состоянию тяжелого адрона H_b с импульсом p_{H_b} представляет собой амплитуду рассеяния вперед (так называемый адронный тензор)

$$h_{ab}(p_{H_b}, q) = \frac{1}{2M_{H_b}} \langle H_b | \hat{T}_{ab} | H_b \rangle \,. \tag{5.1.3}$$

Наблюдаемые распределения выражаются через структурные функции

$$w_{ab} = (1/i) \text{ disc } h_{ab} \,.$$

В HQET пределе, если пренебречь $1/m_b$, $1/m_c$ поправками, адронный тензор h_{ab} определяется одной инвариантной функцией h для любой матрицы Γ_a в токе j_a, а именно:

$$h_{ab} = C_{ab} h \,, \quad C_{ab} = \mathrm{Tr} \left[\frac{1+\hat{v}_1}{2} \overline{\Gamma}_a \frac{1+\hat{v}_2}{2} \Gamma_b \right] . \tag{5.1.4}$$

Здесь v_1^μ, v_2^μ — 4–скорости начального и конечного адронов,

$$v_1^\mu = \frac{p_{H_b}^\mu}{M_{H_b}} \,, \quad v_2^\mu = \frac{(p_{H_b} - q)^\mu}{M_{H_c}} \tag{5.1.5}$$

(M_{H_b} и M_{H_c} можно заменить на m_b и m_c в ведущем приближении). Инвариантная функция h зависит от двух скаляров, имеющихся в этом процессе, а именно $(v_1 q)$ и q^2. В дальнейшем мы будем подразумевать, что адрон H_b покоится; тогда первый инвариант сводится к q_0. При изучении $b \to c$ переходов при нулевой отдаче или в пределе малых скоростей удобно использовать квадрат пространственной передачи импульса $\vec{q}^{\,2} = (v_1 q)^2 - q^2$ в качестве второго аргумента h.

При учете $1/m_{b,c}$ поправок теряется свойство факторизации h_{ab} на универсальную кинематическую структуру и одну адронную функцию h. В общем случае адронный тензор может быть разложен по всем возможным ковариантам (их число зависит от Лоренцевой структуры токов) с коэффициентами h_i. В частности, в случае векторного и аксиального токов мы имеем дело с функциями h_i^{VV}, h_i^{AA} и h_i^{VA}, $i = 1, \ldots \; 5$, введенными в [**171**].

В общем случае, это независимые функции; в главном порядке по $1/m$ они выражаются через одну функцию h:

$$h = \frac{h_1^{AA}}{1+v_1v_2} = \frac{1}{2}\frac{m_c}{m_b}h_2^{AA} = -m_c h_5^{AA}\,; \quad h = \frac{h_1^{VV}}{1-v_1v_2} = -\frac{1}{2}\frac{m_c}{m_b}h_2^{VV} = m_c h_5^{VV}\,;$$
$$h = -m_c h_3^{VA}\,.$$

Не перечисленные здесь функции h_i равны нулю в этом приближении. Выражения для всех функций h_i вплоть до членов $1/m_b^2$ приведены в [**171**].

Хотя описанная выше универсальная факторизация не справедлива для всех непертурбативных поправок, она верна для тех из них, которые нужны для получения третьего правила сумм. Мы вскоре объясним это подробнее. Поскольку неважно, которую адронную функцию рассматривать — все они приводят к одному и тому же третьему правилу сумм — мы будем использовать h_1^{AA}. Таким образом, мы рассматриваем переход B мезона, вызванный аксиальным током

$$A^\mu = \bar{c}\gamma^\mu\gamma_5 b\,.$$

Чтобы выделить h_1^{AA}, нужно рассмотреть пространственные компоненты аксиального тока, вызывающие переход B мезона в D^* и соответствующие возбуждения.

В [**176**] были получены правила сумм при нулевой отдаче ($\vec{q}=0$); здесь мы будем работать при малых, но ненулевых значениях $|\vec{q}\,|$. Мы сохраняем члены $O(\vec{q}^{\,2})$, но пренебрегаем более высокими степенями $|\vec{q}\,|$.

Чтобы начать вывод, рассмотрим $h_1^{AA}(q_0,\vec{q}\,)$ в комплексной плоскости q_0 ($\vec{q}$ предполагается фиксированным, и $\Lambda_{\rm QCD} \ll |\vec{q}\,| \ll M_D$). Точнее говоря, сдвинем q_0, введя величину

$$\epsilon = q_{0\max} - q_0\,, \tag{5.1.6}$$

где

$$q_{0\max} = M_B - E_{D^*}\,, \quad E_{D^*} = M_{D^*} + \frac{\vec{q}^{\,2}}{2M_{D^*}}\,. \tag{5.1.7}$$

Когда ϵ действительно и положительно, мы находимся на разрезе. Мнимая часть h_1 дается "упругим" вкладом D^* плюс неупругие возбуждения. Для дальнейшего существенно, что все эти вклады *положительно определены*.

При отрицательных ϵ мы находимся ниже разреза, и амплитуда h_1^{AA} может быть вычислена — что и было сделано [**171, 170**] — в виде разложения по $\Lambda_{\rm QCD}/m_{c,b}$. Для наших целей достаточно ограничиться поправками второго порядка по $\Lambda_{\rm QCD}$. Именно это приближение использовалось в [**171, 170**], и далее мы используем полученные там выражения.

На следующем шаге мы положим $\Lambda_{\rm QCD} \ll |\epsilon| \ll m_{b,c}$. Амплитуда h_1^{AA} разлагается по степеням $\Lambda_{\rm QCD}/\epsilon$ и $\epsilon/m_{b,c}$. Полиномы по ϵ можно опустить, поскольку у них нет мнимой части. Нас интересуют только отрицательные степени ϵ. Коэффициент при $1/\epsilon^{n+1}$ связан посредством дисперсионных соотношений с интегралом от мнимой части h_1^{AA} с весом, пропорциональным энергии возбуждения в степени n. Так, первое правило сумм [**176**] соответствует $n = 0$; второе [**86**] (называемое оптическим, или правилом сумм Волошина [**127**]) — $n = 1$. Ограничение снизу на μ_π^2 — наша главная цель — следует из третьего правила сумм, т. е. мы должны рассмотреть коэффициент при $1/\epsilon^3$ в разложении h_1.

Разложение по $1/\epsilon$ может быть извлечено из уравнения (A.1) в [**171**]. Один технический элемент вывода заслуживает комментария. Теоретическое выражение для амплитуды h_1^{AA}, представленное в [**171**], конечно, ничего не знает о массах мезонов; оно содержит только массы кварков. Поэтому удобно сначала построить разложение h_1^{AA} по вспомогательной величине

$$\epsilon_q = m_b - E_c - q_0\,, \quad E_c = m_c + \frac{\vec{q}^{\,2}}{2m_c}\,. \tag{5.1.8}$$

Затем, если это необходимо, мы перевыражаем полученное таким образом разложение через ϵ. Разница между ϵ_q и ϵ порядка $O(\Lambda_{\rm QCD}\vec{q}^{\,2}/m_{b,c}^2)$ и $O(\Lambda_{\rm QCD}^2/m_{b,c})$. Скоро мы увидим, что с нашей точностью эту разницу можно просто игнорировать в третьем правиле сумм в пределе малых скоростей. Ее, однако, нельзя опускать во втором правиле сумм. Эта ситуация существенно отличается от правил сумм при нулевой отдаче [**86**]; там различие между ϵ и ϵ_q абсолютно существенно.

Выражение для h_1^{AA} в (A.1) в [**171**] имеет вид

$$-h_1^{AA} = \left[(m_b + m_c - q_0) + O(\Lambda_{\rm QCD}^2/m_b)\right]\frac{1}{z} + O(\Lambda_{\rm QCD}^2)\frac{1}{z^2} + \frac{4}{3}(m_b + m_c - q_0)\mu_\pi^2\vec{q}^{\,2}\frac{1}{z^3}\,, \tag{5.1.9}$$

где

$$z = \epsilon_q(2E_c + \epsilon_q)\,. \tag{5.1.10}$$

Отметим сходство коэффициента при $1/z^3$ и главной части коэффициента при $1/z$. Это не случайно. Член $1/z^3$ появляется только из разложения второго порядка по πq знаменателя $(m_b v - q)^2 - 2q\pi$ (см. [**171**]) и потому сохраняет универсальную факторизацию, которую мы обсуждали в HQET пределе.

Разлагая по $\epsilon_q/2E_c$, мы видим, что $1/z^n$ сводится к $1/\epsilon_q^n$ плюс более низкие степени $1/\epsilon_q$ плюс полином по ϵ_q. Следующий шаг состоит в исключении ϵ_q в пользу ϵ. Член $1/z^3$ появляется с коэффициентом $\mu_\pi^2 \vec{q}^{\,2}$; поэтому здесь разница между $1/\epsilon$ и $1/\epsilon_q$ имеет более высокий порядок, и ей можно пренебречь. По той же причине, с точностью $O(\Lambda_{\rm QCD}^2)$ можно заменить $1/\epsilon_q$ на $1/\epsilon$ в $1/z^2$ члене. Что касается $1/z$ члена, то здесь мы должны перевыразить $1/\epsilon_q$ через $1/\epsilon$:

$$\frac{1}{\epsilon_q} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{(\epsilon - \epsilon_q)}{\epsilon^2} + \cdots \tag{5.1.11}$$

Дальнейшие члены в (5.1.11) несущественны, поскольку они дают поправки более высоких порядков по $\Lambda_{\rm QCD}$ и/или $|\vec{q}\,|$. Это наблюдение очень важно, поскольку оно говорит нам, что $1/z$ член дает вклад только в первое и второе правила сумм; он не производит $1/\epsilon^3$ членов. В результате h_1^{AA} имеет вид

$$-h_1^{AA} = \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \frac{\vec{q}^{\,2}}{4m_c^2} + O(\Lambda_{\rm QCD}^2/m_c^2)\right) + \frac{1}{\epsilon^2}\left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\vec{q}^{\,2}}{m_c^2} + O(\Lambda_{\rm QCD}^2/m_c)\right) + \frac{1}{\epsilon^3}\frac{\mu_\pi^2}{3}\frac{\vec{q}^{\,2}}{m_c^2} + \text{polynomial}\,. \tag{5.1.12}$$

Здесь сохранены только члены $O(\vec{q}^{\,2})$. Мы также не обсуждаем пертурбативных поправок. Выписывая дисперсионное соотношение по ϵ

$$-\,h_1^{AA}(\epsilon, \vec{q}^{\,2}) = \frac{1}{2\pi}\int d\tilde{\epsilon}\,\frac{w_1^{AA}(\tilde{\epsilon}, \vec{q}^{\,2})}{\epsilon - \tilde{\epsilon}} \tag{5.1.13}$$
$$= \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{2\pi}\int d\tilde{\epsilon}\, w_1^{AA}(\tilde{\epsilon}, \vec{q}^{\,2}) + \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{2\pi}\int d\tilde{\epsilon}\,\tilde{\epsilon}\, w_1^{AA}(\tilde{\epsilon}, \vec{q}^{\,2}) + \frac{1}{\epsilon^3}\frac{1}{2\pi}\int d\tilde{\epsilon}\,\tilde{\epsilon}^2 w_1^{AA}(\tilde{\epsilon}, \vec{q}^{\,2}) + \cdots,$$

и разлагая его по $1/\epsilon$, мы получаем правила сумм, приравнивая коэффициенты при $1/\epsilon^n$. Здесь $w_1^{AA} = 2\,\mathrm{Im}\, h_1^{AA}$.

Теперь мы обсудим феноменологическую сторону правила сумм. Структурная функция w_1^{AA} отлична от нуля при положительных ϵ,

$$w_1^{AA}(\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|F_{B\to i}|^2}{2E_i}\, 2\pi\delta(\epsilon - \delta_i)\,, \tag{5.1.14}$$

где сумма берется по всем возможным конечным адронным состояниям, член с $i = 0$ соответствует "упругому" переходу $B \to D^*$, тогда как $i = 1, 2, \ldots$ представляют возбужденные состояния с энергиями $E_i = M_i + \vec{q}^{\,2}/(2M_i)$. Строго говоря, $|F_{B\to i}|^2$ не является квадратом формфактора; это вклад в данную структурную функцию от мультиплета вырожденных состояний, который включает суммирование по спинам. Так, в "упругом" вкладе нужно суммировать по поляризациям D^*. "Квадрат формфактора" $|F_{B\to i}|^2$ зависит от $\vec{q}^{\,2}$. Кроме того, δ_i в (5.1.14) — это энергия возбуждения (включая кинетическую энергию):

$$\delta_i = E_i - E_{D^*}\,.$$

Разумеется, для упругого перехода $\delta_0 = 0$.

Приравнивая коэффициенты при $1/\epsilon$ в (5.1.12) и (5.1.13), мы получаем правило сумм Бьеркена

$$\frac{1}{2\pi}\int d\epsilon\, w_1^{AA}(\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{|F_{B\to i}|^2}{2E_i} = 1 - \frac{\vec{q}^{\,2}}{4m_c^2}\,. \tag{5.1.15}$$

В главном порядке по $1/m_{b,c}$, в правой части можно заменить m_c на M_{D^*} (так что $\vec{q}/M_{D^*} = \vec{v}$), а в левой — E_i на M_i (или M_{D^*}). Можно также пренебречь $O(\vec{q}^{\,2})$ членом в величинах δ_i, так что $\delta_i = M_i - M_{D^*}$. Упругий вклад параметризуется через функцию Исгура–Вайса $\xi(v_1v_2)$. Амплитуда перехода $B \to D^*$ имеет вид

$$<D^*(v_2)|A_\mu|B(v_1)> = \sqrt{M_B M_{D^*}}\;\left[\epsilon_\mu(1+v_1v_2) - (\epsilon v_1)v_{2\mu}\right]\xi(v_1v_2)\,,$$

где $v_{1,2}$ — 4–скорости. Это означает, что

$$(2E_{D^*})^{-1}|F_{B\to D^*}|^2 = \frac{M_{D^*}}{E_{D^*}}\left(\frac{1+v_1v_2}{2}\right)^2|\xi(v_1v_2)|^2 \approx 1 - \rho^2\vec{v}^{\,2}\,. \tag{5.1.16}$$

Здесь ρ^2 — параметр наклона:

$$\xi(v_1v_2) = 1 - \rho^2(v_1v_2 - 1) + \cdots = 1 - \rho^2\frac{\vec{v}^{\,2}}{2} + \cdots\,, \tag{5.1.17}$$

и $\xi(1) = 1$ (§3.2).

Хотя мы обсуждали правило сумм Бьеркена для аксиального тока, в действительности оно может быть выведено для любого тока $j_a = \bar{b}\Gamma_a c$. В главном порядке по $1/m_{b,c}$

структурные функции $w_{ab} = 2\,\mathrm{Im}\,h_{ab}$ удовлетворяют свойству универсальной факторизации (5.1.4). Сумма по любому вырожденному HQET мультиплету состояний дает

$$\frac{1}{2M_B}\sum_i <B|j_a^+|H_c^i><H_c^i|j_b|B> = C_{ab}M_{H_c}\frac{1+v_1v_2}{2}\left|\xi_{H_c}(v_1v_2)\right|^2, \tag{5.1.18}$$

где ξ_{H_c} — функция Исгура–Вайса мультиплета H_c.

При $\vec{v} = 0$ правило сумм (5.1.15) тривиально выполняется, поскольку при нулевой отдаче все неупругие формфакторы обращаются в ноль, и остается упругий вклад, равный единице. Члены порядка $\vec{v}^{\,2}$ дают соотношение между наклоном ξ и неупругими вкладами:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|F_{B\to i}|^2}{2M_i} = \left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right)\vec{v}^{\,2}. \tag{5.1.19}$$

В главном порядке все формфакторы перехода в возбужденные состояния пропорциональны $\vec{q}$, т. е.

$$|F_{B\to i}|^2 \propto \vec{q}^{\,2}. \tag{5.1.20}$$

В действительности, существенны только переходы в P–волновые состояния. Поэтому отношение $|F_{B\to i}|^2/\vec{v}^{\,2}$ имеет конечный предел при нулевой отдаче. Отсюда следует, в частности, неравенство Бьеркена $\rho^2 > 1/4$.

Подобным образом, приравнивая коэффициенты при $1/\epsilon^2$, мы получаем правило сумм Волошина

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|F_{B\to i}|^2}{2M_i}\,\delta_i = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{v}^{\,2}. \tag{5.1.21}$$

Поскольку $\delta_0 = 0$, упругий вклад отсутствует, и сумма начинается с первого возбуждения. Прибавляя и вычитая δ_1 и используя правило сумм Бьеркена (5.1.19), мы получаем

$$\varepsilon_0 = 2\delta_1\left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right) + 2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{|F_{B\to i}|^2}{2M_i\vec{v}^{\,2}}\left(\delta_i - \delta_1\right), \tag{5.1.22}$$

откуда следует неравенство Волошина

$$\varepsilon_0 > 2\delta_1\left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right). \tag{5.1.23}$$

Приравнивая коэффициенты при $1/\epsilon^3$, мы получаем новое, третье, правило сумм:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|F_{B\to i}|^2}{2M_i}(M_i - M_{D^*})^2 = \frac{1}{3}\mu_\pi^2\vec{v}^{\,2}. \tag{5.1.24}$$

В принципе, если будет экспериментально измерено инклюзивное распределение по q_0 и $\vec{q}^{\,2}$, то из этого правила сумм можно будет найти μ_π^2. Пока же мы можем получить лишь ограничение снизу. Прибавляя и вычитая $\delta_1\delta_i$ и используя правило сумм Волошина (5.1.22), мы получаем

$$\mu_\pi^2 = \frac{3}{2}\delta_1\varepsilon_0 + 3\sum_{i=2}^{\infty}\frac{|F_{B\to i}|^2}{2M_i\vec{v}^{\,2}}\,\delta_i(\delta_i-\delta_1)\,, \tag{5.1.25}$$

откуда следует неравенство

$$\mu_\pi^2 > \frac{3}{2}\delta_1\varepsilon_0 > 3\delta_1^2\left(\rho^2 - \frac{1}{4}\right) \tag{5.1.26}$$

(последнее неравенство следует из (5.1.23)).

Для первой грубой оценки мы положим $\delta_1 \approx 500\mathrm{MeV}$ и используем экспериментально измеренный наклон $B \to D^*$ формфактора $\rho^2 = 0.84 \pm 0.12 \pm 0.08$. Тогда $\mu_\pi^2 > 0.45\mathrm{GeV}^2$.

Один и тот же результат для третьего правила сумм получается независимо от того, с какого тока мы стартуем, аксиального, векторного или их смеси. Единственная разница состоит в том, что для векторного тока мы имеем M_D вместо M_{D^*} в определении δ_1. Конечно, это отличие несущественно а пределе $m_{b,c} \to \infty$. В уравнении (5.1.24) опущены все неведущие $1/m_{b,c}$ члены; поэтому все величины в нем относятся к HQET пределу, и соответствующие адронные параметры должны пониматься в том же смысле. Иными словами, вместо использования экспериментального значения ρ^2, измеренного в $B \to D^*$ переходе, и δ_1 для очарованных мезонов, следует использовать их значения в пределе бесконечных масс.

Суммы в (5.1.15, 5.1.21, 5.1.24) берутся по всем возбужденным состояниям, включая состояния с большими энергиями возбуждения, которые описываются пертурбативными формулами в смысле дуальности. Чтобы получить предсказания для ρ^2, ε_0, μ_π^2, нормированные в низкой точке μ, не зависящей от масс кварков, нужно обрезать суммы по возбужденным состояниям при $\delta_i \sim \mu$ и применить дуальность между пертурбативными поправками и вкладами возбужденных состояний выше μ (подробнее этот вопрос обсуждается в §5.2, 5.3).

В правилах сумм при ненулевой отдаче имеются $\Lambda_{\mathrm{QCD}}/m_{b,c}$ поправки, которые зависят от рассматриваемых токов и могут быть значительными. Однако все поправки к адронному тензору h_{ab} начинаются с членов, пропорциональных $\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2/m_{b,c}^2$ [**167, 168**] (см. (A.1) в [**171**]). Откуда же берутся линейные поправки? Они появляются, когда ϵ_q в теоретических формулах выражается через ϵ; поскольку $M_B = m_b + \varepsilon_0 + \cdots$ (то же верно для M_D, M_{D^*}), появляются линейные члены. Конечно, это не касается первого правила сумм; в этом случае поправки порядка $\Lambda^2_{\rm QCD}/m^2_{b,c}$ [**176**].

Теперь мы переходим к более аккуратному обсуждению численной ситуации. Экспериментально измеряемая скорость распада $B \to D^*(\text{unpolarized})\, l\nu$ выражается в главном приближении через функцию Исгура–Вайса (5.1.16). В этом приближении наклон этой функции связан с $\vec{q}^{\,2}$ зависимостью скорости распада. Ясно, что при учете $1/m_{b,c}$ и радиационных поправок экспериментально измеряемая $\vec{q}^{\,2}$ зависимость уже не совпадает в точности с наклоном функции Исгура–Вайса. Эти поправки оценивались в литературе, см. обзор [**61**]. Их эффект кажется эквивалентным уменьшению наклона функции Исгура–Вайса примерно на 9%. В то же время пертурбативные поправки увеличивают наклон на $\sim 20\%$. Принимая эти оценки на веру, мы заключаем, что

$$\rho^2 \approx \rho^2_{\rm exp} - 0.1\,, \tag{5.1.27}$$

где ρ^2 в левой части — истинное статическое значение параметра наклона, а $\rho^2_{\rm exp}$ — его значение, полученное из подгонки экспериментальных данных о зависимости скорости распада $B \to D^*(\text{unpolarized})\, l\nu$ от скорости D^* мезона. Напомним, что наклон ρ^2 функции Исгура–Вайса по определению не зависит от структуры рассматриваемых слабых токов. Приведенная численная оценка пертурбативных и $1/m_{b,c}$ поправок была получена для реальных $V-A$ токов, к которым относятся экспериментальные числа.

Подобные эффекты, обусловленные конечной массой c кварка, входят в наше неравенство неявным образом, когда мы используем наблюдаемые массы возбужденных очарованных мезонов. В будущем эти преасимптотические эффекты можно будет учесть модельно–независимым образом, когда масса соответствующих красивых мезонов будут измерены. Наиболее значительные поправки ожидаются от хромомагнитного взаимодействия спина тяжелого кварка, которое вызывает сверхтонкое расщепление компонент HQET мультиплетов. В частности, $M_{D^*} - M_D \sim 140$MeV. Этот эффект можно учесть, подставляя усредненные по спину массы S–волнового основного состояния и P–волновых возбуждений вместо конкретных масс D, D^* и т. д. Мы именно так и делаем. Другой сдвиг возникает из–за кинетической энергии тяжелого кварка. Естественно ожидать, что для возбужденных мезонов он меньше, чем в основном состоянии. Поэтому ожидается, что статический предел δ_1 несколько больше, чем наблюдаемое значение для очарованных мезонов, но, вероятно, не более чем на 50MeV. Мы используем значение

$$\delta_1 \approx 500\text{MeV} \tag{5.1.28}$$

как разумную догадку для статического значения δ_1.

Используя параметры (5.1.27), (5.1.28), мы окончательно получаем

$$\varepsilon_0 > 500\text{MeV}\,, \quad \mu_\pi^2 > 0.37\text{GeV}^2\,, \tag{5.1.29}$$

где первое неравенство следует из правила сумм Волошина (5.1.23). Эти нижние границы довольно близки к оценкам, ранее полученным из КХД правил сумм [**113, 178**]

$$\varepsilon_0 \sim 450\text{MeV}\,, \quad \mu_\pi^2 \sim 0.55\text{GeV}^2\,. \tag{5.1.30}$$

Заметим, что нижняя граница на μ_π^2 (5.1.29) численно весьма близка к границе (5.1.1), полученной из совсем других соображений.

К сожалению, численные неопределенности во всех приведенных величинах не позволяют нам сделать сильное утверждение. Тем не менее, представим себе, что уточненные измерения и вычисления неведущих поправок к третьему правилу сумм не изменят существенно того факта, что неравенства (5.1.29) близки к насыщению. Это означало бы, что правила сумм насыщаются, с разумной точностью, вкладами состояний с массами около $M_D + \delta_1$, собирательно называемых D^{**}. Для учета непертурбативных эффектов в $b \to c$ распадах было бы достаточно учитывать один неупругий канал, "D^{**}". Высшие возбужденные состояния представляются (в смысле дуальности) пертурбативными вкладами, вычисленными в приближении свободных кварков и глюонов. Мы считаем такой сценарий наиболее естественным. Заметим, что $D\pi$ вклад в третье правило сумм подавлен для мягких пионов, в отличие от первого правила сумм, где он был значительным [**176**]. Эффекты излучения жестких пионов хорошо представляются P–волновыми D^{**} резонансами.

5.2. Переходы тяжелого кварка в тяжелый

В этом и следующем параграфах мы более подробно рассмотрим правила сумм для инклюзивных распадов тяжелого мезона, когда тяжелый кварк превращается в тяжелый или легкий кварк. В первом случае скорость родившегося тяжелого кварка может быть произвольной, в частности, малой. Мы обратим особое внимание на проблему обрезания сумм по возбужденным состояниям, и связанный с ней вопрос о зависимости от точки нормировки.

В качестве примера рассмотрим инклюзивный распад $B \to W + X_c$, $W \to l\overline{\nu}$, и будем интересоваться распределением $d\Gamma_{B\to W+X_c}/(dq^2 dq_0)$ по инвариантной массе q^2 и энергии q_0 лептонной пары в системе покоя B мезона. В процессе имеются два больших масштаба: масса тяжелого кварка m_b и инвариантная масса конечного адронного состояния

$$m_X^2 = (m_B v - q)^2 = m_B^2 - 2m_B q_0 + q^2\,,$$

где v_μ — 4–скорость B мезона. Операторное разложение дифференциальной ширины [**169**]–[**173**] — это разложение по обратным степеням массы b кварка Λ/m_b и виртуальности образовавшегося c кварка $\Lambda m_b/(m_X^2 - m_c^2)$, при условии, что оба параметра малы. Это разложение применимо при достаточно больших инвариантных массах m_X, но не работает в области

$$m_X^2 - m_c^2 \lesssim \Lambda m_b\,. \tag{5.2.1}$$

В этой области дифференциальные распределения в распаде $B \to W + X_c$ в главном приближении по Λ/m_b параметризуются непертурбативной структурной функцией B мезона [**174, 175**]. Структурная функция не может быть в настоящее время вычислена из первых принципов КХД, но оказывается возможным связать ее низшие моменты с фундаментальными параметрами HQET. Эти соотношения известны как правила сумм Бьеркена [**126, 125**], Волошина [**127**] и BGSUV [**27**] (§5.1). Известно, однако, что при учете пертурбативных эффектов эти параметры зависят от точки нормировки, и правила сумм должны быть модифицированы, чтобы включить эти эффекты [**125, 127, 27**]. Здесь предложен вариант решения этой проблемы. Свойства структурных функций радикально зависят [**174, 175**] от отношения масс кварков m_c/m_b. Мы будем рассматривать m_c как свободный параметр. Как мы уже говорили, в задаче имеется два параметра: Λ/m_b и

$\Lambda m_b/(m_X^2 - m_c^2)$. Первый из них мал. Мы ограничимся главным порядком по этому параметру. Второй параметр не является малым в концевой области спектра (5.2.1), которая нас интересует.

Удобно ввести угол ϑ в пространстве Минковского между скоростями B мезона $v = p_B/m_B$ и конечной адронной системы $v' = p_X/m_X$ как $\cosh\vartheta = v \cdot v'$, и работать в переменных ϑ и m_X:

$$q^2 = m_X^2 + m_B^2 - 2m_X m_B \cosh\vartheta\,, \quad q_0 = m_B - m_X \cosh\vartheta\,.$$

Физическая область для этих переменных имеет вид

$$m_D \le m_X \le m_B\,, \quad 0 \le \vartheta \le \log\frac{m_B}{m_X}\,,$$

где максимум ϑ достигается в эксклюзивном рождении D мезона: $m_X = m_D$. Здесь нас интересует концевая область (5.2.1).

Возможные значения массы c кварка можно подразделить на большие ($m_c^2 \gg \Lambda m_b$) и малые ($m_c^2 \ll \Lambda m_b$). Реальная масса c кварка лежит где–то между этими предельными случаями. В случае тяжелого c кварка, из соотношения (5.2.1) следует, что c кварк в конечном состоянии X_c находится вблизи массовой поверхности. Легкие компоненты X_c имеют энергию порядка Λ. Импульс $p_X = m_X v'$ конечного состояния X_c можно разложить таким же образом, как импульс D мезона $p_B = m_B v$:

$$p_X = m_c v' + k'\,, \quad p_B = m_b v + k\,, \tag{5.2.2}$$

где k' и k — остаточные импульсы. Можно ввести понятие остаточной энергии $\varepsilon_X = v' \cdot k'$ состояния X_c, подобно случаю B мезона:

$$\varepsilon_X = m_X - m_c\,, \quad \varepsilon_0 = m_B - m_b\,. \tag{5.2.3}$$

Обе они порядка Λ. Мы можем применять HQET как к b, так и к c кварку. Мы ограничимся ведущим порядком, пренебрегая $1/m_{b,c}$ поправками.

В пределе легкого c кварка, область (5.2.1) содержит две различные подобласти. При $m_X^2 - m_c^2 = O(m_c\Lambda)$, или $\varepsilon_X \ll m_c$, c кварк по–прежнему может считаться тяжелым. В противоположном случае $m_b\Lambda \gg m_X^2 \gg m_c^2$ мы имеем $\varepsilon_X \gg m_c$, что означает, что энергия легких компонент X_c много больше m_c, и c кварк ведет себя как безмассовый.

В этом параграфе мы обсудим случай тяжелого c кварка. В ведущем порядке HQET можно выключить спины b и c кварков, и рассматривать распад $b_v \to c_{v'}W$ с бесспиновыми b_v, $c_{v'}$ и W. Спиновые факторы Клебша–Гордана могут быть тривиальным образом включены позже.

Структурная функция (3.2.13) может быть представлена как Фурье–образ произведения двух токов:

$$F(\vartheta,\varepsilon) = \int d^4x\, e^{-iq\cdot x} <B|J^+(x)J(0)|B> , \quad q = p_B - p_X . \tag{5.2.4}$$

Матричные элементы тока $J = c^+_{v'}b_v$ можно упростить в пределе тяжелых кварков. В ведущем приближении, b и c кварки движутся по прямолинейным мировым линиям, направленным вдоль скоростей v и v'. Единственным эффектом их взаимодействия с легкими полями является появление эйкональной фазы, которая дается Вильсоновской линией $P\exp(i\int_C dx \cdot A(x))$, вычисленной вдоль классической траектории C. Поэтому при вычислении матричного элемента $<B|J^+(x)J(0)|B>$ мы заменяем операторы поля кварков:

$$\begin{aligned} &b_v(0) = \Phi_v[0,-\infty]a_v\,, \quad b^+_v(x) = e^{im_b v\cdot x}a^+_v\Phi_{-v}[-\infty,x]\,,\\ &c_{v'}(x)c^+_{v'}(0) = e^{-im_c v'\cdot x}\Phi_{v'}[x,0]D_{v'}(x)\,, \end{aligned}$$

где a_v и $a^+_{v'}$ — операторы рождения и уничтожения кварков, а $D_{v'}(x)$ — свободный разрезанный пропагатор тяжелого кварка:

$$D_{v'}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\delta(k\cdot v')\,e^{ik\cdot x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\,\delta^{(4)}(x - v't)\,.$$

Эйкональные фазы $\Phi_v[x,-\infty]$ и $\Phi_{v'}[x,0]$ соответствуют движению b кварка со скоростью v из $-\infty$ в точку x и движению c кварка из точки 0 в $x = v't$ со скоростью v', и даются формулами

$$\Phi_v[x,-\infty] = P\exp\left(i\int\limits_{-\infty}^{0} dsv\cdot A(x+vs)\right)\,, \quad \Phi_{v'}[v't,0] = P\exp\left(i\int\limits_{0}^{t} dsv'\cdot A(v's)\right)\,.$$

Вследствие этого, в пределе тяжелых кварков мы получаем

$$<B|J^+(x)J(0)|B> \tag{5.2.5}$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \delta^{(4)}(x - v't) e^{-it(m_c - m_b \cosh\vartheta)} <B|a_v^+ \Phi_{-v}[-\infty, tv'] \Phi_{v'}[tv', 0] \Phi_v[0, -\infty] a_v|B> .$$

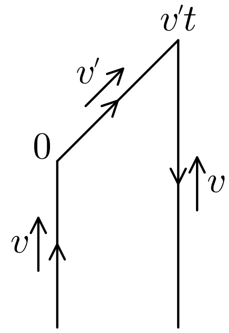


Рис. 5.1. Вильсоновская линия для структурной функции.

Здесь три Вильсоновские линии могут быть объединены в одну по контуру C, который идет из $-\infty$ в точку 0 вдоль v, затем из точки 0 в точку $v't$ вдоль v', и наконец из точки $v't$ в $-\infty$ вдоль $-v$ (Рис. 5.1). Структурная функция является Фурье–образом

$$F(\vartheta, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi}\, e^{it(\varepsilon - \varepsilon_0 \cosh\vartheta)} W_C(\vartheta, t) \,, \tag{5.2.6}$$

где Вильсоновская линия определена как

$$W_C = <B(\varepsilon_0)| P \exp\left(i \int\limits_C dx \cdot A(x) \right) |B(\varepsilon_0)> . \tag{5.2.7}$$

Здесь $|B(\varepsilon_0)> = a_v|B>$ описывает легкие степени свободы B мезона. Заметим, что, поскольку структурная функция связана с произведением матричного элемента на комплексно–сопряженный, а не является функцией Грина, глюонные поля в (5.2.6) упорядочены вдоль контура C, а не по времени. На отдельных участках контура это упорядочение совпадает с хронологическим или антихронологическим. В соответствии с определением (5.2.6), структурная функция зависит только от свойств B мезона, но не от конкретного партонного процесса и лагранжиана взаимодействия. Она имеет смысл функции распределения по проекции остаточного импульса b кварка в B мезоне на v'.

Обратим преобразование Фурье (5.2.6) и произведем Виковский поворот $t = -i\tau$:

$$W(\vartheta, -i\tau) = e^{\tau\varepsilon_0(\cosh\vartheta - 1)} \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-\tau(\varepsilon-\varepsilon_0)} F(\vartheta, \varepsilon)\,, \tag{5.2.8}$$

где мы учли, что $F(\vartheta, \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$. Используя (3.2.15), мы можем получить феноменологическое выражение для Вильсоновской линии через эксклюзивные формфакторы. И наоборот, если мы знаем матричный элемент Вильсоновской линии, то мы можем извлечь информацию о формфакторах. Например, формфактор основного состояния связан с асимптотикой (5.2.8) при больших τ. Хотя мы не можем непертурбативно вычислить Вильсоновскую линию в общем случае, мы можем найти ее в пределе малых τ. Это дает информацию о формфакторах распадов тяжелого мезона в виде правил сумм.

Как эксклюзивные формфакторы, так и инклюзивная структурная функция зависят от точки нормировки μ. Эта μ–зависимость вводится процедурой факторизации, которая производится с дифференциальной шириной $d\Gamma$ (3.2.13), чтобы разделить вклады малых расстояний, дающие пертурбативную коэффициентную функцию $d\Gamma_0$, и вклады больших расстояний, дающие непертурбативную структурную функцию $F(\vartheta, \varepsilon)$. Каждая из этих функций зависит от масштаба разделения μ, но эта зависимость сокращается в физической скорости распада $d\Gamma$ (3.2.13).

Формфакторы определяются матричными элементами $<X_c|J(0)|B>$. В главном порядке HQET они могут быть представлены как матричные элементы Вильсоновской линии, идущей из $-\infty$ в точку 0 вдоль скорости b кварка v, а затем из точки 0 в $+\infty$ вдоль скорости c кварка v'. Контур имеет угол ϑ в точке 0, и поэтому Вильсоновская линия удовлетворяет уравнению ренормгруппы

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + \Gamma(\alpha_s, \vartheta)\right)\xi(\cosh\vartheta) = 0 \tag{5.2.9}$$

(аналогично для $\tau_{1/2,3/2}$). Аномальная размерность тяжело–тяжелого тока $\Gamma(\alpha_s, \vartheta)$ известна вплоть до двух петель [**69, 70**]. В пределе малых углов она имеет вид

$$\Gamma(\alpha_s, \vartheta) = \gamma(\alpha_s)\vartheta^2 + O(\vartheta^4)\,, \quad \gamma(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{3\pi}C_F + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 C_F\left(C_A\left(\frac{47}{54} - \frac{\pi^2}{18}\right) - n_f\frac{5}{54}\right). \tag{5.2.10}$$

Структурная функция определяется (5.2.6) Вильсоновской линией с двумя углами, и потому удовлетворяет уравнению ренормгруппы

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + 2\Gamma(\alpha_s,\vartheta)\right) W(\vartheta,-it) = 0\,. \tag{5.2.11}$$

При этом важно, что Вильсоновская линия упорядочена вдоль контура (для хронологически упорядоченной Вильсоновской линии аномальная размерность была бы равна $\Gamma(\alpha_s,\vartheta)+\Gamma(\alpha_s,i\pi-\vartheta)$). Разумеется, μ–зависимость структурной функции и формфакторов согласуются с разложением (3.2.15) по эксклюзивным каналам.

Поведение Вильсоновской линии при малых τ можно исследовать в теории возмущений. Пертурбативные поправки не зависят от состояний, участвующих в матричном элементе 5.2.7, так что мы можем для простоты рассматривать среднее по вакууму. Разлагая упорядоченную экспоненту по глюонному полю, мы получаем

$$\begin{aligned} W_{\rm pert}(\vartheta,-i\tau) =&1 + 2\alpha_s C_F \mu^{4-d}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^{d-2}}\delta(k^2)\theta(k_0)\left(\frac{v}{v\cdot k} - \frac{v'}{v'\cdot k}\right)^2 \left(1-e^{-\tau(v'\cdot k)}\right) \\ &+ O(\alpha_s^2)\,, \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

где использована размерная регуляризация. Интегрирование по импульсу глюона дает простой полюс $1/\epsilon$. Производя перенормировку в схеме $\overline{\rm MS}$, мы получаем однопетлевое выражение для Вильсоновской линии

$$W_{\rm pert} = 1 - \frac{\alpha_s}{\pi}C_F\left[2(\vartheta\coth\vartheta - 1)\log\frac{\mu\tau}{2} + 2\coth\vartheta\int\limits_0^\vartheta dx x\coth x - 1 - \vartheta\coth\vartheta\right] + O(\alpha_s^2)\,. \tag{5.2.13}$$

Легко проверить, что это выражение удовлетворяет уравнению ренормгруппы (5.2.11). Во всех порядках теории возмущений, Вильсоновская линия $W_{\rm pert}$ является безразмерной функцией $\alpha_s(\mu)$, $\mu\tau$ и угла ϑ. Поэтому, решая уравнение ренормгруппы (5.2.11), мы получаем

$$W_{\rm pert}(\vartheta,-i\tau) = \exp\left(-2\int\limits_{2/\tau}^{\mu}\frac{dk_t}{k_t}\Gamma(\alpha_s(k_t),\vartheta) + \gamma(\alpha_s(2/\tau),\vartheta)\right)\,, \tag{5.2.14}$$

где $\gamma(\alpha_s, \vartheta)$ — константа интегрирования. Сравнивая (5.2.14) с (5.2.13), можно получить однопетлевое выражение для $\gamma(\alpha_s, \vartheta)$:

$$\gamma(\alpha_s, \vartheta) = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left(1 + \vartheta \coth \vartheta - 2 \coth \vartheta \int\limits_0^{\vartheta} dx x \coth x \right) . \tag{5.2.15}$$

Выражение 5.2.14 суммирует все ведущие и неведущие логарифмические поправки ($\alpha_s^k \log^n \tau$) к Вильсоновской линии W. Например, подставляя однопетлевые выражения для аномальных размерностей и константы связи, мы получаем выражение, учитывающее все Судаковские дваждылогарифмы $\alpha_s^k \log^{2k} \tau$ и следующие поправки $\alpha_s^k \log^{2k-1} \tau$.

Хотя теория возмущений описывает все логарифмические поправки к W, она не может однозначно учесть степенные поправки по τ из–за наличия инфракрасных ренормалонов [**99**] в ряде теории возмущений для Вильсоновских линий.

Стандартный анализ инфракрасных ренормалонов производится в пределе больших n_f при фиксированном $n_f \alpha_s$ (см. §2.4, 2.7). При этом сохраняются только вклады кварковых петель, вставленных в глюонные пропагаторы, и предполагается, что их вклады качественно описывают асимптотику всего ряда теории возмущений. Покажем, что это плохое приближение для Вильсоновских линий. Полное пертурбативное выражение (5.2.14) имеет вид e^{-X}, и экспоненциально убывает с ростом размера контура τ. Кварковые петли дают вклад в аномальные размерности Γ и γ начиная с двухпетлевых членов $n_f \alpha_s^2$. В пределе больших n_f из e^{-X} выживают только два первых члена $1 - X$. Их асимптотика не имеет ничего общего с асимптотикой полной Вильсоновской линии.

Поэтому вместо использования стандартного подхода мы произведем "улучшенное" однопетлевое вычисление Вильсоновской линии. Вставим бегущую константу связи внутрь однопетлевого интеграла. Ее аргументом должен быть поперечный импульс глюона [**179**]. Используем неабелеву теорему экспоненциации [**180**], чтобы записать Вильсоновскую линию как экспоненту от первой поправки:

$$W(-i\tau, \vartheta) = \exp \left(2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d-2}} \delta(k^2) \theta(k_0) \alpha_s(k_t) \left(\frac{v}{v \cdot k} - \frac{v'}{v' \cdot k} \right)^2 \left(1 - e^{-\tau (v' \cdot k)} \right) \right)$$
$$\times \exp \left(\tau \Delta m (1 - \cosh \vartheta) \right) . \tag{5.2.16}$$

Здесь первая экспонента описывает взаимодействие эйконального тока b и c кварков $J(k) = \frac{v}{vk} - \frac{v'}{v'k}$ с мягкими глюонами; вторая связана с собственно–энергетическими поправками: она учитывает изменение фазы плоской волны $\exp(-i(m_b v - m_c v')\cdot x)$ при $x = -i\tau v'$ из–за перенормировки масс тяжелых кварков.

Собственная энергия тяжелого кварка в низшем порядке равна

$$\Sigma(v\cdot l) = -2iC_F\mu^{4-d}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^{d-1}}\frac{\alpha_s}{k^2 v\cdot(l+k)}\,. \tag{5.2.17}$$

При $d=4$ она имеет линейную ультрафиолетовую расходимость. В размерной регуляризации, интеграл (5.2.17) при $v\cdot l = 0$ не содержит масштаба, и потому перенормировка массы отсутствует: $\Delta m = 0$. Поэтому этот член не появлялся в однопетлевом выражении (5.2.12). Теперь мы подставим в собственную энергию (5.2.17) бегущую константу связи $\alpha_s(k_t) = \frac{1}{\beta_0}\int_0^\infty du (k_t^2/\Lambda^2)^{-u}$. В результате мы получим

$$\Sigma(v\cdot l) = \Lambda\frac{C_F}{2\pi\beta_0}\frac{(4\pi\mu^2/\Lambda^2)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)}\int_\epsilon^\infty du\,\Gamma^2(1-u)\Gamma(-1+2u)(-2v\cdot l/\Lambda)^{1-2u}\,. \tag{5.2.18}$$

Поскольку $(\Lambda\tau)^{2u} = e^{-u/\alpha_s(1/\tau)\beta_0}$, этот интеграл имеет вид обратного преобразования Бореля. Подынтегральное выражение имеет особенности при $u = n/2$, называемые ренормалонами. Они возникают из–за сингулярности константы связи при $k_t^2 = \Lambda^2$. Линейная расходимость однопетлевого интеграла (5.2.17) проявляется в виде ведущего ренормалона в точке $u = 1/2$. Полюс в точке $u = n/2$ приводит к неоднозначности интеграла порядка вычета $\sim (\Lambda/m)^n$; ведущая неоднозначность Δm содержится в интеграле [**100, 101**]

$$\Delta m = -\Lambda\frac{C_F}{2\beta_0}\int\frac{du}{1-2u} \tag{5.2.19}$$

по окрестности точки $u = 1/2$.

Возвращаясь к Вильсоновской линии, мы получаем "улучшенное" пертурбативное выражение

$$W = \exp\left(\frac{C_F}{2\pi\beta_0}\frac{(4\pi\mu^2/\Lambda^2)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)}\int_\epsilon^\infty du\;(\Lambda\tau)^{2u}\,\Gamma(-2u)\int_{-1}^{1} dx\frac{(1-x^2)^{1-u}}{(\coth\vartheta - x)^2} + \tau\Delta m(1-\cosh\vartheta)\right)\,. \tag{5.2.20}$$

Интегрирование по малым $u \ll 1$, или, что эквивалентно, по большим импульсам $k_t^2 \gg \Lambda^2$, дает результат, который, после перенормировки в схеме $\overline{\mathrm{MS}}$, удовлетворяет уравнению ренормгруппы (5.2.11). В то же время полный результат (5.2.20) содержит неоднозначности, обусловленные инфракрасными ренормалонами в точках $u = n/2$.

Наличие инфракрасных ренормалонов в Вильсоновской линии приводит к тому, что сумма ряда теории возмущений для W не определена однозначно, поскольку необходимо выбрать предписания для интегрирования ренормалонных особенностей. Используя различные предписания для особенности $u = n/2$, мы получим результаты, различающиеся степенной поправкой $(\Lambda\tau)^n$. Теория возмущений не может однозначно описать степенные поправки к Вильсоновской линии; чтобы сделать W однозначной, мы должны добавить непертурбативные степенные поправки к показателю экспоненты в (5.2.20):

$$W(-i\tau,\vartheta) = W_{\mathrm{pert}}(-i\tau,\vartheta) W_{\mathrm{nonpert}}(-i\tau,\vartheta)\,. \qquad (5.2.21)$$

Поэтому форму непертурбативных степенных поправок можно изучить, рассматривая инфракрасные ренормалоны в W_{pert}.

Начнем с ренормалона в точке $u = 1/2$. Раскладывая подынтегральное выражение (5.2.20) в ряд в этой точке, мы получаем

$$\log W_{\mathrm{pert}} \sim \tau\left(\frac{\Lambda C_F}{2\beta_0}\int\frac{du}{1-2u} + \Delta m\right)(1-\cosh\vartheta) + O(\tau^2)\,.$$

Используя (5.2.19), мы видим, что вклад инфракрасного ренормалона в точке $u = 1/2$ в показатель экспоненты Вильсоновской линии компенсируется вкладом ультрафиолетового ренормалона в той же точке в Δm.

Поэтому ведущая ренормалонная неоднозначность в Вильсоновской линии порядка $O(\Lambda^2\tau^2)$ и соответствует $u = 1$. Чтобы Вильсоновская линия (5.2.21) была однозначно определена, должен существовать непертурбативный вклад в W_{nonpert} на уровне степенной поправки $O(\Lambda^2\tau^2)$. Раскладывая подынтегральное выражение (5.2.20) вблизи $u = 1$, мы получаем

$$\log W_{\mathrm{pert}} \sim \tau\cdot 0 + \tau^2\Lambda^2\sinh^2\vartheta\,\frac{C_F}{4\pi\beta_0}\int\frac{du}{1-u} + O(\tau^3)\,. \qquad (5.2.22)$$

Мы можем параметризовать непертурбативные степенные поправки к W в терминах адронных матричных элементов, разлагая Вильсоновскую линию (5.2.7) по степеням τ:

$$W_{\text{nonpert}}(-i\tau, \vartheta) = 1 + a_1\tau + \frac{1}{2}a_2\tau^2 + \cdots,$$

где $a_n = <B|b_v^+(iv'D)^n b_v|B>$. Используя общий вид матричных элементов $<B|b_v^+D_\mu b_v|B> = c_1 v_\mu$ и $<B|b_v^+D_\mu D_\nu b_v|B> = c_2 g_{\mu\nu} + c_3 v_\mu v_\nu$ и учитывая уравнения движения, мы получаем $c_1 = 0$ и $c_2 = -c_3 = \mu_{0,\pi}^2/3$, где $\mu_{0,\pi}^2 = <B|b_v^+D^2 b_v|B>$ — фундаментальный параметр HQET. В результате, разложение W при малых τ дается формулой

$$W_{\text{nonpert}}(-i\tau, \vartheta) = 1 + 0\cdot\tau + \frac{1}{6}\tau^2\mu_{0,\pi}^2\sinh^2\vartheta + O(\tau^3)\,. \tag{5.2.23}$$

Сравнивая это выражение с (5.2.22), мы видим согласие с результатами ренормалонного анализа. А именно, коэффициент при τ равен нулю, а член с τ^2 имеет такую же зависимость от угла ϑ. Пертурбативная поправка $O(\tau^2)$ в W_{pert} содержит инфракрасную ренормалонную неоднозначность, а матричный элемент $\mu_{0,\pi}^2$ в W_{nonpert} содержит ультрафиолетовую ренормалонную неоднозначность. Сумма этих вкладов однозначно определена, и она определяет фундаментальный параметр μ_π^2.

Подчеркнем еще раз, что все эти результаты основаны на модели экспоненциации "улучшенного" однопетлевого вычисления, с поперечным импульсом в качестве аргумента α_s. Эта модель отличается от более стандартного предела больших n_f. В ведущем порядке приближения больших n_f, матричный элемент μ_π^2 не имеет ультрафиолетовой ренормалонной сингулярности в точке $u = 1$ [**181, 182**].

Взятые по отдельности, W_{pert} и W_{nonpert} имеют неоднозначности, вызванные инфракрасными и ультрафиолетовыми ренормалонами, соответственно. Их вклады сокращаются в произведении (5.2.21), так что Вильсоновская линия становится однозначно определенной, как и непертурбативные параметры типа μ_π^2. Тот факт, что инфракрасные ренормалоны появляются в показателе экспоненты в W_{pert}, приводит к тому, что ультрафиолетовые ренормалоны в W_{nonpert} тоже должны экспоненциироваться. Используя операторное разложение (5.2.23), можно выбрать минимальный анзац для $W_{\text{nonpert}}(-i\tau, \vartheta)$:

$$W_{\text{nonpert}}(-i\tau, \vartheta) = \exp\left(\frac{1}{6}\tau^2\mu_\pi^2\sinh^2\vartheta + O(\tau^3)\right), \tag{5.2.24}$$

где ряд в экспоненте не содержит члена, линейного по τ. Подставляя его в определение (5.2.6), мы получаем непертурбативный анзац для структурной функции:

$$F_{\text{nonpert}}(\varepsilon,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0\cosh\vartheta)^2}{2\sigma^2}\right) , \quad \sigma^2 = \frac{1}{3}\mu_\pi^2 \sinh^2\vartheta\,, \tag{5.2.25}$$

который описывает гауссово распределение по остаточной энергии ε с шириной σ, зависящей от угла ϑ. При $\vartheta\to 0$ эта функция превращается в $\delta(\varepsilon-\varepsilon_0)$. При этом образуется только основное состояние, переход в возбужденные состояния не происходит.

Наконец, подставляя (5.2.23) и (5.2.14) в (5.2.21) и (5.2.8), мы получаем правило сумм

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-\tau(\varepsilon-\varepsilon_0)} F(\vartheta,\varepsilon) = \exp\left(-\tau\varepsilon_0(\cosh\vartheta-1) - 2\int\limits_{2/\tau}^{\mu}\frac{dk_t}{k_t}\Gamma(\vartheta,\alpha_s(k_t)) + \gamma(\vartheta,\alpha_s(2/\tau))\right)$$
$$\times\left(1+\frac{1}{6}\mu_\pi^2\tau^2\sinh^2\vartheta + O(\tau^3)\right) . \tag{5.2.26}$$

Оно обобщает правило сумм Бьеркена, вводя мягкое экспоненциальное обрезание (ср. с [**125**]). С учетом (3.2.15) левая часть дается бесконечной суммой по образующимся адронным состояниям. Вклады с небольшими энергиями возбуждения можно разлагать в ряд по τ. Вклад высших возбужденных состояний определяется пертурбативным глюонным излучением (3.2.16), и ведет себя как $\log\tau$ при малых τ, подобно (5.2.14).

Подчеркнем, что правило сумм содержит два независимых масштаба μ и τ, и обе стороны (5.2.26) имеют одинаковую зависимость от них. Экспонента от интеграла от аномальной размерности Γ может быть объединена со структурной функцией, в результате чего получится $F(\vartheta,\varepsilon)$, нормированная в точке $\mu = 2/\tau$. Поэтому правило сумм (5.2.26) можно переписать в более простом виде

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-\tau(\varepsilon-\varepsilon_0)} F(\vartheta,\varepsilon)\Big|_{\mu=2/\tau} = e^{-\tau\varepsilon_0(\cosh\vartheta-1)+\gamma(\vartheta,\alpha_s(2/\tau))}\left(1+\frac{1}{6}\mu_\pi^2\tau^2\sinh^2\vartheta+O(\tau^3)\right) , \tag{5.2.27}$$

который содержит только один масштаб τ. В этом правиле сумм τ является свободным параметром, и, дифференцируя его по τ, мы получим обобщения правил сумм Волошина [**127**] и BGSUV [**27**] (§5.1).

Возможные значения τ в правилах сумм ограничены диапазоном

$$1/m_c \ll \tau \ll 1/\Lambda\,. \tag{5.2.28}$$

Верхний предел следует из условия, чтобы разложение по τ в (5.2.23) и (5.2.27) хорошо сходилось, а нижний — из применимости HQET к остаточным энергиям, существенным в правилах сумм.

Правила сумм значительно упрощаются в пределе малых скоростей $\vartheta \to 0$. Аномальная размерность (5.2.15) ведет себя как

$$\gamma(\vartheta, \alpha_s) = \gamma_0(\alpha_s)\vartheta^2 + O(\vartheta^4)\,, \quad \gamma_0(\alpha_s) = -\frac{5}{9} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2)\,.$$

Разлагая (5.2.27) до первого порядка по ϑ^2, мы получаем обобщение правила сумм Бьеркена (3.2.22)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_n |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2 e^{-\delta_{1/2}^{(n)}\tau} + \frac{2}{3}\sum_n |\tau_{3/2}^{(n)}(1)|^2 e^{-\delta_{3/2}^{(n)}\tau}\\ &\quad = -\frac{1}{4} + \rho^2(2/\tau) + \gamma_0(\alpha_s(2/\tau)) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\tau + \frac{1}{6}\mu_\pi^2\tau^2 + O(\tau^3)\,.\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Здесь $\tau_{1/2}(1)$ и $\tau_{3/2}(1)$ не зависят от μ, а параметр наклона ρ^2 нормирован в точке $\mu = 2/\tau$. Дифференцируя (5.2.29) по τ, мы получаем обобщения правил сумм Волошина (3.2.24) и BGSUV (3.2.25):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_n |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2 \delta_{1/2}^{(n)} e^{-\delta_{1/2}^{(n)}\tau} + \frac{2}{3}\sum_n |\tau_{3/2}^{(n)}(1)|^2 \delta_{3/2}^{(n)} e^{-\delta_{3/2}^{(n)}\tau}\\ &\quad = \frac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{d}{d\tau}\left(\rho^2(2/\tau) + \gamma_0(\alpha_s(2/\tau))\right) - \frac{1}{3}\mu_\pi^2\tau + O(\tau^2)\,,\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_n |\tau_{1/2}^{(n)}(1)|^2 \left(\delta_{1/2}^{(n)}\right)^2 e^{-\delta_{1/2}^{(n)}\tau} + \frac{2}{3}\sum_n |\tau_{3/2}^{(n)}(1)|^2 \left(\delta_{3/2}^{(n)}\right)^2 e^{-\delta_{3/2}^{(n)}\tau}\\ &\quad = \frac{1}{3}\mu_\pi^2 + \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\rho^2(2/\tau) + \gamma_0(\alpha_s(2/\tau))\right) + O(\tau)\,.\end{aligned}$$

Эти правила сумм были выведены в ведущем приближении тяжелых кварков. При выходе за пределы этого приближения возникают $1/m_{b,c}$ поправки. В частности, правые части правил сумм (5.2.29), (5.2.30) содержат матричный элемент кинетической энергии тяжелого кварка μ_π^2, но не хромомагнитного взаимодействия μ_G^2. Он появляется в правилах сумм на уровне $1/m^2$ поправок [**176, 86**].

5.3. Переходы тяжелого кварка в легкий

Теперь рассмотрим распад B мезона в пределе "легкого" c кварка $m_c^2 \ll \Lambda m_b$. Тогда при малых инвариантных массах конечного состояния $m_X^2 - m_c^2 = O(m_c\Lambda)$, c кварк ведет себя как тяжелый, и применимы результаты предыдущего параграфа. В случае же $m_b\Lambda \gg m_X^2 \gg m_c^2$ возникает новая ситуация, в которой энергия легких компонент X_c много больше m_c, и c кварк ведет себя как безмассовый. В этом параграфе мы будем пренебрегать массой c кварка, и рассматривать главный порядок по $1/m_b$.

В системе покоя B мезона b кварк распадается на c кварк с большой энергией $m_b - q_0 = O(m_b)$ и малой инвариантной массой $(m_b v - q)^2 \sim m_X^2$. Полный импульс конечного состояния $p_X = m_B v - q$ равен сумме импульса c кварка и легких компонент B мезона. Удобно ввести переменные светового конуса $p^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 \pm p^3)$ и $\vec{p}_t = (p^1, p^2)$ для произвольного импульса p Тогда скалярное произведение $p \cdot k = p^+k^- + p^-k^+ - \vec{p}_t \cdot \vec{k}_t$. В системе покоя B мезона мы имеем $p_B = \frac{m_B}{\sqrt{2}}(1^+, 1^-, \vec{0})$ и $q = (q^+, q^-, \vec{0})$. Адроны в конечном состоянии движутся вблизи направления на световом конусе, которое мы выберем в качестве "$-$" направления:

$$p_X^- = O(m_b)\,, \quad p_X^+ = O(\Lambda)$$

с $m_X^2 = 2p_X^+ p_X^- = O(m_b\Lambda)$. Конечный c кварк рождает струю энергичных коллинеарных частиц, движущихся в "$-$" направлении, сопровождаемых мягким излучением, включая легкие компоненты B мезона. Это делает анализ более сложным по сравнению со случаем тяжелого c кварка, когда его остаточная энергия слишком мала для создания струи.

Импульс p_X конечного состояния распределяется между коллинеарными и мягкими частицами, которые взаимодействуют друг с другом. Поскольку "$-$" компонента импульса коллинеарных частиц много больше, чем мягких, это взаимодействие зависит только от "$+$" компонент импульсов, которые одного порядка. Полный импульс конечного состояния p_X равен сумме импульса легких компонент B мезона $\varepsilon_0 v$, импульса k мягких глюонов, излученных b и c кварками, и импульса l коллинеарных частиц. Допустимая область k^+ есть

$$-\varepsilon_0 v^+ < k^+ < p_X^+\,,$$

где нижний предел следует из того, что полный импульс мягкого излучения $\varepsilon_0 v + k$ должен быть времениподобным, а верхний предел соответствует крайнему случаю, когда коллинеарные частицы имеют $l^+ = 0$.

Анализ диаграмм для дифференциальной ширины показывает, что вклады струйного и мягкого подпроцессов в $d\Gamma(B \to X_c + W)$ факторизуются в ведущем $1/m_b$ приближении [**183**]:

$$\frac{d^2\Gamma}{dq^2 dq_0} = \int\limits_{-\varepsilon_0}^{p_X^+/v^+} d\varepsilon\, f(\varepsilon)\, \sigma_0(p_X^+/v^+ - \varepsilon)\,, \tag{5.3.1}$$

где структурная функция $f(\varepsilon)$ учитывает взаимодействие b и c кварков с мягким излучением, а $\sigma_0(p_X^+/v^+ - \varepsilon)$ описывает взаимодействие c кварка с коллинеарными частицами в конечном состоянии с импульсом $l^+ = p_X^+ - \varepsilon v^+$.

Функция $f(\varepsilon)$ аналогична структурной функции в распаде на тяжелый кварк, но теперь скорость v' выходящего кварка заменяется на “$-$” направление на световом конусе. Заменяя v' на светоподобный вектор $y^\mu = (0^+, y^-, \vec{0})$ в определении (5.2.6), мы получаем

$$f(\varepsilon) = v^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy^-}{2\pi}\, e^{i\varepsilon v^+ y^-}\, W_C(v^+ y^-)\,, \tag{5.3.2}$$

где контур C идет из $-\infty$ в точку 0 вдоль скорости b кварка v, затем вдоль “$-$” направления на световом конусе в точку y, и наконец из точки y в $-\infty$ вдоль $-v$. Структурная функция определена в пределе $m_b \to \infty$, и ее свойства не зависят от m_b. Единственное место, где появляется зависимость от m_b — это формула факторизации (5.3.1).

Сравнивая определения структурных функций для переходов тяжелого кварка в тяжелый (5.2.6) и в легкий (5.3.2), мы видим, что в обоих случаях структурная функция дается Фурье–образом среднего от Вильсоновской линии. Ее средний сегмент идет вдоль направления движения c кварка: в первом случае v', а во втором — “$-$” направления на световом конусе. Аргумент преобразования Фурье в обоих случаях равен проекции полного импульса мягкого излучения на это направление: в первом случае это $v' \cdot (k' - k)$, где остаточные импульсы k и k' определены в (5.2.2) и (5.2.3), а во втором — $k^+ = \varepsilon v^+$.

Подобно функции F, структурная функция f зависит только от свойств B мезона, но не от конкретного партонного процесса. Эта функция описывает распределение импульса легких полей $k^+ - \varepsilon v^+$ в B мезоне, или, эквивалентно, вероятность найти b кварк с "+" проекцией остаточного импульса $-k^+$ в B мезоне. Формула факторизации (5.3.1) для дифференциальной ширины имеет простую партонную интерпретацию: $f(\varepsilon)$ — функция распределения b кварка в B мезоне, а σ_0 — партонный подпроцесс. В отличие от функции распределения, партонная функция σ_0 может быть вычислена в теории возмущений. В ней имеются большие поправки, которые могут быть просуммированы во всех порядках [**183**].

Структурная функция не может быть вычислена в теории возмущений. Она зависит от масштаба факторизации μ и удовлетворяет уравнению эволюции типа Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи, в отличие от случая перехода в тяжелый кварк, где структурная функция перенормировалась мультипликативно. Причина этого состоит в том, что Вильсоновская линия теперь содержит светоподобный сегмент вместо времениподобного. Поэтому угол $\vartheta = \infty$. Аномальная размерность $\Gamma(\alpha_s, \vartheta)$ имеет следующую асимптотику при больших ϑ [**69**]

$$\Gamma(\alpha_s, \vartheta) = \Gamma(\alpha_s)\vartheta + O(\vartheta^0)\,, \quad \Gamma(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 C_F \left(C_A \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} \right) - N_f \frac{5}{18} \right)\,, \tag{5.3.3}$$

и уравнение ренормгруппы (5.2.11) не имеет смысла в этом пределе. При $y^2 = 0$ Вильсоновская линия имеет дополнительные $1/\epsilon$ особенности, которые изменяют ее перенормировочные свойства [**184**].

Произведем однопетлевое вычисление W_C (5.2.12), заменив v' на y. При $y^2 = 0$ результат содержит двойной полюс ϵ^2, и после перенормировки в схеме $\overline{\mathrm{MS}}$ имеет вид

$$W_{\mathrm{pert}}(v^+ y^-) = 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left(-L^2 + L - \frac{5}{24}\pi^2 \right)\,, \quad L = \log[i(\mu v^+ y^- - i0)] + \gamma\,, \tag{5.3.4}$$

где "$-i0$" предписание следует из положения полюса свободного глюонного пропагатора в координатном пространстве [**70**], а γ — константа Эйлера. Удобно убрать константу Эйлера, переопределив параметр μ. Из–за дополнительной особенности на световом конусе, Вильсоновская линия имеет двойной логарифм μ в однопетлевом порядке. Перенормировочные свойства Вильсоновских линий, содержащих светоподобные сегменты, исследовались в [**70, 184**]. Было показано, что W_C удовлетворяет следующему уравнению ренормгруппы:

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\Gamma(\alpha_s)[\log(\mu v^+y^- - i0)+\log(-\mu v^+y^- + i0)]+\Gamma_0(\alpha_s)\right)W(v^+y^-)=0\,, \tag{5.3.5}$$

где $\Gamma(\alpha_s)$ определена в (5.3.3), а $\Gamma_0(\alpha_s)$ — некоторая аномальная размерность. Двухпетлевое выражение для нее имеет вид [**184**]

$$\Gamma_0(\alpha_s)=-\frac{\alpha_s}{\pi}C_F-\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2C_F\left[\left(\frac{7}{18}\pi^2+\frac{37}{108}-\frac{9}{4}\zeta(3)\right)C_A-\left(\frac{1}{54}-\frac{1}{18}\pi^2\right)n_f\right].$$

Легко проверить, что однопетлевое выражение (5.3.4) удовлетворяет уравнению ренормгруппы (5.3.5). Во всех порядках теории возмущений Вильсоновская линия со светоподобным сегментом является безразмерной функцией μv^+y^-. Решая (5.3.5), мы получаем пертурбативное выражение для W_C:

$$W_{\rm pert}(-i\tau)=\exp\left(-\int\limits_{1/\tau}^{\mu}\frac{dk_t}{k_t}\left(2\Gamma(\alpha_s(k_t))\log(k_t\tau)+\Gamma_0(\alpha_s(k_t))\right)+\gamma(\alpha_s(1/\tau))\right). \tag{5.3.6}$$

Однопетлевое выражение для константы интегрирования $\gamma(\alpha_s)$ может быть найдено из сравнения (5.3.6) с (5.3.4):

$$\gamma(\alpha_s)=-\frac{\alpha_s}{\pi}C_F\frac{5}{24}\pi^2+O(\alpha_s^2)\,.$$

Выражение (5.3.6) аналогично (5.2.14) для перехода в тяжелый кварк.

Чтобы найти зависимость структурной функции от точки нормировки, мы производим преобразование Фурье обоих сторон уравнения ренормгруппы (5.3.5) по y^-. Поскольку аномальная размерность в (5.3.5) зависит от y^-, получается уравнение эволюции, а не простое уравнение ренормгруппы:

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)f(\varepsilon)=\int\limits_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon}d\varepsilon'\,P(\varepsilon-\varepsilon')\,f(\varepsilon')\,. \tag{5.3.7}$$

Здесь ядро эволюции дается формулой

$$P(\varepsilon)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\,e^{i\varepsilon t}\,\left(2\Gamma(\alpha_s)\log(\mu t-i0)+\Gamma_0(\alpha_s)\right)\,, \tag{5.3.8}$$

а “$-i0$” предписание ведет к спектральному свойству

$$P(\varepsilon) = 0 \quad \text{для} \quad \varepsilon < 0\,.$$

По этой причине верхний предел интегрирования по ε' в (5.3.7) положен равным ε. Ядро $P(\varepsilon)$ имеет размерность 1/энергия, и зависит от размерного аргумента ε. Поэтому оно может содержать только члены $\theta(\varepsilon)/\varepsilon$ и $\delta(\varepsilon)$. После интегрирования (5.3.8) мы получаем

$$P(\varepsilon) = -2\Gamma(\alpha_s)\left(\frac{\theta(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)_+^{(m)} + \left(2\Gamma(\alpha_s)\log\frac{m}{\mu} + \gamma - \Gamma_0(\alpha_s)\right)\delta(\varepsilon)\,, \tag{5.3.9}$$

где обобщенная функция $(\theta(\varepsilon)/\varepsilon)_+^{(m)}$ определена, для произвольного массового масштаба m, формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left(\frac{\theta(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)_+^{(m)} \varphi(\varepsilon) = \int\limits_0^m d\varepsilon\,\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \int\limits_m^{\infty} d\varepsilon\,\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

для произвольной гладкой пробной функции $\varphi(\varepsilon)$, которая убывает достаточно быстро, чтобы последний интеграл сходился. Мы имеем $(\theta(\varepsilon)/\varepsilon)_+^{(m')} - (\theta(\varepsilon)/\varepsilon)_+^{(m)} = -\delta(\varepsilon)\log(m'/m)$, поэтому ядро (5.3.9) в действительности не зависит от m. Ядро эволюции содержит член, пропорциональный $\delta(\varepsilon)$, который зависит от точки нормировки μ. В решении уравнения эволюции (5.3.7) для функции распределения $f(\varepsilon)$ его вклад может быть изолирован в виде фактора, не зависящего от ε. В факторизованном выражении (5.3.1) для дифференциальной ширины μ–зависимость структурной функции компенсируется μ–зависимостью партонного подпроцесса σ_0. Заметим, что перенормировочные свойства Фурье–образа Вильсоновской линии зависят от того, что глюонный поля в ней упорядочены по контуру; для хронологического упорядочения, вместо уравнения типа ГЛАП получилось бы уравнение Бродского–Лепажа [**184**].

Функция распределения тяжелого кварка $f(\varepsilon)$ (5.3.2) совпадает с функцией распределения b кварка в B мезоне $f_{b/B}(x)$ при $x \to 1$, если $x = 1-\varepsilon/m_b$. Поэтому ядро эволюции $P(\varepsilon)$ совпадает со стандартной функцией расщепления $P_{qq}(z = 1-\varepsilon/m_b)$ при $z \to 1$ [**70**]. Однако имеется важное отличие между этими двумя функциями распределения из–за различия спектральных свойств. В отличие от обычного ядра ГЛАП, ядро (5.3.9) не позволяет получить аномальные размерности локальных HQET операторов $O_n = b_v^+(iD^+)^n b_v$. Моменты структурной функции $\int_{-\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^n f(\varepsilon)$, после перенормировки $f(\varepsilon)$, все еще содержат ультрафиолетовые расходимости, потому что ε имеет размерность энергии и меняется до бесконечности. То есть расходимости матричных элементов локальных операторов O_n не исчерпываются расходимостями интегрирования по $d\vec{k}_t$, которые определяют перенормировку структурной функции. Это резко отличается от обычного случая КХД, где интегралы по безразмерной переменной x, меняющейся от 0 до 1 (вследствие спектральных свойств $f_{b/B}(x)$), никогда не могут содержать ультрафиолетовых расходимостей. Ситуация здесь аналогична уравнениям эволюции для волновых функций в HQET (§4.3).

Общее решение уравнения ренормгруппы (5.3.5) имеет вид, подобный (5.2.21):

$$W(v^+y^-) = W_{\text{pert}}(v^+y^-)W_{\text{nonpert}}(v^+y^-)\,, \tag{5.3.10}$$

где $W_{\text{nonpert}}(v^+y^-)$ — непертурбативное начальное условие для Вильсоновской линии. Чтобы найти свойства $W_{\text{nonpert}}(v^+y^-)$, мы проанализируем инфракрасные ренормалоны в Вильсоновской линии со светоподобным сегментом. Мы будем использовать ту же модель, что и в §5.2. Используя (5.2.16) и заменяя v' на светоподобный вектор y, мы получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{pert}}(v^+y^-) = \exp\Bigg(&2C_F\mu^{4-D}\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^{D-2}}\,\alpha_s\delta(k^2)\theta(k_0)\left(\frac{y}{(yk)}-\frac{v}{(vk)}\right)^2\left(1-e^{-i(yk)}\right) \\ &+O(\alpha_s^2)\Bigg)\exp\left(-i\Delta m v\cdot y\right)\,, \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

где Δm происходит от собственно–энергетических поправок к v–линиям (5.2.17), (5.2.19), тогда как светоподобная y–линия не содержит таких поправок. Интегрирование по импульсу глюона дает выражение для светоподобной Вильсоновской линии

$$W_{\text{pert}}(-i\tau) = \exp\left(\frac{C_F}{\beta_0}\frac{(4\pi\mu^2/\Lambda^2)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)}\int_\epsilon^\infty du\ (\Lambda\tau)^{2u}\,\frac{\Gamma(-2u)(1-u)}{\sin(\pi u)}\right)\exp\left(-\Delta m\tau\right)\,, \tag{5.3.12}$$

которое содержит инфракрасные ренормалоны в точках $u = n/2$. Различные выборы предписаний в (5.3.12) ведут к результатам, отличающимся степенными поправками $(\Lambda\tau)^n$. Ведущая степенная поправка соответствует самой левой особенности в точке $u = \frac{1}{2}$. Подобно случаю перехода в тяжелый кварк, мы обнаруживаем, что вычет первой экспоненты в (5.3.12) в точке $u = \frac{1}{2}$ компенсируется вычетом Δm (5.2.19) в той же точке:

$$\log W_{\mathrm{pert}}(-i\tau) = -\left(\frac{\Lambda C_F}{2\beta_0}\int\frac{du}{1-2u} + \Delta m\right)\tau + O(\tau^2) = 0\cdot\tau + O(\tau^2)\,.$$

Таким образом, в точке $u = \frac{1}{2}$ вклады инфракрасного и ультрафиолетового ренормалонов в светоподобную Вильсоновскую линию сокращают друг друга, и ведущий инфракрасный ренормалон появляется в (5.3.12) в точке $u = 1$:

$$\log W_{\mathrm{pert}}(-i\tau) = 0\cdot\tau + \tau^2\Lambda^2\frac{C_F}{4\pi\beta_0}\int\frac{du}{1-u} + O(\tau^3)\,.$$

Теория возмущений генерирует (но не может однозначно описать) $O(\Lambda^2\tau^2)$ степенную поправку к Вильсоновской линии W_C. Это значит, что непертурбативные эффекты также должны давать вклад в $O(\Lambda^2\tau^2)$ степенную поправку, чтобы сделать Вильсоновскую линию (5.3.10) однозначно определенной. Действительно, разлагая Вильсоновскую линию при малых τ, подобно (5.2.23), мы получаем

$$W_{\mathrm{nonpert}}(-i\tau) = 1 + 0\cdot\tau + \frac{\mu_{0,\pi}^2}{6}\tau^2 + O(\tau^3)\,, \tag{5.3.13}$$

где коэффициент при τ обращается в нуль в силу уравнений движения. Требование однозначности полной Вильсоновской линии (5.3.10) дает то же значение для вычета ультрафиолетового ренормалона в $\mu_{0,\pi}^2$ в точке $u = 1$ в рамках нашей модели, которое следует из (5.2.23). Можно сказать, что это значение получается из $\infty + 1$ уравнений, согласованных друг с другом: по одному уравнению для каждого ϑ и еще одно уравнение для перехода в легкий кварк.

Повторяя аргументы, ведущие к (5.2.24), мы можем выбрать непертурбативный анзац для светоподобной Вильсоновской линии в виде

$$W_{\mathrm{nonpert}}(-i\tau) = \exp\left(\frac{\mu_\pi^2}{6}\tau^2 + O(\tau^3)\right)\,. \tag{5.3.14}$$

После преобразования Фурье мы получаем простейший непертурбативный анзац для функции распределения тяжелого кварка

$$f_{\mathrm{nonpert}}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)\,,\quad \sigma^2 = \frac{1}{3}\mu_\pi^2\,, \tag{5.3.15}$$

который описывает гауссово распределение вокруг $\varepsilon = 0$ с шириной σ. Поскольку мы пренебрегли $O(\tau^3)$ и более высокими поправками в экспоненте (5.3.14), эта функция не обращается точно в ноль вне физической области $\varepsilon > -\varepsilon_0$ и может применяться только в окрестности $\varepsilon = 0$.

Чтобы получить правила сумм для структурной функции перехода тяжелого кварка в легкий, мы обращаем преобразование Фурье (5.3.2) и делаем Виковский поворот:

$$W_C(-i\tau) = \int\limits_{-\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-\varepsilon\tau}\, f(\varepsilon)\,.$$

Теперь мы подставляем выражения (5.3.10), (5.3.6) и (5.3.13) для Вильсоновской линии и получаем

$$\int\limits_{-\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-\varepsilon\tau}\, f(\varepsilon) = \exp\left(-\int\limits_{1/\tau}^{\mu} \frac{dk_t}{k_t}\left(2\Gamma(\alpha_s(k_t))\log(k_t\tau) + \Gamma_0(\alpha_s(k_t))\right) + \gamma(\alpha_s(1/\tau))\right)$$
$$\times\left(1 + \frac{\mu_\pi^2}{6}\tau^2 + O(\tau^3)\right)\,.$$

Используя уравнение эволюции (5.3.5), мы убеждаемся, что обе стороны правила сумм одинаково зависят от точки нормировки μ. Полагая $\mu = 1/\tau$, мы получаем перенормированное правило сумм Бьеркена:

$$\int\limits_{-\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-\varepsilon\tau}\, f(\varepsilon)\Big|_{\mu=1/\tau} = e^{\gamma(\alpha_s(1/\tau))}\left(1 + \frac{\mu_\pi^2}{6}\tau^2 + O(\tau^3)\right)\,. \qquad (5.3.16)$$

Здесь τ — свободный параметр, реализующий мягкое экспоненциальное обрезание по светоподобной компоненте импульса $k^+ = \varepsilon v^+$. Дифференцируя (5.3.16) по τ, мы получаем правила сумм Волошина и BGSUV.

Заключение

Основные результаты работы, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Разработан систематический метод классификации глюонных и кварковых конденсатов высших размерностей. Так, кварковые конденсаты размерности 8 сводятся к "аномальному конденсату", который выражается через глюонные, и 6 независимым собственно кварковым конденсатам. Изучены разложения нелокальных конденсатов, которые естественным образом возникают при вычислении корреляторов, по локальным. Получены разложения кварковых конденсатов тяжелого кварка по глюонным вплоть до размерности 8. Вычислены вклады конденсатов размерностей 7 и 8 в правила сумм для ρ мезонного канала. Получены ограничения на глюонный и кварковый конденсат, следующий из экспериментальных данных по e^+e^- аннигиляции в адроны с $I = 1$. Ошибки в конденсатах порядка 100%, но они сильно скоррелированы, так что допустимая область узка.
2. Разработан метод вычисления двухпетлевых пропагаторных диаграмм в эффективной теории тяжелого кварка, а также метод вычисления двухпетлевых диаграмм на массовой поверхности с двумя массами, основанные на рекуррентных соотношениях интегрирования по частям. Методы реализованы в виде пакетов на языке компьютерной алгебры REDUCE.
3. Вычислена аномальная размерность оператора хромомагнитного взаимодействия в HQET в двухпетлевом приближении

$$\tilde{\gamma}_m = \frac{3}{2}\frac{\alpha_s}{\pi} + \frac{102 - 13n_f}{24}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 .$$

Из нее получается, в частности, α_s поправка к отношению

$$\frac{m_{B^*}^2 - m_B^2}{m_{D^*}^2 - m_D^2} = \left(\frac{\alpha_s(m_b)}{\alpha_s(m_c)}\right)^{9/25} \left[1 - \frac{7921}{3750}\frac{\alpha_s(m_c) - \alpha_s(m_b)}{\pi}\right] + O\left(\frac{\Lambda}{m_{c,b}}\right) .$$

Главный логарифмический член дает 0.84; α_s поправка уменьшает этот результат на 9%, давая 0.76; экспериментальное значение 0.89. Отличие должно объясняться $1/m_c$ поправкой, которую трудно оценить теоретически. В том же приближении получен коэффициент при этом операторе в лагранжиане HQET в точке нормировки $\mu = m$:

$$C_m(m) = 1 + \frac{13}{6}\frac{\alpha_s(m)}{\pi} + (21.79 - 1.91 n_l)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 .$$

Изучено влияние ненулевой массы c кварка на хромомагнитное взаимодействие b кварка. Исследована структура ведущей инфракрасной ренормалонной особенности в этом коэффициенте.

4. Вычислена аномальная размерность билинейного тяжело–легкого тока в HQET в двухпетлевом приближении

$$\tilde{\gamma}_j = -\frac{\alpha_s}{\pi} - \frac{28\pi^2 + 381 - 30 n_f}{216}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 .$$

Из нее получается, в частности, α_s поправка к отношению

$$\frac{f_B}{f_D} = \sqrt{\frac{m_c}{m_b}}\left[\left(\frac{\alpha_s(m_c)}{\alpha_s(m_b)}\right)^{6/25}\left(1 + 0.894\frac{\alpha_s(m_c) - \alpha_s(m_b)}{\pi}\right) + O\left(\frac{\Lambda}{m_{c,b}}\right)\right] .$$

Разложение билинейных тяжело–легких токов в КХД по операторам HQET получено в ведущем порядке по $1/m$ в двухпетлевом приближении. Как побочный продукт, выведено общее выражение для двухпетлевой аномальной размерности билинейного КХД тока с n антисимметризованными γ–матрицами; результат для $n = 2$ ранее не был известен. Получены выражения для легких и тяжело–легких кварковых токов в теории с петлями тяжелого флейвора через операторы в низкоэнергетической эффективной теории с двухпетлевой точностью. Выяснена зависимость коэффициента сшивки от предписания для γ_5. Найдены отношения мезонных матричных элементов, такие, как

$$\frac{f_{B^*}}{f_B} = 1 - \frac{2}{3}\frac{\alpha_s(m_b)}{\pi} - (6.37 + \Delta_c)\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + O\left(\frac{\Lambda}{m_b}\right) ,$$

где $\Delta_c \approx 0.18$ — поправка на ненулевую массу c кварка. Исследованы ведущие инфракрасные ренормалонные особенности в коэффициентах сшивки.

5. Изучена перенормировка тяжело–легких операторов размерности 5 в HQET (например, пингвинных операторов) в однопетлевом приближении. Найдены однопетлевые коэффициенты сшивки для этих этих операторов. Эти результаты могут применяться к распаду $B \to X_s \ell^+ \ell^-$ в области малых энергий адронной системы X_s.
6. Вычислена двухпетлевая поправка к пертурбативной спектральной плотности коррелятора тяжело–легких токов в HQET:

$$\rho(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \left(-2 \log \frac{2\omega}{\mu} + \frac{4\pi^2}{9} + \frac{17}{3} \right) \right] .$$

   Двухпетлевая поправка в правилах сумм для f_B^2 сравнима с ведущим членом, так что эти правила сумм ненадежны.
7. Получены и исследованы трехточечные КХД правила сумм для формфактора $B \to D$ при конечных массах кварков. Прослежено, как в пределе больших масс воспроизводится структура $1/m$ поправок к формфакторам, следующая из HQET, включая теорему Люка, и получены правила сумм для поправочных формфакторов.
8. Получены и исследованы HQET правила сумм для барионов с тяжелым кварком и их формфакторов. Получены и исследованы HQET правила сумм во внешнем аксиальном поле для констант связи тяжелых мезонов и барионов с мягкими пионами, включая пертурбативную поправку в случае мезонов.
9. Асимптотическое поведение формфакторов тяжелых мезонов исследовано при помощи методов, разработанных для жестких эксклюзивных процессов в КХД. При $1 \ll |v{\cdot}v'| \ll m/\Lambda$ в формфакторах доминирует функция Исгура–Вайса, которая определяется интерференцией волновых функций ведущего и следующего твиста. При $|v \cdot v'| \gg m/\Lambda$ в них доминируют две функции, возникающие в порядке $1/m$, которые определяются волновой функцией ведущего твиста. Сумма этих вкладов описывает формфакторы во всей области $|v \cdot v'| \gg 1$. Имеется точный ноль формфактора рассеяния продольно поляризованного B^* мезона при некотором $v \cdot v' \sim m_b/\Lambda$ и приближенный ноль формфактора B мезона во времениподобной области ($v \cdot v' \sim -m_b/\Lambda$). Сечение $e^+e^- \to B\overline{B}$ обращается в нуль по параболе при $2E \sim 130\text{GeV}$, а $e^+e^- \to D\overline{D}$

— при $2E \sim 15\mathrm{GeV}$ (оценки положения нулей довольно грубы, но факт их существования несомненен). Получены уравнения эволюции и правила сумм для волновых функций ведущего и следующего твиста в HQET.

10. Выведено правило сумм для инклюзивных распадов тяжелых мезонов, связывающее второй момент структурной функции со средним квадратом импульса тяжелого кварка в мезоне. Получено ограничение снизу для этого квадрата импульса:

$$\mu_\pi^2 > \frac{3}{2}\Delta\varepsilon_0 > 3\Delta^2\left(-\xi'(1) - \frac{1}{4}\right),$$

где $\Delta \sim 500\mathrm{MeV}$ — минимальная энергия возбуждения P–волнового резонанса D^{**}, $\varepsilon_0 \approx m_B - m_b \approx m_D - m_c \sim 450\mathrm{MeV}$ — остаточная энергия мезона в основном состоянии (ее часто обозначают $\overline{\Lambda}$), а $\xi'(1) \sim -0.8$ — наклон формфактора $B \to D^*$ в точке нулевой отдачи. Исследована эволюция структурных функций инклюзивных распадов тяжелого мезона с рождением тяжелого и легкого кварка. В первом случае она перенормируется мультипликативно; во втором — удовлетворяет уравнению типа Грибова–Липатова, ядро которого найдено в двухпетлевом приближении. Получены обобщения правил сумм для структурных функций с мягким экспоненциальным обрезанием. Исследованы ренормалонные особенности структурных функций в модели, в которой α_s в однопетлевой поправке заменяется на бегущую константу связи от квадрата поперечного импульса.

Библиография

[1] *Grozin A. G., Pinelis Yu. F.* Contribution of higher quark condensates to the light quark vacuum polarization. // Phys. Lett. — 1986. — Vol. 166B. — P. 429–435.

[2] *Grozin A. G., Pinelis Yu. F.* Contribution of higher gluon condensates to light–quark vacuum polarization. // Zeit. für Phys. — 1987. — Vol. C33. — P. 419–425.

[3] *Grozin A. G., Pinelis Yu. F.* Bounds on the QCD parameters from $e^+e^- \to \text{hadrons}_{I=1}$. // Mod. Phys. Lett. — 1988. — Vol. A3. — P. 725–735.

[4] *Грозин А. Г., Пинелис Ю. Ф.* Поляризация вакуума и высшие конденсаты. // Труды X международного семинара: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, Протвино, 1987. — М., 1988. — С. 335–343.

[5] *Grozin A. G.* Methods of calculation of higher power corrections in QCD. // New computing techniques in physics research II, La Londe–les–Maures, 1992. — World Scientific, 1992. — P. 609–615.

[6] *Grozin A. G.* Methods of calculation of higher power corrections in QCD. Int. J. Mod. Phys. — 1995. — Vol. A10. — P. 3497–3529.

[7] *Broadhurst D. J., Grozin A. G.* Two–loop renormalization of the effective field theory of a static quark. // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 267B. — P. 105–110.

[8] *Grozin A. G.* Introduction to the heavy quark effective theory. Part 1. — Novosibirsk, 1992. — 42 p. — (Preprint/Institute of Nuclear Physics 92–97).

[9] *Broadhurst D. J., Grozin A. G.* Matching QCD and HQET heavy–light currents at two loops and beyond. // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D52. — P. 4082–4098.

[10] *Broadhurst D. J., Grozin A. G.* Two–loop matching for HQET heavy–light currents. // Proc. 138 WE–Heraeus Seminar: Heavy Quark Physics, Bad Honnef, 1994. — World Scientific, 1995. — P. 87–98.

[11] *Broadhurst D. J., Grozin A. G.* Multiloop calculations in heavy quark effective theory. // New computing techniques in physics research IV, Pisa, 1995. — World Scientific, 1995. — P. 217–222.

[12] *Grozin A. G., Neubert M.* Hybrid renormalization of penguins and dimension–5 heavy–light operators. // Nucl. Phys. — 1997. — Vol. B495. — P. 81–98.

[13] *Czarnecki A., Grozin A. G.* HQET chromomagnetic interaction at two loops. // Phys. Lett. — 1997. — Vol. 405B. — P. 142–149.

[14] *Grozin A. G., Neubert M.* Higher–order estimates of the chromomagnetic moment of a heavy quark. // Nucl. Phys. — 1997. — Vol. B508. — P. 311–326.

[15] *Grozin A. G.* Recent progress on HQET lagrangian. // Proc. 4 Int. Seminar: Progress in Heavy Quark Physics, Rostock, 1997. — University of Rostock, 1998. — P. 93–104.

[16] *Davydychev A. I., Grozin A. G.* Effect of m_c on b quark chromomagnetic interaction and on-shell two-loop integrals with two masses. — Mainz, 1998. — 17 p. — (Preprint/University of Mainz MZ–TH/98–38).

[17] *Grozin A. G.* Decoupling of heavy–quark loops in light–light and heavy–light quark currents. — Karlsruhe, 1998. — 4 p. — (Preprint/University of Karlsruhe TTP98–36).

[18] *Байер В. Н., Грозин А. Г.* Жесткие адронные процессы с участием барионов и тяжелых мезонов. // Труды IX международной конференции: Проблемы физики высоких энергий, Дубна, 1988. — Дубна, 1988. — (ОИЯИ Д1б2–88–652). — Т. 1. — С. 78–86.

[19] *Baier V. N., Grozin A. G.* Decay $B \to Dl\bar{\nu}$ from QCD sum rules. // Zeit. für Phys. — 1990. — Vol. C47. — P. 669–675.

[20] *Baier V. N., Grozin A. G.* Sum rules for $1/m$ corrections to the form factors of semileptonic B decays. — Novosibirsk, 1992. — 16 p. — (Preprint/Institute of Nuclear Physics 92–80); // Proc. VII Int. Workshop: High Energy Physics and Quantum Field Theory, Zvenigorod, 1993. — Moscow, 1994. — P. 35–41.

[21] *Broadhurst D. J., Grozin A. G.* Operator product expansion in static–quark effective field theory. Large perturbative correction. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 274B. — P. 421–427.

[22] *Grozin A. G., Yakovlev O. I.* Baryonic currents and their correlators in the heavy quark effective theory. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 285B. — P. 254–262.

[23] *Grozin A. G., Yakovlev O. I.* Sum rules for baryonic Isgur–Wise form factors. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 291B. — P. 441–447.

[24] *Grozin A. G., Yakovlev O. I.* Heavy baryons in QCD. // Proc. VII Int. Seminar: Quarks'92, Zvenigorod, 1992. — World Scientific, 1993. — P. 271–289.

[25] *Grozin A. G., Yakovlev O. I.* Couplings of heavy hadrons with soft pions from QCD sum rules. // European Phys. J. — 1998. — Vol. C2. — P. 721–727.

[26] *Grozin A. G., Neubert M.* Asymptotics of heavy–meson form factors. // Phys. Rev. — 1997. — Vol. D55. — P. 272–290.

[27] *Bigi I., Grozin A. G., Shifman M. A., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* On measuring the kinetic energy of the heavy quark inside B mesons. // Phys. Lett. — 1994. — Vol. 339B. — P. 160–166.

[28] *Grozin A. G., Korchemsky G. P.* Renormalized sum rules for structure functions of heavy meson decays. // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 1378–1390.

[29] *Grozin A. G., Korchemsky G. P.* Renormalized sum rules for heavy meson decays. // Proc. 138 WE–Heraeus Seminar: Heavy Quark Physics, Bad Honnef, 1994. — World Scientific, 1995. — P. 117–122.

[30] *Grozin A. G.* Using REDUCE in high energy physics. — Cambridge University Press, 1996. — 384 p.

[31] *Грозин А. Г.* DIRAC — машинно–независимая программа для алгебраических вычислений с полиномами и тензорами. — Новосибирск, 1983. — 46 с. — (Препринт/Институт ядерной физики 83–117); DIRAC — машинно–независимая программа для алгебраических вычислений с полиномами, тензорами и γ–матрицами. // Труды III Международного совещания: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике, Дубна, 1985. — Дубна, 1985 (ОИЯИ Д11–85–791). — С. 76–81;

Grozin A. G., Perlt H. The algebraic manipulation program DIRAC on IBM personal computers. — Dubna, 1989. — 24 p. — (Preprint/JINR E11–89–573);

// Proc. IV Int. Conf.: Computer Algebra in Physical Research, Dubna, 1990. — World Scientific, 1991. — P. 43–47.

[32] *Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.* // Nucl. Phys. — 1979. — Vol. B147. — P. 395, 448.

[33] *Nikolaev S. N., Radyushkin A. V.* // Phys. Lett. — 1982. — Vol. 110B. — P. 476; Erratum: Vol. 116B. — P. 469; Nucl. Phys. — 1983. — Vol. B213. — P. 285; Phys. Lett. — 1983. — Vol. 124B. — P. 243; ЯФ — 1984. — Т. 39. — С. 147.

[34] *Broadhurst D. J., Generalis S. C.* // Phys. Lett. — 1984. — Vol. 139B. — P. 85; Vol. 142B. — P. 75; 1985. — Vol. 165B. — P. 175.

[35] *Generalis S. C.* — Milton Keynes, 1984. — (Preprint/The Open University OUT–4102–13); // J. Phys. — 1990. — Vol. G15. — P. L225; Vol. G16. — P. 367, 785, L117.

[36] *Eidelman S. I., Kurdadze L. M., Vainshtein A. I.* // Phys. Lett. — 1979. — Vol. 82B. — P. 278.

[37] *Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.* // Fortschr. für Phys. — 1984. — Vol. 32. — P. 585.

[38] *Baier V. N., Pinelis Yu. F.* — Novosibirsk, 1981. — (Preprint/Institute of Nuclear Physics 81–141);

Gromes D. Phys. Lett. — 1982. — Vol. 115B. — P. 482;

Shuryak E. V. Nucl. Phys. — 1982. — Vol. B203. — P. 116.

[39] *Михайлов С. В., Радюшкин А. В.* // ЖЭТФ. Письма. — 1986. — Т. 43. — С. 551; ЯФ — 1989. — Т. 49. — С. 794; Phys. Rev. — 1992. — Vol. D45. — P. 1754.

[40] *Dosh H. G., Simonov Yu. A.* // Phys. Lett. — 1988. — Vol. 205B. — P. 338;

Simonov Yu. A. // Nucl. Phys. — 1988. — Vol. B307. — P. 512; 1989. — Vol. B324. — P. 67; ЯФ — 1989. — Т. 50. — С. 213; 1991. — Т. 54. — С. 192.

[41] *Михайлов С. В.* // ЯФ — 1993. — Т. 56. — С. 143.

[42] *Bakulev A. P., Mikhailov S. V.* // Zeit. für Phys. — 1995. — Vol. C68. — P. 451; Mod. Phys. Lett. — 1996. — Vol. A11. — P. 1611.

[43] *Dubovikov M. S., Smilga A. V.* // Nucl. Phys. — 1981. — Vol. B185. — P. 109.

[44] *Brown L. S. et al.* // Phys. Rev. — 1978. — Vol. D17. — P. 1583.

[45] *Milshtein A. I., Pinelis Yu. F.* // Phys. Lett. — 1984. — Vol. 137B. — P. 235; Доклад на конференции: Вакуум КХД и структура адронов, Ташкент, 1985.

[46] *Launer G., Narison S., Tarrach R. Z.* // Zeit. für Phys. — 1984. — Vol. C26. — P. 433.

[47] *Лоладзе Г. Т., Сургуладзе Л. Р., Ткачев Ф. В.* // Сообщения АН Грузинской ССР. — 1984. — Т. 116. — С. 509; Phys. Lett. — 1985. — Vol. 162B. — P. 363;
Сургуладзе Л. Р., Ткачев Ф. В. // М., 1986 — (Препринт/Институт ядерных исследований П-0501);
Ланин Л. В., Спиридонов В. П., Четыркин К. Г. // ЯФ — 1986. — Т. 44. — С. 1372.

[48] *Barkov L. M. et al.* // Nucl. Phys. — 1985. — Vol. B256. — P. 365;
Aulchenko V. M. et al. — Novosibirsk, 1986 — (Preprint/Institute of Nuclear Physics 86–106);
Cosme G. et al. // Nucl. Phys. — 1979. — Vol. B152. — P. 215;
Bacci C. et al. // Nucl. Phys. — 1981. — Vol. B184. — P. 31;
Bisello D. et al. // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 107B. — P. 145;
Augustin J. E. et al. — Orsay, 1983. — (Preprint/LAL 83/21);
Bizello D. et al. — Orsay, 1985. — (Preprint/LAL 85/15);
Курдадзе Л. М. Дисс ... д.ф.–м.н. — Новосибирск, 1984.

[49] *Amorós G,, Beneke M., Neubert M.* // Phys. Lett. — 1997. — Vol. 401B. — P. 81.

[50] *Ji X., Musolf M. J.* // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 257B. — P. 409.

[51] *Giménez V.* // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. B375. — P. 582.

[52] *Misiak M., Münz M.* // Phys. Lett. — 1994. — Vol. 344B. — P. 308.

[53] *Eichten E., Hill B.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 234B. — P. 511.

[54] *Grinstein B.* // Nucl. Phys. — 1990. — Vol. B339. — P. 253.

[55] *Georgi H.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 240B. — P. 447.

[56] *Isgur N., Wise M. B.* // Phys. Lett. — 1989. — Vol. 232B. — P. 113; 1990. — Vol. B237. — P. 527.

[57] *Falk A. F., Georgi H., Grinstein B., Wise M. B.* // Nucl. Phys. — 1990. — Vol. B343. — P. 1.

[58] *Politzer H. D.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 250B. — P. 128.

[59] *Falk A. F.* // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. B378. — P. 79.

[60] *Georgi H., Wise M. B.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 243B. — P. 279;
Carone C. D. // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 253B. — P. 408.

[61] *Neubert M.* // Phys. Reports, 1994. — Vol. 245. — P. 259; Int. J. Mod. Phys. — 1996. — Vol. A11. — P. 4173.

[62] *Georgi H.* // Perspectives in the Standard Model, Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI–91), Boulder, Colorado, 1991, edited by R.K. Ellis, C.T. Hill and J.D. Lykken (World Scientific, Singapore, 1992), p. 589;
Isgur N., Wise M. B. // Heavy Flavours, edited by A.J. Buras and M. Lindner (World Scientific, Singapore, 1992), p. 234;

Grinstein B. // Ann. Rev. Nucl. Part. Sc., 1992. — Vol. 42. — P. 101;

Mannel T. // Chinese J. Phys., 1993. — Vol. 31. — P. 1.

[63] *Eichten E.* // Nucl. Phys. B (Proc. Supplement) — 1988. — Vol. 4. — P. 170; 1991. — Vol. 20. — P. 475.

[64] *Polyakov A. M.* // Nucl. Phys. — 1980. — Vol. B164. — P. 171.

[65] *Gervais J. L., Neveu A.* // Nucl. Phys. — 1980. — Vol. B163. — P. 189;

Aref'eva I. Ya. // Phys. Lett. — 1980. — Vol. 93B. — P. 347.

[66] *Dotsenko V. S., Vergeles S. N.* // Nucl. Phys. — 1980. — Vol. B169. — P. 527;

Brandt R. A., Neri F., Sato M. // Phys. Rev. — 1981. — Vol. D24. — P. 879;

Dorn H. // Fortschr. für Phys. — 1986. — Vol. 34. — P. 11.

[67] *Aoyama S.* // Nucl. Phys. — 1982. — Vol. B194. — P. 513.

[68] *Knauss D., Scharnhorst K.* // Annalen der Physik — 1984. — Vol. 41. — P. 331.

[69] *Korchemsky G. P., Radyushkin A. V.* // Nucl. Phys. — 1987. — Vol. B283. — P. 342; Phys. Lett. — 1992. — Vol. 279B. — P. 359.

[70] *Korchemsky G. P.* // Mod. Phys. Lett. — 1989. — Vol. A4. — P. 1257.

[71] *Chetyrkin K. G., Tkachov F. V.* // Nucl. Phys. — 1981. — Vol. B192. — P. 159.

[72] *Егорян Е. С., Тарасов О. В.* // Theor. Math. Phys. — 1979. — Vol. 41. — P. 26.

[73] *Broadhurst D. J., Gray N., Schilcher K.* // Zeit. für Phys. — 1991. — Vol. C52. — P. 111.

[74] *Gray N., Broadhurst D. J., Grafe W., Schilcher K.* // Zeit. für Phys. — 1990. — Vol. C48. — P. 673.

[75] *Eichten E., Hill B.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 243B. — P. 427.

[76] *Falk A. F.,, Grinstein B.,, Luke M. E.* // Nucl. Phys. — 1991. — Vol. B357. — P. 185.

[77] *Manohar A. V.* // Phys. Rev. — 1997. — Vol. D56. — P. 230.

[78] *Luke M. E., Manohar A. V.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 286B. — P. 348;

Chen Y.-Q. // Phys. Lett. — 1993. — Vol. 317B. — P. 421.

[79] *Körner J. G., Thompson G.* // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 264B. — P. 185;

Balk S., Körner J. G., Pirjol D. // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B428. — P. 499.

[80] *Lee C. L. Y.* — Pasadena, 1991. — (Preprint/CALT–68–1663); revised (1997).

[81] *Mannel T., Roberts W., Ryzak Z.* // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. B368. — P. 204.

[82] *Balzereit C.* // Дипломная работа, Дармштадт (1994).

[83] *Finkemeier M., McIrvin M.* // Phys. Rev. — 1997. — Vol. D55. — P. 377.

[84] *Abbott L. F.* // Acta Phys. Polonica — 1982. — Vol. 13B. — P. 33.

[85] *Mannel T.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D50. — P. 428.

[86] *Bigi I. I., Shifman M. A., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D52. — P. 196.

[87] *Broadhurst D. J.* // Zeit. für Phys. — 1992. — Vol. C54. — P. 599.

[88] *Broadhurst D. J.* // Zeit. für Phys. — 1990. — Vol. C47. — P. 115.

[89] *Czarnecki A.* // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76. — P. 4124.

[90] *Elend H. H.* // Phys. Lett. — 1966. — Vol. 20. — P. 682; Erratum: Vol. 21. — P. 720.

[91] *Czarnecki A., Melnikov K.* // Nucl. Phys. — 1997. — Vol. B505. — P. 65.

[92] *Franzkowski J., Tausk J. B.* // European Phys. J. — 1998. — Vol. C5. — P. 517.

[93] *Berends F. A., Davydychev A. I., Ussyukina N. I.* // Phys. Lett. — 1998. — Vol. 426B. — P. 95.

[94] *Tarasov O. V.* // Nucl. Phys. — 1997. — Vol. B502. — P. 455.

[95] *Boos E. E., Davydychev A. I.* // Theor. Math. Phys. — 1991. — Vol. 89. — P. 1052;
Davydychev A. I. J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32. — P. 1052; 1992. — Vol. 33. — P. 358.

[96] *Samuel M. A., Li G.* // Phys. Rev. — 1991. — Vol. D44. — P. 3935.

[97] *Palanques–Mestre A., Pascual P.* // Comm. Math. Phys. — 1984. — Vol. 95. — P. 277.

[98] *Broadhurst D. J.* // Zeit. für Phys. — 1993. — Vol. C58. — P. 339.

[99] *Mueller A. H.* // QCD 20 years later, ed. Zerwas P.M., Kastrup H.A. — World Scientific, 1993. — P. 162.

[100] *Beneke M., Braun V. M.* // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B426. — P. 301.

[101] *Bigi I. I., Shifman M. A., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D50. — P. 2234.

[102] *Neubert M., Sachrajda C. T.* // Nucl. Phys. — 1995. — Vol. B438. — P. 235.

[103] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D51. — P. 5924.

[104] *Корчемский Г. П., Радюшкин А. В.* // ЯФ — 1987. — Т. 45. — С. 198;
Волошин М. Б., Шифман М. А. // ЯФ — 1987. — Т. 45. — С. 463;
Politzer H. D., Wise M. B. // Phys. Lett. — 1988. — Vol. 206B. — P. 681; Vol. 208B. — P. 504.

[105] *Tarrach R.* // Nucl. Phys. — 1981. — Vol. B183. — P. 384.

[106] *Golden M., Hill B.* // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 254B. — P. 225.

[107] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 1542.

[108] *Trueman T. L.* // Phys. Lett. — 1979. — Vol. 88B. — P. 331.

[109] *Larin S. A.* // Quarks–92. — World Scientific, 1993. — P. 201; Phys. Lett. — 1993. — Vol. 303B. — P. 113;
Larin S. A., Vermaseren J. A. M. // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 259B. — P. 345.

[110] *Chetyrkin K. G., Kniehl B. A., Steinhauser M.* Nucl. Phys. — 1998. — Vol. B510. — P. 61.

[111] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 1076.

[112] *Ball P.* // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B421. — P. 593.

[113] *Bagan E., Ball P., Braun V. M., Dosh H. G.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 278B. — P. 457.

[114] *Ovchinnikov A. A., Slobodenyuk V. A.* // Zeit. für Phys. — 1989. — Vol. C44. — P. 433.

[115] *Bagan E., Chabab M., Dosh H. G., Narison S.* // Phys. Lett. — 1993. — Vol. 301B. — P. 243.

[116] *Groote S., Körner J. G., Yakovlev O. I.* // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D54. — P. 3447.

[117] *Groote S., Körner J. G., Yakovlev O. I.* // Phys. Rev. — 1997. — Vol. D55. — P. 3016; Vol. D56. — P. 3943.

[118] *Dai Y.–B., Huang C.–S., Liu C., Lu C.–D.* // Phys. Lett. — 1996. — Vol. 371B. — P. 99;

Dai Y.–B., Huang C.–S., Liu C. // Phys. Lett. — 1996. — Vol. 387B. — P. 379.

[119] *Shuryak E. V.* // Nucl. Phys. — 1982. — Vol. B198. — P. 83.

[120] *Житницкий А. Р., Житницкий И. Р., Черняк В. Л.* // ЯФ — 1983. — Т. 38. — С. 1277.

[121] *Chernyak V. L., Zhitnitsky I. R.* // Nucl. Phys. — 1990. — Vol. B345. — P. 137.

[122] *Алиев Т. М., Елецкий В. Л.* // ЯФ — 1983. — Т. 38. — С. 1537.

[123] *Broadhurst D. J.* // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 101B. — P. 423.

[124] *Dominguez C. A., Paver N.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 276B. — P. 179;

Eletsky V. L., Shuryak E. V. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 276B. — P. 191.

[125] *Isgur N., Wise M. B.* // Phys. Rev. — 1991. — Vol. D43. — P. 819.

[126] *Bjorken J. D.* // Proc. 4 Rencontres de Physique de la Vallèe d'Aoste, La Thuille, 1990. — Editions Frontières, Gif-Sur-Yvette, France. — 1990. — P. 583;

// Proc. 18 SLAC Summer Institute, Stanford, 1991. — SLAC-REPORT-378, Stanford, 1991. — P. 167;

Bjorken J. D., Dunietz I., Taron J. // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. B371. — P. 111.

[127] *Voloshin M. B.* // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 3062.

[128] *de Rafael E., Taron J.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 282B. — P. 215.

[129] *Ioffe B. L., Smilga A. V.* // Phys. Lett. — 1982. — Vol. 114B. — P. 353; Nucl. Phys. — 1983. — Vol. B216. — P. 373;

Nesterenko V. A., Radyushkin A. V. // Phys. Lett. — 1982. — Vol. 115B. — P. 410.

[130] *Radyushkin A. V.* // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 271B. — P. 218.

[131] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D45. — P. 2451.

[132] *Blok B., Shifman M. A.* // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 249.

[133] *Bagan E., Ball P., Gosdzinsky P.* // Phys. Lett. — 1993. — Vol. 301B. — P. 249.

[134] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 4063.

[135] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 3914.

[136] *Neubert M., Ligeti Z., Nir Y.* // Phys. Lett. — 1993. — Vol. 301B. — P. 101; Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 5060; 1994. — Vol. D49. — P. 1302.

[137] *Ball P., Braun V. M., Dosh H. G.* // Phys. Rev. — 1991. — Vol. D44. — P. 3567.

[138] *Волошин М. Б., Шифман М. А.* // ЯФ — 1988. — Т. 47. — С. 801.

[139] *Luke M. E.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 252B. — P. 447.

[140] *Boyd C. G., Brahm D. E.* // Phys. Lett. — 1991. — Vol. 257B. — P. 393;

Lebed R. F., Suzuki M. // Phys. Rev. — 1991. — Vol. D44. — P. 829.

[141] *Ioffe B. L.* // Nucl. Phys. — 1981. — Vol. B188. — P. 175; Erratum: Vol. B191. — P. 591.

[142] *Беляев В. М., Иоффе Б. Л.* // ЖЭТФ. — 1982. — Т. 83. — С. 876

[143] *Isgur N., Wise M. B.* // Nucl. Phys. — 1991. — Vol. B348. — P. 276

[144] *Georgi H.* // Nucl. Phys. — 1991. — Vol. B348. — P. 293;
Mannel T., Roberts W., Ryzak Z. // Nucl. Phys. — 1991. — Vol. B355. — P. 38.

[145] *Hussain F., Körner J. G., Krämer M., Thompson G.* // Zeit. für Phys. — 1991. — Vol. C51. — P. 321;
Hussain F., Liu D., Krämer M., Körner J. G., Tawfiq S. // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. B370. — P. 259.

[146] *Nesterenko V. A., Radyushkin A. V.* // Phys. Lett. — 1983. — Vol. 128B. — P. 439.

[147] *Wise M. B.* // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D45. — P. R2188;
Burdman G., Donoghue J. F. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 280B. — P. 287;
Yan T.–M., Cheng H.–Y., Cheung C.–Y., Lin G.–L., Lin Y. C., Yu H.–L. // Phys. Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 1148; Erratum: 1997. — Vol. D55. — P. 5851;
Cho P. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 285B. — P. 145; Nucl. Phys. — 19396. — Vol. B93. — P. 183; Erratum: 1994. — Vol. B421. — P. 683.

[148] *Cho P., Georgi H.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 296B. — P. 408; Erratum: 1993. — Vol B300. — P. 410;
Amundson J. F., Boyd C. G., Jenkins E., Luke M., Manohar A. V., Rosner J. L., Savage M. J., Wise M. B. // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 296B. — P. 415;
Cheng H.–Y., Cheung C.–Y., Lin G.–L., Lin Y. C., Yan T.–M., Yu H.–L. // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 1030.

[149] *Иоффе Б. Л., Смилга А. В.* // ЖЭТФ. Письма. — 1983. — Т. 37. — С. 250; Nucl. Phys. — 1984. — Vol. B232. — P. 109;
Balitsky I. I., Yung A. V. // Phys. Lett. — 19129. — Vol. 83B. — P. 328.

[150] *Беляев В. М., Коган Я. И.* // ЖЭТФ. Письма. — 1983. — Т. 37. — С. 611; Phys. Lett. — 1984. — Vol. 136B. — P. 273;
Беляев В. М., Блок Б. Ю., Коган Я. И. // ЯФ — 1985. — Т. 41. — С. 439.

[151] *Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Voloshin M. B., Zakharov V. I.* // Nucl. Phys. — 1984. — Vol. B237. — P. 525.

[152] *Eletsky V. L., Kogan Ya. I.* // Zeit. für Phys. — 1985. — Vol. C28. — P. 155.

[153] *Овчинников А. А.* // ЯФ — 1989. — Т. 50. — С. 831.

[154] *Colangelo P., Narduli G., Deandrea A., Di Bartolomeo N., Gatto R., Feruglio F.* // Phys. Lett. — 1994. — Vol. 339B. — P. 151.

[155] *Belyaev V. M., Braun V. M., Khodjamirian A. Yu., Rückl R.* // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D51. — P. 6177.

[156] *Braun V. M., Filyanov I. B.* // Zeit. für Phys. — 1989. — Vol. C44. — P. 157.

[157] *Черняк В. Л., Сербо В. Г., Житницкий А. Р.* // ЖЭТФ. Письма. — 1977. — Т. 26. — С. 760;
Farrar G. R., Jackson D. R. // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43. — P. 246;
Efremov A. V., Radyushkin A. V. // Phys. Lett. — 1980. — Vol. 94B. — P. 245.

[158] *Brodsky S. J., Lepage G. P.* // Phys. Lett. — 1979. — Vol. 87B. — P. 359; Phys. Rev. — 1980. — Vol. D22. — P. 2157.

[159] *Chernyak V. L., Zhitnitsky A. R.* // Phys. Reports, 1984. — Vol. 112. — P. 173.

[160] *Байер В. Н., Грозин А. Г.* Жесткие адронные процессы в КХД. // ЭЧАЯ, 1985. — Т. 16. — С. 5–58.

[161] *Brodsky S. J., Ji C.-R.* // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 55. — P. 2257.

[162] *Baek M. S., Choi S. Y., Song H. S.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D50. — P. 4363.

[163] *Neubert M.* // Phys. Lett. — 1993. — Vol. 306B. — P. 357.

[164] *Falk A. F., Neubert M.* // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — P. 2965.

[165] *Mannel T., Ryzak Z.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 247B. — P. 412;
Falk A. F., Grinstein B. // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 249B. — P. 314.

[166] *Волошин М. Б., Шифман М. А.* // ЯФ — 1985. — Т. 41. — С. 187; ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91. — С. 1180.

[167] *Chay J., Georgi H., Grinstein B.* // Phys. Lett. — 1990. — Vol. 247B. — P. 399.

[168] *Bigi I. I., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 293B. — P. 430; Erratum: 1993. — Vol. B297. — P. 477.

[169] *Bigi I. I., Shifman M. A., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 496.

[170] *Manohar A. V., Wise M. B.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 1310.

[171] *Blok B., Koyrakh L, Shifman M., Vainshtein A.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 3356; Erratum: Vol. D50. — P. 3572.

[172] *Falk A. F., Luke M., Savage M. J* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 3367.

[173] *Mannel T.* // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B413. — P. 396.

[174] *Neubert M.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 3392; P. 4623;
Mannel T., Neubert M. // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D50. — P. 2037.

[175] *Bigi I. I., Shifman M. A., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* // Int. J. Mod. Phys. — 1994. — Vol. A9. — P. 2467.

[176] *Shifman M. A., Uraltsev N. G., Vainshtein A. I.* // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D51. — P. 2217; Erratum: Vol. D52. — P. 3149.

[177] *Voloshin M. B.* // Surv. in High Energy Phys. — 1995. — Vol. 8. — P. 27–51.

[178] *Ball P., Braun V. M.* // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 2472.

[179] *Amati D., Bassetto A., Ciafaloni M., MarchesiniG., Veneziano G.* // Nucl. Phys. — 1980. — Vol. B173. — P. 429.

[180] *Sterman G.* // Perturbative Quantum Chromodynamics, Tallahassee, 1981. — AIP Conference Proceedings, NY, 1981. — Vol. 74. — P. 22;

Gatheral J. G. M. // Phys. Lett. — 1984. — Vol. 133B. — P. 90;

Frenkel J., Taylor J. C. // Nucl. Phys. — 1984. — Vol. B246. — P. 231.

[181] *Beneke M., Braun V. M., Zakharov V. I.* // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73. — P. 3058.

[182] *Martinelli G., Neubert M., Sachrajda C. T.* // Nucl. Phys. — 1996. — Vol. B461. — P. 238;

Neubert M. // Phys. Lett. — 1997. — Vol. 393B. — P. 110.

[183] *Korchemsky G. P., Sterman G.* // Phys. Lett. — 1994. — Vol. 340B. — P. 96.

[184] *Korchemskaya I. A., Korchemsky G. P.* // Phys. Lett. — 1992. — Vol. 287B. — P. 169;

Bassetto A., Korchemskaya I. A., Korchemsky G. P., Nardelli G. // Nucl. Phys. — 1993. — Vol. B408. — P. 62;

Korchemsky G. P., Marchesini G. // Nucl. Phys. — 1993. — Vol. B406. — P. 225.