

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра физики ускорителей

Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков

**Затухание Ландау  
и расфазировки когерентных колебаний  
пучков в накопителях**

Учебное пособие

Новосибирск  
2010

ББК В381.1 я73-1

УДК 621.384.6.01

**Диканский Н. С., Пестриков Д. В.** Затухание Ландау и расфазировки когерентных колебаний пучков в накопителях: Учеб. пособие / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 81 с.

ISBN 978-5-94356-875-6

Предназначено для студентов и магистрантов физического факультета Новосибирского государственного университета, занимающихся на кафедре физики ускорителей. Оно дополняет учебное пособие Д. В. Пестрикова «Лекции по когерентным колебаниям (части I и II)», изданное в НГУ в 1996 г., устраняя ряд пробелов в изложенном там описании расфазировки пучков в накопителях заряженных частиц.

Настоящее пособие будет полезно студентам для укрепления их практических знаний и навыков решения многих конкретных задач, возникающих при работе на накопителях, а также при изучении курса «Коллективные эффекты в динамике пучков».

Рецензент — научный сотрудник ИЯФ СО РАН В. А. Востриков

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009 – 2018 годы.

ISBN 978-5-94356-875-6

© Новосибирский государственный университет, 2010  
© Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков, 2010

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
<b>1. Колебания, фазы, когерентность</b>	<b>5</b>
<b>2. Продольные когерентные колебания несгруппированного пучка</b>	<b>9</b>
2.1. Пучок малой интенсивности . . . . .	9
2.2. Пучок конечной интенсивности . . . . .	11
2.2.1. Лоренцево распределение импульсов . . . . .	16
2.2.2. Прямоугольное распределение импульсов . . . . .	21
2.2.3. Гауссово распределение импульсов . . . . .	24
<b>3. Поперечные когерентные колебания несгруппированного пучка</b>	<b>32</b>
3.1. Колебания пучка малой интенсивности . . . . .	33
3.2. Дипольные колебания пучка конечной интенсивности . . . . .	40
3.2.1. Гармоники функции распределения . . . . .	40
3.2.2. Дипольный момент пучка после удара . . . . .	44
3.2.3. Условия устойчивости поперечных когерентных колебаний . . . . .	47
<b>4. Влияние охлаждения пучка на затухание Ландау</b>	<b>56</b>
4.1. Движение отдельных частиц . . . . .	57
4.2. Продольные когерентные колебания охлаждаемого пучка . . . . .	60
4.3. Когерентный сигнал . . . . .	65
4.4. Малые декременты охлаждения . . . . .	67
4.5. Собственные частоты и устойчивость колебаний . . . . .	71
4.6. Когерентный сигнал при сильном охлаждении . . . . .	75
<b>5. Заключительные замечания</b>	<b>78</b>
<b>Библиографический список</b>	<b>81</b>

## Предисловие

Изучение процессов расфазировки когерентных колебаний пучка в накопителях заряженных частиц важно во многих отношениях. В общем плане, наблюдение расфазировок пучков в накопителях является важным источником информации, позволяющим установить параметры некогерентных колебаний частиц, изучая его когерентные колебания. Умение правильно предсказывать результаты таких измерений в значительной степени определяет успех проводимых или планируемых работ. В дидактическом плане, вычисления расфазировок колебаний интенсивных пучков заставляют студентов использовать многие аспекты, понятия и методы теории линейных когерентных колебаний и тем улучшают их опыт в решении конкретных задач. В тексте пособия [1] эти вопросы отражены лишь в краткой форме, оставляя их более подробное изучение для самостоятельной работы студентов, или для решения ими упражнений. Такой подход оказался оправданным лишь для очень сильных студентов. Главная трудность, с которой сталкивались остальные учащиеся, состояла в необходимости проведения весьма объемных вычислений при решении даже упрощенных задач. К тому же эти вычисления часто требуют от студентов знаний, которые они получали в течение нескольких предыдущих лет учебы в НГУ, но, возможно, слегка (или весьма основательно) подзабыли из-за других нагрузок.

Так или иначе, но в течение ряда лет мы стали сталкиваться с необходимостью более подробного изложения этого круга вопросов, чем казалось нужным, скажем, в 90-е гг. прошлого века. В этом пособии мы обсудим ряд проблем, иллюстрирующих применение простых методов теории линейных когерентных колебаний для описания расфазировки пучков в накопителях заряженных частиц. Проведение таких вычислений уже давно стало рутинной и, в значительной степени, обязательной операцией при запуске и эксплуатации накопителей заряженных частиц. Мы ограничимся обсуждением простых и вместе с тем типичных вопросов, которые могут встретиться студентам в их работе на реальных установках, а также при изучении курса «Коллективные эффекты в динамике пучков». Вместе с тем, набор

обсуждаемых в пособии проблем оставляет студентам достаточный простор для самостоятельных исследований.

## 1. Колебания, фазы, когерентность

В циклических ускорителях и накопителях заряженные частицы движутся вдоль либо вблизи так называемой замкнутой орбиты. Это достигается правильным расположением вдоль желаемой траектории необходимого количества поворотных магнитов. Если  $s$  – расстояние, пройденное частицей вдоль замкнутой орбиты к моменту времени  $t$ , то положение замкнутой орбиты в пространстве описывается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s). \quad (1.1)$$

В силу замкнутости орбиты кривая  $\mathbf{r}_0(s)$  описывается некоторой периодической функцией с периодом, равным периметру орбиты  $\Pi = 2\pi R_0$ :

$$\mathbf{r}_0(s + \Pi) = \mathbf{r}_0(s). \quad (1.2)$$

Величина  $R_0$  называется средним радиусом орбиты. Поскольку формирование замкнутой орбиты осуществляется магнитными полями, величины  $\Pi$  и  $R_0$  зависят от энергии частиц. При описании движения частиц с постоянной энергией  $E$  вводят также величины

$$T_0 = \frac{\Pi}{v} \quad (1.3)$$

и

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (1.4)$$

где  $E = c\sqrt{p^2 + M^2c^2}$ ,  $p = \gamma Mv$  – импульс, а  $v$  – скорость частицы. Величина  $T_0$  называется периодом обращения частицы вдоль замкнутой орбиты, а  $\omega_0$  – частотой обращения частицы вдоль замкнутой орбиты. Согласно формулам (1.3) и (1.4) величины  $T_0$  и  $\omega_0$  также зависят от энергии частицы. Чтобы это подчеркнуть, пишут, например,  $\omega_0(p)$ . Обычно различия энергий накапливаемых частиц малы по сравнению с самими энергиями. Следовательно, различия

периодов, или частот обращения частиц  $\omega_0(p)$ , также малы. В таких случаях используют разложение

$$\omega_0(p) = \omega_0(p_0) + \frac{d\omega_0}{dp} \Delta p. \quad (1.5)$$

Здесь  $p_0$  – некоторое типичное значение импульса накапливаемых частиц, а  $\Delta p = p - p_0$  – отклонение импульса конкретной частицы от этого значения ( $|\Delta p| \ll p_0$ ). Согласно уравнениям (1.3) и (1.4) пишем

$$\frac{d\omega_0}{dp} = \frac{\omega_0 \alpha_p}{p_0}, \quad \alpha_p = \left( \frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha \right), \quad (1.6)$$

где  $\omega_0 = \omega_0(p_0)$ , а  $\alpha$  – коэффициент уплотнения орбит. Часто также для упрощения записей и там, где это не приводит к недоразумениям, пишут

$$\frac{d\omega_0}{dp} = \omega'_0 = \frac{\omega_0 \alpha_p}{p}, \quad \alpha_p = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right). \quad (1.7)$$

В отсутствие на замкнутой орбите продольных высокочастотных (ВЧ) электромагнитных полей энергии частиц сохраняются. Для описания продольного движения частиц пучка относительно замкнутой орбиты частицы с импульсом  $p_0$  вводят фазу продольного движения частицы

$$\phi = \frac{s}{R_0} - \omega_0 t, \quad (1.8)$$

где  $\omega_0$  и  $R_0$  определены для орбиты с импульсом  $p_0$ . Если энергия частицы сохраняется, то согласно уравнению (1.5) величина  $\phi$  линейно меняется со временем:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega'_0 \Delta p. \quad (1.9)$$

В этом случае фаза  $\phi$  является циклической переменной.

Оптика ускорителя, или накопительного кольца, обычно устроена так, чтобы при отклонении частицы от замкнутой орбиты на нее действовала бы возвращающая сила, пропорциональная величине отклонения. В машине с такой фокусировкой частицы совершают гармонические колебания относительно замкнутой орбиты и тем формируют пучок. Для поперечных к замкнутой орбите направлений определяют частоты бетатронных колебаний. Если замкнутая

орбита является плоской кривой, а связь колебаний отсутствует, то частоту вертикальных бетатронных колебаний определяют соотношением

$$\omega_y = \omega_0(p)\nu_y, \quad (1.10)$$

а горизонтальных соотношением

$$\omega_x = \omega_0(p)\nu_x. \quad (1.11)$$

Фазы бетатронных колебаний

$$\frac{d\psi_{y,x}}{dt} = \omega_{y,x} = \omega_0(p)\nu_{y,x} \quad (1.12)$$

являются циклическими переменными. Входящие в эти определения величины  $\nu_{y,x}$  называются безразмерными частотами соответственно вертикальных и горизонтальных (радиальных) бетатронных колебаний. Поскольку углы отклонений в фокусирующих полях зависят от энергий частиц, частоты  $\nu_{y,x}$  также являются функциями импульсов частиц. По аналогии с разложением (1.5) для частицы с импульсом  $p + \Delta p$  пишут

$$\nu_{y,x}(\Delta p) = \nu_{y,x}(p) + \left( \frac{d\nu_{y,x}}{d \ln p} \right)_0 \frac{\Delta p}{p}. \quad (1.13)$$

Величины  $(d\nu_{y,x}/d \ln p)_0$  называются хроматизмами вертикальных и горизонтальных бетатронных колебаний соответственно.

Фокусировка частиц в продольном направлении осуществляется ускоряющими или тормозящими электромагнитными ВЧ-полями. Если частота ВЧ-поля равна  $\Omega_0$ , то эффект продольной фокусировки достигается для резонансных частиц

$$\Omega_0 = q\omega_0(p). \quad (1.14)$$

Величина  $q$  называется кратностью ВЧ-поля. За исключением окрестности критической энергии накопителя ( $\gamma_{tr} = 1/\sqrt{\alpha}$ , где  $0 < \alpha < 1$ ) частота обращения  $\omega_0(p)$  является монотонной функцией импульса частицы. При этом резонансное условие (1.14) выполняется лишь для одного значения импульса  $p = p_s$ . Частица с таким импульсом

называется синхронной, а само значение  $p_s$  используется в качестве импульса  $p_0$  в разложениях (1.5). Значение фазы прохождения ускоряющего зазора синхронной частицей называется синхронной фазой ( $\phi_s$ ). В отсутствие ускорения или торможения частиц пучка, а также в зависимости от знака  $\omega'_0$  значение синхронной фазы равны  $2\pi k/q$  либо  $\pi + 2\pi k/q$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ .

В силу принципа автофазировки частицы с импульсами, близкими к  $p_s$ , совершают синхротронные колебания. Эти колебания проявляются в периодическом изменении импульса  $p_s + \Delta p$  и фазы  $\phi$  частицы относительно синхронного значения ( $p_s, \phi_s$ ). Синхротронные колебания устойчивы, если координаты частицы  $p$  и  $\phi$  попадают внутрь сепаратрис. При кратности ВЧ-поля  $q$  на орбите имеется  $q$  сепаратрис. Частицы, не попавшие ни в одну из сепаратрис, по разным причинам гибнут на стенках вакуумной камеры накопителя. Захваченные же в какую-либо из сепаратрис частицы формируют сгустки. Таким образом, при кратности  $q$  пучок может состоять из  $q$  сгустков. Синхротронные колебания являются гармоническими, если их амплитуды  $a_c$  существенно меньше длины волны группирующего ВЧ-поля ( $a_c \ll \Pi/q$ ). Частоту таких колебаний мы будем обозначать выражением

$$\omega_c = \omega_0 \nu_c, \quad (1.15)$$

где  $\omega_0$  – частота обращения синхронной частицы.

Перечисленные определения указывают, что в накопителях заряженных частиц с линейными фокусирующими силами колебания частиц с равными энергиями (монохроматический пучок) являются когерентными. Это означает, что начальные взаимные расположения частиц в фазовом пространстве пучка не меняются со временем.

Нелинейные зависимости фокусирующих сил от координат отклонений частиц от замкнутой орбиты приводят к ангармоничности колебаний частиц и, возможно, к потере устойчивости этих колебаний. В тех случаях, когда потери устойчивости удастся избежать, основное влияние нелинейности фокусирующих полей проявляется в зависимости частот колебаний частиц от амплитуд и в изменении хроматичности таких колебаний. Свойство когерентности колебаний частиц в машинах с такой фокусировкой, вообще говоря, теряется. Из-за разницы частот колебаний частиц пучок расплывается в про-



странстве фаз колебаний и, чаще всего, стремится принять в нем равномерное распределение. В действительности, однако, различия (разбросы) частот в накапливаемых пучках невелики. По этой причине при описании колебаний пучков в накопителях разумно говорить об их когерентных колебаниях и о влиянии разбросов частот на эти когерентные колебания.

## 2. Продольные когерентные колебания несгруппированного пучка

В практическом плане, этот класс задач более специфичен для накопителей ионов, в которых потери энергий невелики и поэтому для удержания пучка вблизи желаемой замкнутой орбиты может не требоваться группирующее ВЧ-поле. В поперечном направлении такой пучок формируется поперечными фокусирующими полями, а в продольном – частицы свободно движутся вдоль замкнутой орбиты с угловыми частотами  $\omega_0(\Delta p)$ , где  $\Delta p$  – отклонение импульса частицы от некоторого заданного значения. Продольными когерентными колебаниями пучка называют колебания его линейной плотности в продольном фазовом пространстве ( $\Delta p, \theta = s/R_0 = \omega_0 t + \phi$ ) при равномерном распределении частиц по фазам поперечных колебаний. Такие процессы описываются функцией распределения  $f(\Delta p, \theta, t)$ . В силу цикличности движения частиц вдоль замкнутой орбиты функция  $f(\Delta p, \theta, t)$  периодична по фазовой переменной  $\theta$ . Поэтому имеет место разложение  $f$  в ряд Фурье:

$$f = f_0(\Delta p) + \sum_{n \neq 0} f_n(\Delta p, t) e^{in\theta}. \quad (2.1)$$

Продольные когерентные колебания несгруппированного пучка описываются гармониками  $f_n(\Delta p, t)$ .

### 2.1. Пучок малой интенсивности

Этот случай самый простой. Соответствующая функция распределения находится решением уравнения Власова, записанном в пренебрежении возможности наведения пучком полей в окружающих

его элементах вакуумной камеры накопителя. Для несгруппированного пучка это уравнение имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(\Delta p) \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \quad (2.2)$$

Согласно этому уравнению функция распределения является интегралом движения. По этой причине  $f$  является функцией интегралов движения частиц. В рассматриваемой задаче таких интегралов два –  $\Delta p$  и  $\theta - \omega_0(\Delta p)t$ . Поэтому решение уравнения (2.2) записывается в виде

$$f(\Delta p, \theta, t) = f_0(\Delta p, \theta - \omega_0(\Delta p)t), \quad (2.3)$$

где  $f_0(\Delta p, \theta)$  – функция распределения пучка в начальный момент времени. Подставив (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$f = f_{00}(\Delta p) + \sum_{n \neq 0} f_{0n}(\Delta p) \exp(in\theta - in\omega_0(\Delta p)t). \quad (2.4)$$

Таким образом, в соответствии с уравнением (2.2) амплитуды продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка малой интенсивности постоянны во времени. На практике, однако, обычно измеряются не амплитуды  $f_n$ , а амплитуды линейной плотности частиц пучка:

$$\rho_n(t) = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{0n}(\Delta p) \exp(-in\omega'_0 \Delta p t). \quad (2.5)$$

За исключением случая монохроматического пучка ( $f_{0n} \propto \delta(\Delta p)$ ) амплитуды  $\rho_n(t)$ , в целом, уменьшаются с течением времени. Характерный темп такого убывания оценивается шириной распределения  $f_{0n}(\Delta p)$ , т. е. разбросом импульсов в пучке. Конкретные зависимости величин  $\rho_n$  от времени различны для различных начальных распределений  $f_{0n}(\Delta p)$ . Так, в случае лоренцева начального распределения импульсов

$$f_{0n}(\Delta p) = \frac{\rho_{0n}}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2} \quad (2.6)$$

вычисление интеграла в (2.5)

$$\rho_n(t) = e^{-i\omega_0 t} \frac{\rho_{0n}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2} \exp(-in\omega'_0 \Delta p t)$$

приводит к выражению

$$\rho_n(t) = \rho_{0n} \exp(-in\omega_0 t - |n|\delta\omega t). \quad (2.7)$$

Здесь  $\delta\omega = |\omega'_0|\Delta$  – разброс частот обращения в пучке. В случае гауссова начального распределения импульсов

$$f_{0n}(\Delta p) = \frac{\rho_{0n}}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right) \quad (2.8)$$

– к выражению

$$\rho_n(t) = \rho_{0n} \exp(-in\omega_0 t - n^2\delta\omega^2 t^2). \quad (2.9)$$

В случае прямоугольного начального распределения импульсов

$$f_{0n}(\Delta p) = \frac{\rho_{0n}}{2\Delta} \begin{cases} 1, & |\Delta p| \leq \Delta, \\ 0, & |\Delta p| > \Delta \end{cases} \quad (2.10)$$

– к выражению

$$\rho_n(t) = \rho_{0n} \frac{\sin(n\delta\omega t)}{n\delta\omega t}. \quad (2.11)$$

В последнем случае, в силу конечности интервала частот обращения, занимаемого пучком ( $|\omega_0(\Delta p) - \omega_0| \leq \delta\omega$ ), начальное раскогеренчивание пучка через интервал времени  $\Delta t = \pi/(|n|\delta\omega_0)$  сменяется увеличением в нем когерентности до момента времени  $t = 3\pi/(2|n|\delta\omega)$ , после чего когерентность в пучке снова уменьшается до нуля. С общим уменьшением амплитуд  $\rho_n(t)$  со временем последовательность смены увеличения и уменьшения когерентности в таком пучке длится до бесконечности. Такие процессы иногда называют эхом когерентных колебаний. Они вообще присущи пучкам с конечным интервалом занимаемых частицами частот.

## 2.2. Пучок конечной интенсивности

Продольные когерентные колебания негруппированного и неохлаждаемого пучка конечной интенсивности также описываются уравнением Власова. Однако, в отличие от случая, изученного в предыдущем разделе, здесь следует учесть влияние на движение частиц полей, которые пучок наводит в окружающих его элементах

вакуумной камеры накопителя. Поскольку нас интересует поведение только продольных колебаний, считаем, что фазовое пространство пучка, как и прежде, двумерно, а положение в нем частицы описывается двумя координатами ( $\Delta p$  и  $\theta$ ). Учитывая наведенные пучком поля, заменим уравнение (2.2) более общим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(\Delta p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + eE(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial \Delta p} = 0. \quad (2.12)$$

Здесь  $e$  – заряд частицы, а  $E(\theta, t)$  – тангенциальная компонента наведенного пучком электрического поля, действующего на замкнутой орбите в точке  $\theta$ . Поскольку поле  $E(\theta, t)$  зависит от распределения частиц в пучке, уравнение (2.12) не является линейным. Поэтому вычисление его общего решения затруднено. Вместе с тем, на практике распространены случаи, когда наведенные поля пучка невелики<sup>1</sup>. Поэтому, например, при решении подобных задач часто можно пренебречь вкладами в  $f$  частиц, захваченных в сепаратрисы, определяемые полем  $E(\theta, t)$ , а также вкладами частиц, находящихся вблизи границ этих сепаратрис. Тогда большинство частиц пучка, дающих определяющие вклады в  $E(\theta, t)$ , являются пролетными, а искажения фазовых траекторий частиц можно вычислять по теории возмущений. Такое приближенное описание продольных когерентных колебаний пучка реализуется линеаризацией уравнения (2.12) вблизи некоторого стационарного состояния пучка, которое считается заданным. Поскольку в стационарном состоянии наведенных полей нет, подстановка разложения (2.1) в линеаризованное по гармоникам  $f_n$  уравнение (2.12) дает

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + in\omega_0(\Delta p)f_n + eE_n(t) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = 0. \quad (2.13)$$

Это уравнение легко решается с использованием преобразования Фурье по времени. Определив

$$f_{n\omega}(\Delta p) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} f_n(\Delta p, t), \quad \text{Im}\omega > 0, \quad (2.14)$$

---

<sup>1</sup> Точнее, невелики искажения траекторий частиц, вызываемые такими полями, например, на интервалах времени порядка периода обращения частиц по замкнутой орбите.

и используя в (2.13)

$$\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_n}{\partial t} = -f_n(\Delta p, 0) - i\omega f_{n\omega}(\Delta p), \quad (2.15)$$

а также, например, (1.5), пишем

$$f_{n\omega} = \frac{if_n(\Delta p, 0)}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p} - \frac{ieE_{n,\omega}}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p} \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p}. \quad (2.16)$$

Здесь  $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$ . Как мы увидим ниже, решения уравнения (2.13) могут описывать как затухающие, так и нарастающие (неустойчивые) колебания. В силу линейности этого уравнения амплитуды неустойчивых колебаний увеличиваются со временем не быстрее, чем по экспоненциальному закону. По этой причине значения мнимой части комплексной переменной  $\omega$  в уравнении (2.15) и в подобных ему уравнениях должно превышать инкремент максимально неустойчивого колебания.

Чтобы избежать вычисления конкретных наведенных пучком полей, мы предположим, что гармоники  $E_{n,\omega}$  и  $f_{n\omega}$  связаны импедансным соотношением:

$$E_{n,\omega} = -\frac{Ne\omega_0}{\Pi} Z_n(\omega) \rho_{n\omega}, \quad (2.17)$$

где

$$\rho_{n\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n\omega}(\Delta p) \quad (2.18)$$

– гармоника линейной плотности частиц пучка, а  $Z_n(\omega)$  – импеданс связи продольных колебаний пучка с элементами вакуумной камеры накопителя. В общем случае, величина  $Z_n(\omega)$  является комплексной функцией частоты  $\omega$ . Мы упростим вычисления, предположив, что взаимодействие пучка с вакуумной камерой накопителя не является резонансным, а также, что это взаимодействие приводит к малым сдвигам частот в спектре пучка относительно гармоник  $n\omega_0$ . По этим причинам далее мы будем заменять точное значение  $\omega$  в аргументе  $Z_n(\omega)$  приближенным значением  $n\omega_0$  и соответственно будем писать  $Z_n(\omega) = Z_n(n\omega_0) = Z_n$ . Подстановка этих выражений в уравнение

(2.16) дает решение задачи:

$$f_{n\omega} = \frac{if_n(\Delta p, 0)}{\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p} + \frac{iNe^2\omega_0 Z_n}{\Pi} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \frac{\rho_{n\omega}}{\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p}, \quad (2.19)$$

$$\rho_{n,\omega} = \frac{\rho_{n,\omega}^{(0)}}{\varepsilon(n, \Delta\omega_n)}, \quad (2.20)$$

где

$$\rho_{n,\omega}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{if_n(\Delta p, 0)}{\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p}, \quad (2.21)$$

$$\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0/\partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p}, \quad (2.22)$$

а

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2\omega_0\omega'_0}{\Pi} \left( \frac{-iZ_n}{n} \right) \quad (2.23)$$

– квадрат (комплексного) когерентного сдвига частоты колебаний монохроматического пучка.

Зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени вычисляются использованием обратного преобразования Фурье:

$$f_n(\Delta p, t) = e^{-in\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{2\pi} e^{-i\Delta\omega_n t} f_{n\omega}, \quad \text{Im}\Delta\omega_n > 0,$$

и

$$\rho_n(t) = e^{-in\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{2\pi} \frac{e^{-i\Delta\omega_n t} \rho_{n,\omega}^{(0)}}{\varepsilon(n, \Delta\omega_n)}, \quad \text{Im}\Delta\omega_n > 0. \quad (2.24)$$

При вычислении таких интегралов контуры интегрирования проходят в плоскости комплексной переменной  $\Delta\omega_n$  выше любого из корней дисперсионного уравнения  $\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 0$ . Подстановка в эти выражения значений  $f_{n\omega}$  и  $\rho_{n,\omega}^{(0)}$  из уравнений (2.19) и (2.21) дает:

$$\begin{aligned} e^{in\omega_0 t} f_n(\Delta p, t) &= f_n(\Delta p, 0) \exp(-in\omega'_0 \Delta p t) - \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{e^{-i\Delta\omega_n t}}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p) \varepsilon(n, \Delta\omega_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p' f_n(\Delta p', 0)}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p'}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

и

$$e^{-in\omega_0 t} \rho_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\Delta p, 0) \quad (2.26)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{e^{-i\Delta\omega_n t}}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p) \varepsilon(n, \Delta\omega_n)}.$$

Интегралы по  $\Delta\omega_n$  в уравнениях (2.25) и (2.26) вычисляются замыканием контуров интегрирования в нижнюю полуплоскость плоскости комплексной переменной  $\Delta\omega_n$  и вычислением вычетов в полюсах подынтегральных выражений. Согласно уравнениям (2.19) и (2.20) простые полюсы расположены на действительной оси  $\Delta\omega_n$  в точках  $\Delta\omega_n = n\omega'_0 \Delta p$ , а также в точках, являющихся корнями дисперсионного уравнения  $\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 0$ . Последние описывают влияние наведенных пучком полей на его расфазировку. Поскольку положения корней дисперсионного уравнения определяются поведением пучка в целом, такие явления называют еще коллективной реакцией пучка. Таким образом, можно говорить, что вклады корней дисперсионного уравнения описывают влияние коллективной реакции пучка на его расфазировку.

Согласно выражению (2.22) дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 0$$

может иметь корни как в верхней, так и в нижней полуплоскости комплексной переменной  $\Delta\omega_n$ . Например, это реализуется для монохроматического пучка ( $f_0(\Delta p) = \delta(\Delta p)$ ) и комплексных либо отрицательных значений  $\Omega_n^2$ . Корни в верхней полуплоскости описывают нарастающие, а в нижней – затухающие со временем когерентные колебания. Если колебания неустойчивы, то их амплитуды нарастают и вопрос об описании расфазировки такого пучка с помощью линейаризованного уравнения Власова теряет смысл. Поэтому далее мы сосредоточимся на изучении процесса расфазировки пучка, параметры которого лежат внутри так называемой границы области устойчивости продольных когерентных колебаний пучка.

Такая граница строится в плоскости комплексной переменной  $\Omega_n^2$ , изменяя в дисперсионном уравнении параметр  $\Delta\omega_n$  чуть выше действительной оси  $\Delta\omega_n$  ( $\Delta\omega_n \rightarrow \Delta\omega_n + i0$ ). В плоскости  $\Omega_n^2$  она разделяет область, в которой нет ни одного неустойчивого решения, и

область, в которой есть хотя бы одно такое решение. Возможность построения границ области устойчивости связана со стабилизацией когерентных колебаний пучка их затуханием Ландау – затуханием, которое приобретают когерентные колебания пучка благодаря их резонансной связи с движением отдельных частиц пучка.

Как и темпы расфазировки, ширины таких областей устойчивости, в общем случае, растут при увеличении разбросов частот в пучках. При этом, однако, следует помнить, что поскольку затухание Ландау обязано взаимодействию волны и индивидуальных частиц пучка, его декременты всегда зависят от числа частиц в пучке. Этим затухание Ландау существенно отличается от явления кинематической расфазировки <sup>2</sup>.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих влияние коллективной реакции несгруппированного пучка на его расфазировку по азимуту  $\theta$ .

### 2.2.1. Лоренцево распределение импульсов

Вычисление интегралов в формулах (2.22) по (2.26) становится особенно простым, если в качестве  $f_0$  выбрать распределение Лоренца:

$$f_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = -\frac{2\Delta p}{\Delta p^2 + \Delta^2} f_0. \quad (2.27)$$

Хотя это распределение и не может быть получено решением какого-либо разумного кинетического уравнения, благодаря упрощению вычислений оно часто используется в работах по когерентным колебаниям пучков для грубых оценок декрементов затухания Ландау. Это следует помнить при решении конкретных задач и, следовательно, относиться к таким расчетам лишь как к демонстрационным.

---

<sup>2</sup> Исключение составляют случаи, когда величина  $\varepsilon(n, \Delta\omega_n)$  имеет полюсы в точках  $\Delta\omega_n$ , положение которых не зависит от числа частиц в пучке  $N$ . При описании бесстолкновительных процессов такие особенности  $\varepsilon(n, \Delta\omega_n)$  обычно связаны с неудачным выбором функции распределения стационарного состояния пучка. Например, к такой особенности приводит использование в качестве  $f_0$  распределения Лоренца.



Подставив (2.27) в (2.22), пишем

$$\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p}$$

или, после интегрирования по  $\Delta p$  по частям,

$$\begin{aligned} \varepsilon(n, \Delta\omega_n) &= 1 - \frac{\Omega_n^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\Delta}{(\Delta p^2 + \Delta^2) (\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p)^2} \\ &= 1 - \frac{\Omega_n^2}{(\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega)^2}, \quad \delta\omega = |\omega'_0|\Delta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если в дополнение к (2.27) предположить также, что распределение начальных гармоник  $f_n$  описывается выражением

$$f_n(\Delta p, 0) = \frac{\rho_{0n}}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2}, \quad (2.29)$$

то, подставив (2.29) в (2.21), получим

$$\begin{aligned} \rho_{n,\omega}^{(0)} &= \frac{i\rho_{0n}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\Delta}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p) (\Delta p^2 + \Delta^2)} \\ &= \frac{i\rho_{0n}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{(1+u^2) (\Delta\omega_n - n\delta\omega u)} \\ &= \frac{i\rho_{0n}}{(\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega)}. \end{aligned}$$

Собирая эти выражения в уравнении (2.24), получим

$$\begin{aligned} e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) &= \rho_{0n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{(\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega) e^{-i\Delta\omega_n t}}{(\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega)^2 - \Omega_n^2} \\ &= \rho_{0n} \exp(-|n|\delta\omega t) \left( \frac{e^{-i\sqrt{\Omega_n^2} t}}{2} + \frac{e^{i\sqrt{\Omega_n^2} t}}{2} \right), \end{aligned}$$

или

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) = \rho_{0n} \exp(-|n|\delta\omega t) \cos\left(\sqrt{\Omega_n^2} t\right). \quad (2.30)$$

Эта формула становится особенно простой для случая, когда  $\Omega_n^2 > 0$ . Например, это может быть в случае действия на частицы поля пространственного заряда пучка в идеально проводящей вакуумной камере при энергиях частиц меньших критической энергии накопителя

( $\alpha_p > 0$ ). Как видно из полученного уравнения, в дополнение к затуханию колебаний пучка малой интенсивности с декрементами  $|n|\delta\omega$  коллективная реакция пучка приводит к появлению осцилляций амплитуд когерентных колебаний с частотой  $\sqrt{\Omega_n^2}$ . Такие осцилляции проявляются на временах  $\sqrt{\Omega_n^2}t > 1$ . Спектры когерентных колебаний такого пучка состоят из двух пиков, сдвинутых по частоте относительно  $n\omega_0$  на величины  $\pm\sqrt{\Omega_n^2}$ . Ширины этих пиков равны декрементам затухания колебаний  $|n|\delta\omega$ . Поскольку для низкочастотных колебаний поля часто выполняется соотношение  $\sqrt{\Omega_n^2} \propto |n|$ , продольные когерентные колебания пучка проявляются в виде волн, бегущих по пучку (пик на частоте  $n\omega_0 + \sqrt{\Omega_n^2}$ ) – быстрая волна и против движения пучка (пик на частоте  $n\omega_0 - \sqrt{\Omega_n^2}$ ) – медленная волна.

В старых работах по продольным когерентным колебаниям несгруппированного пучка часто вводили обозначение

$$\Omega_n^2 = U - iV. \quad (2.31)$$

Учитывая, что

$$\sqrt{U - iV} = \sqrt{\frac{\sqrt{U^2 + V^2} + U}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{U^2 + V^2} - U}{2}},$$

перепишем формулу (2.30) в виде

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) = \rho_{0n} \exp(-|n|\delta\omega t) \frac{e^{i\Omega t + \Lambda t} + e^{-i\Omega t - \Lambda t}}{2}. \quad (2.32)$$

Здесь

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{U^2 + V^2} + U}{2}} \quad (2.33)$$

– когерентный сдвиг частоты, а

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{U^2 + V^2} - U}{2}}. \quad (2.34)$$

Как видно из этих выражений, быстрая волна ( $n\omega_0 + \Omega$ ) затухает, а медленная ( $n\omega_0 - \Omega$ ) может стать неустойчивой при выполнении

условия  $\Lambda \geq |n|\delta\omega$ , или

$$V^2 > 4n^2\delta\omega^2 (n^2\delta\omega^2 + U).$$

При выполнении обратного неравенства  $\Lambda \leq |n|\delta\omega$  обе моды когерентных колебаний затухают, а уравнение

$$V = \pm 2|n|\delta\omega\sqrt{n^2\delta\omega^2 + U} \quad (2.35)$$

определяет положение границы области устойчивости колебаний в плоскости комплексной переменной  $\Omega_n^2$ . Колебания устойчивы внутри граничной кривой. Как видно из уравнения (2.35), вся область устойчивости продольных когерентных колебаний расположена правее прямой  $U = -n^2\delta\omega^2$ , соответствующей порогу неустойчивости отрицательной массы несгруппированного пучка.

Любопытно также вычислить сами гармоники функции распределения. Используя уравнения (2.25), (2.27) и (2.28), пишем

$$\begin{aligned} e^{in\omega_0 t} f_n(\Delta p, t) &= f_n(\Delta p, 0) \exp(-in\omega'_0 \Delta p t) \\ &\quad - \rho_{0n} \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) S, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{(\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega)e^{-i\Delta\omega_n t}}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p)((\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega)^2 - \Omega_n^2)}. \quad (2.37)$$

Интеграл по  $\Delta\omega_n$  в правой части (2.37) вычисляется замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $\Delta\omega_n$  и нахождением вычетов подынтегрального выражения в полюсах  $\Delta\omega_n = n\omega'_0 \Delta p$  и  $\Delta\omega_n = -i|n|\delta\omega \pm \sqrt{\Omega_n^2}$ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega}{(n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega)^2 - \Omega_n^2} \exp(-in\omega'_0 \Delta p t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-i\sqrt{\Omega_n^2} t - |n|\delta\omega t}}{n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega - \sqrt{\Omega_n^2}} + \frac{e^{i\sqrt{\Omega_n^2} t - |n|\delta\omega t}}{n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega + \sqrt{\Omega_n^2}} \right). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (2.36), получим

$$\begin{aligned}
 e^{in\omega_0 t} f_n(\Delta p, t) &= f_n(\Delta p, 0) \exp(-in\omega'_0 \Delta p t) - \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \\
 &\times \left( \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \frac{(n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega) \exp(-in\omega'_0 \Delta p t)}{(n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega)^2 - \Omega_n^2} \\
 &+ \frac{\Omega_n^2}{2n\omega'_0} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \left( \frac{e^{-i\sqrt{\Omega_n^2} t - |n|\delta\omega t}}{n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega - \sqrt{\Omega_n^2}} \right. \\
 &\left. + \frac{e^{i\sqrt{\Omega_n^2} t - |n|\delta\omega t}}{n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega + \sqrt{\Omega_n^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Второе и третье слагаемые в правой части этого выражения описывают влияние коллективных полей пучка на его расфазировку. Третье слагаемое затухает со временем, если параметры пучка находятся внутри границы области устойчивости. Амплитуда второго слагаемого не затухает вообще. Поэтому на больших временах ( $t \gg 1/(|n|\delta\omega - \Lambda)$ , где  $\Lambda$  определено в (2.34)), амплитуды гармоник функции распределения  $f_n(\Delta p, t)$  с точностью до экспоненциально малых слагаемых отличны от своих начальных значений  $f_n(\Delta p, 0)$  на величину ( $\delta f_n = f_n(\Delta p, t) - f_n(\Delta p, 0)$ ):

$$\begin{aligned}
 e^{in\omega_0 t} \delta f_n(\Delta p, t) &\simeq -\rho_{0n} \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \\
 &\times \frac{(n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega) \exp(-in\omega'_0 \Delta p t)}{(n\omega'_0 \Delta p + i|n|\delta\omega)^2 - \Omega_n^2}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

С той же точностью наведенные пучком поля (и гармоники  $\rho_n(t)$ ) в таком состоянии равны нулю. Кроме того, читатель легко может убедиться в том, что ширины гармоник  $f_n(\Delta p, t)$  с экспоненциальной точностью совпадают с  $\Delta$ . Поэтому формула (2.39) описывает те изменения функции распределения пучка, которые появляются в результате действия на частицы наведенных полей в предшествующие моменты времени. Частицы движутся в этих полях как во внешних. По этой причине решения уравнений Власова отражают выполнение теоремы Лиувилля. Об отличиях гармоник  $f_n(\Delta p, t)$  от

своих начальных значений можно судить по величине (рис. 1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f_n(\Delta p, t) - f_n(\Delta p, 0)}{f_n(\Delta p, 0)} \right| = \frac{2|\zeta_n||u|}{\sqrt{1+u^2}|(u+i)^2 - \zeta_n|}, \quad (2.40)$$

где

$$\zeta_n = \frac{\Omega_n^2}{n^2 \delta \omega^2}, \quad u = \frac{\Delta p}{\Delta}. \quad (2.41)$$

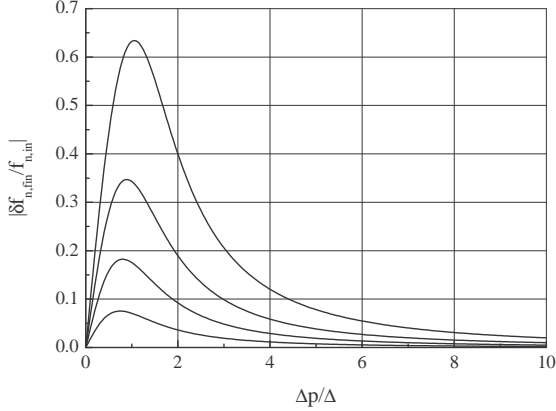


Рис. 1. Зависимость отношения конечного значения гармоник функции распределения несгруппированного пучка к их начальному значению ( $\delta f_{n,fin} = f_n(\Delta p, \infty) - f_n(\Delta p, 0)$ ) от импульса частиц ( $\Delta p/\Delta$ ). Лоренцево распределение по импульсам, внутри границы области устойчивости, сверху вниз  $\zeta_n = 1, 0.5, 0.25$  и  $0.1$

### 2.2.2. Прямоугольное распределение импульсов

Для пучка с прямоугольным распределением импульсов

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{2\Delta} \begin{cases} 1, & |\Delta p| \leq \Delta, \\ 0, & |\Delta p| > \Delta \end{cases} \quad (2.42)$$

и распределением начальных гармоник  $f_n(\Delta p, t)$  согласно (2.10) имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = \frac{1}{2\Delta} \delta(\Delta p + \Delta) - \frac{1}{2\Delta} \delta(\Delta p - \Delta) \quad (2.43)$$

и соответственно

$$\varepsilon = 1 - \frac{\Omega_n^2}{\Delta\omega_n^2 - (n\omega'_0\Delta)^2}. \quad (2.44)$$

Поэтому, например,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} &= \frac{e^{-in\omega_0 t}}{2\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{(\Delta\omega_n^2 - (n\omega'_0\Delta)^2) e^{-i\Delta\omega_n t}}{(\Delta\omega_n^2 - (n\omega'_0\Delta)^2 - \Omega_n^2)} \\ &\times \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{d\Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p}, \quad \text{Im}\Delta\omega_n > 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{e^{in\omega_0 t} \rho_n(t)}{\rho_{0n}} &= \frac{\zeta_n \exp(-iz\sqrt{\zeta_n + 1})}{4\sqrt{\zeta_n + 1}} \int_{-1}^1 \frac{du}{(\sqrt{\zeta_n + 1} - u)} \\ &+ \frac{\zeta_n \exp(iz\sqrt{\zeta_n + 1})}{4\sqrt{\zeta_n + 1}} \int_{-1}^1 \frac{du}{(\sqrt{\zeta_n + 1} + u)} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \frac{u^2 - 1}{u^2 - 1 - \zeta_n} \exp(-izu). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь

$$\zeta_n = \frac{\Omega_n^2}{(n\omega'_0\Delta)^2}, \quad z = tn\omega'_0\Delta. \quad (2.46)$$

Используя

$$\begin{aligned} \frac{u^2 - 1}{u^2 - 1 - \zeta_n} &= 1 - \frac{\zeta_n}{1 + \zeta_n - u^2}, \\ \frac{1}{1 + \zeta_n - u^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\zeta_n + 1}} \left( \frac{1}{\sqrt{\zeta_n + 1} - u} + \frac{1}{\sqrt{\zeta_n + 1} + u} \right) \end{aligned}$$

и выполнив элементарное интегрирование, получим

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} &= \frac{\sin z}{z} \\
 &+ \frac{\zeta_n}{2\sqrt{\zeta_n + 1}} \cos\left(z\sqrt{\zeta_n + 1}\right) \ln \frac{\sqrt{\zeta_n + 1} + 1}{\sqrt{\zeta_n + 1} - 1} \\
 &- \frac{\zeta_n}{2\sqrt{\zeta_n + 1}} \int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{\zeta_n + 1} - u} du \\
 &- \frac{\zeta_n}{2\sqrt{\zeta_n + 1}} \int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{\zeta_n + 1} + u} du.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Если влияние коллективных полей пучка мало ( $|\zeta_n| \ll 1$ ), то гармоники  $\rho_n(t)$  в этом выражении мало отличаются от вычисленных по формуле (2.11). Для пучка с сильной коллективной реакцией ( $|\zeta_n| \gg 1$ ) разложение выражения в правой части (2.47) по степеням  $1/\sqrt{\zeta_n + 1}$  дает:

$$\ln \frac{\sqrt{\zeta_n + 1} + 1}{\sqrt{\zeta_n + 1} - 1} \simeq \frac{2}{\sqrt{\zeta_n + 1}} + \frac{2}{3} \frac{1}{(\sqrt{\zeta_n + 1})^3}, \quad \zeta_n \gg 1,$$

и соответственно

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} &\simeq \frac{\sin z}{z} + \frac{\zeta_n}{\zeta_n + 1} \cos\left(z\sqrt{\zeta_n + 1}\right) \left(1 + \frac{1}{3(\zeta_n + 1)}\right) \\
 &- \frac{\zeta_n}{(\zeta_n + 1)} \int_0^1 \left(1 + \frac{u^2}{\zeta_n + 1}\right) \cos(zu) du,
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} &= \frac{\zeta_n}{\zeta_n + 1} \cos\left(z\sqrt{\zeta_n + 1}\right) \left(1 + \frac{1}{3(\zeta_n + 1)}\right) \\
 &- \frac{1}{(\zeta_n + 1)^2} \frac{\sin z}{z} - \frac{2\zeta_n}{z(\zeta_n + 1)^2} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

В этом случае когерентный сигнал пучка не затухает на больших временах ( $|z| \gg 1$ ). Незатухание сигнала пучка обусловлено отсутствием хвостов у прямоугольного распределения импульсов частиц. В соответствии с этим отсутствует и затухание Ландау продольных

когерентных колебаний. Читатель может легко проверить, что даже небольшое размытие границы в распределении по импульсам приведет к появлению затухания когерентного сигнала. Соответствующие декременты затухания Ландау будут определяться шириной размытия границы функции распределения частиц по импульсам.

### 2.2.3. Гауссово распределение импульсов

Для несгруппированного пучка с распределением импульсов

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right) \quad (2.49)$$

и распределением начальных гармоник  $f_n(\Delta p, 0)$  согласно

$$f_n(\Delta p, 0) = \frac{\rho_{0n}}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right) \quad (2.50)$$

пишем ( $u = \Delta p/\Delta$ )

$$\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 1 - \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0\Delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u \exp(-u^2/2)}{\Delta\omega_n - (n\omega'_0\Delta)u}, \quad (2.51)$$

или

$$\varepsilon(n, \Delta\omega_n) = 1 + \zeta_n - \zeta_n \Delta\omega_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)}{\Delta\omega_n - (n\omega'_0\Delta)u}. \quad (2.52)$$

Используя подстановки

$$\frac{1}{b} = -i \int_0^{\infty} ds e^{ibs}, \quad \text{Im} b > 0,$$

и

$$y_n = \frac{\Delta\omega_n}{|n|\delta\omega}, \quad \delta\omega = |\omega'_0|\Delta,$$



перепишем интеграл по  $u$  в правой части (2.52) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\Delta\omega_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)}{\Delta\omega_n - (n\omega'_0\Delta)u} \\
 &= -i \frac{\Delta\omega_n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} ds e^{is\Delta\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - i(n\omega'_0\Delta)su\right) du \\
 &= -iy_n \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2} + isy_n\right) ds.
 \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (2.52) дает

$$\varepsilon(n, y_n) = 1 + \zeta_n + i\zeta_n y_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}y_n^2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{iy_n}{\sqrt{2}}\right)\right), \quad (2.53)$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (2.54)$$

– интеграл вероятности. Заметим, что, хотя выражение в правой части (2.53) вычислялось в предположении  $\operatorname{Im}y_n > 0$ , оно определяет аналитическую функцию  $y_n$  во всей плоскости этой комплексной переменной.

Для вычисления гармоник  $\rho_n(t)$  здесь удобнее воспользоваться формулой (2.26), которая в принятых обозначениях записывается в виде ( $\operatorname{Im}y_n > 0$ )

$$\begin{aligned}
 e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) &= \rho_{0n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_n}{-2\pi i} \frac{e^{-izy_n}}{(y_n - au) \varepsilon(n, y_n)},
 \end{aligned} \quad (2.55)$$

где  $z = |n|\delta\omega t$ , а  $a = n\omega'_0/|n\omega'_0|$ . Напомним, что полученное выражение должно вычисляться внутри границы области устойчивости когерентных колебаний. Согласно (2.53) для пучка с гауссовым распределением импульсов положение такой границы в плоскости комплексной переменной  $\zeta_n$  определяется уравнением:

$$\zeta_n = -\frac{1}{1 + i\sqrt{\pi/2}y_n e^{-y_n^2/2} (1 + \operatorname{erf}(iy_n/\sqrt{2}))}, \quad \operatorname{Im}y_n = 0. \quad (2.56)$$

Как уже говорилось, выражение в правой части (2.55) вычисляется замыканием контура интегрирования по  $y_n$  в нижнюю полуплоскость  $y_n$  и вычислением вычетов в простых полюсах  $y_n = au$  и  $\varepsilon(n, y_n) = 0$ . С учетом (2.53) результат может быть записан в виде:

$$e^{in\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2} - izau\right)}{\varepsilon(n, au)} + R_n(z)$$

или, что то же,

$$e^{in\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2} - izu\right)}{\varepsilon(n, u)} + R_n(z), \quad (2.57)$$

где функция  $R_n(z)$  определяется вкладом полюсов в точках, являющихся корнями дисперсионного уравнения  $\varepsilon(n, y_n) = 0$ .

Простые выражения для амплитуд  $\rho_n(t)$  удается получить в двух предельных случаях. В первом предполагается, что коллективная реакция пучка мала настолько, что выполнено неравенство  $|\zeta_n| \ll 1$ . Тогда в интеграле по  $u$  в формуле (2.57) можно положить  $\varepsilon(n, u) \simeq 1$ . Оставшееся интегрирование по  $u$  дает гауссову функцию  $z$ :

$$e^{in\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} = e^{-z^2/2} + R_n(z).$$

Корни дисперсионного уравнения в этом случае записываются в виде  $y_n = x - ig$  и вычисляются в предположениях  $g \gg 1$  и  $g \gg |x|$ . В такой области параметров значения аргумента функции  $\operatorname{erf}(iy_n/\sqrt{2})$  велики. Поэтому можно воспользоваться асимптотическим разложением

$$\operatorname{erf}\left(\frac{iy_n}{\sqrt{2}}\right) \simeq 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + y_n^2}{iy_n^3} \exp\left(\frac{y_n^2}{2}\right).$$

Подставив это выражение в (2.53), получим приближенное дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(n, y_n) \simeq 1 - \frac{\zeta_n}{y_n^2} + iy_n \sqrt{2\pi} \zeta_n e^{-\frac{1}{2}y_n^2} = 0. \quad (2.58)$$

В области  $|\zeta_n| \ll 1$  и соответственно  $g \gg 1$ ,  $g \gg |x|$  при решении этого уравнения можно опустить слагаемое  $\zeta_n/y_n^2$ . В результате дисперсионное уравнение записывается в виде

$$1 + iy_n \sqrt{2\pi} \zeta_n e^{-\frac{1}{2}y_n^2} = 0,$$

или

$$g\sqrt{2\pi}|\zeta_n| \exp\left(\frac{g^2}{2} + igx + i \arg \zeta_n\right) = -1. \quad (2.59)$$

Решая это уравнение, находим когерентные сдвиги частоты коллективных мод

$$x_k = \frac{2\pi k + \pi - \arg \zeta_n}{g}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.60)$$

и декременты их затухания:

$$g^2 = \ln \frac{1}{2\pi|\zeta_n|^2 g^2}. \quad (2.61)$$

Последнее уравнение можно решать графически, или методом итераций. Так, результат первых трех итераций записывается в виде

$$g^2 \simeq g_i^2 = -\ln\left(2\pi|\zeta_n|^2 \ln\left(\frac{1}{2\pi|\zeta_n|^2} - \ln \frac{1}{2\pi|\zeta_n|^2}\right)\right). \quad (2.62)$$

На рис. 2 показано, что для пучка малой интенсивности использование итерационной формулы (2.62) приводит к относительной ошибке вычисления декрементов, не превышающей 6 % в диапазоне  $10^{-6} \leq |\zeta_n| \leq 0.2$ . При этом абсолютные величины декрементов затухания Ландау превышают величину  $|n|\delta\omega$  не более, чем в 5 раз (рис. 3). По этой причине использовавшиеся при вычислении корней дисперсионного уравнения условия  $g \gg 1$  и  $g \gg |x_k|$  оказываются выполненными лишь для моды  $k = 0$  и для значений  $|\zeta_n|$  вблизи нижней границы изменений этой переменной, показанных, например, на рис. 2 и 3. Для этого случая вычисление входящей в формулу (2.57)

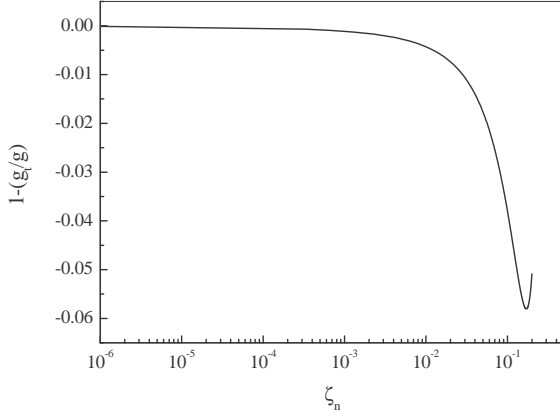


Рис. 2. Зависимость относительной ошибки вычисления декремента затухания Ландау  $1 - g_t/g$  от  $\zeta_n$ . Величина  $g$  вычислялась численным решением уравнения (2.61)

функции  $R_n(z)$  дает

$$R_n(z) = \exp\left(-gz - iz \frac{\pi - \arg \zeta_n}{g}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)}{\left(-ig + \frac{\pi - \arg \zeta_n}{g} - u\right) \left(\frac{d\varepsilon}{dy_n}\right)_{y_n = -ig}}.$$

Учитывая, что в этом полюсе

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dy_n} &= i\sqrt{2\pi}\zeta_n (1 - y_n^2) e^{-\frac{1}{2}y_n^2} \\ &= -\frac{(1 - y_n^2)}{y_n} \simeq i\frac{g^2 + 1}{g} \simeq ig, \end{aligned}$$

и пренебрегая в  $R_n(z)$  слагаемыми, пропорциональными более высоким степеням  $1/g$ , пишем

$$R_n(z) = -\frac{1}{g^2} \exp\left(-gz - iz \frac{\pi - \arg \zeta_n}{g}\right). \quad (2.63)$$

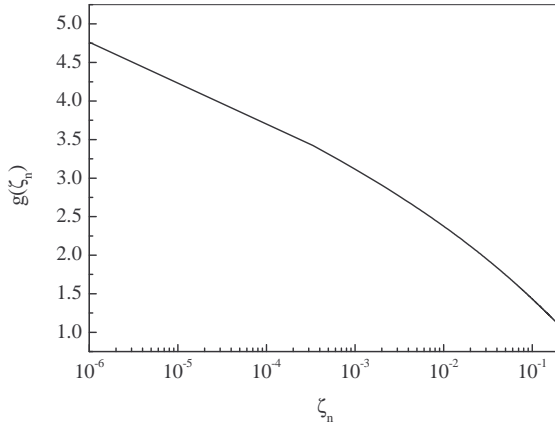


Рис. 3. Зависимость декремента затухания Ландау продольных когерентных колебаний пучка малой интенсивности от  $\zeta_n$

Подстановка этого выражения в формулу (2.57) дает

$$e^{in\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} \simeq \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) - \frac{1}{g^2} \exp\left(-gz - iz \frac{\pi - \arg \zeta_n}{g}\right). \quad (2.64)$$

Из-за быстрого убывания функции  $\exp(-z^2/2)$  вклад коллективной реакции пучка даже малой интенсивности в его когерентный сигнал может оказаться определяющим на больших временах ( $z > 2g$ ). Правда, сам когерентный сигнал пучка в этой области крайне мал.

В области асимптотически малых токов пучка интерференция мод с равными декрементами затухания Ландау, но с отличающимися когерентными сдвигами частоты  $x_k$ , приводит к появлению эха в когерентном сигнале. Так, если в формуле (2.60) положить, что величина  $g$  обеспечивает выполнение неравенства  $g \gg |x_k|$  для достаточно большого числа мод ( $|k| \leq K$ ,  $(g/2\pi) > K \gg 1$ ), то интерференция будет наблюдаться при такой интенсивности пучка, что

$$|\zeta_n| \ll \frac{\exp(-2\pi^2 K^2)}{(2\pi)^{3/2} K}. \quad (2.65)$$

Простой расчет ( $K \gg 1$ )

$$\begin{aligned}
 R_n(z) &= \rho_{0n} \frac{1}{ig\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \\
 &\times \sum_{k=-K}^K \frac{\exp(-gz - ix_k z)}{x_k - u + ig} \\
 &\simeq -\frac{\exp\left(-gz - iz\frac{\pi - \arg \zeta_n}{g}\right)}{g^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\frac{2\pi z}{g}k\right)}{1 - i\frac{2\pi k}{g^2}}
 \end{aligned}$$

приводит к выражению

$$\begin{aligned}
 R_n(z) &\simeq -\exp\left(-gz - iz\frac{\pi - \arg \zeta_n}{g}\right) \\
 &\times \left(\frac{1}{2\pi} - \exp(-g\delta z)\right), \quad 0 \leq \delta z \leq g,
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

где величина  $\delta z$  вычисляется на отрезках  $mg \leq z \leq (m+1)g$  согласно правилу  $\delta z = z - mg$ ,  $m$  – числа натурального ряда.

Перейдем к изучению второго предельного случая, когда параметры пучка таковы, что выполнено неравенство  $|\zeta_n| \gg 1$ . Поскольку в задачах о расфазировках параметры пучков должны находиться внутри границы области устойчивости когерентных колебаний, одновременно с условием  $|\zeta_n| \gg 1$  следует также требовать выполнения условий  $\operatorname{Re}\zeta_n > 0$  и  $|\operatorname{Re}\zeta_n| \gg |\operatorname{Im}\zeta_n|$ . В такой области параметров когерентные колебания пучка хорошо определены в том смысле, что величины когерентных сдвигов коллективных мод существенно превышают их декременты. Определив снова в дисперсионном уравнении (2.58)  $y_n = x - ig$  и положив  $g \ll |x|$ , перепишем это уравнение в виде

$$x^2 - \zeta_n - 2igx + i\sqrt{2\pi}\zeta_n x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0,$$

или ( $\operatorname{Re}\zeta_n > 0$ )

$$x^2 = \operatorname{Re}\zeta_n, \tag{2.67}$$

$$2gx = \sqrt{2\pi}\operatorname{Re}(\zeta_n)x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} - \operatorname{Im}\zeta_n. \tag{2.68}$$

Отсюда находим

$$x = \pm \sqrt{\operatorname{Re}\zeta_n}, \quad g = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{Re}(\zeta_n))^2 \exp\left(-\frac{\operatorname{Re}\zeta}{2}\right) \mp \frac{\operatorname{Im}\zeta_n}{2\sqrt{\operatorname{Re}\zeta_n}}. \quad (2.69)$$

Амплитуды когерентных колебаний рассчитываются по формуле (2.57). Простые вычисления приводят к результату

$$e^{i\omega_0 t} \frac{\rho_n(t)}{\rho_{0n}} \simeq \frac{G(z)}{\zeta_n} + e^{-gz} \cos\left(z\sqrt{\operatorname{Re}\zeta_n}\right), \quad (2.70)$$

где

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2} - iuz\right)}{1 + \frac{1}{\zeta_n} + iu\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{i u}{\sqrt{2}}\right)\right)}. \quad (2.71)$$

Приведенные выражения и графики на рис. 4 ясно показывают, что

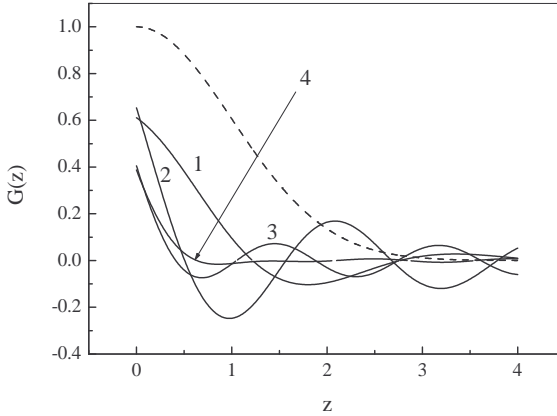


Рис. 4. Характер зависимости форм-фактора  $G(z)$  от времени ( $z$ ) и от величины когерентного сдвига частоты ( $\zeta_n$ , сплошные линии). Пунктирная кривая показывает затухание сигнала по гауссову закону ( $e^{-z^2/2}$ ). Кривая 1:  $\zeta_n = 1$ , 2:  $\zeta_n = 4$ , 3:  $\zeta_n = 9$  и 4:  $\zeta_n = 16$

в области параметров, где  $|\zeta_n| \gg 1$ , коллективная реакция пучка подавляет в когерентном сигнале вклад кинематической расфазировки. Согласно (2.70) главный вклад в когерентный сигнал здесь

вносит распространение по пучку когерентных колебаний. Декременты затухания таких колебаний экспоненциально малы по сравнению с величиной когерентного сдвига частоты (например, в формуле (2.69)).

### 3. Поперечные когерентные колебания несгруппированного пучка

Перейдем к изучению процессов расфазировки, которые проявляются при возбуждении в пучке поперечных когерентных колебаний. Чаще всего необходимость проведения таких расчетов связана с попытками предсказания или обработки результатов измерений экспериментов, в которых начальные поперечные когерентные колебания инициируются достаточно коротким ударом в вертикальном, или в горизонтальном направлении. Для простоты будем считать, что все частицы пучка испытывают удар одной и той же величины, а отклоняющее устройство таково, что сам удар сосредоточен, скажем, на азимуте  $\theta = 0$ . Тогда функции распределения частиц, прошедших на заданном обороте этот азимут, смещаются в фазовом пространстве в направлении  $p_y$  или  $p_x$  на заданную величину, скажем,  $\Delta$ . Если бы частоты обращения и бетатронных колебаний частиц были бы одинаковы, то в последующие времена пучок бы совершал поперечные когерентные колебания бесконечно долго. Разбросы же частот приводят к расфазировке колебаний в пучке и к затуханию когерентного сигнала.

Мы упростим вычисления, используя приближение сглаженной фокусировки. Тогда в несгруппированном пучке колебания отдельных частиц описываются формулами

$$\begin{aligned} y &= a_y \cos \psi_y, \quad p_y = -\frac{p\nu_{y0}}{R_0} a_y \sin \psi_y, \quad \dot{\psi}_y = \omega_0(\Delta p)\nu_y, \\ x &= a_x \cos \psi_x, \quad p_x = -\frac{p\nu_{y0}}{R_0} a_x \sin \psi_x, \quad \dot{\psi}_x = \omega_0(\Delta p)\nu_x, \\ \theta &= \omega_0 t + \phi, \quad \dot{\phi} = \omega'_0 \Delta p, \quad \frac{d\Delta p}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$



Как и прежде,  $\Delta p = p - p_0$ , где  $p_0$  – некоторое среднее значение импульса частиц в пучке,  $\nu_{y0}$  и  $\nu_{x0}$  – безразмерные частоты бетатронных колебаний, вычисленные для линейной фокусировки кольца и для частицы с импульсом  $p_0$ . Амплитуды колебаний  $a_{x,y}$  связаны с переменными действия этих колебаний соотношениями

$$I_y = \frac{p\nu_{y0}a_y^2}{2R_0}, \quad I_x = \frac{p\nu_{x0}a_x^2}{2R_0}. \quad (3.2)$$

Формулы (3.1) и (3.2) осуществляют каноническое преобразование к переменным действие-фаза невозмущенных колебаний частиц. При этом переменные действие  $I_{y,x}$ , а также переменная  $\Delta p$  сохраняются. Мы предполагаем, что удар по пучку наносится на том же азимуте, на котором наблюдаются когерентные колебания. Для простоты мы также предполагаем, что значение дисперсионной функции накопителя в этой точке равно нулю.

### 3.1. Колебания пучка малой интенсивности

Амплитуды поперечных когерентных колебаний пучка малой интенсивности вычисляются пренебрегая их изменениями под действием наведенных пучком полей. В результате функция распределения пучка определяется уравнением, аналогичным уравнению (2.2). Такие уравнения оказываются особенно простыми, если в качестве координат частиц в фазовом пространстве использовать переменные действие-угол невозмущенных колебаний. При этом вместо (2.1) пишем

$$f(I_y, I_x, \Delta p, \psi_y, \psi_x, \theta, t) = f_0(I_y, I_x, \Delta p) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \quad (3.3)$$

$$\times \sum_{m_y, m_x \neq 0} f_{m_y, m_x, n}(I_y, I_x, \Delta p, t) \exp(im_y\psi_y + im_x\psi_x),$$

а вместо (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(\Delta p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \omega_y(I_y, I_x, \Delta p) \frac{\partial f}{\partial \psi_y} + \omega_x(I_y, I_x, \Delta p) \frac{\partial f}{\partial \psi_x} = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку функция распределения является интегралом движения, решения этого уравнения записываются в виде

$$f = f_{in}(I_y, I_x, \Delta p, \psi_y - \omega_y t, \psi_x - \omega_x t, \theta - \omega_0(\Delta p)t). \quad (3.5)$$

Нулевая гармоника  $f$  описывает пучок без когерентных колебаний. Она не зависит от фаз колебаний и азимута. Остальные гармоники в (3.3) описывают когерентные колебания различной мультипольности в фазовом пространстве пучка. Номер  $n$  описывает азимутальную модуляцию амплитуд когерентных колебаний. Продольные когерентные колебания, которые мы обсуждали в предыдущих разделах, соответствуют набору  $m_y = m_x = 0$ . Поперечные когерентные колебания описываются наборами гармоник, в которых хотя бы одно из чисел  $m_y$  или  $m_x$  не равно нулю. Набор  $|m_y| + |m_x| = 1$  соответствует дипольным когерентным колебаниям пучка. Эти колебания одномерные. Они совершаются лишь в вертикальной или горизонтальной плоскости. Квадрупольные поперечные колебания соответствуют набору  $|m_y| + |m_x| = 2$ . Они могут совершаться в вертикальной или горизонтальной плоскости с двойной частотой бетатронных колебаний, либо одновременно в обеих плоскостях с частотой равной сумме или разности частот бетатронных колебаний. Согласно (3.3), вообще, возможны поперечные когерентные колебания произвольной мультипольности.

Мы конкретизируем последующие вычисления, предположив, что до удара частицы в пучке были распределены по гауссову закону

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{7/2} I_{0y} I_{0x} p \sigma_p} \exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2 \sigma_p^2}\right), \quad (3.6)$$

а также, что удар производится, например, в вертикальном направлении с амплитудой  $\Delta_y$ . Поскольку все частицы пучка испытывают удар равной амплитуды, функция распределения пучка после удара записывается в виде

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{7/2} I_{0y} I_{0x} p \sigma_p} \exp\left(-\frac{I_y(p_y + \Delta_y)}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2 \sigma_p^2}\right). \quad (3.7)$$

Согласно (3.1) и (3.2) пишем

$$I_y(p_y) = \frac{p\nu_{y0}}{2R_0} y^2 + \frac{R_0}{2p\nu_{0y}} p_y^2,$$

или

$$I_y(p_y + \Delta_y) = I_y(p_y) + \frac{R_0 \Delta_y^2}{2p\nu_{0y}} - \Delta_y a_y \sin \psi_y. \quad (3.8)$$

Подставив это выражение в (3.7) и используя выражение (3.5), находим функцию распределения пучка после удара

$$f = \frac{\exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2 \sigma_p^2} - \frac{R_0 \Delta_y^2}{2p\nu_{0y} I_{0y}}\right)}{(2\pi)^{7/2} I_{0y} I_{0x} p \sigma_p} \times \exp\left(\frac{\Delta_y a_y \sin(\psi_y - \omega_y t)}{I_{0y}}\right). \quad (3.9)$$

Поскольку мы предположили, что все частицы пучка, проходя корректор, получают один и тот же удар, такая функция распределения имеет лишь одну азимутальную гармонику с  $n = 0$  и одну гармонику фаз горизонтальных колебаний с  $m_x = 0$ . Гармоники же фаз вертикальных бетатронных колебаний выражаются через функции Бесселя мнимого аргумента  $I_{m_y}(z)$ :

$$\begin{aligned} A_{m_y} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} \exp\left(\frac{\Delta_y a_y \sin \psi_y}{I_{0y}} - im_y \psi_y\right) \\ &= J_{m_y}\left(\frac{-i\Delta_y a_y \sin \psi_y}{I_{0y}}\right) = (-i)^{m_y} I_{m_y}\left(\frac{\Delta_y a_y}{I_{0y}}\right). \end{aligned}$$

Учитывая это и определив

$$\chi = \frac{R_0 \Delta_y^2}{2p\nu_{0y} I_{0y}} = \frac{\beta_{av} \Delta_y^2}{2\epsilon_y p^2}, \quad (3.10)$$

где  $\beta_{av} = R_0/\nu_{0y}$ ,  $I_{0y} = p\epsilon_y$ , а  $\epsilon_y$  – вертикальный эмиттанс, который пучок имел до удара, мы можем переписать разложение (3.3) в виде

$$\begin{aligned} f &= \frac{\exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2 \sigma_p^2} - \chi\right)}{\sqrt{2\pi} I_{0y} I_{0x} p \sigma_p} I_0\left(2\sqrt{\chi \frac{I_y}{I_{0y}}}\right) \\ &+ \frac{\exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2 \sigma_p^2} - \chi\right)}{\sqrt{2\pi} I_{0y} I_{0x} p \sigma_p} \sum_{m_y=-\infty}^{\infty} I_{|m_y|}\left(2\sqrt{\chi \frac{I_y}{I_{0y}}}\right) \\ &\times \exp\left(im_y\left(\psi_y - \omega_y t - \frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полученное выражение может быть использовано для вычисления моментов функции распределения  $f$ . Наиболее часто в экспериментах с ударом пучка измеряется дипольный момент в направлении удара: <sup>3</sup>

$$d_y = \int_0^\infty dI_x dI_y \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \int_0^{2\pi} d\psi_x d\psi_y \int_0^{2\pi} d\theta y f. \quad (3.12)$$

Подставив сюда разложение (3.11) и используя (3.1), получим следующее выражение для дипольного момента пучка:

$$\begin{aligned} d_y(t) = & - \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Delta p}{\sqrt{2\pi p \sigma_p}} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2p^2 \sigma_p^2} - \chi\right) \int_0^\infty \frac{dI_x}{I_{0x}} e^{-I_x/I_{0x}} \\ & \times \int_0^\infty \frac{dI_y}{I_{0y}} \sqrt{\frac{2R_0 I_y}{p\nu_{y0}}} e^{-I_y/I_{0y}} I_1\left(2\sqrt{\chi \frac{I_y}{I_{0y}}}\right) \sin(\omega_y t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если частоты вертикальных колебаний частиц пучка одинаковы, то это выражение описывает незатухающие колебания вертикального дипольного момента пучка. Затухание когерентного сигнала становится возможным за счет разбросов частот колебаний частиц. Как уже говорилось, частоты бетатронных колебаний могут отличаться из-за зависимости от импульса частиц, либо за счет возмущений бетатронных колебаний частиц, например, октупольной нелинейностью фокусировки накопителя. Оба эти случая можно описать выражением

$$\omega_y = \omega_0 \nu_{y0} + \omega_0 (\nu_{y0} \alpha_p + \xi_y) \frac{\Delta p}{p} + \omega_0 (a I_y - b I_x), \quad (3.14)$$

где величина  $\xi_y = (\partial \nu_y / \partial \ln \Delta p)$  называется хроматизмом вертикальных бетатронных колебаний, а постоянные  $a$  и  $b$  задают вклады в  $\omega_y$

---

<sup>3</sup> В реальных машинах вертикальные и горизонтальные бетатронные колебания частиц всегда связаны. Из-за этого, например, удар в вертикальном направлении возбуждает также и горизонтальные бетатронные когерентные колебания. Измерения этих колебаний, помимо прочего, позволяют измерить коэффициент связи колебаний.

октупольных полей фокусировки (вычисление этих величин описано, например, в [3]<sup>4</sup>). Подставив (3.14) в формулу (3.13) и определив  $\theta = \omega_0 t$ , получим

$$d_y(\theta) = -\frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \text{Im}D(\theta), \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} D(\theta) &= e^{i\nu_{y0}\theta} \int_0^\infty dx \exp(-x(1 + i\theta\delta\nu_{yx})) \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + iu\theta(\nu_{y0}\alpha_p + \xi_y)\sigma_p\right) \\ &\times \frac{e^{-\chi}}{\sqrt{\chi}} \int_0^\infty dy \sqrt{y} I_1(2\sqrt{\chi y}) \exp(-y(1 - i\theta\delta\nu_{yy})), \end{aligned} \quad (3.16)$$

а  $\delta\nu_{yy} = aI_{0y}$ ,  $\delta\nu_{yx} = bI_{0x}$  – парциальные разбросы безразмерных частот вертикальных бетатронных колебаний за счет октупольных полей. В выражении (3.16) интеграл

$$S = \frac{1}{\sqrt{\chi}} \int_0^\infty dy \sqrt{y} I_1(2\sqrt{\chi y}) \exp(-y(1 - i\theta\delta\nu_{yy}))$$

вычисляется с использованием разложения функции  $I_1(z)$  в степенной ряд:

$$I_1(2\sqrt{\chi y}) = \sqrt{\chi y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\chi y)^k}{k!(k+1)!}.$$

Поэтому, например,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi^k}{k!(k+1)!} \int_0^\infty dy y^{k+1} \exp(-y(1 - i\theta\delta\nu_{yy})) \\ &= \frac{1}{(1 - i\theta\delta\nu_{yy})^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi^k}{k!(k+1)!} \frac{(k+1)!}{(1 - i\theta\delta\nu_{yy})^k}, \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> Если говорить точнее и не ограничиваться первыми приближениями теории возмущений, то в постоянные  $a$  и  $b$  также вносят вклады секступоли и другие мультиполи фокусирующих полей

или

$$S = \frac{1}{(1 - i\theta\delta\nu_{yy})^2} \exp\left(\frac{\chi}{1 - i\theta\delta\nu_{yy}}\right). \quad (3.17)$$

Подставив это выражение в (3.16) и вычислив оставшиеся интегралы, получим

$$D(\theta) = \frac{1}{(1 - i\theta\delta\nu_{yy})^2 (1 + i\theta\delta\nu_{yx})} \exp\left(i\nu_{y0}\theta + \chi \frac{i\theta\delta\nu_{yy}}{(1 - i\theta\delta\nu_{yy})}\right) \\ \times \exp\left(-\frac{\theta^2\sigma_p^2(\nu_{y0}\alpha_p + \xi_y)^2}{2}\right),$$

или

$$D(\theta) = \frac{\exp(i\nu_{y0}\theta + i\delta\phi_y(\theta))}{(1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2) \sqrt{1 + (\theta\delta\nu_{yx})^2}} \quad (3.18) \\ \times \exp\left(-\chi \frac{(\theta\delta\nu_{yy})^2}{1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2}\right) \\ \times \exp\left(-\frac{\theta^2\sigma_p^2(\nu_{y0}\alpha_p + \xi_y)^2}{2}\right),$$

где

$$\delta\phi_y(\theta) = \chi \frac{\theta\delta\nu_{yy}}{1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2} - \arctan(\theta\delta\nu_{yx}) + 2 \arctan(\theta\delta\nu_{yy}). \quad (3.19)$$

В накопителях с жесткой фокусировкой часто выполняется условие

$$|\xi_y| \gg \nu_{y0}\alpha_p.$$

Оно позволяет еще более упростить формулу (3.18), написав

$$D(\theta) = \frac{\exp(i\nu_{y0}\theta + i\delta\phi_y(\theta))}{(1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2) \sqrt{1 + (\theta\delta\nu_{yx})^2}} \quad (3.20) \\ \times \exp\left(-\chi \frac{(\theta\delta\nu_{yy})^2}{1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2} - \frac{\theta^2\sigma_p^2\xi_y^2}{2}\right).$$

Подставив это выражение в (3.15), получим окончательно

$$d_y(\theta) = -\frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \frac{\sin(\nu_{y0}\theta + \delta\phi_y(\theta))}{(1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2) \sqrt{1 + (\theta\delta\nu_{yx})^2}} \quad (3.21)$$

$$\times \exp\left(-\chi \frac{(\theta\delta\nu_{yy})^2}{1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2} - \frac{\theta^2 \sigma_p^2 \xi_y^2}{2}\right).$$

Видно, что разбросы частот бетатронных колебаний приводят к затуханию когерентного сигнала пучка и к модуляции фазы этого сигнала. При этом на малых временах ( $\theta\delta\nu_{yy} \ll 1$ ) действие октупольных полей приводит к затуханию амплитуды колебаний по гауссову закону:

$$d_y(\theta) \simeq -\frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \sin(\nu_{y0}\theta + \delta\phi_y(\theta)) \exp\left(-\frac{\chi(\theta\delta\nu_{yy})^2}{2} - \frac{\theta^2 \sigma_p^2 \xi_y^2}{2}\right), \quad (3.22)$$

а модуляция фазы

$$\delta\phi_y(\theta) = (\chi\delta\nu_{yy} + 2\delta\nu_{yy} - \delta\nu_{yx})\theta$$

сводится к появлению сдвига частоты когерентного сигнала относительно частоты  $\nu_{y0}$  на величину

$$\Delta\nu_y = \chi\delta\nu_{yy} + 2\delta\nu_{yy} - \delta\nu_{yx}. \quad (3.23)$$

Эта величина зависит от амплитуды удара  $\Delta_y$  и от силы октупольных полей. На больших временах ( $\theta\delta\nu_{yy} \gg 1$ ) гауссово затухание когерентного сигнала сохраняется лишь за счет хроматической расфазировки бетатронных колебаний, а вклады октупольных полей приводят к убыванию амплитуды колебаний по степенному закону:

$$d_y(\theta) \simeq -\frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \frac{\sin(\nu_{y0}\theta + \delta\phi_y(\theta))}{(1 + (\theta\delta\nu_{yy})^2) \sqrt{1 + (\theta\delta\nu_{yx})^2}} \quad (3.24)$$

$$\times \exp\left(-\chi - \frac{\theta^2 \sigma_p^2 \xi_y^2}{2}\right).$$

При этом ( $\theta\delta\nu_{yy} \gg 1$ ,  $\theta\delta\nu_{yx} \gg 1$ )

$$\delta\phi_y(\theta) \simeq \frac{\chi}{\theta\delta\nu_{yy}} + \frac{\pi}{2}. \quad (3.25)$$

Замена гауссова распределения импульсов в пучке на любое другое очевидным образом меняет зависимость дипольного момента от времени (см. (3.16)). Так, в случае лоренцева распределения гауссово затухание в формуле (3.21) меняется на экспоненциальное, в случае прямоугольного распределения (2.42), либо любого распределения с разрывами, затухание амплитуды дипольного момента сопровождается его эхом.

### 3.2. Дипольные колебания пучка конечной интенсивности

Действие на частицы наведенных пучком полей может изменить характер затухания его поперечных когерентных колебаний. Поскольку зачастую пучок наводит поля в диссипативных элементах вакуумной камеры, взаимодействие с наведенными полями может приводить к неустойчивости его поперечных когерентных колебаний. Затухание Ландау неустойчивых когерентных мод устанавливает границу области устойчивости поперечных когерентных колебаний пучка. В этой связи становится целесообразным требование того, чтобы параметры пучка находились бы внутри границы области устойчивости его когерентных колебаний.

#### 3.2.1. Гармоники функции распределения

Мы упростим вычисления, предположив, что удар инициирует в пучке малые поперечные когерентные колебания, допускающие их описание линеаризованным уравнением Власова<sup>5</sup>. Пусть, например,  $F_y$  – вертикальная компонента силы, с которой наведенные поля действуют на частицы пучка. Тогда согласно [2] (или, [1]) линеаризованное уравнение Власова, записанное в переменных действие-фаза

---

<sup>5</sup> Напомним, что малость колебаний в действительности предполагает лишь малость когерентных сдвигов частот. При заданных значениях  $\nu_{x0}$  и  $\nu_{y0}$ , они не должны превосходить расстояние до ближайшего работающего машинного нелинейного резонанса.



невозмущенных колебаний и в первом приближении метода усреднений, приводит к следующим уравнениям для гармоник функции распределения в разложении (3.3):

$$\frac{\partial f_{mn}}{\partial t} + i\omega_{mn}f_{mn} + \overline{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi_y} F_y\right)}_{mn} \frac{\partial f_0}{\partial I_y} = 0. \quad (3.26)$$

Здесь символ  $\overline{(\dots)}$  означает усреднение по быстрым осцилляциям, а  $\omega_{mn} = n\omega_0(\Delta p) + m_y\omega_y$ . Если сила  $F_y$  зависит от координат частиц по какому-либо нелинейному закону, то выписанное уравнение описывает вертикальные когерентные колебания пучка произвольной мультипольности. В приближении сглаженной фокусировки и для дипольных когерентных колебаний ( $m_x = 0$ ,  $m_y = \pm 1$ ) уравнение (3.26) записывается в виде

$$\frac{\partial f_{mn}}{\partial t} + i\omega_{mn}f_{mn} + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi_y}\right)_{m_y} \overline{(F_y)_n} \frac{\partial f_0}{\partial I_y} = 0,$$

или, учитывая, что

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \psi_y}\right)_{m_y} = im_y \sqrt{\frac{I_y R_0}{2p\nu_{y0}}},$$

в виде

$$\frac{\partial f_{mn}}{\partial t} + i\omega_{mn}f_{mn} + im_y \sqrt{\frac{I_y R_0}{2p\nu_{y0}}} \overline{(F_y)_n} \frac{\partial f_0}{\partial I_y} = 0. \quad (3.27)$$

Такое уравнение решается использованием преобразования Фурье по времени. Определив

$$f_{mn}(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} f_{mn}(t), \quad \text{Im}\omega > 0,$$

пишем

$$(\omega - \omega_{mn})f_{mn}(\omega) = if_{mn}^{(0)}(I) + m_y \sqrt{\frac{I_y R_0}{2p\nu_{y0}}} \overline{(F_y)_n}(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial I_y}, \quad (3.28)$$

где  $f_{mn}^{(0)}(I)$  – начальные значения гармоник функции распределения пучка. Чтобы избежать громоздких вычислений наведенных пучком

полей, мы примем представление  $\overline{(F_y)_n(\omega)}$ , использующее понятие поперечного импеданса связи  $(Z_n^\perp(\omega))$  пучка с окружающими его электродами. По аналогии с формулой (2.17), предполагая нерезонантность взаимодействия пучка с окружающими электродами (см., например, в [1]), пишем

$$\begin{aligned} \overline{(F_y)_n(\omega)} &= -\frac{Ne^2\omega_0 Z_n^\perp(m_y\nu_{y0} + n\omega_0)}{\Pi} \\ &\times \int_0^\infty dI_x \int_0^\infty dI_y \sqrt{\frac{I_y R_0}{2p\nu_{y0}}} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p f_{mn}(\omega). \end{aligned} \quad (3.29)$$

В этой формуле считается, что импеданс  $Z_n^\perp(\omega)$  является плавной функцией частоты  $\omega$ , допускающей замену точного значения  $\omega$  его приближенным значением  $\omega \simeq \omega_0(m_y\nu_{y0} + n)$ . В более общем плане (например, в [2]), понятие поперечного импеданса связи пучка адекватно описывает ту часть полей пучка, которые наводятся в окружающих электродах его продольным движением. При этом соответствующие гармоники возбуждающего поля тока пропорциональны произведению дипольного момента и линейной плотности пучка, как это отражено в формуле (3.29). При обсуждении продольных когерентных колебаний мы уже сталкивались с подобными (продольными) наведенными полями (например, в формуле (2.17)). Оказывается, что аналогия формул (3.29) и (2.17) не является чисто формальной. Вычисление наведенных полей пучка в терминах функций Грина соответствующих электромагнитных задач показывает, что в условиях доминантности продольных токов пучка в наведенных им полях величины  $Z_n(\omega)$  в формуле (2.17) и  $Z_n^\perp(\omega)$  в формуле (3.29) связаны соотношением (теорема Пановского - Венцеля):

$$Z_n^\perp(\omega) = \frac{-iv}{\omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} Z_n(y, y', \omega) \right)_{\mathbf{r}_\perp=0}, \quad (3.30)$$

где символ  $(X)_{\mathbf{r}_\perp=0}$  означает вычисление величины  $X$  на замкнутой орбите. Для участков вакуумной камеры, поперечные сечения которых близки к круговому, оценка в (3.30) производных по порядку величины позволяет написать

$$Z_n^\perp(\omega) \simeq \frac{v}{l_\perp^2} \left( \frac{-iZ_n(\omega)}{\omega} \right). \quad (3.31)$$

Здесь  $l_{\perp}$  – радиус поперечного сечения камеры, а функция  $Z_n(\omega)$  вычисляется на замкнутой орбите.

Для краткости записей обозначим  $I \equiv \{I_x, I_y, \Delta p\}$ . Тогда подстановка выражения (3.29) в уравнение (3.28) дает

$$f_{mn}(\omega) = \frac{if_{mn}^{(0)}(I)}{(\omega - \omega_{mn})} - \frac{m_y N e^2 \omega_0 Z_n^{\perp}(m_y \omega_{y0} + n \omega_0)}{\Pi(\omega - \omega_{mn})} \quad (3.32)$$

$$\times \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \sqrt{\frac{I_y R_0}{2p\nu_{y0}}} \int_0^{\infty} dI'_x \int_0^{\infty} dI'_y \sqrt{\frac{I'_y R_0}{2p\nu_{y0}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' f_{mn}(\omega).$$

Обозначив

$$\Omega_{mn} = m_y \frac{N e^2 \omega_0 Z_n^{\perp}(m_y \omega_{y0} + n \omega_0)}{4\pi p \nu_{y0}}, \quad (3.33)$$

перепишем  $f_{mn}$  в виде

$$f_{mn}(\omega) = \frac{if_{mn}^{(0)}(I)}{(\omega - \omega_{mn})} - \frac{\Omega_{mn}}{\omega - \omega_{mn}} \sqrt{I_y} \frac{\partial f_0}{\partial I_y} C_{mn}(\omega). \quad (3.34)$$

Подставив это выражение в (3.32), найдем

$$C_{mn}(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_{mn}(\omega)} \int_0^{\infty} dI_x dI_y \sqrt{I_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{if_{mn}^{(0)}(I)}{(\omega - \omega_{mn})}, \quad (3.35)$$

где

$$\varepsilon_{mn}(\omega) = 1 + \Omega_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \int_0^{\infty} dI_x dI_y \frac{I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y}}{\omega - \omega_{mn}}. \quad (3.36)$$

Величина  $\Omega_{mn}$  равна когерентному сдвигу частоты монохроматического несгруппированного пучка. Зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени вычисляются использованием обратного преобразования Фурье:

$$f_{mn}(I, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_{mn}(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0. \quad (3.37)$$

### 3.2.2. Дипольный момент пучка после удара

Применим полученные формулы для выяснения влияния коллективной реакции пучка на зависимости его дипольного момента от времени в экспериментах с поперечным ударом пучка, описанном в разделе 3.1. Согласно формуле (3.11) сразу после удара гармоники функции распределения равны:

$$f_0 = \frac{\exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2\sigma_p^2} - \chi\right)}{\sqrt{2\pi}I_{0y}I_{0x}p\sigma_p} I_0 \left(2\sqrt{\chi\frac{I_y}{I_{0y}}}\right) \quad (3.38)$$

и ( $m_x = 0$ ,  $m_y = \pm 1$ ,  $n = 0$ )

$$f_{0,\pm 1,0}^{(0)}(I) = \mp i \frac{\exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}} - \frac{\Delta p^2}{2p^2\sigma_p^2} - \chi\right)}{\sqrt{2\pi}I_{0y}I_{0x}p\sigma_p} I_1 \left(2\sqrt{\chi\frac{I_y}{I_{0y}}}\right). \quad (3.39)$$

По условиям формирования удара пучка остальные азимутальные гармоники  $f^{(0)}(I)$  равны нулю. Далее, пишем

$$\begin{aligned} d_y &= \int_0^\infty dI_x dI_y \sqrt{\frac{I_y R_0}{2p\nu_{y0}}} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p (f_{0,1,0}(I, t) + f_{0,-1,0}(I, t)) \\ &= \int_0^\infty dI_x dI_y \sqrt{\frac{2I_y R_0}{p\nu_{y0}}} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \operatorname{Re} f_{0,1,0}(I, t), \end{aligned}$$

или, с учетом формул (3.37), (3.34) и (3.35),

$$\begin{aligned} d_y &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{-2\pi i} e^{-i\omega t} \int_0^\infty dI_x \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^\infty dI_y \sqrt{\frac{2I_y R_0}{p\nu_{y0}}} \frac{f_{0,1,0}^{(0)}(I)}{(\omega - \omega_y)} \right\} \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{-2\pi i} e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{\varepsilon_{0,1,0}(\omega)} - 1 \right) \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^\infty dI_x \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \int_0^\infty dI_y \sqrt{\frac{2I_y R_0}{p\nu_{y0}}} \frac{f_{0,1,0}^{(0)}(I)}{(\omega - \omega_y)} \right\}. \end{aligned}$$

После сокращения подобных слагаемых это выражение записывается в виде

$$d_y = \sqrt{\frac{2R_0}{p\nu_{y0}}} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty dI_x \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \int_0^\infty dI_y \sqrt{I_y} f_{0,1,0}^{(0)}(I) \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_y)\varepsilon_{0,1,0}(\omega)} \right\}, \quad (3.40)$$

где

$$\varepsilon_{0,1,0}(\omega) = 1 + \Omega_{0,1,0} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \int_0^\infty dI_x dI_y \frac{I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y}}{\omega - \omega_y}, \quad \operatorname{Im}\omega > 0. \quad (3.41)$$

Для получения окончательных выражений следует подставить в эти формулы гармоники  $f_0$  и  $f_{0,\pm 1,0}^{(0)}(I)$  из (3.38), (3.39) и выполнить необходимые интегрирования. Используя (3.10), пишем

$$d_y = \frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \int_{-\infty}^\infty \frac{du e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dx e^{-x} \int_0^\infty dy \sqrt{\frac{y}{\chi}} e^{-y-x} \\ \times I_1(2\sqrt{\chi y}) \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_y)\varepsilon_{0,1,0}(\omega)}. \quad (3.42)$$

В этом выражении интеграл по  $\omega$  вычисляется замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $\omega$  и вычислением вычетов подынтегрального выражения в простых полюсах  $\omega = \omega_y$  и  $\varepsilon_{0,1,0}(\omega) = 0$ . По аналогии с формулой (2.57) результат может быть записан в виде

$$d_y = \frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \int_{-\infty}^\infty \frac{du e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dx e^{-x} \\ \times \int_0^\infty dy \sqrt{\frac{y}{\chi}} e^{-y-x} I_1(2\sqrt{\chi y}) \operatorname{Im} \frac{e^{-i\omega_y t}}{\varepsilon_{0,1,0}(\omega_y)} + R_y, \quad (3.43)$$

где функция  $R_y$  описывает вклады коллективных мод в дипольный момент пучка:

$$R_y = \frac{R_0 \Delta_y}{p\nu_{y0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-x} \int_0^{\infty} dy \sqrt{\frac{y}{\chi}} e^{-y-\chi} \quad (3.44)$$

$$\times I_1(2\sqrt{\chi y}) \operatorname{Im} \frac{e^{-i\omega_r t}}{(\omega_r - \omega_y) \left( \frac{\partial \varepsilon_{0,1,0}(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_r}}.$$

Здесь  $\omega_r$  – корень дисперсионного уравнения

$$\varepsilon_{0,1,0}(\omega_r) = 0. \quad (3.45)$$

Если дисперсионное уравнение имеет несколько корней, то в правой части формулы (3.44) следует учесть вклады всех этих корней.

Согласно выражению (3.43) характер зависимости дипольного момента пучка после удара и влияния на эту зависимость коллективной реакции пучка, в общем случае, определяется соотношением величин когерентного сдвига частот ( $|\Omega_{mn}|$ ) и соответствующего разброса частот некогерентных колебаний частиц ( $\delta\omega$ ). Если число частиц в пучке мало ( $|\Omega_{mn}| \ll \delta\omega$ ), то мы можем положить в первом слагаемом в правой части (3.43)  $\varepsilon_{0,1,0}(\omega_y) = 1$ . Тогда, определяя, например,  $\omega_y$  разложением (3.14), мы получим в качестве вклада этого слагаемого выражение (3.21). Вклад же коллективной реакции пучка в таком случае определяется затуханием Ландау коллективных мод. Как мы уже видели в разделе (2.2.3.), в области параметров, где  $|\Omega_{mn}| \ll \delta\omega$ , величины декрементов затухания Ландау, вообще говоря, превышают разброс частот в пучке ( $\delta\omega$ ). Причем это превышение тем больше, чем меньше ток пучка (чем меньше отношение  $|\Omega_{mn}|/\delta\omega$ ). По этим причинам можно ожидать, что формула (3.21) будет правильно описывать затухание дипольного момента несгруппированного пучка малой интенсивности на отрезках времени, которые достаточно удалены от момента удара ( $\delta\omega t \geq 1$ ). Описание же начального затухания дипольного момента даже для пучков малой интенсивности требует учета затухания Ландау мод пучка.

Зависимости от времени дипольного момента в пучке большой интенсивности ( $|\Omega_{mn}| \gg \delta\omega$ ) существенно определяются вкладами

его коллективных полей. Согласно формуле (3.43) эти поля заметно подавляют вклады в дипольный момент от кинематической расфазировки пучка. Частоты модуляций когерентного сигнала будут определяться величинами истинного когерентного сдвига частоты дипольной моды пучка ( $\text{Re}\omega_r$ ), а скорости уменьшения амплитуд колебаний дипольного момента – декрементами затухания Ландау ( $-\text{Im}\omega_r$ ). Напомним, что эти декременты тем меньше, чем ближе параметры пучка к границе области устойчивости когерентных колебаний пучка.

### 3.2.3. Условия устойчивости поперечных когерентных колебаний

Как мы уже знаем, увеличение интенсивности пучка может существенно изменить результаты наблюдений его когерентных колебаний. Поэтому полезно обсудить особенности дисперсионных свойств поперечных когерентных колебаний пучка, испытавшего удар в поперечном направлении. Стационарное распределение частиц в таком пучке описывается функцией распределения (3.38). Правая часть в этом выражении монотонно уменьшается при увеличении амплитуд горизонтальных колебаний частиц, или отклонения импульса частицы от его равновесного значения в пучке. Монотонность же распределения частиц по амплитудам вертикальных колебаний зависит от амплитуды удара  $\chi$ . Согласно (3.38) это распределение можно определить выражением

$$\Phi(I_y) = \frac{\exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \chi\right)}{I_{0y}} I_0 \left(2\sqrt{\chi \frac{I_y}{I_{0y}}}\right). \quad (3.46)$$

Оно может иметь максимум при некотором значении  $I_y > 0$ , если амплитуда удара  $\beta_{av}\Delta_y^2/(2p^2)$  превышает вертикальный эмиттанс пучка  $\chi > 1$  (рис. 5). Как известно, в таких условиях решение дисперсионных уравнений может предсказывать антизатухание Ландау когерентных колебаний при соответствующем знаке когерентного сдвига частоты  $\text{Re}\Omega_{0,\pm 1,0}$ .

Граница области устойчивости поперечных когерентных колебаний пучка с функцией распределения (3.38) строится изменением в

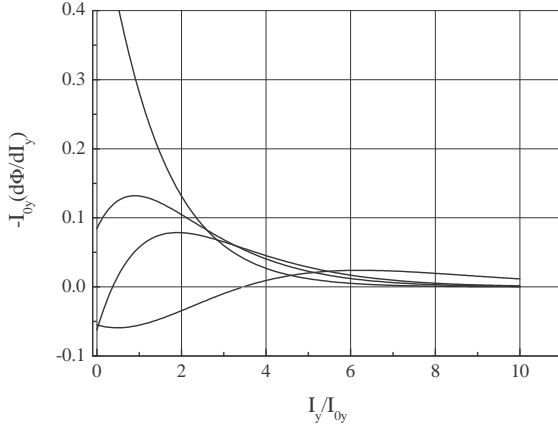


Рис. 5. Зависимость производной  $-I_{0y}d\Phi/dI_y$  от действия  $I_y$ . Сверху вниз при  $I_y = I_{0y}$  значения  $\chi$  равны 0.5, 0.9, 1.1 и 2

дисперсионном уравнении переменной  $\omega$  чуть выше ее действительной оси. Для моды  $(0, 1, 0)$  согласно уравнениям (3.14), (3.38) и (3.41) пишем

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\Omega_{0,1,0}}{\omega_0} \int_0^\infty \frac{dI_x}{I_{0x}} e^{-I_x/I_{0x}} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Delta p}{\sqrt{2\pi p\sigma_p}} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2p^2\sigma_p^2}\right) \\
 &\times e^{-\chi} \int_0^\infty \frac{dI_y}{I_{0y}^2} I_y e^{-I_y/I_{0y}} \\
 &\times \frac{\left(I_0\left(2\sqrt{\chi\frac{I_y}{I_{0y}}}\right) - \sqrt{\frac{\chi I_{0y}}{I_y}} I_1\left(2\sqrt{\chi\frac{I_y}{I_{0y}}}\right)\right)}{\Delta\nu_m - \xi_y(\Delta p/p) - aI_y + bI_x + i0},
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\Omega_{0,1,0}}{\omega_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \int_0^\infty dx e^{-x} \\
 &\times e^{-\chi} \int_0^\infty dy \frac{ye^{-y} \left(I_0(2\sqrt{\chi y}) - \sqrt{\frac{\chi}{y}} I_1(2\sqrt{\chi y})\right)}{\Delta\nu_m - \xi_y\sigma_p u - \delta\nu_{yy}y + \delta\nu_{yx}x + i0},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

где  $\Delta\nu_m = (\omega/\omega_0) - \nu_{0y}$ , а

$$\Omega_{0,1,0} = m_y \frac{Ne^2\omega_0 Z_n^\perp(m_y\omega_{y0})}{4\pi p\nu_{y0}}. \tag{3.48}$$



Уравнение (3.47) формально упрощается подстановками [1]

$$g(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(w - \xi_y \sigma_p u - z) g_1(z) \quad (3.49)$$

и

$$g_1(z) = e^{-\chi} \int_0^{\infty} dx e^{-x} \int_0^{\infty} dy y e^{-y} \delta(z - \delta\nu_{yy} y + \delta\nu_{yx} x) \quad (3.50)$$

$$\times \left( I_0(2\sqrt{\chi y}) - \sqrt{\frac{\chi}{y}} I_1(2\sqrt{\chi y}) \right),$$

которые позволяют переписать (3.47) в виде

$$1 = \frac{\Omega_{0,1,0}}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\Delta\nu_m - w + i0}. \quad (3.51)$$

Входящие в эти формулы функции  $g(w)$  и  $g_1(z)$ , по определению, нормированы на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw g(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dz g_1(z) = 1. \quad (3.52)$$

Они описывают распределения частот некогерентных колебаний в пучке, а также особенности взаимодействия частиц с коллективными модами пучка. Такое взаимодействие сопровождается систематическим обменом энергией частиц и мод, который появляется при совпадении скоростей частиц в фазовом пространстве с фазовой скоростью моды. В том случае, когда разброс частот в пучке имеет проекцию на направление распространения моды (в нашем случае это разброс  $\delta\nu_{yy}$ ), возможность набора энергии моды и ее потери зависит от разности числа частиц, опережающих моду, и частиц, отстающих от этой моды. Если число частиц, опережающих моду, превышает число медленных частиц, то энергия моды передается частицам, вызывая затухание Ландау моды. В обратном случае обмен энергией частиц и моды приводит к ее антизатуханию Ландау. Поскольку функции  $g(w)$  и  $g_1(z)$  описывают и эти процессы, они могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. По этим причинам мы будем называть функции  $g(w)$  и  $g_1(z)$  эффективными

распределениями частот в пучке. Они пропорциональны истинным функциям распределения частот пучка для монотонно спадающих функций распределения частиц в фазовом пространстве.

Хотя выражения для  $g(w)$  и  $g_1(z)$  сами по себе достаточно сложны и общие вычисления границы области устойчивости (или корней дисперсионного уравнения) с помощью уравнения (3.51) довольно трудоемки, они позволяют сравнительно легко получить ответы для нескольких важных предельных случаев. Пусть, например, вклады октупольных полей в разброс частот пучка пренебрежимо малы по сравнению с вкладом хроматизма. Тогда мы можем просто положить в (3.50)  $\delta\nu_{yy} = \delta\nu_{yx} = 0$ . В таком случае  $g_1(z) = \delta(z)$ ,

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\xi_y|\sigma_p} \exp\left(-\frac{w^2}{2\xi_y^2\sigma_p^2}\right), \quad (3.53)$$

а дисперсионные свойства пучка определяются уравнением (3.51) с гауссовым распределением частот

$$1 = \frac{\Omega_{0,1,0}}{\omega_0|\xi_y|\sigma_p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{\Delta\nu_m - w + i0} \exp\left(-\frac{w^2}{2\xi_y^2\sigma_p^2}\right). \quad (3.54)$$

Они хорошо известны (например, [1]) или легко могут быть найдены читателем в качестве тренировочной задачи.

Мы обсудим подробнее другой предельный случай, когда, наоборот, вклады октупольных полей в разброс частот в пучке доминируют. Положив в (3.49)  $\xi_y = 0$  и выполнив интегрирование в (3.49), пишем

$$1 = \frac{\Omega_{0,1,0}}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{g_1(z)}{\Delta\nu_m - z + i0}. \quad (3.55)$$

Дисперсионные свойства такого пучка зависят от соотношения парциальных разбросов частот  $\delta\nu_{yy}$  и  $\delta\nu_{yx}$ . Так, при выполнении условия  $|\delta\nu_{yx}| \gg |\delta\nu_{yy}|$  (примерно равные  $\beta$ -функции вертикальных и горизонтальных колебаний и вытянутое в горизонтальном направлении распределение амплитуд колебаний в пучке), то независимо от амплитуды удара

$$g_1(z) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \delta(z + \delta\nu_{yx}x). \quad (3.56)$$

Вычисления границы области устойчивости для такого пучка также описаны в [1].

Наконец, если  $|\delta\nu_{yx}| \ll |\delta\nu_{yy}|$ , то, полагая  $\delta\nu_{yx} = 0$ , получим

$$g_1(z) = \int_0^\infty dy y e^{-\chi-y} \delta(z - \delta\nu_{yy}y) \left( I_0(2\sqrt{\chi y}) - \sqrt{\frac{\chi}{y}} I_1(2\sqrt{\chi y}) \right). \quad (3.57)$$

Для определенности примем  $\delta\nu_{yy} > 0$ . Тогда  $g_1(z) = 0$ , если  $z < 0$ , и

$$g_1(z) = \frac{z}{\delta\nu_{yy}^2} \exp\left(-\chi - \frac{z}{\delta\nu_{yy}}\right) \times \left( I_0\left(2\sqrt{\frac{\chi z}{\delta\nu_{yy}}}\right) - \sqrt{\frac{\delta\nu_{yy}\chi}{z}} I_1\left(2\sqrt{\frac{\chi z}{\delta\nu_{yy}}}\right) \right), \quad z > 0. \quad (3.58)$$

Такое эффективное распределение частот фактически показано на рис. 5. Его форма существенно зависит от амплитуды удара  $\chi$ . В области  $\chi \leq 1$  это положительно определенная функция, соответствующая функции распределения по амплитудам вертикальных колебаний, которая монотонно убывает с увеличением  $y$ . В области же  $\chi > 1$  в распределении по амплитудам вертикальных колебаний появляется максимум при некотором ненулевом значении амплитуды  $y = y_0$ . В соответствии с этим на участке частот  $z \leq \delta\nu_{yy}y_0$  функция  $g_1$  принимает отрицательные значения. Это положение сохраняется и при других соотношениях между парциальными разбросами частот ( $\delta\nu_{yy}$  и  $\delta\nu_{yx}$ ; например, рис. 6).

В последнем случае функция  $g_1(z)$  записывается в виде (например,  $\delta\nu_{yy} > 0$ ,  $\delta\nu_{yx} > 0$ )

$$g_1(z) = \frac{\delta\nu_{yx}}{\delta\nu_t^2} \exp\left(\frac{z}{\delta\nu_{yx}} - \frac{\delta\nu_{yy}}{\delta\nu_t} \chi\right) \left(1 - \frac{\delta\nu_{yy}}{\delta\nu_t} \chi\right), \quad z < 0, \quad (3.59)$$

$$g_1(z) = \exp\left(-\chi - \frac{z}{\delta\nu_{yy}}\right) \frac{\delta\nu_{yx}}{\delta\nu_t^2} \int_q^\infty y e^{-y} I_0(2\sqrt{\chi 1y}) dy \quad (3.60)$$

$$- \exp\left(\frac{z}{\delta\nu_{yx}} - \chi\right) \frac{\sqrt{\chi 1}}{\delta\nu_t} \int_q^\infty \sqrt{y} e^{-y} I_1(2\sqrt{\chi 1y}) dy, \quad z > 0,$$

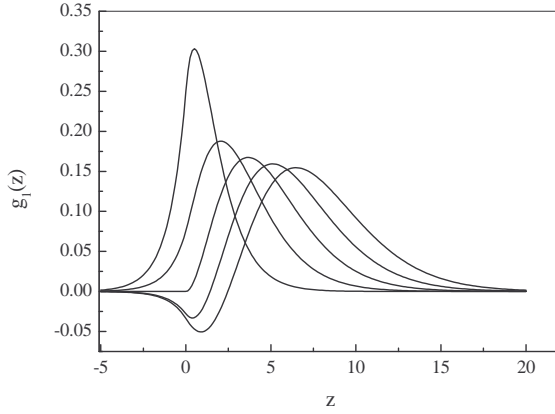


Рис. 6. Зависимость формы эффективного распределения частот в пучке  $g_1(z)$  от  $z$  и амплитуды удара пучка. Парциальные разбросы частот равны ( $\delta\nu_{yy} = \delta\nu_{yx} = 1$ ); слева на право  $\chi = 0, 1, 2, 3$  и  $4$

где  $\delta\nu_t = \delta\nu_{yy} + \delta\nu_{yx}$ ,  $\chi_1 = \chi\delta\nu_{yx}/\delta\nu_t$ , а

$$q = z \frac{\delta\nu_t}{\delta\nu_{yx}\delta\nu_{yy}} = z \left( \frac{1}{\delta\nu_{yy}} + \frac{1}{\delta\nu_{yx}} \right). \quad (3.61)$$

Для простоты мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих изменение формы границы области устойчивости поперечных когерентных колебаний при увеличении амплитуды удара, предполагая, что эффективное распределение частот в пучке определяется формулой (3.58). Определив

$$\zeta = \frac{\Omega_{0,1,0}}{\omega_0\delta\nu_{yy}}, \quad z_m = \frac{\Delta\nu_m}{\delta\nu_{yy}} \quad (3.62)$$

и  $y = z/\delta\nu_{yy}$ , перепишем уравнение (3.55) в виде

$$1 = \zeta G(z_m), \quad (3.63)$$

где

$$G(z_m) = \int_0^\infty dy \frac{g_1(y)}{z_m - y + i0}. \quad (3.64)$$

Согласно этому уравнению  $\text{Im}G(z_m) = 0$ , если  $z_m < 0$ . В точке  $z_m = 0$  имеем

$$G(0) = - \int_0^\infty dy \frac{g_1(y)}{y} - i\pi g_1(0),$$

или

$$G(0) = -e^{-\chi} \int_0^\infty e^{-y} \left( I_0(2\sqrt{\chi y}) - \sqrt{\frac{\chi}{y}} I_1(2\sqrt{\chi y}) \right) dy = -e^{-\chi}.$$

Таким образом, в области  $z_m \leq 0$  граница области устойчивости

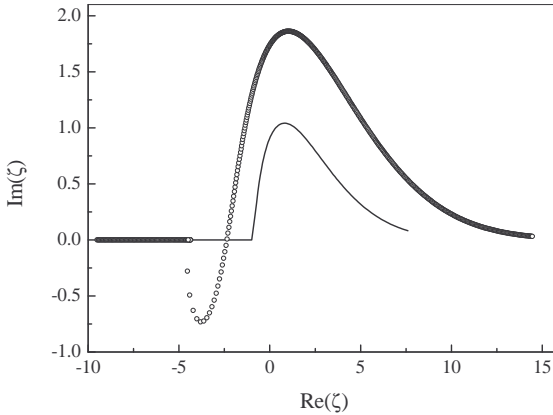


Рис. 7. Изменение границы области устойчивости поперечных когерентных колебаний при увеличении амплитуды удара пучка. Сплошная линия –  $\chi = 0$ , окружности –  $\chi = 1.5$ . Колебания устойчивы ниже граничных кривых

совпадает с отрезком оси  $\text{Re}\zeta$ , на котором  $\text{Re}\zeta \leq -e^\chi$ . Положение границы в области  $z_m > 0$  находится численным интегрированием в (3.64). Если амплитуда удара невелика ( $\chi \leq 1$ ), то граница близка к той, что находится при  $\chi = 0$  (сплошная линия на рис. 7). Увеличение амплитуды удара пучка в область  $\chi > 1$  (пучок смещается в фазовом пространстве больше, чем на его размер до удара) приводит к появлению максимума у распределения (3.46) и возможности антизатухания Ландау поперечных когерентных колебаний (например, окружности на рис. 7). При этом ширины областей, в которых когерентные колебания устойчивы, несколько увеличиваются.

На диаграмме устойчивости антизатухание проявляется в смещении граничной кривой в полуплоскость  $\text{Im}\zeta < 0$ . На рис. 7 (окружности) эта область расположена на отрезке  $-4.37 \leq \text{Re}\zeta \leq -2.35$  (это результат прослеживания точек на графике). Дальнейшее увеличение амплитуды удара приводит к расширению области антизатухания колебаний (рис. 8)<sup>6</sup>. Это сопровождается таким смещением участка ВС, что правая ветвь граничной кривой (участок АВС) асимптотически ( $\chi \gg 1$ ) начинает напоминать границу области устойчивости продольных когерентных колебаний (например, рис. 10). Такая

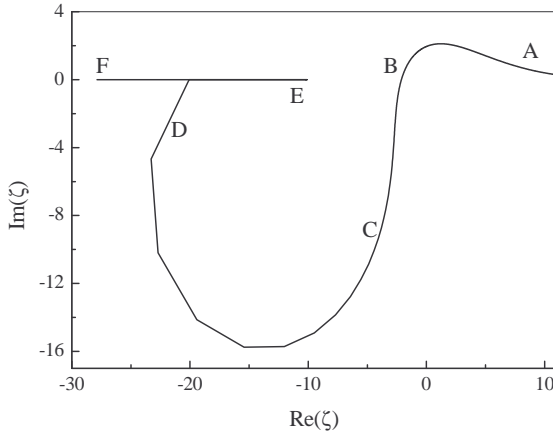


Рис. 8. Граница области устойчивости поперечных когерентных колебаний;  $\chi = 3$ . Колебания устойчивы ниже граничной кривой ABCDEF

возможность прослеживается вычислением правой части уравнения (3.64):

$$G(z_m) = - \int_0^{\infty} dy \frac{y}{z_m - y} \frac{d}{dy} (\exp(-\chi - y) I_0(2\sqrt{\chi y})) \quad (3.65)$$

в области  $\chi \gg 1$ . Согласно этому выражению основной вклад в интеграл по  $y$  дает область  $y \simeq \chi \gg 1$ , в которой справедлива асимп-

<sup>6</sup> Рис. 8 не дает правильного представления о поведении граничной кривой в окрестности нуля  $z_m$ . О нем можно судить по графикам на рис. 9.

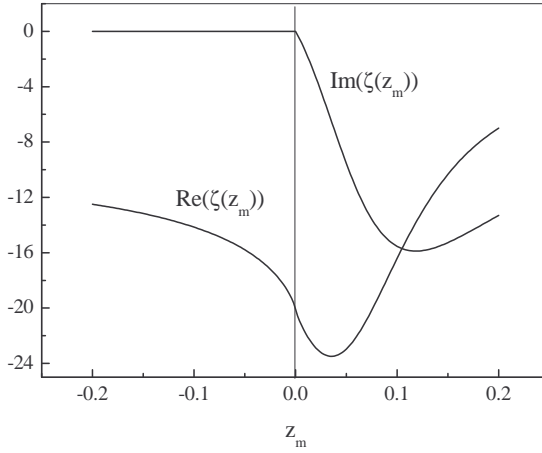


Рис. 9. Зависимости функций  $\text{Re}\zeta$  и  $\text{Im}\zeta$  от  $z_m$  в окрестности нуля  $z_m$ ;  $\chi = 3$

точечная оценка

$$I_0(2\sqrt{\chi y}) \simeq \frac{\exp(2\sqrt{\chi y})}{\sqrt{4\pi\sqrt{\chi y}}}, \quad \chi y \gg 1,$$

а (3.65) записывается в виде

$$\begin{aligned} G(z_m) &\simeq -\frac{1}{\sqrt{4\pi\chi}} \int_0^\infty dy \frac{y}{z_m - y + i0} \frac{d}{dy} \left( \exp(-(\sqrt{y} - \sqrt{\chi})^2) \right) \quad (3.66) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi\chi}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{z_m - x^2 + i0} \frac{d}{dx} \left( \exp(-(x - \sqrt{\chi})^2) \right). \end{aligned}$$

Подставив сюда  $x = \sqrt{\chi} + u/\sqrt{2}$  и удерживая в правой части старшие члены по  $1/\chi$ , а также учитывая быструю сходимость интеграла, мы преобразуем это выражение к виду

$$\begin{aligned} G(z_m) &\simeq \sqrt{\frac{\chi}{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{ue^{-u^2/2}}{z_m - \chi - \sqrt{2\chi}u + i0} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{ue^{-u^2/2}}{\Delta z_m - u + i0}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta z_m = \frac{z_m - \chi}{\sqrt{2\chi}}.$$

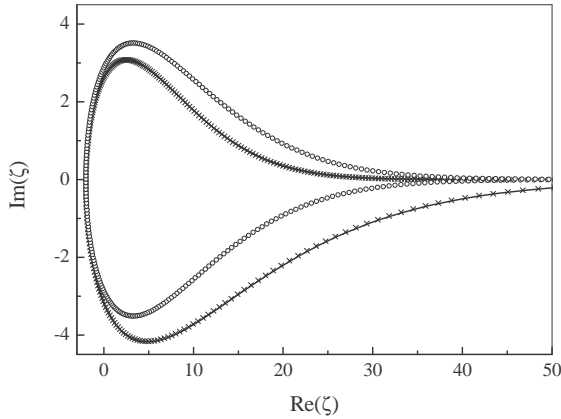


Рис. 10. Граница области устойчивости поперечных когерентных колебаний (правая ветвь);  $\chi = 100$ . Колебания устойчивы внутри граничных кривых. Сплошная линия – по формуле (3.65), символы  $\times$  – по формуле (3.66), окружности – по формуле (3.67)

С учетом этих выражений уравнение граничной кривой (3.63) записывается в виде

$$1 - \frac{\zeta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{ue^{-u^2/2}}{\Delta z_m - u + i0} = 0. \quad (3.67)$$

Левая часть в этом уравнении с точностью до обозначений совпадает с правой частью выражения в (2.51), полученного для продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Вместе с тем, сравнение кривых на рис. 10 показывает, что формула (3.67) лишь качественно отражает ход граничной кривой и, по-видимому, будет справедлива только для очень больших значений параметра  $\chi$ .

## 4. Влияние охлаждения пучка на затухание Ландау

В исследованиях метода электронного охлаждения (ИЯФ СО РАН им. Г. И. Будкера) было обнаружено, что в накопителях ионов возможно достижение значительных (одночастичных) декрементов



электронного охлаждения пучков. Одним из замечательных свойств электронного охлаждения является выравнивание кулоновскими столкновениями ионов и охлаждающих электронов средних скоростей ионного и электронного пучков. В накопителях ионов с однократным прохождением охлаждающими электронами участка охлаждения продольная средняя скорость электронов поддерживается постоянной по условиям формирования электронного пучка. Выравнивание средних скоростей ионов и электронов в процессе охлаждения позволяет компенсировать потери энергии ионов и избегать соответствующего сворачивания их орбит без применения ускоряющих ВЧ-полей. Благодаря этому ионный пучок в накопителе с электронным охлаждением может существовать несгруппированным в течение длительных отрезков времени.

В свою очередь, быстрое охлаждение ионов может существенно менять свойства их когерентных колебаний. Соответственно, могут существенно меняться и спектры этих колебаний, а также зависимости от времени наблюдаемых когерентных сигналов. В этом разделе мы обсудим и проведем вычисления для наиболее простого случая – продольных когерентных колебаний несгруппированного ионного пучка с сильным охлаждением частиц.

#### **4.1. Движение отдельных частиц**

Прежде чем решать уравнения, описывающие когерентные колебания пучка, обсудим изменения характера движения отдельных частиц в продольном фазовом пространстве охлаждаемого пучка. Во-первых, на частицы действует сила трения, уменьшающая разброс импульсов частиц. Если бы эта сила была бы единственной, со временем разброс импульсов в пучке обратился бы в ноль. При этом, например, в пучке исчезли бы все процессы расфазировки и процессы, связанные с затуханием Ландау когерентных колебаний. В действительности, однако, этого не происходит потому, что в силу диссипативно-флуктуационной теоремы каждый процесс, порождающий трение, сопровождается также генерацией случайных полей. Действие этих полей на частицы увеличивает разбросы импульсов в пучке. Баланс мощностей силы трения и сопровождающих ее

флуктуаций поля приводит к формированию равновесного состояния пучка с конечным разбросом импульсов. В продольном фазовом пространстве такой процесс описывается уравнениями

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -\lambda_{\parallel}\Delta p + X(t), \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega'_0\Delta p, \quad (4.1)$$

где  $\phi = \theta - \omega_0 t$ ,  $\lambda_{\parallel}$  – декремент охлаждения, а  $X(t)$  – случайная сила, описывающая действие на частицы флуктуационных полей. В случае электронного охлаждения уравнения (4.1) справедливы для центральной части распределения пучка ионов по импульсам. Формальные решения уравнений (4.1) записываются в виде

$$\Delta p(t) = \Delta p_0 e^{-\lambda_{\parallel} t} + \int_0^t dt_1 X(t_1) \exp(-\lambda_{\parallel}(t - t_1)), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \phi_0 + \omega'_0 \Delta p_0 \frac{1 - e^{-\lambda_{\parallel} t}}{\lambda_{\parallel}} \\ & + \omega'_0 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 X(t_1) \exp(-\lambda_{\parallel}(t_2 - t_1)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $\Delta p_0$  и  $\phi_0$  – начальные значения отклонения импульса частицы и ее фазы в пучке. Определенные таким образом переменные  $\Delta p(t)$  и  $\phi(t)$  являются случайными величинами. Между столкновениями они изменяются вполне определенным образом:

$$\Delta p(t) = \Delta p_{0i} e^{-\lambda_{\parallel} t}, \quad \phi(t) = \phi_{0i} + \omega'_0 \Delta p_{0i} \frac{1 - e^{-\lambda_{\parallel} t}}{\lambda_{\parallel}}, \quad (4.4)$$

где  $\Delta p_{0i}$  и  $\phi_{0i}$  – начальные значения координат частицы в фазовом пространстве после очередного столкновения. В случайный момент времени происходит столкновение. При этом начальное значение фазы ( $\phi_{0i}$ ) не меняется, а начальное значение импульса ( $\Delta p_{0i}$ ) получает некоторое случайное приращение. Под действием этих толчков частица случайно блуждает в фазовом пространстве. В таких случаях уместно вычислять не мгновенные значения фазовых переменных, а их величины, усредненные по столкновениям и соответствующие дисперсии. Обозначим символом  $\langle \dots \rangle$  операцию усреднения по

столкновениям и примем, что  $\langle X(t) \rangle = 0$ . Тогда в среднем по столкновениям положение частицы в фазовом пространстве описывается формулами, аналогичными (4.4)

$$\langle \Delta p(t) \rangle = \Delta p_0 e^{-\lambda_{\parallel} t}, \quad \langle \phi(t) \rangle = \phi_0 + \omega'_0 \Delta p_0 \frac{1 - e^{-\lambda_{\parallel} t}}{\lambda_{\parallel}}. \quad (4.5)$$

Для вычисления дисперсий этих величин

$$\sigma_p^2 = \langle \Delta p^2(t) \rangle - \langle \Delta p(t) \rangle^2$$

и

$$\sigma_{\phi}^2 = \langle \phi^2(t) \rangle - \langle \phi(t) \rangle^2$$

следует определить неодновременный коррелятор  $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$ . Поскольку, например,

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \int_0^t dt_1 \exp(-\lambda_{\parallel} t_1) \int_0^t dt_2 \exp(-\lambda_{\parallel} t_2) \\ &\quad \times \langle X(t-t_1)X(t-t_2) \rangle. \end{aligned}$$

Считая, что длительность толчков достаточно мала, мы положим

$$\langle X(t_1)X(t_2) \rangle = d_{\parallel} \delta(t_1 - t_2). \quad (4.6)$$

Тогда простые вычисления приводят к выражениям

$$\sigma_p^2 = d_{\parallel} \int_0^t dt_1 \exp(-2\lambda_{\parallel} t_1) = \frac{d_{\parallel}}{2\lambda_{\parallel}} \left(1 - e^{-2\lambda_{\parallel} t}\right) \quad (4.7)$$

и

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \langle \delta\phi \rangle^2 + \left(\frac{\omega'_0}{\lambda_{\parallel}}\right)^2 \int_0^t dt_1 \left(1 - \exp(-\lambda_{\parallel}(t-t_1))\right) \quad (4.8)$$

$$\times \int_0^t dt_2 \langle X(t_1)X(t_2) \rangle \left(1 - \exp(-\lambda_{\parallel}(t-t_2))\right), \quad (4.9)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi}^2 &= \left(\frac{\omega'_0}{\lambda_{\parallel}}\right)^2 d_{\parallel} \int_0^t dt_1 \left(1 - e^{-\lambda_{\parallel} t_1}\right) \int_0^t dt_2 \delta(t_1 - t_2) \left(1 - e^{-\lambda_{\parallel} t_2}\right) \\ &= \left(\frac{\omega'_0}{\lambda_{\parallel}}\right)^2 d_{\parallel} \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda_{\parallel} t_1}\right)^2 dt_1 = \left(\frac{\omega'_0}{\lambda_{\parallel}}\right)^2 \frac{d_{\parallel}}{\lambda_{\parallel}} \Psi(\lambda_{\parallel} t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\Psi(s) = s - 2(1 - e^{-s}) + \frac{1 - e^{-2s}}{2}. \quad (4.11)$$

Заметим, что величины  $\sigma_p$  и  $\sigma_\phi$  не зависят от начальных положений частиц в фазовом пространстве. Они являются общими для всех частиц пучка и поэтому определяют дисперсии импульсов и фаз частиц в пучке в целом. Выражения (4.7) и (4.10) показывают, что на начальном этапе времени ( $\lambda_{\parallel}t \ll 1$ ) величины дисперсий  $\sigma_p$  и  $\sigma_\phi$  малы:

$$\sigma_p^2(t) \simeq d_{\parallel}t, \quad \sigma_\phi^2(t) \simeq \frac{1}{3}\omega_0^2 d_{\parallel}t^3, \quad \lambda_{\parallel}t \ll 1. \quad (4.12)$$

На больших же временах ( $\lambda_{\parallel}t \gg 1$ ) среднеквадратичное значение импульса частицы стремится к величине

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{d_{\parallel}}{2\lambda_{\parallel}}}, \quad \lambda_{\parallel}t \gg 1, \quad (4.13)$$

а среднеквадратичное значение отклонения азимутального положения частицы в пучке от своего начального значения нарастает по диффузионному закону

$$\sigma_\phi^2 = 2 \frac{\delta\omega_0^2}{\lambda_{\parallel}} t, \quad \delta\omega_0 = |\omega'_0| \sigma_p, \quad \lambda_{\parallel}t \gg 1. \quad (4.14)$$

При больших величинах декремента охлаждения пучка  $\lambda_{\parallel} \gg \delta\omega_0$  такие смещения оказываются существенно меньшими тех, что можно было бы ожидать при свободном разлете частиц вдоль замкнутой орбиты. Такое поведение дисперсий  $\sigma_p$  и  $\sigma_\phi$  вполне понятно, если учесть, что величина декремента охлаждения  $\lambda_{\parallel}$  оценивает в задаче среднюю частоту столкновений с изменением импульса частицы на величину  $\Delta p \sim \sigma_p$ . Оно означает, что влияние стохастических процессов на движение частиц становится заметным на интервалах времени, содержащих большое число рассеяний.

## 4.2. Продольные когерентные колебания охлаждаемого пучка

Как уже говорилось, продольные когерентные колебания несгруппированного пучка описываются функцией распределения  $f$ .

В силу цикличности движения частиц вдоль замкнутой орбиты функция  $f(\Delta p, \theta, t)$  периодична по фазовой переменной  $\theta$ . Поэтому имеет место разложение  $f$  в ряд Фурье:

$$f = f_0(\Delta p) + \sum_{n \neq 0} f_n(\Delta p, t) e^{in\theta}. \quad (4.15)$$

Когерентные колебания пучка описываются гармониками  $f_n$ . Для пучков с быстрым охлаждением частиц изменения функции распределения описываются уже не уравнением Власова, а более общим кинетическим уравнением, учитывающим охлаждение частиц и влияние на них стохастических процессов. В случае электронного охлаждения это кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау. Для частиц, составляющих ядро распределения импульсов пучка, такое уравнение может быть записано в форме кинетического уравнения Фоккера - Планка с постоянными коэффициентами трения ( $\lambda_{\parallel}$ ) и диффузии ( $d_{\parallel}$ )

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(\Delta p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + eE(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial \Delta p} = \frac{\partial}{\partial \Delta p} \left( \lambda_{\parallel} \Delta p f + \frac{d_{\parallel}}{2} \frac{\partial f}{\partial \Delta p} \right). \quad (4.16)$$

Линеаризация уравнения (4.16) вблизи стационарного состояния с функцией распределения:

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2}\right), \quad \sigma_p^2 = \frac{d_{\parallel}}{2\lambda_{\parallel}}, \quad (4.17)$$

приводит к следующей системе уравнений для гармоник  $f_n(\Delta p, t)$ :

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + in\omega_0(\Delta p) f_n + eE_n(t) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = \frac{\partial}{\partial \Delta p} \left( \lambda_{\parallel} \Delta p f_n + \frac{d_{\parallel}}{2} \frac{\partial f_n}{\partial \Delta p} \right). \quad (4.18)$$

Последующее Фурье-преобразование этого уравнения по времени, с учетом соотношения

$$\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\partial f}{\partial t} = -f^{(0)} - i\omega f_{\omega},$$

позволяет записать:

$$-i(\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p)f_{n,\omega} = f_n^{(0)}(\Delta p) - eE_{n,\omega}\frac{df_0}{d\Delta p} \quad (4.19)$$

$$+ \frac{d}{d\Delta p} \left( \lambda_{\parallel}\Delta p f_{n,\omega} + \frac{d_{\parallel}}{2} \frac{df_{n,\omega}}{d\Delta p} \right).$$

Здесь  $f_n^{(0)}(\Delta p)$  – начальное значение гармоники  $f_n(\Delta p, t)$ ,  $\omega_0(\Delta p) = \omega_0 + \omega'_0\Delta p$  и  $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$ . Предполагая импедансное соотношение (2.17) между гармониками наведенного пучком поля и линейной плотности пучка

$$E_{n,\omega} = -\frac{Ne\omega_0 Z_n}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}, \quad (4.20)$$

перепишем уравнение (4.19) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial\Delta p} \left( \lambda_{\parallel}\Delta p f_{n,\omega} + \frac{d_{\parallel}}{2} \frac{\partial f_{n,\omega}}{\partial\Delta p} \right) = -i(\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p)f_{n,\omega} \quad (4.21)$$

$$- f_n^{(0)}(\Delta p) - \frac{\partial f_0}{\partial\Delta p} \frac{Ne^2\omega_0 Z_n}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n\omega}.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановки

$$u = \frac{\Delta p}{\sigma_p}, \quad a = \frac{-i\Delta\omega_n}{\lambda_{\parallel}}, \quad b = \frac{-in\omega'_0\sigma_p}{\lambda_{\parallel}}, \quad u = \sqrt{2}z + 2b. \quad (4.22)$$

Тогда уравнение (4.21) переходит в

$$\frac{d}{du} \left( u f_{n,\omega} + \frac{df_{n,\omega}}{du} \right) = -g_n^{(0)} + (a - bu)f_{n,\omega} \quad (4.23)$$

$$+ \frac{ue^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Omega_n^2}{b\lambda_{\parallel}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du f_{n\omega}.$$

Здесь

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2\omega_0\omega'_0}{\Pi} \left( \frac{-iZ_n}{n} \right) \quad (4.24)$$

– квадрат сдвига частоты продольных когерентных колебаний монохроматического несгруппированного пучка, а  $f_n^{(0)} = \lambda_{\parallel} g_n^{(0)}$ .

Решение (4.23) ищем в виде

$$f_{n\omega} = \exp\left(-\frac{u^2}{2} + bu\right) W(z). \quad (4.25)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{df_{n,\omega}}{du} + u f_{n,\omega} \right) &= \exp\left(-\frac{u^2}{2} + bu\right) \\ &\times \left( \frac{d^2 W(u)}{du^2} - (u - 2b) \frac{dW(u)}{du} - b(u - b)W(u) \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

а

$$-\frac{u^2}{2} + bu = -z^2 - \sqrt{2}bz,$$

получим уравнение для функции  $W(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dz^2} - 2z \frac{dW}{dz} + 2(b^2 - a)W &= -2g_n^{(0)}(z)e^{z^2 + \sqrt{2}bz} \\ + \frac{4\Omega_n^2(z + \sqrt{2}b)}{b\lambda_{\parallel}^2} e^{-bz\sqrt{2} - 2b^2} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{2\pi}} e^{-z'^2 - \sqrt{2}bz'} W(z'). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) решается разложением  $W(z)$  в ряд по полиномам Эрмита

$$W = \sum_{l=0}^{\infty} C_l H_l(z). \quad (4.28)$$

Напомним, что полиномы  $H_l(z)$  являются решениями дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 H_l}{dz^2} - 2z \frac{dH_l}{dz} + 2lH_l = 0, \quad (4.29)$$

которые могут быть записаны в виде

$$H_l(z) = (-1)^l e^{z^2} \frac{d^l}{dz^l} \left( e^{-z^2} \right). \quad (4.30)$$

При этом, например,

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z, \quad H_2(z) = 4z^2 - 2. \quad (4.31)$$

Подставив (4.28) в (4.27) и учитывая условие ортогональности полиномов  $H_l(z)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = \delta_{m,n} 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad (4.32)$$

где  $\delta_{m,n}$  – символ Кронеккера, а также соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z-y)^2} H_n(z) = \sqrt{\pi} y^n 2^n \quad (4.33)$$

и

$$z H_l(z) = \frac{1}{2} H_{l+1}(z) + l H_{l-1}(z),$$

получим уравнения для коэффициентов  $C_l$

$$C_l = C_l^{(0)} - \zeta e^{-b^2} \frac{\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^l (l-b^2)}{l!(a+l-b^2)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(-b\sqrt{2}\right)^k, \quad (4.34)$$

где

$$C_l^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^l l!(a+l-b^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dz g_n^{(0)}(u) \exp\left(\sqrt{2}bz\right) H_l(z), \quad (4.35)$$

а

$$\zeta = \frac{\Omega_n^2}{-b^2 \lambda_{\parallel}^2} = \frac{\Omega_n^2}{n^2 \delta \omega^2}, \quad \delta \omega = |\omega'_0| \sigma_p. \quad (4.36)$$

Эти уравнения решаются подстановкой

$$C_l = C_l^{(0)} - \left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^l \frac{(l-b^2)}{l!(a+l-b^2)} A, \quad (4.37)$$

которая дает

$$A = \frac{\zeta e^{-b^2}}{\varepsilon(\Delta \omega_n)} \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{(0)} \left(-b\sqrt{2}\right)^l, \quad (4.38)$$

где

$$\varepsilon(\Delta \omega_n) = 1 + \zeta e^{-b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^{2l} (l-b^2)}{l! \left(\frac{-i\Delta \omega_n}{\lambda_{\parallel}} + l - b^2\right)}. \quad (4.39)$$



Таким образом, вместо (4.37) мы получаем

$$C_l = C_l^{(0)} - \frac{\zeta e^{-b^2} \left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^l (l - b^2)}{l! \left(\frac{-i\Delta\omega_n}{\lambda_{\parallel}} + l - b^2\right) \varepsilon(\Delta\omega_n)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(0)} \left(-b\sqrt{2}\right)^k. \quad (4.40)$$

### 4.3. Когерентный сигнал

Вычислим теперь гармоники линейной плотности пучка. Эти величины могут быть непосредственно измерены интегральными пикап-электродами при наблюдении расфазировки пучка. Пишем

$$\rho_{n,\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n\omega} = \sigma_p \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(-\frac{u^2}{2} + bu\right) W(u),$$

или, учитывая (4.28) и (4.40),

$$\begin{aligned} \rho_{n,\omega} &= \sigma_p \sqrt{2} e^{b^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\left(z + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2\right) H_l(z) \quad (4.41) \\ &= \sigma_p \sqrt{2\pi} e^{b^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \left(-b\sqrt{2}\right)^l \\ &= \sigma_p \sqrt{2\pi} e^{b^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{(0)} \left(-b\sqrt{2}\right)^l \\ &\times \left[ 1 - \frac{\zeta e^{-b^2}}{\varepsilon(\Delta\omega_n)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^{2l} (l - b^2)}{l! \left(\frac{-i\Delta\omega_n}{\lambda_{\parallel}} + l - b^2\right)} \right]. \end{aligned}$$

Определив здесь

$$\rho_{n,\omega}^{(0)} = \sigma_p \sqrt{2\pi} e^{b^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{(0)} \left(-b\sqrt{2}\right)^l \quad (4.42)$$

и учитывая (4.39), перепишем формулу (4.41) в виде

$$\rho_{n,\omega} = \frac{\rho_{n,\omega}^{(0)}}{\varepsilon(\Delta\omega_n)}. \quad (4.43)$$

Это обычное соотношение теории линейных когерентных колебаний. Оно связывает гармоники линейной плотности пучка конечной интенсивности  $\rho_{n,\omega}$  с гармониками пучка малой интенсивности  $\rho_{n,\omega}^{(0)}$ . В силу импедансного соотношения (4.20) уравнение (4.43) описывает изменения наведенных пучком полей его коллективной реакцией. По этой причине входящую в (4.43) величину  $\varepsilon(\Delta\omega_n)$  можно называть диэлектрической постоянной пучка.

Подставив в (4.42) значения коэффициентов  $C_l^{(0)}$  из (4.35), пишем

$$\rho_{n,\omega}^{(0)} = \sigma_p \sqrt{2} e^{b^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz g_n^{(0)}(z) \exp(\sqrt{2}bz) \Phi(z), \quad (4.44)$$

где

$$\Phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^l}{l! \left(\frac{-i\Delta\omega_n}{\lambda_{\parallel}} + l - b^2\right)} H_l(z). \quad (4.45)$$

Используя здесь

$$\frac{1}{\frac{-i\Delta\omega_n}{\lambda_{\parallel}} + l - b^2} = \int_0^{\infty} ds \exp\left(\frac{i\Delta\omega_n s}{\lambda_{\parallel}} + b^2 s - ls\right) \quad (4.46)$$

и

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(-\frac{be^{-s}}{\sqrt{2}}\right)^l \frac{H_l(z)}{l!} = \exp\left(-\frac{b^2 e^{-2s}}{2} - \sqrt{2}bze^{-s}\right),$$

перепишем (4.44) в виде

$$\begin{aligned} \rho_{n,\omega}^{(0)} &= \sigma_p \int_0^{\infty} ds \exp\left(\frac{i\Delta\omega_n s}{\lambda_{\parallel}} + b^2 \Psi(s)\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dug_n^{(0)}(u) \exp(bu(1 - e^{-s})). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Функция  $\Psi(s)$  определена в (4.11):

$$\Psi(s) = s - 2(1 - e^{-s}) + \frac{(1 - e^{-2s})}{2}.$$

Напомним, что она описывает случайные блуждания частиц охлаждаемого пучка вдоль замкнутой орбиты.

Зависимость когерентного сигнала от времени  $\rho_n(t)$  восстанавливается выполнением обратного преобразования Фурье

$$e^{i\omega_0 t} \rho_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{2\pi} \frac{\rho_{n,\omega}^{(0)} e^{-i\Delta\omega_n t}}{\varepsilon(\Delta\omega_n)}, \quad \text{Im}\Delta\omega_n > 0. \quad (4.48)$$

Согласно формулам (4.39), (4.44) и (4.45) точки

$$\Delta\omega_{n,l} = -i\lambda_{\parallel}(l - b^2)$$

являются простыми полюсами функций  $\rho_{n,\omega}^{(0)}$  и  $\varepsilon(\Delta\omega_n)$ . Однако подынтегральное выражение в (4.48) не имеет особенностей ни в одной из этих точек. Поэтому интеграл в правой части в (4.48) определяется вычетами лишь в тех точках  $\Delta\omega_n$ , которые находятся решением дисперсионного уравнения

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) = 0. \quad (4.49)$$

Контур интегрирования по  $\Delta\omega_n$  в (4.48) должен проходить в плоскости комплексной переменной  $\Delta\omega_n$  выше любого из этих корней.

#### 4.4. Малые декременты охлаждения

Полученные формулы справедливы для любых величин декрементов охлаждения пучка. При фиксированной величине разброса импульсов в пучке они также должны выполняться и переходить в формулы, описывающие продольные когерентные колебания в неохлаждаемом, несгруппированном пучке. Проследим предельный переход  $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$ . Для этого заметим, что согласно (4.39) и (4.46) величина диэлектрической постоянной пучка  $\varepsilon(\Delta\omega_n)$  может быть представлена выражением

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) = 1 - \zeta \int_0^{\infty} ds \exp\left(\frac{i\Delta\omega_n s}{\lambda_{\parallel}}\right) \frac{d}{ds} \exp(b^2 s - b^2(1 - e^{-s})),$$

или, что то же,

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) = 1 - \zeta \int_0^{\infty} dt \exp(i\Delta\omega_n t) \frac{d}{dt} \exp(b^2 \lambda_{\parallel} t - b^2(1 - e^{-\lambda_{\parallel} t})). \quad (4.50)$$

В пределе малых декрементов охлаждения ( $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$ ) мы можем заменить функцию  $\lambda_{\parallel}t - (1 - e^{-\lambda_{\parallel}t})$  рядом

$$\begin{aligned} \lambda_{\parallel}t - (1 - e^{-\lambda_{\parallel}t}) &= \frac{1}{2}\lambda_{\parallel}^2t^2 - \frac{1}{3!}\lambda_{\parallel}^3t^3 \\ &+ \frac{1}{4!}\lambda_{\parallel}^4t^4 - \frac{1}{5!}\lambda_{\parallel}^5t^5 + O(t^6). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения после умножения в (4.50) на  $b^2$  дает  $-n^2\delta\omega_0^2t^2/2$ , где  $\delta\omega_0 = |\omega'_0|\sigma_p$  – разброс частот обращения в пучке. Вклад этого слагаемого не зависит от величины  $\lambda_{\parallel}$ . Вклады остальных слагаемых после умножения в (4.50) на  $b^2$  пропорциональны величинам  $\lambda_{\parallel}$ ,  $\lambda_{\parallel}^2$ ,  $\lambda_{\parallel}^3$  и т. д. При стремлении декремента охлаждения к нулю они также стремятся к нулю. Поэтому в пределе  $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$  правая часть выражения в (4.50) стремится к следующему:

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) = 1 - \zeta \int_0^{\infty} dt \exp(i\Delta\omega_n t) \frac{d}{dt} \exp\left(-\frac{n^2\delta\omega_0^2t^2}{2}\right). \quad (4.52)$$

Теперь заметим, что основной вклад в интеграл в (4.52) дает интервал  $\Delta t \leq 1/(|n|\delta\omega_0)$ . На этом интервале разница

$$\begin{aligned} D &= \lambda_{\parallel}t - (1 - e^{-\lambda_{\parallel}t}) - \frac{1}{2}\lambda_{\parallel}^2t^2 \\ &= -\frac{1}{3!}\lambda_{\parallel}^3t^3 + \frac{1}{4!}\lambda_{\parallel}^4t^4 - \frac{1}{5!}\lambda_{\parallel}^5t^5 + O(t^6) \end{aligned}$$

не превышает величины

$$D_{\max} = -\frac{1}{3!|b|^3} + \frac{1}{4!|b|^4} - \frac{1}{5!|b|^5} + \dots \quad (4.53)$$

Если она мала, то формула (4.52) дает хорошее приближение для диэлектрической постоянной пучка  $\varepsilon(\Delta\omega_n)$ . Поскольку  $b$  пропорционально номеру гармоники когерентного колебания  $n$ , последняя формула показывает, что влияние охлаждения пучка на его когерентные колебания будет пренебрежимо малым для гармоник в области  $|b| \gg 1$ , или, что то же, для гармоник с номерами  $|n| > n_{th}$ , где

$$n_{th} = \frac{\lambda_{\parallel}}{\delta\omega_0}. \quad (4.54)$$

Поэтому даже в пучках, подверженных сильному охлаждению  $\lambda_{\parallel} \gg \delta\omega_0$ , колебания с большими номерами гармоник  $|n| \gg n_{th}$  развиваются так же, как и в неохлаждаемых пучках.

Далее, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2} - ik\Delta p\right) = \exp\left(-\frac{k^2\sigma_p^2}{2}\right),$$

пишем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Delta\omega_n) &= 1 - \zeta \int_0^{\infty} dt \exp(i\Delta\omega_n t) \\ &\quad \times \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2} - in\omega'_0 \Delta p t\right) \\ &= 1 + \zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} in\omega'_0 \Delta p \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2}\right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dt \exp(i\Delta\omega_n t - in\omega'_0 \Delta p t) \\ &= 1 - \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{\sqrt{2\pi}\sigma_p^3} \frac{\Delta p}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p)} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2}\right), \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p} \frac{d}{d\Delta p} \left[ \frac{\exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \right]. \quad (4.55)$$

Это выражение в точности совпадает с тем, что определяет диэлектрическую постоянную неохлаждаемого пучка с гауссовым распределением импульсов (например, в (2.22)). Аналогичным образом прослеживается предельный переход  $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$  для величины  $\rho_{n,\omega}^{(0)}$ . Заменяя в (4.47) переменную интегрирования  $s$  на  $\lambda_{\parallel} t$ :

$$\rho_{n,\omega}^{(0)} = \int_0^{\infty} dt e^{i\Delta\omega_n t + b^2 \Psi(\lambda_{\parallel} t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n^{(0)} \exp\left(b\Delta p \left(1 - e^{-\lambda_{\parallel} t}\right)\right),$$

и выполнив необходимые разложения в ряды Тэйлора, получим

$$\begin{aligned}\rho_{n,\omega}^{(0)} &\simeq \sigma_p \int_0^\infty dt \exp\left(i\Delta\omega_n t + \frac{b^2 \lambda_{\parallel}^3 t^3}{3}\right) \int_{-\infty}^\infty du f_n^{(0)}(u) e^{b\lambda_{\parallel} t u} \\ &\simeq \int_0^\infty dt e^{i\Delta\omega_n t} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p f_n^{(0)}(\Delta p) e^{-in\omega'_0 \Delta p t},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\rho_{n,\omega}^{(0)} &= \int_{-\infty}^\infty d\Delta p f_n^{(0)}(\Delta p) \int_0^\infty dt \exp(i\Delta\omega_n t - in\omega'_0 \Delta p t) \\ &= i \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{f_n^{(0)}(\Delta p)}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p}.\end{aligned}\quad (4.56)$$

Это выражение также совпадает с полученным при расчете амплитуд когерентных колебаний неохлаждаемого пучка. Суммируя сказанное, мы приходим к заключению, что полученные в предыдущих разделах формулы предсказывают правильные пределы в области  $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$ . Наряду с этим, они также предсказывают, что характеры спектров когерентных колебаний при сильном охлаждении пучка существенно зависят от величины номера азимутальной гармоники когерентного колебания  $|n|$ . Так, свойства длинноволновых колебаний ( $|n| \ll n_{th}$ ) могут существенно изменяться сильным трением, тогда как коротковолновые когерентные колебания ( $|n| \gg n_{th}$ ) протекают так же, как и в неохлаждаемых пучках. Причина этого заранее очевидна. Как уже говорилось, величина декремента охлаждения определяет в задаче среднюю частоту столкновений. При конечной величине разброса частот обращения  $\delta\omega_0$  величина  $\Delta t \sim 1/(|n|\delta\omega_0)$  оценивает характерное время существования в пучке когерентного колебания с номером гармоники  $n$ . В области параметров, где  $\lambda_{\parallel} \Delta t \gg 1$ , за это время в пучке происходит много столкновений. Поэтому они могут существенно изменить свойства когерентных колебаний пучка. Наоборот, в области  $\lambda_{\parallel} \Delta t \ll 1$  когерентные колебания протекают за промежутки времени, которые, в среднем, укладываются между столкновениями. В этих условиях свойства колебаний совпадают с бесстолкновительными.

## 4.5. Собственные частоты и устойчивость колебаний

Как уже упоминалось, при расчете расфазировок пучка в рамках теории линейных когерентных колебаний уместно потребовать, чтобы параметры пучка находились бы в пределах границ области устойчивости когерентных колебаний. В нашем случае граница области устойчивости располагается в плоскости комплексной переменной  $\zeta$ . Положение этой кривой находится решением дисперсионного уравнения (4.49) относительно  $\zeta$  при изменении частоты  $\Delta\omega_n$  вдоль действительной оси. В зависимости от значений величины  $(-b^2)$  для этого удобно воспользоваться формулой (4.39) – малые значения  $-b^2$ , либо формулой (4.50) – большие значения  $-b^2$ . Видно, что усиление

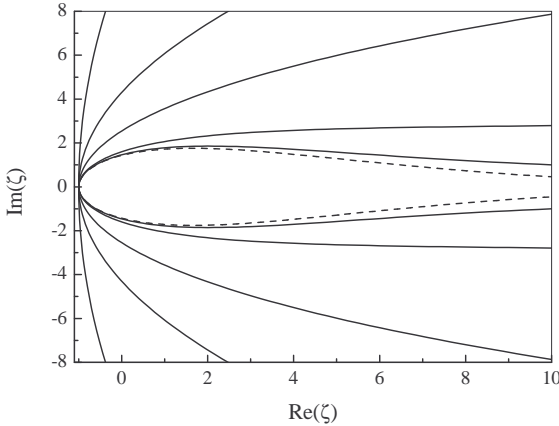


Рис. 11. Изменение границы области устойчивости продольных когерентных колебаний при уменьшении декремента охлаждения. Сплошные линии –  $\sqrt{|b|} = 0.1, 0.25, 0.5, 2, 20$ ; пунктир – неохлаждаемый пучок. Колебания устойчивы внутри граничных кривых

охлаждения существенно расширяет границу области устойчивости вдоль оси  $\text{Im}\zeta$  (рис. 11).

Вместе с тем, из этого рисунка видно и это может быть прослежено в формулах (4.39) и (4.50), что охлаждение пучка не устраняет неустойчивость отрицательной массы. Поэтому вся граница области устойчивости лежит правее прямой  $\text{Re}\zeta = -1$ . Причина этого доста-

точно очевидна. Напомним, что неустойчивость отрицательной массы обязана взаимному сближению частиц по фазам  $\phi$  под действием сил пространственного заряда пучка. Это явление происходит при энергиях частиц, превышающих критическую энергию накопителя ( $\omega'_0 < 0$ ). Однако, согласно уравнениям (4.1) и (4.4) в области энергий, где  $\omega'_0 < 0$ , охлаждение пучка не препятствует сближению фаз частиц с импульсами  $\pm \Delta p_{0i}$ , а лишь замедляет его. Для длинноволновых колебаний поля пространственного заряда пучка ( $\text{Im}\Omega_n^2 = 0$ ) уменьшение разницы фаз таких частиц можно охарактеризовать декрементом  $|\Omega_n^2|/(n^2\lambda_{\parallel})$  (для простоты считаем, что  $|\Omega_n^2| \leq \lambda_{\parallel}^2/4$ ). Рассеяния этих частиц на участке охлаждения приводят к их диффузионному расхождению по фазам. Сравнивая коэффициент такой диффузии  $(\delta\omega_0)^2/\lambda_{\parallel}$  с декрементом, получим порог неустойчивости отрицательной массы, записанный в виде

$$\frac{(\delta\omega_0)^2}{\lambda_{\parallel}} = \frac{|\Omega_n^2|}{n^2\lambda_{\parallel}},$$

или  $\text{Re}\zeta = -1$ .

Проследим еще асимптотическое поведение границы в области  $\text{Re}\zeta \gg 1$ . Для этого вычислим  $\varepsilon(\Delta\omega_n)$  в пределе больших частот ( $\Delta\omega_n \rightarrow \infty$ ). Удобно переписать уравнение (4.39) в виде

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) = 1 - \Omega_n^2 e^{-b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^{2l}}{l!} \frac{1}{(z_n + il\lambda_{\parallel})^2 + \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}, \quad (4.57)$$

где

$$\Delta\omega_n = z_n - i\frac{\lambda_{\parallel}}{2} + i\lambda_{\parallel}b^2 \quad (4.58)$$

и мы использовали определение (4.36). В пределе больших частот ( $|z_n| \rightarrow \infty$ ) пишем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Delta\omega_n) &\simeq 1 - \frac{\Omega_n^2}{z_n^2} e^{-b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^{2l}}{l!} \left(1 - \frac{2il\lambda_{\parallel}}{z_n}\right) \\ &= 1 - \frac{\Omega_n^2}{z_n^2} + \frac{i\Omega_n^2 b^2 \lambda_{\parallel}}{z_n^3}. \end{aligned}$$



При больших значениях величины  $z_n$  ( $|z_n| \gg 1$ ) дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\Omega_n^2}{z_n^2} + \frac{i\Omega_n^2 b^2 \lambda_{\parallel}}{z_n^3} = 0 \quad (4.59)$$

имеет корни лишь в области  $|\zeta| \gg 1$ . Записывая  $z_n = \pm\sqrt{\Omega_n^2} + \delta_n$  и предполагая  $|\delta_n| \ll |\sqrt{\Omega_n^2}|$ , находим  $z_n = \pm\sqrt{\Omega_n^2} - ib^2 \lambda_{\parallel}$ , или

$$\Delta\omega_n = \pm\sqrt{\Omega_n^2} - ib^2 \lambda_{\parallel} - i\frac{\lambda_{\parallel}}{2} + i\lambda_{\parallel} b^2 = \pm\sqrt{\Omega_n^2} - i\frac{\lambda_{\parallel}}{2}. \quad (4.60)$$

В области  $\text{Re}\zeta \gg 1$  эти корни соответствуют ненарастающим колебаниям ( $\text{Im}\Delta\omega_n \leq 0$ ) при выполнении условия

$$(\text{Im}\zeta)^2 \leq \frac{\lambda_{\parallel}^2}{n^2 \delta\omega_0^2} \text{Re}\zeta. \quad (4.61)$$

Более подробное вычисление граничной кривой (рис. 12) показывает

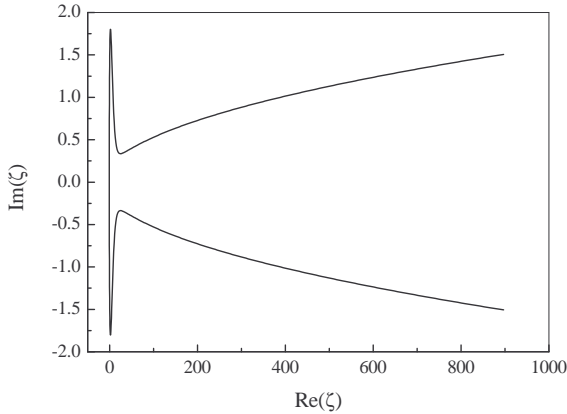


Рис. 12. Пример границы области устойчивости при больших значениях  $\text{Re}\zeta$ ;  $\sqrt{-b^2} = 30$ . Колебания устойчивы внутри граничной кривой

ее своеобразное поведение в области  $\text{Re}\zeta \gg 1$ . Даже начально сужаясь (случай  $|b^2| \gg 1$ ), она переходит в параболу (4.61) при больших значениях  $\text{Re}\zeta$ . Такой ход граничной кривой целиком обязан охлаждению пучка. Согласно условию в (4.61) он пропадает в пределе  $\lambda_{\parallel} \rightarrow 0$ . Вместе с тем, следует помнить, что условия применимости

теории линейных когерентных колебаний сами ограничивают допустимые значения величин когерентных сдвигов частоты пучков.

Перейдем к вычислению собственных частот продольных когерентных колебаний несгруппированного, охлаждаемого пучка. Они определяются решением дисперсионного уравнения (4.49). При сильном охлаждении характер этих решений зависит от номера гармоники колебаний. Как уже говорилось, гармоники с номерами  $|n| \gg n_{th}$  развиваются так, как если бы охлаждение пучка отсутствовало. По этой причине мы проведем вычисления для случая  $-b^2 \ll 1$ . В такой области параметров главной особенностью спектров продольных когерентных колебаний несгруппированных пучков является подавление затухания Ландау когерентных колебаний и процессов кинематической расфазировки трением и столкновениями.

Опуская в (4.57) старшие степени  $b^2$ , пишем

$$\varepsilon(\Delta\omega_n) \simeq 1 - \frac{\Omega_n^2}{z_n^2 + \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2} = 0, \quad (4.62)$$

или

$$z_n = \pm \sqrt{\Omega_n^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2},$$

и

$$\Delta\omega_n^{(\pm)} = -i\frac{\lambda_{\parallel}}{2} - i\Lambda \pm \sqrt{\Omega_n^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}, \quad (4.63)$$

где мы определили

$$\Lambda = -\lambda_{\parallel}b^2 = \frac{n^2\delta\omega_0^2}{\lambda_{\parallel}}. \quad (4.64)$$

Если дополнительно предположить, что  $\Omega_n^2$  является действительной, положительной величиной, то из выражения (4.63) видно, что при большом токе пучка ( $\Omega_n^2 \geq \lambda_{\parallel}^2/4$ ) декременты когерентных колебаний мало отличаются от декремента охлаждения пучка ( $\lambda_{\parallel}/2$ ). Величины когерентных сдвигов частот при этом равны  $\pm\sqrt{\Omega_n^2 - (\lambda_{\parallel}^2/4)}$ . В области  $\Omega_n^2 \gg \lambda_{\parallel}^2/4$  такие когерентные колебания хорошо определены. Поэтому затухание их амплитуд повторяет уменьшение охлаждением величин отклонений импульсов частиц пучка, движущихся в полях волн с частотами  $\pm\Omega_n$ .

При малом токе пучка ( $\Omega_n^2 \leq \lambda_{\parallel}^2/4$ ) колебания становятся аperiодическими. В этой области параметров величины когерентных сдвигов частот в (4.63) равны нулю:

$$\Delta\omega_n^{(\pm)} = -i\frac{\lambda_{\parallel}}{2} - i\Lambda \pm i\sqrt{\frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2 - \Omega_n^2},$$

а моды затухают с декрементами

$$-\text{Im}\Delta\omega_n^{(+)} = \frac{\lambda_{\parallel}}{2} + \Lambda - \sqrt{\frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2 - \Omega_n^2} \quad (4.65)$$

$$\simeq \frac{n^2\delta\omega_0^2 + \Omega_n^2}{\lambda_{\parallel}}, \quad \Omega_n^2 \ll \lambda_{\parallel}^2/4, \quad (4.66)$$

и

$$-\text{Im}\Delta\omega_n^{(-)} \simeq \frac{\lambda_{\parallel}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2 - \Omega_n^2}, \quad -b^2 \ll 1. \quad (4.67)$$

Напомним, что  $\delta\omega_0 = |\omega'_0|\sigma_p$  – разброс частот обращения в пучке.

#### 4.6. Когерентный сигнал при сильном охлаждении

Применим полученные формулы для вычисления продольного когерентного сигнала несгруппированного пучка, предполагая, что декременты охлаждения пучка велики ( $\lambda_{\parallel} \gg |n|\delta\omega_0$ ). В такой области параметров диэлектрическая постоянная пучка  $\varepsilon(\Delta\omega_n)$  определяется формулой (4.62). Гармоники начальной линейной плотности пучка вычисляются, удерживая в формулах (4.44) или (4.47) лишь младшие степени  $b$

$$\rho_{n,\omega}^{(0)} \simeq \frac{i\rho_{n,\lambda}}{\Delta\omega_n + i\Lambda}, \quad \lambda_{\parallel} \gg |n|\delta\omega_0, \quad (4.68)$$

где

$$\rho_{n,\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n^{(0)}(\Delta p) \exp\left(\frac{-in\omega'_0\Delta p}{\lambda_{\parallel}}\right). \quad (4.69)$$

Подставив эти выражения в формулу (4.48), получим

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{2\pi} \frac{\rho_{n,\omega}^{(0)} e^{-i\Delta\omega_n t}}{\varepsilon(\Delta\omega_n)} = \rho_{n,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{e^{-i\Delta\omega_n t}}{\Delta\omega_n + i\Lambda} \times \frac{\left(\Delta\omega_n + i\Lambda + i\frac{\lambda_{\parallel}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}{\left(\Delta\omega_n + i\Lambda + i\frac{\lambda_{\parallel}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2 - \Omega_n^2},$$

или

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) = \rho_{n,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\omega_n}{-2\pi i} \frac{\left(\Delta\omega_n - \Delta\omega_n^{(+)}\right) \left(\Delta\omega_n - \Delta\omega_n^{(-)}\right) + \Omega_n^2}{\left(\Delta\omega_n - \Delta\omega_n^{(+)}\right) \left(\Delta\omega_n - \Delta\omega_n^{(-)}\right)} \times \frac{e^{-i\Delta\omega_n t}}{\Delta\omega_n + i\Lambda},$$

где корни дисперсионного уравнения  $\Delta\omega_n^{(\pm)}$  определены в (4.63). Простое интегрирование по  $\Delta\omega_n$  дает

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) = \rho_{n,\lambda} \frac{\Omega_n^2}{2\sqrt{\Omega_n^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}} \times \left( \frac{\exp\left(-i\Delta\omega_n^{(+)} t\right)}{-i\frac{\lambda_{\parallel}}{2} + \sqrt{\Omega_n^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}} + \frac{\exp\left(-i\Delta\omega_n^{(-)} t\right)}{i\frac{\lambda_{\parallel}}{2} + \sqrt{\Omega_n^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}} \right). \quad (4.70)$$

Это выражение особенно упрощается в специальном случае, когда  $\Omega_n^2$  является действительной и положительной величиной. Используя результаты предыдущего раздела, пишем

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) = \rho_{n,\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda_{\parallel} t}{2}\right) \left( \cos(\Omega t) + \frac{\lambda_{\parallel}/2}{\Omega} \sin(\Omega t) \right), \quad (4.71)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\Omega_n^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2}, \quad \Omega_n^2 \geq \frac{1}{4}\lambda_{\parallel}^2, \quad (4.72)$$

и ( $\Omega_n^2 \ll \lambda_{\parallel}^2/4$ )

$$e^{in\omega_0 t} \rho_n(t) \simeq \rho_{n,\lambda} \exp\left(-\frac{n^2 \delta\omega_0^2 + \Omega_n^2}{\lambda_{\parallel}} t\right). \quad (4.73)$$

В обоих случаях гармоники линейной плотности пучка затухают по универсальному закону, который не зависит от вида начального распределения импульсов частиц в пучке.

Иногда удобнее измерять не сами зависимости гармоник линейной плотности пучка от времени ( $\rho_n(t)$ ), а спектры этих когерентных сигналов ( $\rho_n(\Delta\omega_n)$ ). Согласно формулам (4.71) и (4.73) характер зависимости  $\rho_n(\Delta\omega_n)$  зависит от числа частиц в пучке. В пучке малой интенсивности либо при больших величинах декремента охлаждения ( $\Omega_n^2 \ll \lambda_{\parallel}^2/4$ ) в таком спектре доминирует одиночный пик с центром на частоте  $n\omega_0$ . Ширина этого пика равна декременту медленно-затухающей моды когерентных колебаний:

$$\delta(\Delta\omega_n) = \frac{n^2\delta\omega_0^2 + \Omega_n^2}{\lambda_{\parallel}}. \quad (4.74)$$

Если интенсивность пучка велика ( $\Omega_n^2 \gg \lambda_{\parallel}^2/4$ ), то согласно формуле (4.71) амплитуды вкладов мод с частотами  $\Delta\omega_n^{(\pm)}$  равны. Это означает, что при измерении спектров когерентных колебаний такого пучка зависимости амплитуд от частоты  $\Delta\omega_n$  будут содержать два пика равной высоты на частотах  $\Delta\omega_n = \pm\Omega$  с ширинами, равными декрементам затухания этих мод  $\lambda_{\parallel}/2$ .

Такая форма спектра колебаний является следствием предположенной при вычислении формул (4.71) и (4.73) бездиссипативности электродов, взаимодействующих с пучком. В действительности, энергия наведенных пучком полей по тем или иным причинам теряется. Это могут быть омические потери либо потери за счет различного рода излучений. Поэтому даже если такие потери малы, величина  $\Omega_n^2$  является комплексной. В свою очередь, это означает, что моды  $\Delta\omega_n^{(\pm)}$  затухают с неравными по величине декрементами, а при увеличении потерь мода с меньшим декрементом вообще может стать неустойчивой. Вдали границы области устойчивости спектры колебаний таких пучков будут иметь неравные высоты пиков на частотах  $\Delta\omega_n = \pm\Omega$ . Такое поведение спектров наблюдается экспериментально.

При приближении менее устойчивой моды к границе области устойчивости ее пик в спектре будет доминировать, имитируя спектр

пучка при его предельно сильном охлаждении. По этой причине правильная интерпретация результатов измерений спектров когерентных колебаний может потребовать достаточно аккуратных измерений когерентных сдвигов частот.

## 5. Заключительные замечания

В пособии описан процесс расфазировки продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка в условиях, когда начальные амплитуды колебаний устанавливаются выбиванием части пучка. Строго говоря, возмущения линейной плотности пучка в этом случае не малы. Вместе с тем, наблюдения расфазировок пучков в таких экспериментах на многих установках дают результаты, которые достаточно хорошо согласуются с расчетами, выполненными в рамках линейной теории когерентных колебаний. Это происходит в тех случаях, когда наблюдаются гармоники плотности с сравнительно небольшими номерами, а величины (комплексных) когерентных сдвигов частот продольных когерентных колебаний для этих гармоник малы по сравнению с частотой обращения частиц в машине. Это – основополагающее требование линейной теории когерентных колебаний пучков.

Вместе с тем, возможны и другие способы приготовления начальных когерентных колебаний в пучке. Например, они могут готовиться подачей на ускоряющий зазор в накопителе (короткого) импульса напряжения, модулирующего разброс импульсов в пучке. Линейная плотность частиц в пучке в таких измерениях может изменяться крайне мало. Мы надеемся, что читатель теперь достаточно хорошо подготовлен, чтобы самостоятельно получить формулы, необходимые для описания ожидаемых результатов таких измерений.

Антизатухание Ландау мод поперечных когерентных колебаний может ограничивать возможности измерений параметров интенсивных пучков в условиях, когда когерентные сдвиги частот этих мод велики. Для измерений, связанных с ударом пучка в одном из направлений, эта проблема внутренне присуща методу. Она обусловлена разрушением начальной функции распределения пучка в фазовом пространстве измеряющим ударом. Хотя этот вопрос и не рассматри-

вается в пособии, можно утверждать [2, 4], что сильное охлаждение бетатронных колебаний частиц устраняет изменения функции распределения стационарного состояния пучка, которые могут вызывать антизатухание Ландау когерентных колебаний. В этом смысле изучение расфазировок поперечных колебаний пучков в накопителях с достаточно быстрым охлаждением оказывается менее чувствительным к упоминавшемуся ограничению.

Быстрое охлаждение и сопровождающая его диффузия частиц подавляют фазовую подвижность частиц в пучке и затухание Ландау когерентных колебаний. Благодаря быстрому выравниванию импульсов частиц охлаждение, вообще, увеличивает степень когерентности колебаний в пучке или долю времени, когда частицы колеблются когерентно. Если  $\lambda$  – декремент охлаждения, а  $\delta\omega$  – разброс частот в пучке, то в таких задачах появляется дополнительный параметр  $n_{th} = \lambda/\delta\omega$ . Охлаждение существенно сказывается на свойствах когерентных колебаний пучка в области, где  $n_{th} \gg 1$ . Это проявляется, с одной стороны, в подавлении затухания Ландау, а с другой – в существенном расширении некоторых областей устойчивости когерентных колебаний пучка.

Хотя мы совсем не обсуждали здесь расфазировку поперечных колебаний сгруппированных пучков, читатель легко может найти соответствующие формулы самостоятельно. Для этого нужно лишь учесть, что в сгруппированном пучке фаза  $\phi$  и отклонения импульсов частиц от равновесного значения  $\Delta p$  осцилляторно изменяются со временем. Частота этих изменений равна частоте синхротронных колебаний частиц. Кроме того, полезно еще учесть, что благодаря хроматичности фокусировки фазы бетатронных колебаний частиц также осцилляторно модулируются их синхротронными колебаниями. При этом, например, пишут

$$\psi_y(t) = \psi_{y0} + \omega_y(I)t + \frac{\xi_y}{\alpha_p}(\phi(t) - \phi(0)),$$

где  $\psi_{y0}$  и  $\phi(0)$  – соответствующие начальные значения фаз. Результатом таких модуляций является появление в спектрах поперечных когерентных сигналов гармоник частоты синхротронных колебаний (так называемые синхробетатронные частоты). Если нелинейность

синхротронных колебаний пренебрежимо мала, то спектры синхротронных и синхробетатронных колебаний эквидистантны. По этой причине затухание поперечных когерентных колебаний оказывается целиком обязанным октупольной нелинейности фокусировки машины. Влияние же хроматизма фокусировки приводит к регулярным модуляциям когерентных сигналов, а также, возможно, к неустойчивости определенных синхробетатронных мод сгустков пучка. Частично эти вопросы описаны, например, в учебном пособии [1].



## Библиографический список

1. Пестриков Д. В. Лекции по когерентным колебаниям. Часть I и II: Учеб. пособие. Новосибирск, 1996.
2. Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989.
3. Пестриков Д. В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков: Учеб. пособие. Новосибирск, 2002.
4. Dikansky N. S., Pestrikov D. V. Physics of Intense Beams and Storage Rings. N.Y.: AIP PRESS, 1994.