

Н. А. Винокуров

Лекции по электронной оптике для ускорительных физиков

Аннотация

В лекциях изложены основные понятия электронной оптики. Изложение ориентировано на подготовку специалистов в области физики и техники ускорителей заряженных частиц. Поэтому главным математическим средством является матричная оптика, а нелинейности (абберации) и взаимодействие между частицами считаются относительно малыми поправками.

Глава 1. Движение невзаимодействующих частиц

Рассмотрим ансамбль частиц с приблизительно одинаковыми скоростями и координатами. Такой сосредоточенный в относительно малой области шестимерного фазового пространства ансамбль мы будем называть пучком или, более точно, сгустком. Число частиц в сгустке, как правило, велико, но его конкретная величина не имеет значения, так как они не взаимодействуют.

Для описания движения частиц выберем в качестве начала отсчета координат в шестимерном фазовом пространстве одну из них. Мы будем называть ее опорной частицей, а ее траекторию в трехмерном пространстве координат - опорной траекторией. Везде далее мы будем полагать движение опорной частицы известным и интересоваться лишь относительным движением произвольной частицы. Пусть опорная траектория задается зависимостью координат \mathbf{r} от натурального параметра s (длины дуги, $ds = |d\mathbf{r}|$):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(s). \quad (1)$$

Касательный единичный вектор \mathbf{t} , главная нормаль \mathbf{n} и бинормаль \mathbf{b} (см. Рис. 1) определяются как

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{\left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (2)$$

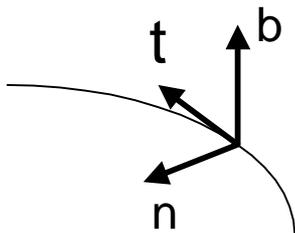


Рис. 1. Нормальный трехгранник.

$R = \left| d\mathbf{t}/ds \right|^{-1}$ называется радиусом кривизны.

В качестве независимой переменной мы будем использовать не время, а продольную координату s . Тогда продольное движение произвольной частицы описывается моментом времени t , в который она имеет координату s (т. е. проходит через плоскость, содержащую точку опорной траектории с координатой s и «натянутую» на вектора главной нормали и бинормали в этой точке). При этом для опорной частицы t выбирается равным нулю. Следовательно, t есть запаздывание произвольной частицы относительно опорной. Поперечные координаты — x^1 и y выберем вдоль главной нормали и бинормали соответственно (Рис. 2).

¹ Знак «минус» соответствует стандартным обозначениям теории циклических ускорителей, когда положительное значение x имеют частицы «снаружи» траектории.

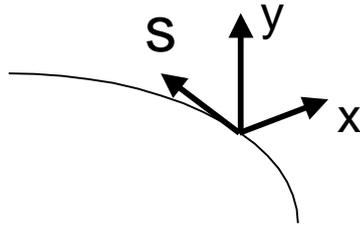


Рис. 2. Координаты, используемые для описания движения частиц.

Если опорная траектория имеет форму окружности радиуса R , то введенные нами координаты можно соотнести с обычными цилиндрическими r, α, z следующим образом:

$$r = R + x$$

$$\alpha = s/R \quad .$$

$$z = y$$

Очевидно, что это можно сделать и локально в каждой точке произвольной опорной траектории.

Так как изменение координат описывается дифференциальными уравнениями второго порядка, удобно ввести переменные, в которых число уравнений удваивается, но их порядок понижается до первого (например, добавить к пространственным координатам скорости или импульсы). Для поперечных степеней свободы введем

$$x' \equiv \frac{dx}{ds}, \quad y' \equiv \frac{dy}{ds}, \quad (3)$$

а для продольной - отклонение энергии от опорной E_s

$$\varepsilon \equiv E - E_s. \quad (4)$$

Тогда состояние частицы полностью определяется столбцом, составленным из координат в фазовом пространстве:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ t \\ \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Изменение этого столбца вдоль траектории опорной частицы, т. е. его зависимость от натурального параметра этой траектории s , описывается векторным дифференциальным уравнением первого порядка (или, что то же самое, системой из шести дифференциальных уравнений первого порядка). С учетом этого зависимость $\mathbf{X}(s)$ от начальных условий $\mathbf{X}(0)$ можно записать в виде:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s, \mathbf{X}(0)). \quad (6)$$

Разложим функцию в правой части формулы (6) в ряд по компонентам $\mathbf{X}(0)$:

$$X_i(s) = \sum_{k=1}^6 M_{ik}(s) X_k(0) + \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 A_{ikl}(s) X_k(0) X_l(0) + \dots + \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 \sum_{m=1}^6 B_{iklm}(s) X_k(0) X_l(0) X_m(0) + \dots \quad (7)$$

Член нулевого порядка в этом разложении обратился в нуль по определению опорной частицы. Отмеченная в начале малость отклонений координат и скоростей от опорных обеспечивает хорошую сходимость ряда Тэйлора (7), т. е. возможность пренебречь членами высокого порядка.

В первом приближении выражение (7) сводится к линейному преобразованию

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{M}(s) \mathbf{X}(0), \quad (8)$$

где $\mathbf{M}(s)$ - матрица, описывающая участок опорной траектории от 0 до s . Применение матриц для расчета движения частиц существенно упрощает эту задачу. Во-первых, матричные элементы (их всего лишь 36) полностью описывают систему, через которую проходит пучок. Во-вторых, зная матрицы частей системы $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$, можно легко найти матрицу системы

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1 \quad (9)$$

(части пронумерованы по ходу пучка). С практической точки зрения это значит, что для расчета движения частиц в произвольном канале достаточно уметь записывать относительно простые матрицы основных элементов – пустого промежутка, фокусирующих линз, поворотных магнитов и др. Изучением таких матриц мы займемся в главе 2.

Пример 1. Матрица пустого промежутка длиной L

Так как опорная траектория в данном случае не искривлена, вместо главной нормали мы можем выбрать любой единичный вектор, перпендикулярный опорной траектории. Фазовые координаты на выходе промежутка выражаются через начальные условия очевидным образом:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + L x'_0 \\ x' &= x'_0 \\ y &= y_0 + L y'_0 \\ y' &= y'_0 \end{aligned}, \quad (10)$$

$$t = t_0 + \left. \frac{dT}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon_0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0$$

где $dT/d\varepsilon = (L/v_s^2) dv/d\varepsilon$ - величина, характеризующая зависимость времени пролета T через систему от энергии, называемая иногда продольной

дисперсией, v_s - скорость опорной частицы. Матрица преобразования (10) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{dT}{d\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Конец примера 1.

Часто практически интересные матрицы являются клеточно-диагональными, т. е. имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_3 \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где \mathbf{m} и $\mathbf{0}$ - матрицы низшего порядка («клетки»). Пример такой матрицы - матрица пустого промежутка (11). Матрица произведения клеточно-диагональных матриц тоже клеточно-диагональна, причем для ее вычисления достаточно перемножить соответствующие «клетки». Если все элементы, из которых состоит система, описываются клеточно-диагональными матрицами, то говорят, что между соответствующими степенями свободы отсутствует связь, и формулу (9) можно применять к матрицам низших порядков.

Вообще, разбив матрицы на клетки (не обязательно квадратные), т. е. разделяя каждую матрицу вертикальными и горизонтальными линиями, можно применить к этим матрицам обычные правила сложения перемножения, в которых матричные элементы заменены на клетки. Для умножения следует потребовать, чтобы при этом произведения клеток имели смысл. Это так, если все клетки - квадратные матрицы одного порядка, как в предыдущем абзаце. Другой интересный частный случай - разбиение на квадратную матрицу порядка $n - 1$ \mathbf{M} , столбец \mathbf{u} , строку \mathbf{v} и число a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{M}_2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2a_1 \\ \mathbf{v}_2\mathbf{M}_1 + a_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\mathbf{u}_1 + a_2a_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Полезной идеализацией являются бесконечно тонкие элементы, в которых не меняются координаты (так как для изменения координат потребовались бы бесконечные ускорения). Нечетные строки их матриц состоят, очевидно, из нулей и единиц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Любую матрицу можно представить в виде произведения матриц типов (11) и (14), что физически можно представить себе, как замену непрерывно действующей силы мгновенными толчками.

Если движение частицы в выбранных переменных подчиняется уравнениям Гамильтона, то линейные преобразования, описываемые матрицами, должны быть каноническими. Условием каноничности преобразования является инвариантность дифференциальной формы $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$. Для линейных преобразований оно сводится к инвариантности кососкалярного произведения векторов (столбцов) $\mathbf{X}^{(1)}$ и $\mathbf{X}^{(2)}$, описывающих две разные частицы.

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 I_{ik} X_i^{(1)} X_k^{(2)} \equiv \mathbf{X}^{(1)T} \mathbf{I} \mathbf{X}^{(2)}, \quad (15)$$

$\mathbf{X}^{(1)T}$ - транспонированный столбец, т. е. строка, и

$$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

причем $\mathbf{I}^2 = -\mathbf{E}$ (где \mathbf{E} - единичная матрица). Условие инвариантности кососкалярного произведения

$$(\mathbf{M} \mathbf{X}^{(1)})^T \mathbf{I} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(1)T} \mathbf{I} \mathbf{X}^{(2)} \quad (17)$$

в силу произвольности векторов дает:

$$\mathbf{M}^T \mathbf{I} \mathbf{M} = \mathbf{I}. \quad (18)$$

Матрицы, для которых выполняется равенство (18), образуют группу и называются симплектическими². В учебниках по аналитической механике доказывается, что произвольное преобразование фазового пространства является каноническим тогда и только тогда, когда его матрица Якоби $\|\partial X_i(s)/\partial X_k(0)\|$ - симплектическая.

Рассмотрим случай одной (независимой от других) степени свободы, например x . Заменяв в формулах (15) - (18) матрицы и столбцы 6 порядка на

² Аналогично, матрицы преобразований, сохраняющих евклидово скалярное произведение $\mathbf{X}^{(1)T} \mathbf{E} \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(1)T} \mathbf{X}^{(2)}$ с единичной матрицей \mathbf{E} , удовлетворяют условию $\mathbf{M}^T \mathbf{E} \mathbf{M} = \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{E}$ и образуют группу ортогональных матриц.

матрицы и столбцы 2 порядка, легко видеть, что условие симплектичности (18) сводится к унимодулярности и следует из инвариантности площади (15) $x^{(1)}x'^{(2)} - x'^{(1)}x^{(2)}$ параллелограмма со сторонами $\mathbf{X}^{(1)}$ и $\mathbf{X}^{(2)}$. Вместо параллелограмма иногда удобнее представлять его половину – треугольник с вершинами в начале координат и на частицах. Для общего случая симплектических матриц произвольного порядка из определения (18) тоже следует их унимодулярность.

Для описания движения в магнитном поле удобно переопределить пару продольных координат следующим образом. В качестве пятой координаты возьмем не время t , а vt . В качестве шестой координаты выберем не отклонение энергии ε , а относительное отклонение импульса $\Delta p/p = \beta^{-2}\varepsilon/E_0$, где $\beta = v/c$. Разъясним этот переход более подробно. Исходными каноническими переменными являются поперечные координаты и импульсы, а также время прихода t и отклонение энергии ε . Инвариантом преобразований является сумма площадей параллелограммов, построенных на координатах двух частиц

$$\begin{pmatrix} x_1 & p_{x1} & y_1 & p_{y1} & t_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_{x2} \\ y_2 \\ p_{y2} \\ t_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} =$$

$$x_1 p_{x2} - p_{x1} x_2 + y_1 p_{y2} - p_{y1} y_2 + t_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 t_2 =$$

$$p \left(x_1 \frac{p_{x2}}{p} - \frac{p_{x1}}{p} x_2 + y_1 \frac{p_{y2}}{p} - \frac{p_{y1}}{p} y_2 + vt_1 \frac{\Delta p_2}{p} - \frac{\Delta p_1}{p} vt_2 \right)$$

В магнитном поле импульс p не меняется, поэтому в новых переменных преобразования остаются каноническими.

Прямой подстановкой (14) в (18) легко убедиться в том, что тонкий элемент, совершающий линейное каноническое преобразование, описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_x & 1 & c_{xy} & 0 & c_{xt} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{xy} & 0 & -D_y & 1 & c_{yt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{xt} & 0 & c_{yt} & 0 & -D_t & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

с тремя оптическими силами D_x , D_y , D_t и тремя коэффициентами связи c_{xy} , c_{xt} , c_{yt} .

Пример 2. Телескоп

Для расчета хода лучей в световой оптике можно применять матрицы четвертого порядка. В случае осесимметричных элементов (например,

стеклянных линз, ограниченных сферическими поверхностями) эти матрицы распадаются на две одинаковых клетки второго порядка. В частности, матрицы пустого промежутка длиной L (11) и линзы с фокусным расстоянием F (19) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица системы, состоящей из первой линзы, пустого промежутка и второй линзы, находится перемножением матриц этих элементов справа налево в порядке прохождения их лучами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{F_1} & L \\ \frac{L}{F_1 F_2} - \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} & 1 - \frac{L}{F_2} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Телескоп преобразует параллельные лучи (приходящие от бесконечно удаленного источника) в параллельные (так как глаз человека приспособлен к восприятию удаленных объектов). Тогда из равенства $x' = M_{21} x_0 + M_{22} x'_0$ следует, что $M_{21} = 0$. Чтобы выполнить это условие, надо выбрать $L = F_1 + F_2$. Величина M_{22} называется увеличением телескопа, а в случае произвольной оптической системы - угловым увеличением. Соответственно, M_{11} называется координатным увеличением. Для телескопа $M_{22} = 1/M_{11} = -F_1/F_2$.

Конец примера 2.

Пример 3. Тонкий ускоряющий зазор

Рассмотрим прохождение частицы с зарядом e , массой m и импульсом p_0 через тонкий плоский конденсатор с разностью потенциалов U . Выберем опорную траекторию перпендикулярной к обкладкам. Так как сила имеет только продольную составляющую, после прохождения зазора изменится только продольная составляющая импульса \mathbf{p} . Тогда

$$\begin{aligned} x' &= \frac{p_x}{p} = \frac{p_0}{p} \frac{p_{x0}}{p_0} = \frac{p_0}{p} x'_0, \\ y' &= \frac{p_y}{p} = \frac{p_0}{p} \frac{p_{y0}}{p_0} = \frac{p_0}{p} y'_0, \end{aligned}$$

где $p = \sqrt{\left(\sqrt{p_0^2 + m^2 c^2} + eU/c\right)^2 - m^2 c^2}$, c - скорость света. Матрица ускоряющего зазора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0/p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0/p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Легко видеть, что эта матрица не симплектична, что является следствием выбора «неподходящих» переменных x' и y' вместо канонических p_x и p_y .

Для световых лучей аналогичная матрица четвертого порядка описывает нормальное прохождение через границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 , причем p_0/p заменяется на n_1/n_2 в полном соответствии с оптико-механической аналогией.

Конец примера 3.

Рассмотрим оптическую систему с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = s$ (Рис. 3). В геометрической оптике вводятся специальные точки на оптической оси (пересечения оптической оси с соответствующими перпендикулярными к ней плоскостями), положение которых характеризует систему.

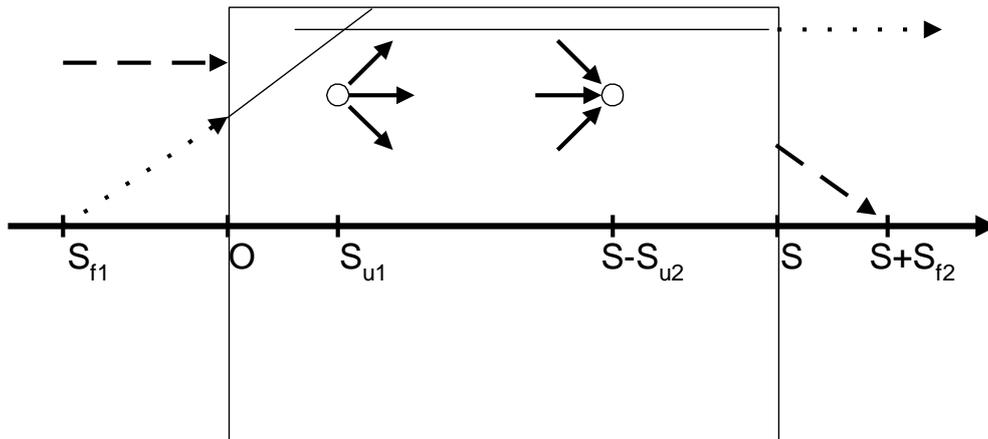


Рис. 3. Характеристические плоскости оптической системы. Луч, изображенный точками, выходит из пересечения оптической оси с передней фокальной плоскостью, а пунктирный - пересекается с оптической осью в задней фокальной плоскости. Сплошными стрелками показаны лучи, испускаемые источником, лежащим на передней главной плоскости, сходящиеся в точке-образовании на задней главной плоскости.

1. Фокальная плоскость пространства предметов (передняя фокальная плоскость). Лучи точечного источника, расположенного в этой плоскости (см. Рис. 3), после прохождения через оптическую систему становятся параллельными. Следовательно, продольная координата передней фокальной плоскости $-s_{f1}$ находится из условия обращения в нуль элемента (2, 2) (углового увеличения) матрицы перехода от этой плоскости до конца системы

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{f1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $s_{f1} = -M_{22}/M_{21}$.

2. Фокальная плоскость пространства изображений (задняя фокальная плоскость). Параллельные лучи после прохождения через систему сходятся в точке, лежащей на ней. Следовательно, ее продольная координата равна $s + s_{f2}$, где s - координата конца системы, а s_{f2} находится из равенства нулю элемента (1, 1) (координатного увеличения) матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{f2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

т. е. $s_{f2} = -M_{11}/M_{21}$.

3. Главные плоскости (передняя и задняя) с продольными координатами s_{u1} и $s - s_{u2}$. По определению, точечный источник, лежащий на передней главной плоскости, дает изображение на задней главной плоскости с поперечным увеличением равным единице. Это значит, что у матрицы перехода от передней главной плоскости к задней

$$\begin{pmatrix} 1 & -s_{u2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s_{u1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

элемент (1, 2) равен нулю, а элемент (1, 1) - единице. Простые вычисления дают $s_{u1} = (M_{21} M_{12} + M_{22} - M_{11} M_{22})/M_{21}$ и $s_{u2} = (M_{11} - 1)/M_{21}$. Смысл введения главных плоскостей состоит в том, что произвольная оптическая система эквивалентна тонкому элементу и двум пустым промежуткам с длинами s_{u1} и s_{u2} , т. к. ее матрица может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_{u2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M_{21} & M_{11} M_{22} - M_{21} M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{u1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Из такого представления оптической системы следует, что точка пересечения продолжений начальной (входной) и конечной (выходной) частей луча, выходящего из переднего фокуса, лежит в передней главной плоскости (см Рис. 3). Аналогичное утверждение справедливо для луча, проходящего через задний фокус, и задней главной плоскости. Если определитель матрицы \mathbf{M} равен единице, то $s_{u1} = (M_{22} - 1)/M_{21}$ и расстояния $s_{f1} + s_{u1}$ от передней фокальной плоскости до передней главной плоскости и $s_{f2} + s_{u2}$ от задней фокальной плоскости до задней главной плоскости равны $-1/M_{21}$, т. е. фокусному расстоянию. В этом случае вышеупомянутый тонкий элемент - это просто тонкая линза с оптической силой $-M_{21}$. Заметим, что даже в этом случае длина эквивалентной системы $s_{u1} + s_{u2} = (M_{11} + M_{22} - 2)/M_{21}$ отлична от истинной длины системы s .

Глава 2. Элементы электронно-оптических систем

Большинство электронно-оптических систем состоит из относительно простых элементов. Один из них - пустой промежуток - обсуждался в предыдущей главе. Теперь мы рассмотрим другие виды элементов.

Обычно для транспортировки заряженных частиц высоких энергий применяется магнитное, а не электрическое поле. Это объясняется тем, что при величине электрического поля на поверхности твердого тела, превышающей примерно 300 Гс, происходит пробой (эмиссия электронов с поверхности), а магнитное поле с индукцией 100 кГс и более используется во многих приборах. Запишем уравнения движения в магнитном поле³:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{\mathbf{r}}) = \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

где \mathbf{B} - индукция магнитного поля, $\gamma = E/mc^2$ - релятивистский фактор. Как следует из уравнения (1), ускорение перпендикулярно скорости и поэтому $|\dot{\mathbf{r}}| = v$ есть интеграл движения. Тогда движение полностью описывается уравнением траектории, получаемым из (1) подстановкой (см. соотношения (1.2)) $\dot{\mathbf{r}} = v \mathbf{t}$ и $\ddot{\mathbf{r}} = v^2 d\mathbf{t}/ds = \mathbf{n} v^2/R$:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{e}{pc} \mathbf{t} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

Из (2) следует, что $B_x = \mathbf{Bn} = 0$ и $\frac{1}{R} = \frac{e}{pc} \mathbf{n}(\mathbf{t} \times \mathbf{B}) = \frac{e}{pc} \mathbf{B}(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \frac{e}{pc} \mathbf{Bb} = \frac{e|B_y|}{pc}$.

Далее в этой главе мы рассмотрим частные случаи, находящие применения в ускорительной технике.

Магнитные линзы

Пусть поперечные компоненты поля B_x и B_y обращаются в нуль на оси z декартовой прямоугольной системы координат. Тогда выберем ось z в качестве опорной траектории, вектор главной нормали \mathbf{n} - вдоль оси x декартовой системы, а вектор бинормали \mathbf{b} - вдоль оси y . При этом $z = s$. Вблизи опорной траектории $B_x \approx y \cdot \partial B_x / \partial y + x \cdot \partial B_x / \partial x$ и $B_y \approx x \cdot \partial B_y / \partial x + y \cdot \partial B_y / \partial y$. Для парааксиального движения вдоль оси z получим линеаризованные уравнения траектории

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= -\frac{e}{pc} \left(x \frac{\partial B_y}{\partial x} + y \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{dy}{dz} B_z \right) \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{e}{pc} \left(x \frac{\partial B_x}{\partial x} + y \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{dx}{dz} B_z \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Для того, чтобы понять, как работают отдельные члены в правых частях уравнений (3), рассмотрим сначала случай тонкого элемента (см. формулы (1.14) и (1.19)). Будем считать, что поле вблизи оси z отлично от нуля только на некотором относительно коротком её отрезке. Интегрируя по z правые и левые

³ Положив равным нулю электрическое поле, мы должны помнить, что, в соответствии с уравнениями Максвелла, магнитное поле будет статическим.

части (3) в бесконечных пределах, получим в первом порядке по величине поля и в пренебрежении членами с продольным полем и углами:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz}(\infty) - \frac{dx}{dz}(-\infty) &= -\frac{e}{pc} \left(x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial x} dz + y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial y} dz \right) \\ \frac{dy}{dz}(\infty) - \frac{dy}{dz}(-\infty) &= \frac{e}{pc} \left(x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_x}{\partial x} dz + y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_x}{\partial y} dz \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $\text{div}\mathbf{B} = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_x}{\partial x} dz = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial y} dz$ и формула (4) дает выражения для D_x ,

D_y и c_{xy} в (1.19)

$$D_x = \frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial x} dz, \quad D_y = -\frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_x}{\partial y} dz, \quad c_{xy} = -\frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial y} dz, \quad (5)$$

а $D_t = c_{xt} = c_{yt} = 0$ вследствие сохранения энергии. Из (4) видно, что в формуле (3) члены, пропорциональные $\partial B_x / \partial y$ и $\partial B_y / \partial x$, соответствуют возвращающей силе, а B_z , $\partial B_x / \partial x$ и $\partial B_y / \partial y$, дают связь между степенями свободы.

Из магнитостатики известно, что $\partial B_y / \partial x - \partial B_x / \partial y = 4\pi j_z / c$, где j_z - продольная составляющая плотности тока. Следовательно, обеспечить одинаковую фокусировку по x и по y можно лишь создав осесимметричный ток вдоль оси z . Тогда уравнения траектории (3) перейдут в

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= -\frac{2\pi e j_z}{pc^2} x \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= -\frac{2\pi e j_z}{pc^2} y \end{aligned} \quad (6)$$

Линзы, как и все другие устройства, создаются для выполнения определенных задач, в данном случае - для фокусировки частиц. Поэтому «лишние» члены силе, пропорциональные B_z , $\partial B_x / \partial x$ и $\partial B_y / \partial y$ выбраны равными нулю.

В существующих линзах с продольным током последний создается разными способами. Во-первых, и ток и фокусируемые частицы могут проходить через проводящую среду. Для того чтобы прирост углового разброса частиц из-за многократного рассеяния на ядрах этой среды был как можно меньше, используют металл с самым малым атомным номером $Z=3$ - литий (литиевая линза) либо водородную плазму (плазменная линза). Во-вторых, ток в вакууме может быть создан другим пучком заряженных частиц (пучковая линза). В этом случае следует учитывать и электрическое поле пучка, что может менять жесткость фокусировки. В-третьих, сам пучок фокусируемых частиц тоже создает электрическое и магнитное поля. Дефокусировка пучка собственными полями будет рассмотрена в главе 7. Наконец, в-четвертых, продольный ток может быть током смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_z}{\partial t}$. Эта довольно слабая

фокусировка имеет место в ускоряющих высокочастотных резонаторах. В настоящее время лишь литиевые линзы существуют как работающие

устройства. Они имеют малые фокусные расстояния и применяются в системах конверсии частиц.

Магнитные квадрупольные линзы

В большинстве случаев присутствие вещества на опорной траектории очень нежелательно. Поэтому практически более интересен случай потенциального магнитостатического поля $\partial B_y / \partial x = \partial B_x / \partial y \equiv G$. Тогда, отбросив снова «нефокусирующие» члены, получаем из (3):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &\approx -\frac{eG}{pc} x \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &\approx \frac{eG}{pc} y \end{aligned} \quad (7)$$

Жёсткости в этих уравнениях одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. Это значит, что получившаяся линза, называемая квадрупольной, максимально астигматична. Тем не менее, именно квадрупольные линзы используются для фокусировки частиц высоких энергий.

Квадрупольную линзу с $\frac{eG}{pc} > 0$, которая фокусирует частицы по горизонтали x (и дефокусирует по вертикали y), принято называть фокусирующей, а линзу с $\frac{eG}{pc} < 0$ - дефокусирующей. Величину G иногда жаргонно называют «градиентом магнитного поля».

Сравнив уравнения (6) и (7), легко заметить, что все четыре имеют вид

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + kx = 0. \quad (8)$$

При постоянной жёсткости k легко выписать решения уравнения (8) с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\frac{dx}{dz}(0) = x'_0$:

$$x = x_0 \cos(\sqrt{k} z) + x'_0 \frac{\sin(\sqrt{k} z)}{\sqrt{k}} \quad (9)$$

при $k \geq 0$, либо

$$x = x_0 \cosh(\sqrt{-k} z) + x'_0 \frac{\sinh(\sqrt{-k} z)}{\sqrt{-k}} \quad (10)$$

при $k \leq 0$. Зная эти решения можно найти матрицу линзы с длиной L :

$$\mathbf{M}_x(L) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k} L) & \frac{\sin(\sqrt{k} L)}{\sqrt{k}} \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k} L) & \cos(\sqrt{k} L) \end{pmatrix} \quad (11)$$

при $k \geq 0$, либо

$$\mathbf{M}_x(L) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{-k} L) & \frac{\sinh(\sqrt{-k} L)}{\sqrt{-k}} \\ \sqrt{-k} \sinh(\sqrt{-k} L) & \cosh(\sqrt{-k} L) \end{pmatrix} \quad (12)$$

при $k \leq 0$. При $k \rightarrow 0$ обе матрицы переходят в матрицу пустого промежутка (см. две верхних клетки в (1.11)). Для получения матрицы тонкой линзы следует взять предел $L \rightarrow 0$ при фиксированном $kL = -1/F$. Из этого вывода матрицы тонкой линзы следует условие применимости приближения тонкой линзы $\sqrt{|k|}L \ll 1$, т. е. $L \ll F$.

Базисные траектории

Если жесткость k в уравнении (8) зависит от продольной координаты z , то удобно ввести два базисных решения этого уравнения $C_x(z)$ и $S_x(z)$ с начальными условиями $C_x(0) = 1$, $C'_x(0) = 0$, $S_x(0) = 0$, $S'_x(0) = 1$. Они называются косинусоподобным и синусоподобным решениями (или траекториями), так как при постоянном положительном k $C_x(z) = \cos(\sqrt{k}z)$, а $S_x(z) = \sin(\sqrt{k}z)/\sqrt{k}$. Тогда общее решение имеет вид $x = x_0 C_x(z) + x'_0 S_x(z)$, а матрица перехода от плоскости $z = 0$ до плоскости с произвольным z равна

$$\mathbf{M}_x(z) = \begin{pmatrix} C_x & S_x \\ C'_x & S'_x \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Так как уравнение (8) может быть заменено системой уравнений Гамильтона (с гамильтонианом $H(x', x) = x'^2/2 + kx^2/2$), то матрица перехода унимодулярна, т. е., $C_x S'_x - C'_x S_x = 1$. Само уравнение (8) может быть представлено в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка для двух переменных – координаты x и угла x'

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \mathbf{H}(z) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Учитывая, что $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = \mathbf{M}_x(z) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0$, получим из (14) дифференциальное уравнение

для матрицы перехода

$$\frac{d}{dz} \mathbf{M}_x = \mathbf{H} \mathbf{M}_x. \quad (16)$$

Дублеты квадрупольных линз

Возвращаясь к фокусировке магнитными квадрупольными линзами, рассмотрим систему, состоящую из двух таких линз – фокусирующей и дефокусирующей. Такая система называется дублетом, а, если линзы одинаковы, но знак G в них разный, – симметричным дублетом. Взяв для простоты симметричный дублет из тонких линз, разделенных пустым промежутком длиной L , мы можем использовать матрицу телескопа (1.20), подставив туда $F_1 = -F_2 = F$ для \mathbf{M}_x и $F_1 = -F_2 = -F$ для \mathbf{M}_y :

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{F} & L \\ -\frac{L}{F^2} & 1 + \frac{L}{F} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} 1 + \frac{L}{F} & L \\ -\frac{L}{F^2} & 1 - \frac{L}{F} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

При $L=0$ обе матрицы становятся единичными, т. е. линзы полностью компенсируют друг друга. Однако, при конечных расстояниях между линзами система имеет положительную оптическую силу $-\mathbf{M}_{21} = L/F^2$ по обоим направлениям. Заметим, что эта оптическая сила не линейна (как у одной квадрупольной линзы), а квадратична по величине поля (G). Это наводит на мысль о том, что в линеаризованной системе (3) отброшенные нами сначала члены связи тоже могут обеспечивать квадратичную по полю фокусировку.

Фокусировка продольным магнитным полем

Рассмотрим теперь общий случай отсутствия тока вблизи прямой опорной траектории. Тогда полные линеаризованные уравнения (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &\approx -\frac{e}{pc} \left(Gx + \frac{\partial B_y}{\partial y} y - \frac{dy}{dz} B_z \right) \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &\approx \frac{e}{pc} \left(Gy + \frac{\partial B_x}{\partial x} x - \frac{dx}{dz} B_z \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Кроме введенного ранее градиента $G \equiv \partial B_y / \partial x = \partial B_x / \partial y$ удобно ввести так называемый кривой градиент $S \equiv (\partial B_y / \partial y - \partial B_x / \partial x) / 2$. Название объясняется тем, что при повороте координатных осей x и y вокруг оси z на 45 градусов (по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси z) $G \rightarrow -S$, а $S \rightarrow G$. Поворот системы координат будет подробнее рассмотрен ниже.

Из равенства нулю дивергенции B следует, что $\partial B_x / \partial x = -S - \frac{1}{2} \partial B_z / \partial z$ и $\partial B_y / \partial y = S - \frac{1}{2} \partial B_z / \partial z$. Итак, мы представили поле вблизи оси z в виде суперпозиции поля квадрупольного с «градиентом» $\sqrt{G^2 + S^2}$, повернутого на угол $\frac{1}{2} \arctg \frac{S}{G}$ (по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси z), и аксиально-симметричного продольного поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &\approx \frac{e}{pc} \left(-Gx - Sy + \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} y + \frac{dy}{dz} B_z \right) \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &\approx \frac{e}{pc} \left(Gy - Sx - \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} x - \frac{dx}{dz} B_z \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Выше мы обсудили действие квадрупольного поля на частицу, поэтому теперь мы рассмотрим осесимметричное магнитное поле, т. е. $G = S = 0$. Для простейшего случая однородного поля $\partial B_z / \partial z = 0$ решив систему

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dz^2} &= \frac{eB}{pc} \frac{dy}{dz} \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= -\frac{eB}{pc} \frac{dx}{dz}\end{aligned}\tag{21}$$

где $R = \frac{pc}{eB}$, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & R \sin \frac{z}{R} & 0 & R \left(1 - \cos \frac{z}{R}\right) \\ 0 & \cos \frac{z}{R} & 0 & \sin \frac{z}{R} \\ 0 & -R \left(1 - \cos \frac{z}{R}\right) & 1 & R \sin \frac{z}{R} \\ 0 & -\sin \frac{z}{R} & 0 & \cos \frac{z}{R} \end{pmatrix}.\tag{22}$$

Внутри соленоида с короткими краями поле однородно и применимо решение (22). Считая края соленоида тонкими элементами, т. е. пренебрегая изменением поперечных координат частицы при прохождении краев, найдем их матрицы. Интегрируя уравнения (20) по входному краю, получим

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz}(z_2) - \frac{dx}{dz}(z_1) &= \frac{e}{2pc} y \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \\ \frac{dy}{dz}(z_2) - \frac{dy}{dz}(z_1) &= -\frac{e}{2pc} x \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial B_z}{\partial z} dz\end{aligned}\tag{23}$$

Продольные координаты z_1 и z_2 выбраны, соответственно, слева и справа от края, так, что $B_z(z_1) = 0$, а $B_z(z_2) = B$. Взяв интегралы в (23) запишем матрицу входного края

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2R} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{24}$$

Матрица выходного края получается аналогично, и описывается формулой (24) с заменой R на $-R$. Отметим, что матрицы (22) и (24) не симплектичны. В магнитном поле канонический импульс имеет вид $\gamma m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ (где γ энергия частицы, отнесенная к энергии покоя, \mathbf{A} - векторный потенциал), а не $\gamma m \mathbf{v}$, т. е. используемые нами переменные - не канонические. Однако, полная матрица соленоида, получаемая перемножением трех матриц,

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \varphi}{2} & R \sin \varphi & \frac{\sin \varphi}{2} & R(1 - \cos \varphi) \\ -\frac{\sin \varphi}{4R} & \frac{1 + \cos \varphi}{2} & \frac{\cos \varphi - 1}{4R} & \frac{\sin \varphi}{2} \\ -\frac{\sin \varphi}{2} & R(\cos \varphi - 1) & \frac{1 + \cos \varphi}{2} & R \sin \varphi \\ \frac{1 - \cos \varphi}{4R} & -\frac{\sin \varphi}{2} & -\frac{\sin \varphi}{4R} & \frac{1 + \cos \varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $\varphi = L/R$, L – длина соленоида, симплектична, что вполне естественно, так как вне соленоида магнитного поля нет и векторный потенциал может быть выбран нулевым. Эта ситуация похожа на прохождение света через стеклянную линзу. Матрицы входа в линзу и выхода из нее не симплектичны (см. замечание после формулы (1.21)), но полная матрица линзы симплектична. Случай неосесимметричного тонкого края соленоида сводится согласно уравнению (20) к добавлению к нему тонкого квадруполья. Например, для плоского входного края с $B_y=0$, $\partial B_x/\partial x = -S - \frac{1}{2}\partial B_z/\partial z = 0$, и $G = 0$ из (20) получается матрица

входного края

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

которую можно представить как произведение матриц осесимметричного края соленоида (24) и тонкого косоугольного квадруполья (порядок не имеет значения, т. к. матрицы тонких элементов коммутируют)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2R} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2R} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Поворот поперечных осей координат

Итак, если на оси системы отсутствуют поперечные компоненты магнитного поля, то ее можно представить в виде комбинации квадрупольей и соленоидов, создающих на оси продольное поле. Удобно ввести еще один (фиктивный) тонкий элемент, описывающий переход к новым поперечным координатным осям, повернутым относительно старых на угол φ . Такое преобразование координат показано на Рис. 4 и описывается формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

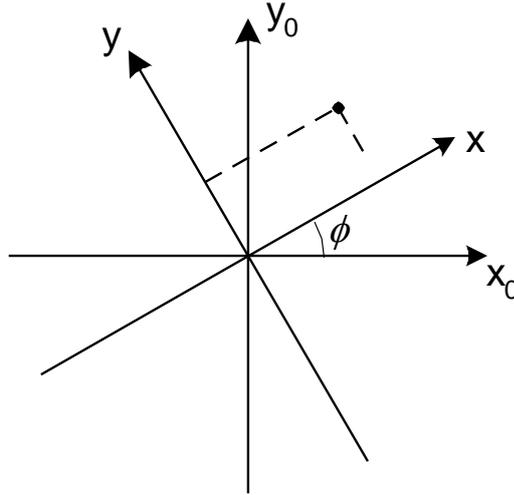


Рис. 4. Поворот координатных осей.

Поперечные компоненты импульса преобразуются по тому же закону. Поэтому

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 = \mathbf{R}(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0. \quad (28)$$

Пусть некоторая система имеет матрицу $\mathbf{M}(0)$. Если эту систему повернуть вокруг оси z на угол φ (по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси z), то её матрица может быть найдена по формуле⁴

$$\mathbf{M}(\varphi) = \mathbf{R}(-\varphi)\mathbf{M}(0)\mathbf{R}(\varphi) \quad (29)$$

Например, взяв в качестве такой системы тонкий квадруполь, получим матрицу

$$\mathbf{R}(-\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos(2\varphi)}{F} & 1 & -\frac{\sin(2\varphi)}{F} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sin(2\varphi)}{F} & 0 & \frac{\cos(2\varphi)}{F} & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

которая при $\varphi = \pi/4$ переходит в матрицу «чистого» косоугольного квадруполя.

При помощи матрицы поворота координатных осей можно разобраться в сложной на вид структуре полной матрицы соленоида \mathbf{M}_s (см. формулу (25)). Если умножить эту матрицу на $\mathbf{R}(-\varphi/2)$ (с любой стороны, т. к. эти матрицы коммутируют), то недиагональные блоки занулятся. Это значит, что

⁴ Напомним, что $\mathbf{R}(-\varphi) = [\mathbf{R}(\varphi)]^{-1}$.

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{R}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & 2R \sin \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2R} \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\varphi}{2} & 2R \sin \frac{\varphi}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2R} \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Из последней формулы видно, что действие соленоида сводится к повороту на угол $\varphi/2$ вокруг оси z и фокусировке толстой линзой (ср. с выражением (11)). Естественно, что само по себе продольное однородное магнитное поле не фокусирует. Но на краю поперечные компоненты поля «закручивают» частицы, вследствие чего в продольном поле возникает сила Лоренца, направленная к оси соленоида. Как следует из (31), оптическая сила тонкого соленоида равна $L/(2R)^2$. Если продольное поле соленоида не кусочнопостоянно, то его можно представить, как последовательность коротких соленоидов и оптическая сила произвольного тонкого соленоида выразится в виде

$$\frac{1}{F_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{4R^2(z)} = \left(\frac{e}{2pc}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2(z) dz, \quad (32)$$

а суммарный угол поворота –

$$\phi = \frac{\varphi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2R(z)} = \frac{e}{2pc} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(z) dz. \quad (33)$$

Отметим, что интеграл продольного поля вдоль оси z равен $4\pi NI/c$, где NI – суммарный ток обмотки соленоида. Обычно соленоиды фокусируют несколько слабее, чем дублеты или триплеты квадрупольей. Поэтому их редко применяют при высоких энергиях частиц.

Линза с продольным электростатическим полем

Пусть на оси z есть только продольное электрическое поле $E_z(0,0,z)$. Так как в пустоте его дивергенция равна нулю $\text{div } \mathbf{E} = \partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z = 0$, то вблизи мест его изменения имеются поперечные компоненты. Рассмотрим аксиально-симметричный случай. Тогда вблизи оси z

$$\begin{aligned} E_x &\approx \frac{\partial E_x}{\partial x}(0,0,z)x = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0,0,z)x \\ E_y &\approx \frac{\partial E_y}{\partial y}(0,0,z)y = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0,0,z)y \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть при $z = 0$ находится проводящая плоскость с круглым отверстием в начале координат, как это показано на Рис. 5.

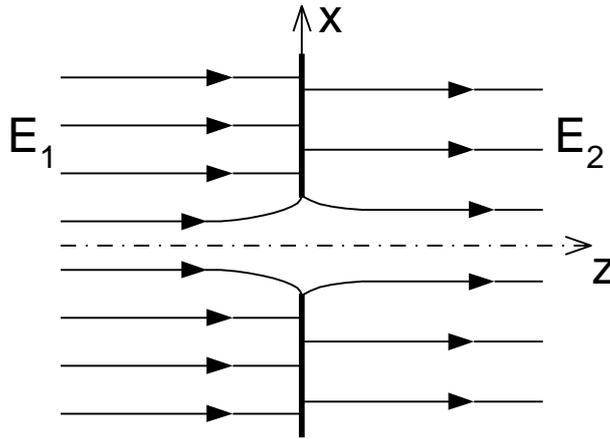


Рис. 5. Проводящая плоскость, разделяющая области с разным продольным электрическим полем.

Вдали от отверстия поле однородно и равно E_1 слева и E_2 справа. Изменение поперечного импульса при пролете частицы через отверстие слева направо равно

$$\Delta p_x = \int_{z_1}^{z_2} eE_x \frac{dz}{v} \approx -\frac{e}{2v} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0,0,z)x(z)dz \approx -\frac{ex(0)}{2v} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0,0,z)dz = e \frac{E_1 - E_2}{2v} x(0) \quad (35)$$

При взятии интеграла в (35) предполагалось, что начало и конец промежутка интегрирования находятся в областях однородности поля, а фокусировка настолько слаба, что координата частицы мало меняется на размере отверстия (тонкость линзы). Кроме того, предполагалась малость изменения скорости частицы v . Из (35) сразу следует оптическая сила

$$\frac{1}{F} = e \frac{E_2 - E_1}{2vp} \quad (36)$$

Если отверстие не круглое, то фокусировка по x и по y может перераспределиться (мы уже обсуждали аналогичное явление для края соленоида). Например, для отверстия в форме щели фокусировки вдоль щели не будет, а в другом направлении оптическая сила удвоится.

Сильная электростатическая дефокусировка происходит на выходе из электронных пушек (т. н. анодная линза). Поперечные компоненты электрического поля существенно влияют и на движение частиц в ускоряющих высокочастотных резонаторах.

Фокусировка в ускоряющем высокочастотном резонаторе

Схема ускоряющего высокочастотного резонатора показана на Рис. 6.

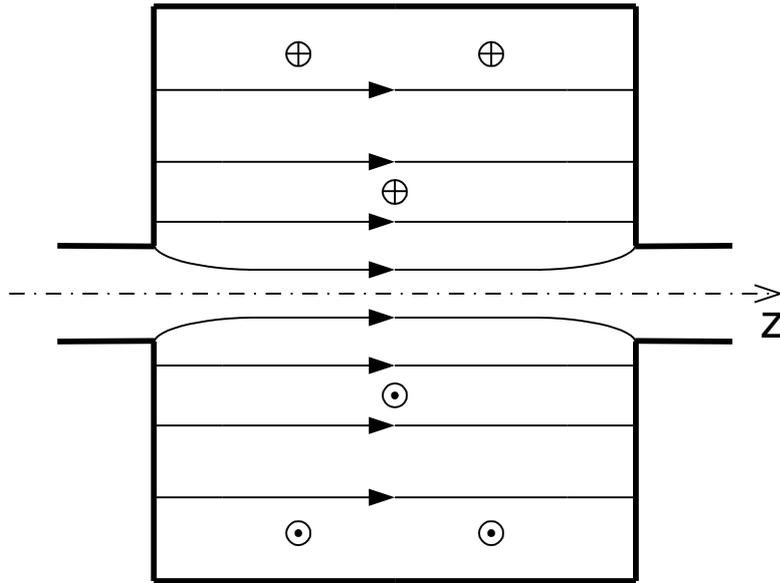


Рис. 6. Ускоряющий высокочастотный резонатор. Силовые линии электрического поля направлены, в основном, вдоль оси резонатора, а силовые линии магнитного поля представляют собой окружности с центрами на оси.

Простейший резонатор представляет собой цилиндрическую полость, ограниченную проводником. У этой полости есть различные собственные моды электромагнитных колебаний. Для ускорения частиц используется простейшая мода, не имеющая продольных компонент магнитного поля и азимутальной зависимости, – E_{010} . Её силовые линии показаны на рисунке 6. Для входа и выхода частиц вблизи оси имеются отверстия, переходящие в цилиндрические проводящие трубы. Электромагнитное поле с частотой рассматриваемой моды не проходит внутрь труб, поэтому отверстия слабо меняют поле в резонаторе. Как видно из рисунка, вблизи входного и выходного отверстий имеется радиальная компонента электрического поля, а вдали от отверстий поле E на оси однородно. Поэтому, согласно результатам предыдущего пункта, влетающие в резонатор частицы испытывают фокусировку с оптической силой $eE(t_1)/(2p_1v_1)$, а вылетающие – дефокусировку с оптической силой $-eE(t_2)/(2p_2v_2)$. Кроме того, внутри резонатора происходит фокусировка магнитным полем. Последнее возбуждается током смещения с плотностью $(1/4\pi)\partial E/\partial t$. Следовательно, внутри резонатора можно записать уравнения, аналогичные (6), с той лишь разницей, что энергия частиц непрерывно меняется.

$$\begin{aligned} (px)' &= \frac{1}{v} \frac{dp_x}{dt} = -\frac{e}{2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial z} \right) x \\ (py)' &= \frac{1}{v} \frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial z} \right) y. \end{aligned} \quad (6')$$

$$p' = \frac{e}{v} E$$

Для ультррелятивистской частицы все три «линзы» (входная и выходная электрические и магнитная) обычно слабы, так, что их фокусные расстояния

велики по сравнению с длиной резонатора. Тогда их оптические силы складываются, причем сумма мала.

Как и при пролете тонкого ускоряющего зазора, рассмотренного в примере 3, при пролете через резонатор энергия частиц изменяется на

$$\Delta\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} eE_z(z) \cos \left[\omega \left(t + t_0 - \frac{z}{v} \right) \right] dz = \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega(t+t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} eE_z(z) e^{i\omega \frac{z}{v}} dz \right], \quad (37)$$

$$= eU \cos \omega(t + t_0) \approx eU \cos \omega t_0 - te \omega U \sin \omega t_0$$

где учтено, что $E(z, \tau) = E_z(z) \cos \omega \tau$, $\int_{-\infty}^{\infty} eE_z(z) e^{i\omega \frac{z}{v}} dz = U e^{i\varphi}$, а t_0 – время пролета

опорной частицы через центр резонатора. Изменение энергии зависит от времени пролета t . При малых ωt эта зависимость линейна и можно записать матрицу продольного движения в резонаторе в виде матрицы тонкой линзы [см. (1.19)]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e\omega U \sin \omega t_0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Если после резонатора частицы проходят через прямолинейный промежуток или другую систему, не меняющую их энергий, то матрица такой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

и похожа на матрицу поперечного движения в пустом промежутке. Перемножив эти матрицы, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e\omega U \sin \omega t_0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - M_{56} e \omega U \sin \omega t_0 & M_{56} \\ -e\omega U \sin \omega t_0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Элемент (1,1) этой матрицы показывает во сколько раз изменится отставание частицы от опорной. Если частицы летят в виде короткого сгустка, то во столько раз изменится его длина. Это явление используется для получения коротких сгустков и называется группировкой, или продольной фокусировкой. Аналогично можно изменять отклонения энергии и, соответственно, энергетический разброс частиц.

Фокусировка в поворотном магните

Рассмотрим теперь более общий случай движения в магнитном поле, когда все возможные траектории искривлены, но существуют траектории, лежащие в некоторой плоскости. Одну из таких траекторий можно выбрать за опорную. Тогда опорная траектория лежит в плоскости $y = 0$ (см. рис. 2) и из уравнения траектории (2) следует, что на опорной траектории магнитное поле направлено вдоль оси y . Практически важным частным случаем, к которому применимы данные рассуждения, являются магниты с зеркальной симметрией относительно плоскости $y = 0$ (которую часто называют медианной плоскостью). В рабочем зазоре магнита поле потенциально и может быть записано в виде $B = \operatorname{grad} \psi$. В магнитах с зеркальной симметрией $\psi(x, -y, z) = -\psi(x, y, z)$. В этом случае поле параллельно оси y во всей медианной плоскости. Опорная траектория (а) и проекция (б) отклоненной траектории на медианную плоскость изображены на Рис. 7.

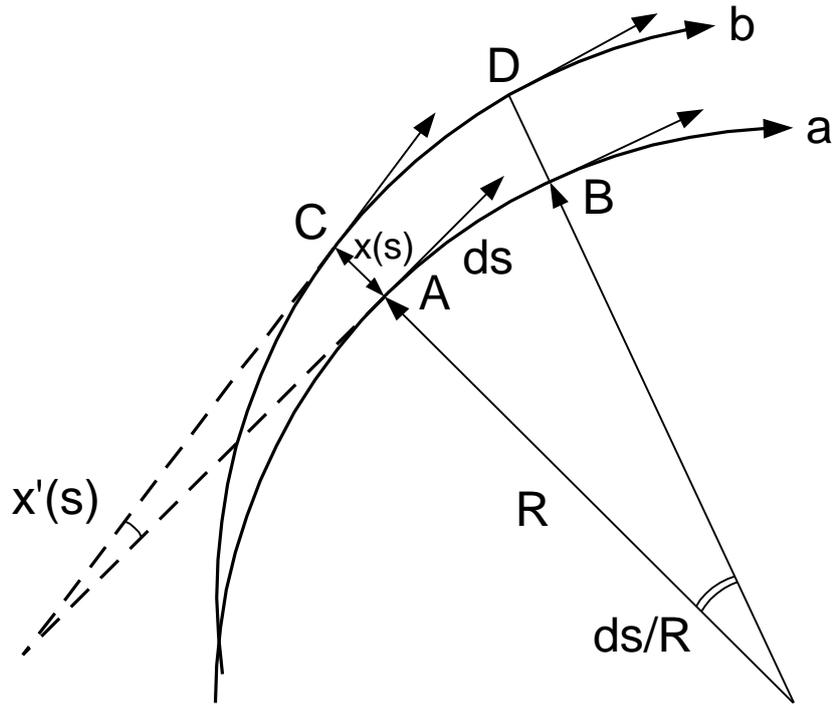


Рис. 7. Опорная траектория (a) и проекция (b) отклоненной траектории на медианную плоскость.

При изменении независимой переменной от s до $s + ds$ опорная траектория переходит из точки A в точку B , а проекция отклоненной траектории – из C в D . При этом касательный вектор опорной траектории поворачивается на угол ds/R , где R – радиус кривизны опорной траектории. Касательный вектор проекции отклоненной траектории при переходе из C в D поворачивается на другой угол. Чтобы найти последний надо поделить длину дуги CD на радиус кривизны R_1 проекции отклоненной траектории.

Длина дуги CD δs , как видно из Рис. 6, примерно равна произведению центрального угла ds/R на расстояние от дуги до вершины угла $R + x$)

$$\delta s = ds \left(1 + \frac{x}{R} \right). \quad (41)$$

Эта формула показывает, что при отклонении наружу траектория удлиняется, а при отклонении внутрь – укорачивается. Это свойство становится очевидным, если вспомнить, что наша система координат похожа на цилиндрические координаты. Из (41) следует простая формула для изменения длины отклоненной траектории на конечном участке

$$\Delta s = \int_{s_1}^{s_2} \frac{x(s)}{R(s)} ds. \quad (42)$$

Так как угол между касательными векторами опорной траектории и проекции отклоненной траектории есть x' , то изменение x' при изменении независимой переменной от s до $s + ds$ равно

$$x'(s+ds) - x'(s) = \frac{ds}{R} - \frac{\delta s}{R_1} = \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \left(1 + \frac{x}{R} \right) \right] ds \approx \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{x}{R^2} \right] ds. \quad (43)$$

При выводе последнего выражения учтено, что кривизна отклоненной траектории мало отличается от кривизны опорной траектории. Это отличие может быть вызвано двумя причинами. Во-первых, магнитное поле неоднородно. Тогда $B_y(x, s) \approx B_y(0, s) + \partial B_y / \partial x(0, s)x$ и

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \approx \frac{1}{B_y(0, s)R} \frac{\partial B_y}{\partial x}(0, s)x = \frac{e}{pc} \frac{\partial B_y}{\partial x}(0, s)x. \quad (44)$$

Во-вторых, отклоненная траектория может описывать движение частицы с отклоненной энергией, т. е. импульсом $p + \Delta p$. Тогда

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \approx -\frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}. \quad (45)$$

Подставив (40) и (41) в (39) получим линейное дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{1}{R^2}x + \frac{eG}{pc}x = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}. \quad (46)$$

В предельном случае $R \rightarrow \infty$ это уравнение переходит в первое уравнение (7) и описывает траекторию частицы в магнитной квадрупольной линзе. Для описания поперечной неоднородности магнитного поля вводится еще одна величина – т. н. показатель спада магнитного поля

$$n = -\frac{R}{B_y(0, s)} \frac{\partial B_y}{\partial x}(0, s) = -\frac{\partial \ln B_y}{\partial \ln(R+x)}, \quad (47)$$

который позволяет записать (46) в более компактном виде

$$x'' + \frac{1-n}{R^2}x = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}. \quad (48)$$

Итак, третий член в (46) описывает фокусировку неоднородностью магнитного поля. Говорят, что второй член соответствует фокусировке поворотом. Чтобы понять это рассмотрим движение в однородном магнитном поле

$$x'' + \frac{1}{R^2}x = 0. \quad (49)$$

Общее решение этого уравнения аналогично (9)

$$x = x_0 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + x'_0 R \sin\left(\frac{s}{R}\right). \quad (50)$$

С другой стороны, и опорная и отклоненная траектории – это окружности с одинаковыми радиусами, изображенные на Рис. 7.

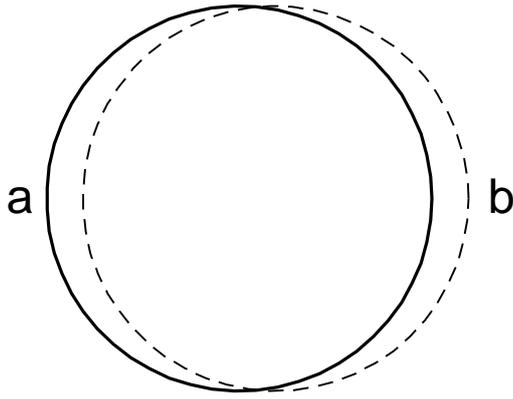


Рис. 7. Опорная траектория (a) и проекция (b) отклоненной траектории на медианную плоскость в однородном поле.

Справедливость решения (50) очевидна из Рис. 7. Глядя на уравнение (48) можно сказать, что показатель спада показывает, во сколько раз дефокусировка спадом магнитного поля превышает фокусировку поворотом.

Правая часть уравнения (48) пропорциональна Δp . Удобно ввести частное решение этого уравнения с нулевыми начальными условиями $x_p = \eta(s)\Delta p/p$. Тогда функция η , называемая горизонтальной дисперсией, удовлетворяет уравнению

$$\eta'' + \frac{1-n}{R^2}\eta = \frac{1}{R} \quad (51)$$

с начальными условиями $\eta(0) = \eta'(0) = 0$. Горизонтальная дисперсия, в отличие от решения x_p , не зависит от параметров какой-либо частицы, а характеризует магнитную систему.

Как уже было сказано, уравнение для горизонтальной координаты x (46) отличается от аналогичного уравнения в квадрупольной линзе (9) двумя дополнительными членами, учитывающими фокусировку поворотом и отклонение энергии от энергии опорной частицы. Можно сказать, что появление этих членов связано с вращением вектора главной нормали и кривизной траектории. С ростом радиуса кривизны оба дополнительных члена уменьшаются. Поэтому для вертикального (т. е. по y) движения отклоненной частицы эти члены не возникают, и оно описывается вторым уравнением системы (9), или

$$y'' + \frac{n}{R^2}y = 0. \quad (52)$$

Пример 4. Решение уравнения для поперечной дисперсии

Линейное неоднородное уравнение (51) может быть решено при помощи косинусоподобного и синусоподобного решений C_x и S_x соответствующего однородного уравнения. Для отыскания решения найдем сначала функцию Грина G , т. е. решение неоднородного уравнения с дельта функцией в правой части

$$G'' + \frac{1-n}{R^2}G = \delta(s - s_0) \quad (53)$$

с начальными условиями $G = G' = 0$ при $s < s_0$. Интегрируя левую и правую части уравнения (53) от $s_1 < s_0$ до $s_2 > s_0$ и устремляя $s_2 - s_1$ к нулю получим $G(s_2) = 0$, $G'(s_2) = 1$. Тогда при $s > s_0$ G есть решение однородного уравнения $G = AC_x(s) + BS_x(s)$ с начальными условиями $G(s_0) = 0$, $G'(s_0) = 1$, т. е.

$$G(s) = C_x(s_0)S_x(s) - S_x(s_0)C_x(s). \quad (54)$$

Представив правую часть (51) как сумму толчков

$$\frac{1}{R(s)} = \int_0^s \frac{1}{R(s_0)} \delta(s - s_0) ds_0 \quad (55)$$

и используя суперпозицию решений, получим

$$\eta(s) = \int_0^s \frac{G(s)}{R(s_0)} ds_0 = S_x(s) \int_0^s \frac{C_x(s_0)}{R(s_0)} ds_0 - C_x(s) \int_0^s \frac{S_x(s_0)}{R(s_0)} ds_0. \quad (56)$$

Конец примера 4.

Матрица поворотного магнита

Используя формулы предыдущего пункта, мы можем в явном виде записать полную 6×6 матрицу поворотного магнита. Поскольку мы считаем радиус кривизны R и показатель спада n зависящими от продольной координаты s , то наши ответы будут справедливы не только для одного магнита, но и для достаточно широкого класса магнитных систем, состоящих из нескольких магнитов и квадрупольных линз. Необходимо только выполнить поставленное в начале предыдущего пункта условие зеркальной симметрии магнитов относительно плоскости $y = 0$, точнее, нечетности скалярного магнитного потенциала $\psi(-y) = -\psi(y)$. В этом случае можно выбрать опорную траекторию лежащей в плоскости $y = 0$.

Из-за отсутствия связи вертикальной степени свободы с другими четыре из девяти 2×2 клеток будут нулевыми и полная 6×6 матрица будет иметь вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{xt} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{tx} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_t \end{pmatrix}. \quad (57)$$

В соответствии с формулой (13) диагональные блоки $\mathbf{M}_x(s)$ и $\mathbf{M}_y(s)$ выражаются через синусоподобные и косинусоподобные решения уравнений (44) (без $\Delta p/p$) и (48) соответственно

$$\mathbf{M}_x(s) = \begin{pmatrix} C_x & S_x \\ C'_x & S'_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_y(s) = \begin{pmatrix} C_y & S_y \\ C'_y & S'_y \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Как уже отмечалось в главе 1, для описания движения в магнитном поле удобно переопределить пару продольных координат следующим образом. В качестве пятой координаты возьмем не время t , а vt . В качестве шестой координаты выберем не отклонение энергии ε , а относительное отклонение импульса $\Delta p/p = \beta^{-2} \varepsilon / E_0$, где $\beta = v/c$. Тогда

$$\mathbf{M}_{xt}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & \eta' \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Нули в первом столбце связаны с независимостью поля от времени.

Продольное движение описывается матрицей

$$\mathbf{M}_t(s) = \begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Как и выше первый столбец определяется независимостью поля от времени. Последняя строка всей матрицы $\mathbf{M}(s)$ состоит из нулей и единицы из-за сохранения энергии частицы в магнитном поле. Вычислим теперь $M_{56}(s)$. По определению

$$M_{56} = pv \frac{\partial t}{\partial p} = p\beta \frac{\partial L}{\partial p} = p \frac{\partial L}{\partial p} - sp \frac{\partial}{\partial p} \ln \beta, \quad (61)$$

где $L = s + \Delta s$ – длина отклоненной траектории, для нахождения которой надо использовать формулу (42) при $x_p = \eta(s)\Delta p/p$. Тогда

$$M_{56} = \int_0^s \frac{\eta(s_1)}{R(s_1)} ds_1 - \frac{s}{\gamma^2} = \int_0^s \left(\frac{\eta}{R} - \frac{1}{\gamma^2} \right) ds_1, \quad (62)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Клетка $\mathbf{M}_{tx}(s)$ описывает влияние горизонтальной поперечной степени свободы на продольную. Как уже отмечалось, из-за сохранения энергии частицы

$$\mathbf{M}_{tx}(s) = \begin{pmatrix} M_{51} & M_{52} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Элементы первой строки находятся, как и выше, при помощи формулы удлинения траектории (42)

$$M_{51} = \int_0^s \frac{C_x(s_1)}{R(s_1)} ds_1, \quad M_{52} = \int_0^s \frac{S_x(s_1)}{R(s_1)} ds_1. \quad (64)$$

Как уже отмечалось в начале этого параграфа, матрица вида (57) описывает наиболее часто применяемые элементы магнитных систем – поворотные магниты, квадрупольные линзы и пустые промежутки, а также комбинации этих элементов. Специфика таких матриц упрощает их перемножение. Применяя правила клеточного умножения имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_x & \mathbf{0} & 0 & \eta \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_y & \mathbf{0} & \eta' \\ M_{51} & M_{52} & 1 & M_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x & \mathbf{0} & 0 & \eta \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_y & \mathbf{0} & \eta' \\ M_{51} & M_{52} & 1 & M_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x^{(2)}\mathbf{M}_x^{(1)} & \mathbf{0} & 0 & \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_2 + \mathbf{M}_x^{(2)} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_y^{(2)}\mathbf{M}_y^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (M_{51}, M_{52})_2 \mathbf{M}_x^{(1)} + (M_{51}, M_{52})_1 & \mathbf{0} & 1 & M_{56}^{(1)} + M_{56}^{(2)} + M_{51}^{(2)}\eta^{(1)} + M_{52}^{(2)}\eta'^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Краевая фокусировка

На входе в поворотный магнит и на выходе из него величина магнитного поля быстро меняется с изменением продольной координаты s . Если опорная траектория не перпендикулярна краю магнита (точнее, линиям уровня поля в медианной плоскости), как это показано на рисунке 8, то на краях магнита появляется значительный «градиент» $\partial B_y / \partial x$, что вносит значительный вклад в фокусировку. Этот вклад называется краевой фокусировкой.

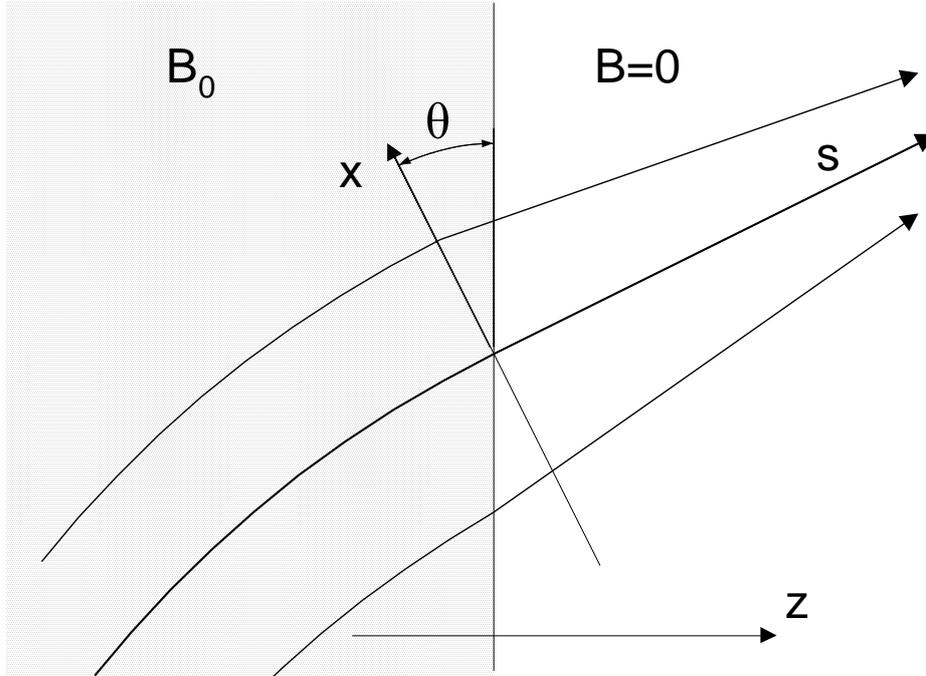


Рис. 8. Фокусировка краем магнита. Частицы выходят из области, занятой полем (слева, заштрихована).

Как видно из рисунка, $\partial B_y / \partial x = -\sin \theta \partial B_y / \partial z$. Применяя формулу для оптической силы тонкой квадрупольной линзы (5), выбрав пределы интегрирования внутри (s_1) и снаружи (s_2) магнита, получим

$$\frac{1}{F_x} = \frac{e}{pc} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial B_y}{\partial x} ds = -\frac{e}{pc} \int_{s_1}^{s_2} \sin \theta \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{dz}{\cos \theta} \approx \frac{eB_0}{pc} \tan \theta = \frac{\tan \theta}{R}. \quad (66)$$

Как и в квадрупольной линзе, оптическая сила по y имеет ту же величину и противоположный знак.

Из рисунка 8 следует простой геометрический вывод соотношения (66). Если бы край магнита был перпендикулярен опорной траектории (проходил бы вдоль оси x), то краевой фокусировки не было. По сравнению с этим случаем наружные частицы ($x > 0$) проходят в магнитном поле дополнительную длину $x \tan \theta$. Поэтому они поворачивают на дополнительный угол $x' = -x \tan \theta / R$.

Такие же результаты получаются и для входа в магнит. Следует отметить, что при выводе простой формулы (66) предполагалась малость длины края по сравнению с радиусом поворота R . Эта малость нужна для того, чтобы пренебречь изменением угла между касательным вектором (скоростью) и нормалью к краю при движении частицы в краевом поле и вынести $\tan \theta$ из-под

интеграла в (66). Можно найти поправки к (66) в виде следующих членов разложения по толщине края, но точные результаты дает только численный расчет. Магнит, у которого опорная траектория (окружность) входит и выходит нормально к краю, а, значит, отсутствует краевая фокусировка, называется секторным. В следующем примере обсуждается другой распространенный тип поворотных магнитов.

Пример 5. Магнит с параллельными краями и однородным полем

Траектория в таком магните изображена на рисунке 9. Пусть заданы расстояние между краями L , и угол входа θ_1 .

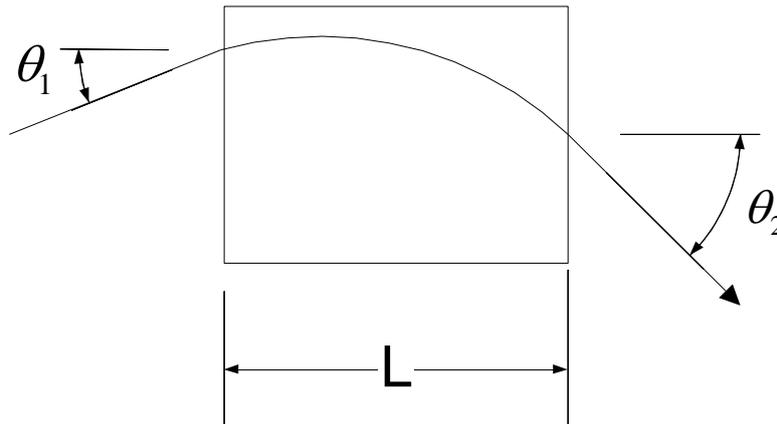


Рис. 9. Магнит с параллельными краями.

Тогда $\sin \theta_2 = L/R - \sin \theta_1$ и матрица магнита записывается в виде произведения (справа налево) матриц входного края, средней части и выходного края

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tan \theta_2}{R} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tan \theta_2}{R} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & R \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 & 0 & R[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \\ -\frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R} & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & R(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & R[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] & 0 & 0 & 1 & R[\theta_1 + \theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tan \theta_1}{R} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tan \theta_1}{R} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(67)

Перемножая блоки этих матриц по формуле (65), получим

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} & R \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 & 0 & R[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \\ 0 & \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} & 0 & 0 & 0 & \tan(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & \frac{1 - (\theta_1 + \theta_2) \tan \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2)} & R(\theta_1 + \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R \cos \theta_1 \cos \theta_2}{R \cos \theta_1 \cos \theta_2} & 1 - (\theta_1 + \theta_2) \tan \theta_2 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_1} & 2R \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} & 0 & 0 & 1 & R[\theta_1 + \theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(68)

Заметим, что горизонтальная оптическая сила M_{12} равна нулю. Это, впрочем, очевидно, т. к. траектория может быть сдвинута, как целое, вдоль края магнита.

Мы рассмотрели магнит с тонкими краями. Для произвольной зависимости поля B_y от координаты z , перпендикулярной краю, запишем векторный потенциал $A_\xi = \int_{-\infty}^z B_y(z_1) dz_1$, направленный вдоль края магнита (так направлена ось ξ декартовых координат ξ, y, z). Из-за независимости поля от ξ

канонический импульс $p_\xi + eA_\xi/c = p \sin \theta_1$ является интегралом движения. Поэтому

$$\sin \theta_2 = -\frac{p_\xi}{p} = \frac{eA_\xi}{pc} - \sin \theta_1 = \frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} B_y(z) dz - \sin \theta_1. \quad (69)$$

Зная интеграл поперечного поля из магнитных измерений можно точно рассчитать угол поворота частиц по формуле (69). Это свойство магнитов с параллельными краями можно использовать для измерения величины импульса частиц.

Конец примера 5.

Итак, мы рассмотрели матрицы основных элементов электроннооптических систем. Комбинируя их, можно описать практически любые системы транспортировки заряженных частиц.

Часто к электронно-оптическим системам предъявляются специальные требования. Например, можно потребовать одинаковости координат и углов для частиц с разными энергиями, т. е. $M_{i6} = 0$ для $i = 1 - 4$. Такие системы называются ахроматическими. Из условия симплектичности получается, что в таком случае и $M_{5i} = 0$ для $i = 1 - 4$ (т. е. время пролета не зависит от поперечных координат и импульсов). Это значит, что если продольная степень свободы не влияет на поперечные, то нет и обратного влияния. Такое поведение естественно для гамильтоновых систем, где силы получаются дифференцированием гамильтониана по соответствующей координате. Другим практически интересным случаем являются т. н. изохронные системы – ахроматические системы с $M_{56} = 0$, у которых время пролета не зависит и от энергии.

Пример 6. Простейший ахроматический поворот

Угол, на который поворотный магнит отклоняет частицы, зависит от их энергии. Поэтому пучок с энергетическим разбросом выходит из магнита расходящимся. Для предотвращения этого можно применить систему из двух магнитов с фокусирующими линзами между ними. Простейшая из таких систем показана на рисунке 10.

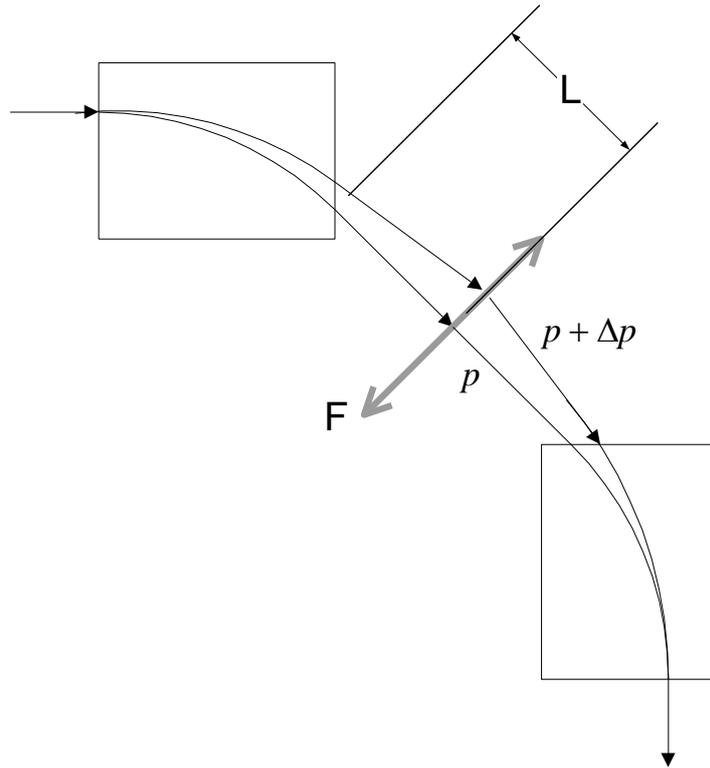


Рис. 10. Простейший ахроматический поворот.

Так как опорная траектория входит в первый магнит и выходит из второго нормально к краю, то фокусировки на этих краях нет. Из рисунка видно, что поворот является ахроматическим из-за того, что квадрупольная линза в середине прямолинейного промежутка меняет знак поперечного импульса частиц с отклоненной энергией. Найдем необходимую оптическую силу этой линзы.

В соответствии с формулой (68) на выходе из первого магнита $\eta = R(1 - \cos \theta)$, $\eta' = \tan \theta$, θ – угол поворота в одном магните. После прохождения прямолинейного промежутка длиной L $\eta' = \tan \theta$, $\eta = R(1 - \cos \theta) + L \tan \theta$. Линза должна изменить знак η' , т. е. $2\eta' = \eta/F$, откуда следует, что $F = \eta/(2\eta') = L/2 + R(1 - \cos \theta)/(2 \tan \theta)$. Линза получается короткофокусной и «перефокусирует» частицы по горизонтали и сильно дефокусирует по вертикали. Поэтому часто между магнитами ставят не одну линзу, а три.

Конец примера б.

Глава 3. Оптика пучков

В предыдущих главах мы рассмотрели описание движения заряженной частицы при помощи линейных дифференциальных уравнений и матриц. Теперь мы перейдем к ансамблям таких частиц – пучкам.

Фазовый эллипс и его параметры

Начнем с одномерного движения. Напомним, что одномерное рассмотрение применимо в отсутствие связи данной степени свободы с двумя другими, когда полная транспортная матрица распадается на клетки. В этом случае частица изображается точкой с координатами (x, x') на фазовой плоскости. Пусть сначала все точки, изображающие частицы пучка, лежат внутри некоторой замкнутой кривой. При движении частиц вдоль канала их координаты меняются. Мы можем понимать это как преобразование фазовой плоскости (например, прохождение через пустой промежуток и прохождение через тонкую линзу соответствуют преобразованиям сдвига), т. е. считать, что меняются не только координаты частиц, но и координаты всех точек плоскости. Тогда кривая, внутри которой сначала лежали частицы, тоже преобразуется (деформируется), причем все точки, изображающие частицы, остаются внутри этой кривой. Последнее утверждение справедливо для всех гладких (непрерывных) отображений. В частности, рассмотренные нами линейные преобразования всегда гладкие. Можно считать выбранную нами кривую границей пучка. Ниже мы уточним смысл такой «границы», но сначала мы можем выбрать эту кривую, так, чтобы было легко описать ее линейные преобразования. Из аналитической геометрии известно, что при линейных преобразованиях кривая второго порядка переходит в другую кривую второго порядка. В частности, замкнутая кривая второго порядка – эллипс – переходит в эллипс. Еще одно упрощение ситуации следует из того, что, как отмечалось в первой главе, за опорную частицу можно выбрать любую из частиц. Начало координат, т. е. точку $(0, 0)$ можно выбрать в центре эллипса, как это показано на Рис. 11.

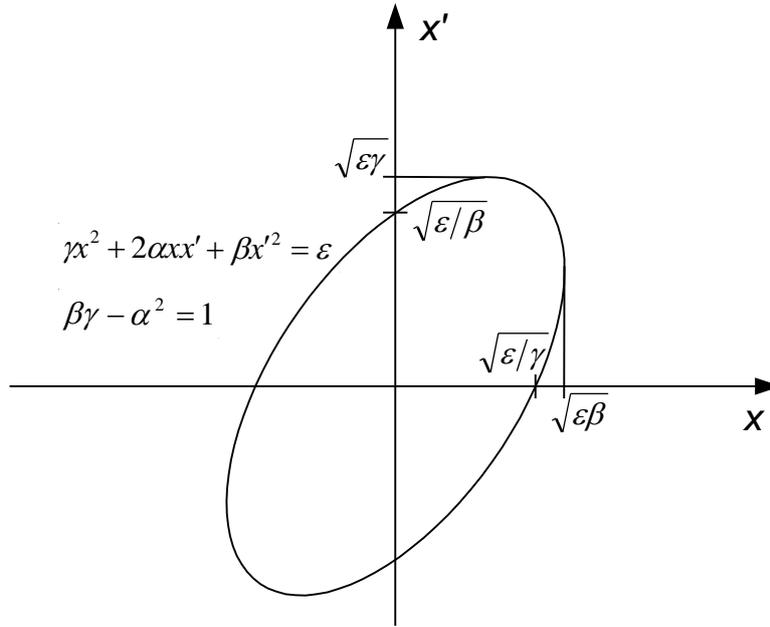


Рис. 11. Эллипс, изображающий пучок.

Уравнение эллипса можно записать в виде

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon. \quad (1)$$

Как обычно, квадратичную форму, стоящую в правой части, можно записать при помощи симметричной матрицы

$$\begin{pmatrix} x & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = \epsilon, \quad (2)$$

где \mathbf{X}^T означает транспонированную матрицу (в данном случае – столбец). Эллипс описывается тремя независимыми параметрами, например, двумя длинами полуосей и наклоном. Поэтому на четыре параметра $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon)$ можно наложить одно условие. Простейшим и, как будет видно далее, удобным условием является унимодулярность матрицы квадратичной формы $\det \mathbf{Q} = 1$, или

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1. \quad (3)$$

Найдем теперь некоторые характерные точки эллипса. Полагая в (1) $x' = 0$ получим точку пересечения эллипса с осью x - $x_1 = \sqrt{\epsilon/\gamma}$. Аналогично, точка пересечения с осью x' - $x'_1 = \sqrt{\epsilon/\beta}$. Смысл этих параметров следующий. Если мы уберем все частицы, летящие с ненулевыми углами x' , то полный размер оставшегося пучка частиц будет $2x_1$. Если же убрать все частицы с ненулевой координатой x , т. е. пропустить пучок через узкую щель, то угловой разброс (иногда его называют локальным угловым разбросом) будет $\pm x'_1$. Найдем теперь размер пучка, т. е. максимальную координату x . Считая x функцией x' и учитывая, что в точке максимума $dx/dx' = 0$, продифференцируем уравнение эллипса (1) по x' :

$$2\alpha x_{\max} + 2\beta x' = 0. \quad (4)$$

Подставив $x' = -x_{\max} \alpha/\beta$ в (1), получим

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon\beta}{\beta\gamma - \alpha^2}} = \sqrt{\varepsilon\beta}. \quad (5)$$

Точно так же получается, что

$$x'_{\max} = \sqrt{\varepsilon\gamma}. \quad (6)$$

Последняя из интересных для нас количественных характеристик эллипса – это его площадь S . Площадь эллипса равна произведению его полуосей, умноженному на π . Совершим преобразование сдвига ($x \rightarrow x + \kappa x'$, $x' \rightarrow x'$) такое, чтобы эллипс стал прямостоящим, т. е. $x'_{\max} = \sqrt{\varepsilon\gamma}$ находилось при $x = 0$. Так как при преобразовании сдвига площади фигур не меняются,

$$S = \pi x_1 x'_{\max} = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} \sqrt{\varepsilon\gamma} = \pi\varepsilon. \quad (7)$$

Итак, площадь эллипса пропорциональна параметру ε , который называется эмиттансом пучка. Параметры же α и β характеризуют форму фазового эллипса: первый – наклон, а второй – размер пучка и локальный угловой разброс. Последний параметр – γ – при таком выборе трех независимых параметров находится из условия (3). Параметры α , β и γ часто называют параметрами Твисса.

Преобразование фазового эллипса при распространении пучка

В линейном приближении любая электроннооптическая система описывается матрицей, а преобразование начальных координаты и угла – умножением соответствующего столбца на эту матрицу

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}_0. \quad (8)$$

Сейчас мы рассмотрим преобразование фазового эллипса при прохождении через систему. Для этого просто подставим (8) в (2)

$$\mathbf{X}_0^T \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M} \mathbf{X}_0 = \varepsilon. \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (2) видим, что на фазовой плоскости начальных условий (x_0, x'_0) фазовый эллипс описывается матрицей квадратичной формы

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M}, \quad (10)$$

откуда

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{Q}_0 \mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{M}^{-1}. \quad (11)$$

Формула (11) решает поставленную задачу. Из нее, в частности, следует, что $\det \mathbf{Q} = \det \mathbf{Q}_0 (\det \mathbf{M})^{-2}$.

Для симплектических преобразований (матриц) $\det \mathbf{M} = 1$ и, если для параметров начального фазового эллипса выполнено условие (3) $\det \mathbf{Q}_0 = 1$, то аналогичное условие $\det \mathbf{Q} = 1$ выполнено и для конечного эллипса. При этом эмиттанс ε сохраняет смысл площади эллипса, деленной на π , а площадь эллипса является инвариантом преобразований. Кроме того, из определения симплектических матриц (17) следует, что $(\mathbf{M}^T)^{-1} = -\mathbf{I}\mathbf{M}$. Подставляя это выражение в (11) и вводя обозначение

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (12)$$

получим

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\mathbf{J}_0\mathbf{M}^{-1}. \quad (13)$$

Преобразование матрицы \mathbf{J} (13) называется в линейной алгебре преобразованием подобия. Оно замечательно тем, что сохраняет собственные числа матрицы (точнее, собственные числа линейного оператора, описываемого этой матрицей). С геометрической точки зрения объекты, преобразующиеся по правилу (8), - это векторы, а по правилу (13) – линейные операторы. Определение (12) сопоставляет матрице квадратичной формы \mathbf{Q} матрицу линейного оператора \mathbf{J} при помощи матрицы \mathbf{I} , играющей в симплектическом линейном пространстве роль метрического тензора. Матрица \mathbf{J} называется матрицей Твисса. Используя явный вид матрицы (12) легко проверить, что $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}$.

Используя (13) можно записать линейные преобразования параметров Твисса, как

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS' + C'S & -SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_0. \quad (14)$$

Матрицы преобразования параметров Твисса иногда называют матрицами Штеффена. Как и матрицы \mathbf{M} , они реализуют одно из представлений группы симплектических преобразований фазовой плоскости. 3×3 матрицы Штеффена соотносятся с 2×2 матрицами \mathbf{M} примерно так же, как векторное и спинорное представления группы вращений.

Пример 7. Изменение параметров Твисса при прохождении пучка через тонкую линзу

Параметры Твисса на выходе тонкой линзы можно рассчитать по формуле (13). С другой стороны, можно применить формулу (14), где часть вычислений уже проделана в общем виде. Подставляя $C = S' = 1$, $S = 0$ и $C' = -1/F$, получим

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/F & 1 & 0 \\ 1/F^2 & 2/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_0.$$

Если вспомнить, что тонкая линза производит преобразование сдвига, то становится очевидной неизменность размера $x_{\max} = \sqrt{\varepsilon\beta}$, а, следовательно, и параметра β . Параметр наклона эллипса $\alpha = \alpha_0 + \beta_0/F$ изменяется пропорционально оптической силе линзы. Параметр углового разброса $\gamma = \gamma_0 + 2\alpha_0/F + \beta_0/F^2$ зависит от оптической силы квадратично. Как и должно быть, в предельном случае больших β_0 , когда фазовый эллипс имеет большой эксцентриситет, т. е. становится похож на отрезок прямой, $x'_{\max} = \sqrt{\varepsilon\gamma} \approx x_{\max}/F$.

Конец примера 7.

Дифференциальные уравнения для параметров Твисса

Движение является непрерывным преобразованием. Мы уже отмечали это в Главе 2, записав уравнения движения (2.14) – (2.16). Для удобства мы приведем их еще раз:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X} = \mathbf{H}(s) \mathbf{X}, \quad (14')$$

$$\frac{d}{ds} \mathbf{M} = \mathbf{H}(s) \mathbf{M}. \quad (16')$$

Выведем теперь дифференциальное уравнения для \mathbf{Q} и \mathbf{J} . Сначала продифференцируем уравнение квадратичной формы (2)

$$0 = (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X})' = \mathbf{X}^T \mathbf{Q}' \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{Q}' \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X}' = \mathbf{X}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}' + \mathbf{Q} \mathbf{H}) \mathbf{X},$$

т. е. потребуем, чтобы при движении частица оставалась на эллипсе. В силу произвольности \mathbf{X} симметричная матрица в скобках должна тождественно обращаться в нуль. Следовательно,

$$\mathbf{Q}' = -\mathbf{H}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H} \quad (15')$$

Уравнение для \mathbf{J} легко получить из (15'), но мы сделаем это по-другому. Продифференцируем выражение (13), которое дает общее решение искомого дифференциального уравнения

$$\mathbf{J}' = \mathbf{M}' \mathbf{J}_0 \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M} \mathbf{J}_0' (\mathbf{M}^{-1})' = \mathbf{H} \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{H} = [\mathbf{H}, \mathbf{J}], \quad (15)$$

где квадратные скобки означают коммутатор матриц. При выводе (15) использована формула $(\mathbf{M}^{-1})' = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}' \mathbf{M}^{-1}$, полученная дифференцированием тождества $\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{E}$.

Обратим внимание на формальное сходство уравнений (14') и (15) с уравнением Шредингера и уравнением эволюции оператора в гейзенберговском представлении. Это сходство неудивительно, т. к. в квантовой механике тоже изучаются непрерывные линейные преобразования (векторов состояния и операторов-наблюдаемых).

Учитывая явный вид матрицы \mathbf{H} (2.15) запишем (15) в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma + k\beta & -2\alpha \\ -2k\alpha & -k\beta + \gamma \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Из матричного уравнения (16) получается система из трех уравнений

$$\begin{aligned} \alpha' &= k\beta - \gamma \\ \beta' &= -2\alpha \\ \gamma' &= 2k\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив второе из этих уравнений в первое, получим

$$\beta'' + 2k\beta - 2\gamma = 0. \quad (18)$$

Введем теперь новую функцию $w = \sqrt{\beta}$ и подставим ее в (18), учитывая, что $\beta'' = 2ww'' + 2w'^2 = 2w(w'' + \alpha^2/w^3)$, и условие нормировки (3)

$$w'' + kw - \frac{1}{w^3} = 0. \quad (19)$$

Новая функция w пропорциональна размеру пучка $x_{\max} = \sqrt{\varepsilon} w$. Этот размер, рассматриваемый как функция s , называется огибающей пучка. Для того, чтобы пояснить это название, рассмотрим семейство траекторий $x(s)$ такое, что при

некотором фиксированном s каждой точке данного фазового эллипса соответствует своя траектория. При изменении s траектории меняются, оставаясь внутри интервала $\pm x_{\max}(s)$, т. е. кривые $\pm x_{\max}(s)$ являются огибающими данного семейства траекторий.

Уравнение приведенной огибающей (19) похоже на уравнение траекторий $x'' + kx = 0$, но содержит нелинейный член $1/w^3$. Наличие последнего обеспечивает невозможность сфокусировать пучок до нулевого размера.

Пример 8. Параметры Твисса и огибающая в пустом промежутке

Сначала мы поступим так же, как в примере 5. Учитывая, что $C = S' = 1$, $S = s$ и $C' = 0$, получим из (14)

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2s & s^2 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_0.$$

Как и тонкая линза пустой промежуток производит преобразование сдвига (но не по x' , а по x), поэтому постоянен угловой разброс $x'_{\max} = \sqrt{\varepsilon\gamma}$, а, следовательно, и параметр γ . Параметр наклона эллипса $\alpha = \alpha_0 - \gamma_0 s$ изменяется пропорционально длине. При $s_1 = \alpha_0/\gamma_0$ эллипс становится прямостоящим. Параметр $\beta = \beta_0 - 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2$ квадратично зависит от длины. Выделив полный квадрат можно переписать последнее выражение, как

$$\beta = \beta_{\min} + \frac{(s - s_1)^2}{\beta_{\min}}, \quad (20)$$

где $\beta_{\min} = 1/\gamma_0$. Отсюда следует формула для размера пучка

$$x_{\max} = \sqrt{\varepsilon\beta_{\min}} \sqrt{1 + \frac{(s - s_1)^2}{\beta_{\min}^2}}. \quad (21)$$

Видно, что при $s - s_1 = \pm\beta_{\min}$ размер пучка увеличивается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с минимальным, а на больших расстояниях от точки минимума $x_{\max} \approx \sqrt{\varepsilon/\beta_{\min}} |s - s_1| = x'_{\max} |s - s_1|$.

Другой способ получить те же результаты – решение уравнения (19) при $\kappa = 0$ и начальных условиях $w(0) = \sqrt{\beta_0}$, $w'(0) = -\alpha_0/\sqrt{\beta_0}$. Используя аналогию с уравнением движения частицы в потенциале $1/x^2$ легко найти первый интеграл уравнения (19)

$$\frac{w'^2}{2} + \frac{1}{2w^2} = E,$$

где E – постоянная. С учетом начальных условий $E = \gamma_0/2$. Разрешая это уравнение относительно производной, получим

$$\frac{dw}{ds} = \pm \sqrt{\gamma_0 - \frac{1}{w^2}},$$

откуда

$$s = \pm \int \frac{w dw}{\sqrt{\gamma_0 w^2 - 1}} = \pm \frac{1}{\gamma_0} \sqrt{\gamma_0 w^2 - 1} + const ,$$

или

$$w = \sqrt{\frac{1}{\gamma_0} + \gamma_0 (s - const)^2} = \sqrt{\frac{1}{\gamma_0} + \gamma_0 \left(s - \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \right)^2} .$$

Постоянная опять была определена из начальных условий.
Конец примера 8.

Пример 9. Параметры Твисса и огибающая в толстой фокусирующей линзе

Уравнение огибающей (19) решается и при неравной нулю постоянной жесткости фокусировки k , которую мы будем считать положительной. Мы не будем решать это нелинейное уравнение, а снова воспользуемся готовым решением (14), подставляя туда элементы матрицы толстой линзы (2.11). В частности

$$\beta = \beta_0 \cos^2(\sqrt{k}s) - 2 \frac{\alpha_0}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}s) \cos(\sqrt{k}s) + \frac{\gamma_0}{k} \sin^2(\sqrt{k}s) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{k} \right) + \frac{1}{2} \left(\beta_0 - \frac{\gamma_0}{k} \right) \cos(2\sqrt{k}s) - \frac{\alpha_0}{\sqrt{k}} \sin(2\sqrt{k}s) \quad (22)$$

Как видно из (22), размер пучка $\sqrt{\varepsilon\beta}$ колеблется с периодом π/\sqrt{k} , равным половине периода колебаний частиц в толстой линзе $2\pi/\sqrt{k}$. Это легко объяснить, глядя на Рис. 12.

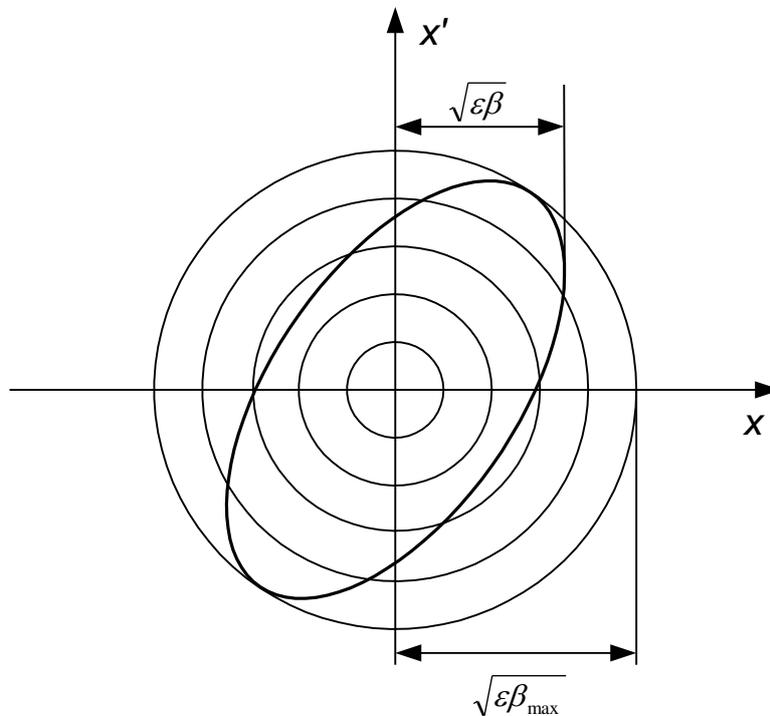


Рис. 12. Эллипс, изображающий пучок. Окружностями показаны траектории движения частиц в толстой фокусирующей линзе.

На этом рисунке соотношение вертикального и горизонтального масштабов выбрано так, что траектории частиц изображаются окружностями⁵. Тогда при увеличении s фазовый эллипс вращается по часовой стрелке. Из (22) следует, что размер постоянен при $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 1/\sqrt{k}$. В общем случае максимум (22) равен

$$\beta_{\max} = \frac{1}{2} \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{k} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{k} \right)^2 - \frac{1}{k}}.$$

Легко показать, что $\beta_{\max} \geq 1/\sqrt{k}$.

Конец примера 9.

Выражение огибающей через решения линейного уравнения траекторий и наоборот

При помощи соотношения (14), умножая первую строку матрицы на столбец, можно явно записать решение уравнения огибающей (19)

$$w = \sqrt{\beta} = \sqrt{C^2 \beta_0 - 2CS\alpha_0 + S^2 \gamma_0} = \sqrt{(Cw_0 + Sw'_0)^2 + (S/w_0)^2}. \quad (23)$$

Обратный переход, т. е. выражение решения уравнения траектории (2.8) через w , выглядит менее естественно. Будем искать это решение в «колебательном» виде $x = x_{\max} \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon} w \cos \varphi$. Здесь $\sqrt{\varepsilon}$ - произвольная постоянная, а φ - неизвестная пока функция. Такое явное выделение амплитуды и фазы иногда наглядно (например, для толстой линзы при $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 1/\sqrt{k}$), а иногда и нет (например, для пустого промежутка). Подстановка x в (2.8) дает $w'' \cos \varphi - 2w' \varphi' \sin \varphi - w \varphi'' \sin \varphi - w \varphi'^2 \cos \varphi + kw \cos \varphi = 0$. Приравнявая к нулю множители при синусе и косинусе видим, что это равенство выполняется тождественно при $\varphi' = 1/w^2$. Итак, наша фаза меняется со скоростью (точнее, «волновым числом») $1/\beta$ и

$$x = \sqrt{\varepsilon} w(s) \cos \left[\varphi_0 + \int_0^s \frac{ds_1}{w^2(s_1)} \right]. \quad (24)$$

Смысл последней формулы состоит в том, что при изменении φ_0 от 0 до 2π точка (x, x') , полученная из (24) пробегает по всему фазовому эллипсу с параметрами $\varepsilon, \beta = w^2, \alpha = -ww'$. Частными случаями (24) являются элементы транспортной матрицы (косинусоподобные и синусоподобные решения)

⁵ Это всегда возможно, т. к. размерности абсцисс и ординат разные. Можно также считать, что по вертикали отложена величина x'/\sqrt{k} .

$$C = \sqrt{\gamma_0} w(s) \cos \left[\int_0^s \frac{ds_1}{w^2(s_1)} - a \tan \alpha_0 \right] =$$

$$\frac{w(s)}{w_0} \cos \left[\int_0^s \frac{ds_1}{w^2(s_1)} \right] + \alpha_0 \frac{w(s)}{w_0} \sin \left[\int_0^s \frac{ds_1}{w^2(s_1)} \right]. \quad (25)$$

$$S = w_0 w(s) \sin \left[\int_0^s \frac{ds_1}{w^2(s_1)} \right]$$

Акцептанс электроннооптической системы

Апертуры оптических систем всегда ограничены. Если пучок проходит через щель с зазором $2a$ в непрозрачном экране, то область фазовой плоскости, где могут быть прошедшие частицы, есть вертикальная полоса, показанная на Рис. 13.

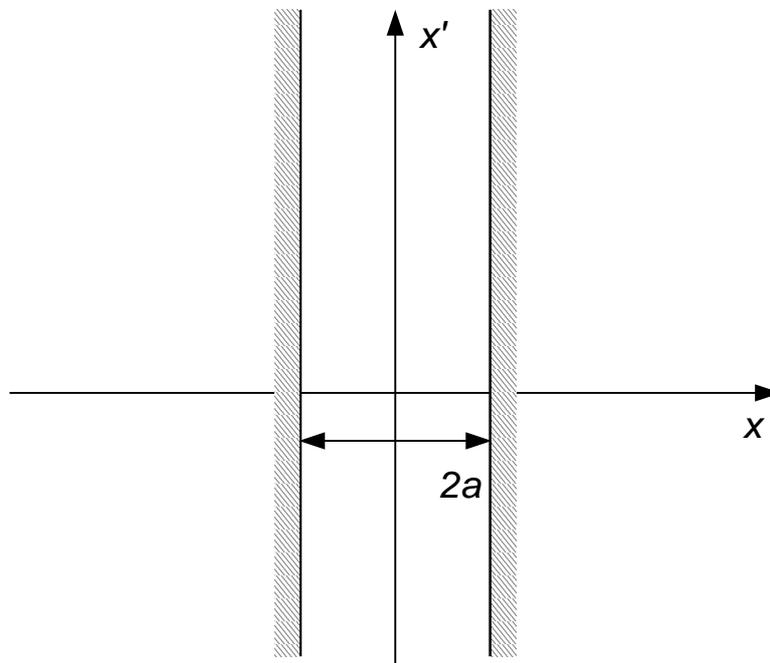


Рис. 13. Полоса, «вырезанная» щелевой диафрагмой на фазовой плоскости.

Фокусируя пучок так, чтобы его размер на экране был меньше a , можно полностью провести через щель пучок с любым эмиттансом.

Пусть на расстоянии L от первого экрана расположен второй с такой же щелью. После прохождения пустого промежутка область прохождения частиц через первую щель, показанная на Рис. 13, наклонится вправо, т. к. вся фазовая плоскость подвергается преобразованию сдвига. Область, где могут находиться частицы, прошедшие через обе щели, показана на Рис. 14.

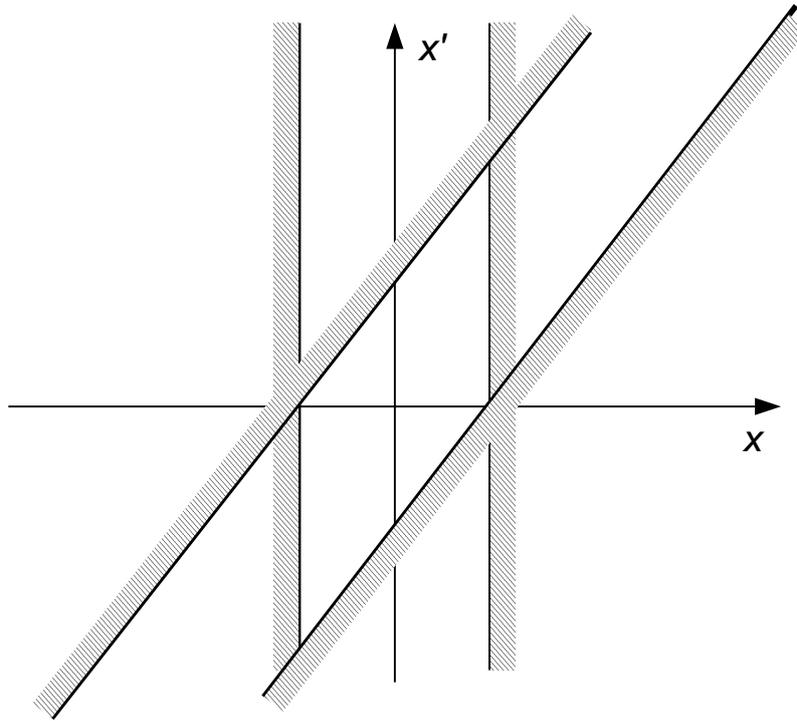


Рис. 14. Частицы, прошедшие через две диафрагмы, могут находиться только внутри параллелограмма, образованного пересечением двух полос.

Она находится на пересечении двух полос. Вертикальная полоса соответствует области, где частицы могут пройти через вторую щель, а наклонная – области прохождения через первую щель. Можно вписать в полученный параллелограмм эллипс с максимальной площадью (т. е. максимальным эмиттансом). Максимальный эмиттанс, который можно пропустить через данную систему называется ее акцептансом A .

Найдем акцептанс в нашем простейшем случае. Условия прохождения пучка через щели можно записать, как $\sqrt{\varepsilon\beta}(s_1) < a$ и $\sqrt{\varepsilon\beta}(s_2) < a$, где s_1 и s_2 – продольные координаты первого и второго экранов, и $s_2 - s_1 = L$. Используя известную формулу (20) для β функции в пустом промежутке, преобразуем неравенства в

$$\varepsilon < \frac{a^2}{\beta(s_1)} = \frac{a^2}{\beta_{\min} + \frac{(s_1 - s_{\min})^2}{\beta_{\min}}}, \quad \varepsilon < \frac{a^2}{\beta(s_2)} = \frac{a^2}{\beta_{\min} + \frac{(s_2 - s_{\min})^2}{\beta_{\min}}},$$

где s_{\min} и β_{\min} – положение и величина минимума β функции. Мы должны подобрать эти два параметра так, чтобы правые части неравенств были максимальны. В силу произвольности выбора начала продольной координатной оси можно положить $s_2 = -s_1 = L/2$. Из симметрии задачи следует естественное предположение, что минимум β находится в середине промежутка. Тогда два неравенства превращаются в одно

$$\varepsilon < \frac{a^2}{\beta_{\min} + \frac{L^2}{4\beta_{\min}}}.$$

Правая часть этого неравенства максимальна при $\beta_{\min} = L/2$. Отметим простой факт. Если мы хотим минимизировать размер пучка в двух местах, разделенных пустым промежутком длиной L , то в этих местах надо сделать $\beta = L$. Для акцептанса пустого промежутка с одинаковыми диафрагмами на концах получаем простой ответ

$$A = \varepsilon_{\max} = \frac{a^2}{L}. \quad (26)$$

Другой простой случай – длинная фокусирующая линза, рассмотренная в примере 7, с апертурой a . Для нее $A = a^2/\beta_0 = a^2\sqrt{k}$.

Периодические системы

В циклических ускорителях частицы проходят одну и ту же магнитную систему много раз. Тогда можно попытаться подобрать такой начальный фазовый эллипс, который через один проход переходит в себя

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \quad (13')$$

Из этого выражения следует, что матрица Твисса коммутирует с транспортной матрицей. Условию коммутации удовлетворяет любой полином от матрицы. Так как $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}$, то степень полинома от \mathbf{J} может быть не выше первой, т. е.

$\mathbf{M} = c_1\mathbf{E} + c_2\mathbf{J}$, где c_1 и c_2 – неизвестные пока числа, причем $(\mathbf{M} - c_1\mathbf{E})^2 = -c_2^2\mathbf{E}$. Из линейной алгебры известно, что матрица является корнем своего характеристического полинома $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}| = 0$. В частности, для матриц 2×2

$|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}| = \lambda^2 - \lambda \text{Sp } \mathbf{M} + |\mathbf{M}|$ и, сравнив коэффициенты двух полиномов, получим $c_1 = \text{Sp } \mathbf{M}/2$, $c_2 = \pm\sqrt{1 - c_1^2}$ (напомним, что $|\mathbf{M}| = 1$). Последнее равенство имеет смысл, т. е., «собственный» фазовый эллипс транспортной матрицы \mathbf{M} существует, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е.

$$|c_1| = |\text{Sp } \mathbf{M}/2| \leq 1. \quad (27)$$

При выполнении условия (27) собственные значения транспортной матрицы $\lambda = c_1 \pm ic_2 = e^{\pm i\mu}$. Число $\mu = \arccos(\text{Sp } \mathbf{M}/2) + 2n\pi$ (n – любое целое число) обычно называется набегом бетатронной фазы.

Теперь из формулы $\mathbf{M} = \mathbf{E}\cos \mu + \mathbf{J}\sin \mu$ можно найти начальные параметры Твисса $\beta_0 = M_{12}/\sin \mu$, $\alpha_0 = (M_{11} - \cos \mu)/\sin \mu$, $\gamma_0 = -M_{21}/\sin \mu$. Можно сказать, что найденный нами «собственный» фазовый эллипс (т. е. эллипс, который переходит в себя при линейном преобразовании, описываемом матрицей \mathbf{M}) является графическим представлением комплексно сопряженных собственных векторов $(\beta_0, \pm i - \alpha_0)^T \sin \mu = [M_{12}, \exp(\pm i\mu) - M_{11}]^T$. Используя формулы для матричных элементов (25), получаем

$$\cos \mu = \frac{C(\Pi) + S'(\Pi)}{2} = \cos \left[\int_0^\Pi \frac{ds_1}{\beta(s_1)} \right],$$

где Π – длина магнитной системы (для циклического ускорителя – периметр замкнутой орбиты). Последнее равенство позволяет однозначно определить параметр μ , как

$$\mu = \int_0^{\Pi} \frac{ds_1}{\beta(s_1)}. \quad (28)$$

При этом, глядя на формулу (24), можно понять, почему μ названо набегом фазы⁶.

Хотя при выборе найденных выше параметров фазового эллипса последний после каждого прохождения магнитной системы преобразуется в себя, этого нельзя сказать о положении частицы на фазовой плоскости. В соответствии с решением (24) она остается на том же фазовом эллипсе, но фаза φ_0 прирастает на μ . После n – ного прохода $\varphi_n = \varphi_0 + n\mu$. В результате за большое число проходов изображающие точки заполняют эллипс. Если в некотором месте с продольной координатой s имеется ограничение апертуры, так, что при $x > a(s)$ частицы не проходят, то при многократном прохождении частицы с $x_{\max} = \sqrt{\varepsilon w(s)} > a(s)$ рано или поздно будут потеряны. Аналогично (26) можно ввести многопроходный акцептанс (адмиттанс) системы

$$A = \min \left[\frac{a^2(s)}{\beta(s)} \right], \quad (29)$$

где минимум выражения в квадратных скобках берется по всей длине системы, т. е. по всему периметру $0 < s \leq \Pi$, а под β функцией понимается периодическое решение.

В заключении этого пункта заметим, что в представлении 3×3 матриц Штеффена (14) задача о нахождении периодических параметров Твисса сводится к отысканию собственного вектора матрицы.

Пример 10. Акцептанс и допустимые смещения квадрупольных линз для FODO структуры

Один из простейших примеров периодической фокусирующей системы – это т. н. FODO структура. Она состоит из большого числа одинаковых магнитных квадрупольных линз, размещенных с одинаковым пространственным периодом (шагом) L . Линзы имеют одинаковую по абсолютной величине оптическую силу $1/F$, но ее знак меняется от линзы к линзе. Таким образом, пространственный период фокусирующей системы равен $2L$. Считая линзы тонкими, легко записать матрицу периода

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{F} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{F} - \frac{L^2}{F^2} & 2L + \frac{L^2}{F} \\ -\frac{L}{F^2} & 1 + \frac{L}{F} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Клетка \mathbf{M}_y получается из (30) заменой знака оптической силы. Найдем теперь периодические параметры Твисса:

$$\cos \mu_x = \text{Sp } \mathbf{M}_x / 2 = 1 - \frac{L^2}{2F^2}, \quad \sin \mu_x = \sqrt{\frac{L^2}{F^2} \left(1 - \frac{L^2}{4F^2} \right)},$$

$$\beta_x = (\mathbf{M}_x)_{12} / \sin \mu_x = 2F \sqrt{\frac{2F+L}{2F-L}}, \quad \beta_y = (\mathbf{M}_y)_{12} / \sin \mu_y = 2F \sqrt{\frac{2F-L}{2F+L}}. \quad (31)$$

⁶ Слово «бетатронный» имеет чисто историческое происхождение.

Так как мы выбрали начало периода в фокусирующей (по горизонтали) линзе, то естественно, что в этом месте $\beta_x > \beta_y$. Кроме того, очевидно, что в фокусирующей линзе β функция (и огибающая пучка) максимальна. Поэтому, если апертура a везде одинакова, то, в соответствии с (29), адмиттанс равен

$$A = a^2 / \beta_x. \quad (32)$$

Можно выбрать оптическую силу так, чтобы адмиттанс был максимален. Для нахождения минимума β_x приравняем к нулю производную выражения (31) по F . После решения квадратного уравнения получим $(\beta_x)_{\min} \approx 3.33L$ при $F_{opt} \approx 0.81L$, и $A_{\max} \approx 0.3a^2/L$. Из-за слабой зависимости адмиттанса от оптической силы вблизи оптимума можно несколько уменьшить оптическую силу, т. е. считать практическим оптимумом $F = L$. При этом $A \approx 0.29a^2/L$.

На примере FODO мы рассмотрим вопрос о допустимых смещениях квадруполя с оптической осью. Пусть один из квадруполей, для определенности - фокусирующий, смещен в направлении x на Δx . Тогда опорная траектория, ранее совпадавшая с осью z , отклоняется от оси на угол $\Delta x/F$. Если до смещенной линзы вся доступная область фазового пространства (эллипс с площадью πA) была заполнена частицами, то после прохождения смещенной линзы весь этот эллипс сместится на $\Delta x/F$ вдоль оси x' . Для упрощения картинку мы мысленно разрежем линзу пополам. В середине линзы периодический фазовый эллипс будет прямостоящим ($\alpha = 0$), и, как объяснялось в примере 7, при некотором выборе масштаба шкалы x' этот эллипс можно изображать окружностью (см. Рис. 15).

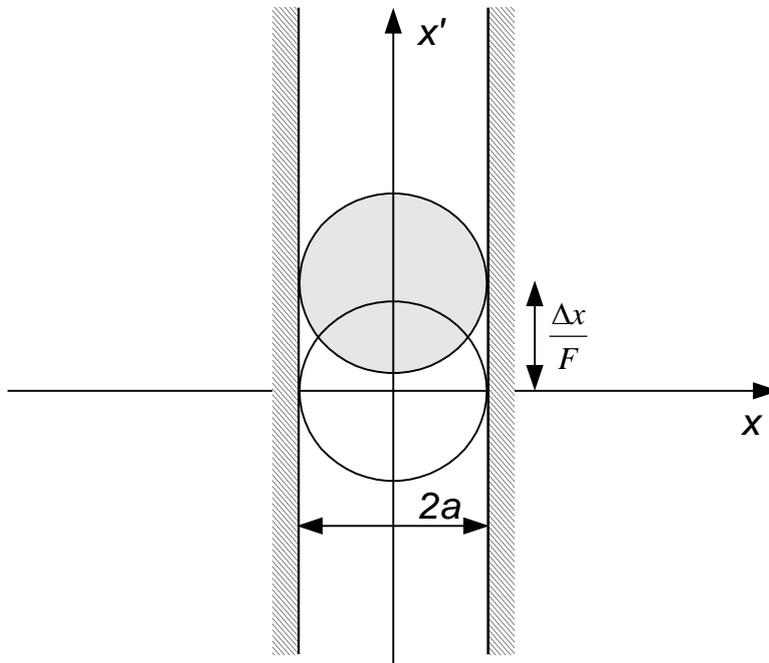


Рис. 15. Прозрачный круг – доступная область фазовой плоскости. Частицы, прошедшие смещенную линзу, изображены серым кругом. После прохождения нескольких периодов останутся лишь частицы, находящиеся в пересечении этих двух кругов.

В середине следующей фокусирующей линзы круг, изображающий пучок, повернется относительно начала координат по часовой стрелке на угол μ_x . При этом частицы с $|x| > a$ не пройдут. После прохождения еще одного периода пучок повернется на угол $2\mu_x$ и частицы с $|x| > a$ снова будут потеряны. Частицы, которые останутся после прохождения большого числа периодов находятся в пересечении двух кругов, показанных на Рис. 15. Считая, что $\Delta x/F \ll a/\beta_x$, и вписывая в пересечение кругов эллипс (в нашем случае – просто круг диаметром $2a - \beta_x \Delta x/F$) получим новый акцептанс канала

$$A_x = A \left(1 - \frac{\beta_x \Delta x}{2aF} \right)^2 \approx A - \frac{a \Delta x}{F}. \quad (33)$$

При вертикальном смещении Δy той же линзы уменьшится вертикальный акцептанс

$$A_y = A \left(1 - \frac{\beta_y \Delta y}{2a \sqrt{\beta_y/\beta_x} F} \right)^2 \approx A - \frac{a \Delta y}{F} \sqrt{\frac{\beta_y}{\beta_x}}. \quad (34)$$

Дополнительный множитель $\sqrt{\beta_y/\beta_x}$ в (34) связан с тем, что вертикальная β функция принимает разные значения в фокусирующей (по горизонтали) линзе, где происходит изменение угла, и в дефокусирующей (т. е. фокусирующей по вертикали) линзе, где максимальна вертикальная огибающая и происходит ограничение акцептанса. Так как этот множитель меньше 1, то вертикальное смещение фокусирующей линзы уменьшает акцептанс слабее, чем горизонтальное.

Для дефокусирующей линзы все вышеизложенное остается справедливым при замене x на y и y на x .

Для оценки допустимых отклонений в FODO канале с N линзами можно рассмотреть наихудший случай, когда все отклонения одинаковы по абсолютной величине, а их знаки обеспечивают максимальное угловое смещение, равное примерно $(N/2)\Delta x/F$. Если допустить снижение акцептанса в два раза по отношению к идеальному, то из (33) получим

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\beta_x} > \frac{N}{2} \frac{a |\Delta x|}{F}. \quad (35)$$

Правую часть этого неравенства можно рассматривать, как добавку к эффективному эмиттансу пучка вследствие неизвестных возможных смещений линз. Из (35) сразу следует искомая оценка

$$|\Delta x| < \frac{a}{N} \frac{F}{\beta_x}. \quad (36)$$

Для близкого к оптимальному случая $F = L$ из (31) следует, что $\beta_x = 2\sqrt{3}L$ и (36) дает $|\Delta x| < a/(2\sqrt{3}N)$. Например, при $a = 10$ мм и $N = 10$ $|\Delta x| < 0.3$ мм. Заметим, что оценка допустимых смещений линз (36) справедлива не только для FODO канала. Например, сдвинув все дефокусирующие линзы вперед по ходу частиц на расстояние $L - d$, близкое к L , получим из FODO дублетную структуру. Для получения максимального акцептанса, как и при выводе формулы (26), надо положить $\beta_x = 2L$, так как длина пустого промежутка

между дублетами примерно равна периоду системы $2L$. Легко проверить, что для этого надо выбрать фокусное расстояние симметричного дублета равным половине длины пустого промежутка, т. е. $F^2/d = L$. Тогда из (36) следует, что $|\Delta x| < a/(2N\sqrt{L/d})$. Обычно $d < L/3$ и допуски на геодезическую выставку линз дублетной структуры более жесткие, чем для FODO. Конец примера 10.

Обобщение на многомерный случай

Для описания двух или трех степеней свободы можно предположить, что все частицы лежат внутри гиперэллипсоида, описываемого, как и в (2), квадратичной формой $\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 1$. Только теперь квадратная симметричная положительно определенная матрица квадратичной формы \mathbf{Q} имеет порядок 4 или 6. Для выяснения смысла \mathbf{Q} найдем максимальное отклонение по координате, например, с номером 1. Для этого продифференцируем уравнение квадратичной формы по всем другим координатам и приравняем эти производные к нулю $Q_{nk} X_k + Q_{in} X_i = 2Q_{nk} X_k = 0$. С учетом этих уравнений от уравнения квадратичной формы остается $Q_{1k} X_k = 1$. Все эти равенства образуют систему линейных уравнений $Q_{ik} X_k = \delta_{i1}$ для определения координат максимума X_1 , которая решается умножением на обратную матрицу. В результате получаем обобщение формул (5) и (6)

$$(X_1)_{\max} = \sqrt{(\mathbf{Q}^{-1})_{11}}. \quad (37)$$

Законы преобразования (11), (13), (15'), и (15) матриц \mathbf{Q} и $\mathbf{J} = \mathbf{I}\mathbf{Q}$ остаются справедливыми. Как и в (14) можно составить элементы матрицы \mathbf{Q} в столбец, подвергающийся линейным преобразованиям, с порядком 10 либо 21 соответственно.

При симплектических преобразованиях фазового пространства собственные значения матрицы \mathbf{J} инвариантны, т. к. последняя подвергается преобразованиям подобия (13). Вследствие положительной определенности матрицы квадратичной формы \mathbf{Q} ее собственные значения положительны и существует базис, в котором она диагональна.

Глава 4. Функция распределения частиц в фазовом пространстве

Определение и основные свойства

Ансамбль из большого числа N невзаимодействующих частиц удобно описывать при помощи функции распределения в шестимерном фазовом пространстве $f(\mathbf{X}, s)$. По определению, в малом элементе объема $d^6\mathbf{X} = dx dx' dy dy' dt d\varepsilon$ содержится $dN = N f(\mathbf{X}, s) d^6\mathbf{X}$ частиц. Так как в качестве независимой переменной у нас выбрана продольная координата s , а не время, то физический смысл фазовой плотности $N f(\mathbf{X}, s)$ несколько отличается от обычного. А именно, $N f(\mathbf{X}, s) dx dx' dy dy' d\varepsilon$ - это плотность потока частиц, пролетающих в интервале углов $(x', x' + dx')$, $(y', y' + dy')$ и энергий $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ через плоскость xu (см. Рис. 2). Из такого определения следует, что функция распределения нормирована на единицу, т. е.

$$\int f(\mathbf{X}, s) d^6\mathbf{X} = 1. \quad (1)$$

где интеграл берется по всему фазовому пространству.

Закон движения (1.6) $\mathbf{X} = \mathbf{F}(s, \mathbf{X}(0))$ устроен таким образом, что фазовые траектории не пересекаются. Действительно, если при некотором s_1 две траектории пересеклись, то, взяв эту точку в качестве начальных условий, мы получим при $s > s_1$ два разных решения, что противоречит предполагаемой однозначности функции \mathbf{F} . Из непересечения траекторий следует, что, если частица сначала находится внутри некоторой области, то при движении она всегда остается внутри образа этой области (для наглядности можно представить, что точки границы области - это тоже частицы). Изменение малого элемента фазового объема при преобразовании описывается якобианом

$$\frac{d^6\mathbf{X}}{d^6\mathbf{X}(0)} = J \equiv \det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial X_k(0)} \right\|. \quad (2)$$

Если частицы не исчезают и не возникают, то число частиц в элементе фазового объема сохраняется и, следовательно,

$$f(\mathbf{X}, s) = J^{-1} f(\mathbf{X}(0), 0) = J^{-1} f(\mathbf{F}^{-1}(s, \mathbf{X}), 0), \quad (3)$$

где $\mathbf{X}(0) = \mathbf{F}^{-1}(s, \mathbf{X})$ - обратное преобразование, т. е., нахождение начальных условий для данной точки \mathbf{X} фазового пространства.

Из закона движения (1.6), примененного к малому сдвигу вдоль опорной траектории, следует, что движение описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка $d\mathbf{X}/ds = \mathbf{V}(\mathbf{X}, s)$, где $\mathbf{V}(\mathbf{X}, s_0) = \partial \mathbf{F}(s, s_0, \mathbf{X}) / \partial s|_{s=s_0}$.

Таким образом, в каждой точке \mathbf{X} фазового пространства задан вектор фазовой скорости \mathbf{V} . Если частицы не исчезают и не возникают, то выполняется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial X_i} (f V_i) = 0. \quad (4)$$

которое можно использовать для нахождения функции распределения при всех s по заданным начальным условиям $f(\mathbf{X}, 0)$. Решение этого уравнения непрерывности может быть записано в виде (3). Выражение в скобках есть вектор \mathbf{J} плотности потока в фазовом пространстве. В нашем случае

регулярного движения невзаимодействующих частиц он имеет простейший вид $\mathbf{J} = f\mathbf{V}$. Для описания диффузии плотность потока должна зависеть от производных f по фазовым координатам, например, $J_i = fV_i + D_{ik} \partial f / \partial V_k$, а для взаимодействующих частиц ее зависимость от f становится нелинейной. Вводя понятие полной производной $df/ds \equiv \partial f / \partial s + V_i \partial f / \partial X_i$, которая описывает изменение фазовой плотности вдоль фазовой траектории, можно переписать (4) в виде

$$\frac{df}{ds} = -f \frac{\partial}{\partial X_i} V_i. \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что изменение фазовой плотности вдоль фазовой траектории пропорционально дивергенции фазового потока. Во многих интересных случаях, в частности, для гамильтоновых систем, последняя равна нулю. Тогда фазовая плотность сохраняется вдоль фазовой траектории и решение уравнения $df/ds = 0$, называемого уравнением Лиувилля, записывается в виде (3) с $J = 1$.

При помощи функции распределения можно найти среднее значение физической величины, зависящей от фазовых координат частицы $A(\mathbf{X}, s)$

$$\langle A \rangle \equiv \int A(\mathbf{X}, s) f(\mathbf{X}, s) d^6 \mathbf{X}. \quad (6)$$

Плотность потока частиц получается интегрированием по углам и энергии

$$j(x, y, t) \equiv N \int f(\mathbf{X}, s) dx' dy' d\varepsilon. \quad (7)$$

Если на частицы попадают на фотопластинку, то плотность почернения будет пропорциональна плотности частиц $\rho(x, y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} j(x, y, t) dt$. Аналогично вводятся «проекции» функции распределения, например, на плоскость (x, x') , $f_x(x, x') \equiv N \int f(\mathbf{X}, s) dy dy' d\varepsilon dt$.

Линейные преобразования

Для линейных преобразований фазового пространства все гораздо проще. В этом случае $\mathbf{X} = \mathbf{F}(s, \mathbf{X}(0)) = \mathbf{M}(s)\mathbf{X}(0)$ и $f(\mathbf{X}, s) = J^{-1} f(\mathbf{M}^{-1}(s)\mathbf{X}, 0)$, где $J = |\mathbf{M}|$.

Важным примером средних величин являются моменты функции распределения $\langle X_i X_k \dots X_p \rangle$. Кроме того, вводятся т. н. несмещенные моменты, например, $\langle (X_i - \langle X_i \rangle)^2 \rangle$. Для рассмотренных выше линейных преобразований фазового пространства

$\langle \mathbf{X} \rangle(s) = \int \mathbf{X} J^{-1} f(\mathbf{M}^{-1}(s)\mathbf{X}, 0) d^6 \mathbf{X} = \int \mathbf{M}(s) \mathbf{Y} f(\mathbf{Y}, 0) d^6 \mathbf{Y} = \mathbf{M}(s) \langle \mathbf{X} \rangle(0)$, т. е. «центр тяжести» ансамбля (пучка) движется, как одна из частиц. Часто бывает удобно выбрать за опорную частицу, находящуюся в этом «центре тяжести». Тогда несмещенные моменты совпадают с обычными.

Часто применяют симметричную матрицу вторых моментов с элементами $C_{ik} \equiv \langle X_i X_k \rangle$, которая получается усреднением произведения столбца \mathbf{X} на строку \mathbf{X}^T . Эта матрица преобразуется по простому закону

$$\mathbf{C}(s) = \langle \mathbf{X}(s) \mathbf{X}^T(s) \rangle = \langle \mathbf{M}(s) \mathbf{X}(0) \mathbf{X}^T(0) \mathbf{M}^T(s) \rangle = \mathbf{M}(s) \mathbf{C}(0) \mathbf{M}^T(s). \quad (8)$$

Для симплектических преобразований удобно ввести матрицу $\mathbf{D} \equiv \mathbf{C}\mathbf{I}$, которая подвергается преобразованиям подобия

$$\mathbf{D}(s) = -\mathbf{M}(s) \mathbf{C}(0) \mathbf{I} \mathbf{M}^T(s) \mathbf{I} = \mathbf{M}(s) \mathbf{D}(0) \mathbf{M}^{-1}(s). \quad (9)$$

Следовательно, собственные числа матрицы \mathbf{D} сохраняются. Так как уравнение на собственные числа может быть записано в виде $|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{C} + \lambda \mathbf{I}| = 0$, а матрица \mathbf{C} симметрична, то, корнями этого характеристического уравнения являются как λ , так и $-\lambda$. Это значит, что имеется не шесть, а три независимых инварианта. Кроме того, коэффициенты характеристического многочлена (которые, естественно, тоже инвариантны) при нечетных степенях λ равны нулю. Например, равен нулю коэффициент при первой степени λ , т. е. след матрицы \mathbf{D} , что, впрочем, следует непосредственно из симметричности матрицы \mathbf{C} . Напомним, что коэффициент при нулевой степени – это детерминант $|\mathbf{D}| = |\mathbf{C}|$.

Величина $\sqrt{|\mathbf{C}|}$ характеризует фазовый объем, занимаемый частицами. Это видно из ее размерности и из того, что при числе частиц (точек фазового пространства) меньшем размерности фазового пространства детерминант обращается в нуль.

Пусть начальная шестимерная функция распределения факторизуется, т. е. имеет вид $f(\mathbf{X}, 0) = f_x(x, x') f_y(y, y') f_t(t, \varepsilon)$. Если степени свободы меняются независимо (например, матрица преобразования имеет клеточно-диагональный вид), то вид функции распределения сохраняется и изменение каждой из частичных функций распределения можно рассчитать независимо от двух других. Ниже мы подробно рассмотрим этот простейший случай.

Пусть на плоскости (x, x') имеется N точек, изображающих частицы. Найдем величину, характеризующую «размер» этого ансамбля. Для симплектических преобразований косокалярное произведение $x^{(1)} x'^{(2)} - x'^{(1)} x^{(2)}$ фазовых векторов двух частиц является инвариантом, поэтому средние от степеней этой величины тоже будут инвариантны. Вычислим их.

$$\langle x^{(1)} x'^{(2)} - x'^{(1)} x^{(2)} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (x^{(i)} x'^{(k)} - x'^{(i)} x^{(k)}) = 0, \quad (10)$$

$$\langle (x^{(1)} x'^{(2)} - x'^{(1)} x^{(2)})^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (x^{(i)} x'^{(k)} - x'^{(i)} x^{(k)})^2 = \quad (11)$$

$$2 \langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - 2 \langle x x' \rangle^2$$

Из формулы (11) следует, что величина, имеющая размерность площади на фазовой плоскости и называемая среднеквадратичным эмиттансом,

$$\varepsilon_{rms} \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2} \quad (12)$$

инвариантна при симплектических преобразованиях. Интересно записать матрицу вторых моментов для двумерного случая

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x x' \rangle \\ \langle x x' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -\langle x x' \rangle & \langle x^2 \rangle \\ -\langle x'^2 \rangle & \langle x x' \rangle \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда характеристическое уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} -\langle xx' \rangle - \lambda & \langle x^2 \rangle \\ -\langle x'^2 \rangle & \langle xx' \rangle - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - |\mathbf{C}_2|$$

имеет корни $\lambda = \pm\sqrt{|\mathbf{C}_2|} = \pm\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} = \pm\varepsilon_{rms}$.

Если шестимерная функция распределения распадается на три множителя, как это было описано выше, то матрица несмещенных вторых моментов \mathbf{C} имеет нулевые недиагональные клетки и абсолютные величины собственных значений равны соответствующим среднеквадратичным эмиттансам, а шестимерный фазовый объем $\sqrt{|\mathbf{C}|}$ равен произведению этих трех эмиттансов. Для произвольного распределения можно найти три пары собственных значений матрицы \mathbf{D} и назвать абсолютные величины этих собственных значений среднеквадратичными эмиттансами.

В предыдущей главе мы характеризовали пучок при помощи фазового эллипса. Теперь мы обобщим такой подход, рассмотрев функции распределения вида $f(x, x') = F(\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2)$. Эллипсы с параметрами α, β, γ суть линии уровня функции распределения, как это показано на Рис. 16.

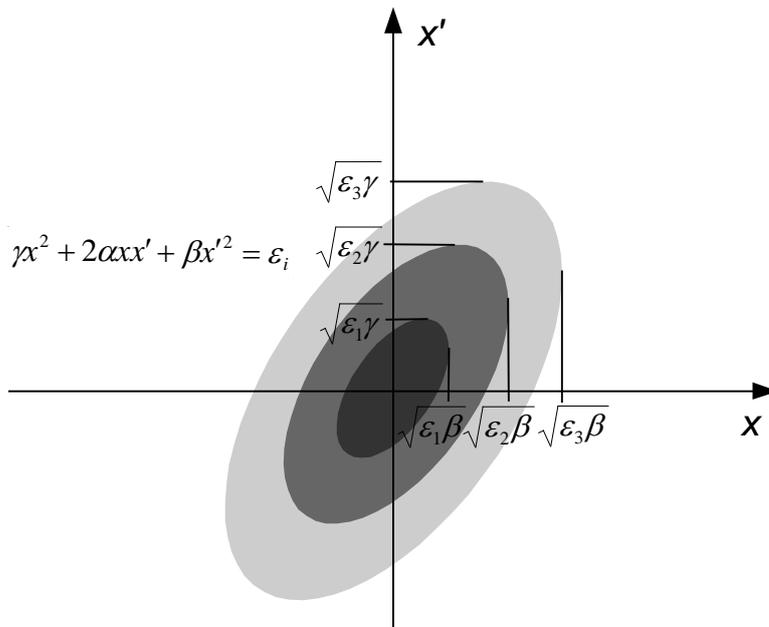


Рис. 16. Линии уровня функции распределения вида $f(x, x') = F(\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2)$ - подобные эллипсы с различными значениями ε_i инварианта Куранта – Снайдера.

Тогда при симплектических преобразованиях вид функции $F(\varepsilon)$ не меняется, а параметры Твисса преобразуются уже известным нам способом (3.13), или (3.14). Рассмотрим теперь примеры таких функций.

Пример 11. Простейшие функции распределения

1. Гауссова экспонента $f(x, x') = Ae^{-\frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{2\varepsilon}}$. Параметр A будет найден из условия нормировки функции распределения на единицу, но сначала найдем плотность

$$\begin{aligned} \rho(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x') dx' = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{2\varepsilon}} dx' = \\ &A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\gamma - \alpha^2/\beta)x^2 + \beta(x + \alpha/\beta)^2}{2\varepsilon}} dx' = A \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon\beta}}. \end{aligned} \quad (14)$$

При взятии интеграла была использована формула $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi\sigma}$ и условие (3.3), связывающее параметры Твисса. Приравнявая единице интеграл от плотности, получим $A = 1/(2\pi\varepsilon)$. Из (13) сразу следует, что $\langle x^2 \rangle = \varepsilon\beta$, т. е. $\sqrt{\varepsilon\beta}$ есть среднеквадратичный размер пучка. Аналогично, $\langle x'^2 \rangle = \varepsilon\gamma$ и

$$\begin{aligned} \langle xx' \rangle &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xx' e^{-\frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{2\varepsilon}} dx dx' = \\ &\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xx' e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon\beta} - \frac{\beta}{2\varepsilon} \left(x' + \frac{\alpha}{\beta}x\right)^2} dx dx' = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{y - \alpha x}{\beta} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\varepsilon\beta}} dx dx' = -\alpha \frac{\langle x^2 \rangle}{\beta} = -\alpha\varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

Зная все три вторых момента, из определения (12) находим среднеквадратичный эмиттанс $\varepsilon_{rms} = \varepsilon$.

2. Кусочно постоянное распределение $f(x, x') = A \mathcal{G}\left(1 - \frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{\varepsilon}\right)$, где

$\mathcal{G}(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\mathcal{G}(x) = 0$ при $x < 0$. В этом случае частицы равномерно распределены внутри эллипса с эмиттансом ε . Интегрируя функцию распределения по углам, получим плотность

$$\begin{aligned} \rho(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x') dx' = A \int_{x'_{\min}(x)}^{x'_{\max}(x)} dx' \mathcal{G}(\varepsilon\beta - x^2) = \\ &A \left[-\frac{\alpha x}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right)^2 - \frac{\gamma x^2 - \varepsilon}{\beta}} + \frac{\alpha x}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right)^2 - \frac{\gamma x^2 - \varepsilon}{\beta}} \right] \mathcal{G}(\varepsilon\beta - x^2) = \\ &\frac{2A}{\beta} \sqrt{\varepsilon\beta - x^2} \mathcal{G}(\varepsilon\beta - x^2) \end{aligned} \quad (16)$$

После интегрирования по x получаем $A = 1/(\pi\varepsilon)$, что можно было сказать и без вычислений, так как $\pi\varepsilon$ - это площадь эллипса на фазовой плоскости, а A - плотность частиц внутри эллипса. Вторые моменты и среднеквадратичный эмиттанс вычисляются интегрированием. Результаты таковы: $\langle x^2 \rangle = \varepsilon\beta/4$, $\langle x'^2 \rangle = \varepsilon\gamma/4$, $\langle xx' \rangle = -\varepsilon\alpha/4$, $\varepsilon_{rms} = \varepsilon/4$.

3. Распределение Капчинского-Владимирского

$$f(x, x', y, y') = A \delta \left(1 - \frac{\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2}{\varepsilon_x} - \frac{\gamma_y y^2 + 2\alpha_y y y' + \beta_y y'^2}{\varepsilon_y} \right). \quad (17)$$

Частицы распределены равномерно по поверхности четырехмерного гиперэллипсоида. При движении пучка в прямом канале без связи горизонтальной и вертикальной степеней свободы это распределение сохраняет свой вид (меняются лишь параметры Твисса. Найдем сначала плотность частиц

$$\rho(x, y) \equiv \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, x', y, y') dx' dy' =$$

$$A \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \delta \left(1 - \frac{x^2}{\beta_x \varepsilon_x} - \frac{y^2}{\beta_y \varepsilon_y} - \xi^2 - \eta^2 \right) d\xi d\eta = \quad (18)$$

$$A \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \int_0^{\infty} \delta \left(1 - \frac{x^2}{\beta_x \varepsilon_x} - \frac{y^2}{\beta_y \varepsilon_y} - \rho^2 \right) \pi d(\rho^2) = \pi A \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \mathcal{G} \left(1 - \frac{x^2}{\beta_x \varepsilon_x} - \frac{y^2}{\beta_y \varepsilon_y} \right)$$

Отсюда следует, что плотность постоянна внутри эллипса полной шириной $2\sqrt{\varepsilon_x \beta_x}$ и полной высотой $2\sqrt{\varepsilon_y \beta_y}$. Зная площадь этого эллипса $\pi\sqrt{\varepsilon_x \beta_x \varepsilon_y \beta_y}$, находим нормировочный множитель $A = 1/(\pi^2 \varepsilon_x \varepsilon_y)$. Функция распределения по одной степени свободы находится аналогично плотности:

$$f_1(x, x') \equiv \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, x', y, y') dy dy' =$$

$$\frac{1}{\pi^2 \varepsilon_x \varepsilon_y \beta_y} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \delta \left(1 - \frac{\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2}{\varepsilon_x} - \frac{y^2 + t^2}{\varepsilon_y \beta_y} \right) dy dt = \quad (19)$$

$$A \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \int_0^{\infty} \delta \left(1 - \frac{x^2}{\beta_x \varepsilon_x} - \frac{y^2}{\beta_y \varepsilon_y} - \rho^2 \right) \pi d(\rho^2) = \frac{1}{\pi \varepsilon_x} \mathcal{G} \left(1 - \frac{\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2}{\varepsilon_x} \right)$$

Конец примера 11.

По аналогии со среднеквадратичным эмиттансом можно ввести «среднеквадратичные» параметры Твисса, используя матрицу вторых моментов (13)

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x x' \rangle \\ \langle x x' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} \equiv \varepsilon_{rms} \begin{pmatrix} \beta_{rms} & -\alpha_{rms} \\ -\alpha_{rms} & \gamma_{rms} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Для них справедливы все полученные ранее соотношения для параметров Твисса.

Гауссовы волновые пучки

Распространение волн является предметом «обычной» оптики. Тем не менее, данная тема включена в наш курс. Она позволяет выявить интересные аналогии в парааксиальном распространении пучков частиц и волн.

Рассмотрим для простоты скалярное волновое уравнение $c^2 \Delta v - \partial^2 v / \partial t^2 = 0$, где $\Delta v = \partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 + \partial^2 v / \partial z^2$ - оператор Лапласа. Комплексная амплитуда u монохроматического поля $v = \text{Re}(u e^{-i\omega t})$ подчиняется уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (21)$$

где $k = \omega/c$. Нас интересуют решения этого уравнения (волны), распространяющиеся вдоль оси z в положительном направлении (как, например, плоская волна $\exp(ikz)$) и сосредоточенные около оси z . Одним из простейших решений (21) является сферическая волна $\exp\left(ik\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}\right) / \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}$ с центром (источником) в точке с координатами $(0, 0, z_1)$. При больших волновых числах k вблизи оси z при $z > z_1$ можно применить параксиальное разложение

$$u = \frac{\exp\left(ik\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}} \approx e^{ik(z - z_1)} \frac{\exp\left(\frac{1}{2}ik \frac{x^2 + y^2}{z - z_1}\right)}{z - z_1}, \quad (22)$$

как это обычно делают при рассмотрении дифракции Френеля. Считая z_1 просто параметром решения, положим $z_1 = iz_0$, т. е. будем считать его чисто мнимым. Тогда функция (22) приближенно удовлетворяет уравнению (21), но пространственное распределение волны сильно изменится.

$$u = e^{ik(z - z_1)} \frac{\exp\left(\frac{1}{2}ik \frac{x^2 + y^2}{z - iz_0}\right)}{z - iz_0} = e^{kz_0} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{z^2 + z_0^2}} \exp\left[-\frac{kz_0(x^2 + y^2)}{2(z^2 + z_0^2)}\right] \exp\left[i \frac{kz(x^2 + y^2)}{2(z^2 + z_0^2)} + i \operatorname{atan} \frac{z_0}{z}\right] \quad (23)$$

Множитель $\exp(ikz)$ в (23) показывает, что волна «бежит» вдоль оси z в положительном направлении. Как видно из (23), интенсивность (плотность потока фотонов) имеет гауссово распределение $|u|^2 \propto \exp\left(kz_0 \frac{x^2 + y^2}{z^2 + z_0^2}\right)$ по поперечным координатам со среднеквадратичными размерами

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{z_0^2 + z^2}{2kz_0}. \quad (24)$$

При $kz_0 \gg 1$ $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \ll z_0^2$, т. е. наше решение сосредоточено около оси z . Сравнив это выражение с формулой, описывающей изменение размера пучка частиц в свободном пространстве

$$\langle x^2 \rangle = \varepsilon_{rms} \beta = \varepsilon_{rms} \frac{\beta_0^2 + z^2}{\beta_0}, \quad (25)$$

можно сказать, что, если принять за эффективный (дифракционный) эмиттанс пучка излучения величину

$$\varepsilon_w = \frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{4\pi}, \quad (26)$$

то изменение поперечных размеров описывается обычной β функцией $\beta = z_0 + z^2/z_0$ с минимальным значением z_0 . z_0 называется длиной Рэлея. Оценка величины эффективного эмиттанса волны (26) легко получается из соотношения неопределенностей (т. е. соотношения между

среднеквадратичными ширинами функции и ее спектра $\Delta k_x \Delta x > 1/2$):
 $\Delta x \Delta x' = \Delta x (\Delta k_x / k) = \Delta k_x \Delta x / k > 1/(2k)$.

Как видно из выражения для поля сферической волны (22), коэффициент перед квадратом расстояния до оси $x^2 + y^2$ обратно пропорционален радиусу кривизны волнового фронта (поверхности постоянной фазы) $R = z - z_1$

$$\frac{1}{2} ik \frac{x^2 + y^2}{z - z_1} = ik \frac{x^2 + y^2}{2R}. \quad (27)$$

Тогда из формулы для поля гауссова пучка (23) следует простое выражение для радиуса кривизны волнового фронта

$$R = z + \frac{z_0^2}{z}. \quad (28)$$

При прохождении гауссова пучка через тонкую линзу с фокусным расстоянием F его амплитуда не меняется, а к фазе добавляется множитель $ik(x^2 + y^2)/(-2F)$. Если, например, точечный источник с полем (22) находится в фокусе линзы, так что $R = z - z_1 = F$, то зависимость фазы волны от поперечных координат исчезает, т. е. волновой фронт становится плоским, а лучи (нормали к волновым фронтам) – параллельными оси z . Следовательно, при прохождении через линзу кривизна волнового фронта изменяется по закону

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F}. \quad (29)$$

Для полного описания гауссова пучка вводится т. н. комплексный радиус кривизны

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{i}{2k \langle x^2 \rangle} = \frac{1}{R(z)} + \frac{i}{\beta(z)}. \quad (30)$$

При этом выражение для поля $u \propto \exp[ik(x^2 + y^2)/(2q)]$ становится похожим на формулу для поля сферической волны (22). Замечательным свойством комплексного радиуса кривизны является то, что при прохождении через оптическую систему с лучевой матрицей \mathbf{M} он преобразуется по закону

$$q_2 = \frac{M_{11}q_1 + M_{12}}{M_{21}q_1 + M_{22}}. \quad (31)$$

т. е. подвергается дробно-линейному преобразованию, параметрами которого являются элементы лучевой матрицы. Это легко проверяется для тонкой линзы [см. формулу (29)] и для пустого промежутка. Но, как было показано в главе 1, в линейном приближении любая оптическая система эквивалентна двум пустым промежуткам и тонкой линзе. Поэтому (31) справедливо для всех оптических систем.

Группа дробно-линейных преобразований (31) комплексного радиуса кривизны дает нам третье представление группы симплектических преобразований фазовой плоскости. Оно легко выводится, если вспомнить, что в лучевой оптике радиус кривизны волнового фронта есть отношение $R = x/x'$ (расстояние до пересечения луча с осью z). Кстати, такое отображение фазовой плоскости в прямую является простейшим примером проективного преобразования. Переход от лучей к гауссовым пучкам осуществляется заменой действительного параметра комплексным. Аналогичные дробно-линейные

преобразования с унитарными матрицами рассматриваются в связи со спинорным представлением группы вращений.

Наряду с β можно ввести для Гауссова пучка два других параметра Твисса. В пустом промежутке (см. пример 8) $\alpha = -\beta'/2 = -\gamma z = -z/z_0$, $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta = 1/z_0$, и, в соответствии с формулой (28), $R = z + z_0^2/z = -\beta/\alpha$. Тогда

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + \frac{i}{\beta} = \frac{i - \alpha}{\beta} \quad (32)$$

и мы можем непосредственно проверить соотношение (31) используя матрицу Штеффена (3.14)

$$q_2 = \frac{\beta_2}{i - \alpha_2} = \frac{C^2\beta_1 - 2CS\alpha_1 + S^2\gamma_1}{i + CC'\beta_1 - (CS' + C'S)\alpha_1 + SS'\gamma_1} = \frac{(C\beta_1 - S\alpha_1)^2 + S^2}{i\beta_1 + CC'\beta_1^2 - (CS' + C'S)\alpha_1\beta_1 + SS'\alpha_1^2 + SS'} = \frac{(C\beta_1 - S\alpha_1 + iS)(C\beta_1 - S\alpha_1 - iS)}{i\beta_1 + (C'\beta_1 - S'\alpha_1)(C\beta_1 - S\alpha_1) + SS'} = \frac{C\beta_1 + S(i - \alpha_1)}{C'\beta_1 + S'(i - \alpha_1)} = \frac{Cq_1 + S}{C'q_1 + S'} \quad (33)$$

Заметим, что в параметре q нетрудно узнать отношение элементов собственного вектора матрицы Твисса \mathbf{J} . Преобразование эллиптических гауссовых пучков, поле которых имеет вид $u \propto \exp[ik x^2/(2q_x) + ik y^2/(2q_y)]$, описывается так же.

Пример 12. Основная мода открытого оптического резонатора

Пусть имеется две сферы с радиусами R_1 и R_2 . Проведем ось z через центры сфер, как показано на рисунке 17.

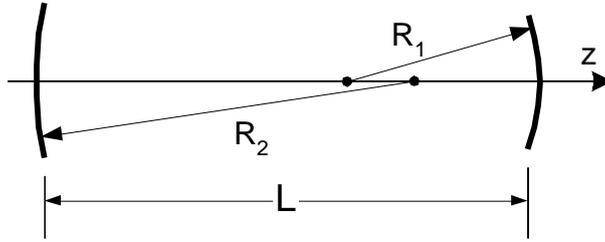


Рис. 17. Двухзеркальный оптический резонатор.

Считая сферы отражающими, рассмотрим лучи света вблизи оси z . При отражении лучей происходит их фокусировка с оптической силой $2/R$. Тогда эта система из двух зеркал является частным случаем периодических фокусирующих систем, описанных в главе 3. Матрица одного периода записывается в виде

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ -\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4L}{R_1 R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Это очень похоже на FODO канал, изученный нами в примере 10. Условие устойчивости лучей (3.27) дает

$$-1 < \cos \mu = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} < 1. \quad (35)$$

Это условие приводится к более простым видам

$$0 < \left(\frac{L}{R_1} - 1 \right) \left(\frac{L}{R_2} - 1 \right) < 1 \text{ и } 0 < \frac{L}{R_1 R_2} (R_1 + R_2 - L) < 1. \quad (36)$$

Бета функция периодического решения на первом зеркале равна

$$\beta_1 = \frac{M_{12}}{\sin \mu} = \frac{R_1 (R_2 - L)}{\sqrt{\left(\frac{R_1 R_2}{L} - R_1 - R_2 + L \right) (R_1 + R_2 - L)}}, \quad (37)$$

а размер гауссова пучка - $\sqrt{\lambda \beta_1 / 4\pi}$. При хорошем качестве отражающих поверхностей и выполнении условия устойчивости (35) гауссов световой пучок может циркулировать в пространстве между зеркалами длительное время. Для этого поперечный размер (диаметр) зеркала должен в несколько раз превышать размер гауссова пучка на зеркале. С точки зрения электродинамики периодический гауссов пучок является одной из простейших мод полости (резонатора), ограниченной двумя пересекающимися сферическими поверхностями.

Часто стоит задача минимизировать размеры гауссова пучка на зеркалах. Рассмотрим простейший случай одинаковых зеркал. Как было отмечено при выводе формулы (3.26) для акцептанса двух одинаковых щелей, минимальное значение β_1 равно L . В нашей задаче оно получается при $R_1 = R_2 = L$. Такой оптический резонатор называется конфокальным, так как совпадают фокальные плоскости первого и второго зеркал. Двухзеркальный оптический резонатор используется в газовых лазерах.

Конец примера 12.

Измерение параметров пучка

Большая часть методов измерения параметров функции распределения основана на измерении проекции этого распределения на плоскость x, y , т. е. плотности

$$\rho(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x', y, y', t, \varepsilon) dx' dy' dt d\varepsilon. \quad (38)$$

Плотность измеряется, например, по интенсивности свечения флуоресцентного экрана, на который падает пучок. «Повернув» распределение в фазовом пространстве, можно получить другую проекцию. При этом для получения дополнительной информации о распределении по какой-либо из координат в фазовом пространстве надо, чтобы матрица преобразования связывала интересующую координату с поперечной пространственной координатой x или y .

Рассмотрим сначала измерение поперечной четырехмерной функции распределения. $f(x, x', y, y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x', y, y', t, \varepsilon) dt d\varepsilon$. Одним из простейших способов измерения вторых моментов этой функции является измерение

плотностей в нескольких точках прямого электронно-оптического канала. При этом матрицы матрицы перехода от одной точки к другой считаются известными. Тогда в каждой точке (на каждом экране) можно измерить плотность (38) и найти три элемента симметричной 4×4 матрицы вторых моментов (8) - $\langle x^2 \rangle$, $\langle xy \rangle$ и $\langle y^2 \rangle$. Так как неизвестных элементов матрицы – 10, то достаточно измерений с четырех экранов, чтобы найти все вторые моменты. Если же предполагать отсутствие связи между поперечными степенями свободы и нулевые $\langle xy \rangle$, $\langle x'y \rangle$ и $\langle xy' \rangle$, то достаточно трех экранов. Часто применяемым вариантом такого метода является использование трех экранов в пустом промежутке. В этом случае по трем измеренным точкам определяются три параметра параболы [см. (3.20)]

$$\langle x^2 \rangle = \varepsilon_{rms} \beta = \varepsilon_{rms} \beta_{\min} + \varepsilon_{rms} \frac{(s - s_1)^2}{\beta_{\min}} \quad (39)$$

- $\varepsilon_{rms}, \beta_{\min}, s_1$.

Можно обойтись и одним экраном, меняя параметры системы (например, оптические силы линз) перед ним. Для одной линзы с оптической силой D , находящейся на расстоянии L от экрана,

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \varepsilon_{rms} \beta = \varepsilon_{rms} (C^2 \beta_0 - 2CS \alpha_0 + S^2 \gamma_0) = \\ &= \varepsilon_{rms} [(1 - LD)^2 \beta_0 - 2L(1 - LD) \alpha_0 + L^2 \gamma_0] = \quad , \quad (40) \\ &= \varepsilon_{rms} L^2 \beta_0 D^2 - 2\varepsilon_{rms} L(\beta_0 - L \alpha_0) D + \varepsilon_{rms} (\beta_0 - 2L \alpha_0 + L^2 \gamma_0) \end{aligned}$$

и, измерив зависимость размера от оптической силы, можно определить параметры Твисса и эмиттанс.

Магнитный спектрометр

Для измерения распределения частиц по энергиям применяются системы, называемые магнитными спектрометрами. Как и в предыдущем пункте, для изучения распределения по некоторой степени свободы в шестимерном фазовом пространстве нам надо «связать» эту степень с поперечной координатой. В данном пункте для этого используется $M_{16} = \eta$. Схема простейшего спектрометра показана на рисунке 18.

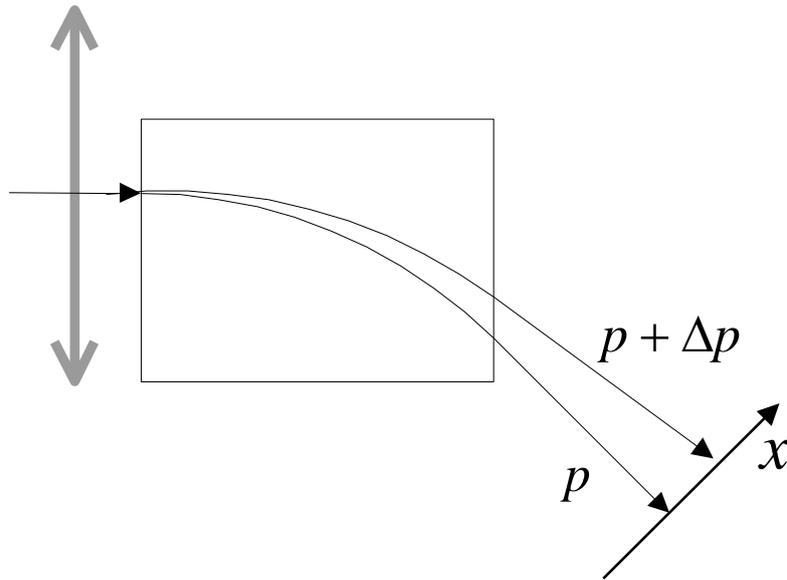


Рис. 18. Простейший спектрометр.

Частицы с разными энергиями отклоняются на разные углы и поэтому попадают в разные точки экрана. Частицы с отклоненной энергией смещаются на экране на величину $\eta \Delta p / p$. Разрешение такого спектрометра зависит от размера парциальных пучков $\sqrt{\varepsilon \beta}$

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\min} = \frac{\sqrt{\varepsilon \beta}}{\eta}. \quad (41)$$

Поэтому на экране желательно иметь малую β функцию, но большую η . Эти требования несколько противоречивы. В прямом промежутке после магнита, согласно (2.51), η удовлетворяет тому же уравнению, что и траектория, и, следовательно сохраняется «инвариант η функции» $\beta \eta'^2 + 2\alpha \eta \eta' + \gamma \eta^2 \approx \beta_0 \theta^2$, пропорциональный величине β функции в магните β_0 и квадрату угла поворота $\eta'_0 = \theta$ (для упрощения формул мы считаем этот угол малым).

Удобно проанализировать нашу задачу на фазовой плоскости координат и углов сразу после магнита, который мы считаем коротким. На рисунке 19 показаны два парциальных пучка – с энергией опорной частицы и с отклоненной энергией.

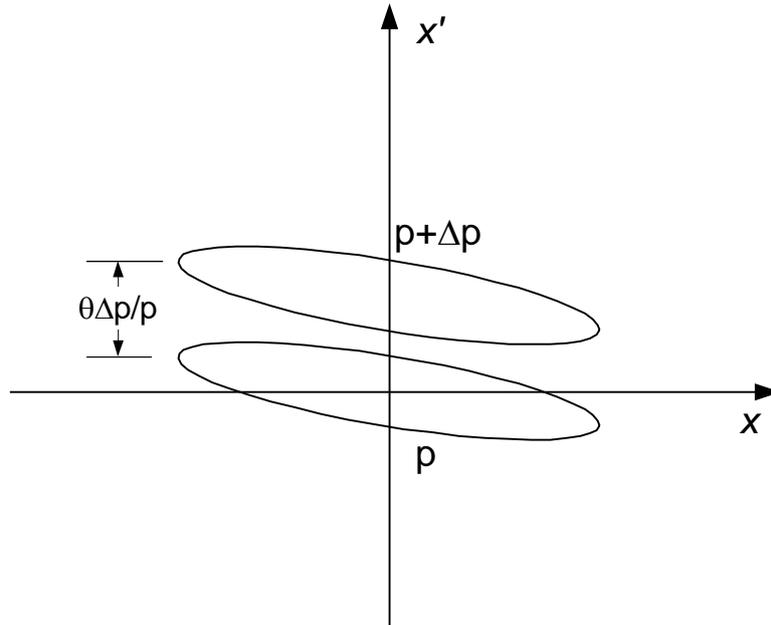


Рис. 19. Разделение пучков с разной энергией в фазовом пространстве.

Последний смещен по углу на $\theta \Delta p / p$, так как угол поворота обратно пропорционален импульсу.

Из рисунка ясно, что критерий разделения пучков в фазовом пространстве имеет вид $\sqrt{\varepsilon / \beta} < \theta \Delta p / p$. Из него следует, что, увеличив β в магните, можно понизить локальный угловой разброс и, следовательно, повысить энергетическое разрешение. Но увеличение β , т. е. поперечного размера пучка, ограничено апертурой магнита: $\sqrt{\varepsilon \beta} < a$. Учитывая это ограничение, получим наилучшее (в том смысле, что оптика между магнитом и экраном обеспечит оптимальный поворот фазовой плоскости, изображенной на Рис. 19, чтобы перевести разделение по углам в разделение по координатам) разрешение

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\min} = \frac{1}{\theta} \frac{\varepsilon}{a}. \quad (42)$$

Эта формула с точностью до обозначений совпадает с известной оценкой спектрального разрешения дифракционной решетки или призмы. Это не удивительно, так как согласно (26) эмиттанс светового пучка равен $\lambda / (4\pi)$ и все предыдущие рассуждения справедливы и для него.

Глава 5. Аберрации

Общее описание аберраций

В главе 1, описывая преобразование фазовых координат частицы $\mathbf{X}(s)$ мы разложили координаты по степеням начальных условий $\mathbf{X}(0)$

$$X_i(s) = \sum_{k=1}^6 M_{ik}(s) X_k(0) + \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 A_{ikl}(s) X_k(0) X_l(0) + \dots \quad (1.7')$$

$$+ \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 \sum_{m=1}^6 B_{iklm}(s) X_k(0) X_l(0) X_m(0) + \dots$$

Вплоть до этого момента мы рассматривали лишь линейное приближение. Для пучков с относительно малыми эмиттантами высшие члены разложения малы и приводят лишь к небольшим поправкам к решениям линейных уравнений. Эти поправки, называемые аберрациями, часто играют весьма существенную роль. Например, они могут увеличивать среднеквадратичные эмиттансы (см. ниже).

Рассмотрим сначала общую структуру этих поправок. Аберрации второго порядка описываются коэффициентами A_{ikl} . Как и все коэффициенты квадратичных форм их можно выбрать симметричными $A_{ikl} = A_{ilk}$. В магнитоэлектронных системах энергия сохраняется, и $A_{6kl} = 0$. Кроме того, поле не зависит от времени, следовательно, $A_{ik5} = A_{i5l} = 0$. Тогда квадратичные аберрации можно представить в виде

$$\delta X_i(s) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 A_{ikl}(s) X_k(0) X_l(0) + 2 \frac{\Delta p}{p} \sum_{k=1}^4 A_{ik6}(s) X_k(0) + A_{i66}(s) \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2, \quad (1)$$

где i меняется от 1 до 5. Последний член этой формулы описывает квадратичную зависимость координат от отклонения импульса. Предпоследний - показывает, что 4×4 матрица поперечного движения для частиц с отклоненной энергией имеет вид $\mathbf{M} + 2 \|A_{ik6}\| \Delta p / p$. Матрицу $2 \|A_{ik6}\|$ иногда называют матрицей хроматических аберраций. Хроматические аберрации вызваны зависимостью оптических сил фокусирующих элементов от энергии частиц. Например, оптическая сила тонкой квадрупольной линзы (1.5) равна

$$D_x(p + \Delta p) = \frac{e}{(p + \Delta p)c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial x} dz \approx \frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial x} dz - \frac{\Delta p}{p} \frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial B_y}{\partial x} dz. \quad (2)$$

Поэтому для тонкого квадруполя

$$2 \|A_{ik6}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Двойная сумма в (1) описывает квадратичные поперечные аберрации. Для тонких элементов $A_{1kl} = A_{3kl} = 0$. Кроме того, условие каноничности преобразования

$$\left\| \frac{\partial X_i(s)}{\partial X_k(0)} \right\|^T \mathbf{I} \left\| \frac{\partial X_i(s)}{\partial X_k(0)} \right\| = \mathbf{I} \quad (4)$$

приводит к тому, что

$$\|A_{2kl}\| = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|A_{4kl}\| = \begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

т. е. поперечные aberrации второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \delta x' &= ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{3} x^3 + bx^2 y + cxy^2 + \frac{d}{3} y^3 \right) \\ \delta y' &= bx^2 + 2cxy + dy^2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{3} x^3 + bx^2 y + cxy^2 + \frac{d}{3} y^3 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ясно, что такой ответ можно было получить сразу из гамильтониана тонкого элемента с кубическим полиномом от координат

$$H = - \left(\frac{a}{3} x^3 + bx^2 y + cxy^2 + \frac{d}{3} y^3 \right) \delta(s). \quad (7)$$

Заметим, что такой гамильтониан не осесимметричен (т. е. его нельзя представить как функцию только от $x^2 + y^2$). Поэтому для осесимметричных систем, например, стеклянных линз обычной оптики, aberrаций второго порядка нет.

Кубические aberrации, описываемые коэффициентами B_{iklm} в разложении (1.7), могут быть рассмотрены аналогично предыдущему. Например, aberrации тонкого элемента могут быть описаны гамильтонианом с полиномом четвертого порядка. Следует, правда, отметить существенное ограничение нашего предположения, что при прохождении тонкого элемента импульсы не меняются. Оно может оказаться неверным в продольном магнитном поле, так как канонический импульс $m\mathbf{v} + e\mathbf{A}/c$ может быстро измениться за счет зависимости векторного потенциала от продольной координаты, как это происходит на конце соленоида.

Разложение на мультиполи

Теперь мы рассмотрим важный частный случай магнитных систем. Интересуясь, как и в начале главы 2, полем вблизи оси z декартовых координат, запишем разложение скалярного магнитного потенциала ψ . Рассмотрим сначала плоские поля, когда потенциал не зависит от z . Напомним, что он подчиняется уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$. Решением двумерного уравнения Лапласа $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$ является реальная часть от любой аналитической (т. е. разлагаемой в ряд по степеням переменной) функции комплексной переменной $x + iy$. Это легко проверяется подстановкой. Поэтому

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x + iy)^n = \operatorname{Re} c_1 x - \operatorname{Im} c_1 y + \operatorname{Re} c_2 (x^2 - y^2) - \operatorname{Im} c_2 xy + \\ &\operatorname{Re} c_3 (x^3 - 3xy^2) - \operatorname{Im} c_3 (3x^2 y - y^3) + \dots \\ &\operatorname{Re} c_4 (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) - \operatorname{Im} c_4 (4x^3 y - 4xy^3) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Полиномы в скобках являются решениями уравнения Лапласа и называются мультиполями. Эти мультиполи делятся на 2 класса – четные и нечетные по вертикальной координате y . Так как $\mathbf{B} = \nabla\psi$, то разложение поля имеет вид

$$\begin{aligned}
B_y &= -\text{Im}c_1 - 2\text{Re}c_2y - \text{Im}c_2x + -6\text{Re}c_3xy - 3\text{Im}c_3(x^2 - y^2) + \\
&- 4\text{Re}c_4(3x^2y - y^3) - 4\text{Im}c_4(x^3 - 3xy^2) + \dots \\
B_x &= \text{Re}c_1 + 2\text{Re}c_2x - \text{Im}c_2y + 3\text{Re}c_3(x^2 - y^2) - 6\text{Im}c_3xy + \\
&4\text{Re}c_4(x^3 - 3xy^2) - 4\text{Im}c_4(3x^2y - y^3) + \dots
\end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим поля мультиполей по отдельности. Первый нечетный мультиполь соответствует однородному вертикальному полю $B_y = -\text{Im}c_1$, а первый четный – горизонтальному $B_x = \text{Re}c_1$. Второй нечетный мультиполь (квадруполь) $\psi = -\text{Im}c_2xy$ описывает квадрупольное поле $G = \partial B_y / \partial x = \partial B_x / \partial y = -\text{Im}c_2$, которое фокусирует частицы [см. формулу (2.7)], а второй четный $\psi = \text{Re}c_2(x^2 - y^2)$ (косой квадруполь), дает линейную связь поперечных степеней свободы.

Полезно записать разложение потенциала (8) в полярных координатах $x + iy = re^{i\varphi}$

$$\begin{aligned}
\psi &= \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x + iy)^n = \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\varphi} = \\
&\sum_{n=1}^{\infty} r^n (\text{Re}c_n \cos n\varphi + \text{Im}c_n \sin n\varphi)
\end{aligned} \quad (10)$$

Из этой формулы, в частности, видно, что поля косых мультиполей (имеющих веса $\text{Re}c_n$) отличаются от полей прямых мультиполей (имеющих веса $\text{Im}c_n$) поворотом на угол $\pi/(2n)$. Например, косой квадруполь – это прямой квадруполь, повернутый на 45 градусов.

Одним из простых способов формирования нужных магнитных полей является использование железных магнитопроводов. Так как магнитная проницаемость железа велика, то поверхность куска железа с хорошей точностью можно считать магнитной эквипотенциалью. Тогда для создания нужных полей нам надо знать их эквипотенциали. Для однородного поля - это параллельные прямые (горизонтальные - для B_y и вертикальные - для B_x). Для квадрупольного – это гиперболы $xy = -\psi / \text{Im}c_2 = \text{const}$.

Квадрупольная линза

Схема поперечного сечения квадрупольной линзы показана на рисунке 20.

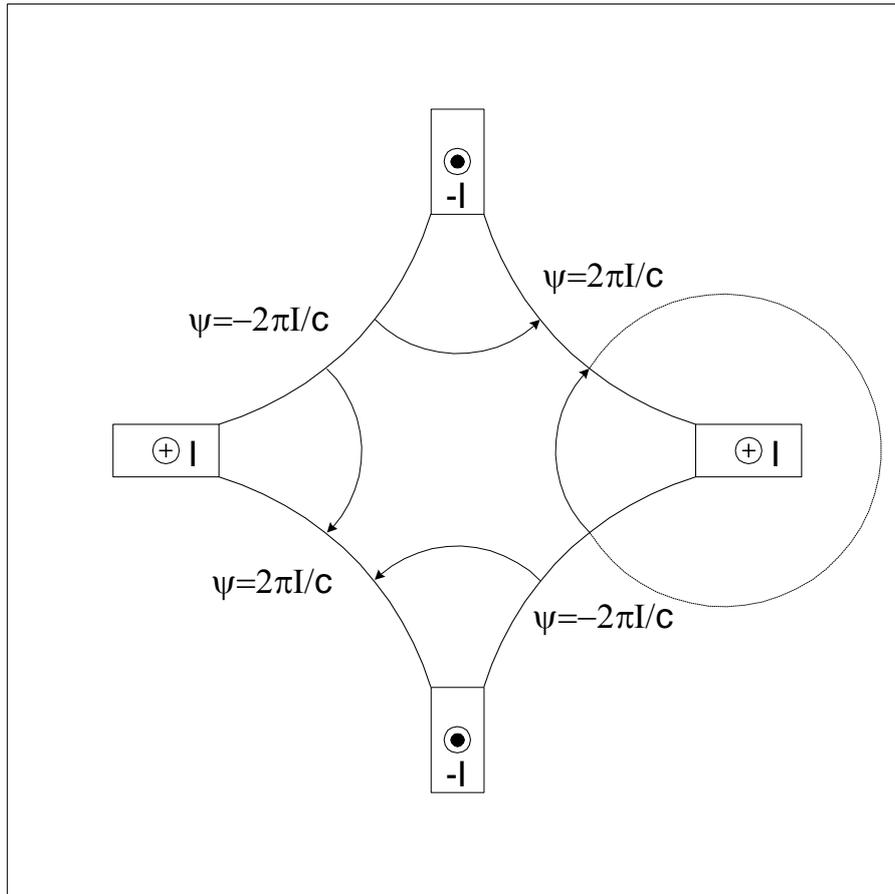


Рис. 20. Схема поперечного сечения квадрупольной линзы.

Внутри железного бруса квадратного сечения имеется отверстие. Сечение отверстия представляет собой четырехугольник, образованный отрезками гипербол $xu = \pm a$, a – радиус вписанной окружности. Разность магнитных потенциалов создается токами $\pm I$, текущими вдоль оси z (перпендикулярно рисунку) и расположенными в вершинах четырехугольника. Как известно, $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = 4\pi I/c$. На рисунке показан один из возможных контуров интегрирования вокруг одного из токов. Часть контура, показанная пунктиром, проходит по железу. Там напряженность поля равна индукции, деленной на большую магнитную проницаемость. Поэтому, пренебрегая этим вкладом, можно считать, что разность магнитных потенциалов соседних полюсов (это действительно полюса магнита – «южный» и «северный») равна

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi I}{c}. \quad (11)$$

Учитывая, что внутри линзы $\psi = Gxu$, а точка $x = u = a$ находится на поверхности железа, получаем значение фокусирующего «градиента»

$$G = \frac{2\pi I}{ca^2}. \quad (12)$$

При отклонении частицы от центра линзы вправо вертикальное магнитное поле поворачивает частицу в одну сторону, а при отклонении влево – в другую.

Поперечное сечение «настоящей» квадрупольной линзы может несколько отличаться от простейшей схемы. На рисунке 21 тоже показана квадрупольная линза. На основания полюсов надеты обмотки из изолированного провода. Тогда $I = 2NI_1$, где N – число витков обмотки, а I_1 – ток в проводе.

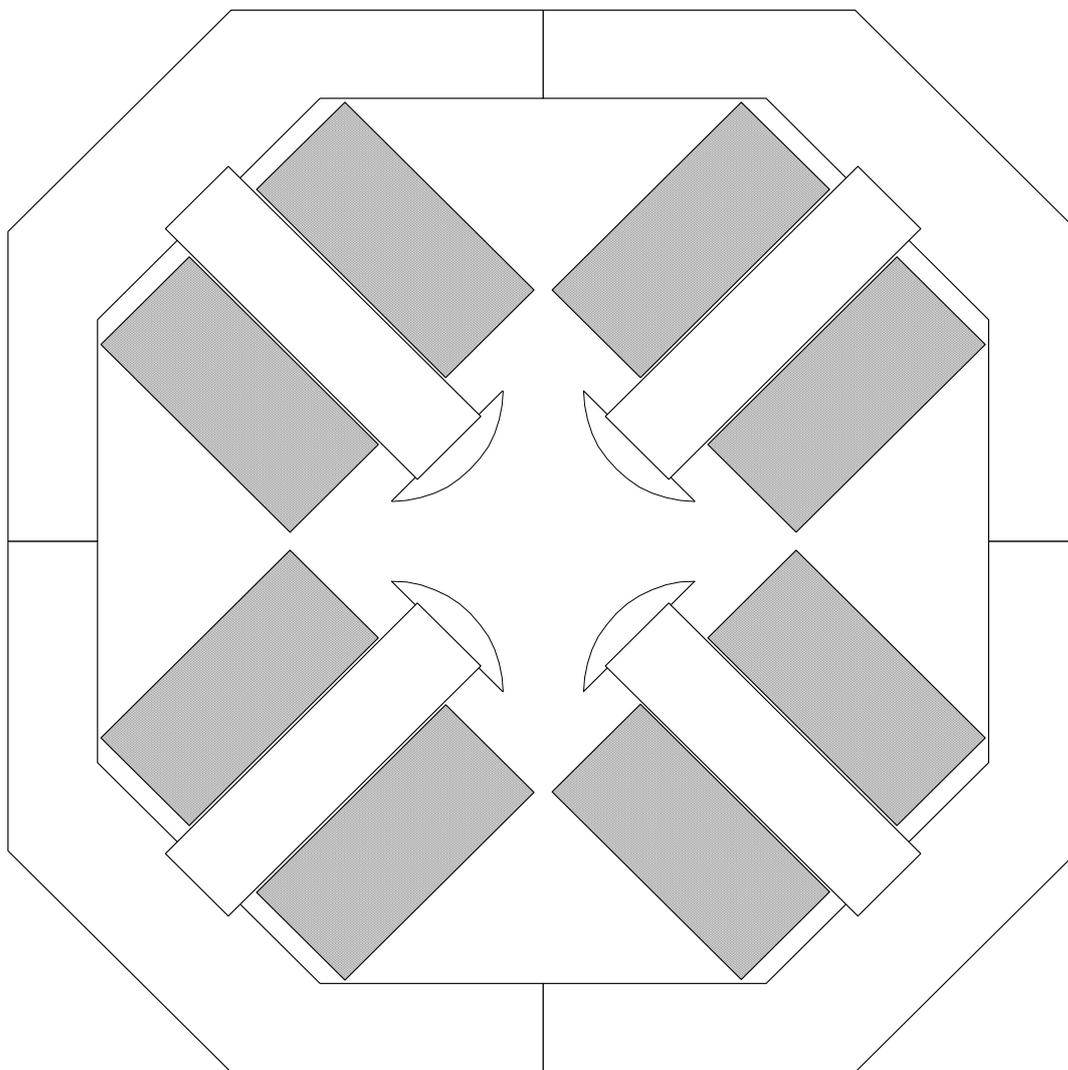


Рис. 21. Схема поперечного сечения квадрупольной линзы.

Кроме того, форма полюсов сильно отличается от гипербол, поэтому в разложении потенциала будут присутствовать высшие мультиполи. Однако, из-за зеркальных симметрий линзы относительно осей x и y , а также прямых, $x = \pm y$, многих из мультиполей в разложении нет. Действительно, записав условия симметрии $\psi(x, y) = -\psi(x, -y) = -\psi(-x, y) = \psi(y, x)$, применим их к члену ряда (8). Как уже отмечалось, первое условие оставляет только прямые мультиполи $\text{Im}(x + iy)^n$. Второе – лишь четные $n = 2m$. Третье $\text{Im}(x + iy)^{2m} = \text{Im}(y + ix)^{2m} = (-1)^m \text{Im}(x - iy)^{2m} = (-1)^{m+1} \text{Im}(x + iy)^{2m}$ – лишь нечетные $m = 2p + 1$. Таким образом, условия симметрии приводят к тому, что

разложение поля состоит из мультиполей вида $\text{Im}(x + iy)^{4p+2} = r^{4p+2} \sin(4p+2)\varphi$. При $p = 0$ получаем низший из них – квадруполь $2xy = r^2 \sin 2\varphi$. Следующий ($p = 1$) имеет степень 6. Подбирая геометрические параметры полюсов (например, их ширину) можно обратить в нуль вес шестого мультиполя. Низший из оставшихся высших мультиполей будет теперь иметь степень 10. Заметим, что при фиксированном расстоянии от оси z , например, на вписанной в апертуру окружности (т. е. окружности, касающейся всех полюсов) $r = a$, разложение потенциала (10) является разложением в ряд Фурье по углу φ . Поэтому форма полюсов задает амплитуды гармоник на вписанной окружности. Как правило, они спадают с ростом номера гармоники (мультиполя). Для идеального случая гиперболических полюсов остается только вторая гармоника. Считая потенциал заданным на вписанной окружности, можно сказать, что n -ный мультиполь спадает с уменьшением расстояния до оси z как $(r/a)^n$. Поэтому влиянием десятого мультиполя на движение частиц часто можно пренебречь. Таким образом, полюса квадрупольной линзы могут иметь не гиперболическую, а более простую форму (например, круговую или трапециевидную) с правильно подобранными размерами.

Секступоли и октуполи

Изучив квадрупольную линзу, рассмотрим следующий мультиполь $\text{Im}(x + iy)^3 = 3x^2y - y^3 = r^3 \sin 3\varphi$, называемый секступолем. Его эквипотенциали описываются уравнением $r^3 \sin 3\varphi = \text{const}$, которое отличается только степенью от аналогичного уравнения для квадруполя. По аналогии с квадруполем можно считать, что мы задаем потенциал пропорциональный $\sin 3\varphi$ на границе апертуры $r = a$. Ясно, что для этого потребуется не четыре, как у квадруполя, а шесть полюсов с чередующейся полярностью потенциала (см. рисунок 22). Такая магнитная система называется секступольной линзой. Если, как и для квадруполя, полюса одинаковы и каждый из них зеркально симметричен, то низшей ненулевой гармоникой (мультиполем) будет девятая. Так как она быстро спадает внутри линзы, то форма полюсов практически не влияет на качество поля. Сила секступоля часто характеризуется величиной $\partial^2 B_y / \partial x^2 = -6 \text{Im} c_3$. Пренебрегая вкладом высших гармоник в потенциал, можно связать его с потенциалом полюса $4\pi NI_1 / c$ и получить оценку силы секступоля

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \approx \frac{24\pi NI_1}{ca^3}. \quad (13)$$

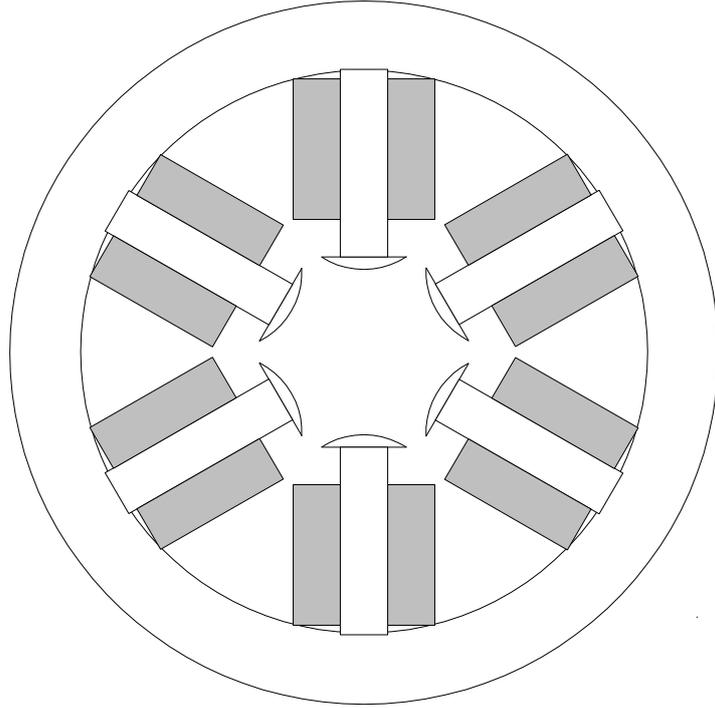


Рис. 22. Схема поперечного сечения секступольной линзы.

Следующий мультиполь $\text{Im}(x + iy)^4 = 4x^3y - 4xy^3 = r^4 \sin 4\varphi$, называется октуполем. Его эквипотенциали описываются уравнением $r^4 \sin 4\varphi = \text{const}$. Магнит, который его создает имеет восемь полюсов и называется октупольной линзой. Сила октуполя часто характеризуется величиной $\partial^3 B_y / \partial x^3 = -24 \text{Im} c_3$. Она связана с током в обмотках приближенной формулой

$$\frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \approx \frac{96\pi N I_1}{c a^4}. \quad (14)$$

Интегрированные мультиполи

Применимость изложенных выше формул весьма ограничена, так как реальные магниты имеют конечную длину, и зависимость потенциала от продольной координаты существенна. Мы несколько расширим эту область применимости. При обсуждении тонких элементов мы отмечали, что координаты частиц в них меняются мало. В применении к магнитному полю это значит, что

$$\Delta p_x \approx -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} B_y dz = -\frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \psi dz, \quad \Delta p_y \approx \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} B_x dz = \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \psi dz. \quad (15)$$

С другой стороны, интегрируя по z уравнение Лапласа $\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial z^2 = 0$, получим двумерное уравнение Лапласа $\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 = 0$ для интегрированного потенциала $\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi dz$. Функцию Ψ можно, как это было сделано выше, разложить по мультиполям. При этом большая часть предыдущих рассуждений остается справедливой. Например, для получения хорошего поля в короткой симметричной

квадрупольной линзе достаточно занулить силу шестого интегрированного мультиполя.

Аберрации, вызванные тонкими секступолем и октуполем

Согласно выражению (6) квадратичные аберрации тонкого элемента описываются четырьмя коэффициентами. Используя (15) и (9) получим

$$\begin{aligned} \delta x' &= -\frac{e}{2pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} dz (x^2 - y^2) = -\frac{e}{6pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} dz \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - 3xy^2) \\ \delta y' &= \frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} dz xy = -\frac{e}{6pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} dz \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - 3xy^2) \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, мы нашли эти четыре коэффициента, причем оба четных равны нулю. Аналогично могут быть найдены аберрационные коэффициенты тонкого косого секступоля и тонких октуполей. Например, для октуполя

$$\begin{aligned} \delta x' &= -\frac{e}{6pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} dz (x^3 - 3xy^2) = -\frac{e}{24pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} dz \frac{\partial}{\partial x} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\ \delta y' &= \frac{e}{6pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} dz (3x^2y - y^3) = -\frac{e}{24pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} dz \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим теперь на простых примерах влияние аберраций на распределение частиц в фазовом пространстве. Пусть пучок, пролетающий через тонкий секступоль имеет горизонтальный поперечный размер, а другие размеры и разбросы равны нулю. Тогда согласно (16) горизонтальный отрезок прямой, изображающий пучок в плоскости (x, x') , после прохождения частиц через секступоль изогнется, как это показано на рисунке 23.

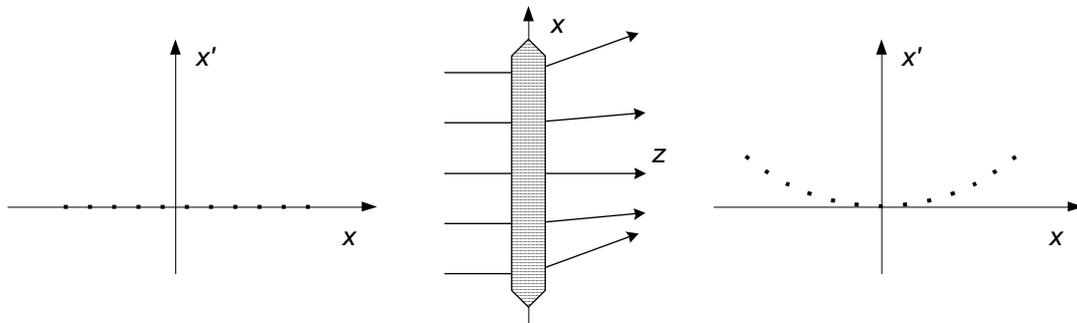


Рис. 23. Прохождение частиц через секступольную линзу и соответствующая деформация фазовой плоскости горизонтальной степени свободы.

На рисунке 24 показано прохождение того же пучка через тонкую октупольную линзу.

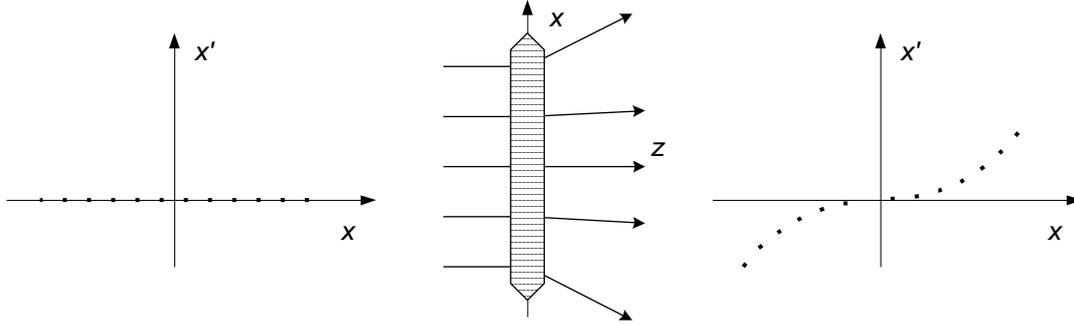


Рис. 24. Прохождение частиц через октупольную линзу и соответствующая деформация фазовой плоскости горизонтальной степени свободы.

Аберрации, вызванные нелинейностью поля на краях квадрупольной линзы

Для описания трехмерного магнитоэстатического поля нам понадобится разложение скалярного потенциала вблизи оси z

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(z) x^m y^n. \quad (18)$$

Подставляя этот ряд в уравнение Лапласа

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [c_{mn}''(z) x^m y^n + m(m-1)c_{mn}(z) x^{m-2} y^n + n(n-1)c_{mn}(z) x^m y^{n-2}] \quad (19)$$

и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых мономах $x^m y^n$, получим цепочку уравнений

$$0 = c_{mn}''(z) + (m+2)(m+1)c_{m+2,n}(z) + (n+2)(n+1)c_{m,n+2}(z). \quad (20)$$

При постоянных c_{mn} мы вернемся к разложению по мультиполям (8). Пусть поле обладает квадрупольной симметрией $\psi(x, y, z) = -\psi(x, -y, z) = -\psi(-x, y, z) = \psi(y, x, z)$. Тогда первый член цепочки уравнений (20) выглядит как

$$0 = c_{11}''(z) + 6c_{31}(z) + 6c_{13}(z). \quad (21)$$

Учитывая, что $c_{11} = \partial B_y / \partial x = G$ и в силу симметрии $c_{31} = c_{13}$, получаем потенциал квадрупольной линзы в виде

$$\psi = Gxy - \frac{G''}{12}(x^3 y + xy^3). \quad (22)$$

Заметим, что полученная поправка не дает вклада в интегрированный потенциал Ψ . Уравнения траекторий имеют вид

$$\begin{aligned} x'' + \frac{e}{pc} \left[Gx - \frac{G''}{12}(x^3 + 3xy^2) \right] &= 0 \\ y'' - \frac{e}{pc} \left[Gy - \frac{G''}{12}(3x^2 y + y^3) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая малость нелинейной поправки можно решать эти уравнения методом последовательных приближений, т. е. разложением решения по степени малости поправки $x = x_0 + x_1 + \dots$, $y = y_0 + y_1 + \dots$. При этом решение нулевого приближения удовлетворяет линейным уравнениям. Подстановкой решения в

таким виде в систему (23) получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

$$\begin{aligned} x_1'' + \frac{eG}{pc} x_1 &= \frac{eG''}{12pc} (x_0^3 + 3x_0 y_0^2) \\ y_1'' - \frac{eG}{pc} y_1 &= -\frac{eG''}{12pc} (3x_0^2 y_0 + y_0^3) \end{aligned} \quad (24)$$

Считая линзу тонкой можно получить простые решения

$$\begin{aligned} x_1' &\approx \frac{e}{12pc} \int_{-\infty}^{\infty} G'' (x_0^3 + 3x_0 y_0^2) dz = \frac{e}{12pc} \int_{-\infty}^{\infty} G (x_0^3 + 3x_0 y_0^2)'' dz \approx \\ &- \left(\frac{e}{pc} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} G^2 dz \frac{x_0^3 - x_0 y_0^2}{4} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y_1' &\approx -\frac{e}{12pc} \int_{-\infty}^{\infty} G'' (3x_0^2 y_0 + y_0^3) dz = -\frac{e}{12pc} \int_{-\infty}^{\infty} G (3x_0^2 y_0 + y_0^3)'' dz \approx \\ &- \left(\frac{e}{pc} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} G^2 dz \frac{y_0^3 - y_0 x_0^2}{4} \end{aligned} \quad (26)$$

Можно привести эти ответы к более наглядному виду, если согласно (2.5) ввести фокусное расстояние линзы и ее эффективную длину

$$L_{eff} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} G dz \right)^2 / \int_{-\infty}^{\infty} G^2 dz. \quad (27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x' &\approx -\frac{x^3 - xy^2}{4F^2 L_{eff}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x^4 - 2x^2 y^2 + y^4}{16F^2 L_{eff}} \\ y' &\approx -\frac{y^3 - yx^2}{4F^2 L_{eff}} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{x^4 - 2x^2 y^2 + y^4}{16F^2 L_{eff}} \end{aligned} \quad (28)$$

Эти aberrации есть у любой квадрупольной линзы. Как видно из (17), можно частично компенсировать их октупольными линзами. Такая компенсация эквивалентна деформации полюсов квадрупольной линзы, нарушающей симметрию $\psi(x, y, z) = \psi(y, x, z)$. В первом приближении это просто небольшое разведение правой и левой (либо нижней и верхней) половин квадрупольной линзы. Следует учитывать, что обычно вертикальный и горизонтальный размеры пучка в квадрупольной линзе значительно отличаются. Поэтому достаточно компенсировать aberrации, пропорциональные третьей степени той координаты, по которой размер больше (обычно линза фокусирует по этой степени свободы). Кубические aberrации фокусировки квадрупольными линзами приводят к росту частот бетатронных колебаний в циклических ускорителях с ростом амплитуд бетатронных колебаний.

Компенсация хроматических aberrаций секступолями

Рассмотрим разложение секступольного потенциала относительно оси, смещенной в точку $(x_0, 0)$ плоскости xu . Подставляя $x = x_0 + \zeta$, получим

$$\psi = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} (3(x_0 + \xi)^2 y - y^3) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} x_0^2 y + \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} x_0 \xi y + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} (3\xi^2 y - y^3)$$
(29)

В новом разложении кроме не изменившейся величины секступоля (третий член) присутствуют вертикальное поле (первый член) и квадруполь (второй член). Следовательно, если опорная траектория проходит с отклонением от центра секступольной линзы, то появляется дополнительная фокусировка. Если частицы с разными энергиями имеют разные средние координаты, т. е. элемент матрицы вторых моментов $C_{16} = \langle x \Delta p / p \rangle$ [см. формулу (4.8)] отличен от нуля, то центр тяжести парциального пучка с отклонением импульса Δp смещен от опорной траектории на

$$x_0 = \langle x \rangle_{\Delta p} = \frac{\langle x \Delta p / p \rangle}{\langle (\Delta p / p)^2 \rangle} \frac{\Delta p}{p}$$
(30)

Тогда частицы этого парциального пучка подвергаются воздействию дополнительного квадруполя с «градиентом»

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \frac{\langle x \Delta p / p \rangle}{\langle (\Delta p / p)^2 \rangle} \frac{\Delta p}{p}$$
(31)

Этой дополнительной фокусировкой можно скомпенсировать хроматические aberrации.

Пример 13. Простейший ахроматический поворот второго порядка

В примере 6 был описан ахроматический поворот, состоящий из двух поворотных магнитов и квадрупольной линзы. Согласно формуле (1) частицы с отклонением по энергии на выходе из такой системы имеют дополнительные координату $x = A_{166} (\Delta p / p)^2$ и угол $x' = A_{266} (\Delta p / p)^2$. Если $A_{166} = A_{266} = 0$ то система называется ахроматической во втором порядке. Вследствие зеркальной симметрии нашего поворота относительно его середины для достижения ахроматизма второго порядка достаточно одной секступольной коррекции в середине (т. е. в квадрупольной линзе).

Чтобы найти ее величину снова потребуем, чтобы угол частицы с отклоненной энергией после прохождения линзы изменил знак. Заменяем это условие более удобным – обращением угла в нуль в середине линзы.

В соответствии с формулой (2.69) магнит поворачивает частицы на угол

$$\theta = \text{asin} \left[\frac{e}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} B_y(z) dz \right] \approx$$
(32)

$$\theta_0 - \frac{\Delta p}{p} \tan \theta_0 + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \left[\tan \theta_0 + \frac{1}{2} (\tan \theta_0)^3 \right] + \dots$$

Считая для простоты магнит коротким по сравнению с длиной прямолинейного промежутка L , получаем, что на входе в линзу (которую мы тоже считаем короткой)

$$x = L \left\{ \tan \theta_0 \Delta p / p - \left[\tan \theta_0 + (\tan \theta_0)^3 / 2 \right] (\Delta p / p)^2 \right\},$$

$$x' = \tan \theta_0 \Delta p / p - \left[\tan \theta_0 + (\tan \theta_0)^3 / 2 \right] (\Delta p / p)^2.$$

При прохождении через половину

квадрупольной линзы угол меняется, причем мы должны учесть, что фокусное расстояние линзы пропорционально импульсу частицы

$$x'_c = x' - \frac{x}{2F(1 + \Delta p/p)} \approx \tan \theta_0 \frac{\Delta p}{p} - \left[\tan \theta_0 + \frac{1}{2} (\tan \theta_0)^3 \right] \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \frac{L \tan \theta_0}{2F} - \frac{L}{2F} \left\{ \tan \theta_0 \frac{\Delta p}{p} - \left[\tan \theta_0 + \frac{1}{2} (\tan \theta_0)^3 \right] \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \right\}. \quad (33)$$

Подбираем, как и раньше, оптическую силу $F = L/2$, чтобы занулить линейный по отклонению импульса член в (33). Тогда остается $x'_c \approx \tan \theta_0 (\Delta p/p)^2$. Чтобы скомпенсировать этот угол достаточно установить секступольную коррекцию с силой, получаемой из (16)

$$\frac{e}{2pc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} dz = 2 \frac{x'}{x^2} = 2 \frac{\tan \theta_0 (\Delta p/p)^2}{(L \tan \theta_0 \Delta p/p)^2} = \frac{2}{L^2 \tan \theta_0}. \quad (34)$$

Множитель 2 учитывает, что во второй половине квадрупольной линзы должна быть такая же коррекция. Иногда удобнее применить две секступольные линзы, расположенные по обеим сторонам квадрупольной линзы.

Конец примера 13.

Аберрации, фокусирующего соленоида

В главе 2 была рассмотрена фокусировка в продольном магнитном поле. Чтобы рассчитать аберрации аксиально-симметричного фокусирующего соленоида запишем разложение векторного потенциала, имеющего только азимутальную компоненту

$$A_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z) r^n. \quad (35)$$

Поле имеет лишь радиальную $B_r = -\partial A_\alpha / \partial z$ и продольную $B_z = [\partial(rA_\alpha) / \partial r] / r$ компоненты, которые в отсутствии токов потенциальны, т. е. $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, что дает одно нетривиальное уравнение для аксиальной компоненты ротора

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\alpha) \right] + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2} = 0. \quad (36)$$

Из выражения для продольного поля следует, что первый коэффициент разложения (35) описывает поле на оси $c_1 = B_z(z)/2$. Подставляя ряд (35) в уравнение (36) получаем [аналогично (20)] цепочку уравнений, связывающих коэффициенты разложения. При этом все четные коэффициенты равны нулю, а $c_3 = -B_z''(z)/16$ и с достаточной для наших целей точностью

$$A_\alpha = \frac{1}{2} B_z(z) r - \frac{1}{16} B_z''(z) r^3. \quad (37)$$

Уравнения движения проще всего получить из функции Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) / c^2} + \frac{e}{c} r \dot{\alpha} A_\alpha. \quad (38)$$

Уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ сразу дают сохранение обобщенного момента импульса

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{mr^2 \dot{\alpha}}{\sqrt{1 - (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2)/c^2}} + \frac{e}{c} r A_\alpha = M = \text{const} \quad (39)$$

и два других уравнения

$$\gamma m \dot{r} = \gamma m r \dot{\alpha}^2 + \frac{e}{c} \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} r A_\alpha = \frac{(M - er A_\alpha / c)^2}{\gamma m r^3} + \frac{e}{c} \frac{M - er A_\alpha / c}{\gamma m r^2} \frac{\partial}{\partial r} r A_\alpha, \quad (40)$$

$$\gamma m \dot{z} = \frac{e}{c} r \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} A_\alpha = \frac{e}{c} \frac{M - er A_\alpha / c}{\gamma m r} \frac{\partial}{\partial z} A_\alpha. \quad (41)$$

При выводе (40) и (41) мы учли, что в магнитном поле энергия частицы сохраняется.

Рассмотрим частицу, влетающую в фокусирующий соленоид без углового момента M . Это значит, что ее прямая траектория (или ее продолжение) пересекается с осью z . Переходя в уравнении (40) к независимой переменной $vt \approx z$, получим

$$r'' = \left(\frac{e}{pc}\right)^2 \frac{A_\alpha^2}{r} - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{e}{pc}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha)^2 \approx -\left(\frac{e B_z}{2pc}\right)^2 r + \frac{B_z B_z''}{8} \left(\frac{e}{pc}\right)^2 r^3. \quad (42)$$

В приближении тонкой линзы эти уравнения легко проинтегрировать

$$r'_2 - r'_1 \approx -r \left(\frac{e}{2pc}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2pc}\right)^2 r^3 \int_{-\infty}^{\infty} B_z'^2 dz. \quad (43)$$

Первый член этой формулы описывает линейную фокусировку [см. (2.32)], а второй – аксиально-симметричную абберацию, похожую на сферическую абберацию обычной оптики. Этот член приводит, например, к тому, что лучи точечного источника, расположенного на оси z , собираются не в одной точке оси z , а на некотором ее отрезке. Обычно продольная зависимость поля в таких линзах имеет колоколообразный вид. Можно ввести эффективную длину линзы

$$L_{\text{eff}} = \sqrt{2 \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz / \int_{-\infty}^{\infty} B_z'^2 dz}. \quad (44)$$

Тогда

$$r'_2 - r'_1 \approx -\frac{r}{F} \left(1 + \frac{r^2}{L_{\text{eff}}^2}\right). \quad (45)$$

Эта формула показывает, что для подавления абберации следует увеличивать длину линзы.

Глава 6. Рост эмиттанса в электронно-оптических системах

Прохождение частиц через тонкий рассеиватель

Часто пучки частиц необходимо пропускать через тонкий слой вещества (фольгу). При этом происходит многократное рассеяние частиц на атомах вещества. Полное изменение поперечного импульса является суммой большого числа некоррелированных изменений импульса в отдельных актах рассеяния. Поэтому, в соответствии с центральной предельной теоремой, распределение приращений импульса описывается распределением Гаусса, причем средний квадрат пропорционален среднему числу актов рассеяния, т. е. толщине фольги s

$$\sigma^2 = \langle (x' - x'_0)^2 \rangle = \left(\frac{13.6 \text{ МэВ}}{pv} \right)^2 \frac{s}{X_0}. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности обычно выражается через т. н. радиационную длину X_0 . Она называется так потому, что при высоких (более 100 МэВ) энергиях электронов при прохождении через фольгу теряется доля их энергии s/X_0 , и зависит от плотности вещества и зарядов ядер элементов, его составляющих. Например, для алюминия $X_0 \approx 9$ см.

Преобразование функция распределения пучка, прошедшего через фольгу, дается формулой

$$f(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x'_1)^2}{2\sigma^2}} f_0(x, x'_1) dx'_1. \quad (2)$$

Она показывает, что каждый «парциальный» пучок, занимавший малую область фазового пространства $dx \cdot dx'$, превращается в вертикальную полоску размерами $dx \cdot \sigma$. Для гауссова начального распределения частиц f_0 , рассмотренного в примере 11, этот интеграл легко берется и приводит к гауссову распределению с другими параметрами

$$f(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma 2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x'_1)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\gamma_0 x^2 + 2\alpha_0 x x'_1 + \beta_0 x'^2}{2\varepsilon_0}} dx'_1 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma 2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\beta_0}{\varepsilon_0} \right) - x'_1 \left(\frac{\alpha_0 x}{\varepsilon_0} + \frac{x'}{\sigma^2} \right) - \frac{\gamma_0 x^2}{2\varepsilon_0} - \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx'_1 = \frac{e^{-\frac{(\gamma_0 + \sigma^2/\varepsilon_0)x^2 + 2\alpha_0 x x'_1 + \beta_0 x'^2}{2(\varepsilon_0 + \beta_0 \sigma^2)}}}{2\pi \sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 \beta_0 \sigma^2}}. \quad (3)$$

Нормировочный множитель перед экспонентой дает новый эмиттанс $\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \beta_0 \sigma^2 / \varepsilon_0}$, а коэффициенты квадратичной формы в экспоненте – новые параметры Твисса $\gamma = (\gamma_0 + \sigma^2 / \varepsilon_0) / \sqrt{1 + \beta_0 \sigma^2 / \varepsilon_0}$, $\alpha = \alpha_0 / \sqrt{1 + \beta_0 \sigma^2 / \varepsilon_0}$, $\beta = \beta_0 / \sqrt{1 + \beta_0 \sigma^2 / \varepsilon_0}$. Смысл этих формул прост. Локальный угловой разброс $\sqrt{\varepsilon_0 / \beta_0}$ квадратично складывается с разбросом из-за многократного рассеяния (т. к. это дисперсии двух независимых случайных величин), а размер $\sqrt{\varepsilon_0 \beta_0} = \sqrt{\varepsilon \beta}$ остается постоянным. Произведение размера пучка на его локальный угловой разброс есть эмиттанс пучка $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_0 \beta_0} \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon_0 / \beta_0} = \sqrt{\varepsilon_0 \beta_0 \sigma^2 + \varepsilon_0^2}$.

Толстый рассеиватель (например, остаточный газ в вакуумной камере ускорителя) можно представить как последовательность тонких. Тогда для роста эмиттанса можно записать простое уравнение

$$\frac{d\varepsilon^2}{ds} = \left(\frac{13.6 \text{ МэВ}}{pv} \right)^2 \frac{\langle x^2 \rangle}{X_0}. \quad (4)$$

Часто бывает полезно переписать это уравнение для нормализованного эмиттанса $\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon$ (где $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$):

$$\frac{d\varepsilon_n^2}{ds} \approx \frac{710 \langle x^2 \rangle}{\beta^2 X_0}. \quad (5)$$

Это уравнение позволяет оценить максимальную допустимую плотность остаточного газа в вакуумной камере ускорителя или электронно-оптического канала.

Прохождение частиц через магнитные элементы

В главе 5 были рассмотрены абберации, т. е. нелинейности преобразования фазового пространства. Они вызывают рост среднеквадратичного эмиттанса. При прохождении через тонкий элемент появляется добавка к углу частицы $\delta x'$. При этом согласно определению (4.12) среднеквадратичного эмиттанса

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \langle x^2 \rangle \langle (x' + \delta x')^2 \rangle - \langle x(x' + \delta x') \rangle^2 = \\ \varepsilon_0^2 &+ 2\langle x^2 \rangle \langle x' \delta x' \rangle + \langle x^2 \rangle \langle (\delta x')^2 \rangle - 2\langle x x' \rangle \langle x \delta x' \rangle - \langle x \delta x' \rangle^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для секступоля с учетом (5.16) (см. также рисунок 23) $\delta x' = S(x^2 - y^2)$, $\delta y' = -2Sxy$ и

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= \varepsilon_{x0}^2 + S^2 \langle x^2 \rangle \langle (x^2 - y^2)^2 \rangle \approx \\ \varepsilon_{x0}^2 &+ 4S^2 \langle x^2 \rangle^2 \langle y^2 \rangle + 3S^2 \langle x^2 \rangle (\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 = \\ \varepsilon_{x0}^2 &\left[1 + 4S^2 \beta_x^2 \beta_y \varepsilon_{y0} + 3S^2 \beta_x \varepsilon_{x0} \left(\beta_x - \beta_y \frac{\varepsilon_{y0}}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varepsilon_y^2 = \varepsilon_{y0}^2 + 4S^2 \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle^2 = \varepsilon_{y0}^2 (1 + 4S^2 \beta_x \beta_y^2 \varepsilon_{x0})$$

Использованное здесь приближенное выражение для четвертого момента распределения $\langle x^4 \rangle \approx 3\langle x^2 \rangle^2$ является точным для гауссова распределения. Безразмерная добавка к единице, стоящая внутри скобок, характеризует относительный прирост среднеквадратичного эмиттанса из-за аббераций. Заметим, что этот прирост эмиттанса обратим. Например, если после секступоля частицы проходят магнитную систему с минус-единичной матрицей, а затем через такой же секступоль, то нелинейные искажения фазового пространства полностью компенсируются.

Для октуполя с учетом (4.17) (см. также рисунок 24) $\delta x' = O(x^3 - 3xy^2)$ и $\delta y' = O(y^3 - 3x^2y)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^2 &= \varepsilon_{x0}^2 + 2O \langle x^2 \rangle \langle x'x^3 - 3x'xy^2 \rangle + O^2 \langle x^2 \rangle \langle (x^3 - 3xy^2)^2 \rangle - \\
&2O \langle xx' \rangle \langle x^4 - 3x^2y^2 \rangle - O^2 \langle x^4 - 3x^2y^2 \rangle^2 \approx \\
\varepsilon_{x0}^2 &+ 6O^2 \langle x^2 \rangle^2 \left(\langle x^2 \rangle^2 + 3 \langle y^2 \rangle^2 \right) = \varepsilon_{x0}^2 \left[1 + 6O^2 \beta_x^2 (\beta_x^2 \varepsilon_{x0}^2 + 3\beta_y^2 \varepsilon_{y0}^2) \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

и то же для вертикального эмиттанта с заменой x на y и y на x .

Рассмотрим теперь прохождение пучка через квадрупольную линзу. Её aberrации (4.28)

$$\begin{aligned}
x' &\approx -\frac{x^3 - xy^2}{4F^2 L_{eff}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{16F^2 L_{eff}} \\
y' &\approx -\frac{y^3 - yx^2}{4F^2 L_{eff}} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{16F^2 L_{eff}}
\end{aligned}$$

аналогичны рассмотренным выше aberrациям октуполя. Тогда

$$\varepsilon_x^2 \approx \varepsilon_{x0}^2 + \frac{1}{8F^4 L_{eff}^2} \langle x^2 \rangle^2 \left(3 \langle x^2 \rangle^2 + \langle y^2 \rangle^2 \right) = \varepsilon_{x0}^2 \left[1 + \beta_x^2 \frac{3\beta_x^2 \varepsilon_{x0}^2 + \beta_y^2 \varepsilon_{y0}^2}{8F^4 L_{eff}^2} \right]. \tag{9}$$

Другой причиной роста эффективного эмиттанта могут быть пульсации магнитного поля в поворотных магнитах (например, из-за пульсаций тока в источниках питания магнитов). Подставив в (6) $\delta x'(t) = \theta \Delta B(t) / B_0$, где θ – угол, на который поворачивает рассматриваемый магнит, а t – время, получим

$$\varepsilon_{eff}^2 = \varepsilon_{x0}^2 + \theta^2 \langle x^2 \rangle \left\langle \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right)^2 \right\rangle = \varepsilon_{x0}^2 \left[1 + \theta^2 \left\langle \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right)^2 \right\rangle \frac{\beta_x}{\varepsilon_{x0}} \right], \tag{10}$$

причём усреднение в (10) проводится не только по начальным условиям частиц, но и по времени t . Из (10) следует естественное требование к стабильности магнитного поля

$$\sqrt{\left\langle \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right)^2 \right\rangle} \ll \frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{\varepsilon_{x0}}{\beta_x}}. \tag{11}$$

Смысл условия (11) прост и нагляден: угловое отклонение пучка $\delta x' = \theta \Delta B / B_0$ не должно превышать по абсолютной величине локальный угловой разброс $\sqrt{\varepsilon_{x0} / \beta_x}$.

Вариации оптической силы D тонкой линзы тоже приводят к дополнительному изменению углов $\delta x'(t) = -x \Delta D(t)$ и возрастанию эффективного эмиттанта

$$\varepsilon_{eff}^2 = \varepsilon_{x0}^2 + \langle x^2 \rangle^2 \langle (\Delta D)^2 \rangle = \varepsilon_{x0}^2 \left[1 + \beta_x^2 \langle (\Delta D)^2 \rangle \right]. \tag{12}$$

Из (12) следует условие на стабильность оптической силы $|\Delta D| \ll 1 / \beta_x$.