

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра физики ускорителей

Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков

# **ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУЧКОВ В НАКОПИТЕЛЯХ**

Учебное пособие

Новосибирск  
2013

ББК В381.1 я73-1

УДК 621.384.6.01

**Диканский Н. С., Пестриков Д. В.** Теория когерентных колебаний пучков в накопителях: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 166 с.

Содержит описание современного состояния теории когерентных колебаний пучков в накопителях заряженных частиц. В основу пособия положены расширенные тексты лекций, которые читались в НГУ по этому предмету начиная с 1987 г., а также задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов физического факультета НГУ, занимающихся на кафедре физики ускорителей, и для сопровождения курса «Коллективные эффекты в динамике пучков». Оно будет полезно студентам для укрепления их практических знаний в исследовании когерентных эффектов на современных и будущих накопителях и коллайдерах.

Рецензент

зам. директора ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН,  
д-р. физ.-мат. наук Е. Б. Левичев

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

- © Новосибирский государственный университет, 2013
- © Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков, 2013

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>Лекция 1. Вводные замечания и определения</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1. Колебания, фазы, когерентность . . . . .	7
1.2. Функции распределения . . . . .	11
1.3. Задачи к лекции 1 . . . . .	13
<b>Лекция 2. Продольные когерентные колебания несгруппированных пучков</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1. Неустойчивость отрицательной массы . . . . .	14
2.1.1. Вычисления в приближении локальных полей . . . . .	15
2.1.2. Использование законов Фарадея, Гаусса и Ампера . . . . .	17
2.1.3. Дисперсионное уравнение . . . . .	18
2.2. Импедансы связи . . . . .	20
2.2.1. Определение продольного импеданса связи . . . . .	20
2.2.2. Дисперсионные уравнения несгруппированного пучка . . . . .	21
2.2.3. Границы области устойчивости . . . . .	26
2.2.4. Двухпоточковые неустойчивости . . . . .	29
2.3. Задачи к лекции 2 . . . . .	32
<b>Лекция 3. Общее интегральное уравнение</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1. Уравнение Власова . . . . .	37
3.2. Поперечные когерентные колебания несгруппированного пучка . . . . .	43
3.3. Продольные когерентные колебания несгруппированного пучка . . . . .	49
3.4. Поперечный импеданс связи . . . . .	50
3.5. Колебания частиц и дипольные поперечные колебания . . . . .	52
3.6. Задачи к лекции 3 . . . . .	53
<b>Лекция 4. Когерентные колебания сгустков</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1. Медленные синхротронные колебания . . . . .	55
4.2. Однооборотные и многооборотные эффекты . . . . .	60
4.3. Синхротронные когерентные колебания . . . . .	62
4.4. Затухание Ландау за счет октупольных полей . . . . .	63
4.5. Задачи к лекции 4 . . . . .	66

<b>Лекция 5. Резонансные неустойчивости</b>	<b>68</b>
5.1. Резонансные моды бетатронных колебаний	68
5.1.1. Неустойчивости динамического типа	71
5.1.2. Диссипативные неустойчивости	72
5.1.3. Действие разброса частот	74
5.2. Когерентные колебания встречных пучков	81
5.2.1. Дипольные колебания сгустков	84
5.2.2. Моды колебаний идентичных сгустков	85
5.2.3. Суммовые и разностные резонансы	87
5.3. Задачи к лекции 5	88
<b>Лекция 6. Медленные однооборотные явления</b>	<b>90</b>
6.1. Эффект быстрого затухания	90
6.1.1. Вертикальные когерентные колебания сгустка	94
6.1.2. Гладкие распределения по амплитудам синхротронных колебаний	95
6.2. Взаимодействие с локализованным импедансом	96
6.3. Head-Tail эффект	97
6.3.1. Модель полого сгустка	99
6.3.2. Гладкое распределение амплитуд синхротронных колебаний	101
6.3.3. Приближение Пеллегрини	106
6.4. Задачи к лекции 6	112
<b>Лекция 7. Связь синхробетатронных мод</b>	<b>113</b>
7.1. Постановка задачи	113
7.2. Связь соседних мод	114
7.3. Влияние демпфирования связанных мод	115
7.4. Затухание Ландау	117
7.5. Задачи к лекции 7	121
<b>Лекция 8. Быстрые однооборотные неустойчивости поперечных когерентных колебаний сгустка</b>	<b>123</b>
8.1. Эффект прерывания пучка	123
8.2. Быстрые однооборотные неустойчивости одиночных сгустков	126
8.3. Зависимости амплитуд от времени	128
8.4. Методы подавления быстрых однооборотных неустойчивостей	130
8.4.1. Расфазировка колебаний разбросом импульсов	130
8.4.2. БНС-затухание	131
8.5. Задачи к лекции 8	133

<b>Лекция 9. Многооборотные неустойчивости</b>	<b>134</b>
9.1. Колебания одного сгустка	134
9.2. Многосгустковые моды	137
9.2.1. Пучок с равномерным заполнением сгустками	137
9.2.2. Пучок с квазиравномерным заполнением	139
9.3. Задачи к лекции 9	143
<b>Лекция 10. Влияние наведенных полей на длину сгустка</b>	<b>144</b>
10.1. Удлинение за счет искажения ВЧ-ямы наведенными полями	144
10.2. Уравнение Хайсинского	147
10.2.1. Резистивный импеданс	148
10.2.2. Индуктивный импеданс	150
10.3. Синхротронные колебания в искаженной яме	151
10.4. «Турбулентное» удлинение сгустков	156
<b>Лекция 11. Суммы декрементов коллективных мод</b>	<b>158</b>
11.1. Теорема о сумме декрементов	158
11.2. Влияние радиальной модуляции потерь	161
11.3. Задачи к лекции 11	164
<b>Литература</b>	<b>165</b>

# Предисловие

Основной целью подготовки этого учебного пособия было улучшение сопровождения чтения лекций и проведения семинаров по курсу «Коллективные эффекты в физике пучков». Занятия по этому курсу ведутся на кафедре физики ускорителей физического факультета НГУ с 1987 г. При сохранении общей направленности курса все это время шла работа по оптимизации отбора материала и изложения его студентам. Частично эта задача была решена изданием в 1996 г. учебного пособия одного из авторов [1]. С тех пор прошло примерно 15 лет. За это время и по многим причинам изложение материала курса стало существенно отличаться от описанного в [1]. Это начало создавать определенные неудобства при чтении лекций, а также при подготовке студентов к экзаменам. Поэтому было решено заменить пособие [1] более современным. В ходе подготовки настоящего пособия текст [1] был существенно переработан. Изменения коснулись всех глав текста [1]. В результате совместной работы авторов появилось новое произведение, которое, как нам представляется, более полно отражает как современное состояние этой области ускорительной науки, так и современное состояние курса.

Мы будем упрощать, где это возможно, постановки конкретных задач и ход их решения. Используемые в пособии обозначения приведены в лучшее соответствие с принятыми сейчас в ускорительной литературе. Это позволит читателю скорее адаптироваться к чтению современных отечественных или зарубежных статей по ускорительной тематике. В ряде случаев более углубленное изложение обсуждаемых вопросов, а также более широкое описание физики интенсивных пучков, включающее и кинетические явления, можно найти в книгах [2] либо [3].

Собранные в пособии задачи решались на семинарских занятиях или в ходе выполнения студентами семестровых заданий. Часто это либо сами проблемы, либо фрагменты более общих проблем, которые решались для описания наблюдаемого поведения колебаний пучков в реальных машинах. В некоторых случаях полное решение задачи требует проведения простых расчетов на ЭВМ.

Мы предполагаем, что читатель имеет общие знания по математике и электродинамике в пределах университетского курса, а по общим вопросам физики циклических ускорителей – в пределах, соответствующих знакомству с книгами [4] или [5].

# Лекция 1

## Вводные замечания и определения

В настоящем пособии описаны основные понятия, явления и методы решения задач теории линейных когерентных колебаний пучков в накопителях, циклических ускорителях и установках со встречными пучками заряженных частиц. Мы обсудим проблемы, которые ранее изучались в связи с попытками улучшения работы реальных машин и достижения областей их параметров, обеспечивающих требуемые свойства пучков. В этой области физики ускорителей накоплены значительные знания, позволяющие помимо успешной эксплуатации существующих установок проектировать машины следующих поколений.

### 1.1. Колебания, фазы, когерентность

В циклических ускорителях и накопителях заряженные частицы движутся вблизи т. н. замкнутой орбиты. Это достигается правильным расположением вдоль желаемой траектории необходимого количества поворотных магнитов. Если  $s$  – расстояние, пройденное частицей вдоль замкнутой орбиты к моменту времени  $t$ , то положение замкнутой орбиты в пространстве описывается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s). \quad (1.1)$$

В силу замкнутости орбиты кривая  $\mathbf{r}_0(s)$  описывается некоторой периодической функцией с периодом, равным периметру орбиты  $\Pi = 2\pi R_0$ :

$$\mathbf{r}_0(s + \Pi) = \mathbf{r}_0(s). \quad (1.2)$$

Величина  $R_0$  называется средним радиусом орбиты. Поскольку формирование замкнутой орбиты осуществляется магнитными полями, величины  $\Pi$  и  $R_0$  зависят от энергии частиц. При описании движения частиц с постоянной энергией  $E$  вводят также величины

$$T_0 = \frac{\Pi}{v} \quad (1.3)$$

и

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (1.4)$$

где  $E = c\sqrt{p^2 + M^2c^2}$ ,  $p = \gamma Mv$  – импульс, а  $v$  – скорость частицы. Величина  $T_0$  называется периодом обращения частицы вдоль замкнутой орбиты, а  $\omega_0$  – частотой

обращения частицы вдоль замкнутой орбиты. Согласно формулам (1.3) и (1.4) величины  $T_0$  и  $\omega_0$  также зависят от энергии частицы. Чтобы это подчеркнуть, пишут, например,  $\omega_0(p)$ . Обычно различия энергий накапливаемых частиц малы по сравнению с самими энергиями. Следовательно, различия периодов, или частот обращения частиц  $\omega_0(p)$ , также малы. В таких случаях используют разложение

$$\omega_0(p) = \omega_0(p_0) + \frac{d\omega_0}{dp}\Delta p. \quad (1.5)$$

Здесь  $p_0$  – некоторое типичное значение импульса накапливаемых частиц, а  $\Delta p = p - p_0$  – отклонение импульса конкретной частицы от этого значения ( $|\Delta p| \ll p_0$ ). Согласно уравнениям (1.3) и (1.4) пишем

$$\frac{d\omega_0}{dp} = \frac{\omega_0 \alpha_p}{p_0}, \quad \alpha_p = \frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha, \quad (1.6)$$

где  $\omega_0 = \omega_0(p_0)$ , а  $\alpha$  – коэффициент уплотнения орбит. Часто для упрощения записей и там, где это не приводит к недоразумениям, пишут

$$\frac{d\omega_0}{dp} = \omega'_0. \quad (1.7)$$

В отсутствие на замкнутой орбите продольных высокочастотных (ВЧ) электромагнитных полей энергии частиц сохраняются. Для описания продольного движения частиц пучка относительно замкнутой орбиты частицы с импульсом  $p_0$  вводят фазу продольного движения частицы

$$\phi = \frac{s}{R_0} - \omega_0 t, \quad (1.8)$$

где  $\omega_0$  и  $R_0$  определены для орбиты с импульсом  $p_0$ . Если энергия частицы сохраняется, то согласно уравнению (1.5) величина  $\phi$  линейно меняется во времени:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega'_0 \Delta p. \quad (1.9)$$

В этом случае фаза  $\phi$  является циклической переменной.

Оптика ускорителя, или накопительного кольца, обычно устроена так, что при отклонении частицы от замкнутой орбиты на нее действует возвращающая сила, пропорциональная величине отклонения. В машине с такой фокусировкой частицы совершают гармонические колебания относительно замкнутой орбиты и тем формируют пучок. Для поперечных к замкнутой орбите направлений определяют частоты бетатронных колебаний. Если замкнутая орбита является плоской кривой, а связь колебаний отсутствует, то частоту вертикальных бетатронных колебаний определяют соотношением

$$\omega_y = \omega_0(p) \nu_y, \quad (1.10)$$

а горизонтальных – соотношением

$$\omega_x = \omega_0(p) \nu_x. \quad (1.11)$$



Фазы бетатронных колебаний

$$\frac{d\psi_{y,x}}{dt} = \omega_{y,x} = \omega_0(p)\nu_{y,x} \quad (1.12)$$

являются циклическими переменными. Входящие в эти определения величины  $\nu_{y,x}$  называются безразмерными частотами вертикальных ( $y$ ) и горизонтальных (радиальных,  $x$ ) бетатронных колебаний. Поскольку углы отклонений в фокусирующих полях зависят от энергий частиц, частоты  $\nu_{y,x}$  также являются функциями импульсов частиц. По аналогии с разложением (1.5) для частицы с импульсом  $p + \Delta p$  пишут

$$\nu_{y,x}(\Delta p) = \nu_{y,x}(p) + \left( \frac{d\nu_{y,x}}{d \ln p} \right)_0 \frac{\Delta p}{p}. \quad (1.13)$$

Величины  $(d\nu_{y,x}/d \ln p)_0$  соответственно называются хроматизмами вертикальных и горизонтальных бетатронных колебаний.

Фокусировка частиц в продольном направлении осуществляется ускоряющими или тормозящими электромагнитными ВЧ-полями. Если частота ВЧ-поля равна  $\Omega_0$ , то эффект продольной фокусировки достигается для резонансных частиц

$$\Omega_0 = q\omega_0(p). \quad (1.14)$$

Величина  $q$  называется кратностью ВЧ-поля. За исключением окрестности критической энергии накопителя ( $\gamma_{tr} = 1/\sqrt{\alpha}$ , где  $0 < \alpha < 1$ ) частота обращения  $\omega_0(p)$  является монотонной функцией импульса частицы. При этом резонансное условие (1.14) выполняется лишь для одного значения импульса  $p = p_s$ . Частица с таким импульсом называется синхронной, а само значение  $p_s$  используется в качестве импульса  $p_0$  в разложениях (1.5). Значение фазы прохождения ускоряющего зазора синхронной частицей называется синхронной фазой ( $\phi_s$ ). В отсутствие ускорения или торможения частиц пучка, а также в зависимости от знака  $\omega'_0$  значение синхронной фазы равны  $2\pi k/q$  либо  $\pi + 2\pi k/q$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ .

В силу принципа автофазировки частицы с импульсами, близкими к  $p_s$ , совершают синхротронные колебания. Эти колебания проявляются в периодическом изменении импульса  $p_s + \Delta p$  и фазы  $\phi$  частицы относительно синхронного значения ( $p_s, \phi_s$ ). Синхротронные колебания устойчивы, если координаты частицы  $p$  и  $\phi$  попадают внутрь сепаратрис. При кратности ВЧ-поля  $q$  на орбите имеется  $q$  сепаратрис. Частицы, не попавшие ни в одну из сепаратрис, по разным причинам гибнут на стенках вакуумной камеры накопителя. Захваченные же в какую-либо из сепаратрис частицы формируют сгустки. Таким образом, при кратности  $q$  пучок может состоять из  $q$  сгустков. Синхротронные колебания являются гармоническими, если их амплитуды  $a_c$  существенно меньше длины волны группирующего ВЧ-поля ( $a_c \ll \Pi/q$ ). Частоту таких колебаний мы будем обозначать выражением

$$\omega_c = \omega_0\nu_c, \quad (1.15)$$

где  $\omega_0$  – частота обращения синхронной частицы.

Перечисленные определения указывают, что в накопителях заряженных частиц с линейными фокусирующими силами колебания частиц с равными энергиями (монокроматический пучок) являются когерентными. Это означает, что начальные взаимные расположения частиц в фазовом пространстве пучка не меняются со временем.

Нелинейные зависимости фокусирующих сил от координат отклонений частиц от замкнутой орбиты приводят к ангармоничности колебаний частиц и, возможно, к потере устойчивости этих колебаний. В тех случаях, когда потери устойчивости удастся избежать, основное влияние нелинейности фокусирующих полей проявляется в зависимости частот колебаний частиц от амплитуд и в изменении хроматичности таких колебаний. Свойство когерентности колебаний частиц в машинах с такой фокусировкой, вообще говоря, теряется. Из-за разницы частот колебаний частиц пучок расплывается в пространстве фаз колебаний и чаще всего стремится принять в нем равномерное распределение. В действительности, однако, различия (разбросы) частот в накапливаемых пучках невелики. По этой причине при описании колебаний пучков в накопителях разумно говорить об их когерентных колебаниях и о влиянии разбросов частот на эти когерентные колебания. Значительное количество примеров решений задач о влиянии разброса частот частиц на когерентные колебания пучка описано, например, в [6].

В наиболее общем случае невозмущенные колебания частиц вблизи плоской, замкнутой орбиты описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
x &= x_b + \eta(\theta) \frac{\Delta p}{p_0}, & \mathbf{p}_\perp &= \frac{p_0}{R_0} \frac{d\mathbf{r}_\perp}{d\theta}, & \Delta p &= p - p_0, & (1.16) \\
(x_b, y) &= \sqrt{J\beta(\theta)} \cos(\psi + \chi(\theta))|_\alpha, & \frac{d\chi_\alpha}{d\theta} + \nu_\alpha &= \frac{R_0}{\beta_\alpha}, \\
\dot{\psi}_\alpha &= \omega_\alpha = \omega_0(p) \nu_\alpha(p, J_x, J_y), & \theta &= \theta_0 + \phi + \theta_b, \\
\theta_b &= \frac{1}{R_0^2} \left( \eta \frac{dx_b}{d\theta} - x_b \frac{d\eta}{d\theta} \right), \\
\dot{\phi} &= \omega'_0 \Delta p = \omega_0 \alpha_p \Delta p / p_0, & \alpha_p &= 1/\gamma^2 - 1/\gamma_{tr}^2, \\
I_\alpha &= \frac{p_0 J_\alpha}{2}, & \alpha &= x, y.
\end{aligned}$$

В несгруппированном пучке  $p_0$  – некоторое центральное значение импульса частиц пучка. В сгруппированном пучке пишут  $p_0 = p_s$ , где  $p_s$  – импульс синхронной частицы пучка. В таком случае и другие динамические переменные синхронной частицы также отмечают индексом  $s$ .

Выражения в (1.16) являются решениями уравнений движения, генерируемых гамильтонианом невозмущенных колебаний частиц:

$$\begin{aligned}
H_0 &= R_0 \left[ \frac{p_x^2 + p_y^2}{2p_0} + \frac{\Delta p^2}{2\gamma^2 p_0} \right] & (1.17) \\
&+ p_0 \left[ \frac{g_x(\theta)x^2 + g_y(\theta)y^2}{2R_0} \right] - \frac{R_0}{R(\theta)} \Delta p x,
\end{aligned}$$

где  $g_x$  и  $g_y$  – коэффициенты жесткости горизонтальных и вертикальных бетатронных колебаний. Для сгруппированных пучков (1.16) должны быть дополнены уравнениями, описывающими синхротронные колебания частиц относительно синхронной

частицы сгустка:

$$\begin{aligned}\phi &= \varphi \cos \psi_c, \quad \Delta p = -\frac{\omega_c}{|\omega'_0|} \varphi \sin \psi_c, \\ \dot{\psi}_c &= \omega_c \operatorname{sgn}(\omega'_0), \quad I_c = R_0 \frac{\omega_c \varphi^2}{2|\omega'_0|}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Уравнения (1.16) и (1.18) осуществляют каноническое преобразование от переменных  $\mathbf{P}, \mathbf{r}$  к переменным действие – фаза невозмущенных колебаний:

$$I_\alpha = I_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t), \quad \psi_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t).$$

После такого преобразования гамильтониан  $H_0$  не зависит от фаз  $\psi_\alpha$ , что позволяет записать уравнения движения невозмущенных колебаний в виде

$$\dot{I}_\alpha = -\frac{\partial H_0}{\partial \psi_\alpha} = 0, \quad \dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial I_\alpha} = \omega_\alpha.\tag{1.19}$$

В силу, например, уравнений (1.16) и цикличности движения частиц вдоль замкнутой орбиты любая функция координат частиц в фазовом пространстве является периодической функцией обобщенного азимута частицы и фаз ее невозмущенных колебаний. В частности, такие функции представимы соответствующими рядами Фурье.

## 1.2. Функции распределения

В физике ускорителей и накопителей заряженных частиц существуют обширные классы задач, в которых важно знать поведение пучка в целом. Как правило, описание состояний пучка в таких случаях требует задания сравнительно небольшого числа переменных. Например, это могут быть дипольные, или более высокие, моменты пучка. Если  $N$  – число частиц в пучке, а, например,  $x_a$  – отклонение частицы с номером  $a$  от замкнутой орбиты в горизонтальной плоскости, то горизонтальная компонента дипольного момента пучка определяется формулой

$$d_x = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N x_a.\tag{1.20}$$

Очевидно, что эта формула также определяет положение центра тяжести распределения частиц пучка в горизонтальном направлении. Для краткости, такую величину часто еще называют (горизонтальным) центроидом пучка.

Сами дипольные, или более высокие, моменты распределения частиц в пучке являются производными величинами. Они вычисляются интегрированием координат, или произведений координат, частиц в фазовом пространстве пучка с одночастичной либо, если это необходимо, многочастичными функциями распределения частиц пучка в его фазовом пространстве.

Для перехода к описанию пучка в терминах функций распределения достаточно заменить суммирование по частицам в (1.20) суммированием по элементам фазового объема, занятого пучком. При разбиении на элементарные объемы пучок описывается числами заполнения ( $f_\alpha$ ) – т. е. числами частиц, которые в данный момент

времени находятся в элементах фазового объема пучка. Вообще, зависимость чисел заполнения от положения в фазовом пространстве и от времени не описывается гладкой функцией. При пересечении частицами границы элемента эти числа изменяются скачком. Помимо этого, в силу хаотичности относительного движения частиц в пучке, упомянутое пересечение границ происходит в случайные моменты времени. Это означает, что числа  $f_\alpha$ , вообще говоря, являются случайными функциями времени.

Описание состояний пучка в терминах чисел заполнения становится целесообразным, если среднеквадратичные изменения чисел заполнения ( $\delta f_\alpha$ ) оказываются малыми по сравнению с самими величинами  $f_\alpha$ :

$$\overline{\delta f_\alpha^2} \ll f_\alpha^2, \quad \delta f_\alpha = f_\alpha - \overline{f_\alpha}.$$

В таких случаях набор чисел  $\{f_\alpha\}$  заменяют сглаженной функцией распределения, такой, что

$$\overline{f_\alpha} = f(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, t) \Delta\Gamma, \quad \Delta\Gamma = d^3r d^3p, \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  – координаты частицы в фазовом пространстве пучка. Если при движении пучка вдоль замкнутой орбиты частицы никуда не пропадают и ниоткуда не появляются, то функция  $f$  удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}}f)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{p}}f)}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.22)$$

Если, к тому же, движение частиц гамильтоново, так что

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.23)$$

где  $H$  гамильтониан движения частиц, то уравнение (1.22) упрощается и может быть переписано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0. \quad (1.24)$$

С учетом (1.23) последнее уравнение также записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{df}{dt} = 0. \quad (1.25)$$

Такое кинетическое уравнение называется уравнением Власова. Интеграл  $f$  по всему фазовому пространству дает число частиц в пучке  $N$ :

$$\int d\Gamma f = N.$$

Часто вместо  $f$  используют распределение ( $f'$ ), нормированное на 1:

$$\int d\Gamma f' = 1.$$

При этом очевидно, что  $f = N f'$ . Ниже, говоря о функциях распределения мы будем иметь в виду  $f'$ , а знак ( $'$ ) будем опускать.

Согласно (1.25) решения уравнения Власова являются интегралами движения. Поэтому в общем случае такие решения являются функциями интегралов движения

частиц. В тех случаях, когда уравнения (1.23) удается разрешить и найти законы движения частиц

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t), \quad (1.26)$$

где  $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$  – начальные значения координат и импульсов частиц, решение уравнения Власова записывается в виде

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f^{(0)}(\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0). \quad (1.27)$$

Здесь  $f^{(0)}$  – начальная функция распределения частиц в пучке. В подавляющем числе случаев решение уравнений вида (1.25) дает наиболее информативное представление о протекании в пучке коллективных и кинетических процессов. К сожалению, найти точные решения уравнений движения частиц, учитывающих действие на их траектории наведенных пучком полей, удается крайне редко. Систематический подход к решению подобного рода задач состоит в построении рядов теории возмущения по отклонениям, вызываемым коллективным движением пучка.

### 1.3. Задачи к лекции 1

1. Положим, что разброс частот бетатронных колебаний в пучке создается разбросом частот обращения частиц  $\omega_x(p) = \omega_0(p)v_x$ . Приняв, что распределение импульсов в пучке гауссово

$$f(p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

а частицы между собой не взаимодействуют, вычислить зависимость дипольного момента пучка от времени. Объяснить отсутствие эха в когерентном сигнале.

## Лекция 2

# Продольные когерентные колебания негруппированных пучков

Наиболее полное представление о свойствах когерентных колебаний пучка получается прямым решением уравнений Власова. Мы начнем с рассмотрения наиболее простых задач – об устойчивости продольных когерентных колебаний негруппированного пучка. Эти задачи имеют практическое значение для накопителей ионов. В методическом отношении их ценность определяется возможностью проведения многих вычислений до конца.

### 2.1. Неустойчивость отрицательной массы

В большинстве задач об устойчивости продольных когерентных колебаний фазовое пространство двумерно. Поэтому функция распределения частиц пучка в фазовом пространстве записывается в виде  $f(\Delta p, \theta, t)$ . Если линейная плотность частиц в пучке однородна по азимуту, чему соответствует  $f = f(\Delta p)$ , то величина  $\Delta p$  сохраняется, а  $\theta = \omega_0(p)t + \phi$  является циклической переменной. Когерентные колебания проявляются в азимутальной модуляции линейной плотности пучка

$$f = f_0(\Delta p) + \delta f(\Delta p, \theta, t). \quad (2.1)$$

В силу уравнений движения

$$\dot{\Delta p} = eE, \quad \dot{\theta} = \omega_0, \quad (2.2)$$

действие на частицы продольных электрических полей  $E(\theta, t)$ , которые наводятся добавкой  $\delta f$  в окружающих пучок электродах, может приводить к группировке пучка. Начальная стадия этого процесса будет выражаться в неустойчивости продольных когерентных колебаний пучка, которая описывается нарастанием азимутальных гармоник добавки  $\delta f$ .

В частности, такая неустойчивость может быть обусловлена кулоновским расталкиванием частиц, если их энергии превышают критическую энергию машины (так называемая неустойчивость отрицательной массы; А. А. Коломенский и А. Н. Лебедев 1958 г. [7]). В этой области параметров эффективная масса фазового движения

частиц ( $d\omega_0/dp$ ) отрицательна. По этой причине расталкивание частиц может приводить к нарастанию в пучке начальных азимутальных неоднородностей линейной плотности частиц.

В отсутствие столкновений и других стохастических процессов эволюция  $f$  описывается уравнением Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + eE(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial \Delta p} = 0. \quad (2.3)$$

Предполагая, что  $f_0 \gg |\delta f|$ , линеаризуем (2.3) по  $\delta f$ . В результате получим

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} + eE \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку  $f_0$  не зависит от азимута, решение (2.4) ищем в виде

$$\delta f = \sum_n f_n(\Delta p) e^{in\theta - i\omega t}. \quad (2.5)$$

Это дает следующие уравнения для коэффициентов  $f_n$

$$i(\omega - n\omega_0) f_n = eE_n(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p}. \quad (2.6)$$

Для вычисления гармоник поля  $E_n(\omega)$  необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла. Строго говоря, вакуумная камера накопителя представляет для пучка волновод. Вместе с тем, для большей части частот из спектра колебаний пучка этот волновод – закритичный, т. е. колебания пучка не сопровождаются распространением вдоль вакуумной камеры электромагнитных полей излучения. Мы упростим вычисления, предположив, что стенки камеры обладают идеальной проводимостью. Кроме того, мы пренебрежем кривизной замкнутых траекторий частиц, а также предположим, что вакуумная камера и пучок представляют собой цилиндры радиуса  $l_\perp$  и  $a$  соответственно и что частицы равномерно распределены внутри радиуса  $a$

$$f(\mathbf{r}_\perp, \Delta p) = \frac{f(\Delta p)}{\pi a^2} \begin{cases} 1, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (2.7)$$

### 2.1.1. Вычисления в приближении локальных полей

Выразив продольное электрическое поле в пучке через векторный  $A_\theta$  и скалярный  $A_0$  потенциалы, пишем

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_\theta}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial A_0}{\partial \theta}. \quad (2.8)$$

Используя условие калибровки

$$\frac{1}{R_0 c} \frac{\partial A_{\theta, \omega}}{\partial \theta} - \frac{i\omega}{c} A_{0, \omega} = 0,$$

найдем, что  $A_\theta = (v/c)A_0$ , или

$$i \frac{nv}{cR_0} A_{0, \omega, n} = \frac{i\omega}{c} A_{0, \omega, n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E_{n,\omega} &= i \left( \frac{\omega v}{c^2} - \frac{n}{R_0} \right) A_{0,n,\omega} \simeq -i \frac{n}{R_0} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) A_{0,n,\omega} \\ &= -i \frac{n}{R_0 \gamma^2} A_{0,n,\omega}, \quad \omega \simeq n\omega_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Значения скалярного потенциала  $A_0$  находятся решением уравнения

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_0 = -4\pi e \rho(r, \theta, t),$$

или

$$\left( \Delta_{\perp} - \frac{n^2}{R_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) A_{0,n,\omega}(r) = -4\pi e \rho_{n,\omega}(r). \quad (2.10)$$

Для малых величин когерентных сдвигов частоты пишем  $\omega \simeq n\omega_0$ . Поэтому левая часть уравнения (2.10) записывается в виде

$$\left( \Delta_{\perp} - \frac{n^2}{R_0^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) A_{0,n,\omega}(r) = \left( \Delta_{\perp} - \frac{n^2}{R_0^2 \gamma^2} \right) A_{0,n,\omega}(r).$$

В области параметров:

$$\frac{1}{l_{\perp}^2} \gg \frac{n^2}{R_0^2 \gamma^2}, \quad n \ll \gamma \frac{R_0}{l_{\perp}}, \quad n\omega_0 < \frac{c}{l_{\perp}}, \quad n < \frac{R_0}{l_{\perp}(v/c)},$$

пишем

$$\Delta_{\perp} A_{0,n,\omega}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_0}{dr} \right) = -4\pi e \rho_{n,\omega}(r).$$

Последнее уравнение решается его двукратным интегрированием по  $r$ :

$$\begin{aligned} r \frac{dA_0}{dr} &= -4\pi e \int_0^r dr r \rho_{n,\omega}(r), \\ A_0(r) &= A_0(0) - 4\pi e \int_0^r \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2 \rho_{n,\omega}(r_2). \end{aligned}$$

Используя граничное условие  $A_0(l_{\perp}) = 0$ , получим

$$A_0(0) = 4\pi e \int_0^{l_{\perp}} \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2 \rho_{n,\omega}(r_2).$$

Для пучка с функцией распределения, определенной в (2.7), примем, что  $\rho_{n,\omega}(r) = 0$ , если  $r > a$ , и

$$\rho_{n,\omega}(r) = \frac{N}{\pi a^2} \frac{1}{2\pi R_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p), \quad r \leq a. \quad (2.11)$$



Тогда

$$\begin{aligned}
A_0(0) &= 4\pi e \int_0^{l_\perp} \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2 \rho_{n,\omega}(r_2) \\
&= 4\pi e \int_0^a \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2 \rho_{n,\omega}(r_2) + 4\pi e \int_a^{l_\perp} \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2 \rho_{n,\omega}(r_2) \\
&= 4\pi e \frac{N}{\pi a^2} \frac{1}{2\pi R_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p) \int_0^a \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2 \\
&\quad + 4\pi e \frac{N}{2\pi R_0} \frac{a^2}{2\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p) \ln \frac{l_\perp}{a} \\
&= 4\pi \frac{Ne}{\pi a^2} \frac{1}{2\pi R_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p) \int_0^a \frac{dr_1}{r_1} \frac{r_1^2}{2} \\
&\quad + \frac{Ne}{2\pi R_0} 2 \ln \frac{l_\perp}{a} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p),
\end{aligned}$$

или

$$A_{0,n,\omega}(0) = \frac{Ne}{2\pi R_0} \left(1 + 2 \ln \frac{l_\perp}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p).$$

Подставив это выражение в (2.9), получим

$$\begin{aligned}
E_{n,\omega} &= -i \frac{n}{R_0 \gamma^2} A_{0,n,\omega}(0) \\
&= -i \frac{n}{R_0 \gamma^2} \frac{Ne}{2\pi R_0} \left(1 + 2 \ln \frac{l_\perp}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

что завершает вычисление длинноволновых гармоник продольного поля пучка решением уравнений Максвелла в приближении локальных полей.

## 2.1.2. Использование законов Фарадея, Гаусса и Ампера

Еще один способ вычисления низкочастотных гармоник  $E$  может быть основан на использовании закона Фарадея:

$$\oint d\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \int_\Sigma d\mathbf{\Sigma} \mathbf{H}_\omega, \quad \omega \simeq n\omega_0. \tag{2.13}$$

Контур интегрирования  $l$  и окружаемая им поверхность  $\Sigma$  показаны на рис. 1. В цилиндрической системе координат  $(r, \phi, s)$  с осью  $s$  направленной вдоль оси камеры уравнение (2.13) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Delta s [E(\omega) - E^w(\omega)] + \int_0^{l_\perp} dr [E_r(r, s + \Delta s) - E_r(r, s)] &= \\
= \frac{in\omega_0}{c} \Delta s \int_0^{l_\perp} dr H_\phi(r, s),
\end{aligned}$$

или, после перехода к азимутальным гармоникам,

$$E_n(\omega) = E_n^w(\omega) - \frac{in}{R_0} \int_0^{l_\perp} dr E_{r,n} + \frac{inv}{R_0 c} \int_0^{l_\perp} dr H_{\phi,n}(r). \tag{2.14}$$

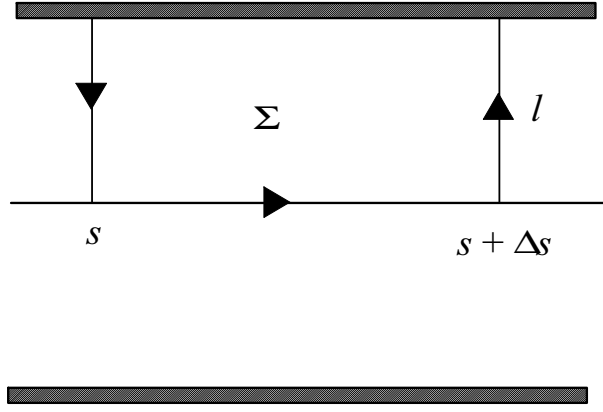


Рис. 1. К расчету полей пучка для неустойчивости отрицательной массы

Электрическое поле на поверхности камеры с идеальной проводимостью стенок  $E_n^w(\omega)$  равно нулю. Компоненты  $E_{r,n}(r)$  и  $H_{\phi,n}(r)$  для длинноволновых колебаний вычисляются с использованием законов Гаусса и Ампера. Предполагая, что гармоники плотности пучка определяются формулой (2.11), пишем:

$$E_r(n, \omega) = \frac{Ne\rho_n(\omega)}{a^2\Pi} \begin{cases} r, & r \leq a, \\ a^2/r, & r > a. \end{cases}$$

$$H_{\phi}(n, \omega) = \frac{v}{c} E_r(n, \omega),$$

где

$$\rho_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\Delta p).$$

Подстановка этих выражений в (2.14) позволяет выразить  $E_n$  через гармоники линейной плотности пучка  $\rho_n(\omega)$

$$E_n(\omega) = -\frac{iNne}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_{\perp}/a) + 1] \rho_n(\omega). \quad (2.15)$$

### 2.1.3. Дисперсионное уравнение

С использованием (2.15) или (2.12) уравнение (2.6) преобразуется в однородное интегральное уравнение, определяющее собственные частоты и моды колебаний:

$$(\omega - n\omega_0(\Delta p))f_n = -\frac{Nne^2}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_{\perp}/a) + 1] \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \rho_n(\omega). \quad (2.16)$$

Решение уравнения (2.16) с точностью до произвольного множителя ( $C$ ) записывается в виде

$$f_n = C \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}. \quad (2.17)$$

Подстановка этого решения в (2.16) дает дисперсионное уравнение

$$1 = -\frac{Nne^2}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_{\perp}/a) + 1] \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}. \quad (2.18)$$

Решение (2.18) в общем случае требует привлечения численных методов. Мы рассмотрим несколько примеров, когда оно может быть решено точно. Пусть сначала  $f_0 = \delta(\Delta p)$  (монохроматический пучок). Выполнение в (2.18) интегрирования с учетом свойств  $\delta$ -функции приводит к квадратному уравнению ( $\omega'_0 = d\omega_0/dp$ )

$$(\omega - n\omega_0)^2 = \Omega_n^2, \quad \Omega_n^2 = n^2 \frac{N e^2 \omega'_0}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_\perp/a) + 1]. \quad (2.19)$$

Видно, что колебания неустойчивы ( $\omega^2 < 0$ ) при  $\omega'_0 < 0$ , т. е. когда эффективная масса продольного движения отрицательна.

Неустойчивость отрицательной массы может стабилизироваться разбросом частот обращения в пучке. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай, когда  $f_0$  есть лоренцево распределение

$$f_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2}. \quad (2.20)$$

При этом ( $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p \partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)} = -\frac{n\omega'_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2} \frac{d\Delta p}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p)^2}. \quad (2.21)$$

В области  $\text{Im}\omega > 0$ , интеграл в (2.21) наиболее просто вычисляется замыканием

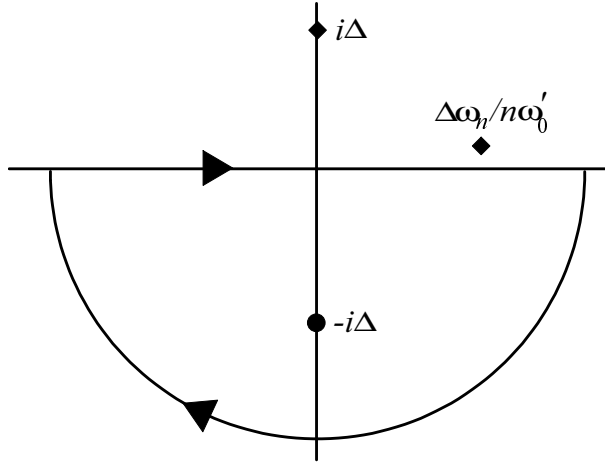


Рис. 2. Контур интегрирования для вычисления интеграла в уравнении (2.21)

контура интегрирования в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $\Delta p$  (рис. 2). После этого вычисление вычета в полюсе  $\Delta p = -i\Delta$  приводит к дисперсионному уравнению

$$1 = \frac{\Omega_n^2}{(\Delta\omega_n + i|n|\delta\omega)^2}, \quad \delta\omega = |\omega'_0|\Delta. \quad (2.22)$$

Один из корней этого уравнения

$$\Delta\omega_n = -i|n|\delta\omega \pm \sqrt{\Omega_n^2} \quad (2.23)$$

соответствует неустойчивым колебаниям ( $\text{Im}\omega > 0$ ) лишь в том случае, когда число частиц в пучке превысит пороговое значение

$$N \leq N_{th} = \frac{\Pi\gamma^2 pv}{e^2|\alpha_p|} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2, \quad \alpha_p = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha. \quad (2.24)$$

Отметим, что в приближении локальных полей пороговый ток неустойчивости отрицательной массы не зависит от номера гармоники колебания  $n$ .

## 2.2. Импедансы связи

Простота описания неустойчивости отрицательной массы в значительной степени обусловлена возможностью записать связь гармоник  $E_n$  и линейной плотности  $\rho_n$  соотношением (2.15). В более общем случае возможность применения аналогичного описания наведенных пучком полей связана с использованием ряда предположений.

### 2.2.1. Определение продольного импеданса связи

Не вдаваясь пока в обоснованность тех или иных предположений, мы можем принять, что электрические поля, которые пучок наводит в каком-либо из окружающих его элементов вакуумной камеры, определяются разностями потенциалов полей на входе и выходе пучка из этого элемента. Если обозначить через  $U_n(\omega)$  гармонику этой разности потенциалов и учесть, что гармоники тока пучка равны

$$j_n(\omega) = N\epsilon\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\omega, \Delta p), \quad (2.25)$$

то используя аналогию с теорией цепей, мы можем записать

$$U_n(\omega) = -Z_n(\omega)j_n(\omega). \quad (2.26)$$

Входящий в это соотношение коэффициент  $Z_n(\omega)$  называется импедансом связи пучка с окружающими электродами. Посредством  $n$  он описывает локализацию наведенных пучком полей вдоль замкнутой орбиты, а посредством  $\omega$  – зависимость этих полей от времени. Поскольку при решении задач об устойчивости когерентных колебаний мы обычно имеем дело с СВЧ-полями, импеданс  $Z_n(\omega)$ , вообще, зависит от траектории пучка в месте расположения электродов. Концептуальная ценность использования импедансов связи в теории когерентных колебаний обусловлена упрощением описания наведенных полей, а также возможностью упрощенного их вычисления (например, с использованием теории цепей), или измерения.

В силу принципа причинности величина  $Z_n(\omega)$  в (2.26) является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ . Если она достаточно быстро спадает при  $|\omega| \rightarrow \infty$ , то на действительной оси  $\omega$  действительная и мнимая части  $Z_n(\omega) = Z'_n(\omega) + iZ''_n(\omega)$  удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\begin{aligned} Z'_n(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} Z''_n(\omega'), \\ Z''_n(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} Z'_n(\omega'). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь перечеркнутый символ интеграла означает его вычисление в смысле главного значения:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} [\dots] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\omega - \eta} + \int_{\omega + \eta}^{\infty} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} [\dots].$$

Поскольку

$$Z_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} Z_n(\omega) e^{-i\omega t}$$

является действительной величиной, реальная часть  $Z_n(\omega)$  является четной, а мнимая – нечетной функцией  $\omega$  на действительной оси комплексной переменной  $\omega$

$$Z_n'(\omega) = Z_n'(-\omega), \quad Z_n''(\omega) = -Z_n''(-\omega). \quad (2.28)$$

Для пассивных систем  $Z_n'(0) > 0$ . Тогда из (2.27) можно, например, получить неравенство

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega Z_n''(\omega)}{\omega} > 0. \quad (2.29)$$

Коль скоро нам известно ускоряющее напряжение  $U_n(\omega)$ , мы можем воспользоваться обычным соотношением теории ускорения частиц:

$$E_n(\omega) = \frac{U_n(\omega)}{\Pi},$$

или

$$E_n(\omega) = -\frac{Ne\omega_0 Z_n(\omega)}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\omega, \Delta p). \quad (2.30)$$

Отметим, что зависимость значения импеданса от положения замкнутой орбиты пучка может приводить к зависимости  $Z_n(\omega)$  не только от частоты колебания, но и от импульса частицы. В таком случае уравнение (2.30) записывается в виде

$$E_n(\omega) = -\frac{Ne\omega_0}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p Z_n(\Delta p, \omega) f_n(\omega, \Delta p), \quad (2.31)$$

где  $Z_n(\Delta p, \omega)$  – значение импеданса для частиц с импульсами  $p + \Delta p$ . Если удастся обеспечить правильный знак изменения когерентных потерь энергии пучка, например, с ростом энергии частиц, то такая возможность позволяет демпфировать продольные когерентные колебания несгруппированных пучков.

### 2.2.2. Дисперсионные уравнения несгруппированного пучка

Для получения дисперсионного уравнения теперь достаточно подставить (2.30) в (2.6). В методическом плане, однако, лучше начать с уравнения (2.4) и повторить некоторые вычисления предыдущего раздела. Как и раньше, пишем

$$\delta f(\Delta p, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\Delta p, t) e^{in\theta}, \quad (2.32)$$

что в силу (2.4) дает

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + in\omega_0(\Delta p) f_n + eE_n \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = 0. \quad (2.33)$$

Умножением обеих частей этого уравнения на  $e^{i\omega t}$  и интегрированием по  $t$  от 0 до  $\infty$  преобразуем его в уравнение для гармоник  $f_n(\omega, \Delta p)$ . При этом учтем, что

$$\int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_n}{\partial t} = -f_n^{(0)}(\Delta p) - i\omega f_n(\omega, \Delta p), \quad \text{Im}\omega > 0,$$

где величины  $f_n^{(0)}(\Delta p)$  задают начальные значения амплитуд колебаний. В результате уравнения для  $f_n(\omega, \Delta p)$  принимают вид

$$f_n(\omega, \Delta p) = \frac{if_n^{(0)}(\Delta p)}{\omega - n\omega_0(\Delta p)} - ieE_n(\omega) \frac{\partial f_0/\partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}. \quad (2.34)$$

В отличие от (2.6) уравнение (2.34) представляет собой неоднородное интегральное уравнение. Его решения могут использоваться как для нахождения спектра колебаний, так и для описания эволюции начальных состояний (при выполнении, конечно, условия  $f_0 \gg |\delta f|$ ). Подставив  $f_n(\omega, \Delta p)$  в (2.30), получим уравнение для амплитуд поля

$$E_n(\omega)\varepsilon_n(\omega) = E_n^{(0)}(\omega), \quad (2.35)$$

где

$$E_n^{(0)}(\omega) = -i \frac{Ne\omega_0 Z_n(\omega)}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{f_n^{(0)}(\Delta p)}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}, \quad (2.36)$$

а

$$\varepsilon_n(\omega) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega_0'} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0/\partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)} \quad (2.37)$$

и

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2 \omega_0 \omega_0'}{\Pi} \left( \frac{-iZ_n(\omega)}{n} \right). \quad (2.38)$$

Поскольку введенная в (2.36) величина  $E_n^{(0)}(\omega)$  представляет собой наведенное поле пучка, вычисленное в пренебрежении коллективным движением, соотношение (2.35) описывает уменьшение поля пучка его коллективной реакцией. Аналогично, если бы мы учли в уравнении (2.34) действие на пучок внешнего поля  $(E_n(\omega))_{ext}$ , то при нулевых начальных значениях наведенных полей мы получили бы соотношение

$$E_n(\omega) = \frac{[E_n(\omega)]_{ext}}{\varepsilon_n(\omega)}.$$

Эти соображения позволяют интерпретировать введенную в (2.37) величину  $\varepsilon_n(\omega)$  как диэлектрическую постоянную пучка.

Как и прежде, собственные частоты колебаний определяются решением однородной части уравнения (2.34). Это позволяет записать дисперсионное уравнение в виде

$$\varepsilon_n(\omega) = 0. \quad (2.39)$$

Для выяснения физического смысла введенной в (2.38) величины  $\Omega_n^2$  положим  $f_0 = \delta(\Delta p)$ . Для такого распределения дисперсионное уравнение переписывается в виде

$$\omega = n\omega_0 \pm \sqrt{\Omega_n^2}. \quad (2.40)$$

Кроме того, примем, что  $Z_n(\omega) = iY_n$  и не зависит от  $\omega$ . Такой случай реализуется, например, для неустойчивости отрицательной массы, когда, как это видно из (2.15),

$$\frac{-iZ_n(\omega)}{n} = \frac{1}{v\gamma^2}[2\ln(l_\perp/a) + 1]. \quad (2.41)$$

Согласно формуле (2.40) в этом случае колебания будут устойчивы ( $\omega^2 > 0$ ) при выполнении условия

$$\omega'_0 Y_n/n > 0, \quad (2.42)$$

а уравнение (2.40) определяет когерентный сдвиг частоты ( $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$ ) относительно гармоник  $n\omega_0$ .

Выражение (2.37) определяет значение диэлектрической проницаемости пучка ( $\epsilon_n(\omega)$ ) лишь в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ . Для вычисления  $\epsilon_n(\omega)$  в области  $\text{Im}\omega < 0$  следует аналитически продолжить (2.37) в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $\omega$ . Это достигается такой деформацией контура интегрирования по  $\Delta p$ , чтобы особенность подынтегрального выражения в точке  $n\omega'_0\Delta p = \Delta\omega_n$  обходила снизу (см. на рис. 3). В результате вместо (2.37) получаем

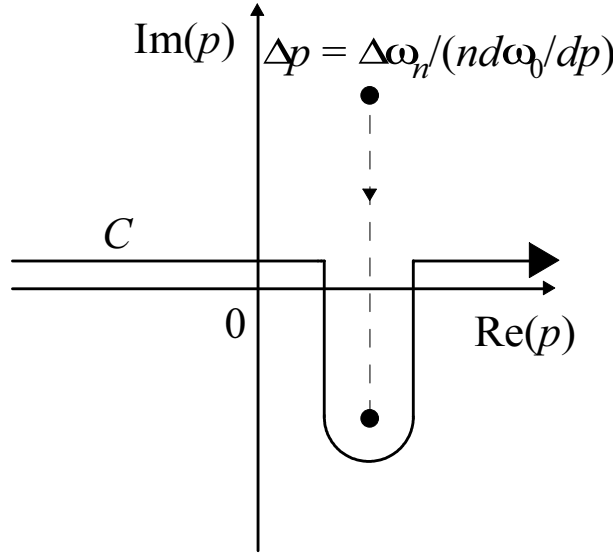


Рис. 3. Изменение контура интегрирования ( $C$ ) в уравнении (2.37) при изменении знака  $\text{Im}\omega$ . При движении  $\Delta\omega$  в нижнюю полуплоскость и после пересечения полюсом действительной оси контур интегрирования деформируется так, чтобы полюс находился выше контура  $C$

$$\begin{aligned} \epsilon_n(\omega) &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv g(v)}{\Delta\omega_n - v} - 2\pi i g(\Delta\omega_n), \\ g(v) &= \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \delta(v - n\omega'_0\Delta p). \end{aligned} \quad (2.43)$$

В качестве иллюстрации применения этих уравнений для, например, вычисления корней дисперсионного уравнения устойчивых когерентных колебаний примем, что

$\Omega_n^2 > 0$ , а распределение импульсов в пучке гауссово:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma^2}\right).$$

Тогда

$$\frac{df_0}{d\Delta p} = -\frac{\Delta p}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma^2}\right),$$

а

$$g(\mathbf{v}) = -\frac{\Omega_n^2 \mathbf{v}}{\sqrt{2\pi}\delta\omega^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2\delta\omega^2}\right), \quad \delta\omega = |n\omega'_0| \sigma.$$

В области параметров, где  $\Omega_n^2 \gg \delta\omega^2$ , корни дисперсионного уравнения записываются в виде

$$\Delta\omega_n = x - iy, \quad |x| \gg y.$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \frac{g(\mathbf{v})}{\Delta\omega_n - \mathbf{v}} \simeq \frac{1}{(\Delta\omega_n)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \mathbf{v} g(\mathbf{v}) + i\pi g(x),$$

а дисперсионное уравнение заменяется на следующее:

$$\begin{aligned} \epsilon_n(\omega) &\simeq 1 + \frac{1}{(\Delta\omega_n)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \mathbf{v} g(\mathbf{v}) + i\pi g(x) - 2\pi i g(x) \\ &\simeq 1 - \frac{\Omega_n^2}{\Delta\omega_n^2} + i\pi \frac{\Omega_n^2}{\sqrt{2\pi}\delta\omega^2} \frac{x}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta\omega^2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Разрешая это уравнение относительно  $x$  и  $y$ , получаем

$$x = \pm \sqrt{\Omega_n^2}$$

и

$$y = \frac{\sqrt{\pi/2}}{2} \frac{\Omega_n^4}{\delta\omega^3} \exp\left(-\frac{\Omega_n^2}{2\delta\omega^2}\right). \quad (2.45)$$

Видно, что, как и в случае распределения Лоренца, разброс частот обращения частиц приводит к затуханию когерентных колебаний пучка. Однако для гауссова (и других гладких, быстроспадающих) распределений импульсов в пучке декременты затухания колебаний зависят от числа частиц в пучке. Кроме того, в рассматриваемой области параметров, величины декрементов оказываются экспоненциально малыми по сравнению с разбросом частот обращения частиц ( $\delta\omega$ ) и величиной когерентного сдвига частоты ( $\sqrt{\Omega_n^2}$ ). Отметим, что согласно уравнениям (2.43) затухание когерентных колебаний появляется благодаря присутствию в пучке резонансных частиц, скорость перемещения которых по фазе  $\omega'_0 \Delta p$  совпадает с фазовой скоростью когерентного колебания ( $\Delta\omega_n/n$ ). Такое затухание когерентных колебаний называется затуханием Ландау.

Как видно из формул (2.43), найденные декременты когерентных колебаний пропорциональны производной функции распределения  $f_0$  по импульсу частицы

$$g(\mathbf{v}) = \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0 |n\omega'_0|} \left( \frac{df_0}{d\Delta p} \right)_{n\omega'_0 \Delta p = \mathbf{v}}. \quad (2.46)$$



Поэтому знак декремента когерентного колебания за счет такого резонансного взаимодействия частиц с модой может зависеть от формы функции распределения. В частности, если когерентный сдвиг частоты колебания попадает на растущий склон  $f_0$ , то декременты затухания Ландау становятся отрицательными, а взаимодействие частиц и колебаний пучка приводит к антизатуханию соответствующей моды когерентных колебаний.

В области параметров, где выполнено неравенство  $|\Omega_n^2| \ll \delta\omega^2$ , определим корни дисперсионного уравнения согласно

$$\Delta\omega_n = x - iy, \quad y \gg |x|. \quad (2.47)$$

Тогда вклад интеграла по  $\mathbf{v}$  в (2.43) пренебрежимо мал, а дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} 1 &\simeq 2\pi i g(\Delta\omega_n) \simeq -2\pi i \frac{\Omega_n^2(x - iy)}{\sqrt{2\pi}\delta\omega^3} \exp\left(-\frac{-y^2 - 2ixy}{2\delta\omega^2}\right) \\ &\simeq -\sqrt{2\pi} \frac{\Omega_n^2 y}{\delta\omega^3} \exp\left(\frac{y^2}{2\delta\omega^2}\right) \exp\left(\frac{ixy}{\delta\omega^2}\right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Действительная часть первого корня этого уравнения равна

$$xy = \pi\delta\omega^2, \quad x = \frac{\pi\delta\omega^2}{y}.$$

Условие  $|x| \ll y$  выполняется, если значения  $y$  велики  $y \gg \delta\omega$ . Декременты мод

$$y = u\delta\omega \quad (2.49)$$

вычисляются решением трансцендентного уравнения

$$ue^{u^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta\omega^2}{\Omega_n^2} \gg 1. \quad (2.50)$$

Результат первых двух итераций для вычисления меньшего корня записывается в виде

$$u \simeq \sqrt{2 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta\omega^2}{\Omega_n^2} - \frac{1}{2} \ln \left( 2 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta\omega^2}{\Omega_n^2} \right) \right) \right)}. \quad (2.51)$$

Значения  $u$  велики в области  $|\Omega_n^2| \ll \delta\omega^2$ . Они логарифмически зависят от числа частиц в пучке. Как и в предыдущей области параметров, затухание когерентных колебаний определяется вкладом резонансных частиц. Однако в области  $|\Omega_n^2| \ll \delta\omega^2$  ширины резонансов велики по сравнению с значением когерентного сдвига частоты.

Если функция распределения  $f_0$  имеет полюсы (например, распределение Лоренца), то при аналитическом продолжении контур интегрирования не должен пересекать этих полюсов. Это приводит к появлению полюсных особенностей у  $\epsilon_n(\omega)$ .

Характер решений дисперсионного уравнения (2.39) существенно зависит от характера зависимости импеданса  $Z_n$  от  $\omega$ , а также от соотношения величины когерентного сдвига ( $|\Omega_n^2|$ ) и частоты обращения. По причинам, которые мы обсудим позднее, обычно принимают  $|\Omega_n| \ll \omega_0$ . Тогда можно указать два важных случая,

когда исследование решений (2.39) существенно упрощается. Это, во первых, случай взаимодействия пучка с низкодобротным окружением, когда при решении (2.39) в  $Z_n(\omega)$  можно пренебречь отличием  $\omega$  от  $n\omega_0$ . Во вторых, это случай резонансного взаимодействия, когда, наоборот, зависимость  $Z_n$  от  $\Delta\omega_n$  является одной из наиболее существенных. Если характеризовать добротность элемента величиной декремента затухания  $\lambda_k$ , то случаю резонансного взаимодействия соответствует область параметров, где  $|\Omega_n(n\omega_0)| \gg \lambda_k$ .

### 2.2.3. Границы области устойчивости

Рассмотрим более подробно случай нерезонансной зависимости импеданса связи от частоты. В соответствии со сказанным мы заменим  $\omega$  в аргументе  $Z_n(\omega)$  на  $n\omega_0$  и потому ниже вместо  $Z_n(\omega)$  будем писать  $Z_n$ . Поскольку  $Z_n$  обычно является комплексной величиной, для  $\delta$ -образного распределения импульсов в пучке согласно (2.40) одна из мод колебаний оказывается неустойчивой. Эта неустойчивость заведомо будет подавляться разбросом частот в пучке (затуханием Ландау), если выполнено неравенство

$$1 > \left| \frac{\Omega_n^2}{n\omega_0'} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega_0' \Delta p} \right|, \quad (2.52)$$

которое означает, что дисперсионное уравнение вообще не имеет корней в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\Delta\omega_n$ .

Для колоколообразных распределений с шириной  $\Delta$  ( $f_0' \propto \Delta p / \Delta$ , при  $|\Delta p| \ll \Delta$ ) мы можем оценить интеграл в правой части (2.52) следующим образом. Поскольку  $\text{Im}\Omega > 0$  пишем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega_0' \Delta p} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_0^{\infty} ds e^{is(\Delta\omega_n - n\omega_0' \Delta p)} \right|.$$

Отсюда следуют неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p \partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega_0' \Delta p} \right| &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_0^{\infty} ds e^{-is(n\omega_0' \Delta p - i\delta)} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n\omega_0'} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta p} \right|. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Определив теперь разброс импульсов в пучке ( $\Delta$ ) формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta p} = \frac{1}{\Delta^2},$$

мы можем переписать неравенство (2.53) в виде ( $\delta\omega = |\omega_0'| \Delta$ )

$$\left| \frac{\Omega_n^2}{n\omega_0'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p \partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega_0' \Delta p} \right| \leq \frac{|\Omega_n^2|}{n^2 \delta\omega}.$$

Таким образом, неравенство (2.52) будет заведомо справедливо при выполнении более слабого неравенства:

$$|\Omega_n^2| \leq (n\delta\omega)^2, \quad (2.54)$$

или

$$|Z_n/n| \leq \frac{pv|\alpha_p| \Delta^2}{eI_b p^2}, \quad (2.55)$$

$$I_b = \frac{Ne\omega_0}{2\pi}, \quad \alpha_p = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha.$$

Это упрощенное условие устойчивости носит название  $Z/n$ -критерия (или критерия Кайла – Шнелля). Отметим, что согласно (2.55) пороговое значения импеданса (либо тока пучка  $I_b$ ) квадратично зависит от разброса импульсов в пучке  $\Delta$  и прямо пропорционально расстоянию до критической энергии кольца.

Обычно корни (2.39) должны находиться численным решением этого уравнения (примеры таких расчетов можно найти в [6]). Вместе с тем, для приложений часто важно знать не сами корни, а условия, когда это уравнение вообще не имеет корней в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ . Последняя задача решается построением границы области устойчивости, т. е. кривой в плоскости  $(\text{Re}\Omega_n^2, \text{Im}\Omega_n^2)$ , или  $(Z'_n, Z''_n)$ , которая отделяет область, содержащую неустойчивые решения, от области, которая вообще не содержит неустойчивых решений. После вычисления такой граничной кривой, размещаемые на замкнутой орбите электроды должны проектироваться так, чтобы вносимая ими величина импеданса связи с пучком попадала внутрь границы области устойчивости продольных когерентных колебаний.

Такая кривая получается непосредственно из уравнения (2.37) устремлением  $\omega$  к действительной оси

$$\frac{1}{\Omega_n^2} = -\frac{1}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p + i0},$$

или, нормируя  $\Omega_n$  на разброс частот в пучке,

$$\frac{1}{\zeta} = -\mathcal{P}(\Delta\omega_n) + iJ(\Delta\omega_n), \quad \zeta = \frac{\Omega_n^2}{n^2 \delta\omega^2}. \quad (2.56)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Delta\omega_n) &= n\omega'_0 \Delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p}, \\ J(\Delta\omega_n) &= \pi n\omega'_0 \Delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \delta(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p), \end{aligned} \quad (2.57)$$

а знак  $\int$  означает вычисление интеграла в смысле главного значения.

Отделив в (2.56) действительную и мнимую части ( $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ ), получим

$$\begin{aligned} \zeta' &= -\frac{\mathcal{P}(\Delta\omega_n)}{\mathcal{P}^2(\Delta\omega_n) + J^2(\Delta\omega_n)}, \\ \zeta'' &= -\frac{J(\Delta\omega_n)}{\mathcal{P}^2(\Delta\omega_n) + J^2(\Delta\omega_n)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Учитывая, что для колоколообразных функций распределения импульсов в пуч-

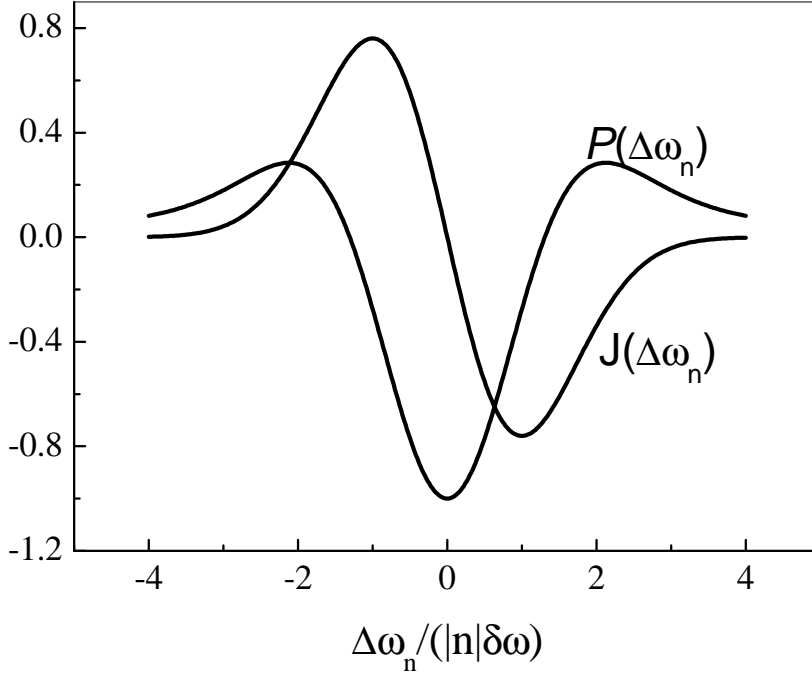


Рис. 4. Зависимости функций  $\mathcal{P}$  и  $J$  в уравнении (2.57) от частоты ( $\Delta\omega_n$ ). Распределение импульсов в пучке гауссово

ке выполняются равенства  $\mathcal{P}(0) = 1$  и  $J(0) = 0$ , а также что при асимптотически больших значениях  $\Delta\omega_n$  выполнено неравенство (см. также на рис. 4)

$$\mathcal{P}(\Delta\omega_n) \simeq \frac{n^2\delta\omega}{\Delta\omega_n^2} \gg |J(\Delta\omega_n)|, \quad |\Delta\omega_n| \gg \delta\omega,$$

находим, что вся граничная кривая (2.58) расположена справа от вертикальной прямой  $\zeta' = -1$  (рис. 5). Изучение хода кривых на рис. 5 показывает, что требование выполнения  $Z/n$ -критерия существенно сужает границы допустимых значений импеданса связи. Это утверждение становится особенно явным в области, где  $\zeta' > 0$ .

Положение области устойчивости относительно граничной кривой можно установить вычислением декрементов колебаний в околопороговой области. Для этого заметим, что прямо на пороге неустойчивости дисперсионное уравнение ( $\varepsilon(N, \Delta\omega_n) = 0$ ) определяет значения когерентного сдвига частоты ( $\Delta\omega_{th}$ ) и порогового числа частиц в пучке ( $N_{th}$ ). Разлагая  $\varepsilon$  в околопороговой области в ряд по степеням отклонений  $\Delta N = N - N_{th}$  и  $x = \Delta\omega_n - \Delta\omega_{th}$ , получим приближенное уравнение

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial N}\right)_{th} \Delta N + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\right)_{th} x = 0, \quad |\Delta N| \ll N_{th}, \quad |x| \ll |\Delta\omega_{th}|. \quad (2.59)$$

Учитывая, что на пороге неустойчивости

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial N}\right)_{th} = -\frac{1}{N_{th}},$$

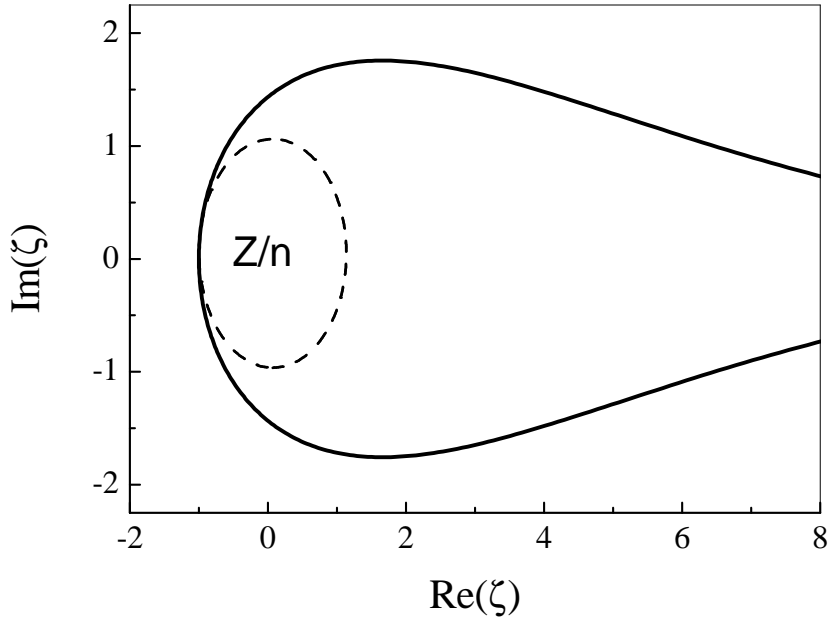


Рис. 5. Граница области устойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Сплошная линия – гауссово распределение импульсов в пучке, пунктир – область выполнения  $Z/n$ -критерия;  $\zeta = \Omega_n^2 / (n\Delta\omega)^2$

перепишем уравнение (2.59) в виде

$$-\frac{\Delta N}{N_{th}} + x \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)_{th} = 0.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\Delta N}{N_{th}} \frac{1}{\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)_{th}}, \quad (2.60)$$

а декремент колебания равен ( $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ )

$$\delta = -\text{Im}x = - \left( 1 - \frac{N}{N_{th}} \right) \frac{(\partial \varepsilon'' / \partial \omega)_{th}}{|(\partial \varepsilon / \partial \omega)_{th}|^2}. \quad (2.61)$$

Положение области устойчивости указывается выполнением условия  $\delta > 0$ .

#### 2.2.4. Двухпотоковые неустойчивости

Проведение экспериментов по изучению когерентных колебаний в накопителе может потребовать анализа спектров колебаний для случаев, в которых частицы собраны в два или более пучков. Например, это могут быть задачи о взаимодействии частиц пучка и вторичных зарядов, которые образуются при движении накапливаемых частиц вдоль замкнутой орбиты. Поскольку колебания каждого из пучков реагируют на наведенные поля остальных, одновременное присутствие на орбите нескольких пучков изменяет дисперсионное уравнение и другие свойства когерентных колебаний.

В данном разделе мы рассмотрим простейший пример такого изменения. Для этого предположим, что в стационарном состоянии функция распределения накопленного пучка по импульсам представляется суммой

$$f_0(\Delta p) = \frac{P(\Delta p + \Delta p_0) + P(\Delta p - \Delta p_0)}{2}, \quad (2.62)$$

в которой функции  $P(\Delta p \pm \Delta p_0)$  нормированы на единицу

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p P(\Delta p \pm \Delta p_0) = 1,$$

а параметр  $\Delta p_0$  задает различие средних значений импульсов в пучках. Согласно формуле (2.62) пучок с распределением импульсов  $f_0(\Delta p)$  представляет собой два потока, движущихся вдоль замкнутой орбиты с фазовыми скоростями  $\pm \omega'_0 \Delta p_0$ . В соответствии с этим, когерентные колебания такого пучка принято называть двухпоточковыми. Мы изучим отличия условий устойчивости продольных двухпоточковых когерентных колебаний от тех, которые получались для однопоточковых пучков.

В области  $\text{Im}\Delta\omega_n > 0$  собственные частоты продольных когерентных колебаний находятся решением дисперсионного уравнения (2.37), которое теперь записывается в виде

$$1 = -\frac{\Omega^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial P / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n + b - n\omega'_0 \Delta p} - \frac{\Omega^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial P / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - b - n\omega'_0 \Delta p}, \quad (2.63)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{\Omega_n^2}{2} = n^2 \frac{Ne^2 \omega_0 \omega'_0}{2\Pi} \left( -\frac{iZ_n}{n} \right), \quad (2.64)$$

$N$  – полное число частиц в пучке, а  $b = n\omega'_0 \Delta p_0$ . Получим сначала решения уравнения (2.63) для монохроматических потоков  $P(\Delta p) = \delta(\Delta p)$ . В таком случае дисперсионное уравнение (2.63) переходит в следующее:

$$1 = \frac{\Omega^2}{(\Delta\omega_n - b)^2} + \frac{\Omega^2}{(\Delta\omega_n + b)^2}. \quad (2.65)$$

Примем для простоты, что  $\Omega^2 > 0$ . Тогда, обозначив в этом уравнении

$$x = \frac{\Delta\omega_n}{\Omega}, \quad z = \frac{b^2}{\Omega^2}, \quad (2.66)$$

перепишем его в виде

$$1 = \frac{1}{(x - \sqrt{z})^2} + \frac{1}{(x + \sqrt{z})^2},$$

или

$$(u - z)^2 - 2(u + z) = 0, \quad u = x^2. \quad (2.67)$$

Последнее уравнение имеет два корня

$$u_1 = 1 + z + \sqrt{1 + 4z} \quad (2.68)$$

и

$$u_2 = 1 + z - \sqrt{1 + 4z}. \quad (2.69)$$

Поскольку  $u = x^2$ , имеется четыре собственные моды колебаний с частотами

$$\Delta\omega_n^{(1)} = \pm\Omega\sqrt{u_1}, \quad \Delta\omega_n^{(2)} = \pm\Omega\sqrt{u_2}. \quad (2.70)$$

Если  $\Omega^2$  положительно, то  $u_1$  также положительно. Поэтому моды с частотами  $\Delta\omega_n^{(1)}$  устойчивы, а их амплитуды не нарастают во времени. Величина  $u_2$  является положительной лишь при выполнении неравенства  $z > 2$ , или

$$|b| > \sqrt{2\Omega^2}. \quad (2.71)$$

Если же условие (2.71) нарушено ( $|b| < \sqrt{2\Omega^2}$ ), то величина  $u_2$  становится отрицательной, а мода с частотой  $\Omega\sqrt{u_2}$  – неустойчивой. В однопотоковом пучке ( $\Delta p_0 = 0$ ) такой неустойчивости нет. Причиной двухпотоковой неустойчивости является связь мод когерентных колебаний потоков, описываемая дисперсионным уравнением (2.65).

Функция распределения импульсов в двухпотоковом пучке является двугорбой кривой. По этой причине действие разброса частот обращения частиц в таком пучке может вызывать как затухание, так и антитухание Ландау когерентных колебаний. Для того чтобы избежать громоздких вычислений, мы перейдем к вычислению границ области устойчивости продольных когерентных колебаний двухпотокового пучка. Для определенности положим, что

$$P(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.72)$$

Тогда интегралы по  $\Delta p$  в правой части уравнения (2.63) выражаются через интегралы вероятности (например, в [6]). Результат вычисления этих интегралов зависит от величины параметра  $y = b/|n|\delta\omega$ , где  $\delta\omega = |\omega'_0|\sigma$  – разброс частот обращения в пучке. Так, в области  $0 \leq y \leq 1$  форма границы области устойчивости когерентных колебаний напоминает вычисленную для однопотокового пучка (например, сплошные линии на рис. 5 и рис. 6). Для сравниваемых кривых различие заключается лишь в некотором уширении (для  $y = 0.9$ ) области устойчивости вдоль оси  $\text{Im}\zeta$  и в области  $\text{Re}\zeta$ .

Увеличение величины параметра  $y$ , например, в область  $1 \leq y < 1.4$  приводит деформации области устойчивости, показанной на рис. 7. Именно, у граничной линии появляется самопересечение. Поэтому граничная кривая выделяет в плоскости  $\zeta$  две области, которые обозначены на рис. 7 буквами А и В. Для упрощения выяснения положения областей устойчивости колебаний на рис. 7 изображена линия корней дисперсионного уравнения, для которых мнимая часть  $\Delta\omega_n$  имеет малое, но ненулевое, положительное значение (пунктир). Эти корни соответствуют неустойчивым когерентным колебаниям. Поэтому они не должны попадать внутрь границы области устойчивости. При уменьшении величины  $\text{Im}(\Delta\omega_n)$  пунктирная линия на рис. 7 приближается к граничной кривой из внутренней части в области В и из наружной части области, сопряженной с областью А. Увеличивая величину  $\text{Im}\Delta\omega_n$ , получаем дополнительные линии на этом рисунке (например, окружности и квадраты на рис.

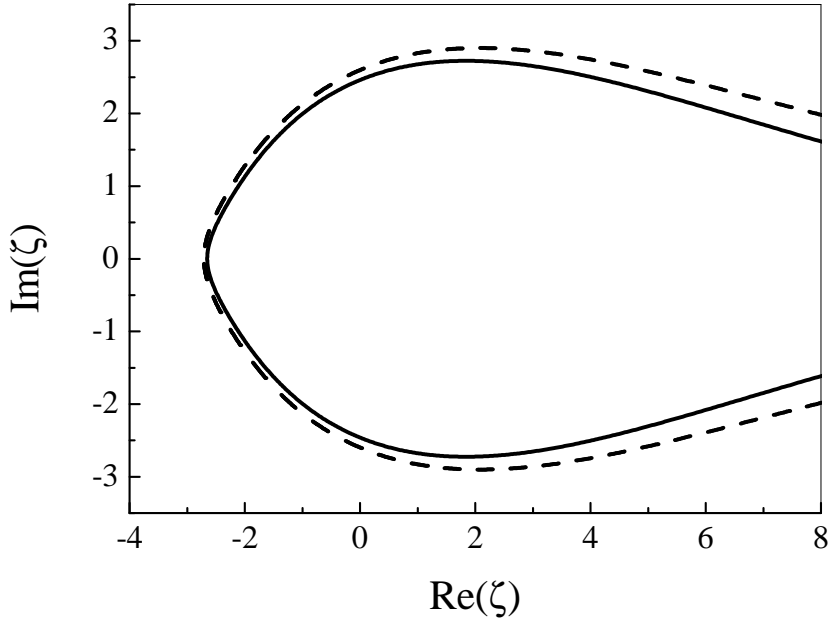


Рис. 6. Граница области устойчивости продольных когерентных колебаний двухпоточкового пучка (сплошная линия). Гауссово распределение импульсов в потоках,  $y = 0.9$ , пунктир – линия корней дисперсионного уравнения, для которых  $\text{Im}(\Delta\omega_n) = |n|\delta\omega \times 0.05$

7). Положения этих линий ясно указывают, что единственной областью, содержащей только устойчивые моды когерентных колебаний ( $\text{Im}\Delta\omega_n < 0$ ), является область А.

Дальнейшее увеличение параметра  $y$  (например,  $y \geq 1.4$ ) приводит к переходу области В, показанной на рис. 7, так, что значительная ее часть начинает располагаться в области  $\text{Re}(\zeta) > 0$  (рис. 8). Достраивая на этом рисунке линию корней с  $\text{Im}(\Delta\omega_n) = |n|\delta\omega \times 0.01$ , убеждаемся в том, что истинная область устойчивости когерентных колебаний для этого случая совпадает с криволинейным треугольником, обозначенным на рис. 8 буквами ABCD.

Для асимптотически больших значений параметра  $y$  самопересечения границ области устойчивости когерентных колебаний становятся менее выраженными (например, рис. 9, сплошная линия), а форма граничной кривой приближается к той, которая получается для когерентных колебаний однопоточкового пучка (пунктирная линия на рис. 9). Отметим, что даже для  $y = 10$  ширины области устойчивости двухпоточкового пучка примерно в два раза превышают ширины однопоточкового. Вообще, увеличение числа потоков в пучке увеличивает число самопересечений граничной кривой. Нарушение симметрии заполнения потоков частицами пучка может нарушать симметрию граничной кривой относительно смены знака  $\text{Im}(\Delta\omega_n)$ .

## 2.3. Задачи к лекции 2

1. Учитывая взаимодействие частиц, вычислить зависимости от времени гармоник линейной плотности пучка для следующих функций распределения

$$f(\theta, \Delta p) = \delta(\theta) \frac{\Delta/\pi}{\Delta^2 + \Delta p^2},$$



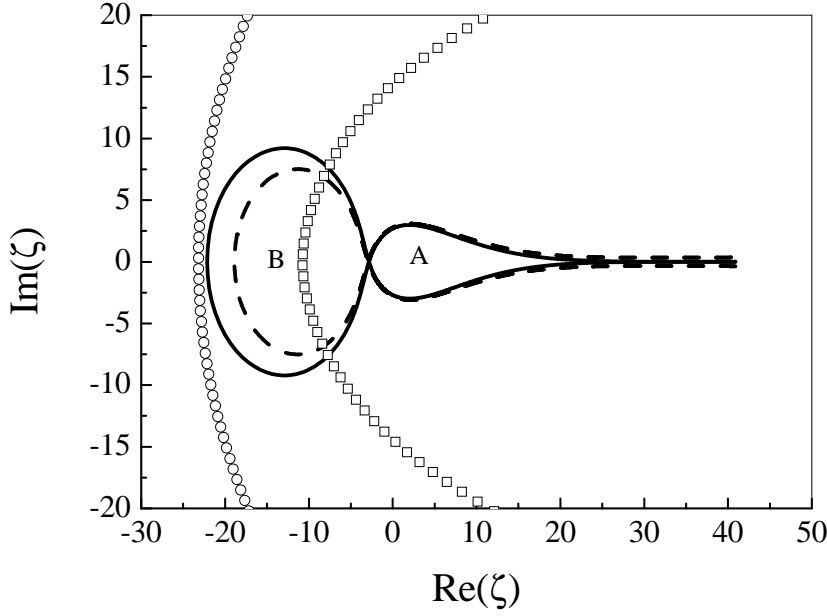


Рис. 7. То же, что на рис. 6, но  $y = 1.25$ . Пунктир – линия корней дисперсионного уравнения, для которых  $\text{Im}(\Delta\omega_n) = |n|\delta\omega \times 0.025$ , квадраты –  $2|n|\delta\omega$ , окружности –  $4|n|\delta\omega$

$$f(\theta, \Delta p) = \frac{\delta(\theta)}{2\Delta} \begin{cases} 1, & |\Delta p| \leq \Delta, \\ 0, & |\Delta p| > \Delta, \end{cases}$$

$$f(\theta, \Delta p) = \frac{\delta(\theta)}{(2\pi)^{1/2}\Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right).$$

2. Пользуясь приближением локального наведенного поля, уравнением Власова и уравнениями Максвелла, найти дисперсионное уравнение неустойчивости отрицательной массы, не предполагая малость радиуса пучка по сравнению с радиусом вакуумной камеры.

3. Приняв, что распределение импульсов в пучке гауссово:

$$f(\Delta p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right),$$

вычислить инкремент неустойчивости отрицательной массы в надпороговой области. Построить зависимость инкремента от числа частиц в пучке.

4. Установить, что охлаждение несгруппированного пучка не влияет на величину порогового тока неустойчивости отрицательной массы. Почему?

5. Предположим, что на замкнутой орбите, на азимуте  $\theta = 0$  расположен ускоряющий зазор, в котором возбуждено ВЧ-поле

$$E(\theta, t) = \delta(\theta)V \sin \Omega t / R_0.$$

Если величина напряжения  $V$  невелика, то измеряя интегральным пикап-электродом вынужденные колебания линейной плотности пучка, можно изучать его спектральные свойства. Предполагая, что пучок взаимодействует с гладкой, идеально проводящей вакуумной камерой, вычислить резонансную кривую продольных когерентных колебаний.

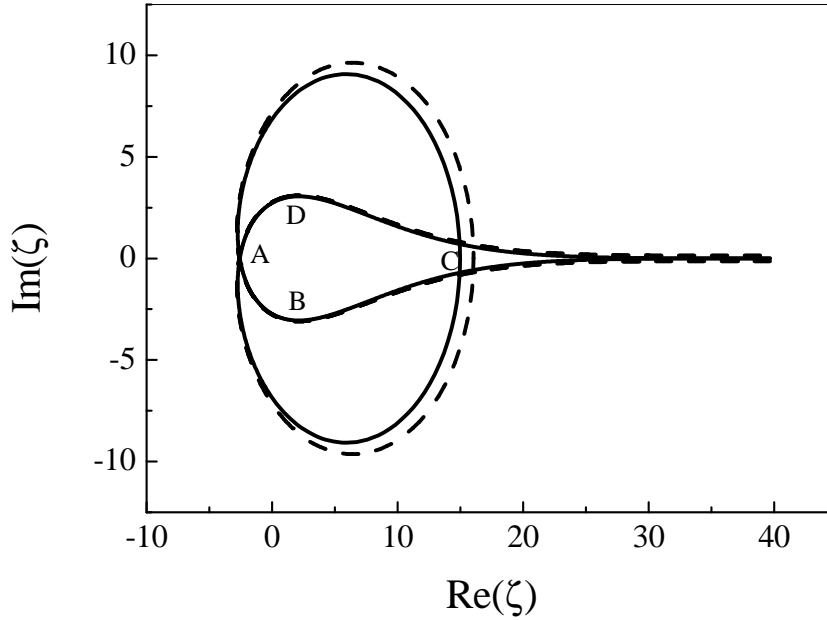


Рис. 8. То же, что на рис. 6, но  $y = 1.4$ . Пунктир – линия корней дисперсионного уравнения, для которых  $\text{Im}(\Delta\omega_n) = |n|\delta\omega \times 0.01$

6. Пользуясь граничным условием Леонтовича

$$E_z = \left( \frac{-i\omega}{4\pi\sigma} \right)^{1/2} H_\phi,$$

вычислить поправку к импедансу гладкой идеально проводящей вакуумной камеры круглого сечения. Здесь амплитуды гармоник полей вычисляются на поверхности металла,  $\omega$  – частота,  $\sigma$  – проводимость металла камеры.

7. Показать, что границей области устойчивости для лоренцева распределения импульсов в пучке

$$f(\Delta p) = \frac{\Delta/\pi}{\Delta^2 + \Delta p^2}$$

является парабола.

8. Прямоугольное распределение импульсов в пучке может моделироваться выражением

$$f = \frac{1}{2\pi\Delta} \left[ \arctan \left( \frac{\Delta p + \Delta}{\delta} \right) - \arctan \left( \frac{\Delta p - \Delta}{\delta} \right) \right]$$

Найти уравнение границы области устойчивости для такого распределения; проанализировать изменение формы граничной кривой при уменьшении ширины  $\delta$ ; вычислить декременты затухания Ландау.

9. Построить границу области устойчивости продольных когерентных колебаний для пучка с распределением импульсов

$$f(\Delta p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp \left( -\frac{\Delta p^2}{2\sigma^2} \right)$$

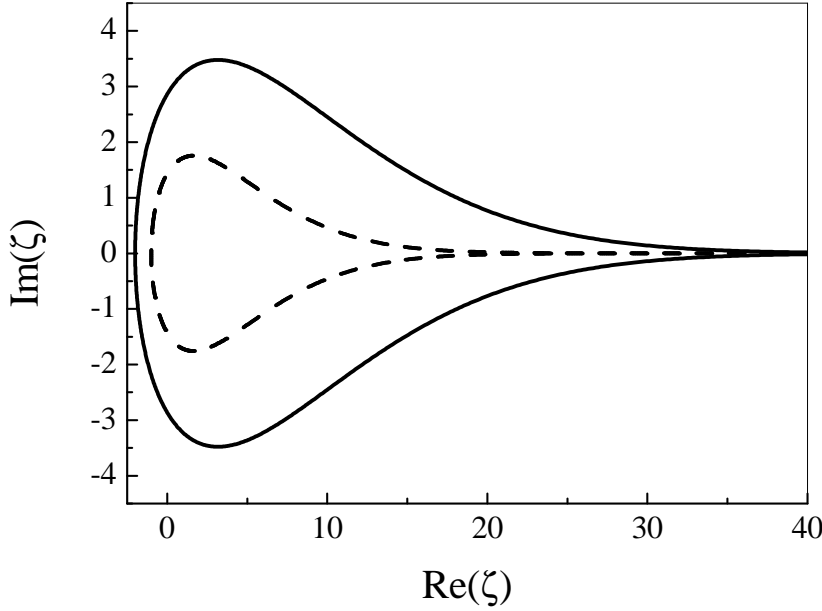


Рис. 9. Границы области устойчивости продольных когерентных колебаний для двухпоточкового пучка ( $y = 10$ , сплошная линия) и для пучка с  $y = 0$  (пунктир)

и связанного с вакуумной камерой посредством импеданса

$$Z = inZ_0 + \frac{dZ_1}{d\Delta p}\Delta p.$$

Проанализировать спектр когерентных колебаний монохроматического пучка.

10. Продольные когерентные колебания несгруппированного пучка можно подавлять с помощью систем обратной связи. Например, для этого когерентный сигнал с дифференциального пикап-электрода, расположенного в месте с ненулевой дисперсионной функцией и пропорциональный радиальному дипольному моменту пучка, через широкополосный усилитель подается на ускоряющий зазор, который должен находиться в месте с нулевой дисперсионной функцией. Считая, что Фурье-гармоники корректирующего ускоряющего напряжения равны

$$E_\omega(\theta) = -\delta_T(\theta - \theta_k)\kappa(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \Delta p f_\omega(\Delta p, \theta = 0),$$

где

$$\delta_T(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{2\pi},$$

и что  $\kappa(\omega) = \kappa e^{i\omega\tau}$ , а время задержки в цепи обратной связи выбрано так, что  $\theta_k = \omega_s\tau$ , получить условия устойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Здесь  $\theta_k$  – азимутальное расстояние между пикап-станцией и ускоряющим зазором. Влиянием разброса частот пренебречь.

11. Импеданс связи пучка с резонатором определяется выражением

$$Z(\omega) = \frac{Z_k}{1 + iQ_k \left( \frac{\omega_k}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_k} \right)},$$

где  $Z_k$  – так называемое шунтовое сопротивление резонатора,  $\omega_k$  – резонансная частота, а  $Q_k$  – добротность резонатора. Выяснить условия устойчивости высоких ( $n > \omega_k/\omega_0$ ) и низких ( $n < \omega_k/\omega_0$ ) гармоник монохроматического пучка, взаимодействующего с таким резонатором. Объяснить различие условий устойчивости.

12. Вычислить пороговое значение  $\Omega_n^2 > 0$  для пучка, состоящего из трех монохроматических потоков:

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{3} (\delta(\Delta p + \Delta p_0) + \delta(\Delta p) + \delta(\Delta p - \Delta p_0)).$$

13. Вычислить пороговое значение  $\Omega_n^2 > 0$  для пучка, состоящего из  $2M$  монохроматических потоков:

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{2M} \sum_{k=-M}^M \delta(\Delta p - k\Delta p_0).$$

14. Изучить поведение границы области устойчивости продольных когерентных колебаний двухпотокового пучка с функцией распределения:

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\Delta}{(\Delta p + \Delta p_0)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta}{(\Delta p - \Delta p_0)^2 + \Delta^2} \right].$$

15. На расстояниях, меньших радиуса поперечного сечения вакуумной камеры, ионы (заряд  $Qe$ ) взаимодействуют по закону Кулона. В приближении сглаженной фокусировки изучить устойчивость малых колебаний ионов в несгруппированном пучке при их эквидистантном распределении вдоль замкнутой орбиты.

Продольное расстояние между ионами в пучке  $d = \Pi/N$  велико по сравнению с их вертикальными  $y_m$ , горизонтальными  $x_m$  и продольными  $s_m = vt - md$  ( $m = 1, \dots, N$ ) смещениями от замкнутой орбиты и от узловых точек  $md$ . Для решения задачи воспользоваться уравнениями колебаний ионов в несгруппированном пучке, линеаризованными по  $y_m$ ,  $x_m$  и  $s_m$  вблизи замкнутой орбиты:

$$\begin{aligned} y_m'' + v_y^2 y_m &= \frac{(Qe)^2}{M\omega_0^2 d^3} \sum_{m \neq n} \frac{y_m - y_n}{|m - n|^3}, \\ x_m'' + v_x^2 x_m &= R \frac{\Delta p_m}{p} + \frac{(Qe)^2}{M\omega_0^2 d^3} \sum_{m \neq n} \frac{x_m - x_n}{|m - n|^3}, \\ \frac{\Delta p_m'}{p} &= -\frac{2}{R} \frac{(Qe)^2}{M\omega_0^2 d^3} \sum_{m \neq n} \frac{s_m - s_n}{|m - n|^3}, \quad s_m' = -x_m + R \frac{\Delta p_m}{\gamma^2 p}. \end{aligned}$$

Здесь  $R$  – радиус кривизны орбиты. Проследить связь решений этой задачи с описанием неустойчивости отрицательной массы.

# Лекция 3

## Общее интегральное уравнение

Перейдём к построению общей теории линейных когерентных колебаний пучка в накопителе (Я. С. Дербенев, Н. С. Диканский, 1969 [8]).

### 3.1. Уравнение Власова

Для простоты мы подробно рассмотрим случай, когда когерентные колебания развиваются намного быстрее стохастических процессов. Как уже говорилось, в этих условиях эволюция функции распределения пучка подчиняется уравнению Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0, \quad (3.1)$$

где  $[H, f]$  – скобка Пуассона функций  $H$  и  $f$ ,  $H$  – гамильтониан, генерирующий уравнения движения частиц вдоль замкнутой орбиты пучка. В общем случае функция  $H$  определяется выражением

$$H = H_0 - L = H_0 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} + eA_0. \quad (3.2)$$

Здесь  $H_0$  – гамильтониан, описывающий невозмущенные колебания частиц вблизи замкнутой орбиты, а  $\mathbf{A}$  и  $A_0$  – векторный и скалярный потенциалы наведенных пучком полей:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Для определенности будем считать, что потенциалы удовлетворяют калибровочному условию Лоренца

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0.$$

Тогда уравнения для потенциалов записываются в виде

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_0(r, t) &= -4\pi N e \int d^3 p f, \\ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(r, t) &= -4\pi N e \int d^3 p \frac{\mathbf{v}}{c} f. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В пренебрежении действием наведенных пучком полей функция распределения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Psi}} = 0.$$

Его общее решение записывается в виде

$$f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\Psi}, t) = f_1[\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t]f_2(\mathbf{I}).$$

Функции  $f_1$  и  $f_2$  находятся из начальных условий:  $f_1 f_2 = f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\Psi}, t = 0)$ . Гармоники функции распределения  $f$  по фазам колебаний частиц осцилляторно зависят от времени. Амплитуды таких колебаний не нарастают и не затухают с ростом  $t$ . Они описывают стационарные когерентные колебания пучка. В соответствии с этим функция распределения пучка, не совершающего когерентных колебаний, не зависит от фаз колебаний частиц  $\boldsymbol{\Psi}$  и времени ( $f \rightarrow f_0(I)$ ). Ниже мы будем называть такие состояния стационарными.

Вместе с тем, средние от произведений  $Q_{m,\alpha} = I_\alpha^{|m_\alpha|/2} \exp(i\mathbf{m}\boldsymbol{\Psi})$  зависят от времени согласно выражениям

$$\langle Q_{m,\alpha} \rangle(t) = \int \frac{d\mathbf{I}d\boldsymbol{\Psi}}{(2\pi)^3} Q_{m,\alpha} f = (f_1)_{\mathbf{m}} \int d\mathbf{I} f_2(\mathbf{I}) I_\alpha^{|m_\alpha|/2} \exp(-i\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}t).$$

Для всех гармоник  $f$ , за исключением нулевой, моменты  $\langle Q_{m,\alpha} \rangle(t)$  также осцилляторно зависят от времени, а их амплитуды, в среднем, затухают с ростом  $t$ . Эти величины представляют собой мультиполи распределения  $f$  в фазовом пространстве.

Действие на частицы наведенных пучком полей может приводить к нестационарным зависимостям от времени гармоник  $f$ . В этой связи пишут:

$$f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\Psi}, t) = [f_0(\mathbf{I})/(2\pi)^3] + \tilde{f}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\Psi}, t), \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{I}, \boldsymbol{\Psi}$  – переменные действие-фаза невозмущенных колебаний частиц, а функция  $f_0$  нормирована на единицу. В силу линейности уравнений поля потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $A_0$  также представляются в виде

$$(\mathbf{A}, A_0) = (\mathbf{A}, A_0)_0 + (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{A}_0). \quad (3.5)$$

По этой причине лагранжиан взаимодействия пучка с наведенными полями ( $L$ ) представляется суммой двух слагаемых

$$L = L_0 + \tilde{L}.$$

Первое слагаемое ( $L_0$ ) описывает возмущение частиц стационарным током и плотностью заряда пучка. В силу цикличности движения частиц величина  $L_0$  является периодической функцией фаз ( $\boldsymbol{\Psi}$ ) и азимута  $\theta$ . Она может быть представлена разложением в ряд Фурье:

$$L_0 = \sum_{m,n} (L_0)_{mn} \exp(i\mathbf{m}\boldsymbol{\Psi} + in\theta). \quad (3.6)$$

При этом, если рабочая точка по частотам колебаний частиц приближена к линиям машинных резонансов

$$\mathbf{m}\mathbf{v} + n \simeq 0, \quad (3.7)$$

то согласно уравнениям движения

$$\dot{I}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}, \quad \dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial I_\alpha} = \omega_\alpha - \frac{\partial L}{\partial I_\alpha} \quad (3.8)$$

слагаемое  $L_0$ , вообще говоря, вызывает систематическое изменение функции распределения  $f$ . Оно будет проявляться в модуляции фазовых траекторий частиц, а также в возможности захвата частиц пучка в соответствующие области автофазировки. Ниже мы будем считать, что рабочая точка удалена от опасных машинных резонансов. В этих условиях и в первом приближении теории возмущений все слагаемые в  $L_0$  с  $\mathbf{m} \neq 0$  и с  $n \neq 0$  представляют собой быстроосциллирующие функции времени. Они вызывают появление у  $f$  столь же быстроосциллирующей добавки, амплитуда которой мала. Систематическое изменение гармоник  $f_0$  вызывает слагаемое  $(L_0)_{0,0}$ , которое согласно (3.8) определяет сдвиги частот  $\omega_\alpha$  за счет возмущений движения частиц наведенными пучком полями

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha - \frac{\partial (L_0)_{0,0}}{\partial I_\alpha}.$$

Считая, что эти сдвиги уже учтены в  $\omega_\alpha$  и имея в виду решение (3.1) в первом приближении теории возмущений, мы можем переписать  $H$  в виде

$$H = H_1 - \tilde{L}, \quad H_1 = H_0 - (L_0)_{0,0}. \quad (3.9)$$

Если характеристики стационарного состояния ( $f_0$ ,  $\mathbf{A}_0$  и  $A_0$ ) заданы, решение уравнений (3.1) и (3.3) упрощается в тех случаях, когда эти уравнения можно линеаризовать по отклонениям от стационарных значений. В этой связи могут решаться два круга задач. Во-первых, это задачи об устойчивости малых когерентных колебаний, когда малость отклонений предполагается по условию. Основными результатами таких расчетов являются определения условий устойчивости когерентных колебаний, вычисления величин пороговых токов пучка для потенциально неустойчивых видов колебаний, величин когерентных сдвигов частот и декрементов колебаний. Решение этого круга задач не требует задания величин начальных отклонений пучка от стационарного состояния. Во-вторых, решение линеаризованных уравнений Власова могут применяться для описания эволюции начальных отклонений. В этом случае, помимо знания спектров колебаний, необходимо вычисление соответствующих функций Грина  $R(\Gamma, \Gamma', t)$ :

$$f(\Gamma, t) = \int d\Gamma' R(\Gamma, \Gamma', t) f(\Gamma', t = 0). \quad (3.10)$$

Здесь  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  – полные наборы координат соответствующих частиц в фазовом пространстве пучка, а  $d\Gamma = d^3I d^3\psi / (2\pi)^3$ . Поскольку ядра  $R(\Gamma, \Gamma', t)$  вычисляются в линейном приближении по отклонениям функции распределения пучка от  $f_0$ , такое описание справедливо лишь на ограниченных интервалах времени, когда выполняются пределы применимости линейного приближения.

Решения (3.3) выражаются через функции Грина этих уравнений ( $\alpha, \beta = x, y, c$ ). Учитывая, что на замкнутой орбите  $\theta = \omega_0 t + \Delta\theta(\mathbf{I}, \boldsymbol{\Psi})$ , пишем

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty d\tau \int d\Gamma_2 f(\mathbf{I}_2, \boldsymbol{\Psi}_2, t - \tau) \\ &\times G_{00}(\mathbf{r}_{\perp 1}, \omega_0 t + \Delta\theta_1, \mathbf{r}_{\perp 2}, \omega_0(t - \tau) + \Delta\theta_2, \tau), \\ A_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty d\tau \int d\Gamma_2 f(\mathbf{I}_2, \boldsymbol{\Psi}_2, t - \tau) \\ &\times \frac{v_\beta^{(2)}}{c} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{\perp 1}, \omega_0 t + \Delta\theta_1, \mathbf{r}_{\perp 2}, \omega_0(t - \tau) + \Delta\theta_2, \tau). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Определив ядро:

$$G(1, 2, \tau) = G_{00}(1, 2, \tau) - \frac{v_\alpha^{(1)} v_\beta^{(2)}}{c^2} G_{\alpha\beta}(1, 2, \tau), \quad (3.12)$$

мы можем записать

$$\tilde{L} = Ne^2 \int d\Gamma_2 \int_0^\infty d\tau G(1, 2, \tau) \tilde{f}(2, t - \tau). \quad (3.13)$$

Тогда линейризованное уравнение для  $\tilde{f}$  имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\Psi}} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \boldsymbol{\Psi}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} = 0. \quad (3.14)$$

В силу цикличности движения частиц вдоль замкнутой орбиты зависимость функции  $\tilde{L}$  от времени всегда содержит модуляции с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . По этой причине собственные решения уравнения (3.14) могут быть представлены рядами

$$\tilde{f} = e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{m}, n} f_{\mathbf{m}, n}^\omega(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\Psi} + in\omega_0 t}. \quad (3.15)$$

Подставив это выражение в (3.14), получим уравнения для вычисления амплитуд  $f_{\mathbf{m}, n}^\omega(\mathbf{I})$ :

$$\sum_n (\omega - \omega_{mn}) f_{\mathbf{m}, n}^\omega(\mathbf{I}) e^{in\omega_0 t} = e^{i\omega t} \delta L_{\mathbf{m}} \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right), \quad (3.16)$$

где  $\omega_{mn} = \mathbf{m}\boldsymbol{\omega} + n\omega_0$ , а

$$\tilde{L} = \sum_{\mathbf{m}} \delta L_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\Psi}}.$$

Поскольку ядро  $G(1, 2, \tau)$  является периодической функцией  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , для вычисления гармоник  $\delta L_{\mathbf{m}}$  пишем

$$\begin{aligned} G(1, 2, \tau) &= \sum_{n_1, n_2} G_{n_1, n_2} e^{in_1\theta_1 - in_2\theta_2} = \sum_{n_1, n_2} [G(1, 2, \tau)]_{n_1, n_2} \\ &\times \exp(in_1\omega_0 t + in_1\Delta\theta_1 - in_2\omega_0 t + in_2\omega_0\tau - in_2\Delta\theta_2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta L_{\mathbf{m}} &= Ne^2 \int d\Gamma_2 \sum_{n_1, n_2} \int_0^\infty d\tau \{ G_{n_1, n_2}(1, 2, \tau) e^{in_1\Delta\theta_1} \}_{\mathbf{m}} \\ &\times \exp(in_1\omega_0 t - in_2\omega_0 t + in_2\omega_0\tau - in_2\Delta\theta_2) \\ &\times \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega - n_3\omega_0)(t - \tau)) \sum_{\mathbf{m}_2} f_{\mathbf{m}_2, n_3}^\omega e^{i\mathbf{m}_2\boldsymbol{\Psi}_2}, \end{aligned}$$



или

$$\begin{aligned} \delta L_{\mathbf{m}} &= Ne^2 \sum_{n_1, n_2, n_3} \exp(-i(\omega - n_1\omega_0 + n_2\omega_0 - n_3\omega_0)t) \int d\Gamma_2 e^{-in_2\Delta\theta_2} \\ &\times \sum_{\mathbf{m}_2} f_{\mathbf{m}_2, n_3}^\omega e^{i\mathbf{m}_2\psi_2} \int_0^\infty d\tau \{G_{n_1, n_2}(1, 2, \tau) e^{in_1\Delta\theta_1}\}_{\mathbf{m}} e^{i(\omega - (n_3 - n_2)\omega_0)\tau}. \end{aligned}$$

Приравниванием в правой и левой частях уравнения (3.16) коэффициентов при одинаковых степенях  $e^{i\omega_0 t}$  находим, что для таких слагаемых номера азимутальных гармоник  $n$  и  $n_{1,2,3}$  удовлетворяют соотношениям

$$n_3 = n - n_1 + n_2. \quad (3.17)$$

Учитывая также определение

$$\begin{aligned} g &= \int_0^\infty d\tau G_{n_1, n_2}(1, 2, \tau) \exp(in_2\omega_0\tau + i(\omega - (n - n_1 + n_2)\omega_0)\tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau G_{n_1, n_2}(1, 2, \tau) \exp(i(\omega - (n - n_1)\omega_0)\tau) \\ &= G_{n_1, n_2}(1, 2, \omega - n\omega_0 + n_1\omega_0), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta L_{\mathbf{m}} &= Ne^2 \sum_n e^{-i(\omega - n\omega_0)t} \sum_{n_1, n_2} \int d\Gamma_2 e^{-in_2\Delta\theta_2} \\ &\times \sum_{\mathbf{m}_2} f_{\mathbf{m}_2, n - n_1 + n_2}^\omega e^{i\mathbf{m}_2\psi_2} \{G_{n_1, n_2}(1, 2, \omega - n\omega_0 + n_1\omega_0) e^{in_1\Delta\theta_1}\}_{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (3.16) приводит к системе связанных уравнений для амплитуд  $f_{\mathbf{m}, n}^\omega$ :

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{mn})f_{\mathbf{m}, n}^\omega &= Ne^2 \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \sum_{n_1, n_2} \sum_{\mathbf{m}_2} \int d^3 I_2 f_{\mathbf{m}_2, n - n_1 + n_2}^\omega(\mathbf{I}_2) \\ &\times \{G_{n_1, n_2}(1, 2, \omega + (n_1 - n)\omega_0) \exp[in_1\Delta\theta_1 - in_2\Delta\theta_2]\}_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Везде в этих формулах использовалось определение

$$X_{\mathbf{m}, n} = \int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} X(\boldsymbol{\psi}, \theta) e^{-in\theta - i\mathbf{m}\boldsymbol{\psi}}.$$

Возможность упрощения полученных уравнений связана с тем, что в типичных задачах об исследовании когерентных колебаний пучков в накопителях (ускорителях) малы искажения траекторий частиц наведенными пучком полями за период обращения частиц вдоль замкнутой орбиты. По этой причине можно ожидать, что спектры малых когерентных колебаний пучка близки к невозмущенным ( $\omega_{mn} = m_\alpha\omega_\alpha + n\omega_0$ ) и в соответствии с этим искать решения уравнений (3.18) в виде рядов по степеням малого параметра  $\Delta\omega_{mn}/\omega_{mn}$ , где  $\Delta\omega_{mn} = \omega - \omega_{mn}$ . Слагаемые в правой части уравнения (3.18) эффективно содержат частотные знаменатели:

$$\omega - \mathbf{m}_2\boldsymbol{\omega} - (n - n_1 + n_2)\omega_0 = \Delta\omega_{mn} + (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)\boldsymbol{\omega} + (n_1 - n_2)\omega_0.$$

Поэтому, если  $\mathbf{l}$  и  $q$  – произвольные целые числа, а  $\omega_{lq} = \mathbf{l}\omega + q\omega_0$  – расстояния по частотам в спектре невозмущенных когерентных колебаний пучка, то при выполнении условия  $|\Delta\omega_{mn}/\omega_{lq}| \ll 1$  вклады недиагональных элементов ( $n' \neq n$ ) и ( $m'_\alpha \neq m_\alpha$ ) в изменение  $f_{mn}$  будут подавлены в  $|\Delta\omega_{mn}/\omega_{lq}|$  раз. С такой точностью (3.18) можно заменить системой несвязанных интегральных уравнений

$$\Delta\omega_{mn}f_{\mathbf{m},n}^\omega = Ne^2 \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d^3 I_2 K_n(1, 2, \omega - n\omega_0) f_{\mathbf{m},n}^\omega(\mathbf{I}_2), \quad (3.19)$$

где

$$K_n = \sum_{n_1} \{G_{n_1, n_1-n}(1, 2, \omega + (n_1 - n)\omega_0) e^{in_1(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)}\}_{\mathbf{m}, \mathbf{m}}. \quad (3.20)$$

Полученные уравнения (3.19) представляют собой однородные интегральные уравнения. Возможность вычисления нетривиальных решений таких уравнений связана с существованием спектров их собственных частот. Если собственные частоты когерентных колебаний  $\omega$  найдены, то соответствующие им собственные функции  $f_{\mathbf{m},n}^\omega$  вычисляются с использованием стандартных процедур. Следует отметить, что существование спектров собственных частот когерентных колебаний пучков не является заранее очевидным событием. Для этого нужно, чтобы взаимодействие с наведенными полями замыкало обратные связи колебаний частиц пучка. В противном случае собственные решения уравнений (3.19) отсутствуют, а вычисления зависимостей амплитуд когерентных колебаний от времени сводится к решению задачи с начальными условиями.

Поскольку собственные частоты  $\omega$  входят в (3.19) в комбинациях  $\omega - n\omega_0$ , спектры всех этих уравнений отличаются лишь сдвигами собственных частот  $\omega$  на величины  $n\omega_0$ . По этой причине собственные частоты когерентных колебаний и условия их устойчивости могут находиться с помощью решения какого-то одного из этих уравнений (скажем, уравнения для  $n = 0$ ):

$$\Delta\omega_m f_{\mathbf{m}}^\omega = Ne^2 \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d^3 I_2 K_0(1, 2, \omega) f_{\mathbf{m}}^\omega(\mathbf{I}_2). \quad (3.21)$$

Указанная неоднозначность вычисления собственных частот когерентных колебаний связана с периодичностью действующего на пучок возмущения. Как и в случае нахождения частот бетатронных колебаний частицы в машине с жесткой фокусировкой, она устраняется вычислением  $\beta$ -функций коллективных мод пучка. Отметим, что вычисление декрементов ( $\delta = -\text{Im}\omega$ ) колебаний не содержит такой неоднозначности.

Легко проверить, что использование уравнения (3.21) эквивалентно вычислению  $f_{\mathbf{m}}^\omega$  в первом приближении метода усреднения. Действительно, в соответствии с общей идеей этого метода, после выделения в (3.14) медленных зависимостей функций  $f_{\mathbf{m}}$  и  $L_{\mathbf{m}}$  от времени:

$$\tilde{f} = \bar{f} + \tilde{\tilde{f}}, \quad \tilde{L} = \bar{L} + \tilde{\tilde{L}},$$

где

$$\bar{X}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_0}{2\pi} X(\theta_0, t), \quad \tilde{X} = X - \bar{X},$$

и подстановки  $\bar{f}_{\mathbf{m}}(t) = f_{\mathbf{m}}^{\omega} e^{-i\omega t}$  получается интегральное уравнение, совпадающее с (3.21):

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}^{\omega} &= \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \bar{L}_{\mathbf{m},\omega}(\mathbf{I}) \\ &= N e^2 \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d^3 I_2 K_0(1, 2, \omega) f_{\mathbf{m}}^{\omega}(2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

## 3.2. Поперечные когерентные колебания несгруппированного пучка

Уравнение (3.21) допускает значительные упрощения при описании взаимодействия несгруппированного пучка с внешними электродами. При этом, в силу азимутальной симметрии стационарного состояния

$$f_0 = f_0(\mathbf{I}_{\perp}, \Delta p),$$

фазовой переменной продольного движения частиц является величина

$$\psi_{\parallel} = \phi = \omega'_0 \Delta p t + \psi_0.$$

В результате, интегрирование по  $\psi_{\parallel}$  в правой части (3.20) сводится к вычислению интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(m_{\parallel} - n)\phi} = \delta_{m_{\parallel}, n}.$$

Последующее суммирование по  $n$  и переопределение  $\omega$  ( $\omega \rightarrow \omega - n\omega'_0 \Delta p$ ) приводят к системе несвязанных уравнений для гармоник функции распределения ( $\omega_{mn} = \mathbf{m}_{\perp} \omega_{\perp} - n\omega_0(\Delta p)$ )

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{mn}) f_{\mathbf{m},n} &= N e^2 \left( \mathbf{m}_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_{\perp}} + \frac{n}{R_0} \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \\ &\times \int d^2 I_{\perp 2} d\Delta p_2 \{ G_{n,n}(1, 2, \omega) \}_{\mathbf{m}_{\perp}, \mathbf{m}_{\perp}} f_{\mathbf{m},n}(\mathbf{I}_{\perp 2}, \Delta p_2, \omega). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что если  $\epsilon$  – характерный поперечный эмиттанс пучка,  $\sigma_p$  – разброс импульсов в пучке, а  $f_0$  является плавной функцией своих аргументов, то для большинства накопителей выполняется условие

$$\epsilon \ll R_0 \frac{\sigma_p}{p}.$$

В такой области параметров и для номеров азимутальных гармоник колебаний  $n$ , которые удовлетворяют неравенству

$$|n| \ll |\mathbf{m}_{\perp}| \frac{R_0 \sigma_p}{\epsilon p},$$

мы можем упростить полученное интегральное уравнение, опустив в его правой части слагаемое, пропорциональное множителю

$$\frac{n}{R_0} \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p}.$$

В результате приходим к интегральному уравнению, описывающему поперечные когерентных колебаний несгруппированного пучка в длинноволновом приближении:

$$(\omega - \omega_{mn})f_{\mathbf{m},n} = Ne^2 \left( \mathbf{m}_\perp \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_\perp} \right) \quad (3.23)$$

$$\times \int d^2 I_{\perp 2} d\Delta p_2 \{G_{n,n}(1, 2, \omega)\}_{\mathbf{m}_\perp, \mathbf{m}_\perp} f_{\mathbf{m}_\perp, n}(\mathbf{I}_{\perp 2}, \Delta p_2, \omega).$$

Ядро уравнения (3.23) диагонально по индексам  $\mathbf{m}$  и  $n$ . Поэтому различные комбинации чисел  $\mathbf{m}_\perp$  и  $n$  определяют различные типы, или моды, коллективных колебаний несгруппированного пучка. Согласно уравнению (3.15) в продольном направлении эти моды распространяются по пучку вдоль или против его средней скорости. Длина волны колебаний вдоль замкнутой орбиты равна  $\Pi/n$ . Ввиду непрерывности пучка взаимодействие с наведенными полями заведомо обеспечивают замыкание обратных связей колебаний всех его частиц. Следовательно, собственные решения интегральных уравнений (3.23) существуют всегда. Моды колебаний, распространяющиеся вдоль движения пучка, называются быстрыми, а распространяющиеся против движения пучка называются медленными.

Поскольку числа  $\mathbf{m}_\perp$  являются номерами гармоник фаз бетатронных колебаний функции распределения  $f$ , они определяют геометрию и направление распространения моды в фазовом пространстве бетатронных колебаний. По этой причине числа  $\mathbf{m}_\perp$  называют номерами мультипольности бетатронных когерентных колебаний. Так набору  $\sum_\alpha |m_\alpha| = 1$  соответствуют дипольные моды, набору  $\sum_\alpha |m_\alpha| = 2$  – квадрупольные,  $\sum_\alpha |m_\alpha| = 3$  – секступольные и так далее.

Для вычисления зависимостей гармоник  $f_m(t)$  от времени в уравнении (3.18) следует удержать слагаемое, описывающее начальные условия:

$$\left( \frac{\partial f_m}{\partial t} \right)_\omega = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_m}{\partial t} = -f_m(I, 0) - i\omega f_m(\mathbf{I}, \omega), \quad (3.24)$$

где  $f_m(I, 0) = f_m(I, t = 0)$  – начальное значение гармоники  $f_m$ . В этом случае уравнения (3.18) и (3.21) заменяются неоднородными интегральными уравнениями ( $\Delta\omega_m = \omega - \omega_{mn}$ )

$$\Delta\omega_m f_m^\omega = i f_m(\mathbf{I}, 0) + Ne^2 \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d^3 I_2 K_0(1, 2, \omega) f_m^\omega. \quad (3.25)$$

Поскольку входящие в (3.24) интегралы должны сходиться в том числе и для нарастающих решений, переменная  $\omega$  в уравнениях (3.24) и (3.25) должна удовлетворять условию  $\text{Im}\omega > \delta_{max}$ , где  $\delta_{max}$  – значение инкремента наиболее неустойчивой моды. Расширение области определения решений, например (3.25), на более широкие области в плоскости комплексной переменной  $\omega$  должно производиться аналитическим продолжением соответствующих функций.

После решения уравнений (3.25) амплитуды  $f_m(\mathbf{I}, t)$  находятся обратным преобразованием Фурье:

$$f_m(I, t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_m(I, \omega), \quad \text{Im}\omega > \delta_{max}.$$

Поле пучка в вакуумной камере накопителя всегда является суммой его кулоновского поля и тех полей, которые наводятся пучком в стенках камеры и окружающих его электродах. Характерные масштабы изменений кулоновской части поперечных наведенных полей при изменениях поперечных к замкнутой орбите координат частиц определяются поперечными размерами пучка. Такие поля фигурируют, например, в задаче об устойчивости когерентных колебаний встречных пучков. Помимо этого, необходимость учета кулоновских полей пучка может оказаться важной в задачах об устойчивости пучков с нерелятивистскими энергиями частиц или в задачах об устойчивости колебаний частиц в пучках с предельно малыми значениями эмиттансов. В таких случаях вычисление решений основного интегрального уравнения значительно усложняется и может потребовать применения численных методов.

При релятивистских энергиях частиц действие кулоновских полей пучка на движение его частиц подавлено в  $\gamma^2$  раз. Возмущения же движения частиц полями, наведенными в окружающих пучок электродах, обычно не содержат такой малости. Поэтому они оказывают наиболее существенное влияние на устойчивость колебаний пучка. Функции Грина таких полей представляются хорошо сходящимися рядами Тэйлора по степеням поперечных отклонений частиц от замкнутой орбиты  $\mathbf{r}_\perp$ . Это связано с тем, что заряды-изображения в таких задачах удалены от пучка на поперечные расстояния, примерно равные радиусу поперечного сечения вакуумной камеры, который существенно превышает поперечные размеры пучка. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить вычисление гармоник  $G$  по фазам бетатронных колебаний. Действительно, для любой функции вида

$$X(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \frac{\partial^l X}{\partial x^l}, \quad x = \sqrt{J_x \beta_x} \cos(\psi_x + \chi_x(\theta)),$$

где производные вычисляются в точке  $x = 0$ , мы можем написать

$$X_m = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x}{2\pi} e^{-im_x \psi_x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l X}{\partial x^l} \left( \frac{J_x \beta_x}{2} \right)^{l/2} \times \\ \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} \exp\{i(l-2k)(\psi_x + \chi_x(\theta))\}.$$

Используя

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(i[l-2k-m]\psi) = \delta_{l,m+2k},$$

пишем (для определенности положим, например,  $m_x > 0$ )

$$X_m = \left( \frac{\sqrt{J_x \beta_x}}{2} e^{i\chi_x(\theta)} \right)^{m_x} \left\{ \frac{1}{m_x!} \frac{\partial^{m_x} X}{\partial x^{m_x}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{J_x \beta_x} e^{i\chi_x} / 2)^{2k}}{k!(m_x + k)!} \frac{\partial^{m_x+2k} X}{\partial x^{m_x+2k}} \right\}.$$

Если характерный масштаб изменения  $X$  по переменной  $x$  определяется величиной  $l_\perp$  (например, это может быть радиус вакуумной камеры), а  $a = \sqrt{J\beta} \ll l_\perp$ , то,

оценивая величину  $\partial^m X/\partial x^m$  посредством  $\partial^m X/\partial x^m \approx X/(l_\perp)^m$  и пренебрегая в  $X_m$  поправками порядка  $(a/l_\perp)^2 \ll 1$ , получаем

$$X_m = \left( \frac{\sqrt{J_x \beta_x}}{2} e^{i\chi_x(\theta)} \right)^{m_x} \frac{1}{m_x!} \frac{\partial^{m_x} X}{\partial x^{m_x}}. \quad (3.26)$$

Таким образом, в задачах о взаимодействии пучка с электродами функции  $G_{mn}(1, 2, \omega)$  имеют следующую зависимость от амплитуд поперечных колебаний частиц:

$$G_{mn}(1, 2, \omega) \simeq (I_x I'_x)^{m_x/2} (I_y I'_y)^{m_y/2} g_{mn}(\omega), \quad (3.27)$$

где функция  $g_{mn}(\omega)$  выражается через производные  $G_{mn}(1, 2, \omega)$  на равновесной орбите.

Если добротность электродов такова, что величину  $\omega$  в аргументе функции  $g_{mn}(\omega)$  можно заменить невозмущенным значением  $\omega = \omega_{mn}$ , то уравнение (3.23) может быть решено точно. Для поперечных колебаний ( $m_x^2 + m_y^2 \neq 0$ ) пишем

$$f_{mn} = C_{mn} \frac{I_x^{m_x/2} I_y^{m_y/2}}{\omega - \omega_{mn}} \left( \mathbf{m}_\perp \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_\perp} \right), \quad m_\perp^2 \neq 0. \quad (3.28)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3.23) и отбрасывание в (3.23) поправок порядка  $(a/l_\perp)^2$  приводит к дисперсионному уравнению

$$0 = \varepsilon_{mn}(\omega) = 1 - \frac{\Omega_{mn}}{\mathcal{A}_m} \int d^2 I_\perp d\Delta p \frac{I_x^{|m_x|} I_y^{|m_y|} (\mathbf{m}_\perp \partial F / \partial \mathbf{I}_\perp)}{\omega - \omega_{mn}(\mathbf{I}_\perp, \Delta p)}. \quad (3.29)$$

Здесь

$$\mathcal{A}_m = \int d^2 I_\perp d\Delta p I_x^{|m_x|} I_y^{|m_y|} \left( \mathbf{m}_\perp \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_\perp} \right), \quad (3.30)$$

а

$$\Omega_{mn} = -N e^2 \mathcal{A}_m g_{mn}(\omega_{mn}). \quad (3.31)$$

Решение дисперсионного уравнения (3.29) особенно упрощается для случая монохроматического пучка, когда частоты  $\omega_{mn}$  в интеграле в правой части уравнения (3.29) не зависят от  $\mathbf{I}_\perp$  и  $\Delta p$ . При этом частотный знаменатель в (3.29) выносится из-под знака интеграла, а оставшееся выражение совпадает с  $\mathcal{A}_m$ . В результате получаем

$$\Delta \omega_{mn} = \omega - \omega_{mn} = \Omega_{mn}.$$

Таким образом, определенная в (3.31) величина  $\Omega_{mn}$  имеет смысл когерентного сдвига частоты монохроматического несгруппированного пучка. Ниже мы увидим, что эта величина носит фундаментальный характер в теории поперечных когерентных колебаний пучков, взаимодействующих с низкодобротными окружающими электродами.

Как видно из уравнений (3.30) и (3.31), для дипольных когерентных колебаний ( $m_x^2 + m_y^2 = 1$ ) значения  $\Omega_{mn}$  не зависят от поперечных размеров пучка:

$$\Omega_{mn} = N e^2 g_{mn}(\omega_{mn}), \quad \mathcal{A}_{\pm 1} = -1. \quad (3.32)$$

Для мультипольных колебаний ( $m_x^2 + m_y^2 > 1$ ) величины  $\Omega_{mn}$  экспоненциально убывают с увеличением номеров мультипольности

$$\Omega_{mn} \propto (a/l_{\perp})^{2|m|-2}.$$

Эти соотношения определяют иерархию мод колебаний различной мультипольности в их влиянии на устойчивость пучка в целом.

В монохроматическом пучке колебания неустойчивы при выполнении условия  $\text{Im}\Omega_{mn} > 0$ . Поскольку  $g(\omega)$  является Фурье-образом действительной функции, имеем

$$g^*(\omega) = g(-\omega).$$

Кроме того, для пассивных систем выполняется неравенство

$$\omega \text{Im}g(\omega) > 0.$$

Тогда, как видно из (3.31), условие устойчивости монохроматического пучка записывается в виде

$$(\mathbf{m}_{\perp} \boldsymbol{\omega}_{\perp} + n\omega_0) \mathcal{A}_m < 0. \quad (3.33)$$

Для одномерных бетатронных колебаний (например,  $m_x = 0$ ) это условие приобретает особенно простой вид

$$m_y(m_y \mathbf{v}_y + n) > 0. \quad (3.34)$$

В этих выражениях слагаемые, пропорциональные  $n$ , описывают возбуждение наведенных полей продольным движением частиц. Видно, что для монохроматического пучка эти слагаемые меняют знаки декрементов колебаний при  $n = -m_y \mathbf{v}_y$ . По этой причине, использование пассивных систем не может обеспечить одновременного подавления всех мод такого пучка.

Устойчивость мод с  $m_{x,y}n < 0$  может обеспечиваться, например, затуханием Ландау. Как видно из уравнения (3.29), разброс частот поперечных колебаний частиц может вызываться зависимостями частот бетатронных колебаний частиц от их амплитуд или зависимостями частот бетатронных колебаний частиц от их импульсов. В последнем случае мы пишем

$$\omega_y = \omega_{y0} + \frac{d\omega_y}{dp} \Delta p,$$

где  $\omega_{y0}$  – частота бетатронных колебаний частицы с импульсом, который выбран в пучке в качестве центрального, а

$$\frac{d\omega_y}{dp} = \omega_{y0} \left( 1 + \frac{d \ln \omega_0}{dp} + \frac{d \ln \mathbf{v}_y}{dp} \right).$$

Напомним, что величина  $d \ln \mathbf{v}_y / dp$  называется хроматизмом вертикальных бетатронных колебаний кольца.

С таким разбросом частот уравнение (3.29) записывается в виде ( $f_0 = F(I_y) f(\Delta p)$ ):

$$\varepsilon_{mn}(\omega) = 1 - \Omega_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p f(\Delta p)}{\Delta \omega_{mn} - \kappa \Delta p} = 0, \quad \Delta \omega_{mn} = \omega - \omega_{mn}(0), \quad (3.35)$$

$$\text{Im} \Delta \omega_{mn} > 0, \quad \kappa = n \frac{d\omega_0}{dp} + m_y \frac{d\omega_y}{dp}.$$

Последнее уравнение может использоваться как для вычисления собственных частот колебаний, так и для построения границ областей устойчивости (например, рис. 10):

$$\Omega_{mn}(\Delta\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}(\Delta\omega) - iJ(\Delta\omega)}, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{P}(\Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p f(\Delta p)}{\Delta\omega - \kappa\Delta p}, \quad J(\Delta\omega) = \pi f(\Delta\omega/\kappa)/|\kappa|.$$

Присутствие в распределении импульсов частиц нескольких максимумов может при-

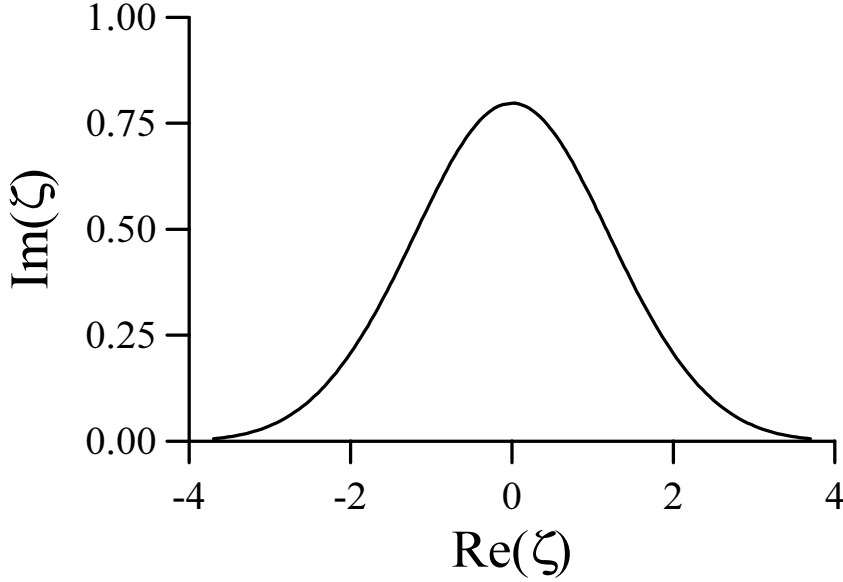


Рис. 10. Граница области устойчивости дипольных поперечных колебаний для случая, когда разброс частот обусловлен разбросом импульсов в пучке. Первая гармоника частоты обращения; распределение импульсов в пучке гауссово ( $\zeta = \Omega_m/|\kappa|\sigma$ ,  $\sigma$  – разброс импульсов в пучке)

водить к многопоточности неустойчивостей поперечных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Помимо этого, к многопоточным неустойчивостям могут приводить разбросы частот бетатронных колебаний частиц из-за октупольной нелинейности фокусировки кольца и присутствия нескольких максимумов в распределении частиц по амплитудам бетатронных колебаний частиц. Смещение максимума распределения по амплитудам бетатронных колебаний частиц из начала координат может приводить к антизатуханию Ландау поперечных бетатронных когерентных колебаний несгруппированного пучка (например, в [6]).



### 3.3. Продольные когерентные колебания несгруппированного пучка

Для продольных колебаний несгруппированного пучка  $m_x = m_y = 0$  уравнение (3.23) записывается в виде ( $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0(p)$ )

$$\Delta\omega_n f_n = Ne^2 \frac{n}{R_0} \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int d\Gamma'_\perp d\Delta p' G_n(1, 2, \omega) f_n(\Delta p', \omega). \quad (3.37)$$

Как уже говорилось, если зависимости функций Грина от амплитуд бетатронных колебаний являются достаточно гладкими, вычисление гармоник  $G$  по фазам поперечных колебаний проводится разложением  $G$  в ряды Тэйлора по поперечным координатам. В старшем приближении по  $a/l_\perp$  это приводит к замене в (3.37) величины  $G_n(1, 2, \omega)$  ее значением на замкнутой орбите. Если это значение не равно нулю, то уравнение (3.37) записывается в виде

$$\Delta\omega_n f_n = Ne^2 \frac{n}{R_0} G_n(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' d\Gamma'_\perp f_n. \quad (3.38)$$

Теперь заметим, что в этом уравнении коэффициент перед  $N\partial f_0/\partial \Delta p$  является Фурье-гармоникой скобки Пуассона  $i[\tilde{L}, \Delta p]$ . Поскольку в отсутствие возмущений  $\Delta p$  является интегралом движения, последнее выражение можно записать в виде

$$-i\overline{[H, \Delta p]_{n,\omega}} = -\frac{i}{v_s} \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{n,\omega}} = -ie\overline{E_\theta(\mathbf{r}_0(t), t)_{n,\omega}}. \quad (3.39)$$

Используя это выражение, мы можем переписать (3.38) в двух эквивалентных формах:

$$\Delta\omega_n f_n = \frac{Ne^2\omega}{v_s} G_n(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' d\Gamma'_\perp f_n \quad (3.40)$$

либо

$$\Delta\omega_n f_{n\omega} = -ieE_\theta(n, \omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p}. \quad (3.41)$$

Здесь

$$f_{n\omega}(\Delta p) = \int d\Gamma'_\perp f_{n\omega}(\Delta p, \Gamma'_\perp)$$

– функция распределения пучка по импульсам. Подстановка в (3.41) соотношения

$$E_\theta(n, \omega) = -\frac{Ne\omega_0 Z_n(\omega)}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p) \quad (3.42)$$

и сравнение уравнений (3.40) и (3.41) позволяет связать гармоники функции Грина  $G_{nn}(\omega)$  с импедансом связи  $Z_n(\omega)$

$$\frac{iZ_n(\omega)}{n} = \frac{2\pi}{\omega_0} G_n(\omega), \quad (3.43)$$

или, что то же,

$$\frac{iZ_n(\omega)}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_s^2} G_n(\omega). \quad (3.44)$$

### 3.4. Поперечный импеданс связи

Понятие импеданса связи может быть также использовано при исследовании устойчивости поперечных колебаний. Рассмотрим для простоты случай дипольных вертикальных колебаний, когда  $f_{m,n}$  удовлетворяет уравнению (3.23) ( $m_x = 0$ ,  $m_y = \pm 1$ ):

$$(\omega - \omega_{m,n})f_{m,n} = Ne^2 m_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int d\Delta p' dI'_y dI'_x G_{m,n}(1, 2, \omega) f_{m,n}. \quad (3.45)$$

Вообще, величина  $G_{m,n}$  содержит слагаемые двух видов. Выражение

$$G_{\parallel} = \frac{v^2}{c^2} G_{0,0} - G_{0,0} \quad (3.46)$$

описывает эффекты, связанные с возбуждением полей продольным движением пучка. Остальные слагаемые в  $G$  описывают возбуждение полей поперечными токами пучка ( $\mathbf{j}_{\perp}$ ) и реакцию пучка на эти поля. Если вкладом поперечных токов можно пренебречь, то гармоники  $G_{m,n}$  записываются в виде

$$G_{m,n} = \frac{R_0}{2p\nu_y} \sqrt{I_y I'_y} \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} G_n(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_{\perp}=0} \right).$$

Подстановка этого выражения в (3.45) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{mn})f_{m,n} &= \frac{Ne^2 R_0}{2p\nu_y} m_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \sqrt{I_y} \\ &\times \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} G_n(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_{\perp}=0} \right) \int d\Delta p' dI'_y dI'_x \sqrt{I'_y} f_{m,n}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

С другой стороны, если поперечные колебания частиц пучка не связаны, а возмущения колебаний частиц наведенными полями описывается силой  $\mathbf{F}$ , то, например, для вертикальных колебаний пишем:

$$\dot{I}_y = \frac{\partial y}{\partial \psi_y} F_y.$$

Поэтому

$$(\omega - \omega_{m,n})f_{m,n} = m_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} (y)_m \overline{(F_y)_n(\omega)}, \quad (y)_m = \sqrt{\frac{R_0 I_y}{2p\nu_y}}. \quad (3.48)$$

В этом уравнении сила  $F_y$  описывает возмущения колебаний частиц наведенными полями. По аналогии с уравнениями (3.41) и (3.42) мы определим функцию  $\overline{(F_y)_n(\omega)}$  следующим выражением:

$$\overline{(F_y)_n(\omega)} = -i \frac{Ne^2 \omega_0 Z_n^{\perp}(\omega)}{\Pi} (d_y(\omega))_{m,n}, \quad (3.49)$$

в котором величины ( $m_y = \pm 1$ )

$$(d_y(\omega))_{m,n} = \int d\Delta p' dI'_y dI'_x \sqrt{\frac{R_0 I'_y}{2p\nu_y}} f_{m,n}(\omega) \quad (3.50)$$

являются гармониками вертикальной координаты центра тяжести (центроида) пучка, а функция  $Z_n^\perp(\omega)$  играет ту же роль, что и импеданс связи в задачах об устойчивости продольных колебаний. Такая функция называется поперечным импедансом связи пучка с окружающими электродами. Используя определение (3.49), мы можем переписать уравнение (3.48) в виде

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{m,n}) f_{m,n} &= -im_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \frac{Ne^2 R_0}{2p\nu_y} \sqrt{I_y} \\ &\times \frac{\omega_0 Z_n^\perp(\omega + n\omega_0)}{\Pi} \int d\Delta p' dI'_y dI'_x \sqrt{I'_y} f_{m,n}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Сравнение уравнений (3.47) и (3.51) позволяет выразить поперечный импеданс связи  $Z_n^\perp(\omega)$  через производные функции Грина наведенных полей на равновесной орбите:

$$Z_n^\perp(\omega) = i \frac{2\pi R_0}{\omega_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} G_n(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_\perp=0} \right). \quad (3.52)$$

Используя (3.44) мы можем связать  $Z_n^\perp$  с продольным импедансом ( $Z_n^\parallel$ )

$$Z_n^\perp(\omega) = \frac{-v}{\omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} Z_n^\parallel(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_\perp=0} \right). \quad (3.53)$$

Для камеры с сечением, близким к круговому, оценка производных по порядку величины дает

$$Z_n^\perp(\omega) \simeq \frac{v}{l_\perp^2} \left( \frac{-Z_n^\parallel(\omega)}{\omega} \right). \quad (3.54)$$

Эти выражения позволяют выразить когерентный сдвиг частоты дипольных поперечных колебаний несгруппированного монохроматического пучка через поперечный импеданс связи. Простые вычисления с использованием уравнения (3.51):

$$f_{m,n} \propto \sqrt{I_y} \frac{\partial f_0}{\partial I_y},$$

$$\begin{aligned} \omega - \omega_{m,n} &= -im_y \frac{Ne^2 R_0}{2p\nu_y} \frac{\omega_0 Z_n^\perp(\omega_{m,n})}{\Pi} \int d\Delta p dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \\ &= im_y \frac{Ne^2 \omega_0}{4\pi p\nu_y} Z_n^\perp(\omega_{m,n}) \end{aligned}$$

приводят к выражению

$$\Omega_{mn}(\omega) = im_y \frac{Ne^2 \omega_0}{4\pi p\nu_y} Z_n^\perp(\omega). \quad (3.55)$$

Используя оценку (3.54), мы также можем переписать это выражение в терминах продольного импеданса связи

$$\Omega_{mn}(\omega) = m_y \frac{Ne^2 \omega_0 v}{4\pi p v_y l_\perp^2} \left( \frac{-iZ_n^\parallel(\omega)}{\omega} \right). \quad (3.56)$$

Как и следовало ожидать, величина когерентного сдвига частоты моды ( $\text{Re}\Omega_{mn}$ ) определяется реактивной, а величина инкремента ( $\text{Im}\Omega_{mn}$ ) – активной частью импеданса связи.

### 3.5. Колебания частиц и дипольные поперечные колебания

Воспользовавшись уравнениями (3.48) и (3.50), получим уравнение для вычисления гармоник (вертикального) центроида пучка:

$$(d_y(\omega))_{m,n} = \overline{(F_y)_n(\omega)} \frac{R_0 m_y}{2p v_y} \int d\Delta p dI_x dI_y \frac{I_y (\partial f_0 / \partial I_y)}{\omega - \omega_{m,n}(\Delta p, I_x, I_y)}. \quad (3.57)$$

Если влиянием разбросов частот частиц в пучке можно пренебречь, то частотный знаменатель в (3.57) выносится из-под знака интеграла. Поэтому с учетом нормировки функции распределения  $f_0$  формула (3.57) переписывается в виде

$$(\omega - \omega_{m,n}) (d_y(\omega))_{m,n} = -\frac{R_0 m_y}{2p v_y} \overline{(F_y)_n(\omega)}. \quad (3.58)$$

Читатель легко убедится в том, что уравнения (3.57) и (3.58) получаются усреднением по пучку и выделением медленных слагаемых решений уравнений движения частиц пучка, возмущаемых силой  $F_y(\theta, t)$ . В таких расчетах флуктуационные изменения координат и импульсов частиц должны быть отнесены к быстрым процессам. Если частицы в пучке нумеруются числами  $a = 1, 2, \dots, N$ , то уравнения для вертикальных колебаний частиц и, например, в приближении сглаженной фокусировки записываются в виде:

$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} + \omega_{y,a}^2 y_a = \frac{F_y(\theta_a, t)}{\gamma M}, \quad (3.59)$$

а дипольный момент пучка определяется формулой

$$d_y(t) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N y_a(t). \quad (3.60)$$

Совпадение величины дипольного момента пучка, вычисленного решением уравнений движения частиц или решением уравнения Власова, само по себе неудивительно. В уравнение Власова наведенные поля входят как внешние по отношению к частицам пучка. В пренебрежении же рассеянием частиц на флуктуациях силы  $F_y(\theta, t)$  уравнение Власова фактически совпадает с уравнением Лиувилля. В таких условиях выбор того или иного способа вычисления дипольного момента пучка определяется исключительно удобством решения конкретной задачи.

При совпадении частот колебаний частиц ( $\omega_{y,a} = \omega_y$ ) усреднение уравнений (3.59) приводит к следующему уравнению для вертикальной компоненты дипольного момента пучка:

$$\frac{d^2 d_y}{dt^2} + \omega_y^2 d_y = \frac{\langle F_y(\theta, t) \rangle}{\gamma M}, \quad (3.61)$$

где

$$\langle F_y(\theta, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N F_y(\theta_a, t). \quad (3.62)$$

Любопытно, что эти уравнения получаются усреднением уравнений Власова с  $y$  и  $p_y$  в предположении о том, что в любой момент времени функция распределения пучка задана формулой

$$f = f_0 \left[ (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{d}_\perp(t))^2, \left( \mathbf{p}_\perp - \gamma M \frac{d\mathbf{d}_\perp(t)}{dt} \right)^2, \theta \right]. \quad (3.63)$$

Такая функция распределения описывает пучок, в котором поперечные координаты всех частиц смещены в фазовом пространстве на величину его центроида и остаются такими во все последующие моменты времени. Все изменения  $f$  сводятся к дипольным колебаниям пучка за счет изменения положения центроида пучка в фазовом пространстве. При этом форма пучка в фазовом пространстве остается неизменной. По этой причине говорят, что функции распределения (3.63) описывают пучки с жестким распределением частиц в фазовом пространстве, а уравнение (3.61) описывает (вертикальные) когерентные колебания такого жесткого пучка, или колебания в т. н. модели жесткого пучка.

Хотя по многим причинам само существование жестких пучков противоречит законам физики, простота и наглядность описания когерентных колебаний в рамках модели жесткого пучка часто делают такие расчеты весьма привлекательными. Это особенно относится к начальным стадиям изучения решений задач о колебаниях пучков с малыми величинами разбросов частот колебаний частиц. Следует постоянно помнить о внутренней противоречивости модели жесткого пучка и поэтому относиться к ее предсказаниям лишь как к очень предварительным.

## 3.6. Задачи к лекции 3

1. После удара вертикальные импульсы всех частиц в пучке смещаются на величину  $\Delta_y$ . Считая, что начальное распределение частиц в фазовом пространстве вертикальных колебаний гауссово:

$$f = \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{p_y^2}{2\sigma_p^2}\right)}{2\pi\sigma\sigma_p},$$

вычислить гармоники функции распределения по фазам колебаний.

2. Воспользовавшись линеаризованным уравнением Власова решить задачу, в которой в каждой точке орбиты частицы пучка возмущаются силой

$$F_x = -\frac{ke^2}{l_{\perp}^2 \Pi} \sum_{a=1}^N x_a,$$

где  $l_{\perp}$  – радиус вакуумной камеры, а  $k$  – положительное число. Исследовать влияние разброса частот бетатронных колебаний частиц ( $\omega_{x,a}$ ) на устойчивость пучка с таким взаимодействием частиц.

3. Выписать интегральные уравнения, описывающие спектры малых когерентных колебаний встречных пучков нулевой длины. Вычислить когерентный сдвиг частоты, например, вертикальных колебаний, предполагая удаленность  $\nu_y$  от резонансов  $\nu_y = n/m_y$  (где  $n$  и  $m_y$  – взаимно простые целые числа). В качестве  $f_0$  принять

$$f_0(I_x, I_y) = \frac{\delta(I_x)}{I_{0y}} \begin{cases} 1, & I_y \leq I_{0y} \\ 0, & I_y > I_{0y} \end{cases}.$$

## Лекция 4

# Когерентные колебания сгустков

Если пучок сгруппирован в один или несколько сгустков, то в решении задачи об устойчивости когерентных колебаний пучка появляются дополнительные параметры. Среди таких параметров одним из важных является отношение величины комплексного когерентного сдвига частоты колебаний к частоте малых синхротронных колебаний частиц. Если это отношение мало, то собственные частоты мод с синхротронными коллективными колебаниями хорошо разделены в спектрах когерентных колебаний пучка. В этом случае спектры колебаний могут вычисляться с помощью уравнения (3.21), ядро которого содержит лишь диагональные слагаемые по номерам мультипольных колебаний. Если же это не так, то колебания развиваются на временах сравнимых или существенно короче периода малых синхротронных колебаний частиц. При этом, конечно, уравнения (3.21) должны быть заменены более общей системой уравнений, учитывающей связь синхротронных мод различной мультипольности.

Помимо этого, запоминание электродами наведенных полей приводит к возмущениям колебаний частиц полями, наведенными сгустками на предыдущих оборотах, или полями, наведенными впередиидущими сгустками пучка на данном обороте при его движении вдоль замкнутой орбиты. Результат действия этих полей на когерентные колебания пучка зависит от набегов фаз колебаний частиц и наведенных полей на периодах следования сгустков в пучке. Среди прочего, это выражается в появлении дополнительных степеней свободы колебаний и соответствующих им волновых чисел мод когерентных колебаний.

### 4.1. Медленные синхробетатронные колебания

Начнем с изучения одного из простейших случаев, когда вычисляются условия устойчивости когерентных колебаний одиночного сгустка. Кроме того, для простоты предположим, что наведенные пучком поля затухают существенно быстрее периода обращения частиц в машине. Если пучок состоит из нескольких сгустков, то время затухания должно быть существенно меньше периода следования сгустков.

В этом разделе мы предполагаем, что декременты когерентных колебаний малы по сравнению с частотами синхротронных колебаний частиц. В таком случае справедливо уравнение (3.21), ядро которого выражается через гармоники фаз синхро-

тронных колебаний с одним и тем же значением номера мультипольности когерентных синхротронных колебаний  $m_c$ . При этом, поскольку скорости изменений фаз, например вертикальных бетатронных колебаний несинхронных частиц, равны:

$$\frac{d\psi_y}{dt} = \omega_y(p_s) + \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial p} \right)_s \Delta p,$$

а

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial p} \right)_s \Delta p,$$

пишем

$$\frac{d\psi_y}{dt} = \omega_{sy} + \frac{d\phi}{dt} \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial p} \right)_s,$$

или

$$\psi_y = \psi_y^s + \frac{d\omega_y}{d\omega_0} \phi.$$

Таким образом, в пренебрежении модуляцией  $\theta$  бетатронными колебаниями частиц ядро уравнения (3.21) выражается через гармоники фаз синхротронных колебаний от выражений

$$\exp \left[ \pm i \left( n + \mathbf{m}_\perp \frac{d\boldsymbol{\omega}_\perp}{d\omega_0} \right) \phi \right].$$

Если амплитуды синхротронных колебаний малы, то  $\phi = \varphi \cos \psi_c$ , а соответствующие интегралы совпадают с функциями Бесселя [9]

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_c}{2\pi} \exp(-im_c\psi_c \pm in_1\phi) = i^{\pm m_c} J_{m_c}(n_1\varphi),$$

где

$$n_1 = n + \mathbf{m}_\perp \frac{d\boldsymbol{\omega}_\perp}{d\omega_0}.$$

Совместно с формулой (3.27) это дает следующее выражение для  $G_{mn}$

$$G_{mn} \simeq (I_x I'_x)^{m_x/2} (I_y I'_y)^{m_y/2} g_{mn}(\omega_{mn}) J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi').$$

Поэтому ядро интегрального уравнения (3.21) оказывается нефакторизованным по амплитудам синхротронных колебаний частиц. Оно описывает связь когерентных колебаний, распространяющихся по и против движения сгустка. Кроме того, из-за хроматичности фокусирующих полей машины указанная связь зависит от модуляции фаз бетатронных колебаний синхротронными колебаниями частиц. Все эти обстоятельства изменяют условия устойчивости когерентных колебаний сгустков по сравнению с теми, которые получались для когерентных колебаний несгруппированного пучка. В частности, в зависимости от хроматизма фокусировки собственные моды поперечных когерентных колебаний могут оказываться устойчивыми или неустойчивыми. На такую возможность указали в 1969 г. К. Пеллегрини [10] и М. Сэндс [11].



В соответствии со сказанным будем искать решения (3.21) в виде

$$f_m = \frac{I_x^{m_x/2} I_y^{m_y/2}}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}} \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \chi_m(\varphi). \quad (4.1)$$

В зарубежной литературе собственные функции  $\chi_m(\varphi)$  принято теперь называть радиальными модами. Этим подчеркивается то обстоятельство, что  $\chi_m(\varphi)$  описывают распределение моды по «радиусу» в фазовом пространстве синхротронных колебаний.

Предполагая, что функция распределения в стационарном состоянии может быть представлена произведением

$$f_0(I_\perp, I_c) = F_0(I_\perp) \rho(\varphi),$$

где  $\rho(\varphi)$  – распределение по амплитудам синхротронных колебаний, из (3.21) находим интегральное уравнение для гармоник линейной плотности пучка ( $\chi_m$ )

$$\begin{aligned} \chi_m &= \rho(\varphi) \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') \chi_m(\varphi') \\ &\times \int_0^\infty dI_x dI_y d^2 I_\perp \frac{I_x^{|m_x|} I_y^{|m_y|} (\mathbf{m}_\perp \partial F / \partial \mathbf{I}_\perp)}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_\perp, \varphi')}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_{mn}}{\mathcal{A}_m} J_{m_c}(n_1 \varphi) J_{m_c}(n_1 \varphi')$$

Для синхротронных колебаний аналогичное уравнение записывается в виде

$$\chi_m = \frac{\partial \rho}{\partial (\varphi^2/2)} \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') \frac{\chi_m(\varphi')}{\omega - m_c \omega_c(\varphi')}. \quad (4.3)$$

Из-за азимутальной несимметрии стационарного распределения частиц развитие мод  $\chi_m$ , вообще, может определяться совместным действием заметного количества азимутальных гармоник поля. По этой причине ядра уравнений (4.2) и (4.3), как уже упоминалось, не факторизуются по амплитудам синхротронных колебаний частиц, что существенно усложняет решение этих уравнений. Исследование решений полученных уравнений может быть дополнительно упрощено, если при решении задачи мы можем пренебрежем разбросом частот из-за нелинейности синхротронных колебаний. В последнем случае, в уравнении, например, (4.2) множитель

$$\int_0^\infty dI_x dI_y \frac{I_x^{|m_x|} I_y^{|m_y|} (\mathbf{m}_\perp \partial F / \partial \mathbf{I}_\perp)}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_\perp)}$$

не зависит от  $\varphi'$  и потому может быть вынесен за знак интеграла. В результате (4.2) распадается на два независимых уравнения. Первое из этих уравнений

$$\begin{aligned} \Omega_m \chi_m(\varphi) &= \rho(\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{mn} (\omega + n\omega_0) J_{m_c}(n_1 \varphi) \\ &\times \int_0^\infty d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1 \varphi') \chi_m(\varphi') \end{aligned} \quad (4.4)$$

определяет собственные моды и спектр собственных частот поперечных когерентных колебаний монохроматического сгустка. Второе уравнение

$$\varepsilon_m(\omega) = 1 - \frac{\Omega_m}{\mathcal{A}_m} \int_0^\infty dI_x dI_y \frac{I_x^{|m_x|} I_y^{|m_y|} (\mathbf{m}_\perp \partial F / \partial \mathbf{I}_\perp)}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_\perp)} = 0 \quad (4.5)$$

является дисперсионным уравнением, которое по уже найденным собственным числам  $\Omega_m$  позволяет вычислять собственные частоты мод  $\omega$ . Входящие в эти уравнения величины  $\mathcal{A}_m$  и  $\Omega_{mn}$  определены в (3.30) и (3.31).

Уравнение (4.4) описывает связь поперечных когерентных колебаний частиц с амплитудами синхротронных колебаний  $\varphi$  и  $\varphi'$ . Результат такой связи зависит от вида распределения  $\rho(\varphi)$ . Так, если все частицы сгустка имеют одну и ту же амплитуду синхротронных колебаний  $\varphi = \varphi_0$ , то функция  $\rho(\varphi)$  записывается в виде

$$\rho(\varphi) = \delta\left(\frac{\varphi^2 - \varphi_0^2}{2}\right). \quad (4.6)$$

В таком случае решения уравнения (4.4) пропорциональны  $\delta(\varphi - \varphi_0)$ . Они равны нулю для всех частиц с амплитудами  $\varphi \neq \varphi_0$ . Поэтому упоминавшаяся связь колебаний в точках  $\varphi$  и  $\varphi'$  отсутствует. Подстановка в (4.4) решений

$$\chi(\varphi) \propto \delta\left(\frac{\varphi^2 - \varphi_0^2}{2}\right) \quad (4.7)$$

приводит к соотношению

$$\Omega_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{mn}(\omega + n\omega_0) J_{m_c}^2(n_1 \varphi_0). \quad (4.8)$$

Эти формулы существенно упрощают вычисления величин когерентных сдвигов частоты и инкрементов поперечных когерентных колебаний. Поэтому они часто используются для качественной оценки величин  $\Omega_m$ . Распределению (4.6) соответствует линейная плотность сгустка

$$\lambda(\phi) = \frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{\varphi_0^2 - \phi^2}}, \quad |\phi| \leq \varphi_0, \quad \lambda(\phi) = 0, \quad |\phi| > \varphi_0. \quad (4.9)$$

По этой причине модель, использующую распределение (4.6), называют моделью полого сгустка. Спектры собственных значений уравнения (4.4), предсказываемые этой моделью, неустойчивы относительно добавления к распределению (4.6) дополнительных  $\delta$ -образных слагаемых. Так, если вместо (4.6) записать

$$\rho(\varphi) = \sum_{k=0}^M \rho_k \delta\left(\frac{\varphi^2 - \varphi_k^2}{2}\right), \quad (4.10)$$

где

$$\sum_{k=0}^M \rho_k = 1,$$

то уравнение (4.4) превращается в систему  $M$  однородных алгебраических уравнений:

$$\Omega_m \chi_k = \sum_{k'=0}^M \rho_{k'} \chi_{k'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{mn} (\omega + n\omega_0) J_{m_c}(n_1 \varphi_k) J_{m_c}(n_1 \varphi_{k'}) \quad (4.11)$$

для векторов  $\chi_k$  таких, что

$$\chi(\varphi) = \sum_{k=0}^M \chi_k \delta\left(\frac{\varphi^2 - \varphi_k^2}{2}\right). \quad (4.12)$$

В невырожденных случаях число собственных решений такой системы в точности равно  $M$ . Это означает, что размывание максимума распределения в модели полого пучка, например,  $M$  максимумами приводит к расщеплению линии спектра  $\Omega_m$ , рассчитанной по формуле (4.8), на  $M$  компонент. В свою очередь, это означает, что для непрерывных и несингулярных распределений  $\rho(\varphi)$  спектры собственных решений уравнения (4.4) содержат для каждого набора номеров мультипольности  $\mathbf{m}$  бесконечное число собственных решений. Номера таких решений уникальны для каждого вида колебаний (моды). Они дискретны и характеризуют число корней заданной собственной функции на интервале  $0 \leq \varphi < \infty$ .

Важным свойством интегрального уравнения (4.4) является возможность преобразования ядра этого уравнения в симметричное. Для этого используется подстановка  $\chi_m = w(\varphi) \sqrt{\rho/\varphi}$ , после которой уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} \Omega_m w(\varphi) &= \int_0^{\infty} d\varphi' K(\varphi, \varphi') w(\varphi'), \quad (4.13) \\ K(\varphi, \varphi') &= \sqrt{\varphi \varphi' \rho(\varphi) \rho(\varphi')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{m,n} J_{m_c}(n_1 \varphi) J_{m_c}(n_1 \varphi'). \end{aligned}$$

В силу симметрии ядра  $K(\varphi, \varphi') = K(\varphi', \varphi)$ , так называемое союзное к (4.13) интегральное уравнение

$$\Omega'_m w^*(\varphi) = \int_0^{\infty} d\varphi' K^*(\varphi, \varphi') w^*(\varphi') \quad (4.14)$$

получается комплексным сопряжением уравнения (4.13), а его собственные числа комплексно сопряжены  $\Omega_m$ :

$$\Omega'_m = \Omega_m^* \quad (4.15)$$

Действительно, умножая обе части в (4.13) на  $w^*$  и интегрируя это уравнение по  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} \Omega_m \langle |w|^2 \rangle &= \int_0^{\infty} d\varphi d\varphi' w^*(\varphi) K(\varphi, \varphi') w(\varphi'), \\ \langle |w|^2 \rangle &= \int_0^{\infty} d\varphi |w(\varphi)|^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией  $K$ , перепишем это уравнение в виде

$$\Omega_m \langle |w|^2 \rangle = \int_0^{\infty} d\varphi d\varphi' w^*(\varphi') K(\varphi, \varphi') w(\varphi),$$

или, что то же,

$$\Omega_m \langle |w|^2 \rangle = \int_0^{\infty} d\varphi d\varphi' \operatorname{Re}\{w^*(\varphi) w(\varphi')\} K(\varphi, \varphi'). \quad (4.16)$$

Аналогично, из (4.14) получаем

$$\Omega'_m \langle |w|^2 \rangle = \int_0^\infty d\varphi d\varphi' \operatorname{Re}\{w^*(\varphi)w(\varphi')\} K^*(\varphi, \varphi'). \quad (4.17)$$

Теперь, сложение уравнений (4.16) и (4.17) дает  $\operatorname{Im}(\Omega_m + \Omega'_m) = 0$ , а их вычитание  $-\operatorname{Re}(\Omega_m - \Omega'_m) = 0$ , что доказывает утверждение уравнения (4.15).

Если числа  $\alpha$  нумеруют решения (4.13), а нормировка этих решений выбрана так, что  $\langle |w_\alpha|^2 \rangle = 1$ , то из уравнений (4.15), (4.16) и (4.17) можно получить следующее выражение для декрементов колебаний ( $\delta_{m,\alpha} = -\operatorname{Im}\Omega_{m,\alpha}$ )

$$\delta_{m,\alpha} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\Omega_{m,n} \left| \int_0^\infty d\varphi \sqrt{\varphi\rho(\varphi)} J_{m_c}(n_1\varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (4.18)$$

Для применения этой формулы необходимо знать собственные функции  $w_\alpha(\varphi)$ . Если же функции  $w_\alpha(\varphi)$  неизвестны, формула (4.18) может оказаться полезной для приближенного вычисления декрементов и когерентных сдвигов частоты мод поперечных когерентных колебаний сгустка. В таких расчетах точное решение уравнения (4.13)  $w_\alpha(\varphi)$  в формуле (4.18) заменяется некоторой пробной функцией, конкретное выражение которой выбирается исходя из особенностей решаемой задачи. Точность вычислений будет тем выше, чем ближе пробная функция к точному решению уравнения (4.13).

По условию полноты собственных решений

$$\sum_{\alpha} w_{\alpha}^*(\varphi') w_{\alpha}(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi'),$$

сумма декрементов мод  $\sum_{\alpha} \delta_{m,\alpha}$ , как и должно быть, совпадает с мнимой частью следа ядра  $K$ :

$$\sum_{\alpha} \delta_{m,\alpha} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\Omega_{m,n} \int_0^\infty d\varphi \varphi \rho(\varphi) J_{m_c}^2(n_1\varphi).$$

## 4.2. Однооборотные и многооборотные эффекты

Для корректного выделения в ядре уравнения (4.4) слагаемых, описывающих запоминание наведенных полей, нам нужна некоторая формальная процедура. Она может быть основана на использовании формулы суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn b(n) \exp(2\pi i l n). \quad (4.19)$$

Для определенности, проведем вычисления для синхробетатронных мод когерентных колебаний пучка. Тогда подстановка выражения (4.19) в (4.4) приводит к интегральному уравнению

$$\Omega_m \chi_m(\varphi) = \rho(\varphi) \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') \chi_m(\varphi'), \quad (4.20)$$

ядро которого представляется суммой двух слагаемых:

$$K(\varphi, \varphi') = K_{st}(\varphi, \varphi', \omega) + K_{mt}(\varphi, \varphi', \omega), \quad (4.21)$$

где

$$K_{st}(\varphi, \varphi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{m,n}(n\omega_0 + \omega) J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi'), \quad (4.22)$$

а

$$K_{mt} = \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \exp(2\pi i l n) \Omega_{m,n}(n\omega_0 + \omega) J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi'). \quad (4.23)$$

Для выяснения физического смысла слагаемых  $K_{st}$  и  $K_{mt}$  заметим, что правая часть уравнения (4.20) является Фурье-амплитудой выражения

$$W = \sum_n g_{mn}(\omega + n\omega_0) \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} e^{in(\phi - \phi')} f(\Delta p', \phi', \omega).$$

Для упрощения вычислений примем, что длина устройства, с которым взаимодействует пучок, мала и потому функция  $g_{mn}(\omega + n\omega_0)$  может быть заменена на  $g_m(\omega + n\omega_0)$ . При этом согласно (4.19) слагаемому  $K_{mt}$  соответствуют часть  $W$ , равная

$$\begin{aligned} W_{mt} &= \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \exp(2\pi i l n) g_m(\omega + n\omega_0) \\ &\times \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} e^{in(\phi - \phi')} f(\Delta p', \phi', \omega). \end{aligned}$$

Поскольку согласно принципу причинности  $g_{mn}(\omega)$  является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ , слагаемые с  $l > 0$  не дают вклада в  $W_{mt}$ . Вклады слагаемых с  $l < 0$  определяются особенностями  $g(\omega)$  в нижней полуплоскости. Принимая для простоты, что такой особенностью является простой полюс в  $\omega = \Omega_k$

$$g_m(\omega) = \frac{\mathcal{G}_k}{\omega - \Omega_k}, \quad \Omega_k = \omega_k + i\lambda_k,$$

получим ( $\nu = \omega/\omega_0$ )

$$\begin{aligned} W_{mt} &= -2\pi i \mathcal{G}_{\parallel} \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} e^{-i\nu(\phi - \phi')} f(\Delta p', \phi', \omega) \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \exp \left[ i\Omega_k \left( \frac{\phi - \phi'}{\omega_0} - lT_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Замечая теперь, что  $\phi = \theta - \omega_0 t$ , мы можем переписать последнее выражение в виде суммы вкладов полей, наведенных пучком на оборотах, предшествовавших данному:

$$\begin{aligned} W_{mt} &= \sum_{l=1}^{\infty} \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} W(\phi - \theta' + \omega_0[t - lT_0]) f(\Delta p', \phi', \omega), \\ W(\phi) &= -2\pi i \mathcal{G}_{\parallel} e^{i\phi\Omega_k/\omega_0} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что слагаемые  $W_{mt}$  и, соответственно,  $K_{mt}$  описывают запоминание наведенных полей внешней системой. По существующей терминологии, вызываемые ими эффекты называются многооборотными. Если  $\text{Im}\Omega_k T_0 \gg 1$ , то в первом приближении вкладом монооборотных эффектов можно пренебречь. При этом уравнение (4.4) принимает вид

$$\Omega_m \chi_m(\varphi) = \rho(\varphi) \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K_{st}(\varphi, \varphi', \omega) \chi_m(\varphi'). \quad (4.24)$$

Такое уравнение описывает однооборотные эффекты, т. е. эффекты, связанные с наведенными полями, которые полностью исчезают за период обращения частиц в накопителе.

### 4.3. Синхротронные когерентные колебания

Получим еще интегральное уравнение для синхротронных когерентных колебаний, пользуясь описанием наведенных полей в терминах импеданса связи (А. Н. Лебедев, 1967 [12]). В простейшем случае, когда можно пренебречь модуляциями функции Грина поперечным движением сгустка, уравнение (3.23) записывается в виде ( $\Delta\omega_m = \omega - m\omega_c$ )

$$\Delta\omega_m f_m = Ne^2 m_c \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') f_m(\varphi'). \quad (4.25)$$

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{in\varphi}]_{m_c} G_n(\omega + n\omega_0) [e^{-in\varphi'}]_{-m_c} \quad (4.26)$$

Учитывая, что для малых синхротронных колебаний  $\phi = \varphi \cos \psi_c$ , а

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(in\varphi \cos \psi - im_c \psi) = i^{m_c} J_{m_c}(n\varphi),$$

где  $J_{m_c}(x)$  – функция Бесселя порядка  $m_c$ , перепишем ядро  $K(\varphi, \varphi')$  в виде

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m_c}(n\varphi) J_{m_c}(n\varphi') G_n(\omega + n\omega_0).$$

Заменив в этом уравнении согласно (3.44) гармоники  $G_n(\omega)$  на  $Z_n(\omega)/\omega$ , получаем искомое интегральное уравнение

$$\Delta\omega_m f_m = \frac{Ne^2 \omega_0}{2\pi} m_c \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \int_0^\infty d\varphi' \varphi' Z(\varphi, \varphi') f_m(\varphi'), \quad (4.27)$$

где

$$Z(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m_c}(n\varphi_c) J_{m_c}(n\varphi'_c) \frac{iZ_n(\omega + n\omega_0)}{(\omega/\omega_0) + n}. \quad (4.28)$$

## 4.4. Затухание Ландау за счет октупольных полей

Неустойчивость поперечных когерентных колебаний сгустка может подавляться затуханием Ландау. Однако, ввиду того что спектр малых колебаний состоит из эквидистантных линий ( $\omega_{mn} = \mathbf{m}\omega + n\omega_0$ ), требуемые разбросы частот должны обеспечиваться нелинейностью ведущих полей. Как уже говорилось, учет нелинейности синхротронных колебаний сталкивается со значительными вычислительными трудностями. По этой причине ниже мы рассмотрим более простой пример, когда синхротронные колебания считаются линейными, а нелинейность вносится специальным элементом магнитной структуры с октупольным полем:

$$H_y = B(\theta) \frac{(x^3 - 3xy^2)}{6}, \quad H_x = -B(\theta) \frac{(y^3 - 3yx^2)}{6}, \quad (4.29)$$

$$B(\theta) = \left( \frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3} \right)_{x,y=0}.$$

Если частоты бетатронных колебаний далеки от резонансных, то действие такого октуполя на движение частиц приводит к сдвигу частот колебаний на величины, пропорциональные квадратам амплитуд колебаний. Например, частота вертикальных колебаний запишется в виде

$$\omega_y(I_y, I_x) = \omega_{y0} + aI_y - bI_x, \quad ab > 0 \quad (4.30)$$

В этом случае частоты бетатронных и синхробетатронных когерентных колебаний сгустка определяются дисперсионным уравнением (4.5). Как и прежде, помимо вычисления собственных частот это дисперсионное уравнение может быть использовано для построения границ областей устойчивости колебаний. Здесь мы изучим поведение границ областей устойчивости для наиболее простого случая, когда  $m_y = 1$ , а  $m_x = m_c = 0$ . Для такой моды уравнение (4.5) записывается в виде

$$1 = -\Omega_m \int dI_x dI_y \frac{I_y \partial f_0 / \partial I_y}{\Delta\omega_m - aI_y + bI_x}, \quad \Delta\omega_m = \omega - \omega_{y0} \quad (4.31)$$

Полученное дисперсионное уравнение упрощается введением функции распределения частот в сгустке. Определив

$$g(w) = - \int dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \delta(w - aI_y + bI_x), \quad (4.32)$$

приведем уравнение (4.31) к следующему виду:

$$1 = \Omega_m \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\Delta\omega_m - w}, \quad \text{Im}\omega > 0. \quad (4.33)$$

Заметим, что введенная в (4.32) функция  $g(w)$  удовлетворяет следующему условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw g(w) = - \int dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} = \int dI_x dI_y f = 1.$$

Для конкретизации расчетов примем, что  $f$  является экспоненциальным распределением:

$$f = \frac{1}{I_{0x}I_{0y}} \exp\left(-\frac{I_y}{I_{0y}} - \frac{I_x}{I_{0x}}\right). \quad (4.34)$$

Тогда ( $\delta_y = aI_{0y}$ ,  $\delta_x = bI_{0x}$ )

$$g(w) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy y \exp(-x - y) \delta(w - \delta_y y + \delta_x x). \quad (4.35)$$

Интегрирование в (4.35) выполняется элементарно и приводит к следующему выражению для распределения плотности частот в пучке

$$g(w) = \frac{A}{\delta_x + \delta_y} \begin{cases} \exp\left(-\frac{|w|}{\delta_x}\right), & w < 0 \\ \left(1 + \frac{w}{\delta_x} + \frac{w}{\delta_y}\right) \exp\left(-\frac{w}{\delta_y}\right), & w \geq 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Здесь  $A = \delta_x / [\delta_x + \delta_y]$ .

Дисперсионное уравнение (4.33) можно использовать как для прямого вычисления собственных частот когерентных мод сгустка, так и для построения границ областей устойчивости когерентных колебаний. В первом случае следует помнить, что правая часть (4.33) записана в предположении о том, что  $\text{Im}\Delta\omega_m > 0$ . Для вычисления собственных частот устойчивых когерентных колебаний ( $\text{Im}\Delta\omega_m < 0$ ) контур интегрирования по  $w$  должен быть деформирован для получения правильного аналитического продолжения функции в правой части уравнения (4.33).

Вычисления корней дисперсионного уравнения существенно упрощаются в двух предельных случаях. В первом предполагается, что величина  $|\Omega_m|$  существенно превышает значение разброса частот колебаний частиц сгустка ( $\delta\omega_m$ ). В такой области параметров устанавливается, что значение когерентного сдвига частоты  $\Delta\omega_m$  близко к  $\Omega_m$ , а влияние затухания Ландау когерентных колебаний сводится к малому изменению величины  $\text{Im}\Delta\omega_m$  за счет обмена энергией колебаний коллективной моды и резонансных с ней частиц сгустка. Во втором предельном случае используется обратное предположение:  $\delta\omega_m \gg |\Omega_m|$ . В этой области параметров затухание Ландау заведомо подавляет развитие в сгустке неустойчивых когерентных колебаний. Декременты коллективных мод пропорциональны разбросу частот колебаний частиц сгустка. Значение коэффициента пропорциональности, вообще, велико и, возможно медленно, зависит от числа частиц в сгустке.

Уравнение границы области устойчивости когерентных колебаний получается устремлением в (4.33) параметра  $\Delta\omega_m$  к действительной оси сверху. Учитывая, что при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\Delta\omega_m - w + i0} = \mathcal{P}(\Delta\omega_m) - i\pi g(\Delta\omega_m),$$

где

$$\mathcal{P}(\omega) = \oint_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\omega - w}, \quad (4.37)$$



а знак  $\int$ , как и прежде, означает вычисление интеграла в смысле главного значения, получим уравнение граничной кривой

$$\zeta(\Delta\omega_m) = \frac{1}{\mathcal{P}(\Delta\omega_m) - i\pi(\delta_x + \delta_y)g(\Delta\omega_m)}, \quad \zeta = \frac{\Omega_m}{\delta_x + \delta_y}. \quad (4.38)$$

Для распределения частот (4.36) функция  $\mathcal{P}$  легко вычисляется:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{P}_-(\omega) = A \int_0^\infty dw \frac{\exp(-w/\delta_x)}{\omega + w}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{P}_+(\omega) = A \int_0^\infty \frac{dw \exp(-w/\delta_x)}{\omega - w} \left(1 + \frac{w}{\delta_x} + \frac{w}{\delta_y}\right).$$

Например, сделав в (4.40) замену переменной  $t = (w + \omega)/\delta_x$ , мы можем выразить  $\mathcal{P}_-$  через так называемую интегральную показательную функцию

$$\mathcal{P}_-(\omega) = A \exp(\omega/\delta_x) \int_{\omega/\delta_x}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} = -A \exp(\omega/\delta_x) \text{Ei}(-\omega/\delta_x), \quad (4.41)$$

где

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}.$$

Аналогичными вычислениями легко установить, что

$$\mathcal{P}_+(\omega) = A \left\{ -1 - \frac{\delta_y}{\delta_x} + \left(1 + \frac{\omega}{\delta_x} + \frac{\omega}{\delta_y}\right) \exp(-\omega/\delta_y) \text{Ei}(\omega/\delta_y) \right\}. \quad (4.42)$$

Как видно из уравнений (4.36), (4.41) и (4.42), характер распределения частот в

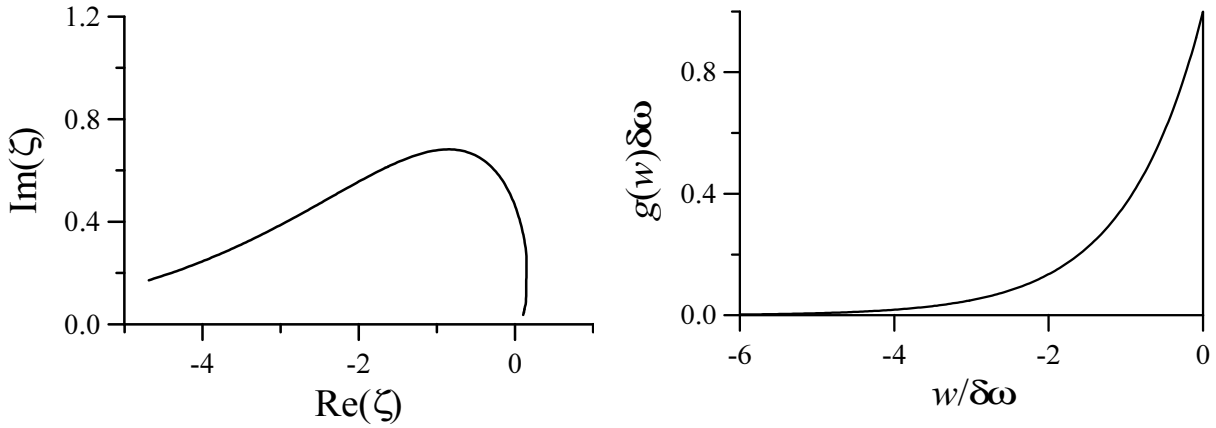


Рис. 11. Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый рисунок). Разброс частот вносится октуполем таким, что  $\delta_x \gg \delta_y$ ; в данном случае  $\zeta = \Omega_m/\delta\omega$ , а  $\delta\omega = \delta_x$

пучке, а также форма границы области устойчивости существенным образом зависят от соотношения разбросов  $\delta_y$  и  $\delta_x$  (рис. 11 ÷ 13). В свою очередь, это соотношение

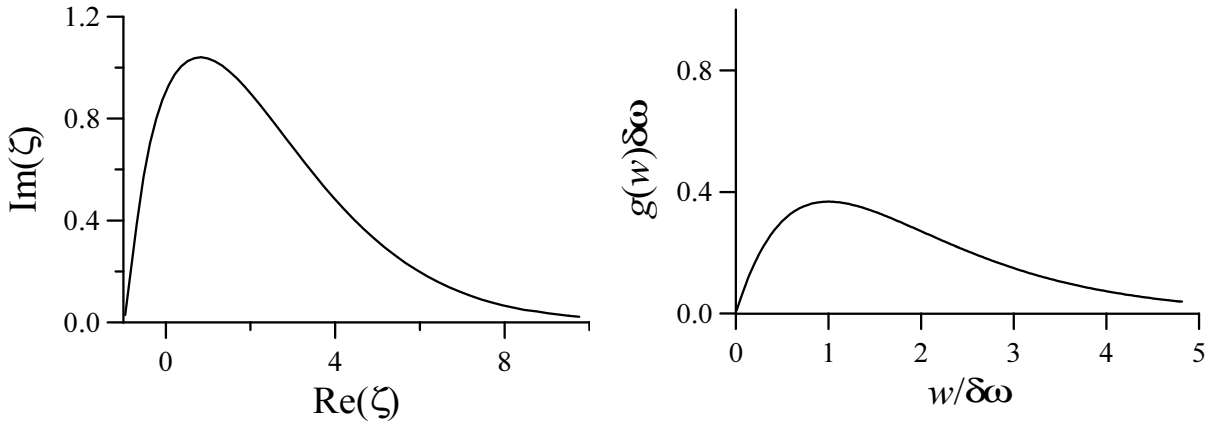


Рис. 12. Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый рисунок). Разброс частот вносится октуполем таким, что  $\delta_x \ll \delta_y$ ; в данном случае  $\zeta = \Omega_m/\delta\omega$ , а  $\delta\omega = \delta_y$

определяется отношением  $\beta$ -функций вертикальных и радиальных колебаний в месте расположения октуполя и величинами эмиттансов этих колебаний ( $I_{0y}$  и  $I_{0x}$ ). Обычно в электрон-позитронных машинах за счет действия синхротронного излучения величина радиального эмиттанса во много раз превышает величину вертикального. Как правило, величины  $\beta$ -функций в октуполе не компенсируют этой разницы эмиттансов. По этой причине в типичных условиях электронные и позитронные сгустки в накопителях имеют поперечное сечение, которое сильно сплюснуто в вертикальном направлении, а между  $\delta_y$  и  $\delta_x$  выполняется соотношение  $\delta_x \gg \delta_y$ . В таких условиях, а также если  $b > 0$ , граница области устойчивости вертикальных колебаний в основном сосредоточена в области  $\text{Re}\zeta < 0$  (рис. 11). При этом и с очевидными заменами граница области устойчивости радиальных когерентных колебаний имеет форму, изображенную на рис. 12. В накопителях ионов и антипротонов, а также в некоторых электрон-позитронных машинах поперечное сечение пучков может быть близким к круглому, когда  $\delta_x \approx \delta_y$ . Для этого случая граница области устойчивости вертикальных когерентных колебаний и соответствующее распределение частот показаны на рис. 13.

## 4.5. Задачи к лекции 4

1. Вычислить однооборотную ( $K_{st}$ ) и многооборотную части ( $K_{mt}$ ) ядра основного интегрального уравнения для когерентных колебаний одиночного сгустка, взаимодействующего с заданной модой колебаний поля резонатора.

2. Выписать основное интегральное уравнение для дипольных бетатронных и синхробетатронных когерентных колебаний одиночного, монохроматического сгустка, возмущения колебаний которого описываются поперечным импедансом связи  $Z_n^\perp(\omega)$ .

3. Выразить однооборотную ( $K_{st}$ ) и многооборотную части ( $K_{mt}$ ) ядра основного интегрального уравнения для дипольных поперечных когерентных колебаний сгустка в терминах поперечного импеданса связи.

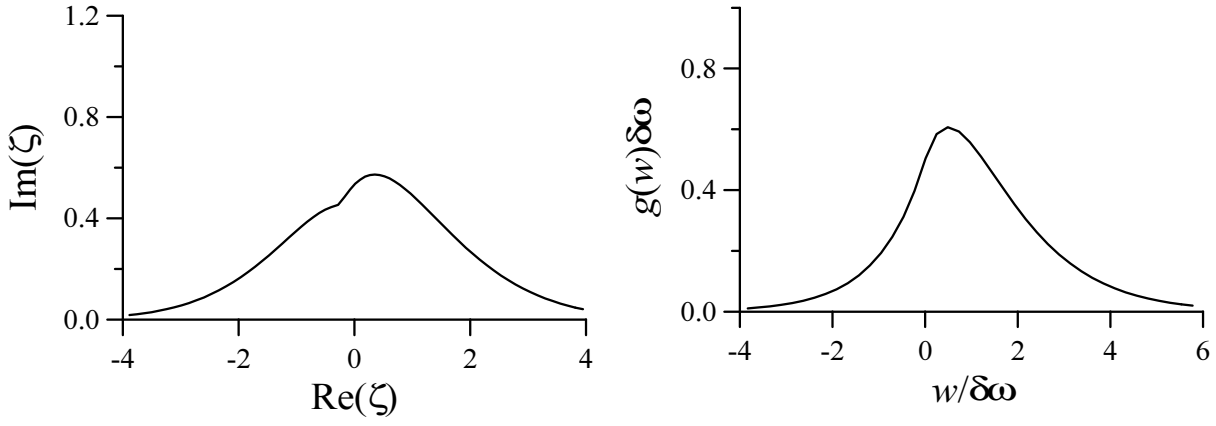


Рис. 13. Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый рисунок). Разброс частот вносится октуполем таким, что  $\delta_x = \delta_y = \delta$ ; в данном случае  $\zeta = \Omega_m/\delta\omega$ , а  $\delta\omega = 2\delta$

4. Вычислить однооборотную ( $K_{st}$ ) и многооборотную части ( $K_{mt}$ ) ядра основного интегрального уравнения для когерентных колебаний одиночного сгустка, взаимодействующего с участком вакуумной камеры накопителя с учетом конечной проводимости стенок. Кривизной орбиты на участке пренебречь.

5. Выписать основное интегральное уравнение для поперечных когерентных колебаний пучка, состоящего из  $M$  идентичных сгустков. Разбросом частот синхротронных колебаний частиц пренебречь.

6. Для поперечных когерентных колебаний пучка, состоящего из  $M$  идентичных сгустков, расположенных вдоль замкнутой орбиты на равных расстояниях  $2\pi R_0/M$ , выделить в ядре основного интегрального уравнения части, описывающие самодействия сгустков и взаимодействия сгустков в пучке. Разбросом частот синхротронных колебаний частиц пренебречь.

7. Вычислить декремент затухания Ландау для случая, когда разброс частот бетатронных колебаний в сгустке существенно превышает величину когерентного сдвига частоты.

8. Вычислить уравнение границы области устойчивости бетатронных колебаний для случаев, когда

$$\Delta\omega_y(I_y, I_x) = \frac{\Delta\omega_0}{1 + I_y/I_{0y}}$$

или

$$\Delta\omega_y(I_y, I_x) = \frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{1 + I_x/I_{0x}}}.$$

## Лекция 5

# Резонансные неустойчивости

Резонансные неустойчивости когерентных колебаний пучка обусловлены его взаимодействием с наведенными полями, которые исчезают за много оборотов частиц в машине. Поэтому характерной особенностью неустойчивостей этого типа является резонансная зависимость величин когерентного сдвига частоты и декрементов мод от частот колебаний частиц. Такая неустойчивость наблюдалась, например, на установке ВЭПП-2.

Основные особенности развития резонансных неустойчивостей когерентных колебаний определяются тем обстоятельством, что они обусловлены связью колебаний пучка и колебаний наведенных полей. Поэтому, например, сдвиги частот и декременты (инкременты) колебаний подчиняются общим правилам теории колебаний связанных осцилляторов. Так, свойства спектров колебаний отличаются для случаев разностной и суммовой связи. Разностная связь связанных осцилляторов приводит к перераспределению их декрементов и не сопровождается их неустойчивостью. В частности, это обстоятельство позволяет демпфировать определенные моды когерентных колебаний пучка вблизи разностных резонансов. Взаимодействия связанных осцилляторов вблизи суммовых резонансов приводят к неустойчивости их колебаний, если коэффициенты связи превосходят некоторые пороговые значения. Среди прочего, эти особенности изменяют действие разброса частот колебаний частиц на характер затухания Ландау резонансных когерентных колебаний пучка.

В накопителях заряженных частиц появление резонансных неустойчивостей, как правило, обусловлено появлением на орбите случайно или преднамеренно высокочастотных резонаторов. В установках со встречными пучками одним из таких резонаторов может служить каждый из встречных сгустков. Поэтому взаимодействие сгустков в месте их встречи также может приводить к резонансным неустойчивостям их когерентных колебаний и, например, к ограничению достижимых величин светимости установки.

### 5.1. Резонансные моды бетатронных колебаний

Для простоты мы проведем вычисления для случая, когда сгусток совершает вертикальные бетатронные колебания и взаимодействует с отдельной модой резонатора (ниже изложение, в основном, следует работе [13]). Такой резонатор может,

например, образовываться локальным расширением вакуумной камеры накопителя. Для получения дисперсионных уравнений мы могли бы воспользоваться общим интегральным уравнением и разложением функции Грина по собственным модам резонатора. Поучительно, однако, снова получить это уравнение непосредственным решением уравнений для осцилляторов наведенных полей. В случае резонансного взаимодействия использование понятия осцилляторов поля оправдано медленным затуханием резонансных мод наведенных полей, а также тем обстоятельством, что такая неустойчивость обусловлена взаимодействием отдельной моды резонатора и одной из мод колебаний пучка. Заметим, что после линеаризации и перехода к гармоникам общее уравнение может быть записано в виде

$$(\omega - m_y \omega_y) f_m = m_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_0^{T_0} \frac{dt}{T_0} L_{m,\omega}. \quad (5.1)$$

Интересующая нас неустойчивость обусловлена взаимодействием пучка с вихревой частью наведенных полей. В этой связи представим  $L$  суммой двух слагаемых. Первое описывает взаимодействие с полями, являющимися квазистатическими в системе покоя пучка. Это слагаемое может изменить частоты колебаний частиц. Поэтому при проведении расчетов по поводу резонансной неустойчивости для конкретной машины такие сдвиги следует вычислять. Тем не менее, для сокращения записей мы будем считать, что соответствующие сдвиги частот уже учтены в частотах некогерентных колебаний частиц.

Вихревая часть поля в резонаторе описывается набором осцилляторов поля таких, что  $A_0 = 0$ , а

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= c \sum_k \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) q_k(t), \quad \mathbf{div} \mathbf{A}_k = 0, \\ \Delta \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_k &= 0, \quad \int d^3 r \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k'} = 4\pi \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставив это разложение в уравнение для векторного потенциала

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi N e}{c} \int d^3 p \mathbf{v} f$$

и проинтегрировав обе части с  $\mathbf{A}_k$ , получим уравнение для осцилляторов  $q_k$ :

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = j_m(t), \quad \omega_k^2 = c^2 k^2. \quad (5.3)$$

$$j_m(t) = N e \int d\Gamma (\mathbf{v} \mathbf{A}_k)^* f_m \exp(im_y \psi_y - i\omega t).$$

Потери в резонаторе вследствие конечной проводимости стенок или по другим причинам, приводят к затуханию мод  $q_k(t)$ . В таком случае говорят, что моды колебаний имеют конечную добротность. Для феноменологического описания конечной добротности моды  $k$  в левую часть уравнения (5.3) дописывают диссипативное слагаемое  $2\lambda_k \dot{q}_k$ , где  $\lambda_k = \omega_k / (2Q_k)$ , а  $Q_k$  – добротность моды. После такой модификации это уравнение принимает вид

$$\ddot{q}_k + 2\lambda_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = j_m(t). \quad (5.4)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{vA}_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{vA}_k)_n e^{in\theta},$$

а  $\theta = \omega_0 t + \phi$ , ищем решение (5.4) в виде

$$q_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{kn} \exp(-i\omega t - in\omega_0 t).$$

Подстановка этого выражения в (5.4) дает

$$q_{kn} = \frac{Ne \int d\Gamma V_{m,n}^* f_m}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_0 + i\lambda_k)^2}, \quad (5.5)$$

$$V_{mn} = [(\mathbf{vA}_k)_n e^{in\phi}]_m.$$

Для случая, когда пучок взаимодействует с отдельной модой резонатора  $k$ , эти выражения позволяют вычислить

$$\int_0^{T_0} \frac{dt}{T_0} L_{m,\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ne^2 V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_0 + i\lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m.$$

После подстановки в (5.1) это выражение дает еще одну запись основного интегрального уравнения:

$$f_m = \frac{\partial f_0 / \partial I_y}{(\omega - m_y \omega_y)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ne^2 m_y V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_0 + i\lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m. \quad (5.6)$$

В общем случае частоты колебаний частиц в пучке могут зависеть от амплитуд этих колебаний. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем писать

$$\omega_y = \omega_{y0} + \Delta\omega_y(I). \quad (5.7)$$

Относительный вклад слагаемых с различными  $n$  в (5.6) зависит от соотношения декремента затухания поля в резонаторе  $\lambda_k$  и частоты обращения  $\omega_0$ . Если  $\omega_0 \ll \lambda_k$ , то отдельные слагаемые в правой части (5.6) слабо зависят от  $\omega$  и дают близкие вклады. В связи с коллективной устойчивостью пучка в таком случае говорят о взаимодействии с низкодобротным резонатором.

Обратный случай  $\omega_0 \gg \lambda_k$  соответствует резонансному взаимодействию пучка с наведенными полями. При этом благодаря резкой зависимости слагаемых в правой части (5.6) от  $\omega$  взаимодействие пучка с резонатором становится особенно сильным при выполнении резонансного условия

$$\omega_k \simeq m_y \omega_y + n\omega_0. \quad (5.8)$$

Это обстоятельство позволяет при изучении резонансных эффектов вообще отбросить в уравнении (5.6) нерезонансные слагаемые. В результате мы приходим к более простому уравнению:

$$f_m = \frac{\partial f_0 / \partial I_y}{(\omega - m_y \omega_y)} \frac{Ne^2 m_y V_{mn}}{[\omega_k^2 - (\omega + n\omega_0 + i\lambda_k)^2]} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m.$$

Вблизи резонанса (5.8) мы можем переписать частотный знаменатель в виде

$$\omega_k^2 - (\omega + n\omega_0 + i\lambda_k)^2 \simeq 2\omega_k(\varepsilon - \Delta\omega_m - i\lambda_k),$$

где

$$\varepsilon = \omega_k - m_y\omega_{y0} - n\omega_0, \quad \Delta\omega_m = \omega - m_y\omega_{y0}.$$

После этих преобразований окончательно получаем

$$f_m = -\frac{\partial f_0/\partial I_y}{(\omega - m_y\omega_y)} \frac{Ne^2 m_y V_{mn}}{2\omega_k(\Delta\omega_m - \varepsilon + i\lambda_k)} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m. \quad (5.9)$$

Поскольку ядро уравнения (5.9) факторизовано, его решение имеет вид

$$f_m = C_m \frac{V_{mn} \partial f_0/\partial I_y}{\omega - m_y\omega_y}, \quad \text{Im}\omega > 0,$$

а подстановка этого выражения в (5.9) приводит к дисперсионному уравнению:

$$1 = -\frac{Ne^2}{2\omega_k} \frac{m_y}{\Delta\omega_m - \varepsilon + i\lambda_k} \int d\Gamma \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \frac{|V_{mn}|^2}{\Delta\omega_m - m_y\Delta\omega_y(I)}. \quad (5.10)$$

### 5.1.1. Неустойчивости динамического типа

Для выяснения основных особенностей спектров резонансных мод изучим несколько простых примеров. Примем сначала, что при решении задачи мы можем пренебречь разбросами частот некогерентных колебаний в пучке ( $\Delta\omega_y(I) = 0$ ) и трением в резонаторе ( $\lambda_k = 0$ ). Тогда уравнение (5.10) приобретает особенно простой вид:

$$1 = \frac{m_y \Omega_m^2}{\Delta\omega_m(\Delta\omega_m - \varepsilon)}, \quad \Omega_m^2 = \frac{Ne^2}{2\omega_k} \int d\Gamma f_0 \frac{\partial}{\partial I_y} |V_{m,n}|^2. \quad (5.11)$$

Его корни равны

$$\Delta\omega_m^{(\pm)} = \frac{\varepsilon \pm \Omega}{2}, \quad \Omega = \sqrt{\varepsilon^2 + 4m_y\Omega_m^2}. \quad (5.12)$$

Из этого уравнения видно, что в разностном резонансе когерентных колебаний пучка и колебаний полей в резонаторе ( $m_y > 0$ ) оба корня действительны и, соответственно, амплитуды колебаний мод не нарастают. При этом в точном резонансе ( $\varepsilon = 0$ ) величины когерентных сдвигов частот мод равны по величине и противоположны по знаку:

$$\Delta\omega_m^{(\pm)} = \pm \sqrt{m_y\Omega_m^2}, \quad (5.13)$$

а вдали от резонанса ( $\varepsilon^2 \gg 4m_y\Omega_m^2$  и, например,  $\varepsilon > 0$ )

$$\Delta\omega_m^{(+)} \simeq \varepsilon + \frac{m_y\Omega_m^2}{\varepsilon}, \quad \Delta\omega_m^{(-)} \simeq -\frac{m_y\Omega_m^2}{\varepsilon}. \quad (5.14)$$

В суммовом резонансе ( $m_y < 0$ ) колебания становятся неустойчивыми при попадании частот ( $\omega_k$  и  $\omega_y$ ) внутрь запрещенной полосы:

$$\varepsilon^2 \leq 4|m_y|\Omega_m^2. \quad (5.15)$$

В этой полосе инкремент неустойчивой моды равен

$$\delta_m = \text{Im}\omega = \frac{|\varepsilon|}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{th}} - 1}, \quad (5.16)$$

где величина

$$N_{th} = |\varepsilon| \frac{\omega_k}{c^2} \left( \int d\Gamma f_0 \frac{\partial}{\partial I_y} |V_{mn}|^2 \right)^{-1} \quad (5.17)$$

определяет пороговый ток неустойчивости. Описанная неустойчивость носит название неустойчивости динамического типа.

### 5.1.2. Диссипативные неустойчивости

Перейдем теперь к изучению влияния трения в резонаторе и разброса частот на устойчивость резонансных когерентных колебаний. Пусть сначала разброс частот колебаний в пучке равен нулю. Тогда дисперсионное уравнение (5.10) записывается в виде

$$1 = \frac{m_y \Omega_m^2}{\Delta\omega_m (\Delta\omega_m - \varepsilon + i\lambda_k)}. \quad (5.18)$$

Корни этого уравнения равны

$$\Delta\omega_m^{(\pm)} = \frac{\varepsilon - i\lambda_k}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon - i\lambda_k)^2}{4} + m_y \Omega_m^2}. \quad (5.19)$$

Отделив в этом уравнении мнимую часть, получим декременты колебаний

$$\delta_m^{(\pm)} = -\text{Im}\omega = \frac{\lambda_k}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}} - X \right)}, \quad (5.20)$$

где

$$X = \frac{\varepsilon^2 - \lambda_k^2}{4} + m_y \Omega_m^2.$$

Уравнение (5.20) позволяет найти условие устойчивости колебаний

$$\frac{\lambda_k}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}} - X \right)}.$$

Простыми вычислениями:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k^2}{4} + \frac{\varepsilon^2 - \lambda_k^2}{8} + \frac{m_y \Omega_m^2}{2} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}}, \\ \left( \frac{\varepsilon^2 + \lambda_k^2}{4} + m_y \Omega_m^2 \right)^2 - \left( \frac{\varepsilon^2 - \lambda_k^2}{4} + m_y \Omega_m^2 \right)^2 &\geq \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}, \\ \frac{\varepsilon^2}{4} + m_y \Omega_m^2 &\geq \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$



– находим, что колебания в разностном резонансе ( $m_y > 0$ ) всегда устойчивы и затухают, а в суммовом резонансе ( $m_y < 0$ ) неустойчивы при любом токе пучка. Неустойчивости из-за диссипации энергии когерентных колебаний пучка в окружающих его электродах мы будем называть диссипативными.

Явление затухания разностных мод может быть использовано для подавления когерентных колебаний пассивным резонатором. Максимальный декремент когерентным колебаниям передаётся в точном резонансе ( $\varepsilon = 0$ ). При этом

$$\Delta\omega_m^{(\pm)} = -\frac{i\lambda_k}{2} \pm \sqrt{m_y\Omega_m^2 - \frac{\lambda_k^2}{4}}. \quad (5.21)$$

Если декременты затухания полей в резонаторе невелики ( $m_y\Omega_m^2 > \lambda_k^2/4$ ), то обе моды затухают с равными декрементами  $\lambda_k/2$ , а величины когерентных сдвигов частоты равны

$$\text{Re}(\Delta\omega_m^{(\pm)}) = \pm \sqrt{m_y\Omega_m^2 - \frac{\lambda_k^2}{4}}. \quad (5.22)$$

Наоборот, если моды слабо связаны ( $m_y\Omega_m^2 < \lambda_k^2/4$ ), то их когерентные сдвиги частоты равны нулю, а амплитуды затухают с декрементами

$$\delta_m^{(\pm)} = \frac{\lambda_k}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda_k^2}{4} - m_y\Omega_m^2}. \quad (5.23)$$

Характерные зависимости  $\Delta\omega_m$  от  $N$  изображены на рис. 14 и 15. Если  $\varepsilon$  меняет знак, то моды (+) и (-) на рис. 14 и 15 меняются местами.

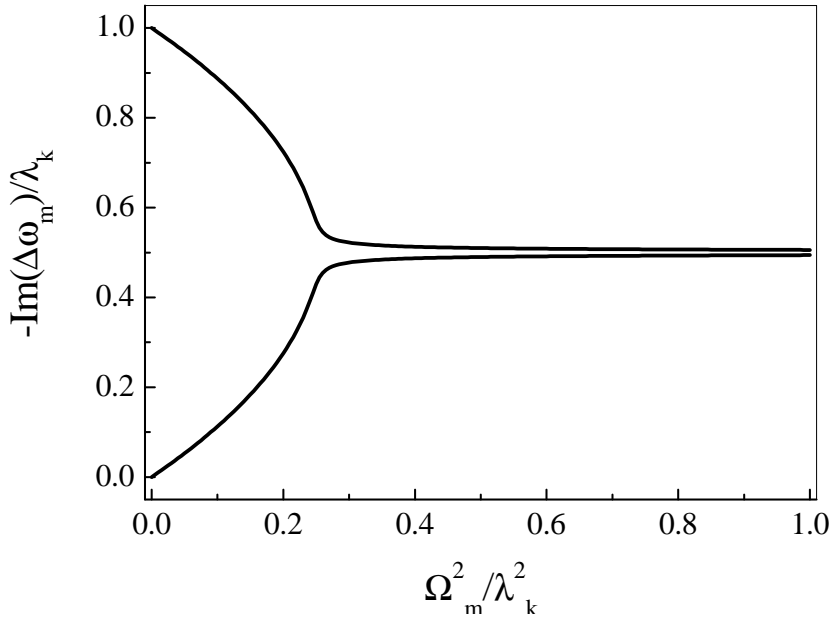


Рис. 14. Зависимости декрементов от числа частиц в пучке в окрестности разностного резонанса. Верхняя кривая – мода (+) (подобная колебаниям поля), нижняя – мода (-) (подобная колебаниям пучка),  $\varepsilon/\lambda_k = 0.02$

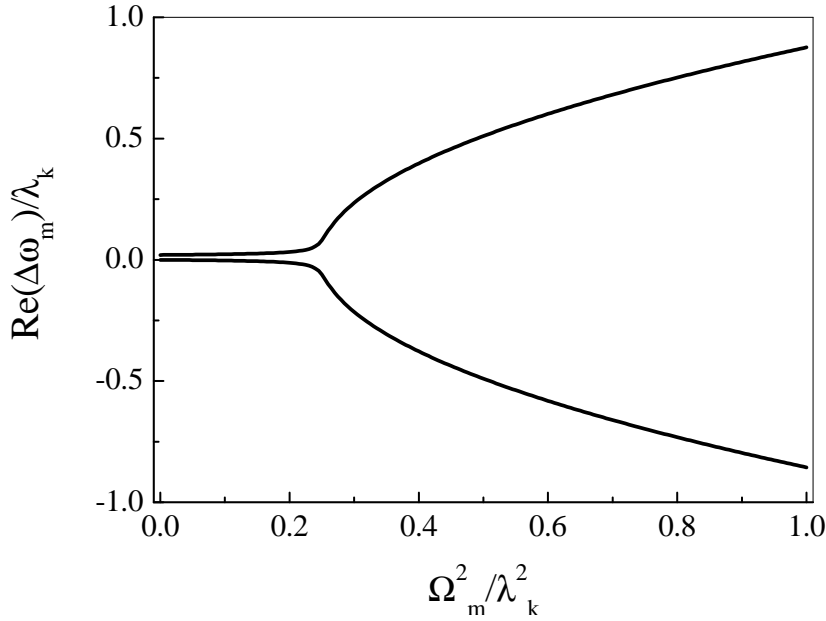


Рис. 15. Зависимости когерентных сдвигов частоты от числа частиц в пучке в окрестности разностного резонанса. Верхняя кривая – мода (+) (подобная колебаниям поля), нижняя – мода (-) (подобная колебаниям пучка),  $\varepsilon/\lambda_k = 0.02$

### 5.1.3. Действие разброса частот

Одновременное демпфирование суммовых мод может быть достигнуто совместным действием на когерентные колебания затухания колебаний полей в резонаторе и подавлением когерентных колебаний пучка. Такое подавление может достигаться использованием охлаждения пучка, систем обратной связи, либо затухания Ландау когерентных мод пучка. Для определенности мы получим условие устойчивости колебаний несгруппированного пучка за счет разброса частот бетатронных колебаний частиц, обусловленного их зависимостью от импульсов частиц. Для простоты примем, что распределение импульсов в пучке лоренцево:

$$f_0(\Delta p) = \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)}.$$

Тогда, записывая  $\omega_y = \omega_{y0} + \Delta p(d\omega_y/dp)$  и вычисляя в (5.10) интеграл по  $\Delta p$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{m_y \Omega_m^2 \Delta}{\Delta \omega_m - \varepsilon + i\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)(\Delta \omega_m - m_y(d\omega_y/dp)\Delta p)} \\ &= \frac{m_y \Omega_m^2}{(\Delta \omega_m - \varepsilon + i\lambda_k)(\Delta \omega_m + i\lambda_m)}, \end{aligned}$$

получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 = \frac{m_y \Omega_m^2}{(\Delta \omega_m + i\lambda_m)(\Delta \omega_m - \varepsilon + i\lambda_k)}. \quad (5.24)$$

Здесь

$$\lambda_m = |m_y \delta \omega_y| = \left| m_y \frac{d\omega_y}{dp} \right| \Delta$$

– разброс частот бетатронных колебаний вблизи гармоники  $m_y$ . Подстановками  $u = \Delta\omega_m + i\lambda_m$  и  $\Lambda_{\pm} = \lambda_k \pm \lambda_m$  уравнение (5.24) приводится к тому же виду, что и уравнение (5.18):

$$1 = \frac{m_y \Omega_m^2}{u(u - \varepsilon + i\Lambda_-)}.$$

Поэтому сразу пишем

$$u = \frac{\varepsilon - i\Lambda_-}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon - i\Lambda_-)^2}{4} + m_y \Omega_m^2}$$

и

$$\Delta\omega_m^{(\pm)} = \frac{\varepsilon - i\Lambda_{\pm}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon - i\Lambda_{\pm})^2}{4} + m_y \Omega_m^2}, \quad (5.25)$$

или

$$\delta_m^{(\pm)} = \frac{\Lambda_{\pm}}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \Lambda_-^2}{4}} - X \right)}, \quad (5.26)$$

где  $\delta_m^{(\pm)} = -\text{Im}\Delta\omega_m^{(\pm)}$ , а

$$X = \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} + m_y \Omega_m^2.$$

Простые выражения для этих декрементов получаются в двух предельных случаях. Во-первых, это область, где  $\varepsilon^2 + \Lambda_-^2 = \Delta_{\Sigma}^2 \gg |\Omega_{m,n}^2|$ . Такое условие, например, выполняется, если число частиц в пучке невелико. Разлагая правую часть (5.26) в ряд по степеням малого параметра  $m_y \Omega_m^2 / \Delta_{\Sigma}^2$  и учитывая старшие члены, найдем

$$X^2 + \frac{\varepsilon^2 \Lambda_-^2}{4} \simeq \frac{\Delta_{\Sigma}^4}{16} + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{2} m_y \Omega_m^2,$$

$$\begin{aligned} \delta_m^{(\pm)} &\simeq \frac{\Lambda_{\pm}}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_{\Sigma}^2}{4} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{\Delta_{\Sigma}^2} \frac{8m_y \Omega_m^2}{\Delta_{\Sigma}^2}} - X \right)} \\ &\simeq \frac{\Lambda_{\pm}}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_{\Sigma}^2}{4} - \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} + \left( \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{\Delta_{\Sigma}^2} - 1 \right) m_y \Omega_m^2 \right)} \\ &= \frac{\Lambda_{\pm}}{2} \mp \frac{|\Lambda_-|}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_y \Omega_m^2}{\Delta_{\Sigma}^2}}, \end{aligned}$$

или

$$\delta_m^+ = \lambda_m + |\Lambda_-| \frac{m_y \Omega_m^2}{\Delta_{\Sigma}^2}, \quad (5.27)$$

$$\delta_m^- = \lambda_k - |\Lambda_-| \frac{m_y \Omega_m^2}{\Delta_{\Sigma}^2}. \quad (5.28)$$

Эти формулы записаны для случая, когда  $\lambda_k > \lambda_m$ . При выполнении обратного условия  $\lambda_k < \lambda_m$  моды с декрементами  $\delta_m^+$  and  $\delta_m^-$  меняются местами.

Второй предельный случай соответствует области параметров, где число частиц в пучке велико  $\Delta_\Sigma^2 \ll |m_y| \Omega_{m,n}^2$ . Пишем

$$\begin{aligned}\delta_m^{(\pm)} &\simeq \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( |m_y \Omega_m^2| \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{2m_y \Omega_m^2}} - X \right)} \\ &\simeq \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( |m_y \Omega_m^2| \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4m_y \Omega_m^2} \right) - X \right)}.\end{aligned}$$

В суммовом резонансе  $m_y = -|m_y|$

$$\begin{aligned}\delta_m^{(\pm)} &\simeq \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( |m_y| \Omega_m^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4|m_y| \Omega_m^2} \right) - \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} + |m_y| \Omega_m^2 \right)} \\ &= \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{|m_y| \Omega_m^2 - \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4}} \simeq \mp \sqrt{|m_y| \Omega_m^2}\end{aligned}\quad (5.29)$$

одна из мод оказывается неустойчивой. В противоположность этому, в разностном резонансе ( $m_y > 0$ )

$$\delta_m^{(\pm)} \simeq \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left( m_y \Omega_m^2 (S - 1) - \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} \right)},$$

где

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{2m_y \Omega_m^2} + \frac{\Delta_\Sigma^4}{16(m_y \Omega_m^2)^2}} \\ &\simeq 1 + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4m_y \Omega_m^2} + \frac{\Delta_\Sigma^4}{32(m_y \Omega_m^2)^2} - \frac{(\varepsilon^2 - \Lambda_-^2)^2}{32(m_y \Omega_m^2)^2}.\end{aligned}$$

Поэтому обе моды затухают с декрементами:

$$\begin{aligned}\delta_m^{(\pm)} &\simeq \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{\frac{(\varepsilon^2 + \Lambda_-^2)^2 - (\varepsilon^2 - \Lambda_-^2)^2}{64m_y \Omega_m^2}} \\ &= \frac{\Lambda_+}{2} \mp \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \Lambda_-^2}{16m_y \Omega_m^2}},\end{aligned}$$

или

$$\delta_m^{(\pm)} = \frac{\Lambda_+}{2} \mp \frac{|\Lambda_-|}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4m_y \Omega_m^2}}.\quad (5.30)$$

Величина  $\Lambda_+$  в формуле (5.26) положительна. Поэтому простые вычисления

$$\frac{\Lambda_+^2}{2} > \sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \Lambda_-^2}{4}} - X,$$

$$\left(\frac{\Lambda_+^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} + m_y \Omega_m^2\right)^2 > \left(\frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} + m_y \Omega_m^2\right)^2 + \frac{\varepsilon^2 \Lambda_-^2}{4},$$

$$\frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_-^2}{4} + m_y \Omega_m^2 > \frac{\varepsilon^2 \Lambda_-^2}{4\Lambda_+^2}$$

и

$$\varepsilon^2 \frac{\Lambda_+^2 - \Lambda_-^2}{4\Lambda_+^2} + \frac{\Lambda_+^2 - \Lambda_-^2}{4} + m_y \Omega_m^2 > 0, \quad \Lambda_+^2 - \Lambda_-^2 = 4\lambda_k \lambda_m$$

приводят к следующему условию устойчивости ( $\delta_m^{(+)} > 0$ ):

$$\lambda_k \lambda_m \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\Lambda_+^2}\right) + m_y \Omega_m^2 \geq 0. \quad (5.31)$$

В частности, условие (5.31) указывает, что вблизи суммового резонанса ( $m_y = -|m_y|$ ) моды когерентных колебаний могут быть устойчивыми лишь при одновременном и достаточно сильном демпфировании связанных колебаний  $\lambda_k \lambda_m \neq 0$ . Взяв в условии (5.31) знак равенства и определив

$$\zeta = \frac{|m_y| \Omega_m^2}{\lambda_m^2}, \quad \mu_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_m},$$

мы можем изобразить его в форме диаграммы устойчивости (рис. 16). В таких пере-

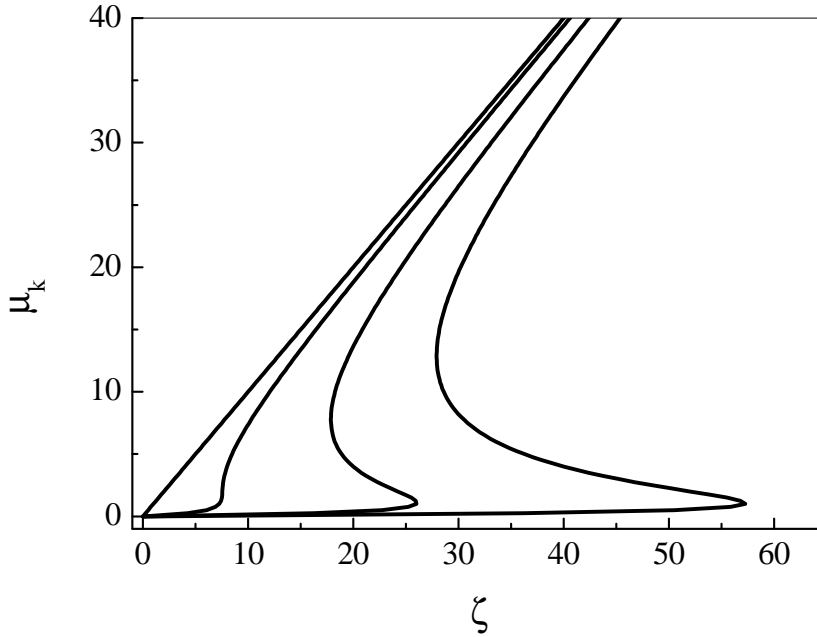


Рис. 16. Диаграмма устойчивости когерентных колебаний, соответствующая условию (5.31). Сверху вниз  $|\varepsilon|/\lambda_m = 0, 5, 10$  и  $15$ . Колебания устойчивы левее граничной кривой

менных условие устойчивости записывается в виде

$$g(\mu_k, \varepsilon) \geq \zeta, \quad (5.32)$$

где

$$g(\mu_k, \varepsilon) = \mu_k + \frac{\varkappa \mu_k}{(1 + \mu_k)^2}, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon^2}{\lambda_m^2}. \quad (5.33)$$

Как видно из этих формул, в непосредственной близости резонанса ( $\varkappa \ll 1$ ) условие устойчивости (5.32) требует простого превышения величины  $\mu_k$  над  $\zeta$ . При удалении от резонанса поведение функции  $g(\mu_k, \varepsilon)$  становится более сложным (например, рис. 17). При заданном значении  $\zeta$  условие устойчивости (5.32) может выполняться в од-

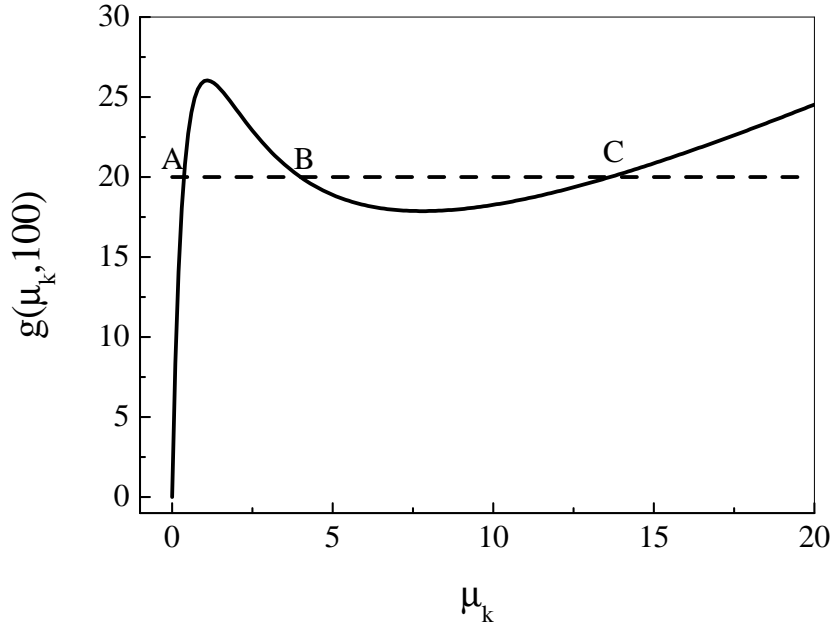


Рис. 17. Зависимость  $g(\mu_k, \varkappa)$  от  $\mu_k$ ,  $\varkappa = 100$

них областях  $\mu_k$  (например, между точками А и В, а также выше точки С на рис. 17) и не выполняться в других (на рис. 17 это значения  $\mu_k$ , расположенные между точками В и С). В первых областях  $\mu_k$  разброс частот бетатронных колебаний приводит к затуханию Ландау связанных мод. Во вторых областях – к их антизатуханию Ландау [13].

В качестве еще одного примера вычислим декременты связанных мод для случая, когда разброс частот бетатронных колебаний все еще определяется их хроматическими добавками, а распределение импульсов в пучке, например, гауссово:

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.34)$$

С таким распределением импульсов уравнение (5.10) записывается в виде

$$1 = \frac{m_y \Omega_m^2}{\Delta \omega_m - \varepsilon + i\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{\Delta \omega_m - \lambda_m x}, \quad (5.35)$$

где

$$\lambda_m = \left| m_y \left( \frac{d\omega_y}{dp} \right)_0 \right| \sigma \quad (5.36)$$

– разброс частот бетатронных колебаний вблизи гармоники  $m_y$ . Простые выражения для декрементов мод удается получить в области, где выполнены неравенства: где в

$$|\operatorname{Re}(\Delta\omega_m)| \gg \lambda_m \gg |\operatorname{Im}(\Delta\omega_m)|, \quad (5.37)$$

В такой области параметров дисперсионное уравнение (5.35) может быть переписано в виде

$$\Delta\omega_m - \varepsilon + i\lambda_k = \frac{m_y \Omega_{m,n}^2}{\Delta\omega_m} - i\pi m_y \Omega_{m,n}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \delta(\operatorname{Re}\Delta\omega_m - \lambda_m x). \quad (5.38)$$

Оно аналогично уравнению (5.18), если переопределить декремент затухания полей в резонаторе  $\lambda_k$  согласно формуле

$$\lambda_k^{eff} = \lambda_k + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m_y \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{[\operatorname{Re}\Delta\omega_m]^2}{2\lambda_m^2}\right). \quad (5.39)$$

Видно, что величина  $\lambda_k^{eff}$  убывает с ростом числа частиц в пучке для суммовых резонансов ( $m_y < 0$ ) и увеличивается для разностных ( $m_y > 0$ ). Для разностных резонансов разложение правой части в (5.19)

$$\Delta\omega_m \simeq \frac{\varepsilon - i\lambda_k^{eff}}{2} \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} - \frac{i\varepsilon\lambda_k^{eff}}{2}} \quad (5.40)$$

в ряд по степеням отношения ( $\lambda_k^{eff}/\Omega$ ) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m^{(\pm)} &\simeq \frac{\varepsilon - i\lambda_k^{eff}}{2} \pm \frac{\Omega}{2} \sqrt{1 - \frac{2i\varepsilon\lambda_k^{eff}}{\Omega^2}} \\ &\simeq \frac{\varepsilon - i\lambda_k^{eff}}{2} \pm \frac{\Omega}{2} \mp \frac{i\varepsilon\lambda_k^{eff}}{2\Omega} \\ &= \frac{\varepsilon \pm \Omega}{2} - i\frac{\lambda_k^{eff}}{2} \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{\Omega}\right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

из которых следует, что обе моды затухают с декрементами

$$\begin{aligned} \delta_m^{(+)} &= -\operatorname{Im}(\Delta\omega_m^{(+)}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\Omega}\right) \\ &\times \left(\lambda_k + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m_y \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{(\varepsilon + \Omega)^2}{8\lambda_m^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

и

$$\delta_m^{(-)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Omega}\right) \left(\lambda_k + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m_y \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{(\varepsilon - \Omega)^2}{8\lambda_m^2}\right)\right). \quad (5.43)$$

Для суммовых резонансов ( $m_y = -|m_y|$ ) величина  $\lambda_k^{eff}$

$$\lambda_k^{eff} = \lambda_k - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|m_y| \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{[\operatorname{Re}\Delta\omega_m]^2}{2\lambda_m^2}\right)$$

может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Из формулы (5.41) можно видеть, что внутри запрещенной полосы частот (5.15), где  $\Omega = i\Omega''$ , затухание Ландау за счет разброса частот бетатронных колебаний не изменяет условия неустойчивости когерентных колебаний:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_m^{(\pm)} &= \frac{\varepsilon \pm i\Omega''}{2} - i\frac{\lambda_k^{eff}}{2} \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{i\Omega''}\right) \\ &= \frac{\varepsilon \pm i\Omega''}{2} - i\frac{\lambda_k^{eff}}{2} \pm \frac{\varepsilon}{\Omega''} \frac{\lambda_k^{eff}}{2}.\end{aligned}$$

Вне запрещенной полосы (5.15) имеем ( $\text{Im}\Omega = 0$ ) и, соответственно, пишем

$$\Delta\omega_m^{(\pm)} = \frac{\varepsilon \pm \Omega}{2} - i\frac{\lambda_k^{eff}}{2} \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{\Omega}\right)$$

или

$$\delta_m^{(+)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\Omega}\right) \left(\lambda_k - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|m_y| \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{[\varepsilon + \Omega]^2}{8\lambda_m^2}\right)\right) \quad (5.44)$$

и

$$\delta_m^{(-)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Omega}\right) \left(\lambda_k - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|m_y| \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{[\varepsilon - \Omega]^2}{8\lambda_m^2}\right)\right). \quad (5.45)$$

Вспоминая, что в такой области частот  $\varepsilon^2 > \Omega^2$ , находим условия устойчивости колебаний (например,  $\varepsilon > 0$ )

$$\left(\lambda_k^{eff}\right)_+ = \lambda_k - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|m_y| \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{[\varepsilon + \Omega]^2}{8\lambda_m^2}\right) > 0$$

и

$$\left(\lambda_k^{eff}\right)_- = \lambda_k - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|m_y| \Omega_{m,n}^2}{\lambda_m} \exp\left(-\frac{[\varepsilon - \Omega]^2}{8\lambda_m^2}\right) < 0$$

или

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{[\varepsilon + \Omega]^2}{8\lambda_m^2}\right) < \frac{\lambda_k \lambda_m}{|m_y| \Omega_{m,n}^2} < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{[\varepsilon - \Omega]^2}{8\lambda_m^2}\right). \quad (5.46)$$

Вне этой области одна из мод колебаний неустойчива. Полученное условие устойчивости показывает, что вблизи суммового резонанса разброс частот колебаний частиц может приводить как к затуханию, так и к антизатуханию Ландау когерентных колебаний пучка. Например, если  $\lambda_k = 0$ , то согласно (5.44) и (5.45) мода  $(-)$  затухает ( $\delta_m^{(-)} > 0$ ), а амплитуда моды  $(+)$  нарастает со временем. Напомним, что в этом случае и в отсутствие разброса частот в пучке обе эти моды были устойчивы ( $\varepsilon^2 > \Omega^2$ ). Поэтому неустойчивость моды  $(+)$  появляется именно благодаря разбросу частот, вызывающему в этом случае антизатухание Ландау. Это явление не связано с «неудачным» распределением частот некогерентных колебаний в пучке, как это было, например, для двухпоточковых неустойчивостей. Антизатухание обусловлено особым характером передачи энергии колебаний частиц, расположенных в центральной области пучка, и тех частиц, амплитуды колебаний которых приходятся на «хвостовую» область функции распределения пучка, посредством взаимодействия этих групп частиц с колебаниями полей в резонаторе вблизи суммового резонанса. При общей схожести с изображенными на рис. 16 граница области устойчивости пучка с гауссовым распределением импульсов идет несколько левее и ниже границы, вычисленной для лоренцева распределения импульсов (рис. 18).



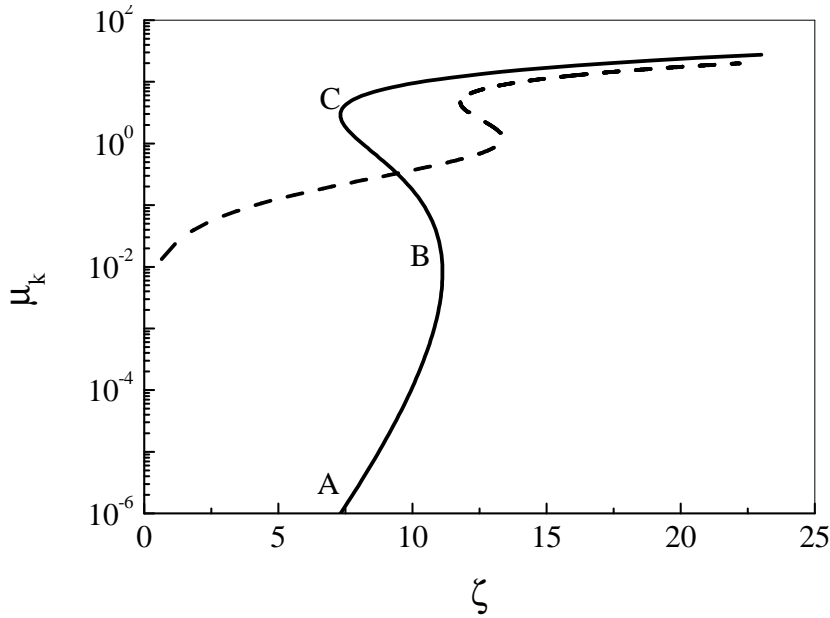


Рис. 18. Диаграмма устойчивости когерентных колебаний для гауссова (сплошная линия) и для лоренцева (пунктир) распределения импульсов в пучке,  $|\epsilon|/\lambda_m = 7$ . Колебания устойчивы левее граничной кривой, дуга ABC качественно соответствует выполнению условия (5.46)

## 5.2. Когерентные колебания встречных пучков

Обширный класс резонансных неустойчивостей когерентных колебаний сгустков появляется при изучении ограничений предельных интенсивностей в установках с встречными пучками. Такие явления связаны с взаимными периодическими возмущениями колебаний частиц в месте встречи полями пространственного заряда сталкивающихся сгустков. Они могут определять одно из основных ограничений светимости установок с встречными пучками. По принятой в отечественной литературе терминологии этот многоплановый круг явлений сокращенно называют эффектами встречи. Они выражаются в появлении неустойчивости колебаний индивидуальных частиц, либо сгустков в целом.

Для упрощения расчетов мы изучим устойчивость дипольных когерентных колебаний встречных пучков (В. И. Балбеков, А. А. Коломенский, 1967 [14]). Более полное и более современное изложение этого круга вопросов можно найти, например, в [15]. Для упрощения вычислений мы предположим, что пучки содержат по одному сгустку круглого сечения и что сгустки движутся в идентичных кольцах (геометрия таких столкновений схематически изображена на рис. 19). Мы также пренебрежем разбросами частот бетатронных колебаний частиц из-за разброса энергий частиц и нелинейности фокусировки. Энергии частиц считаем ультрарелятивистскими ( $E = \gamma M c^2$ ,  $\gamma \gg 1$ ).

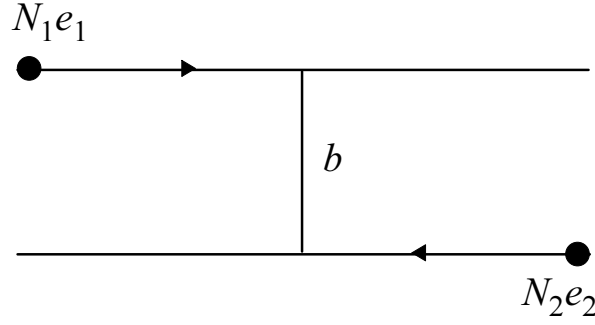


Рис. 19. К задаче о неустойчивости встречных пучков. Раз в период обращения пучки с зарядами  $N_1e_1$  и  $N_2e_2$  сталкиваются в месте встречи с прицельным параметром  $b = d_1 - d_2$ , а затем разводятся по своим кольцам

Поперечное электрическое поле сгустка, движущегося вдоль равновесной орбиты со скоростью  $\mathbf{v}_2 = \{0, -c, 0\}$  и имеющего плотность

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.47)$$

с ультррелятивистской точностью определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r} E, \quad E = \frac{2Ne_2}{\sigma^2 r} \rho(s + ct) \int_0^r dr r e^{-r^2/2\sigma^2}. \quad (5.48)$$

После простого интегрирования получаем

$$E = 2Ne_2 \rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \quad (5.49)$$

С той же точностью магнитное поле сгустка равно

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{E}]/c. \quad (5.50)$$

Сила, действующая на частицы встречного сгустка, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}_1 = \{0, c, 0\}$ , равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2} &= e_1(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}]/c^2) \simeq 2e_1 \mathbf{E} \\ &= 4Ne_1e_2 \rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Она линейна вблизи центра сгустка, однако при увеличении расстояния от центра она сначала проходит максимум, а затем уменьшается пропорционально  $1/r$  (см. также на рис. 20). Как функция времени эта сила представляет собой серию периодических, коротких толчков. Если сгустки движутся в разных кольцах с частотой обращения  $\omega_0$  каждый, то период этих толчков равен  $2\pi/\omega_0$ . При длине сгустков  $\sigma_s$  длительность толчков есть  $\delta t = \sigma/(2c)$ . Как и всякое другое, такое периодическое возмущение приводит к резонансным неустойчивостям как некогерентных, так и когерентных колебаний пучка.

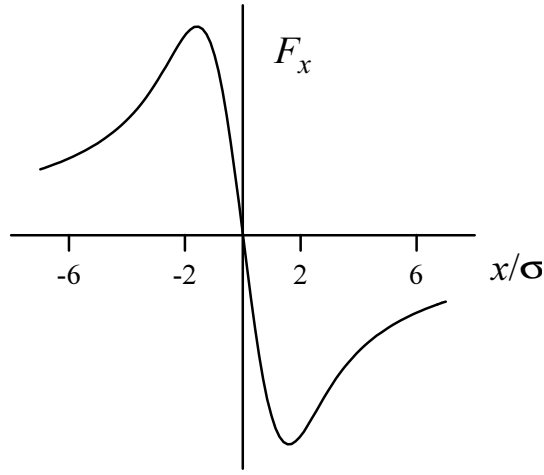


Рис. 20. Зависимость (радиальной) силы, возмущающей встречный пучок, от поперечного смещения частицы. Плотность распределения поперечных координат во встречном сгустке гауссова

Если сгусток (2) совершает, например, вертикальные когерентные колебания с дипольным моментом  $d_2(t)$ , так что

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + (y - d_2(t))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.52)$$

то возмущающие поля определяются уравнениями (5.48) и (5.50), в которых аргумент  $y$  должен быть заменен на  $y - d_2(t)$ . При этом для вертикальной проекции силы, действующей на встречный сгусток, вместо (5.51) получим  $(r^2 = x^2 + (y - d_2)^2)$

$$F_y = 4Ne_1e_2\rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} (y - d_2(t)). \quad (5.53)$$

Подставив это выражение в уравнения движения частиц, в линейном приближении ( $r \ll \sigma$ ) получим

$$\ddot{y}_{a1} + \omega_y^2 y_{a1} = \frac{F_y}{\gamma M} \simeq \frac{2Ne_1e_2}{\sigma^2\gamma M} (y_{a1} - d_2)\rho(s_a(t) + ct). \quad (5.54)$$

В связи с задачей об эффектах встречи в этом и аналогичных уравнениях в качестве независимой переменной обычно используют обобщенный азимут  $\theta = \omega_0 t$ . Тогда, учитывая, что для частиц 1-го сгустка  $s_a(t) = ct + s_a$ , а  $ct \simeq R_0\theta$ , уравнение (5.54) может быть переписано в виде

$$y''_{a1} + \nu_y^2 y_{a1} = \text{sgn}(e_1e_2) 4\Pi\xi\nu_y (y_{a1} - d_2)\rho(2R_0\theta + s_a), \quad (5.55)$$

где  $\Pi = 2\pi R_0$  – периметр орбиты,  $y' = dy/d\theta$ , а

$$\xi = \frac{Ne^2\beta_0}{4\pi r c \sigma^2}, \quad e^2 = |e_1e_2|, \quad \beta_0 = R_0/\nu_y \quad (5.56)$$

так называемый параметр пространственного заряда встречных сгустков. Аналогично, если дипольные колебания совершает сгусток (1), то уравнения для частиц второго сгустка ( $s_a(t) = -ct + s_a$ ) записываются в виде

$$y_{a2}'' + \mathbf{v}_y^2 y_{a2} = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\Pi \xi \mathbf{v}_y (y_{a2} - d_1) \rho(2R_0 \theta - s_a). \quad (5.57)$$

Здесь для простоты положено  $\rho(s) = \rho(-s)$ .

### 5.2.1. Дипольные колебания сгустков

Решения уравнений (5.55) и (5.57) могут быть выражены через интегралы от дипольных моментов  $d_1$  и  $d_2$ . Сами уравнения для  $d_1$  и  $d_2$  получаются суммированием уравнений (5.55) либо (5.57):

$$d_{1,2} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N (y_a)_{1,2} \rho(s_a).$$

В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} d_1'' + \mathbf{v}_y^2 d_1 &= \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \mathbf{v}_y (d_1 - d_2) K(\theta), \\ d_2'' + \mathbf{v}_y^2 d_2 &= -\text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \mathbf{v}_y (d_1 - d_2) K(\theta), \end{aligned} \quad (5.58)$$

где

$$K(\theta) = 2\Pi \int_{-\infty}^{\infty} ds \rho(s + ct) \rho(s - ct). \quad (5.59)$$

Учитывая, что  $K(t)$  в (5.59) в действительности является периодической функцией  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , пишем

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{-in\theta}, \quad K_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} K(\theta) e^{in\theta}. \quad (5.60)$$

Распределение гармоник  $K_n$  по номерам зависит от ширин линейных плотностей частиц в сталкивающихся сгустках. Если, например,

$$\rho(s) = \frac{\exp[-s^2/(2\sigma_s^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_s},$$

то вычисление интеграла в (5.59) даёт

$$K(\theta) = 2\Pi \frac{\exp[-(ct)^2/\sigma_s^2]}{2\pi\sigma_s} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}$$

или

$$K(\theta) = 2\pi \frac{\exp[-(\theta)^2/\sigma_\phi^2]}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi}, \quad \sigma_\phi = \sigma_s/R_0.$$

Тогда для сгустков с длинами  $\sigma_s \ll R_0$  имеем

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) \\ &= \exp[-(n\sigma_\phi)^2/4]. \end{aligned}$$

Поэтому для не очень высоких номеров гармоник ( $n \ll R_0/\sigma_s$ ) амплитуды  $K_n$  мало отличаются от единицы ( $K_n \simeq 1$ ). Подстановка этих выражений в (5.58) дает

$$\begin{aligned} d_1'' + \mathbf{v}_y^2 d_1 &= \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \mathbf{v}_y (d_1 - d_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}, \\ d_2'' + \mathbf{v}_y^2 d_2 &= -\text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \mathbf{v}_y (d_1 - d_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Прежде чем решать уравнения (5.61), выясним физический смысл входящего в них параметра  $\xi$ . Для этого запишем, например, уравнение (5.57) в виде

$$y_{a2}'' + \mathbf{v}_y^2 y_{a2} = \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \mathbf{v}_y \left\{ y_{a2} - d_1 + (y_{a2} - d_1) \sum_{n \neq 0} e^{-in\theta} \right\}$$

или, если  $d_1 = 0$ ,

$$y_{a2}'' + (\mathbf{v}_y^2 + 2\mathbf{v}_y \text{sgn}(e_1 e_2) \xi) y_{a2} = \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \mathbf{v}_y y_{a2} \sum_{n \neq 0} e^{-in\theta}. \quad (5.62)$$

В этом уравнении слагаемое в правой части описывает изменение  $\beta$ -функции в месте встречи из-за полей встречного сгустка. Если это изменение пренебрежимо мало, что означает, что  $\mathbf{v}_y$  не близко к целому либо к полуцелому числу, то влияние поля встречного сгустка в уравнении (5.62) сводится к сдвигу частоты бетатронных колебаний на величину  $\text{sgn}(e_1 e_2) \xi$ .

### 5.2.2. Моды колебаний идентичных сгустков

Для вычисления собственных частот когерентных колебаний заметим, что уравнения (5.61) разделяют два вида решений. Так называемая  $o$ -мода описывается суммой

$$X = d_1 + d_2. \quad (5.63)$$

Она удовлетворяет однородному уравнению

$$X'' + \mathbf{v}_y^2 X = 0, \quad (5.64)$$

а её собственные частоты ( $X \propto e^{-iv\theta}$ ) равны  $\mathbf{v} = \pm \mathbf{v}_y$  и не зависят от взаимодействия пучков. По определению, величина  $X$  описывает колебания центра тяжести сталкивающихся сгустков. Силы, возмущающие колебания в месте встречи, зависят от разностей поперечных координат частиц встречных сгустков. Такие силы не влияют на движение центра тяжести сгустков.

Напротив, собственные частоты так называемой  $\pi$ -моды, которая описывается разностью

$$b = d_1 - d_2 \quad (5.65)$$

и удовлетворяет уравнению

$$b'' + \mathbf{v}_y^2 b = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\xi \mathbf{v}_y b \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}, \quad (5.66)$$

существенно определяются взаимодействием пучков. Решение уравнения (5.66) ищем в виде

$$b = \exp(-iv\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}. \quad (5.67)$$

Подстановка этого выражения в (5.66) дает коэффициенты  $b_n$

$$b_n = \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \frac{4v_y}{v_y^2 - (v - n)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k. \quad (5.68)$$

Суммированием этих уравнений получаем дисперсионное уравнение для нахождения собственных частот колебаний:

$$1 = \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4v_y}{v_y^2 - (v - n)^2}. \quad (5.69)$$

Вычисление ряда в (5.69) позволяет преобразовать это уравнение к виду

$$\cos 2\pi v = \cos 2\pi v_y + 4\pi \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \sin 2\pi v_y. \quad (5.70)$$

При этом требование  $|\cos 2\pi v| \leq 1$  определяет границу области устойчивости в плос-

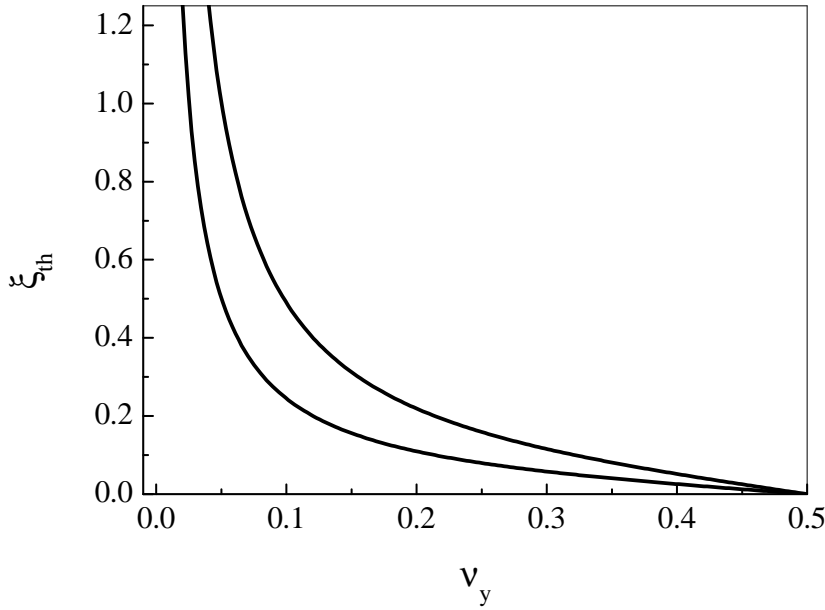


Рис. 21. Граница области устойчивости некогерентных (верхняя линия) и когерентных (нижняя линия) колебаний встречных пучков ( $e_1 e_2 = -e^2$ ). Колебания неустойчивы выше граничной кривой. При увеличении  $v_y$  кривые повторяются с периодом  $1/2$

кости  $(\xi, v_y)$  (рис. 21). Если величина  $\xi$  мала так, что рабочая точка  $(v_y)$  не близка к границе области устойчивости, уравнение (5.70) позволяет вычислить когерентный сдвиг частоты ( $v = v_y + \delta v$ ,  $|\delta v| \ll v_y$ ). Поскольку при этом

$$\cos 2\pi v \simeq \cos 2\pi v_y - 2\pi \delta v \sin 2\pi v_y,$$

из (5.70) получаем

$$\delta v \simeq -2\text{sgn}(e_1 e_2)\xi. \quad (5.71)$$

Отметим, что это значение вдвое больше сдвига частоты некогерентных колебаний.

Решение дисперсионного уравнения особенно упрощается, если  $v_y$  близко к какому-либо из резонансных значений ( $v_y = k$ , или  $v_y = k + 1/2$ ). Пусть, например,  $v_y \simeq k$ . Тогда, отбирая в (5.69) резонансные слагаемые ( $n = k$  и  $n = -k$ ), пишем

$$1 = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\xi v_y \frac{1}{2v_y} \left( \frac{1}{\Delta - v} + \frac{1}{\Delta + v} \right), \quad \Delta = v_y - k,$$

или

$$1 = -\frac{4\Delta \text{sgn}(e_1 e_2)\xi}{v^2 - \Delta^2}. \quad (5.72)$$

Отсюда получаем

$$v = \pm \sqrt{\Delta^2 - 4\Delta \text{sgn}(e_1 e_2)\xi}. \quad (5.73)$$

При  $\text{sgn}(e_1 e_2) < 0$  (электрон-позитронные либо протон-антипротонные встречные пучки) неустойчивые решения возможны внутри полосы

$$-4\xi \leq \Delta \leq 0. \quad (5.74)$$

Величина инкремента колебаний максимальна в центре полосы неустойчивости ( $\Delta = -2\xi$ ), где

$$\text{Im}v_{\max} = 2\xi. \quad (5.75)$$

Вне этой запрещенной полосы когерентные колебания пучков не нарастают. При неустойчивости дипольных колебаний пучков светимость установки уменьшается как

$$\mathcal{L} = \frac{N^2}{4\pi\sigma^2 T_0} \exp\left(-\frac{b^2}{4\sigma^2}\right), \quad (5.76)$$

где  $T_0 = \omega_0/2\pi$ . По этой причине рабочая точка накопителя ( $v_y, v_x$ ), вообще говоря, не должна попадать в полосы (5.74) под целыми и полуцелыми резонансами. В действительности нелинейная (и убывающая на больших амплитудах колебаний) зависимость отклоняющей силы от  $b$  приводит к тому, что даже внутри запрещенной полосы частот колебаний частиц экспоненциальное нарастание отклонений частиц сменяется колебаниями  $b$  вблизи некоторого стационарного значения  $b_s$ . При малых расстройках от резонанса  $|\Delta| \ll \xi$ , по порядку величины  $b_s \sim \sqrt{\xi/|\Delta|} \gg \sigma$ . В таких условиях основной вклад в светимость дают области фаз бетатронных колебаний порядка  $\Delta\psi \sim \sigma/b_s$ , что при возбуждении одномерных когерентных колебаний приводит к асимптотическому уменьшению светимости установки пропорционально  $\mathcal{L} \propto \sigma/b_s \propto \sqrt{|\Delta|/\xi}$ .

### 5.2.3. Суммовые и разностные резонансы

Приведенные вычисления указывают на особую роль тех случаев, когда частоты колебаний частиц приближаются к резонансным значениям. Лучшее понимание природы неустойчивостей когерентных колебаний встречных пучков появляется в

тех задачах, когда частоты бетатронных колебаний частиц сталкивающихся сгустков не совпадают. Например, если частоты колебаний частиц сгустка (1) или (2) равны  $\mathbf{v}_y^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_y^{(2)}$  соответственно, а величины  $\xi$  равны, то дисперсионное уравнение (5.69) переходит в следующее:

$$1 = \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\mathbf{v}_y^{(1)}}{\left(\mathbf{v}_y^{(1)}\right)^2 - (\mathbf{v} - n)^2} + \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\mathbf{v}_y^{(2)}}{\left(\mathbf{v}_y^{(2)}\right)^2 - (\mathbf{v} - n)^2}. \quad (5.77)$$

В этом уравнении резонансными являются слагаемые, для которых выполнены условия суммового

$$\mathbf{v}_y^{(1)} + \mathbf{v}_y^{(2)} = n$$

или разностного

$$\mathbf{v}_y^{(1)} - \mathbf{v}_y^{(2)} = n$$

резонансов. Отметим, что приближение частот  $\mathbf{v}_y^{(1,2)}$  к точкам параметрического резонанса порознь не влияет на устойчивость когерентных колебаний из-за взаимодействия сгустков в месте встречи.

Колебания встречных сгустков в разностном резонансе устойчивы всегда. Взаимодействие сгустков с такими частотами колебаний частиц приводит к перераспределению энергии когерентных колебаний связанных сгустков. Это обстоятельство можно использовать для демпфирования когерентных колебаний встречных пучков.

Когерентные колебания в суммовом резонансе оказываются неустойчивыми внутри запрещенных полос, прилегающих к резонансным значениям. Подавление неустойчивых колебаний требует одновременного и достаточно сильного подавления связанных мод. Эти и другие особенности когерентных колебаний встречных сгустков (например, в [15]) вообще характерны для резонансных неустойчивостей когерентных колебаний, или для неустойчивостей из-за связи мод когерентных колебаний. В частности, разбросы частот колебаний частиц в сгустках могут приводить как к затуханию, так и к антизатуханию Ландау когерентных колебаний встречных пучков.

### 5.3. Задачи к лекции 5

1. Показать, что продольный импеданс связи пучка с модой  $k$  резонатора определяется выражением

$$Z(\omega) = \frac{Z_k}{1 + iQ_k \left( \frac{\omega_k}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_k} \right)},$$

где  $Z_k$  – так называемое шунтовое сопротивление резонатора,  $Q_k$  – добротность. Выразить  $Z_k$  через собственные функции мод резонатора.

2. Исследовать резонансную неустойчивость продольных колебаний монохроматического несгруппированного пучка.



3. Вычислить декременты затухания Ландау для резонансной неустойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Распределение импульсов в пучке:

$$f_0(\Delta p) = \frac{\Delta/\pi}{\Delta p^2 + \Delta^2}.$$

4. Вычислить декременты затухания Ландау для резонансной неустойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Распределение импульсов в пучке:

$$f_0(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma^2}\right).$$

5. Для компенсации некогерентных эффектов встречи предлагалось сталкивать пучки парами, которые при идеальном совмещении пучков имеют нулевой пространственный заряд. Такие схемы получили название схем с компенсированными встречными пучками. Найти условия устойчивости дипольных когерентных колебаний компенсированных встречных пучков. Проанализировать отличия границ области устойчивости компенсированных и некомпенсированных встречных пучков.

6. Встречные пучки в месте встречи пересекаются под углом  $2\alpha$ . Поскольку электрическое поле релятивистского сгустка направлено поперек его скорости, при таком пересечении частицы испытывают удар как в поперечном, так и в продольном направлениях. Вычислить условие устойчивости дипольных когерентных колебаний коротких, одинаковых сгустков электронов и позитронов вблизи синхротронных резонансов  $\nu_x \pm \nu_c = n$ ,  $\nu_c$  – безразмерная частота синхротронных колебаний. Поперечное сечение сгустков считать круглым.

7. Спектры колебаний встречных пучков можно изучать, раскачивая колебания сгустка в одном кольце и измеряя колебания сгустка во втором. Вычислить резонансную кривую колебаний встречных пучков; качественно проанализировать влияние нелинейности поля встречного сгустка на форму резонансной кривой.

8. Вычислить спектры радиальных колебаний встречных пучков нулевой длины вблизи резонансов  $\nu_x \simeq n/m_x$  (где  $n$  и  $m_x$  – взаимно простые целые числа), приняв

$$f_0(I_x, I_y) = \frac{\delta(I_y)}{I_{0x}} \begin{cases} 1, & I_x \leq I_{0x} \\ 0, & I_x > I_{0x}. \end{cases}$$

# Лекция 6

## Медленные однооборотные явления

### 6.1. Эффект быстрого затухания

При изучении когерентных колебаний в накопителе ВЭПП-2 было замечено, что декременты затухания дипольных вертикальных когерентных колебаний превышают радиационные. При этом добавки к декрементам увеличивались пропорционально току пучка и обратно пропорционально энергии частиц. Для короткого сгустка эта добавка не зависела от длины пучка. Это явление получило название эффекта быстрого затухания когерентных колебаний. Оно было объяснено взаимодействием пучка с имевшимися в камере ВЭПП-2 согласованными пластинами.

Напомним, что если длина пучка  $l_b$  превышает характерный поперечный размер вакуумной камеры  $l_{\perp}$ , то для частот  $\omega \leq c/l_{\perp}$ , вносящих основной вклад в когерентное взаимодействие, вакуумная камера представляет собой запертый волновод. При идеальной проводимости стенок камеры наведенные поля являются стационарными в системе покоя пучка, что может вызвать лишь сдвиг частот когерентных колебаний. Если в камеру помещена пластина длины  $l$  (рис. 22), то отрезок камеры, содержащий эту пластину, представляет собой уже двусвязный волновод. В последнем случае становятся возможными моды электромагнитного поля, у которых электрическое и магнитное поля перпендикулярны, электрическое поле направлено от пластины к стенкам камеры, а линии магнитного поля замыкаются вокруг пластины. Согласно уравнениям Максвелла спектр таких ТЕМ-колебаний непрерывен  $\omega = kc$  в области  $|k|l_{\perp} < 1$ . Если пластина нагружена на волновое сопротивление  $Z_0$ , то реакция когерентных колебаний на излучение ими ТЕМ-волн может проявляться в усилении затухания этих колебаний.

Для описания этого явления удобно воспользоваться описанием наведенных полей в терминах осцилляторов поля, а для записи основного интегрального уравнения использовать формулу (3.22).

В бесконечном двусвязном волноводе векторный потенциал поля ТЕМ-волны задается выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_{\perp}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} q_k(t) e^{iks}, \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_{\perp})$  описывает поперечное распределение наведенного поля, а  $q_k(t)$  – его колебания. Величина  $\mathbf{A}_0$  связана с электростатическим полем пластины, создаваемым

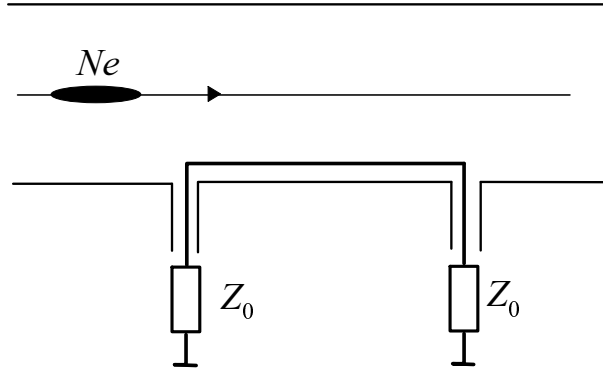


Рис. 22. К задаче о взаимодействии сгустка с согласованной пластиной. Длина пластины  $l$ , длина сгустка  $l_b$ , характеристическое сопротивление пластины  $Z_0$

разностью потенциалов  $U_0$  между пластиной и вакуумной камерой,

$$\mathbf{A}_0 = \sqrt{cZ_0} \frac{\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp)}{U_0}, \quad \Delta_\perp \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp) = 0.$$

В действительности пучок взаимодействует с отрезком двусвязного волновода. Для длинноволновых колебаний  $\omega l_\perp \ll c$  мы можем пользоваться уравнением (6.1), если заменим функцию  $\mathbf{A}_0$  реальным распределением поля, экспоненциально спадающим при удалении от участка, содержащего пластину. При этом вместо (6.1) пишем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= c\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} q_k(t) e^{iks}, \\ \mathbf{A}_0 &= \sqrt{cZ_0} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{U_0}, \quad \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Согласно этим выражениям, вблизи краев пластины электрическое поле ТЕМ-волны имеет продольную компоненту. Поэтому возможно ее возбуждение продольным движением частиц. Лагранжиан взаимодействия частицы с полем главной ТЕМ-волны записывается в виде

$$L = e(\mathbf{v}\mathbf{A}_0(\mathbf{r})) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} q_k(t) e^{iks}. \quad (6.3)$$

Предполагая, что функция  $\mathbf{A}_0$  нормирована условием

$$\int d^3r |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 e^{i(k-k')s} = 8\pi^2 \delta(k-k'),$$

из уравнений Максвелла получим следующее уравнение для осцилляторов поля:

$$\ddot{q}_k + c^2 k^2 q_k = j_m(t), \quad (6.4)$$

где

$$j_m(t) = Ne \int d\Gamma \mathbf{v}\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \exp(-iks) f_m \exp(i\mathbf{m}\Psi - i\omega t).$$

Записывая

$$q_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{kn} e^{-i(\omega+n\omega_0)t},$$

получим

$$q_{kn} = \frac{Ne \int d\Gamma f_{\mathbf{m}\omega} V_{mn}^*(k)}{k^2 c^2 - (\omega + n\omega_0 + i0)^2},$$

$$V_{mn}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) e^{iks} \exp(i[kR_0 - n]\theta - im_\alpha \psi_\alpha). \quad (6.5)$$

Пользуясь формулой (6.2) и соотношением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{U_0}{\sqrt{cZ_0}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (6.6)$$

пишем

$$V_{mn} = -\int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} \frac{d\theta}{2\pi} \left( \mathbf{v} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right) \exp(i[kR_0 - n]\theta - im_\alpha \psi_\alpha). \quad (6.7)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{v} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{dU}{dt} = \left( v \frac{\partial U}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right), \quad \frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0,$$

и интегрируя в (6.7) по частям, получим

$$V_{mn}(k) = i(kv - n\omega_0 - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega})(Ue^{iks})_{\mathbf{m},n}, \quad (6.8)$$

где

$$(Ue^{iks})_{\mathbf{m},n} = \int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} e^{-im_\alpha \psi_\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} U(\mathbf{r}_\perp, \theta) \exp(i[kR_0 - n]\theta). \quad (6.9)$$

В этом выражении вычисления азимутальных гармоник функции  $U \exp(iks)$  для длинноволновых колебаний поля ( $|k|l_\perp \ll 1$ ) можно упростить, заменив  $U(\theta)$  ступенчатой функцией ( $\theta_0 = l/R_0$ ):

$$U(\mathbf{r}_\perp, \theta) = U(\mathbf{r}_\perp) \begin{cases} 1, & |\theta| \leq l/(2R_0), \\ 0, & |\theta| > l/(2R_0). \end{cases}$$

Тогда

$$(Ue^{iks})_{mn} = b_{kn} U_m(\mathbf{I}), \quad (6.10)$$

где

$$b_{kn} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta[kR_0 - n]} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\theta_0[kR_0 - n])}{kR_0 - n}. \quad (6.11)$$

Полученные выражения позволяют вычислить средние по периоду обращения гармоники Лагранжиана взаимодействия частицы с полем главной ТЕМ-волны

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\mathbf{m},\omega} &= Ne^2 U_m(\mathbf{I}_\perp) \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{(kv - n\omega_0 - m_\alpha \omega_\alpha)^2 b_{kn}^2}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2} \\ &\quad \times \int d\Gamma U_m^*(\mathbf{I}'_\perp) f_{m,\omega}(\mathbf{I}') e^{in(\phi - \phi')}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Как видно из этого выражения, в задаче о взаимодействии протяженного пучка с согласованной пластиной зависимости ядра основного уравнения от переменных  $\mathbf{I}_\perp$  и  $\phi$

факторизуются. По этой причине для несгруппированного пучка решения уравнения (3.23) записываются в виде

$$f_{mn} = C_{mn} \frac{U_m(\mathbf{I}_\perp) \mathbf{m}_\perp \partial F_0 / \partial \mathbf{I}_\perp}{\omega - \omega_{mn}},$$

а  $\Omega_{mn}$  определяется выражением

$$\Omega_{mn} = Ne^2 \left\langle \mathbf{m}_\perp \frac{\partial |U_m|^2}{\partial \mathbf{I}_\perp} \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{(kv - \omega_{mn})^2 b_{kn}^2}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2}. \quad (6.13)$$

Входящий в это выражение интеграл по  $k$  может быть вычислен точно. Используя, например, соотношение

$$b_{kn}^2 = 2 \left( \frac{\theta_0}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 dz (1-z) \cos(2\theta_0 z [kR_0 - n]),$$

перепишем этот интеграл в виде

$$I_n = \left( \frac{\theta_0}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 dz (1-z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{(kv - \omega_{mn})^2}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2} \times [\exp(2i\theta_0 z [kR_0 - n]) + c.c.].$$

Интеграл по  $k$  определяется вычетами в простых полюсах  $kc = \pm(\omega_{mn} + i0)$ . При этом полюс  $kc = \omega_{mn}$  определяет вклад излучения главной ТЕМ-волны вперед, т. е. распространяющегося в направлении движения пучка. Полюс в точке  $kc = -\omega_{mn}$  дает вклад излучения ТЕМ-волны назад т. е. распространяющегося в направлении, противоположном направлению движения пучка. Оставшееся интегрирование по  $z$  также выполняется элементарно. В результате для, например, вертикальных бетатронных колебаний ( $\mathbf{m} = \{0, m_y\}$ ) получается следующее, хотя и довольно громоздкое, но вполне обозримое выражение

$$I_n = - \left( \frac{\theta_0}{\pi} \right)^2 \frac{\omega_s (m_y \mathbf{v}_y + n)}{4c} \left\{ \frac{(1 - \beta)^2}{2\mathbf{v}_- \theta_0} \left( 1 - \frac{\sin 2\theta_0 \mathbf{v}_-}{2\mathbf{v}_- \theta_0} \right) + \frac{(1 + \beta)^2}{2\mathbf{v}_+ \theta_0} \left( 1 - \frac{\sin 2\theta_0 \mathbf{v}_+}{2\mathbf{v}_+ \theta_0} \right) - i \left[ (1 - \beta)^2 \left( \frac{\sin \theta_0 \mathbf{v}_-}{\mathbf{v}_- \theta_0} \right)^2 + (1 + \beta)^2 \left( \frac{\sin \theta_0 \mathbf{v}_+}{\mathbf{v}_+ \theta_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Здесь

$$\mathbf{v}_\pm = \beta (m_y \mathbf{v}_y + n) \pm n, \quad \beta = v/c.$$

Подставив это выражение в (6.13) и учитывая, что в приближении сглаженной фокусировки  $I_y = p_s \mathbf{v}_y a_y^2 / 2R_0$ , перепишем  $\Omega_{m,n}$  в виде

$$\Omega_{m,n} = \frac{Nr_0 c}{4\gamma \mathbf{v}_y} \left\langle m_y \frac{\partial}{\partial a_y^2} |U_{\mathbf{m}_\perp}|^2 \right\rangle (m_y \mathbf{v}_y + n) \left( \frac{\theta_0}{\pi} \right)^2 \times \left\{ \frac{(1 - \beta)^2}{2\mathbf{v}_- \theta_0} \left( 1 - \frac{\sin 2\theta_0 \mathbf{v}_-}{2\mathbf{v}_- \theta_0} \right) + \frac{(1 + \beta)^2}{2\mathbf{v}_+ \theta_0} \left( 1 - \frac{\sin 2\theta_0 \mathbf{v}_+}{2\mathbf{v}_+ \theta_0} \right) - i \left[ (1 - \beta)^2 \left( \frac{\sin \theta_0 \mathbf{v}_-}{\mathbf{v}_- \theta_0} \right)^2 + (1 + \beta)^2 \left( \frac{\sin \theta_0 \mathbf{v}_+}{\mathbf{v}_+ \theta_0} \right)^2 \right] \right\}, \quad (6.14)$$

где  $r_0 = e^2/Mc^2$ . Из полученного выражения видно, что для ультрарелятивистских частиц вклад излучения вперед в  $\Omega_{mn}$  подавлен в  $1/\gamma^2$  раз.

### 6.1.1. Вертикальные когерентные колебания сгустка

В пренебрежении разбросом частот синхротронных колебаний частиц собственные решения для вертикальных когерентных колебаний одиночного сгустка, взаимодействующего с полем главной ТЕМ-волны, находятся решением интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m = Ne^2 m_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \rho(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{V_{m,n}(\mathbf{I}) J_{m_c}(n_1\varphi)}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2} \\ \times \int_0^{\infty} dI'_y V_{m,n}^*(\mathbf{I}') \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1\varphi') f_m(I'_y, \varphi'), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где  $\Delta\omega_m = \omega - m_y\omega_y - m_c\omega_c$ . Воспользовавшись формулами (6.8) ÷ (6.11), пишем

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m = Ne^2 m_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} U_m(I_y) \rho(\varphi) \frac{\omega_0^2 Z_0 c}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dn J_{m_c}(n_1\varphi) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{([kR - n] - m_y v_y)^2 \sin^2(\theta_0 [kR - n])}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2 [kR - n]^2} \\ \times \int_0^{\infty} dI'_y U_m(I'_y)^* \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1\varphi') f_m(I'_y, \varphi'). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Для монохроматического сгустка решение этого уравнения ищется в виде

$$f_m = \frac{\partial f_0}{\partial I_y} U_m(I_y) \chi(\varphi), \quad (6.17)$$

где новая неизвестная функция  $\chi(\varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m \chi(\varphi) = \rho(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} dn J_{m_c}(n_1\varphi) \Omega_{mn}(\omega_{mn}) \\ \times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1\varphi') \chi(\varphi'). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Как уже говорилось, прямое решение интегрального уравнения (6.18) возможно лишь для некоторых модельных распределений  $\rho(\varphi)$ . Так, в модели полого сгустка

$$\rho(\varphi) = \delta\left(\frac{\varphi - a^2}{2}\right) \quad (6.19)$$

спектр собственных решений уравнения (6.18) состоит из одного колебания, которое распространяется по поверхности сгустка в фазовом пространстве синхротронных колебаний ( $\chi(\varphi) \propto \delta([\varphi^2 - a^2]/2)$ ). Это приводит к следующему выражению для комплексного когерентного сдвига частоты монохроматического сгустка:

$$\Delta\omega_m = \int_{-\infty}^{\infty} dn J_{m_c}^2(n_1 a) \Omega_{mn}(\omega_{mn}). \quad (6.20)$$

Декременты этих колебаний ( $\delta_m = -\text{Im}\Delta\omega_m$ ) определяются формулой

$$\delta_m = \frac{2Nr_0cm_y}{\pi^2\gamma v_y} \left\langle \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_y^2} \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dn J_{m_c}^2(n_1a) \quad (6.21)$$

$$\times (m_y v_y + n) \frac{\sin^2(\theta_0 [m_y v_y + 2n])}{[m_y v_y + 2n]^2}.$$

Собственные колебания могут быть бетатронные ( $m_c = 0$ ) и синхробетатронные ( $m_c \neq 0$ ). Для пучка нулевой длины ( $a = 0$ ) когерентные сдвиги частоты синхробетатронных мод равны нулю, а для бетатронной равны

$$\Delta\omega_m = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{mn}(\omega_{mn}). \quad (6.22)$$

Декремент бетатронной моды сгустка нулевой длины равен

$$\delta_m = \frac{2Nr_0cm_y}{\pi^2\gamma v_y} \left\langle \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_y^2} \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dn (m_y v_y + n) \frac{\sin^2(\theta_0 [m_y v_y + 2n])}{[m_y v_y + 2n]^2}. \quad (6.23)$$

Вычисление простых интегралов

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x + m_y v_y}{2} \frac{\sin^2 \theta_0 x}{x^2} = \frac{m_y v_y}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_0 x}{x^2} dx$$

$$= \frac{m_y v_y \theta_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{m_y v_y \theta_0}{2} \frac{1}{2} \pi$$

приводит к выражению

$$\delta_m = \frac{Nr_0c}{2\gamma} \left\langle \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_y^2} \right\rangle m_y^2 \left( \frac{l}{2\pi R} \right). \quad (6.24)$$

Полученные зависимости декремента бетатронной моды когерентных колебаний сгустка нулевой длины согласуются с зависимостями декремента быстрого затухания, наблюдавшегося на установке ВЭПП-2.

### 6.1.2. Гладкие распределения по амплитудам синхротронных колебаний

Для вычисления декрементов когерентных бетатронных колебаний сгруппированного пучка воспользуемся формулой (4.18):

$$\delta_{m,\alpha} = - \int_{-\infty}^{\infty} dn \text{Im}\Omega_{m,n} \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi\rho(\varphi)} J_0(n_1\varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (6.25)$$

Поскольку поле над пластиной существует лишь в течение времени пролета сгустком пластины ( $\Delta t \sim l/c$ ), взаимодействие колебаний с пластиной существенно однобоко. По этой причине суммирование по  $n$  в (6.25) заменено интегрированием. Для

ультрарелятивистских частиц ( $\gamma \gg 1$ ) подстановка в (6.25)  $\Omega_{mn}$  из (6.14) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \delta_{m,\alpha} = & -\frac{Nr_0c}{2\gamma v_y} \left\langle m_y \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_y^2} \right\rangle \left( \frac{\theta_0}{\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_+ (m_y v_y + v_+) \\ & \times \left( \frac{\sin \theta_0 v_+}{v_+ \theta_0} \right)^2 \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} J_0(n_1 \varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Если величина  $\varphi_0$  определяет длину пучка ( $l_b = 2R_0\varphi_0$ ), так что  $\rho(\varphi)$  спадает после  $\varphi \simeq \varphi_0$ , то из выражения (6.26) видно, что основной вклад в интеграл по  $n$  дают гармоники интервала  $|n|\varphi_0 \leq 1$ . Поэтому, если длина сгустка мала ( $l_b \ll l$ ,  $l_b d \ln v_y / dR_0 \ll 1$ ), то в основной области интегрирования ( $|n|\theta_0 < 1$ ) мы можем заменить функцию  $J_0(n_1\varphi)$  ее значением в нуле ( $J_0 \simeq 1$ ). После этого интегрирование по  $v_+$  выполняется элементарно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_+ (m_y v_y + v_+) \left( \frac{\sin \theta_0 v_+}{v_+ \theta_0} \right)^2 = \frac{\pi m_y v_y}{\theta_0},$$

а подстановка этого выражения в (6.26) дает

$$\delta_{m,\alpha} = -\frac{Nr_0c}{2\gamma} \left\langle m_y^2 \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_y^2} \right\rangle \frac{l}{\bar{\Pi}} \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} w_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (6.27)$$

По порядку величины  $w_\alpha \sim \sqrt{\varphi \rho}$ . Тогда, учитывая, что

$$\int_0^{\infty} d\varphi \varphi \rho(\varphi) = 1,$$

получаем следующую оценку декрементов быстрого затухания мод:

$$\delta_{m,\alpha} = -\frac{Nr_0c}{2\gamma} \left\langle m_y^2 \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_y^2} \right\rangle \frac{l}{\bar{\Pi}}. \quad (6.28)$$

## 6.2. Взаимодействие с локализованным импедансом

Как упоминалось в §3.4, в тех случаях, когда возбуждение наведенных полей поперечным током пучка пренебрежимо мало, взаимодействие дипольных когерентных колебаний с окружающими электродами может описываться в терминах поперечных импедансов связи. В таком случае согласно (3.55) пишем

$$\Omega_{mn} = iNe^2 \frac{\omega_0}{2\Pi} Z_n^\perp(\omega_{mn}),$$

а, например, уравнение (4.18) переходит в следующее ( $m_y = \pm 1$ ):

$$\delta_m = -m_y \frac{Ne^2 \omega_0}{4\pi p v_y} \int_{-\infty}^{\infty} dn \operatorname{Re} [Z_n^\perp(\omega_{mn})] h(n|w). \quad (6.29)$$



Здесь

$$h(n|w) = \left| \int_0^\infty d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} J_{m_c}(n_1 \varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2.$$

Поскольку

$$\operatorname{Re} Z_n^\perp(-\omega) = -\operatorname{Re} Z_n^\perp(\omega), \quad J_m(-x) = (-1)^m J_m(x),$$

а

$$n_1 = n + m_y \mathbf{v}_y + m_y \frac{d\mathbf{v}_y}{d \ln \omega_0},$$

то для локализованных наведенных полей ( $Z_n(\omega) = Z(\omega)$ ) из (6.29) получаем, что декремент бетатронных когерентных колебаний ( $m_c = 0$ ) обращается в нуль, если равны нулю длина пучка  $\varphi_0$  или хроматизм машины  $\zeta = \varphi_0 d\mathbf{v}_y/d \ln \omega_0$ . Таким образом, в случае локализованного взаимодействия когерентных колебаний сгустка с наведенными полями в декременте отсутствует слагаемое, описывающее эффект быстрого затухания. Причина этого понятна. Эффект быстрого затухания обязан действию на пучок силы реакции излучения (вообще, радио- или СВЧ-волн) в окружающие электроды, а для этого пучок должен пройти с полем по крайней мере расстояние, равное длине формирования излучения.

Для вакуумной камеры круглого сечения радиуса  $l_\perp$  поперечный и продольный импедансы связаны соотношением (3.54). Поэтому

$$\delta_{m,\alpha} = m_y \frac{Ne^2 \omega_0 R_0}{4\pi p \mathbf{v}_y l_\perp^2} \int_{-\infty}^\infty dn \frac{\operatorname{Re}\{Z_n^\parallel(n + m_y \mathbf{v}_y)\}}{n + m_y \mathbf{v}_y} h(n|w). \quad (6.30)$$

В последнем уравнении отношение  $Z_n(\omega)/\omega \propto G_{mn}(\omega)$  является несингулярной функцией  $\omega$  при  $\omega = 0$ . Если азимутальная протяженность электродов не равна нулю, а длина сгустка мала, то снова полагаем в (6.30)  $J_0 \simeq 1$  и  $w_\alpha \sim \sqrt{\varphi \rho}$ . Тогда требование  $\delta_{m,\alpha} > 0$  позволяет записать условие устойчивости дипольных вертикальных бетатронных колебаний в следующем виде:

$$\int_0^\infty dn \left[ \frac{\operatorname{Re}\{Z_n^\parallel(n + \mathbf{v}_y)\}}{n + \mathbf{v}_y} - \frac{\operatorname{Re}\{Z_n^\parallel(n - \mathbf{v}_y)\}}{n - \mathbf{v}_y} \right] > 0. \quad (6.31)$$

Из этих соотношений видно, что при возбуждении наведенных полей продольным движением условие затухания колебаний требует превышения вкладов в  $\delta_m$  разностных резонансов над вкладами суммовых.

### 6.3. Head-Tail эффект

Другой важный класс однооборотных эффектов связан с взаимодействием частиц сгустка посредством наведенных ими полей и с возбуждением когерентных синхробетатронных колебаний сгустка ( $m_c \neq 0$ ; К. Пеллегрини и М. Сэндс, 1969 [10, 11]). Для того чтобы пояснить характер протекающих в пучке явлений, обсудим результат взаимодействия посредством наведенных полей каких-либо двух частиц. Положим, что в начальный момент частицы 1 и 2 занимают крайние продольные положения на своих фазовых траекториях синхротронных колебаний, а наведенные

ими поля затухают намного быстрее периода обращения в машине. Если частица 1 находится впереди, то из-за запаздывания наведенных полей она возмущает колебания частицы 2, тогда как частица 2 не возмущает колебаний частицы 1. Сила, возмущающая (бетатронные) колебания частицы 2, пропорциональна (вертикальному) отклонению частицы 1, а коэффициент пропорциональности выражается через поперечный импеданс связи  $[F_{1,2} \propto z_1 w(s_1 - s_2)]$  см. также рис. 23]. Через половину периода синхротронных колебаний частицы 1 и 2 займут в сгустке такие положения, когда частица 2 окажется впереди частицы 1 и, соответственно, начнет раскачивать ее колебания с силой  $F_{2,1} \propto z_2 w(s_2 - s_1)$ . Таким образом, из-за запаздывания полей колебания головных частиц сгустка будут раскачивать колебания частиц, расположенных в хвосте сгустка, а синхротронные колебания частиц замыкают обратную связь колебаний отдельных частей сгустка. При определенных условиях это может приводить к неустойчивости когерентных колебаний пучка. По предложению авторов (К. Пеллегрини и М. Сэндса) такая неустойчивость получила название head-tail эффекта, или head-tail неустойчивости.

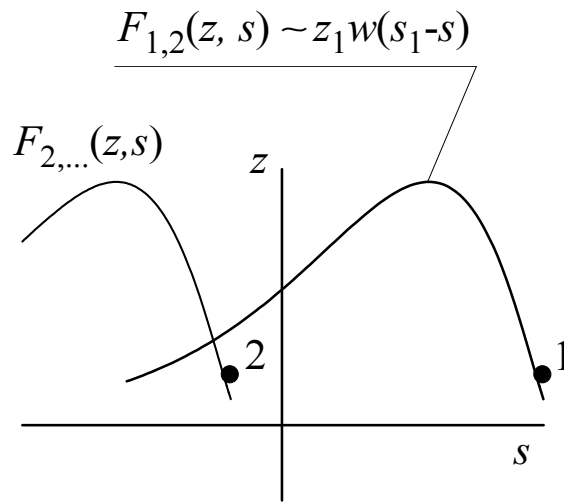


Рис. 23. К задаче о взаимодействии частиц сгустка посредством наведенных в окружающих электродах полей

В этом разделе мы обсудим задачи, в которых пороговые токи неустойчивостей (либо просто токи сгустков) таковы, что величины когерентных сдвигов частот мод ( $\Delta\omega_m = \omega - m_y\omega_y - m_c\omega_c$ ) малы по сравнению с частотой синхротронных колебаний. При этом синхробетатронные колебания сгустка хорошо разделены по  $m_c$ , а их амплитуды и спектры собственных частот определяются уравнением (4.24). Для упрощения вычислений, а также для иллюстрации методов вычисления собственных частот и декрементов колебаний воспользуемся моделью, в которой когерентные бетатронные колебания сгустка дипольны, а величина когерентного сдвига частоты несгруппированного пучка определяется выражением

$$\Omega_{mn} = \frac{i\Omega_m}{\pi[n + m_y v_y + i0]}. \quad (6.32)$$

При этом уравнение (4.24) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m\chi_m &= \rho(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{\pi} \frac{i\Omega_m}{n - m_y\xi + i0} J_{m_c}(n\varphi) \\ &\times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') \chi_m(\varphi'). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Здесь  $\xi = dv_y/d\ln\omega_0$  – хроматизм кольца, а параметр  $\Omega_m$  характеризует силу взаимодействия сгустка с наведенными им полями. Эта величина может быть выражена через импеданс связи пучка с электродами. Для этого воспользуемся, например, уравнением (3.56)

$$\Omega_{m,n}(\omega) = m_y \frac{Ne^2\omega_0}{2\pi p v} \frac{R_0^2}{2\nu_y l_{\perp}^2} \left[ \frac{-iZ^{\parallel}(\omega)}{(\omega/\omega_0)} \right]$$

и предположим, что пучок взаимодействует с электродами, которые электродинамически эквивалентны параллельному LR-контуре. Тогда

$$Z^{\parallel}(\omega) = \frac{-i\omega Z_0}{-i\omega + \frac{c^2 Z_0}{L}} = \frac{\omega Z_0}{\omega + i\frac{c^2 Z_0}{L}},$$

где  $L$  – индуктивность,  $Z_0$  – активное сопротивление контура, а

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(\omega_{m,n}) &= -im_y \frac{Ne^2\omega_0}{4\pi p \nu_y} \frac{v}{l_{\perp}^2} \frac{Z_0}{\omega_{m,n} + i\frac{c^2 Z_0}{L}} \\ &= -im_y \frac{Ne^2\omega_0 R_0}{4\pi p \nu_y l_{\perp}^2} \frac{Z_0}{n + m_y \nu_y + i/\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{L\omega_0}{c^2 Z_0}. \end{aligned}$$

Входящая в это выражение величина  $\theta_0$  характеризует затухание наведенных полей после прохождения сгустком электродов. Для однооборотности взаимодействия должно выполняться неравенство  $2\pi \gg \theta_0$ . Сравнение этой формулы и уравнения (6.32) позволяет написать

$$\Omega_m = -m_y \frac{Ne^2\omega_0 R_0}{4p \nu_y l_{\perp}^2} Z_0. \quad (6.34)$$

Отсюда следует, что  $\Omega_m$  является действительным числом. Поскольку для пассивных систем  $Z_0 > 0$ , из (6.34) следует, что знак  $\Omega_m$  противоположен знаку  $m_y$  ( $m_y\Omega_m < 0$ ).

### 6.3.1. Модель полого сгустка

Проведем сначала расчет декрементов head-tail неустойчивости для упрощенной модели, в которой все частицы сгустка имеют равные амплитуды синхротронных колебаний:

$$\rho(\varphi) = \delta(\varphi^2 - \varphi_0^2). \quad (6.35)$$

В этом случае решения уравнения (6.33) существуют только на поверхности сгустка в пространстве амплитуд синхротронных колебаний  $\chi_m \propto \delta(\varphi^2 - \varphi_0^2)$ . Поэтому пишем

$$\Delta\omega_m = \frac{i\Omega_m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_{m_c}^2(n\varphi_0)}{n - m_z\xi + i/\theta_0}$$

или, учитывая формулу (6.34),

$$\Delta\omega_m = \frac{-im_y N e^2 \omega_0 Z_0}{4\pi p} \left( \frac{\overline{\beta_z}}{l_\perp^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_c}^2(n)}{n - m_z \xi + ib}, \quad b = \frac{\varphi_0}{\theta_0}. \quad (6.36)$$

Посредством  $\xi$  мы обозначили набег фазы бетатронных колебаний на длине пучка:

$$\xi = \varphi_0 \frac{dv_y}{d \ln \omega_0}. \quad (6.37)$$

Согласно (6.36) декременты мод когерентных колебаний определяются формулой

$$\frac{1}{\tau_m} = -\text{Im} \Delta\omega_m = \frac{N e^2 \omega_s Z_0}{4\pi p} \left( \frac{\overline{\beta_y}}{l_\perp^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx (x - \xi) J_{m_c}^2(x)}{(x - \xi)^2 + b^2}. \quad (6.38)$$

Простые выражения для декрементов мод удастся получить в области, где значение величины  $\xi$  мало ( $|\xi| \ll \min\{b, |m_c|\}$ ). В такой области параметров интеграл в (6.38) вычисляется разложением в ряд по степеням  $\xi$ . Старший член такого разложения записывается в виде

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{N e^2 \omega_0 Z_0}{4\pi p} \left( \frac{\overline{\beta_y}}{l_\perp^2} \right) F, \quad F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxx J_{m_c}^2(x + \xi)}{x^2 + b^2} \simeq 2\xi H_{m_c}, \quad (6.39)$$

$$H_{m_c} = \int_0^{\infty} \frac{dxx}{x^2 + b^2} \frac{d}{dx} J_{m_c}^2(x). \quad (6.40)$$

Вычисление фактора  $H_{m_c}$  упрощается в асимптотических областях. Например, если длина сгустка мала по сравнению с радиусом взаимодействия частиц ( $b \ll |m_c| + 1$ ), то при вычислении интеграла в формуле (6.40) можно положить  $b = 0$  и, соответственно, записать

$$H_{m_c} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{d}{dx} J_{m_c}^2(x).$$

Последний интеграл вычисляется с использованием формул:

$$J_m^2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha J_0(2x \sin \alpha) \exp(-2im\alpha),$$

$$\frac{d}{dx} J_{m_c}^2(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha J_1(2x \sin \alpha) \sin \alpha \exp(-2im\alpha)$$

и

$$\begin{aligned} H_{m_c} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{d}{dx} J_{m_c}^2(x) \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \exp(-2im\alpha) \int_0^{\infty} \frac{J_1(2x \sin \alpha)}{x} dx. \end{aligned}$$

Учитывая тождество

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} J_1(2x \sin \alpha) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin(2x \sin \alpha \sin \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} \frac{\sin(2x \sin \alpha \sin \theta)}{x} dx = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta = 1, \end{aligned}$$

пишем

$$H_{m_c} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \alpha \exp(-2im_c \alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi(m_c^2 - 1/4)}. \quad (6.41)$$

Полученное выражение справедливо как для синхробетатронных ( $m_c \neq 0$ ), так и для бетатронной ( $m_c = 0$ ) мод. Подставив (6.41) в формулу (6.39), находим

$$\frac{1}{\tau_m} \simeq \frac{Ne^2 \omega_0 Z_0}{2\pi^2 p} \left( \frac{\overline{\beta}_y}{l_\perp^2} \right) \frac{\xi}{m_c^2 - 1/4}. \quad (6.42)$$

При энергиях частиц, превышающих критическую энергию машины, имеем  $\xi \propto -dv_y/d \ln p$ . Поэтому малая положительная хроматичность кольца приводит к подавлению бетатронных мод колебаний и к антизатуханию всех синхробетатронных мод сгустка.

Если длина сгустка велика ( $b \gg |m_c| + 1$ ), то главный вклад в  $H_{m_c}$  дает асимптотическая область функций Бесселя ( $x > |m_c| + 1$ ), где

$$\begin{aligned} H_{m_c} &= \int_0^\infty dx J_{m_c}^2(x) \frac{x^2 - b^2}{(x^2 + b^2)^2} \simeq \frac{1}{\pi} \int_{|m_c|+1}^\infty \frac{dx}{x} \frac{x^2 - b^2}{(x^2 + b^2)^2} \\ &= -\frac{1}{\pi b^2} \left[ \ln \frac{\sqrt{b^2 + (|m_c| + 1)^2}}{|m_c| + 1} - \frac{b^2}{b^2 + (|m_c| + 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (6.39), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_m} &= -\frac{Ne^2 \omega_0 Z_0}{\pi^2 p} \frac{\xi \overline{\beta}_y}{b^2 l_\perp^2} \\ &\times \left[ \ln \frac{\sqrt{b^2 + (|m_c| + 1)^2}}{|m_c| + 1} - \frac{b^2}{b^2 + (|m_c| + 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Для бетатронных мод ( $m_c = 0$ ) точность этой формулы не превышает 20 %, если  $b > 15$ . Для синхробетатронных мод, например для  $|m_c| = 3$ , точность формулы (6.43) становится меньше 10 %, если  $b > 26$ . Отметим, что при положительной хроматичности кольца затухают все моды, удовлетворяющие условию  $b \gg |m_c| + 1$ .

Если хроматический набег фазы бетатронных колебаний на длине сгустка велик ( $|\xi| \gg \min\{b, |m_c| + 1\}$ ), то с увеличением  $|\xi|$  декременты мод, вообще, уменьшаются. Например, для коротких пучков ( $b \ll |m_c| + 1$ ) главный вклад в декременты дает область, где  $|x| \gg m_c$ . Оценивая интеграл в (6.38) с логарифмической точностью, получим

$$\frac{1}{\tau_m} \simeq -\frac{Ne^2 \omega_0 Z_0}{4\pi p \xi} \left( \frac{\overline{\beta}_y}{l_\perp^2} \right) \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{|\xi|}{|m_c| + 1} \right). \quad (6.44)$$

Примерные зависимости декрементов от  $\xi$  в более широких областях параметров показаны на рис. 24 и рис. 25.

### 6.3.2. Гладкое распределение амплитуд синхротронных колебаний

Если распределение частиц по амплитудам синхротронных колебаний определяется достаточно гладкой функцией, то когерентные колебания сгустка вблизи задан-

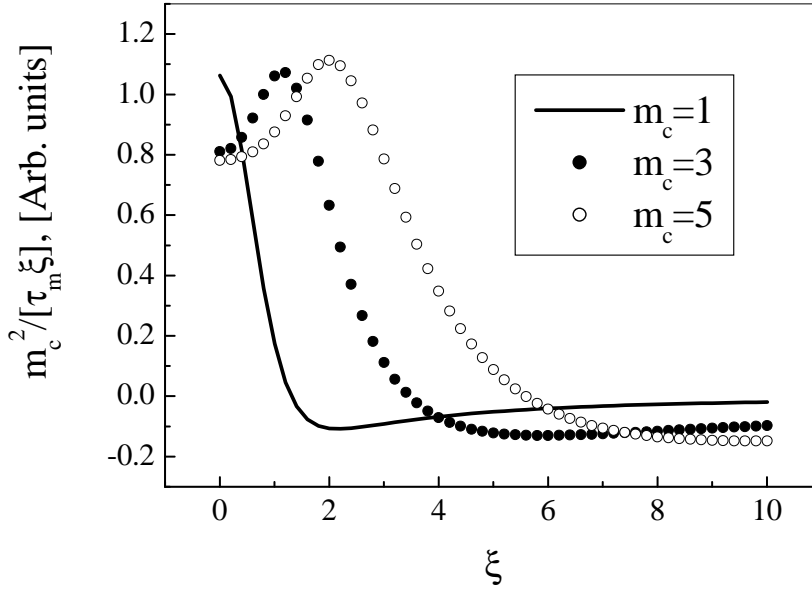


Рис. 24. Зависимости декрементов от хроматического набега фазы бетатронных колебаний на длине сгустка  $\xi$ . Короткий сгусток  $\varphi_0 \ll (|m_c| + 1)\theta_0$

ного значения частоты спектра невозмущенных колебаний  $\omega_m$  становятся многомодами, а спектры таких колебаний – многочастотными. В таких случаях изучение условий устойчивости и вычисления декрементов колебаний и их собственных частот может быть существенно облегчено, если среди мод когерентных колебаний имеется так называемая лидирующая мода, собственные частоты которой заметно отделены от собственных частот остальных мод. По аналогии с другими спектральными задачами мы будем обозначать такую моду как основное состояние когерентных колебаний пучка вблизи частоты  $\omega_m$ . При решении конкретных задач определение лидирующей моды обычно становится ясным исходя из физических соображений и ожидаемых особенностей геометрии когерентных колебаний. Например, если колебания неустойчивы, то это может быть мода с наибольшим значением инкремента (декремента) когерентных колебаний.

В таких условиях интегральное уравнение (6.33), как правило, не может быть решено аналитически. Тем не менее часто удается получить достаточно простые и довольно надежные оценки декрементов head-tail неустойчивости исходя из общих свойств решаемых интегральных уравнений.

Для простоты мы рассмотрим простой пример, когда величина хроматизма не велика так, что  $\zeta\varphi_0 \ll |m_c|$  ( $\varphi_0 = l_b/2R_0$ ), а  $|m_c| \geq 1$ . В этой области параметров оказывается, что уравнение (6.33) можно существенно упростить. Действительно, с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\dots)}{x + i0} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\dots)}{x} - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx(\dots)\delta(x) \quad (6.45)$$

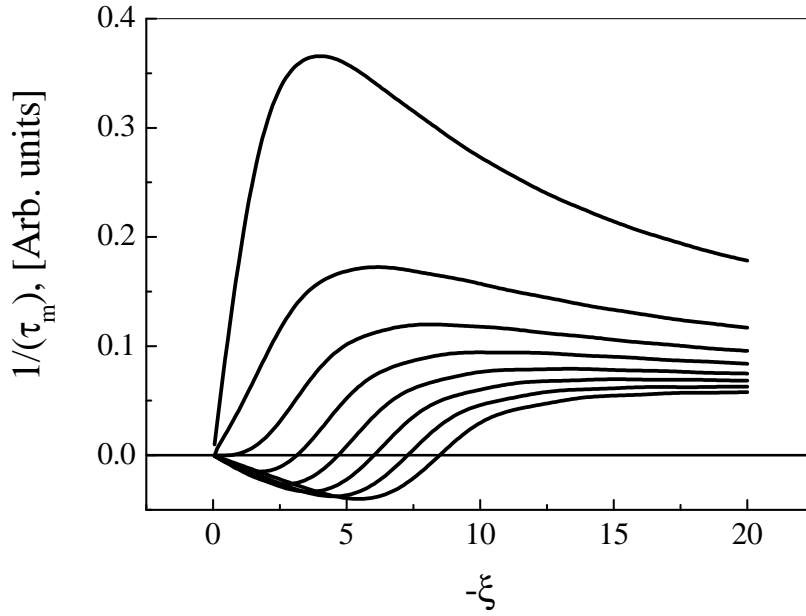


Рис. 25. Зависимости декрементов от хроматического набега фазы бетатронных колебаний на длине сгустка  $\xi$ . Сверху вниз  $m_c$  изменяется от  $m_c = 0$  до  $m_c = 7$ ,  $b = 3$

перепишем (6.33) в виде

$$\begin{aligned} \chi_m = & \frac{i\Omega_m \rho(\varphi)}{\pi \Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_c}(n\varphi)}{n - \xi} \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') \chi_m(\varphi') \\ & - \frac{\Omega_m \rho(\varphi)}{\Delta\omega_m} J_{m_c}(\xi\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(\xi\varphi') \chi(\varphi'). \end{aligned} \quad (6.46)$$

В области  $\varphi_0|\xi| \ll |m_c|$  второе слагаемое в правой части этого уравнения пропорционально  $(\xi\varphi_0)^{|m_c|} \ll 1$ . Для вычисления спектра колебаний в первом приближении по  $\varphi_0|\xi|$  вкладом этого слагаемого можно пренебречь. Разложение же первого слагаемого в ряд по степеням  $\varphi_0\xi$  приводит к уравнению ( $|m_c| \geq 1$ )

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m \chi_m = & \rho(\varphi) \frac{i\Omega_m m_y \xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_c}(n\varphi)}{n^2} \\ & \times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') \chi_m(\varphi') \end{aligned} \quad (6.47)$$

или, после определения  $\Delta\omega_m = 2\Lambda_m i\Omega_m m_y \varphi_0 \xi / \pi$  и  $w_m = \chi_m \sqrt{\varphi/\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda_m w_m = & \int_0^{\infty} d\varphi' K(\varphi, \varphi') w_m(\varphi'), \\ K(\varphi, \varphi') = & \sqrt{\varphi\varphi' \rho(\varphi)\rho(\varphi')} \int_0^{\infty} \frac{dn}{\varphi_0 n^2} J_{m_c}(n\varphi) J_{m_c}(n\varphi'). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Теперь заметим, что ядро полученного уравнения, помимо симметрии по  $\varphi$  и  $\varphi'$ , является положительно определенным в том смысле, что

$$J(w) = \int_0^{\infty} d\varphi d\varphi' w(\varphi) K(\varphi, \varphi') w(\varphi') \geq 0.$$

Все собственные числа такого уравнения положительны и минимизируют функционал  $J(w)$  таким образом, что если  $\Lambda_\alpha$  и  $w_\alpha$  являются собственным числом и соответствующей ему собственной функцией, то

$$\Lambda_\alpha = \min\{J(w)\} = \lim_{w \rightarrow w_\alpha} J(w),$$

$$\int_0^\infty d\varphi w^2(\varphi) = 1. \quad (6.49)$$

Это утверждение позволяет проводить приближенные вычисления собственных функций и частот задачи не решая непосредственно уравнение (6.48). В качестве иллюстрации проведем расчет декрементов основного состояния для случая, когда

$$\rho(\varphi) = 2 \frac{\exp[-\varphi^2/\varphi_0^2]}{\varphi_0^2} \quad (6.50)$$

и, соответственно,

$$K(u, u') = 2 \exp\left(-\frac{u^2 + u'^2}{2}\right) \sqrt{uu'} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} J_{m_c}(xu) J_{m_c}(xu').$$

Согласно общим теоремам анализа собственная функция основного состояния не должна иметь корней везде, исключая точку  $\varphi = 0$ . С учетом этого обстоятельства и из явного выражения для  $K(u, u')$  мы выберем пробную функцию  $w$  в виде ( $m = |m_c|$ )

$$w_m = A_m u^{m+1/2} e^{-\beta u^2/2}, \quad A_m^2 = \frac{2\beta^{m+1}}{m!}. \quad (6.51)$$

Параметр  $\beta$  подбирается так, чтобы минимизировать интеграл  $J(w)$ . Вычислив  $J(w)$  при заданном  $\beta$ , получим

$$\begin{aligned} J &= 2A_m^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \left( \int_0^\infty du u^{m+1} J_m(xu) \exp\left[-\frac{u^2}{2}(1+\beta)\right] \right)^2 \\ &= \frac{2A_m^2}{(1+\beta)^{2m+2}} \int_0^\infty dx x^{2m-2} \exp\left(-\frac{x^2}{1+\beta}\right) \\ &= \frac{2\beta^{m+1}}{(1+\beta)^{m+5/2}} \frac{\Gamma(m-1/2)}{m!}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Функция  $J(\beta)$  достигает минимального значения

$$\frac{dJ}{d\beta} = \frac{\beta^m (m+1 - \frac{3}{2}\beta)}{(1+\beta)^{m+5/2+1}} \frac{2\Gamma(m-\frac{1}{2})}{m!} = 0,$$

равного

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{2 \left(\frac{2}{3}(m+1)\right)^{m+1}}{\left(1 + \frac{2}{3}(m+1)\right)^{m+5/2}} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)^{m+1}}{\left(m + \frac{5}{2}\right)^{m+5/2}} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}, \end{aligned} \quad (6.53)$$



в точке  $\beta = 2(m+1)/3$ . Подстановка этого значения параметра  $\beta$  в (6.51) и (6.52) приводит к выражениям

$$w_m = A_m u^{m+1/2} e^{-(m+1)u^2/3}, \quad (6.54)$$

$$\Lambda_m \geq [\Lambda_m]_{\min},$$

$$[\Lambda_m]_{\min} = \frac{3\sqrt{3}\Gamma(m-1/2)}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)^{m+1}}{m! (m+5/2)^{m+5/2}}. \quad (6.55)$$

Верхняя граница  $\Lambda_m$  определяется суммой собственных чисел уравнения (6.48):

$$\Lambda_\Sigma = \int_0^\infty du u^2 e^{-u^2/2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} J_m^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{4m^2-1}. \quad (6.56)$$

Таким образом, декременты ( $\delta = -\text{Im}\omega$ ) синхробетатронных мод короткого сгустка оцениваются формулами

$$\begin{aligned} \delta_m &= -\frac{2\varphi_0 \zeta}{\pi} \Lambda_m \text{Re}(m_y \Omega_m), \quad |m_c| \neq 0, \\ [\Lambda_m]_{\min} &\leq \Lambda_m \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{4m^2-1}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Подставив в последнее выражение  $\Omega_m$  из (6.34), получим

$$\delta_m = \Lambda_m \frac{Ne^2 \omega_0 Z_0 \beta_y l_b}{2\pi p v} \frac{d\nu_y}{2l_\perp^2 d \ln \omega_0}, \quad \beta_y \simeq \frac{R_0}{\nu_y}. \quad (6.58)$$

Замена  $R_0/\nu_y$  на  $\beta_y$  проведена не случайно. Такой результат сохраняется и при более общем рассмотрении. Зависимость декремента head-tail неустойчивости от  $\beta$ -функции в месте расположения электродов описывает тот факт, что эта неустойчивость связана с возбуждением полей продольным движением сгустка.

Величина  $\delta_m$  в (6.57) будет положительна и, следовательно, синхробетатронные моды будут устойчивы, если  $\text{Re}(m_y \Omega_m) \zeta < 0$ .

Для вычисления декремента бетатронной моды удобно воспользоваться следующими соображениями. Поскольку

$$\sum_{m_c=-\infty}^{\infty} J_{m_c}^2(x) = 1,$$

легко видеть, что сумма декрементов бетатронной моды и всех синхробетатронных мод уравнения (6.33) равна нулю:

$$\sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \delta_{m_c} = \Omega_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n - m_y \zeta} = 0. \quad (6.59)$$

Поэтому пишем

$$\delta_{m_y,0} = - \sum_{m_c \neq 0} \delta_{m_y, m_c}. \quad (6.60)$$

### 6.3.3. Приближение Пеллегрини

Еще один способ приближенного решения интегрального уравнения (6.47) был предложен К. Пеллегрини в работе [10]. Он основан на замечании, что ядро союзного к (6.47) интегрального уравнения:

$$\Lambda w(\varphi) = \int_0^\infty d\varphi_1 \varphi_1 \rho(\varphi_1) K_2(\varphi, \varphi_1) w(\varphi_1), \quad \Delta \omega_m = \frac{i\Omega_m m_y \xi}{\pi} \Lambda, \quad (6.61)$$

где

$$\chi_m(\varphi) = \rho(\varphi) w(\varphi),$$

определяется интегралом ( $m = |m_c|$ )

$$K_2(\varphi, \varphi_1) = 2 \int_0^\infty \frac{J_m(n\varphi) J_m(n\varphi_1)}{n^2} dn. \quad (6.62)$$

Такой интеграл может быть вычислен точно (например, в [9]). С деталями этих вычислений можно ознакомиться еще, например, в Приложении А к учебному пособию [15], где установлено, что результат интегрирования записывается в виде

$$K_2 = \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi} (m^2 - \frac{1}{4}) \Gamma(m + 1)} \frac{\varphi_1^m \varphi^m}{(\varphi + \varphi_1)^{2m-1}} \times F\left(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; 2m + 1; \frac{4\varphi\varphi_1}{(\varphi + \varphi_1)^2}\right), \quad (6.63)$$

где  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  – гипергеометрическая функция. Учитывая, что во всех областях изменения переменных  $\varphi$  и  $\varphi_1$  аргумент гипергеометрической функции меняется в пределах от 0 до 1, а

$$F\left(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; 2m + 1; 1\right) = \frac{\Gamma(m + 1) 2^{2m}}{\Gamma(m + \frac{3}{2}) \sqrt{\pi}}, \quad (6.64)$$

заменяем правую часть в формуле (6.63) более простым выражением:

$$K_2(\varphi, \varphi_1) = \frac{2}{\pi (m^2 - \frac{1}{4})} \begin{cases} \varphi_1^m / \varphi^{m-1}, & \varphi_1 < \varphi, \\ \varphi^m / \varphi_1^{m-1}, & \varphi < \varphi_1. \end{cases} \quad (6.65)$$

Оно хотя и является приближенным, но, в целом, верно отражает характерные изменения ядра  $K_2(\varphi, \varphi_1)$  как при больших, так и при малых значениях отношения  $\varphi/\varphi_1$ . При совпадающих значениях  $\varphi$  и  $\varphi_1$  выражение в правой части (6.65) является точным. Мы будем называть указанное преобразование ядра интегрального уравнения (6.61) решением задачи в приближении Пеллегрини.

В этом приближении уравнение (6.61) заменяется следующим интегральным уравнением:

$$\Lambda_1 w(\varphi) = \frac{1}{\varphi^{m-1}} \int_0^\varphi d\varphi_1 \varphi_1^{m+1} \rho(\varphi_1) w(\varphi_1) + \varphi^m \int_\varphi^\infty d\varphi_1 \varphi_1^{-m+2} \rho(\varphi_1) w(\varphi_1), \quad (6.66)$$

где

$$\Lambda = \frac{2\Lambda_1}{\pi \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)}. \quad (6.67)$$

Согласно уравнению (6.66) функция  $w(\varphi)$  стремится к нулю пропорционально  $\varphi^m$  в области малых амплитуд синхротронных колебаний частиц ( $\varphi \rightarrow 0$ ). Однократным дифференцированием уравнения (6.66) находим

$$\Lambda_1 \frac{dw}{d\varphi} = - \frac{(m-1)}{\varphi^m} \int_0^\varphi d\varphi_1 \varphi_1^{m+1} \rho(\varphi_1) w(\varphi_1) + m\varphi^{m-1} \int_\varphi^\infty d\varphi_1 \varphi_1^{-m+2} \rho(\varphi_1) w(\varphi_1). \quad (6.68)$$

Используя (6.66), пишем

$$\varphi^m \frac{dw}{d\varphi} - m\varphi^{m-1} w(\varphi) = - \frac{(2m-1)}{\Lambda_1} \int_0^\varphi d\varphi_1 \varphi_1^{m+1} \rho(\varphi_1) w(\varphi_1)$$

или

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \left( \frac{2m-1}{\Lambda_1} \varphi \rho(\varphi) - \frac{m(m-1)}{\varphi^2} \right) w = 0. \quad (6.69)$$

Для сгустков с гладким распределением по амплитудам синхротронных колебаний частиц  $\rho(\varphi)$  последнее уравнение должно решаться численно.

Простые решения уравнения (6.69) могут быть найдены в аналитической форме для случая, когда  $\rho(\varphi)$  является ступенчатой функцией  $\varphi$ :

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \begin{cases} 1, & \varphi \leq \varphi_0, \\ 0, & \varphi > \varphi_0. \end{cases} \quad (6.70)$$

С таким распределением  $\rho(\varphi)$  интегральное уравнение (6.66) после подстановки  $r = \varphi/\varphi_0$  записывается в виде

$$\Lambda_2 w(r) = \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r dr_1 r_1^{m+1} w(r_1) + r^m \int_r^1 dr_1 r_1^{-m+2} w(r_1), \quad (6.71)$$

где мы обозначили  $\Lambda_1 = 2\varphi_0\Lambda_2$ . При этом само уравнение (6.69) на отрезке  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  принимает форму

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \left( \frac{(2m-1)r}{\Lambda_2} - \frac{m(m-1)}{r^2} \right) w = 0. \quad (6.72)$$

Еще одна подстановка  $u = gr$ , где

$$g = \left( \frac{2m-1}{\Lambda_2} \right)^{1/3}, \quad (6.73)$$

приводит к уравнению

$$\frac{d^2 w}{du^2} + \left( u - \frac{m(m-1)}{u^2} \right) w = 0. \quad (6.74)$$

Последнее уравнение должно решаться с граничными условиями  $w(0) = 0$  и, согласно (6.71),

$$\Lambda_2 (rw' - mw)_{r=1} = - (2m-1) \int_0^1 dr_1 r_1^{m+1} w(r_1) = - (2m-1) \Lambda_2 w(1)$$

или

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=1} + (m-1)w(1) = 0. \quad (6.75)$$

Подстановкой  $x = u^\alpha$  и последующими простыми преобразованиями:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{du} &= \alpha x^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{dw}{dx}, \\ \frac{d^2w}{du^2} &= \alpha x^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{d}{dx} \left( \alpha x^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{dw}{dx} \right) \\ &= \alpha^2 x^{2-\frac{2}{\alpha}} \frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) x^{1-\frac{2}{\alpha}} \frac{dw}{dx}, \end{aligned}$$

– получаем

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{\alpha-1}{\alpha x} \frac{dw}{dx} + \left( \frac{1}{\alpha^2} x^{\frac{3}{\alpha}-2} - \frac{m(m-1)}{\alpha^2 x^2} \right) w = 0. \quad (6.76)$$

Если в этом уравнении положить  $\alpha = 3/2$  и  $w(x) = x^{1/3}p(x)$ , то найдем, что функция  $p(x)$  удовлетворяет уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dp}{dx} + \left( \frac{4}{9} - \frac{(2m-1)^2}{9x^2} \right) p = 0. \quad (6.77)$$

Поэтому пишем:

$$p(x) = J_{\frac{2m-1}{3}} \left( x \frac{2}{3} \right) \quad (6.78)$$

и

$$w = x^{1/3}p = \sqrt{u} J_{\frac{2m-1}{3}} \left( u^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \right). \quad (6.79)$$

Учитывая, что при малых значениях аргумента для функций Бесселя выполнено соотношение

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^\nu, \quad |z| \ll |\nu|,$$

находим, что для малых амплитуд синхротронных колебаний частиц собственные функции  $w$  изменяются пропорционально  $\varphi^m$

$$w \propto \sqrt{\varphi} \left( \varphi^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2m-1}{3}} = \varphi^m, \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (6.80)$$

Для вычисления собственных чисел решений перепишем левую часть граничного условия (6.75) в виде

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=1} + (m-1)w(1) = \\ &= (2m-1)\sqrt{g} J_{\frac{2m-1}{3}} \left( \frac{2}{3} g^{3/2} \right) - g^2 J_{\frac{2}{3}m + \frac{2}{3}} \left( \frac{2}{3} g^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Обозначив здесь

$$\nu = \frac{2m-1}{3}, \quad \frac{2}{3}m + \frac{2}{3} = \nu + 1,$$

пишем

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=1} + (m-1)w(1) = \sqrt{g} \left( 3\nu J_\nu \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) - g^{3/2} J_{\nu+1} \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) \right). \quad (6.82)$$

Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя [9]:

$$z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} - \nu J_\nu(z) = -z J_{\nu+1}(z)$$

и

$$z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \nu J_\nu(z) = z J_{\nu-1}(z),$$

получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=1} + (m-1)w(1) &= \sqrt{g} \left( 3\nu J_\nu \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) - g^{3/2} J_{\nu+1} \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) \right) \\ &= \sqrt{g} \left( 3\nu J_\nu \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) J_{\nu+1} \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{g} \left( \nu J_\nu(z) + \left( z \frac{d}{dz} J_\nu(z) \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{g} z J_{\nu-1}(z), \quad z = \frac{2}{3}g^{3/2}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (6.75), находим

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=1} + (m-1)w(1) = g^2 J_{\frac{2m-4}{3}} \left( \frac{2}{3}g^{3/2} \right) = 0. \quad (6.83)$$

Таким образом, в приближении Пеллегрини собственные числа решений, описывающих медленные, синхротронные колебания сгустка, находятся вычислением корней функции Бесселя порядка  $(2m-4)/3$ . Эти корни являются положительными, действительными числами. Поэтому знак мнимой части сдвига частоты  $\Delta\omega_m$  определяется знаком параметра  $\zeta$  для всех собственных решений. Число таких решений бесконечно велико.

Величина  $g$  в этих формулах пропорциональна волновому вектору собственного решения. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем писать

$$w_g(r) = B_g \sqrt{gr} J_\nu \left( g^{3/2} \frac{2}{3} r^{3/2} \right), \quad \nu = \frac{2m-1}{3}. \quad (6.84)$$

Здесь  $B_g$  – нормировочная постоянная собственной функции моды. Если значения  $g$  находятся решением дисперсионного уравнения (6.83), то решения  $w_g$  ортогональны. Это означает, что интеграл

$$A_{g,h} = 2 \int_0^1 dr r w_g(r) w_h(r) \quad (6.85)$$

тождественно равен нулю для несовпадающих значений чисел  $g$  и  $h$ . В этом можно убедиться непосредственным вычислением величин  $A_{g,h}$ . Действительно, записывая

$$A_{g,h} = 2B_g B_h \sqrt{gh} \int_0^1 dr r^2 J_\nu \left( g^{3/2} \frac{2}{3} r^{3/2} \right) J_\nu \left( h^{3/2} \frac{2}{3} r^{3/2} \right) \quad (6.86)$$

и выполняя подстановку:

$$t = \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}, \quad r = \left(\frac{3}{2}t\right)^{2/3}, \quad dr = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \frac{dt}{t^{1/3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{dt}{t^{1/3}},$$

получаем

$$A_{g,h} = 3B_g B_h \sqrt{gh} \int_0^{2/3} dt t J_\nu(g^{3/2}t) J_\nu(h^{3/2}t). \quad (6.87)$$

Поскольку [9]

$$\begin{aligned} & \int dt t J_\nu(g^{3/2}t) J_\nu(h^{3/2}t) = \\ & = t \frac{h^{3/2} J_\nu(g^{3/2}t) J_{\nu-1}(h^{3/2}t) - g^{3/2} J_{\nu-1}(g^{3/2}t) J_\nu(h^{3/2}t)}{g^3 - h^3}, \end{aligned}$$

пишем

$$\begin{aligned} A_{g,h} &= 2B_g B_h \sqrt{gh} \\ & \times \frac{h^{3/2} J_\nu\left(\frac{2}{3}g^{3/2}\right) J_{\nu-1}\left(\frac{2}{3}h^{3/2}\right) - g^{3/2} J_{\nu-1}\left(\frac{2}{3}g^{3/2}\right) J_\nu\left(\frac{2}{3}h^{3/2}\right)}{g^3 - h^3}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Из этой формулы следует, что если  $g$  и  $h$  – несовпадающие собственные числа решений, то согласно дисперсионному уравнению (6.83) числитель в (6.88) тождественно равен нулю ( $A_{g,h} = 0$ ). Нормировочный интеграл собственных решений определяется формулой

$$A_{g,g} = B_g^2 3\sqrt{gh} \int_0^{2/3} dt t J_\nu^2(g^{3/2}t) = B_g^2 \frac{2}{3} g J_\nu^2(2g^{3/2}/3). \quad (6.89)$$

Нормируя, например, собственные решения условием  $A_{g,g} = 1$ , находим значение нормировочной постоянной

$$B_g^2 \frac{2}{3} g J_\nu^2(2g^{3/2}/3) = 1. \quad (6.90)$$

С ростом номеров решений величины собственных чисел  $\Lambda_2$  убывают. В области, где выполнено неравенство ( $g^{3/2} \gg |m-2|$ ,  $m \neq 2$ ), корни уравнения (6.83) оцениваются асимптотической формулой [9]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (g^{3/2})_{\nu,k} &= \pi \left( k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{4\nu^2 - 1}{8\pi \left( k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right)} \\ & - \frac{(4\nu^2 - 1)(28\nu^2 - 31)}{384\pi^3 \left( k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right)^3}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Здесь

$$\nu = \frac{|2m-4|}{3}, \quad (6.92)$$

а  $k$  – числа натурального ряда. Поэтому

$$g_{\nu,k}^{3/2} = \frac{3}{2} \pi \left( k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) h_{\nu,k}, \quad (6.93)$$

где обозначено

$$h_{\nu,k} = 1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8\pi^2 \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} - \frac{(4\nu^2 - 1)(28\nu^2 - 31)}{384\pi^4 \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^4}. \quad (6.94)$$

Записывая

$$g_{\nu,k}^3 = \frac{9\pi^2}{4} \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 h_{\nu,k}^2$$

и

$$\frac{\pi\Lambda}{\varphi_0} = \frac{4\Lambda_2}{\pi^2 \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{8}{\pi^2 \left(m + \frac{1}{2}\right) g_{\nu,k}^3},$$

находим

$$\frac{\pi\Lambda}{\varphi_0} = \frac{32}{9\pi^4 \left(m + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 h_{\nu,k}^2}. \quad (6.95)$$

Вспоминая определение  $\Lambda$  в уравнении (6.61), получим

$$\Delta\omega_{m,k} = i\Omega_m m_y \zeta \varphi_0 \frac{32}{9\pi^4 \left(m + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\left(k + \frac{|m-2|}{3} - \frac{1}{4}\right)^2 h_{\nu,k}^2}. \quad (6.96)$$

Сравнение различных способов вычисления корней дисперсионного уравнения в приближении Пеллегрини (рис. 26) показывает, что за исключением основной моды  $k = 0$  формула (6.95) дает разумное согласие с результатами прямого вычисления корней. Вместе с тем, согласие с нулями асимптотики функции  $J_\nu(2g^{3/2}/3)$  начинается только в области  $k \geq 4$ .

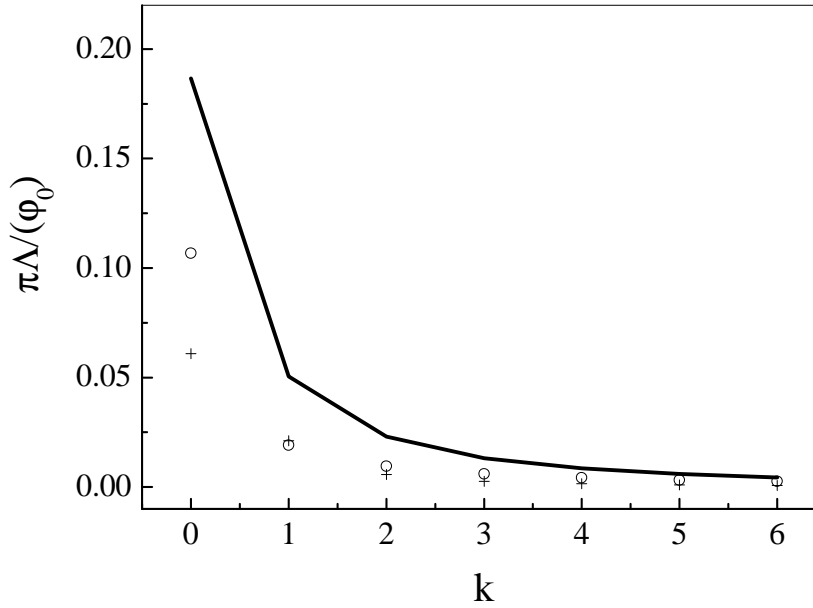


Рис. 26. Зависимость собственных чисел первой синхротронной моды ( $m = 1$ ) от номера решения  $k$ . Окружности – численное решение уравнения (6.83), знаки (+) – приближение формулой (6.95), сплошная линия – нули асимптотики функции  $J_\nu(2g^{3/2}/3)$

Отметим также заметное разделение величин  $\Lambda$  для основной ( $k = 0$ ) и более высоких по  $k$  мод колебаний. Для неустойчивых решений это дает основание рассматривать основную моду, как лидирующую.

## 6.4. Задачи к лекции 6

1. Для распределения по амплитудам синхротронных колебаний частиц:

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \begin{cases} 1, & \varphi \leq \varphi_0, \\ 0, & \varphi > \varphi_0 \end{cases}$$

вычислить декременты синхротронных колебаний короткого ( $R_0\varphi_0 \ll l$ ), ультрарелятивистского сгустка, взаимодействующего с согласованной пластиной.

2. Приняв, что  $\rho(\varphi) = \delta(\varphi^2 - \varphi_0^2)$ , показать, что декременты быстрого затухания дипольных поперечных когерентных колебаний ( $m_c = 0$ ) не зависят от модуляции  $\beta$ -функций вдоль длины пластины.

3. Приняв, что  $\rho(\varphi) = \delta(\varphi^2 - \varphi_0^2)$ , вычислить декременты вертикальных синхробетатронных мод ( $\omega \simeq m_y\omega_y + m_c\omega_c$ ) короткого, ультрарелятивистского сгустка, взаимодействующего с согласованной пластиной. Длина пластины  $l$ ,  $R_0\varphi_0 \ll l$ , разбросом частот бетатронных и синхротронных колебаний пренебречь.

4. Для распределения по амплитудам синхротронных колебаний частиц:

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \begin{cases} 1, & \varphi \leq \varphi_0, \\ 0, & \varphi > \varphi_0 \end{cases}$$

и модельного импеданса, приводящего к формуле (6.32), оценить в приближении Пеллегрини сдвиги частот и инкременты бетатронных когерентных колебаний ( $m_c = 0$ ).



# Лекция 7

## Связь синхробетатронных мод

Еще один вид неустойчивостей когерентных колебаний сгустка, носящих глобальный характер, может вызываться связью синхробетатронных мод пучка (Р. Кохаупт 1980, [16]). Ясно, что такие неустойчивости будут проявляться лишь при достаточно больших токах сгустков, когда величины когерентных сдвигов частот отдельных синхробетатронных мод сравниваются или превышают частоту синхротронных колебаний. Такая связь может также вызываться разбросами частот бетатронных и синхротронных колебаний, превышающими либо сравнимыми с  $\omega_c$ .

### 7.1. Постановка задачи

Как упоминалось в разделе 4.1, в таких условиях мы не можем пренебречь в уравнении (3.18) связью мод с отличающимися  $m_c$ . В результате спектры когерентных колебаний пучка определяются следующей бесконечной системой связанных интегральных уравнений

$$(\Delta\omega_m - m_c\omega_c)\chi_m = \rho(\varphi_c) \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_m(n) J_{m_c}(n_1\varphi) \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m'_c}(n_1\varphi') \chi_{m'}(\varphi'). \quad (7.1)$$

Поскольку такая система уравнений не может быть решена в общем виде, ниже мы рассмотрим модель, в которой

$$\rho(\varphi) = \delta(\varphi_0^2 - \varphi^2), \quad \Omega_m(n) = \frac{i\Omega_m}{\pi(n + i\Delta)}, \quad (7.2)$$

а хроматичность фокусировки равна нулю ( $dv_y/d\ln\omega_0 = 0$ ).

В рассматриваемой модели решения уравнений (7.1) записываются в виде

$$\chi_m(\varphi) = C_m \delta(\varphi_0^2 - \varphi^2). \quad (7.3)$$

Поэтому интегральные уравнения (7.1) заменяются бесконечной системой алгебраических уравнений для амплитуд  $C_m$

$$(\Delta\omega_m - m_c\omega_c)C_m = \frac{i\Omega_m}{\pi} \sum_{m'_c=-\infty}^{\infty} C_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_c}(n\varphi_0) J_{m'_c}(n\varphi_0)}{n + i\Delta}. \quad (7.4)$$

Вводя обозначения

$$x = \frac{\Delta\omega_m}{\omega_c}, \quad w = \frac{\Omega_m}{\omega_c},$$

мы перепишем эту систему в виде

$$(x - m_c)C_m = \frac{iw}{\pi} \sum_{m'_c=-\infty}^{\infty} C_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n + i\Delta} J_{m_c}(n) J_{m'_c}(n). \quad (7.5)$$

## 7.2. СВЯЗЬ СОСЕДНИХ МОД

Хотя дисперсионное уравнение системы (7.5) может быть найдено точно (например, [17]), полезно начать изучение особенностей решений этой системы в области  $|w| < 1$ . Мы ожидаем, что неустойчивость колебаний связана с сближением частот синхробетатронных мод. В рассматриваемой модели, в области  $0 \leq w \leq 1$ , это может происходить из-за приближения частоты бетатронной моды ( $\omega \approx \omega_y + \Omega_m$ ) к частоте первой синхробетатронной моды ( $\omega \approx \omega_y + \omega_c$ ). Предполагая, что это сближение может быть учтено по теории возмущений, перепишем систему (7.5), оставив в ней лишь те слагаемые, которые описывают связь этих мод

$$\begin{aligned} xC_0 &= \frac{iw}{\pi} \left[ C_0 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0^2(n)}{n + i\Delta} + C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0(n)J_1(n)}{n + i\Delta} \right], \\ (x - 1)C_1 &= \frac{iw}{\pi} \left[ C_0 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0(n)J_1(n)}{n + i\Delta} + C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_1^2(n)}{n + i\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Воспользовавшись формулой (6.45), а также учитывая, что  $J_0(n)$  является четной, а  $J_1(n)$  – нечетной функцией  $n$ , мы можем переписать уравнения (7.6) в виде

$$\begin{aligned} (x - w)C_0 &= i \frac{4w}{\pi^2} C_1, \\ (x - 1)C_1 &= i \frac{4w}{\pi^2} C_0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

В последние уравнения подставлено численное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n} J_0(n) J_1(n) = \frac{4}{\pi}.$$

Согласно уравнениям (7.7), частоты связанных мод определяются уравнением

$$(x - w)(x - 1) = -\frac{16w^2}{\pi^4}, \quad (7.8)$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{1 + w}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}}. \quad (7.9)$$

Обе моды устойчивы при выполнении условия

$$(1 - w)^2 - \frac{64w^2}{\pi^4} \geq 0. \quad (7.10)$$

Знаку равенства соответствует порог неустойчивости. Можно видеть, что полученное условие устойчивости колебаний вообще не зависит от знака  $\Omega_m$ . Если  $\Omega_m < 0$ , то неустойчивыми оказываются бетатронная и (-1)-я синхробетатронная моды. Поскольку факт появления неустойчивых мод не зависит от знака  $w$ , пороговое соотношение можно записать в виде

$$|w| \leq w_{th}, \quad w_{th} = \frac{1}{1 + 8/\pi^2} \approx 0.552. \quad (7.11)$$

Выше этого порога частоты связанных мод совпадают (рис. 27), а одна из мод

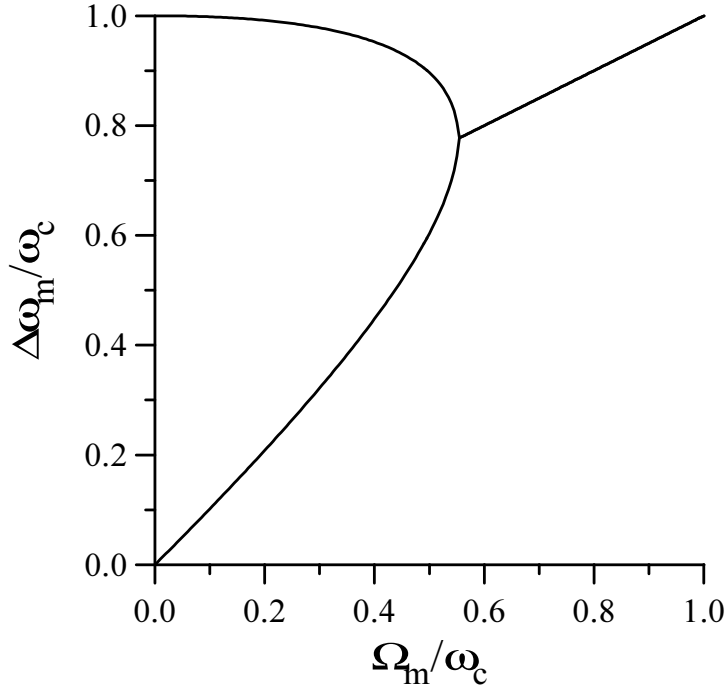


Рис. 27. Зависимости когерентных сдвигов частоты бетатронной и первых синхробетатронных мод от тока пучка ( $\Omega_m$ )

колебаний становится неустойчивой.

Отметим, что хотя неустойчивость из-за связи синхробетатронных мод является однооборотной и обусловлена быстрозатухающими наведенными полями, эта неустойчивость относится к неустойчивостям динамического типа. Поэтому условие устойчивости ограничивает допустимую величину когерентного сдвига частоты колебаний, а инкремент неустойчивой моды вблизи порога неустойчивости увеличивается пропорционально  $\sqrt{|w| - w_{th}}$ .

### 7.3. Влияние демпфирования связанных мод

Если  $\Delta_1$  и  $\Delta_0$  – сдвиги частот связанных мод, то неустойчивы моды, для которых выполняется «условие суммового резонанса»

$$\omega_c \approx \Delta_1 + \Delta_0.$$

По этой причине для демпфирования неустойчивости необходимо демпфирование обеих связанных мод. Пусть, например,  $\lambda_0$  – декремент бетатронной, а  $\lambda_1$  – синхробетатронной моды. Тогда уравнение (7.8) принимает вид

$$(x - w + i\lambda_0)(x - 1 + i\lambda_1) = -\frac{16w^2}{\pi^4}. \quad (7.12)$$

Такое уравнение имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{1 + w - i\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - w - i\Lambda_-)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}}, \quad (7.13)$$

где  $\Lambda_{\pm} = \lambda_1 \pm \lambda_0$ . Декременты колебаний определяются выражениями

$$-\text{Im}x = \frac{\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}} - X \right]}, \quad (7.14)$$

$$X = \frac{(1-w)^2 - \Lambda_-^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}.$$

Как видно из этих выражений, наиболее простым является случай, когда декременты бетатронной и синхробетатронной мод равны ( $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$ ). При этом вместо (7.13) пишем

$$x_{1,2} = -i\lambda + \frac{1+w}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}},$$

а пороговый ток определяется равенством

$$\lambda^2 = \frac{16w^2}{\pi^4} - \frac{(1-w)^2}{4}.$$

При произвольных величинах  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , но положительном значении величины  $\Lambda_+$  оба декремента положительны при выполнении условия

$$\frac{\Lambda_+}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}} - X \right]}.$$

Возведя обе части этого неравенства в квадрат и проводя несложные преобразования

$$\frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{X}{2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}},$$

$$\left( \frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{X}{2} \right)^2 - \frac{X^2}{4} \geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{16},$$

$$\Lambda_+^2 \left( \frac{\Lambda_+^2}{4} + X \right) \geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4},$$

$$\Lambda_+^2 \left( \frac{(1-w)^2}{4} + \lambda_0\lambda_1 - \frac{16w^2}{\pi^4} \right) \geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4},$$

получим

$$(1-w)^2 \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\Lambda_+^2} + \lambda_0 \lambda_1 - \frac{16w^2}{\pi^4} \geq 0. \quad (7.15)$$

Если один из декрементов равен нулю ( $\lambda_0 \lambda_1 = 0$ ), это условие всегда нарушено. Поэтому, как уже говорилось, для стабилизации неустойчивости связанных мод необходимо демпфирование обеих мод. При выполнении условия (7.15) бетатронная и первая синхробетатронная моды затухают. Это, однако, только отодвигает порог неустойчивости, который теперь будет определяться присоединением к моде второй синхробетатронной моды. Повышение порога устойчивости новой конфигурации, в свою очередь, потребует демпфирования этой моды.

## 7.4. Затухание Ландау

В заключение этой главы обсудим влияние затухания Ландау на устойчивость связанных синхробетатронных мод (например, в [18]). Напомним, что затухание Ландау синхробетатронных когерентных колебаний сгустка ( $m_c \neq 0$ ) может быть обусловлено разбросом частот бетатронных колебаний или разбросом частот синхротронных колебаний частиц. При этом разброс частот синхротронных колебаний не вызывает затухания Ландау бетатронных мод сгустка ( $m_c = 0$ ). Поскольку подавление неустойчивости связанных синхробетатронных мод требует одновременно демпфирования бетатронных и синхробетатронных колебаний сгустка, затухание Ландау будет подавлять неустойчивость из-за связи синхробетатронных мод только в том случае, когда сгусток обладает разбросом частот бетатронных колебаний частиц. В сгруппированном пучке такой разброс частот обеспечивается октупольной нелинейностью фокусирующих полей накопителя.

В используемой здесь модели и для дипольных поперечных колебаний влияние разброса частот на устойчивость мод описывается уравнениями

$$\begin{aligned} C_0[1 - wF(x)] &= \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1} M_{2k+1}}{(2k+1)^2}, \\ C_{2k+1} &= \frac{4iw}{\pi^2} \frac{C_0 F(x)}{(2k+1)^2} + \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_{2p} M_{2p}}{(2k+1)^2 - 4p^2}, \\ C_{2p} &= \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1} M_{2k+1}}{(2k+1)^2 - 4p^2}, \\ C_{-2k-1} &= -C_{2k+1}, \quad C_{-2p} = C_{2p}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где  $M_p = F(x-p) + F(x+p)$ , а

$$F(\omega) = - \int_0^{\infty} dI \frac{I \partial f_0 / \partial I}{\omega - \omega_y(I)}, \quad \text{Im} \omega > 0.$$

Эти уравнения, однако, не могут быть решены так же легко, как те, что описывали спектры колебаний в отсутствие разброса частот. По этой причине ниже мы перейдем

к изучению решений приближенных уравнений, которые получаются обрывом системы (7.16) на некотором  $m_c = m_{th}$ . В последнем случае уравнения (7.16) заменяются следующими:

$$\sum_{m'_c=0}^{m_{th}} Q_{m_c, m'_c}(x) C_{m'_c} = 0, \quad m_c = 0, 1, \dots, m_{th},$$

а дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\Phi(x) = \det(\mathbf{Q}(x)) = 0. \quad (7.17)$$

Условие устойчивости мод, описываемых этим уравнением, может быть получено с помощью т. н. критерия Найквиста. Этот критерий основан на вычислении набега фазы функции  $\Phi(x)$  при изменении  $x$  вдоль и слегка выше действительной оси комплексной переменной  $x$ . Если функция распределения пучка является несингулярной функцией  $I$ , то  $F$  и  $\Phi$  – также несингулярные функции в верхней полуплоскости комплексной переменной  $x$ . По этой причине, а также поскольку

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1,$$

число корней дисперсионного уравнения в верхней полуплоскости  $x$  равно упомянутому набегу фазы  $\Phi$ , деленному на  $2\pi$ . Функция  $\Phi(x)$  отображает действительную ось  $x$  в некоторую замкнутую кривую в плоскости комплексной переменной  $\Phi$  (так называемый годограф  $\Phi$ ). Критерий Найквиста утверждает, что собственные моды колебаний устойчивы, если годограф  $\Phi$  не охватывает начало координат.

Для упрощения вычислений мы рассмотрим один из наиболее простых случаев, когда  $\omega_y$  линейно изменяется с  $I$  ( $\omega_y = \omega_{y0} + \kappa I$ ,  $\kappa = \partial\omega_y/\partial I_y$ ), а  $f_0$  является показательной функцией ( $f_0 = \exp(-I/I_0)/I_0$ ). При этом

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^\infty du \frac{ue^{-u}}{x - zu + i\Delta}, \quad z = \frac{\delta\omega_y}{\omega_c}, \quad \delta\omega_y = \kappa I_0, \\ &= ve^{-v} [\text{Ei}(v) - i\pi\theta(v)] - 1, \quad v = x/z, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где  $\text{Ei}(x)$  – так называемая интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^\infty dt \frac{e^{-t}}{t},$$

а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Два таких годографа приведены в качестве примера на рис. 28. Как видно, годограф 1 на рис. 28, соответствующий положительному когерентному сдвигу частоты, не окружает начала координат, что соответствует устойчивым модам колебаний. Численное значение  $w$  в этом случае не противоречит порогу в (7.11). В противоположность этому, годограф 2 на рис. 28, вычисленный для такого же по величине, но отрицательного  $w$ , соответствует неустойчивым колебаниям. Несимметрия поведения мод для положительных и отрицательных  $\Omega_m$  обязана принятой здесь упрощенной модели нелинейности бетатронных колебаний. Напомним, что аналогичное

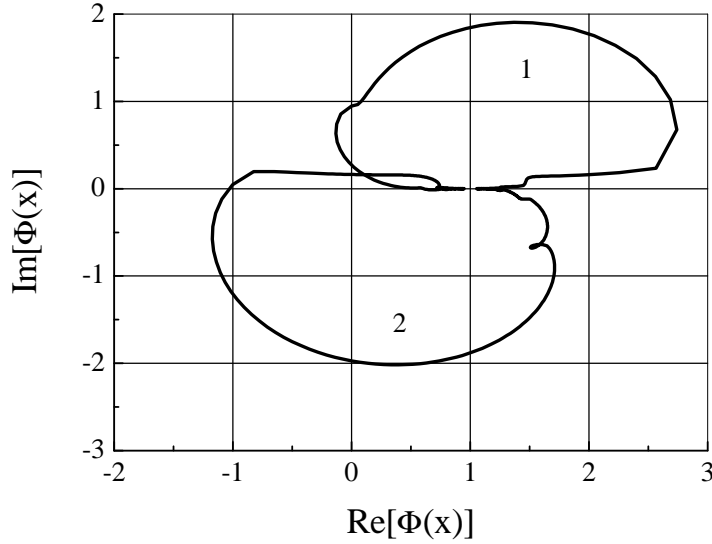


Рис. 28. Годограф  $\Phi(x)$  для дисперсионного уравнения (7.17): 1 –  $\omega_c = 3 \times \delta\omega_y$ ,  $\Omega_m = 1.7 \times \delta\omega_y$ ; 2 –  $\omega_c = 3 \times \delta\omega_y$ ,  $\Omega_m = -1.7 \times \delta\omega_y$

поведение имеет граница области устойчивости несвязанных синхробетатронных мод (например, на рис. 12). В более реалистической модели, учитывающей зависимости  $\omega_y$  от  $I_y$  и  $I_x$ , например (4.30):

$$\omega_y = \omega_{y0} + \left( \frac{\partial\omega_y}{\partial I_y} \right)_0 I_y + \left( \frac{\partial\omega_y}{\partial I_x} \right)_0 I_x,$$

такая несимметрия может оказаться менее выраженной за счет сближения парциальных разбросов частот  $\delta\omega_y = I_{y0} |(\partial\omega_y/\partial I_y)_0|$  и  $\delta\omega_x = I_{x0} |(\partial\omega_y/\partial I_y)_0|$ .

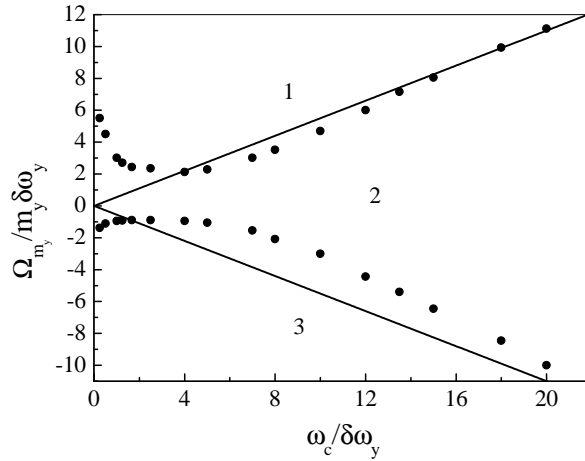


Рис. 29. Граница области устойчивости связанных синхробетатронных мод (точки), вычисленная с учетом разброса частот бетатронных колебаний ( $\omega_y = \omega_{y0} + I_y(\partial\omega_y/\partial I_y)$ ). Сплошная линия представляет границу области устойчивости, определяемую условием (7.11). Колебания неустойчивы в областях 1 и 3

Изучение поведения годографов при изменении  $\Omega_m$  и  $\omega_c$  позволяет построить границу области устойчивости, соответствующую дисперсионному уравнению (7.17).

Как уже говорилось, она несимметрична относительно оси  $\Omega_m = 0$  (рис. 29). Кроме того, ширина полосы, в которой колебания затухают, увеличивается в областях, где  $\omega_c \gg \delta\omega_y$ , либо  $\omega_c \ll \delta\omega_y$ . Для высоких частот синхротронных колебаний условие устойчивости асимптотически приближается к определяемому формулой (7.11). Увеличение ширины области устойчивости при малых частотах синхротронных колебаний согласуется с аналогичным поведением границы области устойчивости бетатронных колебаний. Однако очень сильное уменьшение частоты синхротронных колебаний ( $\omega_c \ll \delta\omega_y$ ) может менять характер развития неустойчивости таким образом, что поведение отдельных мод колебаний сгустка становится малозначительным. Этот случай будет рассмотрен подробнее в следующем разделе.

Отметим еще, что в рассмотренном примере появление у границы области устойчивости когерентных колебаний  $\omega_c(\Omega_{m_y})$  участков с вертикальными касательными (рис. 30) указывает на проявление антизатухания Ландау когерентных колебаний. Как уже говорилось, такое влияние разброса частот колебаний частиц на устой-

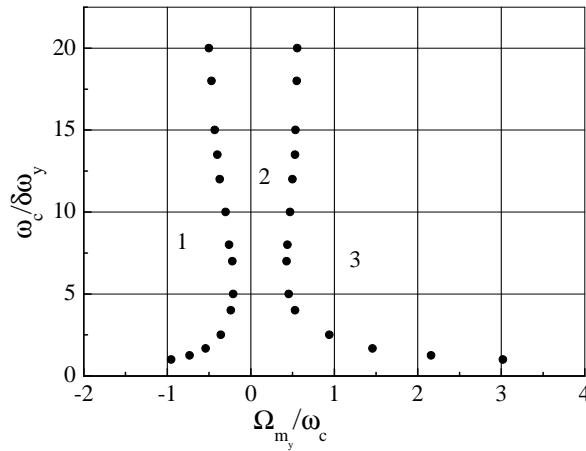


Рис. 30. Граница области устойчивости связанных синхробетатронных мод в переменных  $\omega_c/\delta\omega_y$ ,  $w_{th}$ . Колебания неустойчивы в областях 1 и 3

чивость вообще характерно для когерентных колебаний с суммовой связью мод. Здесь это явление выражается в том, что, при заданной и достаточно большой величине  $\Omega_m$ , рост частоты синхротронных колебаний частиц сначала приводит к потере устойчивости когерентных колебаний, а при дальнейшем увеличении частоты  $\omega_c$  к достижению области параметров, в которой когерентные колебания сгустка опять оказываются устойчивыми (рис. 30).

Приведем еще два примера, которые иллюстрируют зависимости формы областей устойчивости связанных синхробетатронных когерентных колебаний одиночного сгустка от характера распределения в нем частот бетатронных колебаний. Пусть, например,  $\delta\omega_y = 0$ , а  $\delta\omega_x \neq 0$ . Для этого случая граница области устойчивости несвязанных когерентных колебаний и распределение частот бетатронных колебаний в сгустке показаны на рис. 11. Связь синхробетатронных мод сгустка приводит к изменению границы области устойчивости изображенному на рис. 31. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что при этом распределении частот в сгустке граница области устойчивости сильно сдвинута в область  $\Omega_m < 0$ . Вместе с тем,



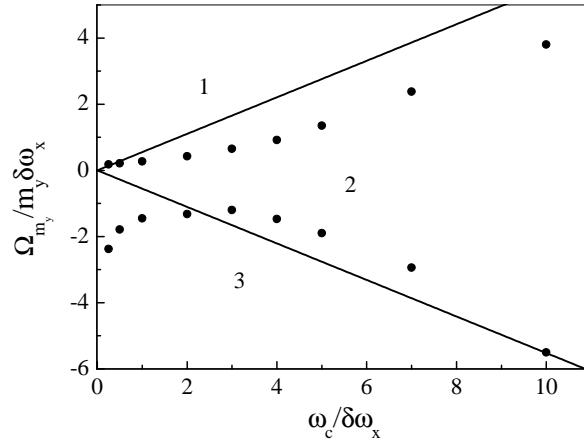


Рис. 31. То же, что на рис. 29, но  $\delta\omega_y = 0$ , а  $\delta\omega_x \neq 0$ . Колебания неустойчивы в областях 1 и 3

в переменных  $\omega_c(\Omega_m)$  (рис. 32) ширина области устойчивости по параметру  $\Omega_m/\omega_c$  увеличивается.

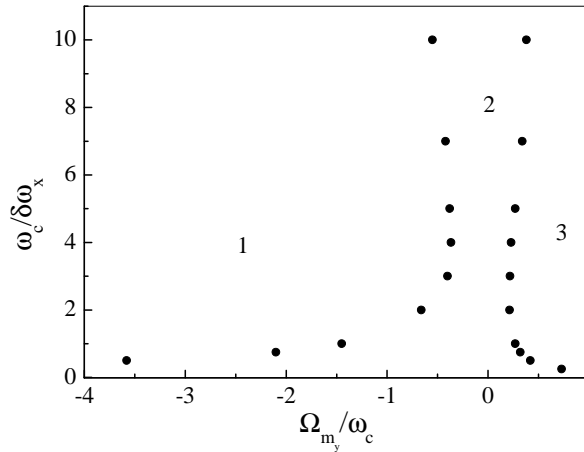


Рис. 32. То же, что на рис. 30, но  $\delta\omega_y = 0$ , а  $\delta\omega_x \neq 0$ . Колебания неустойчивы в областях 1 и 3

Равенство парциальных разбросов частот  $\delta\omega_y$  и  $\delta\omega_x$  приводит к симметризации положений границ областей устойчивости относительно смены знака параметра  $\Omega_m$  (рис. 33).

## 7.5. Задачи к лекции 7

1. Построить область устойчивости первых связанных вертикальных синхротронных мод для случая, когда  $\omega_y(I_y, I_x) = \omega_{y0} + \kappa I_x$ . Функция распределения по амплитудам радиальных бетатронных колебаний равна  $f(I_x) = \exp(-I_x/I_{0x})/I_{0x}$ . Оценить декременты затухания Ландау связанных мод в области, где когерентный сдвиг частоты существенно превышает разброс частот.

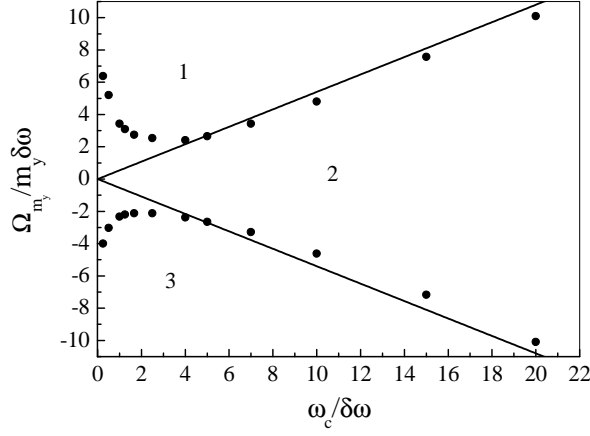


Рис. 33. То же, что на рис. 29, но  $\delta\omega_y = \delta\omega_x = \delta\omega$ . Колебания неустойчивы в областях 1 и 3

2. Изучить влияние слабого хроматизма частот бетатронных колебаний на неустойчивость связанных бетатронной и первой синхробетатронной мод.

3. Изучить условия устойчивости первых связанных вертикальных синхробетатронных мод для случая, когда наведенные сгустком поля определяются конечной проводимостью стенок вакуумной камеры.

4. Простыми преобразованиями система уравнений (7.5) сводится к следующей:

$$(x - w)C_0 = iW \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}^-}{(2k+1)^2},$$

$$C_{2k+1}^- = iW \frac{2x}{x^2 - (2k+1)^2} \left[ \frac{C_0}{(2k+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_{2p}^+}{(2k+1)^2 - 4p^2} \right],$$

$$C_{2p}^+ = iW \frac{2x}{x^2 - 4p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}^-}{(2k+1)^2 - 4p^2}.$$

Здесь  $W = (4w/\pi^2)$ , а

$$C_{2k}^+ = C_{2k} + C_{-2k}, \quad C_{2k+1}^- = C_{2k+1} - C_{-(2k+1)}.$$

Найти дисперсионное уравнение, описывающее спектр собственных решений системы (7.5).

5. Изучить действие затухания Ландау за счет октупольных компонент фокусирующих полей на условия устойчивости бетатронной и одной из первых синхробетатронных мод.

## Лекция 8

# Быстрые однооборотные неустойчивости поперечных когерентных колебаний сгустка

Перейдем к описанию случаев, в которых параметры сгустков и наведенных полей обеспечивают выполнение неравенства  $|\Omega_m| \gg \omega_c$ . В этих условиях неустойчивости когерентных колебаний сгустков развиваются настолько быстро, что за время нарастания колебаний ( $\tau_m$ ) частицы не успевают заметно сместиться по фазам  $\phi$  (например, для частицы с амплитудой синхротронных колебаний  $\phi$  такое смещение не превышает  $\Delta\phi \sim \omega_c \tau_m \phi \ll \sigma_s$ , где  $\sigma_s$  – длина сгустка в единицах среднего радиуса замкнутой орбиты).

Развитие быстрых однооборотных неустойчивостей обладает целым рядом особенностей. Наиболее важной является отсутствие спектра нормальных решений основного интегрального уравнения. Физически этот факт заранее очевиден. Отсутствие перемешивания частиц в сгустке за время развития неустойчивости приводит к разрыванию обратной связи когерентных колебаний головной и хвостовой частей пучка. По этой причине колебания головных частиц сгустка оказываются никак не связанными с колебаниями хвостовых частиц, что обуславливает отсутствие спектра собственных мод сгустка.

Первоначально быстрые однооборотные неустойчивости поперечных когерентных колебаний были обнаружены и обсуждались в связи с транспортировкой интенсивных пучков в линейных ускорителях (так называемый эффект прерывания пучка, например, в [19]). Позже было выяснено, что аналогичные явления могут иметь место и для сгустков в накопителях [20].

### 8.1. Эффект прерывания пучка

Существует обширный класс неустойчивостей когерентных колебаний, когда обратная связь колебаний по пучку оказывается незамкнутой. В таких условиях изучение устойчивости когерентных колебаний принципиально не может быть сведено к решению какого-либо дисперсионного уравнения. Исторически такие неустойчивости когерентных колебаний пучков впервые были обнаружены в линейных ускорителях

(например, в [19]) и получили название эффекта прерывания пучка. Позже было обнаружено, что аналогичные явления могут ограничивать величину накопленного тока и в циклических машинах.

Мы упростим вычисления амплитуд когерентных колебаний, предположив, что пучок состоит из  $M_b$  сгустков нулевой длины, что сгустки содержат равное число частиц  $N_b$  и заполняют пучок с периодом  $\tau = T_0/M$ , где  $T_0 = \Pi/c$  – период обращения частиц в машине, а  $M$  – целое число ( $M \geq M_b$ ). Кроме того, мы предположим, что в пучке взаимодействуют лишь соседние сгустки, а возмущение описывается силой

$$(F_x)_a = -\gamma M \omega_x W(x_a[t] + x_{a-1}[t - \tau]). \quad (8.1)$$

Здесь  $a = 2, 3, \dots, M_b$  нумерует сгустки в пучке,  $x_a$  – отклонение центра тяжести сгустка  $a$  от замкнутой орбиты. Колебания первого по счету пучка возмущаются силой (8.1) лишь в том случае, когда сгустки равномерно заполняют замкнутую орбиту накопителя ( $M_b = M$ ).

Обозначив  $x' = dx/dt$ , запишем уравнения движения для центров тяжести сгустков

$$x''_a + (\omega_x^2 + 2\omega_x W)x_a = -2\omega_x W x_{a-1}(t - b\tau). \quad (8.2)$$

Как видно из этого уравнения, самодействие сгустка приводит к изменению частоты колебаний на величину  $\Delta\omega_x = W$ , а взаимодействие сгустков приводит к раскачке колебаний последующих сгустков пучка колебаниями впередиидущих. Поскольку частоты всех сгустков сдвигаются на одну величину, ниже мы будем считать, что такой сдвиг уже учтен в частоте  $\omega_x$  заменяя  $\omega_x + W$  на  $\omega_x$ .

Для дальнейшего удобнее перейти к вращательным координатам в фазовом пространстве

$$\xi_{\pm} = x' \mp i\omega_x x. \quad (8.3)$$

Тогда, например,

$$\xi'_+ = x'' - i\omega_x[\xi_+ + i\omega_x x] = -i\omega_x \xi_+ + x'' + \omega_x^2 x$$

и поэтому

$$\xi'_{+a} + i\omega_x \xi_{+a} = iW(\xi_{-,a-1} - \xi_{+,a-1}). \quad (8.4)$$

$$\xi'_{-a} - i\omega_x \xi_{-a} = iW(\xi_{-,a-1} - \xi_{+,a-1}). \quad (8.5)$$

Связь колебаний  $\xi_{\pm}$  мала, если мала величина  $W$  (именно, если  $W \ll \omega_x$ ). Действительно, решения уравнений (8.4) и (8.5) записываются в виде

$$\xi_{\pm} = A_{\pm} e^{\mp i\omega_x t}.$$

При этом, например, величина  $A_+$  удовлетворяет уравнению

$$A'_{+,a} = -iW(A_{+,a-1} - A_{-,a-1} e^{2i\omega_x t}).$$

При выполнении условия  $W \ll \omega_x$  первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает систематическое изменение величины  $A_+$ , а второе – ее быстрые осцилляции. Относительная амплитуда таких осцилляций определяется отношением  $W/\omega_x$  и

потому мала. Интересуясь систематическим изменением  $A_+$ , мы усредним это уравнение по интервалу времени такому, что

$$\frac{1}{\omega_x} \ll \Delta t \ll \frac{1}{W}.$$

Усредненные уравнения

$$\xi'_{+a} + i\omega_x \xi_{+a} = -iW \xi_{+,a-1}, \quad (8.6)$$

$$\xi'_{-a} - i\omega_x \xi_{-a} = iW \xi_{-,a-1}. \quad (8.7)$$

описывают несвязанные колебания мод (+) и (-). Такие уравнения решаются методом преобразования Фурье по времени. Используя соотношение

$$\int_0^\infty dt e^{i\omega t} \xi' = -\xi(0) - i\omega \xi(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0,$$

заменяем, например, уравнения (8.6) следующей системой уравнения для Фурье-амплитуд  $\xi_{+,a}(\omega)$  (знак + для краткости опускаем)

$$-i[\omega - \omega_x] \xi_a(\omega) = \xi_a(0) - iW\lambda \xi_{a-1}(\omega), \quad \lambda = \exp(i\omega\tau). \quad (8.8)$$

Решение такой системы уравнений легко находится по индукции. Для первого сгустка имеем

$$\xi_1 = \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x}. \quad (8.9)$$

Для второго

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \xi_1(\omega) \\ &= \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Аналогичным образом для третьего и четвертого получаем

$$\begin{aligned} \xi_3(\omega) &= \frac{i\xi_3(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \left[ \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x} \right] \\ &= \frac{i\xi_3(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} \\ &\quad + \left( \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \right)^2 \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x} \end{aligned}$$

и

$$\xi_4(\omega) = \sum_{a=1}^4 \left( \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \right)^{4-a} \frac{i\xi_a(0)}{\omega - \omega_x}. \quad (8.11)$$

Поэтому для произвольного сгустка пучка пишем

$$\xi_a(\omega) = \frac{i}{\omega - \omega_x} \sum_{p=1}^a \left( \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \right)^{a-p} \xi_p(0). \quad (8.12)$$

Эти соотношения выполняются при любых значениях  $\omega \neq \omega_x$ . Зависимость амплитуд колебаний от времени находится обратным преобразованием Фурье

$$\xi_a(t) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \xi_a(\omega), \quad (8.13)$$

где контур интегрирования идет из  $\omega = -\infty$  в  $\omega = +\infty$  выше действительной оси  $\omega$ . Подставив в (8.13) амплитуды из (8.12), найдем ( $\lambda[\omega_x] = e^{i\omega_x \tau}$ )

$$\begin{aligned} \xi_a(t) &= e^{-i\omega_x t} \sum_{p=1}^a \xi_p(0) (W\lambda[\omega_x])^{a-p} \\ &\times \int_C \frac{d\omega e^{-i\omega[t-(a-p)\tau]}}{(-2\pi i)\omega^{a-p+1}}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Для простоты ограничимся вычислением интеграла по  $\omega$  для  $t > M_b T_0$ . Тогда все сгустки дают вклад в правую часть (8.14), а интегралы вычисляются замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость  $\omega$ . В отличие от аналогичных выражений, полученных в предыдущем параграфе, значение интеграла в (8.14) определяется кратными полюсами подынтегрального выражения в точках  $\omega = 0$ . Простые вычисления приводят к результату

$$\int_C \frac{d\omega e^{-i\omega[t-(a-p)\tau]}}{(-2\pi i)\omega^{a-p+1}} = \frac{(-i[t-(a-p)\tau])^{a-p}}{(a-p)!}.$$

Поэтому

$$\xi_a(t) = e^{-i\omega_x t} \sum_{p=1}^a \xi_p(0) \frac{(-i[t-(a-p)\tau]W\lambda[\omega_x])^{a-p}}{(a-p)!}. \quad (8.15)$$

Неэкспоненциальное нарастание амплитуд когерентных колебаний со временем является одной из наиболее характерных особенностей неустойчивостей прерывания пучка. Как видно из полученного выражения, неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой когерентных колебаний сгустков колебаниями впередиидущих и накоплением этой раскачки вдоль пучка (в зарубежной литературе такое накопление называют кумулятивным). Другой особенностью такой неустойчивости является зависимость характера нарастаний колебаний от распределения начальных амплитуд когерентных колебаний сгустков в пучке.

## 8.2. Быстрые однооборотные неустойчивости одиночных сгустков

Перейдем к описанию быстрых однооборотных поперечных когерентных колебаний одиночного сгустка. Коль скоро ожидаемые времена развития неустойчивостей короче периода синхротронных колебаний, уместно в качестве координат частиц в продольном фазовом пространстве взять переменные  $(\Delta p, \phi)$ . Для простоты мы проведём вычисления для дипольных бетатронных колебаний. Тогда, в пренебрежении

продольной подвижностью частиц, основное интегральное уравнение записывается в виде

$$(\omega - \omega_m)f_m = if_m^{(0)} - \sqrt{I_y} \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int dI'_y d\Delta p' d\phi' K(\phi - \phi') \sqrt{I'_y} f_m. \quad (8.16)$$

Здесь  $f_0 = \rho_0(\phi)F_0(I_y, \Delta p)$  – функция распределения сгустка в стационарном состоянии,  $\rho_0(\phi)$  – линейная плотность частиц в сгустке, а

$$K(\phi - \phi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{mn} e^{in(\phi - \phi')}. \quad (8.17)$$

Для упрощения вычислений мы снова воспользуемся моделью, в которой величина поперечного когерентного сдвига частоты монохроматического сгустка определяется формулой

$$\Omega_{mn} = \frac{i\Omega_m}{\pi(n + m_y v_y + i0)}. \quad (8.18)$$

При этом вычисление интеграла в (8.17) даёт

$$K(\phi) = \Omega_m e^{-im_y v_y \phi} \begin{cases} 1, & \phi \leq 0, \\ 0, & \phi > 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Подстановка этого выражения, а также решений в форме

$$f_m = \frac{if_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} - \rho_0(\phi)\chi(\phi) e^{im_y v_y \phi} \frac{\sqrt{I_y} \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m} \quad (8.20)$$

в уравнение (8.16) приводит к следующему уравнению для новой неизвестной функции  $\chi$ :

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d_m^{(0)}(\phi') d\phi' + \Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} \rho_0(\phi') \chi(\phi'). \quad (8.21)$$

Здесь

$$d_m^{(0)} = \int dI_y d\Delta p \frac{\sqrt{I_y} f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} \quad (8.22)$$

– Фурье-амплитуда начальной линейной плотности дипольного момента сгустка, а

$$\Lambda_m = -\Omega_m \int dI_y d\Delta p \frac{I_y \partial F_0 / \partial I_y}{\omega - \omega_m}. \quad (8.23)$$

В отличие от уравнений, которые нам приходилось решать до этого, уравнение (8.21) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Вольтерра. Относительно этих уравнений известно, что однородные интегральные уравнения Вольтерра не имеют нетривиальных решений. Последнее утверждение устанавливается, например, заменой в однородной части уравнения (8.21) интегралов по  $\phi$  суммами Дарбу, вычислением детерминантов полученных однородных алгебраических уравнений и последующим устремлением интервалов разбиений по  $\phi$  к нулю. Этим доказывается отсутствие спектров собственных частот быстрых поперечных когерентных колебаний сгустков при их возмущении наведенными полями, которые полностью затухают за время одного оборота частиц в машине.

Уравнение (8.21) решается преобразованием его в дифференциальное уравнение. После дифференцирования обеих частей получаем

$$\frac{d\chi}{d\phi} = -i\Omega_m d_m^{(0)} - \Lambda_m \rho_0(\phi)\chi. \quad (8.24)$$

Записывая

$$\chi = A(\phi) \exp\left(\Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \rho_0(\phi')\right)$$

и используя граничное условие  $A(\infty) = 0$ , получаем

$$A = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp\left(-\Lambda_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right)$$

или окончательно

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp\left(-\Lambda_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right). \quad (8.25)$$

### 8.3. Зависимости амплитуд от времени

Формулы, описывающие зависимости найденных решений от времени, получают-ся комбинированием выражений (8.20), (8.25) и выполнением обратного преобразо-вания Фурье:

$$f_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_m(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0.$$

Анализ решений существенно упрощается в случае, когда можно пренебречь разбро-сами частот в пучке. При этом

$$d_m^{(0)} = \frac{D_m}{\omega - \omega_m}, \quad D_m = \int dI_y d\Delta p \sqrt{I_y} f_m^{(0)},$$

а  $\Lambda_m = \Omega_m/(\omega - \omega_m)$ . Тогда, например, для амплитуды дипольного момента

$$d_m = \int dI_y d\Delta p \sqrt{I_y} f_m$$

получаем:

$$d_m(\phi, t) e^{i\omega_m t} = D_m(\phi) + \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m(\phi') R_m(\phi, \phi', t), \quad (8.26)$$

$$R_m(\phi, \phi', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} R_m(\phi, \phi', \omega),$$

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{i\Omega_m}{\omega^2} \exp\left(-\frac{\Omega_m}{\omega} \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'')\right).$$

Входящая в эти соотношения функция  $R_m(\phi, \phi', \omega)$  называется резольвентой инте-грального уравнения (8.21). Как известно, для задач, допускающих нахождение спек-тра собственных значений, особенностями резольвенты как функции комплексной переменной  $\omega$  являются либо простые полюсы, либо полюсы конечной кратности. В отличие от этого единственной особой точкой функции  $R_m(\omega)$  является существенно особая точка при  $\omega = 0$ . Это обстоятельство еще раз указывает на отсутствие спектра



собственных частот в обсуждаемой задаче. Определённые заключения о характере развития колебаний даёт разложение функции  $R_m(\omega)$  в ряд Тэйлора

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{i\Omega_m}{\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \frac{1}{\omega^k}, \quad \xi = \Omega_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi''). \quad (8.27)$$

В этом уравнении первое слагаемое описывает резонансную раскачку частиц в точке  $\phi$  частицами в точке  $\phi'$ , как если бы между ними не было промежуточных частиц. Следующее слагаемое описывает раскачку частиц в точке  $\phi$  частицами, расположенными в промежуточной точке  $\phi < \phi'' < \phi'$ , колебания которых возбуждены резонансной раскачкой частицами в точке  $\phi'$ . Это приводит к повышению порядка полюса на единицу и т. д. Таким образом, выражение (8.27) описывает резонансную раскачку колебаний частиц в точке  $\phi$  с учетом коллективной реакции промежуточных частиц.

Интеграл по  $\omega$ , определяющий функцию  $R_m(\phi, \phi', t)$ , вычисляется подстановкой разложения (8.27) в (8.26)

$$R_m(\phi, \phi', t) = \Omega_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}}. \quad (8.28)$$

Используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}} = \frac{1}{(k+1)!} \left. \frac{d^{(k+1)} \exp(-i\omega t)}{d\omega^{(k+1)}} \right|_{\omega=0} = \frac{(-it)^{(k+1)}}{(k+1)!},$$

перепишем (8.28) в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi t)^k}{k!(k+1)!}. \quad (8.29)$$

Как и ожидалось, на малых интервалах времени ( $|\Omega_m|t \ll 1$ ) это выражение описывает линейный рост амплитуды колебания, специфичный для резонансной раскачки. Для выяснения обратной асимптотики ( $|\Omega_m|t \gg 1$ ) воспользуемся соотношением

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(k+1)!},$$

где  $J_1(z)$  – функция Бесселя первого порядка. Тогда (8.29) записывается в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \frac{J_1(2\sqrt{-i\xi t})}{\sqrt{-i\xi t}}. \quad (8.30)$$

Учитывая, что при больших  $\text{Im}z$  функция  $J_1(z)$  растет как  $J_1 \propto \exp(\text{Im}z)$ , с точностью до неэкспоненциального множителя пишем

$$R_m(\phi, \phi', t) \propto \exp \left\{ \sqrt{\frac{|\Omega_m|t}{2} \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \rho_0(\phi'')} \right\}, \quad |\Omega_m|t \gg 1. \quad (8.31)$$

Как видно из этого выражения, в отличие от синхротронных мод времена нарастания быстрых неустойчивостей определяются действительной частью  $\Omega_m$ , а также зависят от расстояния до головной части сгустка. Такое поведение колебаний отражает то обстоятельство, что неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой колебаний частиц сгустка предшествующими частицами и отсутствием обратной связи колебаний его головной и хвостовой частей.

## 8.4. Методы подавления быстрых однооборотных неустойчивостей

Развитие описанной неустойчивости может ограничиваться трением (охлаждением пучка, или обеспечением эффекта быстро затухания когерентных колебаний), разбросом частот бетатронных колебаний частиц, а также разведением частот бетатронных колебаний частиц по длине сгустка ( $\omega_y(\phi)$ ). Последний механизм был предложен для подавления таких неустойчивостей в линейных ускорителях (В. Е. Балакин, А. В. Новохатский, В. П. Смирнов, 1978 [21]) и по фамилиям авторов получил название БНС-подавление (BNS-damping). При анализе действия этих явлений на быстрые однооборотные когерентные колебания следует помнить, что, поскольку в задаче отсутствуют собственные моды когерентных колебаний, разбросы частот не приводят к затуханию Ландау колебаний сгустка. В случае быстрых однооборотных неустойчивостей когерентные колебания затухают за счет процессов их расфазировки. В интенсивных сгустках взаимодействие частиц вдоль пучка кумулятивно изменяет характер расфазировки различных частей сгустка и тем изменяет зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени.

### 8.4.1. Расфазировка колебаний разбросом импульсов

Рассмотрим кратко влияние затухания за счет разброса частот и за счет трения. Для простоты мы предположим, что разброс частот бетатронных колебаний обусловлен разбросом импульсов в пучке, а в качестве функции распределения по импульсам возьмём лоренцево распределение. Тогда, повторение вычислений предыдущего пункта с удержанием усреднения частотных знаменателей по импульсам приводит к замене в соответствующих формулах частотных знаменателей  $1/(\omega - \omega_m)$  на

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)} \frac{d\Delta p}{\omega - \omega_m - \zeta\Delta p} = \frac{1}{(\omega - \omega_m + i\delta_m)},$$

$$\zeta = m_y \frac{d\omega_y}{d\Delta p}, \quad \delta_m = |\zeta|\Delta.$$

Учитывая это обстоятельство, легко убедиться в том, что, например, первое уравнение в (8.26) переписывается в виде

$$d_m(\phi, t)e^{i\omega_m t + \delta_m t} = D_m(\phi) + \rho_0(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m(\phi') R_m(\phi, \phi', t). \quad (8.32)$$

Характер поведения этих решений на малых временах ( $|\Omega_m|t \ll 1$ ) совпадает с уже обсуждавшимися. На больших временах ( $\delta_m t \gg 1$ ), поскольку  $R_m$  растёт не быстрее  $\exp(\sqrt{t/\tau_m})$ , величины  $d_m(\phi, t)$  экспоненциально затухают. Это означает, что даже если  $|\Omega_m| > \delta_m$ , с течением времени разброс частот абсолютно подавляет развитие неустойчивости. При этом требование отсутствия потерь пучка лишь устанавливает нижний предел на апертуру вакуумной камеры.

Аналогичным образом действует трение. Разница заключается лишь в том, что если  $\lambda_y$  – декремент затухания вертикальных бетатронных колебаний, то при  $\lambda_y \gg \delta_m$  величина  $\delta_m$  в (8.32) должна быть заменена на  $|m_y|\lambda_y$ .

### 8.4.2. БНС-затухание

Изучение БНС-подавления, вообще, требует большего количества вычислений. Если, для простоты, положить  $\omega_y(\phi) = \omega_y + \kappa\phi$ , формула (8.25) переходит в следующую:

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \frac{C_m(\phi')\rho_0(\phi')}{\Delta\omega_m - m_y\kappa\phi'} \exp\left(\Omega_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \frac{\rho_0(\phi'')}{\Delta\omega_m - m_y\kappa\phi''}\right), \quad (8.33)$$

где  $\Delta\omega_m = \omega - m_y\omega_y$  и мы положили

$$D_m(\phi) = C_m(\phi)\rho_0(\phi).$$

Подстановка этих выражений в (8.20) и последующее вычисление амплитуд  $d_m(\phi, t)$  приводит к выражению

$$d_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} = C_m(\phi) + \Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' C_m(\phi')\rho_0(\phi')R_m(\phi' - \phi, t), \quad (8.34)$$

где ( $\text{Im}\omega > 0$ )

$$R_m(\phi' - \phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{\exp\left(-i\omega t + \Omega_m \int_{\phi}^{\phi'} \frac{d\phi''\rho_0(\phi'')}{\omega - m_y\kappa(\phi'' - \phi)}\right)}{\omega(\omega - m_y\kappa(\phi' - \phi))}. \quad (8.35)$$

Вычисления интегралов в этих формулах упрощается в специальном случае, когда линейная плотность сгустка задается ступенчатой функцией

$$\rho_0(\phi) = \frac{1}{\phi_b} \begin{cases} 1, & |\phi| \leq \phi_b/2, \\ 0, & |\phi| > \phi_b/2. \end{cases}$$

Простые преобразования (например, в [3]) приводят к выражению

$$R_m(\phi' - \phi, t) = -it\Phi(1 - \alpha_m, 2, -irt), \quad r = m_y\kappa(\phi' - \phi) \quad (8.36)$$

или

$$D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} = C_m(\phi) + C_m(\phi_b)\Phi(-\alpha_m, 1, -im_y\kappa(\phi_b - \phi)t) - C_m(0) - \int_{\phi}^{\phi_b} d\phi' \Phi(-\alpha_m, 1, -im_y\kappa(\phi' - \phi)t) \frac{dC_m(\phi')}{d\phi'}. \quad (8.37)$$

Здесь  $\Phi(a, b, z)$  – вырожденная гипергеометрическая функция, а

$$\alpha_m = -\frac{\Omega_m}{m_y\kappa\phi_b}. \quad (8.38)$$

Формулы (8.34) и (8.37) показывают, что в рамках изученной модели характер развития дипольного момента сгустка зависит от распределения его начального значения вдоль сгустка. Так, если начальное распределение  $C_m(\phi)$  представляет собой короткий, одиночный импульс

$$C_m(\phi) = C\delta(\phi - \phi_1), \quad \phi \leq \phi_1 \leq \phi_b,$$

то

$$\begin{aligned} D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} &= C\delta(\phi - \phi_1) + C\frac{\Omega_m}{\phi_b}R_m(\phi_1 - \phi, t) \\ &= C\delta(\phi - \phi_1) - C\frac{i\Omega_m t}{\phi_b}\Phi(1 - \alpha_m, 2, -im_y\kappa(\phi_1 - \phi)t). \end{aligned}$$

Учитывая формулу

$$\Phi(a, c, x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}e^{-i\pi a}x^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^x x^{a-c}, \quad |x| \gg 1, \quad (8.39)$$

получаем, что для продольных координат  $\phi < \phi_1$  и в пределе

$$|m_y\kappa|(\phi_1 - \phi)t \gg 1$$

зависимость дипольного момента сгустка  $D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t}$  от времени описывается формулой ( $u = \phi_1 - \phi$ ,  $\omega_u = m_y\kappa u$ ):

$$\begin{aligned} D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} &= C\frac{i\Omega_m t}{\phi_b} \frac{e^{i\pi\alpha_m} (-i\omega_u t)^{\alpha_m-1}}{\Gamma(1 + \alpha_m)} \\ &\quad - C\frac{i\Omega_m t}{\phi_b} \frac{e^{-i\omega_u t} (-i\omega_u t)^{-\alpha_m-1}}{\Gamma(1 - \alpha_m)} \\ &= C\frac{\Omega_m}{m_y\kappa u \phi_b} \left( \frac{e^{i\pi\alpha_m} (-i\omega_u t)^{\alpha_m}}{\Gamma(1 + \alpha_m)} - \frac{e^{-i\omega_u t} (-i\omega_u t)^{-\alpha_m}}{\Gamma(1 - \alpha_m)} \right). \end{aligned} \quad (8.40)$$

При любом знаке параметра  $\alpha_m$  это выражение описывает колебания, амплитуда которых нарастает во времени по степенному закону. Такой рост замедляется в области  $|\alpha_m| \ll 1$ .

В другом предельном случае мы можем положить, что начальное значение дипольного момента сгустка  $C_m(\phi)$  вообще не меняется вдоль сгустка ( $C_m(\phi) = C$ ). Тогда формула (8.37) переписывается в виде

$$D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} = C\Phi(-\alpha_m, 1, -i\omega_u t), \quad \omega_u = m_y\kappa(\phi_b - \phi),$$

что на асимптотически больших временах дает:

$$D_m(\phi, t)e^{im_y\omega_y(\phi)t} = C \left( \frac{e^{i\pi\alpha_m} (-i\omega_u t)^{\alpha_m}}{\Gamma(1 + \alpha_m)} + \frac{e^{-i\omega_u t} (-i\omega_u t)^{-1-\alpha_m}}{\Gamma(-\alpha_m)} \right). \quad (8.41)$$

Такое выражение описывает затухающие когерентные колебания при выполнении условий

$$\alpha_m < 0, \quad -1 - \alpha_m < 0, \quad -\alpha_m < 1,$$

или, учитывая определение (8.38),

$$0 \leq \frac{\Omega_m}{m_y\Delta\omega_y} \leq 1, \quad \Delta\omega_y = \kappa\phi_b. \quad (8.42)$$

При нарушении критерия (8.42) колебания в пучке нарастают по степенному закону. Последнее обстоятельство может быть обусловлено предположенной ступенчатой зависимостью линейной плотности заряда сгустка от  $\phi$ . Выяснение деталей зависимости амплитуды дипольного момента от времени при БНС-подавлении когерентных колебаний сгустка, обладающего гладкой зависимостью линейной плотности от  $\phi$  требует исследования с применением численных методов.

Технические особенности обеспечения в накопителе требуемой зависимости частот бетатронных колебаний от положений частиц в сгустке могут быть различны. В некоторых случаях такая зависимость может определяться особенностями формирования самих наведенных полей (например, в [22] или в [23]).

Из-за отсутствия спектров собственных частот быстрые когерентные колебания сгустков развиваются без порогов неустойчивости. Это означает, что демпфирование таких колебаний обязательно проходит фазу первоначального увеличения амплитуды когерентного сигнала, за которой следует фаза уменьшения амплитуды сигнала до нулевого значения.

## 8.5. Задачи к лекции 8

1. Получить дисперсионное уравнение для быстрых однооборотных вертикальных когерентных колебаний.

2. Вычислить зависимость от времени быстрых однооборотных колебаний дипольного момента пучка, взаимодействующего с участком вакуумной камеры круглого сечения, описываемого импедансом

$$Z_n(\omega) = Z_0 \left( \frac{i\omega_0}{\omega} \right)^s, \quad 0 < s < 1.$$

3. Вычислить Фурье-амплитуды быстрых дипольных, вертикальных когерентных колебаний одиночного сгустка, взаимодействующего с низкодобротным резонатором.

# Лекция 9

## Многооборотные неустойчивости

### 9.1. Колебания одного сгустка

Изучим теперь особенности спектров колебаний сгустка, связанные с неполным затуханием наведенных полей за время оборота пучка в машине. Как уже упоминалось в разделе 4.1, в этом случае декременты колебаний представляются суммой слагаемых, описывающих соответственно однооборотные и многооборотные явления. В качестве примера мы проведем расчет спектра когерентных колебаний сгустка, взаимодействующего с отдельной модой резонатора, для которой выполнено соотношение

$$\lambda_k \gg \omega_0. \quad (9.1)$$

Для упрощения вычислений проведем расчет, пренебрегая влиянием разбросов частот в пучке. С той же целью мы будем предполагать длину сгустка достаточно малой, чтобы можно было пренебречь возможностью возбуждения синхротронных мод и влиянием хроматизма машины на устойчивость пучка. Для определенности будем говорить о вертикальных дипольных колебаниях, когда  $\omega \simeq m_y \omega_y$  ( $m_y = \pm 1$ ).

При выполнении условия (9.1) все слагаемые в правой части уравнения (5.6) примерно равнозначны. Поэтому пишем

$$f_m = \frac{\partial f_0 / \partial I_y}{(\omega - m_y \omega_y)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N e^2 m_y V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n \omega_0 + i \lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m. \quad (9.2)$$

Согласно условию (9.1) частоту  $\omega$  в знаменателе в правой части этого уравнения можно заменить невозмущенным значением  $m_y \omega_y$ . Учитывая, что  $V_{mn}$  фактически является степенной функцией  $I_y$

$$V_{mn} = \sqrt{I_y} v_{mn}, \quad (9.3)$$

ищем решение (9.2) в виде

$$f_m = \chi(\varphi) V_{mn} \frac{\partial F_0}{\partial I_y}, \quad f_0 = F_0(I_y) \rho(\varphi).$$

Это дает следующее уравнение для амплитуд  $\chi_m$ :

$$(\omega - m_y \omega_y) \chi = -\rho(\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N e^2 m_y |v_{mn}|^2 J_0(n\varphi)}{\omega_k^2 - (m_y \omega_y + n\omega_0 + i\lambda_k)^2} \times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_0(n\varphi') \chi(\varphi'). \quad (9.4)$$

Если  $\alpha$  нумерует собственные решения этого уравнения, то собственные частоты ( $\omega_\alpha$ ) определяются равенством (4.18), которое здесь можно переписать в виде:

$$\omega_\alpha - m_y \omega_y = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N e^2 m_y |v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{\omega_k^2 - (m_y \omega_y + n\omega_0 + i\lambda_k)^2}, \quad (9.5)$$

где

$$h_{n\alpha} = \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} J_0(n\varphi) \chi_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (9.6)$$

Воспользовавшись формулой суммирования (4.19), представим  $\omega_\alpha$  суммой однооборотного и многооборотного слагаемых

$$\omega_\alpha = (\omega_\alpha)_{st} + (\omega_\alpha)_{mt}, \quad (9.7)$$

где

$$(\omega_\alpha)_{st} - m_y \omega_y = - \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{N e^2 m_y |v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{\omega_k^2 - (m_y \omega_y + n\omega_0 + i\lambda_k)^2}, \quad (9.8)$$

а

$$(\omega_\alpha)_{mt} - m_y \omega_y = - \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{N e^2 m_y |v_{mn}|^2 h_{n\alpha} e^{2\pi i l n}}{\omega_k^2 - (m_y \omega_y + n\omega_0 + i\lambda_k)^2}. \quad (9.9)$$

Для получения условий устойчивости вычислим декременты колебаний ( $\delta = -\text{Im}\omega$ ). Согласно (9.7) пишем

$$\delta = \delta_{st} + \delta_{mt}. \quad (9.10)$$

Учитывая, что  $|v_{m,n}|^2 = |v_{m,-n}|^2$  и  $h_{n,\alpha} = h_{-n,\alpha}$ , после простых преобразований из (9.8) получим

$$\delta_{st} = \delta_- - \delta_+, \quad (9.11)$$

где

$$\delta_- = \frac{N e^2 \lambda_k}{2\omega_k} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{|v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{(\omega_k - \omega_y - n\omega_0)^2 + \lambda_k^2},$$

$$\delta_+ = \frac{N e^2 \lambda_k}{2\omega_k} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{|v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{(\omega_k + \omega_y - n\omega_0)^2 + \lambda_k^2}.$$

Из этих выражений видно, что однооборотное слагаемое не ухудшает устойчивости колебаний сгустка ( $\delta_{st} > 0$ ), если вклады разностных резонансов в  $\delta_{st}$  превышают вклады суммовых. Как и должно быть, однооборотное слагаемое, описывающее реакцию излучения пучка, пропорционально декременту затухания моды поля резонатора.

Многооборотное слагаемое декремента определяется выражением

$$\delta_{mt} = \text{Im} \left\{ \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{N e^2 m_y |v_{mn}|^2 h_{n\alpha} e^{2\pi i l n}}{\omega_k^2 - (m_y \omega_y + n \omega_0 + i \lambda_k)^2} \right\}. \quad (9.12)$$

Для вычисления входящих сюда интегралов заметим, что масштаб изменения величин  $v_{mn}$  по переменной  $n$  определяется азимутальной протяженностью резонатора ( $\theta_0$ ), а соответствующий масштаб функции  $h_{n\alpha}$  – длиной пучка ( $\sigma_b$ ). Если эти длины таковы, что  $\theta_0 \ll 2\pi$  и  $\sigma_b \ll 2\pi R_0$ , то интеграл по  $n$  в (9.12) может вычисляться замыканием контура интегрирования в верхнюю или нижнюю полуплоскости переменной  $n$ . Поскольку в верхней полуплоскости подынтегральное выражение не имеет особенностей, слагаемые с номерами  $l > 0$  не дают вклада в  $\delta_{mt}$ . Вклады же слагаемых с номерами  $l < 0$  определяются вычетами в полюсах

$$n = \pm \nu_k - \nu_y - i \mu_k, \quad \nu_k = \omega_k / \omega_0, \quad \mu_k = \lambda_k / \omega_0. \quad (9.13)$$

С использованием естественного предположения, что  $\omega_k \gg \omega_y$ ,  $\lambda_k$ , вычисление интеграла по  $n$  дает

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{|v_{mn}|^2 h_{n\alpha} e^{2\pi i l n}}{\nu_k^2 - (m_y \nu_y + n + i \mu_k)^2} \\ &= -2\pi i |v_{m, \nu_k}|^2 h_{\nu_k, \alpha} \exp[-2\pi l \mu_k + 2\pi i m_y \nu_y l] \\ &\quad \times \left[ \frac{\exp(-2\pi i l \nu_k)}{-2\nu_k} + \frac{\exp(2\pi i l \nu_k)}{2\nu_k} \right] \\ &= \frac{2\pi |v_{m, \nu_k}|^2 h_{\nu_k, \alpha}}{\nu_k} \sin(2\pi l \nu_k) \exp[-2\pi l \mu_k + 2\pi i m_y \nu_y l]. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (9.12) приводит к следующему выражению для многооборотного слагаемого декремента

$$\delta_{mt} = \frac{N e^2 T_0 |v_{m, \nu_k}|^2 h_{\nu_k, \alpha}}{\omega_k} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l \lambda_k T_0} \sin(2\pi l \nu_y) \sin(2\pi l \nu_k), \quad (9.14)$$

где  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  – период обращения равновесной частицы. Ряд по  $l$  может быть вычислен точно. Записывая

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=1}^{\infty} p^l \sin(2\pi l \nu_y) \sin(2\pi l \nu_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} p^l \cos(l \alpha_-) - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} p^l \cos(l \alpha_+), \end{aligned}$$

где

$$p = e^{-\lambda_k T_0}, \quad \alpha_{\pm} = 2\pi(\nu_k \pm \nu_y),$$

и используя

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} p^l \cos(l \alpha_-) = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \sum_{l=0}^{\infty} p^l e^{i l \alpha_-} \right),$$



а также

$$\sum_{l=0}^{\infty} p^l e^{il\alpha_-} = \frac{1}{1 - p \exp(i\alpha_-)} = \frac{1 - p \exp(-i\alpha_-)}{1 - 2p \cos \alpha_- + p^2},$$

получаем

$$S = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - p \cos \alpha_-}{1 - 2p \cos \alpha_- + p^2} - \frac{1 - p \cos \alpha_+}{1 - 2p \cos \alpha_+ + p^2} \right].$$

Это выражение ещё раз показывает, что условие устойчивости колебаний  $\delta_{mt} > 0$  требует превышения вкладов в декременты разностных резонансов над вкладами суммовых.

При выполнении условия (9.1) ряд по  $l$  в формуле (9.14) быстро сходится. Поэтому знак  $\delta_{mt}$  фактически определяется знаком первого слагаемого:

$$\delta_{mt} \simeq \frac{N e^2 T_0 |v_{m,v_k}|^2 h_{v_k, \alpha} e^{-\lambda_k T_0} \sin(2\pi v_y) \sin(\omega_k T_0)}{\omega_k}. \quad (9.15)$$

Отсюда видно, что величина  $\delta_{mt}$  положительна при выполнении следующего условия устойчивости:

$$\sin(2\pi v_y) \sin(2\pi v_k) > 0,$$

или

$$n - \frac{1 - r_k}{4} \leq v_y \leq n + \frac{1 + r_k}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad r_k = \text{sgn}(\sin \omega_k T_0). \quad (9.16)$$

Зависимость декрементов и условий устойчивости колебаний от положения рабочей точки обусловлена взаимодействием сгустка с полями, наведенными на предыдущих оборотах, и вообще свойственна многооборотным эффектам.

## 9.2. Многосгустковые моды

По многим причинам пучки частиц в накопителях могут быть составлены из сгустков. Взаимное расположение сгустков вдоль замкнутой орбиты диктуется кратностью ВЧ-системы накопителя, а также характером решаемой таким разбиением физической задачи. Вместе с тем, наиболее часто используются пучки, в которых сгустки более или менее равномерно заполняют замкнутую орбиту, а число частиц в сгустках мало меняется при переходе от одного сгустка пучка к другому. Возможность сгустков совершать различные относительные движения под действием наведенных полей приводит к появлению у когерентных колебаний такого пучка дополнительных коллективных мод. Из общих соображений ясно, что, если пучок составлен, например, из  $q$  сгустков, то и общее число мод увеличивается в  $q$  раз.

### 9.2.1. Пучок с равномерным заполнением сгустками

Полученные выражения позволяют найти условия устойчивости и многооборотные части декрементов колебаний пучка, составленного из идентичных и равномерно распределенных по орбите сгустков. Если кратность ВЧ-системы равна  $q$  и все

сепаратрисы заполнены, то число частиц в каждом сгустке равно  $N/q$ , а азимутальное расстояние между ними равно  $2\pi/q$ . Стационарное состояние такого пучка симметрично относительно одновременного смещения вдоль замкнутой орбиты всех его сгустков на угол  $2\pi/q$ . По аналогии с колебаниями в несгруппированных пучках такая симметрия приводит к возможности распространения вдоль пучка когерентных колебаний с волновыми векторами

$$k_a = \frac{2\pi a}{q}, \quad a = 0, 1, 2, \dots, q-1. \quad (9.17)$$

Эти моды отличаются друг от друга фазированием колебаний отдельных сгустков пучка. Так, в моде  $k_0$  все сгустки колеблются синфазно, а в моде  $k_{q/2}$  фазы колебаний соседних сгустков сдвинуты на  $\pi$ . Как видно, например, из уравнения (9.15), величина многооборотной части декремента определяется набегом фазы моды за период прохождения пучком электродов. Для одного сгустка это период обращения частиц в кольце. Поэтому набег фазы моды за период равен  $2\pi m_y \mathbf{v}_y$ .

В случае дипольных колебаний ( $m_y = \pm 1$ ) модам в (9.17) соответствуют комбинационные частоты  $m_y \omega_y + a\omega_0$ , а частота прохождения пучком электродов равна  $q\omega_0$ . При этом набег фазы колебания за период равен

$$\frac{2\pi(m_y \omega_y + a\omega_0)}{q\omega_0} = 2\pi \frac{m_y \mathbf{v}_y + a}{q}.$$

Пусть многооборотная часть декремента одного сгустка определяется выражением

$$\delta = m_y \Phi(2\pi m_y \mathbf{v}_y), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x). \quad (9.18)$$

Многооборотные части декрементов  $q$  идентичных сгустков, взаимодействующих с той же системой электродов, получаются из этого выражения заменой  $2\pi m_y \mathbf{v}_y$  на  $2\pi(m_y \mathbf{v}_y + a)/q$ . Поскольку многооборотная часть декремента определяется полным током пучка ( $N$ ), для декрементов мод  $q$  идентичных сгустков пишем

$$\delta_a = q m_y \Phi\left(2\pi \frac{m_y \mathbf{v}_y + a}{q}\right), \quad a = 0, 1, \dots, q-1. \quad (9.19)$$

Если функция  $\Phi$  при каком-то значении  $\mathbf{v}$  может стать отрицательной, то значения  $\mathbf{v}$  должны выбираться так, чтобы условие устойчивости  $m_y \Phi(2\pi[m_y \mathbf{v}_y + a]/q) > 0$  выполнялось для всех мод. Пусть, например, условие устойчивости одного сгустка имеет вид (в уравнении (9.15) это соответствует случаю, когда  $\sin(2\pi \mathbf{v}_k) > 0$ )

$$0 < \mathbf{v}_y < 1/2.$$

В этом случае условие устойчивости мод  $q$  идентичных сгустков записывается в виде

$$0 < \mathbf{v}_y + a < q/2, \quad a = 0, 1, \dots, q-1. \quad (9.20)$$

Поскольку  $\mathbf{v}_y > 0$ , это условие заведомо нарушается для мод с  $a > q/2$ . Такая неустойчивость цепочки идентичных сгустков обусловлена связью их колебаний через наведенные поля. По этой причине она может подавляться неравномерным заполнением сепаратрис, разведением частот колебаний сгустков (в обоих случаях изменяется связь колебаний сгустков) либо усилением быстрого затухания в однооборотных частях декрементов. В частности, это может быть достигнуто использованием достаточно широкополосных (в идеале, односгустковых) демпфирующих систем обратных связей.

## 9.2.2. Пучок с квазиравномерным заполнением

В последние примерно два десятка лет все чаще стали обсуждаться и использоваться такие картины заполнения пучка, в которых равномерное заполнение сепаратрис сгустками прерывается, начиная с некоторого значения номера сгустка  $M_b$ . При этом в пучке образуется зазор в  $M_g = M - M_b$  сгустков. Необходимость в использовании такого зазора в заполнении пучка часто обусловлена теми или иными техническими причинами. Например, в коллайдере КЕКВ 10%-й зазор в заполнении пучка используется для удаления из пучка вторичных заряженных частиц (электронов, ионов), которые частицы сгустка могли образовать при их движении вдоль замкнутой орбиты. При идентичности сгустков мы будем называть такую картину заполнения пучка квазиравномерной, а заполненную часть пучка будем называть цугом сгустков, или просто цугом.

Для простоты проведем вычисления спектра собственных частот вертикальных когерентных колебаний  $M_b$  идентичных сгустков нулевой длины, которые равномерно заполняют цуг с периодом следования сгустков  $T_b = T_0/M$ . Здесь  $T_0$  – период обращения частицы вдоль замкнутой орбиты. Если выполнено неравенство  $M > M_b$ , то картина заполнения пучка сгустками оканчивается зазором длиной  $M_g = M - M_b$  межсгустковых расстояний. Для упрощения расчетов мы пренебрежем самодействием сгустков в пучке. Кроме того, когерентные колебания сгустков будут описываться положениями их центров тяжести (центроидов)  $y_a$ , где индекс  $a = 1, 2, \dots, M_b$  нумерует сгустки в пучке. Мы проведем вычисления для дипольных когерентных колебаний. Поэтому наведенные сгустками поля будут описываться в терминах локализованных, поперечных импедансов связи.

В пучке, составленном из сгустков, мы должны учесть в уравнениях движения частиц то обстоятельство, что различные сгустки пучка будут проходить электроды, вызывающие неустойчивость когерентных колебаний, в различные моменты времени. Если азимутальное расстояние между сгустками в цуге равно  $2\pi/M$  и если принять, что первый сгусток в цуге проходит некоторый азимут на замкнутой орбите  $\theta$  в нулевой момент времени, то сгусток цуга с номером  $a$ , где  $0 \leq a \leq M_b - 1$ , будет проходить эту точку на замкнутой орбите в момент времени  $aT_b$ . Чтобы формально учесть это обстоятельство мы будем описывать колебания частиц сгустка с номером  $a$  формулами

$$y = \sqrt{\frac{R_0 I}{p v_y}} \cos \psi, \quad p_y = -\sqrt{\frac{p v_y I}{R_0}} \sin \psi, \quad (9.21)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y, \quad \theta_a = \omega_0 (t - aT_b) + \phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0 \alpha_p}{p} \Delta p.$$

Изменения центроидов сгустков во времени описываются уравнениями

$$\ddot{y}_a + \omega_y^2 y_a = \frac{1}{p/c} F_a, \quad a = 1, 2, \dots, M_b, \quad (9.22)$$

где  $F_a$  – сила, описывающая возмущения колебаний сгустка  $a$  наведенными полями пучка. Для упрощения дальнейших вычислений удобно перейти в (9.22) к вращательным координатам центроидов сгустков в их фазовом пространстве  $\xi_m^{(a)} = \dot{y}_a - i m_y \omega_y y_a$ ,

где  $m_y = \pm 1$ . В этих переменных уравнение (9.22) записывается в виде

$$\dot{\xi}_m^{(a)} = \ddot{y}_a - im_y \omega_y (\xi_m^{(a)} + im_y \omega_y y_a) = -im_y \omega_y \xi_m^{(a)} + \frac{F_a}{p/c}. \quad (9.23)$$

Решения этих уравнений ищем в виде

$$\xi_m^{(a)}(t) = \xi_m^{(a)}(\omega) \exp(-im_y \omega_y t - i\Delta\omega_m t).$$

Кроме того, для выделения систематических зависимостей амплитуд колебаний  $\xi_m^{(a)}(t) \exp(im_y \omega_y t)$  от времени, усредним в правой и левой частях уравнения (9.23) быстроосциллирующие слагаемые. После этих преобразований уравнение (9.23) переходит в следующее:

$$\Delta\omega_m \xi_m^{(a)}(\omega) = i \frac{\overline{(F_a)_\omega}}{p/c}, \quad (9.24)$$

где черта над величиной обозначает ее усреднение по интервалу времени, который достаточно короток для выделения систематических зависимостей амплитуд от времени, но достаточно длинен для усреднения быстрых осцилляций величин.

Используя для описания наведенных полей формулу (3.49), пишем

$$\frac{F_a}{p/c} = -i \frac{Ne^2 \omega_0 c}{\text{Пр}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^\perp(\omega_{mn}) \sum_{b=1}^{M_b} \exp\left(\frac{2\pi i[b-a]n}{M}\right) \frac{\xi_m^{(a)}(t) - \xi_{-m}^{(a)}}{-2im_y \omega_y}.$$

Удерживая в правой части этого выражения лишь те слагаемые, которые вызывают систематические изменения  $\xi_m^{(a)}$ , после подстановки их в уравнение (9.24) получаем

$$\Delta\omega_m \xi_m^{(a)}(\omega) = i \frac{m_y Ne^2 c}{2\text{Пр} \nu_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^\perp(\omega_{mn}) \sum_{b=1}^{M_b} \exp\left(\frac{2\pi i[b-a]n}{M}\right) \xi_m^{(a)}(\omega). \quad (9.25)$$

Здесь  $N$  – число частиц в одном сгустке,  $\omega_{mn} = n\omega_0 + m_y \omega_y$ . Переопределив в этом уравнении величину когерентного сдвига частоты  $\Delta\omega_m$  согласно

$$\Delta\omega_m = \frac{m_y Ne^2}{2\text{Пр} \nu_y} u \quad (9.26)$$

и введя в рассмотрение матрицу

$$B_{a,b} = \frac{i\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i[b-a]n}{M}\right) Z^\perp(n\omega_0 + m_y \omega_y), \quad (9.27)$$

перепишем уравнение (9.25) в виде

$$u \xi_m^{(a)}(\omega) = \sum_{b=1}^{M_b} B_{a,b} \xi_m^{(b)}(\omega). \quad (9.28)$$

Суммирование по  $n$  в (9.27) выполняется, используя формулу суммирования (4.19), в которой удобно выполнить подстановку  $n = lM + p$ , где  $p = 0, 1, \dots, M-1$ , а  $l$  изменяется в интервале  $|l| < \infty$ . После простых вычислений:

$$B_{a,b} = \frac{i\omega_0}{2\pi} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i[b-a]p}{M}\right) S_p,$$

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} Z^{\perp}(\omega_{m,lM+p}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dl \exp(2\pi ikl) Z^{\perp}(\omega_{m,lM+p}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dl \exp(-2\pi ikl) Z^{\perp}(lM\omega_0 + p\omega_0 + m_y\omega_y),
\end{aligned}$$

$$v = (Ml + p + v_m)\omega_0, \quad l = \frac{v/\omega_0 - p - v_m}{M},$$

$$S_p = \frac{2\pi}{M\omega_0} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi ik[p + v_m]}{M}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi} \exp(-i\omega kT_b) Z^{\perp}(v),$$

$$S_p = \frac{2\pi}{\omega_0 M} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi ik[p + v_m]}{M}\right) Z^{\perp}(kT_b),$$

где

$$Z^{\perp}(kT_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi} \exp(-ivkT_b) Z^{\perp}(v),$$

находим

$$B_{a,b} = i \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi ikv_m}{M}\right) Z^{\perp}(kT_b) Q_{a-b,k}. \quad (9.29)$$

Здесь  $v_m = m_y v_y$ ,  $Z^{\perp}(t)$  – поперечный импеданс связи ступка и электродов в представлении времени, а

$$Q_{a-b,k} = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi ip[b - a + k]}{M}\right). \quad (9.30)$$

Отделив в (9.28) суммирование по ступкам от суммирования по периодам обращения ступков в машине и определив величины

$$X_b = \xi_m^{(b)}(\omega) \exp\left(-\frac{2\pi ibv_m}{M}\right), \quad (9.31)$$

приходим к уравнению задачи нахождения собственных решений. Оно типично для описания колебаний пучка, состоящего из многих ступков:

$$uX_a = H_a \sum_{b=1}^{a-1} X_b i Z^{\perp}([a-b]T_b) + \sum_{b=1}^{M_b} X_b \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi ikv_m} i Z^{\perp}(kT_0 + [a-b]T_b). \quad (9.32)$$

Здесь  $H_1 = 0$ , а  $H_{a>1} = 1$ . Для пучка с зазором в заполнении ступками первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает связь когерентных колебаний ступков наведенными полями на текущем обороте в машине. Оно описывает однооборотные явления. По этой причине амплитуды колебаний первого ступка в цуге возмущаются только многооборотной частью наведенных полей.

Второе слагаемое в правой части (9.32) описывает многооборотные взаимодействия ступков пучка. Без многооборотной части взаимодействия задача определения

собственных решений не имеет нетривиальных решений. В таком случае неустойчивость пучка развивается так же, как аналогичные неустойчивости в линейных ускорителях, а ее свойства аналогичны свойствам неустойчивости прерывания пучка.

В накопительных кольцах многооборотная часть взаимодействия, вообще говоря, никогда не обращается в нуль. Поэтому уравнения (9.32) всегда имеют нетривиальные решения. Если номера этих решений обозначить буквой  $q = 0, 1, \dots, M_b - 1$ , то центры сгустков в пучке можно определить посредством формулы

$$\xi_m^{(a)}(t) = \exp\left(-im_y \omega_y t + \frac{2\pi i a v_m}{M}\right) X_a(t), \quad (9.33)$$

где

$$X_a(t) = \sum_{q=0}^{M_b-1} C_q X_{a,q} \exp(-i\Delta\omega_{m,q}t), \quad (9.34)$$

$X_{a,q}$  – собственные векторы задачи, а коэффициенты  $C_q$  находятся удовлетворением начальных условий когерентных колебаний сгустков:

$$\exp\left(-\frac{2\pi i a v_m}{M}\right) \xi_m^{(a)}(0) = \sum_{q=0}^{M_b-1} X_{a,q} C_q. \quad (9.35)$$

Здесь  $\xi_m^{(b)}(0)$  – начальные значения центров сгустков.

В общем случае решение уравнений (9.32) и (9.35) требует применения численных методов. Простое решение в аналитическом виде удастся получить для специального случая, когда  $iZ^\perp(t) = -Z_0 e^{-\lambda t}$ . Величина параметра  $\lambda$  в этом соотношении определяет длительность запоминания наведенных полей. Изменяя значение  $\lambda$ , мы можем изменить в этой модели число взаимодействующих сгустков, а также значимость многооборотных эффектов. Определив  $\Delta\omega_{m,q} = -m_y N e^2 Z_0 u_q / (2p v_y)$ , после простых вычислений (например, в [24]) находим:

$$\xi_q^{(a)} = A_q \exp\left(\frac{-2\pi i q a}{M_b}\right) K_a, \quad (9.36)$$

$$K_a(M_g) = \exp\left\{\frac{[\lambda T_0 - 2\pi i v_m]a}{M_b} \left(\frac{M_g}{M}\right)\right\}, \quad (9.37)$$

$$u_q = \frac{F}{1-F}, \quad F = \exp\left(\frac{2\pi i [v_m + q] - \lambda T_0}{M_b}\right). \quad (9.38)$$

Здесь  $M_g = M - M_b$  – длина зазора в заполнении сгустками пучка в единицах межсгустковых расстояний, а амплитуды  $A_q$  определяются условием нормировки

$$\sum_{a=1}^{M_b} |\xi_{a,q}|^2 = 1. \quad (9.39)$$

Используя эти выражения, находим решение задачи вычисления центров сгустков по их начальным значениям:

$$\xi_m^{(a)}(t) = \frac{1}{M_b} \sum_{b=1}^{M_b} G_{a,b}(t) K_{a-b}(M_g) \xi_m^{(b)}(0), \quad (9.40)$$

где

$$G_{a,b}(t) = \sum_{q=0}^{M_b-1} \exp \left\{ -i\Delta\omega_{m,q}t + \frac{2\pi iq[b-a]}{M_b} \right\}. \quad (9.41)$$

В этих формулах множители  $K_a(M_g)$  описывают отличия многосгустковых когерентных колебаний пучка с зазором в заполнении сгустками от колебаний пучка с его равномерным заполнением сгустками. Поскольку для положительных значений  $a$  выполняется неравенство  $|K_a| > 1$ , амплитуды собственных векторов многосгустковых мод увеличиваются при приближении номера  $a$  к концу дуга. Это обстоятельство увеличивает вклады в амплитуду колебаний заданного сгустка колебаний предшествующих ему в дуге и уменьшает вклады последующих. Для пучка в накопителе такое усиление тем больше, чем длиннее зазор и чем короче радиус взаимодействия сгустков в пучке. Согласно формуле (9.38) для пучка, в котором  $M_b \gg M_g$ , собственные частоты многосгустковых мод мало отличаются от собственных частот пучка с равномерным заполнением сгустками.

В накопителях с заметной нелинейностью фокусирующих полей одновременную устойчивость многосгустковых мод может обеспечивать их затухание Ландау. Очевидно, что в таком случае значения комплексных когерентных сдвигов частот всех мод должны находиться внутри границ областей устойчивости когерентных колебаний пучка. Напомним, что положения и форма этих границ определяются функциями распределения частиц в сгустках. В случае демпфирования колебаний пучка, состоящего из идентичных сгустков, все граничные кривые совпадают. Поэтому оказывается достаточным поместить комплексные когерентные сдвиги частот мод внутри этой единственной границы области устойчивости.

### 9.3. Задачи к лекции 9

1. Коллективная реакция пучка вообще изменяет собственные частоты резонатора и тем расстраивает его от резонансной частоты. Считая когерентные колебания пучка малыми, вычислить сдвиг частоты ускоряющего резонатора. Разбросом частот синхротронных колебаний пренебречь.

2. Считая, что кратность ускоряющего ВЧ-поля велика ( $q \gg 1$ ), вычислить декременты синхротронных колебаний пучка взаимодействующего с основной модой ускоряющего резонатора. Влиянием разброса частот синхротронных колебаний пренебречь.

3. Изучить устойчивость бетатронных когерентных колебаний трех коротких сгустков, движущихся в ВЧ кратности  $q = 3$  ( $q = 5$ ).

4. Для сгустка нулевой длины получить условия устойчивости вертикальных когерентных колебаний при его взаимодействии с вакуумной камерой круглого сечения с конечной проводимостью стенок.

# Лекция 10

## Влияние наведенных полей на длину сгустка

Помимо прочего, действие наведенных пучком полей может выражаться в увеличении длины сгустков. Такой эффект наблюдался на многих накопителях и в большинстве случаев является нежелательным. Вместе с тем, поскольку описание эффекта удлинения часто требует выхода расчетов за рамки применимости теории возмущений, последовательная теория этого явления недостаточно развита. Ниже мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности расчетов, а также некоторые характерные особенности этого явления.

### 10.1. Удлинение за счет искажения ВЧ-ямы наведенными полями

Наиболее очевидной причиной удлинения сгустка может быть уменьшение жесткости потенциальной ямы синхротронных колебаний наведенными полями пучка. Чтобы упростить расчеты, мы предположим, что сгусток взаимодействует с локализованным однооборотным элементом. Поэтому наведенное сгустком поле мы запишем в следующей форме:

$$E(\phi) = -\frac{Ne^2\omega_0}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n e^{in(\phi-\phi_s)}, \quad (10.1)$$

имея в виду, что  $Z_n$  на самом деле описывает зависимость наведенного поля от времени. Если мощность потерь энергии частицы на синхротронное излучение есть  $W(\mathcal{E})$ , то суммарная скорость изменения энергии частицы равна

$$\frac{d\mathcal{E}_s}{dt} = \frac{eV\omega_0 \cos \phi_s}{2\pi} - W(\mathcal{E}_s) - v_s \frac{Ne^2\omega_0}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n,$$

а значение равновесной фазы ( $\phi_s$ ) определяется уравнением

$$\frac{eV\omega_0 \cos \phi_s}{2\pi} = W + v_s \frac{Ne^2\omega_0}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n. \quad (10.2)$$



Учитывая свойства симметрии ( $Z_n = Z'_n + iZ''_n$ )

$$Z'_n = Z'_{-n}, \quad Z''_n = -Z''_{-n},$$

видим, что в тех случаях, когда  $\rho(\phi)$  является четной функцией, только активная часть импеданса ( $Z'_n$ ) вносит вклад в изменение  $\phi_s$ .

С учетом наведенных полей синхротронные колебания частиц описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega, \quad \frac{d\Delta\omega}{dt} + 2\lambda\Delta\omega + (\omega_c^2)_0\phi = \\ - \frac{Ne^2\omega_0^2\alpha_p}{\text{Пр}} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n (e^{in\phi} - 1) + X(t). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь  $\phi$  – отклонение фазы частицы от равновесного значения,

$$\begin{aligned} \Delta\omega = \frac{\omega_0\alpha_p}{pv}\Delta\mathcal{E}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}_s}, \\ (\omega_c^2)_0 = \omega_0^2 \frac{eV \sin \phi_s \alpha_p}{2\pi pv} \end{aligned} \quad (10.4)$$

– частота синхротронных колебаний частицы при нулевом токе сгустка, а  $X(t)$  случайная сила такая, что

$$\langle X(t) \rangle = 0, \quad \langle X(t)X(t') \rangle = \langle X^2 \rangle \delta(t - t').$$

Она описывает возбуждение синхротронных колебаний частиц квантовыми флуктуациями излучения. Для оценки изменения длины пучка наведенными полями мы примем, что амплитуды синхротронных колебаний частиц малы, а сами поля слабы и являются достаточно плавными функциями  $\phi$ , которые могут быть разложены в ряды Тэйлора по степеням  $\phi$ . Тогда в линейном приближении получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 2\lambda\dot{\phi} + \omega_c^2\phi = X(t), \\ \omega_c^2 = (\omega_c^2)_0 \left\{ 1 - \frac{Ne^2\omega_0}{v_s eV \sin \phi_s} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \frac{-iZ(n)}{n} \right) n^2 \rho(n) \right\}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Вынужденное решение этого уравнения записывается в виде

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{X(\omega)e^{-i\omega t}}{\omega_c^2 - 2i\lambda\omega - \omega^2},$$

или

$$\phi(t) = \int_0^t dt_1 X(t_1) e^{-\lambda(t-t_1)} \frac{\sin \omega_c(t-t_1)}{\omega_c}.$$

При этом средний квадрат  $\phi$  имеет следующее асимптотическое значение:

$$\langle \phi^2(t \rightarrow \infty) \rangle = \frac{1}{\omega_c^2} \frac{\langle X^2 \rangle}{2\lambda}.$$

Поскольку для гауссова распределения  $\langle \phi^2 \rangle = \sigma_\phi^2$ , то определяя длину пучка при нулевом токе пучка соотношением

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{(\omega_c^2)_0} \frac{\langle X^2 \rangle}{2\lambda},$$

можем записать

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_0^2} = \frac{(\omega_c^2)_0}{\omega_c^2}$$

или

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_0^2} = \left[ 1 - \frac{Ne^2\omega_0}{v_s eV \sin \phi_s} \int dn \left( \frac{-iZ(n)}{n} \right) n^2 \rho(n) \right]^{-1}. \quad (10.6)$$

Предположив, например, что

$$\frac{-iZ}{n} = \left( \frac{-iZ}{n} \right)_0 \frac{n_0^2}{n^2 + n_0^2}, \quad \rho(n) = \exp \left( -\frac{n^2 \sigma_\phi^2}{2} \right),$$

для коротких пучков ( $n_0 \sigma_\phi \ll 1$ ) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \frac{-iZ(n)}{n} \right) n^2 \rho(n) \simeq \left( \frac{-iZ}{n} \right)_0 n_0^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\phi}.$$

Подстановка этой формулы в (10.6) приводит к следующему выражению:

$$\frac{\sigma_\phi^2}{(\sigma_\phi^2)_0} = \left[ 1 - \frac{Ne^2\omega_0}{v_s eV \sin \phi_s} \left( \frac{-iZ}{n} \right)_0 n_0^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\phi} \right]^{-1}. \quad (10.7)$$

Для ультррелятивистских частиц  $\sin \phi_s < 0$ . Поэтому уравнение (10.7) предсказывает удлинение сгустка, если он взаимодействует с индуктивным импедансом

$$\left( \frac{-iZ}{n} \right)_0 < 0.$$

Наоборот, если сгусток взаимодействует с емкостным импедансом, уравнение (10.7) предсказывает его укорочение. Такой результат не очень удивителен, поскольку индуктивная связь уменьшает, а емкостная увеличивает жесткость ВЧ-ямы. Если эффект удлинения мал, уравнение (10.7) записывается в виде

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_0^2} = 1 + \frac{Ne^2\omega_0}{v_s eV \sin \phi_s} \left( \frac{-iZ}{n} \right)_0 n_0^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\phi}. \quad (10.8)$$

Учитывая, что при релятивистских энергиях частиц напряжение на ускоряющем резонаторе должно наращиваться пропорционально  $\gamma^4$ , перепишем (10.8) в виде

$$\frac{\sigma_\phi^2}{(\sigma_\phi^2)_0} = 1 + C \frac{N}{\gamma^4 \sigma_\phi}, \quad (10.9)$$

где  $C$  – безразмерный фактор, зависящий от параметров машины. Полученная формула замечательна тем, что она совпадает с той, которая использовалась для подгонки данных в первоначальных экспериментах по удлинению.

## 10.2. Уравнение Хайсинского

Приведенные вычисления указывают на желательность более систематического подхода к расчету влияния искажения потенциальной ямы на линейную плотность пучка. Один из возможных подходов к решению подобной задачи базируется на предположении о том, что в конечном счете пучок достигает равновесного состояния с бальцмановским распределением частиц в фазовом пространстве синхротронных колебаний

$$f \propto \exp[-h(\Delta p, \phi)/T], \quad (10.10)$$

где  $h$  – гамильтониан синхротронных колебаний, учитывающий действие наведенных полей

$$h = \frac{\Delta\omega^2}{2} - \frac{(\omega_c^2)_0\phi^2}{2} + \omega_0 \frac{Ne^2\alpha_p}{\text{Пр}} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{-iZ_n}{n} \rho_n e^{in\phi}, \quad (10.11)$$

а  $T$  – продольная температура пучка, выраженная в соответствующих единицах. Если мы принимаем такое предположение, то с точностью до нормировочной постоянной равновесная функция распределения определяется формулой

$$f(\Delta\omega, \phi) = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{2\sigma_\Delta^2} - \frac{\phi^2}{2\sigma_0^2} - \frac{Ne^2\omega_0}{eV \sin\phi_s\sigma_0^2} \int dn \frac{-iZ_n}{n} \rho_n e^{in\phi}\right), \quad (10.12)$$

где  $\sigma_\Delta = \omega_c\sigma_0$  – равновесный разброс частот сгустка, который предполагается не зависящим от  $N$ . Интегрирование  $f$  по  $\Delta\omega$  приводит к следующему выражению для линейной плотности пучка

$$\rho(\phi) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_0^2} - \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' w(\phi' - \phi) \rho(\phi')\right), \quad (10.13)$$

$$w(\phi) = \frac{Ne^2\omega_0}{eV \sin\phi_s\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{-iZ_n}{n} e^{-in\phi}. \quad (10.14)$$

Поскольку правая часть в (10.14) содержит неизвестную функцию  $\rho(\phi)$  под знаком интеграла, формула (10.13) представляет собой нелинейное интегральное уравнение. Это т. н. уравнение Хайсинского [25], которое в настоящее время регулярно используется для расчета удлинения сгустка из-за искажения наведенными полями потенциальной ямы синхротронных колебаний частиц. В силу условия причинности ядро  $w(\phi)$  равно нулю для отрицательных значений его аргумента  $\phi$ . Поэтому уравнение Хайсинского является интегральным уравнением Вольтерра. Хотя возможность прямого решения таких уравнений довольно редка, имеются теоремы о существовании и единственности решений таких уравнений, если наведенные сгустком поля несингулярны

$$\overline{w^2} = \int_0^{\infty} d\phi w^2(\phi) < \infty. \quad (10.15)$$

Вместе с тем ясно, что в таких условиях особый интерес представляют примеры, когда уравнение Хайсинского может быть решено точно.

### 10.2.1. Резистивный импеданс

Один из таких примеров был указан А. Г. Ружжеро [26], который получил решение уравнения Хайсинского, предположив, что сгусток взаимодействует с устройством, имеющим чисто активный импеданс

$$Z(n) = Z_0.$$

При этом

$$w(\phi) = \frac{Ne^2\omega_0\pi Z_0}{eV \sin \phi_s \sigma_0^2} \text{sgn}(\phi),$$

а уравнение (10.14) принимает вид ( $x = \phi/\sigma_0$ ):

$$\ln \rho = -\frac{x^2}{2} - \frac{Ne^2\omega_0 Z_0 \alpha_p}{2\nu_c^2 p v \sigma_0} \left[ \int_{-\infty}^x - \int_x^{\infty} \right] dx' \rho(x'),$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по  $x$ , получим

$$\frac{\rho'}{\rho} = -x - \xi \rho, \quad \xi = \frac{Ne^2\omega_0 Z_0 \alpha_p}{2\nu_c^2 p v \sigma_0}. \quad (10.16)$$

Подставив сюда  $\rho = \exp(-x^2/2)\chi(x)$  и интегрируя обе части уравнения

$$\frac{\chi'}{\chi^2} = -\xi \exp(-x^2/2)$$

по  $x$ , найдем

$$\frac{1}{\chi(0)} - \frac{1}{\chi(x)} = \xi \int_0^x dx' e^{-x'^2/2}$$

или

$$\rho(x) = \frac{\rho(0) \exp(-x^2/2)}{1 + \xi \rho(0) \int_0^x dx' \exp(-x'^2/2)}. \quad (10.17)$$

Постоянная  $\rho(0)$  определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho(\phi) = 1.$$

Вычисление нормировочного интеграла

$$\sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\rho(0) \exp(-x^2/2)}{1 + \xi \rho(0) \int_0^x dx' \exp(-x'^2/2)}$$

облегчается тем, что числитель подынтегрального выражения в точности равен производной знаменателя:

$$\frac{\rho(0) \exp(-x^2/2)}{1 + \xi \rho(0) \int_0^x dt e^{-t^2/2}} = \frac{1}{\xi} \frac{d}{dx} \ln \left( 1 + \xi \rho(0) \int_0^x dt e^{-t^2/2} \right).$$

Поэтому

$$\sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(0) \exp(-x^2/2)}{1 + \xi \rho(0) \int_0^x e^{-t^2/2} dt} dx = \frac{\sigma_0}{\xi} \ln \left( \frac{1 + \xi \rho(0) \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt}{1 - \xi \rho(0) \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt} \right) = 1$$

или

$$\ln \left( \frac{1 + \xi \rho(0) \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 - \xi \rho(0) \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \right) = \frac{\xi}{\sigma_0} = 2\zeta.$$

Разрешая это уравнение относительно  $\rho(0)$ , получаем

$$\rho(0) = \frac{\sqrt{2} e^{2\zeta} - 1}{\xi \sqrt{\pi} (1 + e^{2\zeta})}. \quad (10.18)$$

Подставив это выражение в формулу (10.17) и выполнив простые преобразования, находим

$$\rho(x) = \frac{\exp(-x^2/2)/(\sqrt{2\pi}\zeta\sigma_0)}{\coth(\zeta) + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})}, \quad \xi = 2\sigma_0\zeta = 2\sigma_0 \frac{N}{N_0}. \quad (10.19)$$

Здесь  $\operatorname{erf}(x)$  – интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}.$$

Если действие наведенных полей мало ( $\zeta \ll 1$ ), то полученное решение близко к распределению Гаусса

$$\rho(x) \simeq \exp(-x^2/2)/(\sqrt{2\pi}\sigma_0)[1 - \zeta \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})],$$

а увеличение длины пучка мало.

Эффект удлинения велик в области  $\zeta \gg 1$ , где линейная плотность частиц в сгустке  $\rho(x)$  принимает форму, близкую к треугольной (рис. 34):

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{|x|}{\xi} \frac{g(x)}{1+g(x)(1-1/x^2)}, & x < 0. \end{cases} \quad (10.20)$$

Здесь

$$g(x) = \frac{\exp(-x^2/2 + 2\zeta)}{\sqrt{2\pi}|x|}.$$

Как видно из рис. 34, при этом распределение поля внутри пучка в значительной степени выполаживается. Ширина  $\rho(x)$  в этом случае может оцениваться неравенствами

$$-2\sqrt{\zeta} \leq x \leq 0,$$

что дает

$$\sigma_\phi(N) \simeq \sqrt{\frac{N e^2 \omega_0 Z_0 \alpha_p}{v_c^2 p v}} \gg \sigma_0. \quad (10.21)$$

Такая асимптотическая зависимость (рис. 35) качественно согласуется с вычислением длины пучка по формуле

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \bar{x})^2 \rho(x),$$

где

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \rho(x).$$

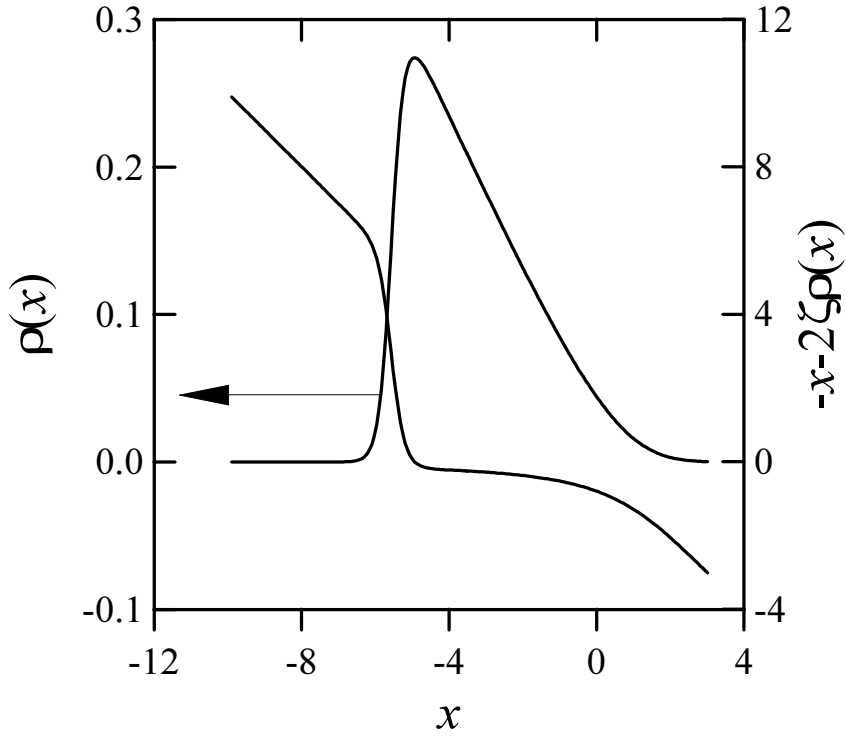


Рис. 34. Линейная плотность пучка (левая ось) и распределение продольного поля в пучке (правая ось:  $-x - 2\zeta\rho(x)$ ),  $\zeta = 9$

### 10.2.2. Индуктивный импеданс

Другой решаемый пример соответствует взаимодействию пучка с чисто индуктивным элементом, когда

$$\frac{-iZ_n}{n} = -L\omega_0$$

и, соответственно,

$$w(\phi) = \frac{2\pi N e \omega_0^2 L}{V |\sin \phi_s| \sigma_0^2} \delta(\phi),$$

а уравнение Хайсинского превращается в трансцендентное уравнение относительно линейной плотности  $\rho$

$$\chi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \zeta[\chi(x) - 1]\right), \quad (10.22)$$

где  $\chi = \rho/\rho(0)$ , а

$$\zeta = \frac{2\pi N e \omega_0^2 L}{V |\sin \phi_s| \sigma_0^2} \rho(0) = \frac{N}{N_0} \rho(0).$$

Постоянная  $\rho(0)$  в этих уравнениях определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = 1.$$

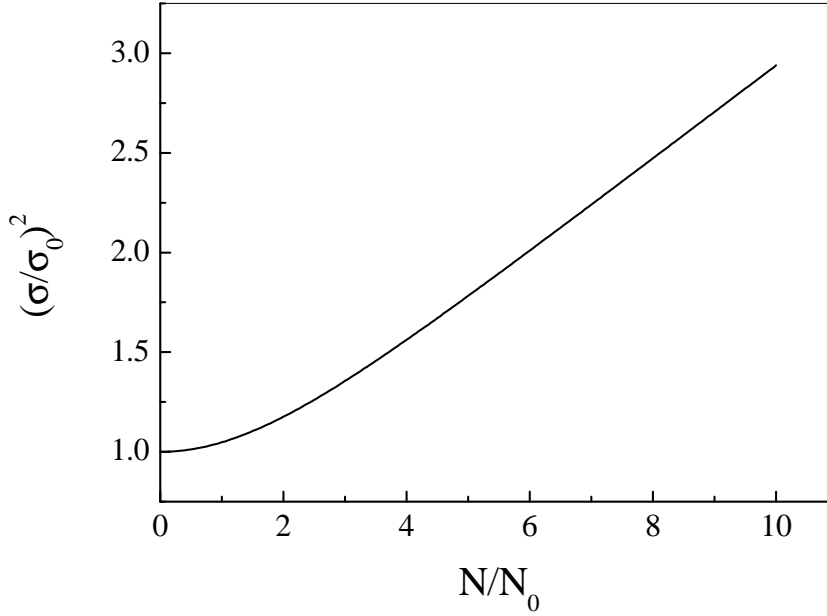


Рис. 35. Зависимость длины пучка от числа частиц в сгустке при его взаимодействии с резистивным элементом камеры

Поскольку мы ведем расчет для индуктивного импеданса, плотность  $\rho(x)$  является четной функцией  $x$  [ $\rho(-x) = \rho(x)$ ].

Ввиду неявной зависимости  $\chi$  от  $x$  в такой модели при вычислении интегралов по  $x$  удобнее проводить замену переменной интегрирования согласно  $u = \chi(x)$ . Тогда, например, нормировочный интеграл записывается в виде

$$1 = \sqrt{2}\rho(0) \int_0^1 d\chi \frac{1 + \zeta\chi}{\sqrt{\zeta(1-\chi) - \ln \chi}}, \quad (10.23)$$

а длина пучка определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \rho(x) \\ &= 2\sqrt{2}\rho(0) \int_0^1 d\chi (1 + \zeta\chi) \sqrt{\zeta(1-\chi) - \ln \chi}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Как видно из рис. 36, в области  $N \gg N_0$  длина сгустка увеличивается согласно

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} \propto \left( \frac{N}{N_0} \right)^{1/3}. \quad (10.25)$$

В обоих рассмотренных примерах значение длины сгустка при больших  $N$  находится в хорошем качественном соответствии с предположением о выполаживании потенциальной ямы синхротронных колебаний наведенными полями.

### 10.3. Синхротронные колебания в искаженной яме

Уменьшение крутизны потенциальной ямы синхротронных колебаний наведенным полем пучка искажает фазовые траектории и приводит к уменьшению частот

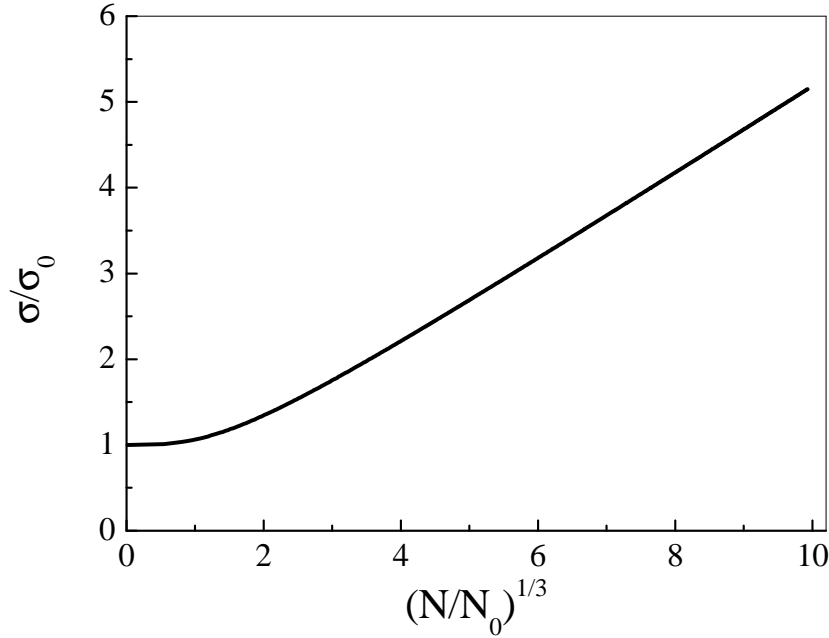


Рис. 36. Зависимость длины пучка от тока при взаимодействии с индуктивным элементом камеры

синхротронных колебаний частиц. В рассмотренных примерах изменение частот может быть вычислено точно. Поскольку движение происходит в поле с потенциалом  $U_{eff} = -\ln \rho(x)$ , то определив гамильтониан выражением

$$h = \frac{q^2}{2} + U_{eff}(x), \quad q = p/v_{c0},$$

найдем, что переменная действие возмущенных синхротронных колебаний определяется интегралом

$$J(h) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{x_2}^{x_1} dx \sqrt{h + \ln \rho}, \quad h + \ln \rho(x_{1,2}) = 0. \quad (10.26)$$

При этом частоты колебаний равны

$$v_c(J) = v_{c0} \frac{\partial h}{\partial J}. \quad (10.27)$$

Характер изменения частот по ток пучка, наведенным в резистивных и индуктивных элементах, вообще, отличается. Это обстоятельство прослеживается уже при вычислении частот малых колебаний в искаженных ямах. В обоих случаях частота малых колебаний определяется второй производной  $U_{eff}$ , вычисленной в точке равновесия

$$U_{eff}(x) \simeq U_0 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2, \\ k = \left. \frac{d^2 U_{eff}}{dx^2} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{dU_{eff}}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (10.28)$$



При этом

$$v_c^2 = kv_{c0}^2. \quad (10.29)$$

Если пучок взаимодействует с резистивным элементом ( $Z_n = Z_0$ ), то положение равновесия определяется уравнением

$$\left. \frac{dU_{eff}}{dx} \right|_{x=x_0} = - \left. \frac{\rho'}{\rho} \right|_{x=x_0} = x_0 + \xi\rho(x_0) = 0, \quad (10.30)$$

а вычисление второй производной дает

$$U''_{eff}(x_0) = 1 + \xi\rho'(x_0). \quad (10.31)$$

Поскольку согласно (10.30)  $\rho'(x_0) = 0$  из (10.29) получаем

$$v_c^2 = v_{c0}^2. \quad (10.32)$$

Таким образом, в данном случае частоты малых синхротронных колебаний в иска-

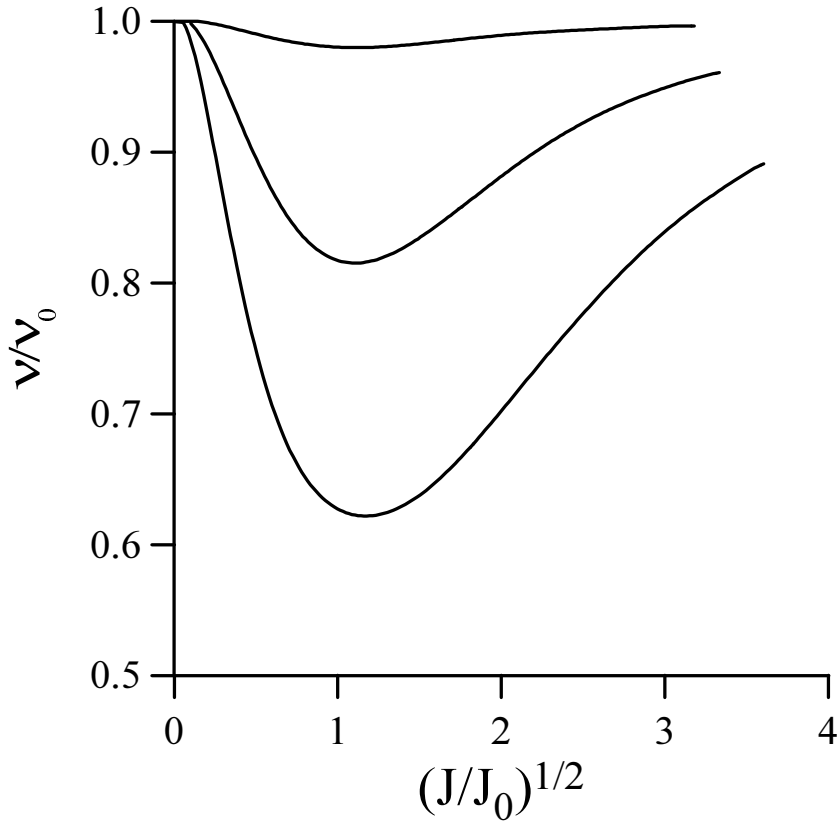


Рис. 37. Зависимость частоты синхротронных колебаний от действия. Сверху вниз  $N/N_0 = 1, 4, 9$ ;  $J_0 = R_0\rho v_{s0}\sigma_0^2/(2\alpha)$

женной и неискаженной ямах совпадают при всех токах пучка. Влияние искажения ямы наведенными полями проявляется в заметном увеличении нелинейности колебаний, что приводит к своеобразной зависимости частот колебаний от действия  $J$

(рис. 34 и рис. 37), когда частота  $\nu_c$  сначала уменьшается и после прохождения минимума постепенно возвращается к невозмущенному значению  $\nu_{c0}$ . Как показано на рис. 37, глубина провала  $\nu_c(J)$  увеличивается при увеличении тока пучка  $N$ , однако в абсолютных числах она невелика.

Совсем иную зависимость от  $J$  и тока пучка ( $N$ ) имеет частота синхротронных колебаний частицы при искажении ямы индуктивными наведенными полями. В этом случае минимум  $U_{eff}$  приходится на точку  $x_0 = 0$ , в которой  $\chi'(0) = 0$ . Вычисление второй производной  $U_{eff}$  в этой точке приводит к следующему выражению для частоты малых синхротронных колебаний

$$\nu_c^2 = \frac{\nu_{c0}^2}{1 + N/N_0}. \quad (10.33)$$

Отсюда видно, что частота малых колебаний монотонно уменьшается при увеличении тока пучка  $N$ . Такая тенденция сохраняется и для колебаний большой амплитуды (рис. 38).

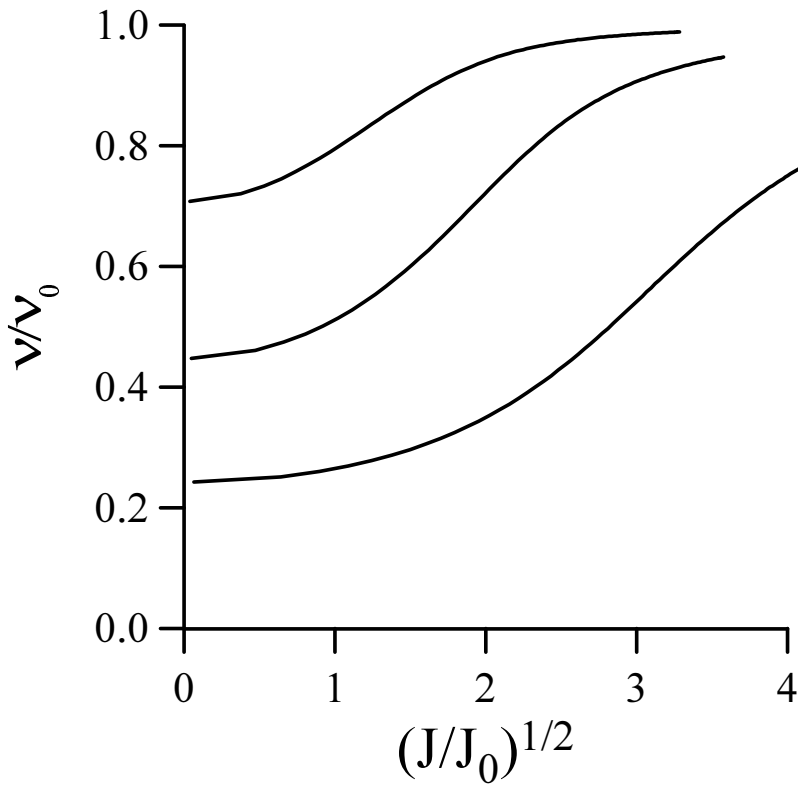


Рис. 38. Зависимость частоты синхротронных колебаний от амплитуды ( $\sqrt{J}$ ) при взаимодействии пучка с индуктивным элементом. Сверху вниз  $N/N_0 = 1, 4, 16$ ;  $J_0 = R_0 p \nu_{c0} \sigma_0^2 / (2\alpha)$

Уменьшение частот синхротронных колебаний частиц при увеличении тока пучка, а также немонотонная зависимость частоты от амплитуды в случае, когда пучок взаимодействует с резистивным элементом, в целом ухудшают устойчивость стационарного состояния, определяемого уравнением Хайсинского, и нарушают предположения, использованные при его получении. Ввиду различия в зависимости частоты

синхротронных колебаний от амплитуды можно ожидать, что характер неустойчивости может быть различен для случаев, когда пучок взаимодействует с индуктивным или резистивным элементами вакуумной камеры. В первом случае из-за уменьшения частоты малых колебаний частиц следует ожидать усиления роли неустойчивостей продольных или поперечных колебаний из-за связи синхротронных мод сгустка. Разброс частот синхротронных колебаний, сопровождающий искажение ямы, вообще, не просто влияет на устойчивость коллективных мод пучка. С одной стороны, увеличение разбросов частот колебаний усиливает затухание Ландау мод и этим способствует увеличению пороговых токов неустойчивостей. Это справедливо, по крайней мере, пока моды не связаны.

Для обеспечения устойчивости связанных синхробетатронных мод, как мы уже видели в разделе 7.4., необходим также разброс частот бетатронных колебаний. Далее, согласно формуле (10.33) и кривым, изображенным на рис. 39 и рис. 38, с увеличением числа частиц в сгустке ( $N$ ) частота  $[(m + 1)v_c(N)]$  моды с номером мультипольности  $m + 1$  может стать меньше частоты моды с номером мультипольности  $m$ , которая равна  $mv_c(0)$  (например, рис. 39), если

$$N \geq (N_c)_m = N_0 \frac{2m + 1}{m^2}. \quad (10.34)$$

При выполнении этого условия мода  $m + 1$  в области малых амплитуд и мода  $m$  в области больших амплитуд синхротронных колебаний оказываются резонансно связанными. Хотя исследование устойчивости когерентных колебаний в этом случае за-

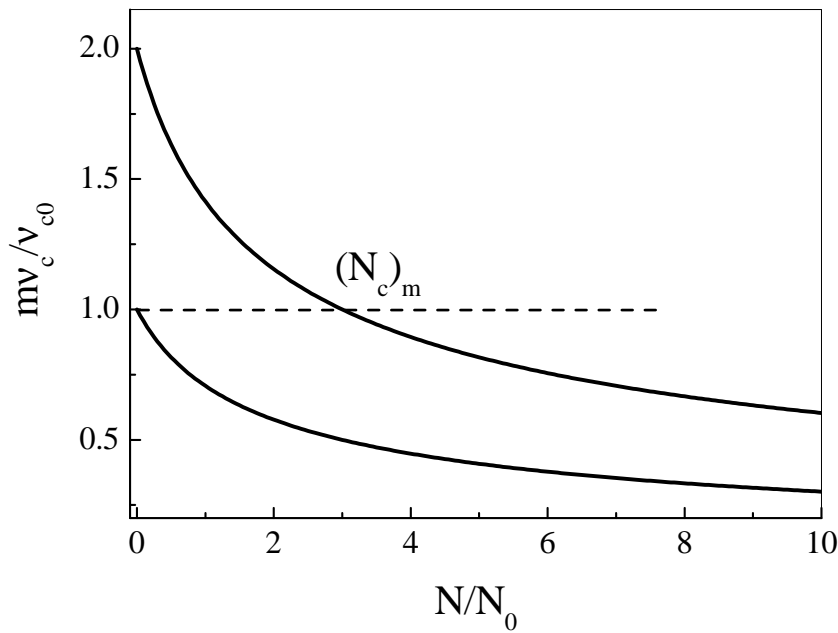


Рис. 39. Зависимости частот первых двух гармоник функции распределения ( $m=1, 2$ ) от числа частиц в сгустке. Импеданс электродов индуктивный

труднено, можно заметить, что при уменьшении частоты малых колебаний настолько, что  $v_c(0) < (v_c)_0/2$ , искажение потенциальной ямы связывает все синхротронные моды, а когерентные колебания пучка становятся быстрыми. В таком случае, условия

устойчивости когерентных колебаний перестают зависеть от разброса частот синхротронных колебаний и, скорее, определяются разбросом импульсов в пучке.

Наконец, если пучок взаимодействует с резистивным элементом, то помимо (более слабой) возможности перекрытия мод из-за минимума в зависимости  $\nu_c(J)$  резонансными оказываются колебания малых и больших амплитуд одной и той же моды. Кроме того, стационарное распределение, которое, напомним, вычислялось в адиабатическом приближении по бетатронным колебаниям, будет чувствительно к влиянию также и некогерентных резонансных возмущений. Последнее обстоятельство может быть особенно существенным, например, для устойчивости встречных пучков.

## 10.4. «Турбулентное» удлинение сгустков

Приведенные соображения и, что более важно, экспериментальное изучение эффекта удлинения сгустков в реальных машинах указывает на то, что начиная с некоторого порогового тока увеличение длины сгустка может определяться возможностью развития в нем (неустойчивых) когерентных колебаний. В отличие от удлинения за счет искажения потенциальной ямы такой процесс сопровождается ростом продольной температуры пучка. Надо заметить, что увеличение температуры не обязательно связано с возбуждением колебаний пучка с большими амплитудами. Можно показать, что наличие порогов неустойчивости, зависящих от температуры пучка, вообще препятствует охлаждению пучка под порог неустойчивости (см. например, [2]). Причиной этого является аномальный рост уровня когерентных флуктуаций пучка в околопороговой области и рассеяние частиц на этих флуктуациях. Удлинение сгустка из-за развития в нём коллективных неустойчивостей принято называть турбулентным, имея в виду, что в такой процесс вносит вклад большое число коллективных мод пучка.

Последовательное описание нагрева пучка вблизи порогов неустойчивости его коллективных мод, вообще говоря, требует расчетов, выходящих за рамки применимости теории возмущений. Такая задача осложняется еще и тем, что в интересующих здесь случаях потенциальная яма синхротронных колебаний частиц далека от параболической. Поэтому величина равновесной температуры пучка определяется совместным изменением происходящих в нем кинетических и динамических процессов. В этой связи, для практических расчетов установившихся длин пучков за счет турбулентного удлинения обычно принимается, что равновесная продольная температура пучка ( $T$ ) примерно соответствует выходу пучка на порог неустойчивости. Поскольку в сгруппированном пучке температура и длина пучка связаны соотношением

$$T = R_0 \frac{\Delta\omega_0^2}{|\omega'_0|} = R_0 \frac{\omega_c^2 \theta_b^2}{|\omega'_0|}, \quad (10.35)$$

увеличение температуры сопровождается удлинением пучка  $l_b = 2R_0\theta_b$ .

Вообще, даже такой упрощенный способ расчета может потребовать довольно сложных вычислений пороговых токов пучка. Тем не менее, для оценки эффекта можно воспользоваться тем фактом, что при релятивистских энергиях частиц большая часть машин работает выше своей критической энергии. Поэтому так или иначе условия устойчивости продольных когерентных колебаний в основном соответству-

ют выполнению  $Z/n$ -критерия. Как мы видели в разделе 2.2, величина порогового тока в этом критерии зависит от номера азимутальной гармоники моды. Для сгруппированного пучка в соответствующий критерий устойчивости входят суммы  $Z_n/n$  с некоторыми весами, зависящими от устройства мод. Чтобы избежать сложных вычислений и оценить продольную температуру сгустка по порядку величины, принимается, что при длине сгустка  $l_b = R_0\theta_b$  условие устойчивости мод когерентных колебаний определяется гармониками с  $|n|\theta_b \leq 1$ . Для достаточно длинных пучков принимается также, что входящая в  $Z/n$ -критерий величина  $Z/n$  начинает изменяться после такого  $|n| = n_0$ , что  $n_0\theta_b \gg 1$ , а наведенные поля определяются линейной плотностью частиц в сгустке. В этом случае порог по  $Z/n$ -критерию определяется формулой

$$\Delta\omega_0^2 = \frac{Ne^2\omega_0\omega'_0}{l_b} \left( \frac{-iZ_n}{n} \right), \quad |n| < n_0, \quad (10.36)$$

Воспользовавшись (10.35), мы перепишем это соотношение в виде

$$\theta_b^2 = \frac{Ne^2\omega_0\omega'_0}{l_b\omega_c^2} \left( \frac{-iZ_n}{n} \right). \quad (10.37)$$

При этом длина пучка ( $l_b = 2R_0\theta_b$ ) увеличивается пропорционально  $N^{1/3}$ :

$$l_b \propto y^{1/3}, \quad y = \frac{N\alpha}{pcv_c^2}.$$

# Лекция 11

## Суммы декрементов коллективных мод

### 11.1. Теорема о сумме декрементов

Вычисление собственных частот коллективных мод пучка часто требует решения весьма сложных линейных интегральных уравнений. Встречающиеся при этом математические трудности делают особенно привлекательными методы анализа таких общих свойств спектров и вычисления таких величин, которые не требуют непосредственного решения этих интегральных уравнений. Как известно, для линейных интегральных уравнений такими величинами являются инварианты, выражающиеся через свертки различных степеней ядра данного уравнения. Простейшей величиной такого рода является сумма собственных чисел. Если интересующие уравнения имеют вид

$$\lambda w_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sum_{m'} K_{m,m'}(x, x') w_{m'}(x'), \quad (11.1)$$

а  $\alpha$  нумерует собственные решения, то искомая сумма выражается через след ядра:

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dx K_{m,m}(x, x). \quad (11.2)$$

Важность такого инварианта обусловлена его связью с суммами декрементов коллективных мод пучка, характеризующими возможность или невозможность демпфирования этих колебаний «в среднем». Из определения сумм декрементов ясно, что разумно рассмотреть отдельно свойства сумм декрементов мод в отсутствие разбросов частот и сумм декрементов затухания Ландау. Для упрощения вычислений мы обсудим свойства сумм декрементов монохроматического пучка (обсуждение свойств сумм декрементов с учетом затухания Ландау можно найти в книгах [2] или [3]). В этом случае собственные частоты мод находятся решением уравнения (3.21), которое мы перепишем в виде

$$\Delta \omega_m f_m = N e^2 \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \sum_{m'_c} \sum_n \int d\Gamma' G_{m,n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}', \omega + n\omega_s) f_{m'}(\mathbf{I}'). \quad (11.3)$$

В этом уравнении учтено, что реально коллективное взаимодействие связывает лишь синхротронные моды пучка. Если набор осцилляторов наведенных полей хорошо

определен, то уравнение (11.3) заменяется следующей системой линейных уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m &= \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \sum_k \sum_n (\mathbf{v}\mathbf{A}_k)_{m,n} q_{k,n}, \\ [\omega_k^2 - (\omega + n\omega_s + i\lambda_k)^2] q_{k,n} &= Ne^2 \int d\Gamma' \sum_m (\mathbf{v}\mathbf{A}_k)_{m,n}^* f_m(\mathbf{I}'). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Сумма декрементов решений этих уравнений очевидно равна сумме декрементов осцилляторов поля:

$$\sum_\alpha (-\text{Im}\Delta\omega_\alpha) = \sum_k \lambda_k. \quad (11.5)$$

Эта величина положительна. Поэтому имеется по крайней мере принципиальная возможность обеспечения устойчивости всех мод. Поскольку связь пучка с наведенными полями перераспределяет декременты  $\lambda_k$  между осцилляторами поля и коллективными модами пучка, точное соотношение (11.5), к сожалению, не дает представления об относительной доле  $\lambda_k$ , вносимой в коллективные колебания пучка. Мы уже видели, что при нерезонансном взаимодействии эта доля вообще невелика. В этой связи оценка потенциальной возможности демпфирования колебаний с помощью той или иной низкочастотной системы электродов должна проводиться прямым вычислением суммы декрементов уравнений (11.4). Используя (11.2), пишем

$$\Delta\omega_\Sigma = Ne^2 \sum_{m,n} \int d\Gamma \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) G_{mn}(1, 1, \omega_{mn}). \quad (11.6)$$

Учитывая, что на действительной оси  $\omega$

$$\text{Re}G(\omega) = \text{Re}G(-\omega), \quad \text{Im}G(\omega) = -\text{Im}G(\omega),$$

получаем, что  $\Delta\omega_m = -\Delta\omega_{-m}$ . Поэтому  $\Delta\omega_\Sigma = -i\delta_\Sigma$ , а

$$\begin{aligned} \delta_\Sigma &= -Ne^2 \sum_{m,n} \int d\Gamma \left( \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \text{Im}G_{mn}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{mn}) \\ &= Ne^2 \sum_{m,n} \int d\Gamma f_0 \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \text{Im}G_{mn}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{mn}). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Для того чтобы понять смысл полученного соотношения, вычислим декременты потерь энергии частицы за счет реакции ее излучения в ту же систему электродов. Поскольку  $I_\alpha$  – интегралы движения невозмущенных колебаний, в первом приближении метода усреднения пишем

$$\begin{aligned} \frac{dI_\alpha}{dt} &= \overline{\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}}, \quad \Gamma = (\mathbf{p}, \mathbf{r}), \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= e^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^\infty d\tau G(\Gamma(t), \Gamma(t - \tau), \tau). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Используя разложение

$$G(\Gamma(t), \Gamma'(t - \tau), \tau) = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} \sum_{n, n'} G_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}^{n, n'} \\ \times \exp(i[\mathbf{m}\boldsymbol{\psi}(t) - \mathbf{m}'\boldsymbol{\psi}(t - \tau) + n\theta(t) - n'\theta(t - \tau)]),$$

убеждаемся, что в нерезонансном случае ( $\mathbf{m}\mathbf{v} \neq l$ ), усреднение по времени отбирает в (11.8) гармоники  $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$  и  $n = n'$ . После этого  $\bar{L}$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \boldsymbol{\psi}} &= ie^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \int_0^\infty d\tau G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \tau) e^{i\tau[\mathbf{m}\boldsymbol{\omega} + n\omega_s]} \\ &= ie^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{\mathbf{m}, n}) \\ &= -e^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \text{Im} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{\mathbf{m}, n}), \end{aligned} \quad (11.9)$$

что дает

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = -e^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \text{Im} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{\mathbf{m}, n}). \quad (11.10)$$

Если теперь определить мгновенные декременты частиц соотношением

$$\delta_a = -\frac{\partial \dot{I}_a}{\partial I_a},$$

то согласно уравнению (11.10) сумма мгновенных декрементов всех частиц пучка, взаимодействующих с системой независимо друг от друга, равна

$$\delta_\Sigma = \sum_{a=1}^N \delta_a = \sum_{a=1}^N e^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \text{Im} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_a, \omega_{\mathbf{m}, n})$$

Заменив в этом соотношении суммирование по частицам усреднением с функцией распределения частиц, получим, что величина

$$\delta_\Sigma = Ne^2 \int d\mathbf{I} \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \text{Im} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_a, \omega_{\mathbf{m}, n}) \quad (11.11)$$

точно равна сумме декрементов мод когерентных колебаний. Таким образом, мы установили, что для монохроматического пучка сумма декрементов мод когерентных колебаний равна сумме декрементов отдельных частиц, взаимодействующих с той же системой независимо друг от друга (Я. С. Дербенев, Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков, 1970 [27]).

Это утверждение носит название теоремы о сумме декрементов коллективных колебаний. Обратим внимание на то, что в отличие от демпфирования за счет реакции синхротронного излучения частиц, суммы декрементов когерентных мод определяются не полной мощностью излучения, а модуляцией парциальных мощностей. По этой причине разумное усиление демпфирования когерентных колебаний не усугубляет энергетических проблем установок.



## 11.2. Влияние радиальной модуляции потерь

Поскольку

$$\left\langle \sum_{\alpha} \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial I_{\alpha}} \right\rangle = - \langle \operatorname{div}_p \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.12)$$

суммы декрементов коллективных мод пучка, взаимодействующего с низкодобротной системой, слабо зависят от особенностей колебаний частиц относительно замкнутой орбиты. В частности, суммы декрементов дипольных мод не зависят от связи радиального и продольного движения частиц. Это важное утверждение можно проиллюстрировать следующими простыми вычислениями.

Пусть пучок взаимодействует с низкодобротной системой, импеданс которой точно равен нулю на равновесной орбите, а радиальный градиент этого импеданса не равен нулю. При этом гармоники продольного наведенного поля равны

$$E(n, \omega) = -\frac{e\omega_s}{\Pi} \int d\Gamma Z_n(x, \omega) f_{n, \omega}, \quad (11.13)$$

а уравнение для синхротронных когерентных колебаний принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m &= \frac{Ne^2\omega_s}{2\pi} m_c \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \int_{-\infty}^{\infty} dn J_{m_c}(n\varphi) \\ &\times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' f_m \left\{ \frac{iZ_n(x, n\omega_s + m_c\omega_c)}{n + m_c v_c} e^{in\varphi \cos \psi_c} \right\}_{m_c}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Теперь примем во внимание, что

$$Z_n(x, \omega) = \left( \frac{\partial Z'}{\partial x} \right)_s x = \left( \frac{\partial Z'}{\partial x} \right)_s \eta \frac{\Delta p}{p},$$

а также предположим, что  $Z$  является чисто активным импедансом ( $Z = Z' + iZ''$ ,  $Z'' = 0$ ) и не зависит от частоты  $\omega$

$$\left| \frac{\partial Z'}{\partial \omega} \right| \ll \left| \frac{Z'}{\omega} \right|.$$

В этом случае вычисление гармоник в (11.14) дает

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\Delta p}{p} \exp(in\varphi \cos \psi_c) \right]_{m_c} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_c}{2\pi} \frac{\Delta p}{p} \exp(in\varphi \cos \psi_c - im\psi_c) \\ &= -\frac{v_c \varphi}{\alpha_p} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_c}{2\pi} \sin \psi_c \exp(in\varphi \cos \psi_c - im\psi_c) = \frac{m_c v_c}{\alpha_p n} J_{m_c}(n\varphi). \end{aligned}$$

Удерживая в (11.14) низшие степени  $m_c v_c$ , вместо (11.14) получим

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m &= i \frac{Ne^2\omega_s}{2\pi} \frac{m_c^2 v_c}{\alpha_p} \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \left( \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \\ &\times J_{m_c}(n\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') f_m, \quad |m_c v_c| \ll 1. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Подстановки

$$u = \sqrt{\varphi^2/2}, \quad f_m = \chi_m \sqrt{-\partial f_0/\partial u}$$

и

$$\Delta\omega_m = -i\Lambda \frac{Ne^2\omega_s m_c^2}{2\pi p R_0} \quad (11.16)$$

позволяют преобразовать это уравнение в интегральное уравнение с действительным, симметричным ядром

$$\Lambda\chi_m = \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \left( \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \int_0^{\infty} du' K_m(u, u') \chi_m(u'), \quad (11.17)$$

$$K_m(u, u') = \sqrt{\frac{\partial f_0}{\partial u} \frac{\partial f_0}{\partial u'}} J_{m_c}(n\sqrt{u}) J_{m_c}(n\sqrt{u'}). \quad (11.18)$$

При выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s > 0 \quad (11.19)$$

ядро уравнения (11.17) положительно определено:

$$\int_0^{\infty} dx dx' w(x) K(x, x') w(x') > 0,$$

а все его собственные значения  $\Lambda$  являются положительными, действительными числами. Согласно соотношению (11.16) в этом случае все синхротронные когерентные моды пучка будут затухать. Суммы декрементов мод с заданным  $m_c$  даются выражениями

$$\delta_{\Sigma}^{(m)} = -\omega_s \frac{Ne^2\omega_s}{2\pi p v} m_c^2 \int_0^{\infty} du \frac{\partial f_0}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \left( \eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s J_{m_c}^2(n\sqrt{u}), \quad (11.20)$$

а полная сумма декрементов синхротронных мод получается суммированием  $\delta_{\Sigma}^{(m)}$  по  $m_c$ . Необходимая для этого сумма

$$S_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 J_m^2(x)$$

вычисляется с использованием разложения

$$\exp(ix \cos \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\psi},$$

или

$$\frac{d}{d\psi} \exp(ix \cos \psi) = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} m J_m(x) e^{im\psi}.$$

Отсюда, после возведения обеих частей равенства в квадрат по модулю и усреднения по  $\psi$ , получаем

$$S_2 = x^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \sin^2 \psi = \frac{x^2}{2},$$

а

$$\delta_{\Sigma}^{(c)} = \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \delta_{\Sigma}^{(m)} = \omega_s \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p v} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s. \quad (11.21)$$

Теперь, для выяснения зависимости суммы декрементов синхротронных и радиальных мод от радиально-продольной связи колебаний частиц нам нужно вычислить сумму декрементов дипольных ( $m_x = \pm 1$ ) радиальных бетатронных и синхробетатронных когерентных колебаний. В данном случае кажется удобным исходить из общего интегрального уравнения, записанного с использованием выражения

$$I_{\alpha} = \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F}.$$

При этом

$$(\omega - m_x \omega_x - m_c \omega_c) f_m = -i \overline{\left( \frac{\partial I_x}{\partial \Delta p} e E_{\theta} \right)_{m_x, m_c}} \frac{\partial f_0}{\partial I_x}. \quad (11.22)$$

Предполагая, как и прежде, что в месте расположения электродов  $\eta' = 0$ , пишем

$$I_x = \frac{p v_x a_x^2}{2R_0}, \quad \frac{\partial I_x}{\partial \Delta p} = -\frac{v_x \eta}{R_0} a_x \cos \psi_x. \quad (11.23)$$

Подстановка этого выражения в (11.22) после вычисления гармоник приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \Delta \omega_m f_m &= -i \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p} \sqrt{I_x} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \\ &\quad \times J_{m_c}(n_1 \varphi) \int d\Gamma' \sqrt{I_x'} J_{m_c}(n_1 \varphi') f_m \end{aligned}$$

где  $\Delta \omega_m = \omega - m_x \omega_x - m_c \omega_c$ . Подставив сюда  $f_0 = F_0(I_x) \rho(\varphi)$  и  $f_m = \chi_m(\varphi) \sqrt{I_x} \partial F_0 / \partial I_x$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta \omega_m \chi_m &= i \rho(\varphi) \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \\ &\quad \times J_{m_c}(n_1 \varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1 \varphi') \chi_m(\varphi'). \end{aligned} \quad (11.24)$$

След ядра полученного уравнения дает искомую сумму декрементов бетатронных и синхробетатронных мод. Учитывая, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(x) = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma}^{(x)} &= \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} (\delta_{1, m_c} + \delta_{-1, m_c}) \\ &= -\omega_s \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p v} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left( \eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Теперь, сложение выражений (11.21) и (11.25) дает

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{\Sigma}^{(c)} + \delta_{\Sigma}^{(x)} = 0, \quad (11.26)$$

что доказывает наше утверждение.

### 11.3. Задачи к лекции 11

1. Преобразованием к эквивалентному дифференциальному уравнению решить уравнение (11.24) для случая, когда

$$\rho(\varphi) = \frac{\varphi_0}{\varphi_0^2 + \varphi^2}.$$

2. Вычислить поправку к декременту радиальных когерентных колебаний, описывающую эффект радиально-продольной связи для ступка, взаимодействующего с вертикально расположенной согласованной пластиной. Длина пластины велика по сравнению с длиной ступка.

# Литература

- [1] Пестриков Д. В. Лекции по когерентным колебаниям: Учеб. пос. Новосибирск: НГУ, 1996. Ч. 1,2.
- [2] Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989.
- [3] Dikansky N. S., Pestrikov D. V. Physics of Intense Beams and Storage Rings. N. Y.: AIP PRESS, 1994.
- [4] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962.
- [5] Лебедев А. Н., Шальнов А. В. Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991.
- [6] Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Затухание Ландау и расфазировки когерентных колебаний пучков в накопителях: Учеб. пос. Новосибирск: НГУ, 2010.
- [7] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Атомная энергия, т. 7, с. 549, 1958.
- [8] Дербенев Я. С., Диканский Н. С. Препринт ИЯФ 315, Новосибирск 1969.
- [9] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
- [10] Pellegrini C. Il Nuovo Cimento, **64A** , p. 447, 1969.
- [11] Sands M. SLAC TN-69-8, SLAC, 1969.
- [12] Lebedev A. N. In Proc. of the 6th Intern. Conf. on High Energy Accel. Cambridge, Mass. p. 284, 1967.
- [13] Дербенев Я. С., Диканский Н. С. Труды Всесоюзн. совеща. по ускорителям заряженных частиц. Москва 1968 г. Т. 2, с. 391 – Москва, 1970.
- [14] Балбеков В. И., Коломенский А. А. ЖТФ, **37**, стр. 2021, 1967.
- [15] Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Когерентные колебания встречных сгустков: Учеб. пос. Новосибирск: НГУ, 2011.
- [16] Kohaupt R.D. DESY Report 80/22, 1980.

- [17] Pestrikov D. V. Particle Accelerators, **41**(1), p. 13, 1993.
- [18] Pestrikov D. V. Nucl. Instr. and Meth. in Physics Research, A 373 (1996), p. 179.
- [19] Panofski W.K.H., Bander M. Rev. Sci. Instrum. **39**, (1968), p. 206.
- [20] Пестриков Д. В. Препринт ИЯФ 85-105, Новосибирск, 1985; Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Труды 13-й Междун. конф. по ускор. высок. энергий, т. 2, стр. 142, Новосибирск, 1986.
- [21] Балакин В. Е., Кооп И. А., Новохатский А. В., Скринский А. Н., Смирнов В. П. В Трудах IV Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т.1, стр. 143, Дубна 1978, Дубна, 1979; Balakin V. E., Novokhatski A. V., Smirnov V. P. In the Proceedings of the 12th Intern. Conf. on High Energy Accel., p. 119, Fermilab, 1983.
- [22] Pestrikov D. V. Phys. Rev. ST-AB, v. 2, 044403, 1999, или в Pestrikov D. V., КЕК Preprint 98-225, 1999 А.
- [23] Pestrikov D. V. Nucl. Instr. and Meth. in Physics Research, A 553 (2005), p. 416.
- [24] Pestrikov D. V. Nucl. Instr. and Meth. in Physics Research, A 562 (2006), p. 12.
- [25] Haissinski J. Il Nuovo Cimento, **18B**, p. 72, 1973.
- [26] Ruggiero A. G. IEEE Trans. On Nucl. Science, **NS-24**, p. 1205, 1977.
- [27] Дербенев Я. С., Диканский Н. С., Пестриков Д. В. В Трудах II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т. 2, стр. 62, Москва 1970, М.: Наука 1972.