

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.В. ПЕСТРИКОВ

**ЛЕКЦИИ ПО КОГЕРЕНТНЫМ
КОЛЕБАНИЯМ**

Учебное пособие

[Дополнено]

НОВОСИБИРСК
1996

ББК В381.1 я73-1

УДК 621.384.6.01

Пестриков Д.В. Лекции по когерентным колебаниям: Учеб. пособие. Ч. 1 и 2 /Новосиб. ун-т. Новосибирск, 1996.

Пособие предназначено для студентов и магистрантов Новосибирского государственного университета, занимающихся на спецкурсе "Коллективные эффекты в физике пучков". В нем приведены лекции, которые читались в НГУ по этому предмету начиная с 1987 г., а также задачи для самостоятельного решения.

Рецензент

заведующий кафедрой физики ускорителей НГУ,
чл.-кор. РАН Н.С. Диканский

утверждено на заседании кафедры физики ускорителей, 21 декабря 1995 г.

© Новосибирский государственный университет, 1996

Оглавление

1	Вводные замечания и определения	5
1.1	Дисперсионное уравнение	5
1.2	Эффект прерывания пучка	16
1.3	Задачи к Лекции 1	21
2	Когерентные колебания встречных пучков.	22
2.1	Задачи к Лекции 2	31
3	Неустойчивость отрицательной массы.	32
3.1	Задачи к Лекции 3	38
4	Импедансы связи.	39
4.1	Задачи к Лекции 4	50
5	Общее интегральное уравнение	52
5.1	Колебания несгруппированного пучка	61
5.2	Поперечный импеданс связи	69
5.3	Задачи к Лекции 5	71
6	Когерентные колебания сгустков	72
6.1	Синхротатронные колебания	73
6.2	Синхротронные когерентные колебания	77
6.3	Затухание Ландау за счет октупольных полей	78
6.4	Задачи к Лекции 6	84
7	Резонансные неустойчивости	85
7.1	Задачи к Лекции 7	92
8	Однооборотные явления	93

9	Эффект быстрого затухания	95
9.1	Задачи к Лекции 9	104
10	Head-Tail эффект	105
10.1	Задачи к Лекции 10	111
11	Связь синхробетатронных мод	112
11.1	Связь соседних мод	114
11.2	Влияние затухания мод	116
11.3	Точное решение для монохроматического сгустка	118
11.4	Влияние затухания Ландау	121
11.5	Задачи к Лекции 11	127
12	Быстрые однооборотные неустойчивости	127
12.1	Задачи к Лекции 12	135
13	Многооборотные неустойчивости	135
13.1	Колебания одного сгустка	135
13.2	Многосгустковые моды	140
13.3	Задачи к Лекции 13	143
14	О эффекте удлинения сгустков	144
14.1	Удлинение за счет искажения ВЧ-ямы наведенными полями	144
14.2	Уравнение Хайсинского	148
14.3	Синхротронные колебания в искаженной яме	155
14.4	"Турбулентное"удлинение сгустков	161
15	Суммы декрементов коллективных мод	163
15.1	Задачи к Лекции 15	172

1 Вводные замечания и определения

В этих лекциях нам хотелось дать основные понятия о теории когерентных колебаний пучков в накопителях, циклических ускорителях и установках со встречными пучками заряженных частиц, а также об основных эффектах, ограничивающих достижимые интенсивности пучков в таких установках. Задачи, которые мы будем обсуждать, в той или иной мере решались в связи с проблемой улучшения работы реальных машин. По понятным причинам мы будем упрощать, где это возможно, постановку задач и их решение. Более углубленное изложение обсуждаемых вопросов, а также более широкое описание физики интенсивных пучков включающее и кинетические явления можно найти в книгах [1], либо [2].

Приведенные задачи решались на семинарских занятиях, или в ходе выполнения студентами семестрового задания. В некоторых случаях полное решение задачи требует проведения простых расчетов на ЭВМ. Учитывая, что применение вычислительных машин в физике ускорителей стало теперь нормой, нам представляется, что включение в курс подобных задач является скорее его достоинством, чем недостатком.

Мы предполагаем, что читатель имеет общие знания по математике и электродинамике в пределах университетского курса, а по общим вопросам физики циклических ускорителей в пределах, соответствующих знакомству с книгами [3], либо [4].

1.1 Дисперсионное уравнение

Нам представляется, что обсуждение ограничений тока пучка в накопителях (ускорителях) заряженных частиц, связанных с их взаимодействием, полезно начать с следующей простой задачи. Предположим, что в каждой точке орбиты, скажем горизонталь-

ные, бетатронные колебания частиц возмущаются силой, пропорциональной дипольному моменту пучка $[d(t)]$

$$F_x = k \sum_{a=1}^N x_a \equiv Nkd(t), \quad (1.1)$$

$$d(t) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N x_a. \quad (1.2)$$

Требуется определить условия устойчивости колебаний частиц, либо пучка в целом.

Для упрощения вычислений мы воспользуемся приближением сглаженной фокусировки. Тогда уравнения для горизонтальных колебаний частиц записываются в виде

$$\ddot{x}_a + \omega_a^2 x_a = \frac{1}{\gamma M} F_x, \quad a = 1, 2, \dots, N, \quad (1.3)$$

где ω_a частота бетатронных колебаний частицы a , а $E = \gamma M c^2$ энергия частиц. Входящий в уравнение (1.3) коэффициент k , вообще, определяется электродинамикой задачи. Чтобы не отвлекаться на вычисления наведенных пучком полей, мы параметризуем k следующим выражением:

$$k = -\frac{e^2 g}{\Pi l_{\perp}^2}. \quad (1.4)$$

Здесь l_{\perp} задает характерный поперечный размер электродов, взаимодействующих с пучком, а форм-фактор g описывает особенности наведенных пучком электрических и магнитных полей. Для простоты он принят равным постоянной.

Если бы частицы не взаимодействовали, то изменение дипольного момента пучка $d(t)$ во времени определялось бы разбросом

частот колебаний (Рис.1). При совпадении частот ($\omega_a = \bar{\omega}$) движение частиц было бы полностью когерентно, а дипольный момент совершал бы гармонические колебания с частотой $\bar{\omega}$. Отличия частот колебаний частиц приводит к увеличению разностей фаз колебаний частиц пучка, то-есть к потере когерентности колебаний. В целом, это приводит к уменьшению амплитуды колебаний d , или, как говорят, к уменьшению когерентного сигнала. Поскольку число частиц в пучке конечно, спектр колебаний, вообще говоря, дискретен и имеет конечную ширину $\Delta\omega_\Sigma$. По этой причине, по прошествии времени порядка $1/\Delta\omega_\Sigma$, затухание дипольного момента может смениться его нарастанием (Рис.1). В таком случае говорят о появлении эха колебаний.

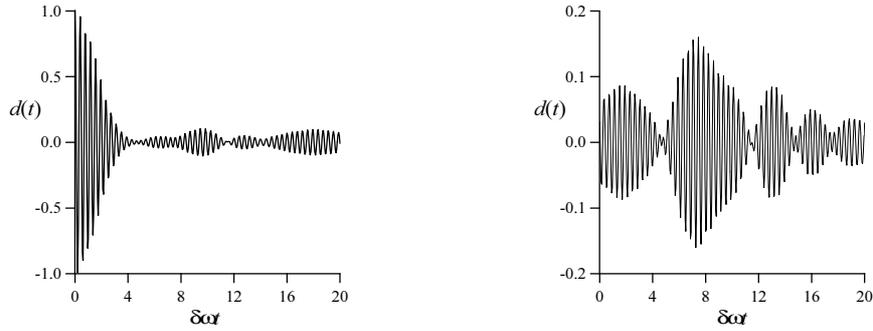


Рис. 1: Зависимость дипольного момента пучка от времени для ($N = 200$) невзаимодействующих частиц. В начальный момент времени фазы колебаний всех частиц совпадают (левый рисунок), либо равномерно распределены в интервале $0 - 2\pi$ (правый рисунок). Распределение частот в пучке генерировалось использованием датчика случайных чисел с гауссовым распределением вокруг $\bar{\omega} = (1/N) \sum_{a=1}^N \omega_a$. Разброс частот $\delta\omega = 0.05 \times \bar{\omega}$.

Подстановка уравнений (1.1) и (1.4) в уравнение (1.3) дает

$$\ddot{x}_a + \omega_a^2 x_a = -\Omega^2 d(t), \quad (1.5)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{Ne^2 g}{\gamma M \Pi l_{\perp}^2}. \quad (1.6)$$

Система линейных уравнений (1.5) может быть решена с использованием преобразования Фурье. Определяя

$$x_a(\omega) = \int_0^{\infty} dt \exp(i\omega t) x_a(t), \quad (1.7)$$

пишем

$$x_a(\omega) = \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2} \left\{ -\Omega^2 d_{\omega} - [\dot{x}_a(t) - i\omega x_a(t)] e^{i\omega t} \Big|_0^{\infty} \right\}. \quad (1.8)$$

Для того, чтобы амплитуды $x_a(\omega)$ имели смысл, величины $x_a(t)$ в правой части (1.7) должны расти не быстрее экспонент $\exp(\delta_a t)$. По этой причине частоты ω в правой части (1.8) должны находиться в области $\text{Im}\omega > \max\{\delta_a\}$. В этом случае решения $x_a(\omega)$ выражаются через начальные условия:

$$x_a(\omega) = \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2} \left\{ -\Omega^2 d_{\omega} + \dot{x}_a(0) - i\omega x_a(0) \right\}. \quad (1.9)$$

Функция d_{ω} вычисляется арифметическим усреднением уравнений (1.9):

$$d_{\omega} = -\frac{X(\omega)}{\epsilon(\omega)}, \quad X(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \frac{\dot{x}_a(0) - i\omega x_a(0)}{\omega^2 - \omega_a^2}, \quad (1.10)$$

где:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{N} \sum_{a=1}^N \frac{1}{\omega^2 - \omega_a^2}. \quad (1.11)$$

Как видно из уравнения (1.10), величина амплитуды d_ω определяется начальным средним смещением частиц и разбросом частот в пучке. При этом, если частоты ω_a не совпадают, то даже при случайном распределении начальных условий

$$\sum_{a=1}^N \dot{x}_a(0) = 0, \quad \sum_{a=1}^N x_a(0) = 0$$

амплитуда $X(\omega)$ в (1.10) отлична от нуля (Рис.1 (правый)). Таким образом, разброс частот колебаний частиц может приводить не только к затуханию когерентных колебаний пучка, но и к спонтанной генерации таких колебаний. При случайном распределении частот в пучке, возбуждаемые когерентные колебания также будут иметь случайные амплитуды и фазы. Это так называемый Шоттки шум пучка. Измерение Шоттки шума является одним из наиболее мощных средств диагностики параметров пучков в накопителях тяжелых частиц.

Подстановка (1.10) в уравнение (1.9) и выполнение обратного преобразования Фурье:

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} x_a(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0 \quad (1.12)$$

завершают вычисление $x_a(t)$:

$$x_a(t) = - \int_C \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{\dot{x}_a(0) - i\omega x_a(0)}{\omega^2 - \omega_a^2} + \frac{\Omega^2 X(\omega)}{(\omega^2 - \omega_a^2)\epsilon(\omega)} \right\}. \quad (1.13)$$

В этом выражении контур интегрирования (C) проходит из $-\infty$ в ∞ выше всех особенностей подынтегрального выражения. Первое слагаемое в (1.13) описывает свободные колебания частицы, обусловленные ее начальными отклонениями ($x_a(t=0)$ и $\dot{x}_a(t=0)$), а второе – взаимное влияние частиц.

Значение интеграла по ω в (1.13) определяется вычетами в полюсах подынтегрального выражения. Чтобы найти положение этих полюсов перепишем множитель, стоящий в фигурных скобках подынтегрального выражения в (1.13), в виде:

$$\left[\frac{(\dot{x}_a(0) - i\omega x_a(0))}{\omega^2 - \omega_a^2} \left(1 + \frac{\Omega^2}{N(\omega^2 - \omega_a^2)\epsilon(\omega)} \right) + \frac{\Omega^2 X_a(\omega)}{(\omega^2 - \omega_a^2)\epsilon(\omega)} \right], \quad (1.14)$$

где

$$X_a(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{b \neq a} \frac{\dot{x}_b(0) - i\omega x_b(0)}{\omega^2 - \omega_b^2}.$$

Теперь заметим, что, если все частоты ω_a различны, то выражения

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_a^2} \left(1 + \frac{\Omega^2}{N(\omega^2 - \omega_a^2)\epsilon(\omega)} \right) = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_a^2)\epsilon(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega^2}{N} \sum_{b \neq a} \frac{1}{\omega^2 - \omega_b^2} \right),$$

и

$$\frac{1}{(\omega^2 - \omega_a^2)\epsilon(\omega)} \sum_{b \neq a} \frac{\dot{x}_b(0) - i\omega x_b(0)}{\omega^2 - \omega_b^2}$$

не имеют полюсов в точках $\omega = \pm\omega_a$. По этой причине зависимость x_a от времени в (1.13) определяется положением корней уравнения

$$\epsilon(\omega) = 0, \quad (1.15)$$

в плоскости комплексной переменной ω . При большой интенсивности пучка амплитуда колебаний частицы определяется её начальными условиями лишь в начальный момент ($\Omega t \ll 1$). На больших

временах ($\Omega t \geq 1$) оно определяется взаимным влиянием частиц, которое описывается вторым слагаемым в (1.13). Это слагаемое в решении ($x_a(t)$) посредством одного параметра – дипольного момента

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} d_\omega, \quad \text{Im}\omega > 0. \quad (1.16)$$

описывает коллективное поведение пучка. В частности, уравнение (1.9) указывает, что колебания отдельных частиц пучка будут нарастать во времени, если дипольный момент увеличивается. В последнем случае, соответствующем появлению корней дисперсионного уравнения (1.15) в верхней полуплоскости (ω), говорят, что дипольные когерентные колебания пучка неустойчивы.

Поскольку уравнение (1.15) содержит полином степени $2N$, его корни должны находиться численно. Условия устойчивости когерентных колебаний пучка можно, однако, определить не решая этого уравнения. Для этого перепишем (1.15) в виде:

$$1 = \Omega^2 \Phi(\omega), \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \frac{1}{\omega^2 - \omega_a^2}. \quad (1.17)$$

Используя тот факт, что коэффициенты в (1.17) являются действительными числами и потому его корни либо действительны, либо комплексно сопряжены, условие устойчивости находится подсчетом числа пересечений функции $\Phi(\omega)$ с горизонтальной прямой $\Phi = 1/\Omega^2$ (см. на Рис.2).

Как видно из этого рисунка, при $\Omega^2 > 0$ прямая $1/\Omega^2$ всегда пересекает функцию $\Phi(\omega)$ в $2N$ точках. В этом случае уравнение (1.17) имеет $2N$ реальных корней и, следовательно, коллективные колебания не нарастают, то-есть являются устойчивыми. Обычно частоты колебаний в пучке распределены в сравнительно узком интервале $\delta\omega$ вокруг некоторой средней частоты $\bar{\omega}$ так, что

$\bar{\omega} \gg \delta\omega$. Если пренебречь слагаемыми порядка $\delta\omega/\bar{\omega}$, то корни уравнения (1.17) равны:

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\bar{\omega}^2 + \Omega^2}. \quad (1.18)$$

Как видно из этого выражения, они сдвинуты относительно частоты невозмущенных колебаний $\bar{\omega}$ на величину, зависящую от числа частиц и характера их взаимодействия в пучке. При $\Omega \ll \bar{\omega}$ этот так называемый когерентный сдвиг частоты линейно зависит от N :

$$\Delta\omega = \frac{\Omega^2}{2\bar{\omega}} = \frac{Nr_0cg}{4\pi\gamma l_{\perp}^2 \bar{\nu}}, \quad r_0 = \frac{e^2}{Mc^2}, \quad \bar{\omega} = \omega_0 \bar{\nu} \quad (1.19)$$

Величина $\Delta\omega$ может быть непосредственно измерена. Согласно соотношению (1.6), результаты таких измерений могут быть использованы для определения форм-фактора g .

Если $\Omega^2 < 0$, то, как это видно из Рис.2, при выполнении условия:

$$\frac{|\Omega^2|}{N} \sum_{a=1}^N \frac{1}{\omega_a^2} > 1. \quad (1.20)$$

одна из ветвей функции $\Phi(\omega)$ останется непересеченной. В этой области у уравнения (1.17) появляется два комплексно сопряженных корня и, следовательно, коллективные колебания пучка становятся неустойчивыми. Пренебрегая в (1.20) разбросом частот, мы можем записать условие устойчивости в виде

$$|\Omega| < \bar{\omega}. \quad (1.21)$$

Оно имеет простой смысл – для устойчивости когерентных колебаний изменение жесткости потенциальной ямы за счет взаимодействия частиц пучка не должно превышать жесткости фокусировки. При большой интенсивности пучка ($|\Omega| \gg \bar{\omega}$) инкременты

неустойчивых колебаний

$$\delta = -\text{Im}\omega = -\sqrt{\frac{Ne^2g}{\gamma M\Pi l_{\perp}^2}} \quad (1.22)$$

растут как \sqrt{N} . Такие зависимости инкрементов от N характерны для так называемых динамических (то-есть не связанных с диссипацией) неустойчивостей коллективных колебаний пучка.

Приведенный пример показывает, что существует класс задач, в которых важно знать поведение пучка в целом. Как правило, описание состояний пучка в таких случаях требует задания сравнительно небольшого числа переменных (в рассмотренном примере – дипольного момента пучка). В наиболее общем случае такими переменными являются одночастичная либо, если это необходимо, многочастичные функции распределения частиц в фазовом пространстве.

В описанном примере для перехода к описанию пучка в терминах функций распределения достаточно заменить суммирование по частицам в (1.1) суммированием по элементам фазового объёма, занятого пучком. При разбиении на элементарные объёмы пучок описывается числами заполнения (f_{α}) – т.е. числами частиц в элементах фазово-

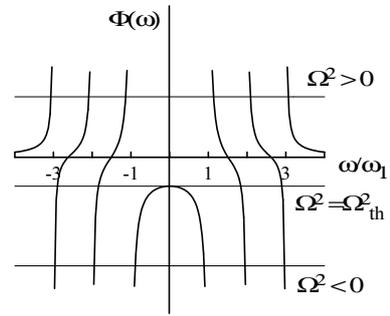


Рис. 2: Схематическая зависимость функции Φ от частоты. В области $\Omega^2 > 0$ прямая $1/\Omega^2$ всегда пересекает функцию $\Phi(\omega)$ в $2N$ точках. При этом уравнение (1.17) имеет $2N$ реальных корней. В области же $\Omega^2 < 0$ возможно появление мнимых корней, если $|\Omega^2|$ превышает пороговое значение.

го объёма. Вообще, зависимость чисел заполнения от положения в фазовом пространстве и от времени является скачкообразной. При пересечении частицами границы элемента эти числа изменяются скачком. Описание состояний пучка в терминах чисел заполнения становится целесообразным, если среднеквадратичные изменения чисел заполнения (δf_α) оказываются малыми по сравнению с самими величинами f_α :

$$\overline{\delta f_\alpha^2} \ll f_\alpha^2, \quad \delta f_\alpha = f_\alpha - \overline{f_\alpha}.$$

В таких случаях набор чисел $\{f_\alpha\}$ заменяют сглаженной функцией распределения такой, что

$$\overline{f_\alpha} = f(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, t) \Delta\Gamma, \quad \Delta\Gamma = \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (1.23)$$

Поскольку при движении пучка частицы никуда не пропадают и ниоткуда не появляются, функция f удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}}f)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{p}}f)}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.24)$$

Если при этом движение частиц гамильтоново, так что

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.25)$$

где H гамильтониан движения частиц, то уравнение (1.24) упрощается и может быть переписано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0. \quad (1.26)$$

С учетом (1.25) последнее уравнение также записывается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{df}{dt} = 0. \quad (1.27)$$

Интеграл f по всему фазовому пространству даёт число частиц в пучке (N):

$$\int d\Gamma f = N.$$

Часто вместо f используют распределение (f'), нормированное на 1:

$$\int d\Gamma f' = 1.$$

При этом очевидно $f = N f'$. Ниже, говоря о функциях распределения мы будем иметь в виду f' , а знак ($'$) будем опускать.

В рассмотренном нами упрощенном примере фазовое пространство бетатронных колебаний двумерно (x, p_x) . При этом

$$F_x = Nk \int d\Gamma x f, \quad (1.28)$$

$$H = R_0 \int dp \omega_0(p) + \frac{p_x^2}{2\gamma M} + \frac{\gamma M \omega_x^2 x^2}{2} - Nkx \int d\Gamma x f, \quad (1.29)$$

а $f = f(\theta, p, x, p_x, t)$. Подстановка этого гамильтониана в (1.26) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{p_x}{\gamma M} \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + \left(-\gamma M \omega_x^2 x + Nk \int d\Gamma x f \right) \frac{\partial f}{\partial p_x} = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Полученное уравнение описывает как колебания пучка, так и изменения занимаемого им эффективного фазового объёма под действием коллективных полей. По этой причине уравнение (1.30) становится нелинейным. Решение таких уравнений, вообще говоря, сложнее решения исходного уравнения (1.1). Это является результатом упрощений, принятых при формулировании модельной

задачи. В подавляющем же числе случаев решение уравнений вида (1.30) дает наиболее информативное представление о протекании в пучке коллективных и кинетических процессов. Систематический подход к решению подобного рода задач состоит в построении рядов теории возмущения по отклонениям, вызываемым коллективным движением пучка. В данном случае в применении такого метода нет необходимости. Как это следует из (1.27), решение уравнения Власова является интегралом движения. Поэтому в любой момент времени

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f^{(0)}(\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0), \quad (1.31)$$

где $f^{(0)}$ начальное распределение, а \mathbf{p}_0 и \mathbf{r}_0 задают начальные координаты частиц в фазовом пространстве. Для уравнения (1.1) величины $(p_x)_0$ и x_0 выражаются через p_x , x и t посредством формул (1.13).

1.2 Эффект прерывания пучка

Изучение задач устойчивости когерентных колебаний сводится к решению дисперсионных уравнений лишь в тех случаях, когда взаимодействие частиц распространяясь по пучку может достигать частиц, являвшихся источником возмущения. В таком случае, в каждой точке пучка колебания частиц через некоторый промежуток времени испытывают возмущение, порожденное самими этими колебаниями и реакцией колебаний частиц, встретившихся на пути распространения возмущения. То-есть, в таком случае взаимодействие замыкает обратную связь по пучку. Если эта обратная связь положительная, то амплитуда колебаний нарастает. Если же отрицательная, то колебания затухают.

Существует, однако, обширный класс неустойчивостей когерентных колебаний, когда обратная связь колебаний по пучку

оказывается незамкнутой. Поэтому изучение устойчивости колебаний принципиально не может быть сведено к решению какого-либо дисперсионного уравнения. Исторически, такие неустойчивости были обнаружены в линейных ускорителях и получили название эффекта прерывания пучка. Впоследствии было обнаружено, что аналогичные явления могут ограничивать ток и в циклических машинах.

Для простоты, мы опишем эффект прерывания пучка в следующей простой задаче. Положим, что пучок состоит из M_b сгустков нулевой длины. Сгустки содержат равное число частиц N_b и заполняют пучок с периодом $\tau = T_0/h$, где $T_0 = \Pi/c$ – период обращения частиц в машине. Кроме того, мы предположим, что в пучке взаимодействуют лишь соседние сгустки, а возмущение описывается силой

$$(F_x)_a = -\gamma M \omega_x W (x_a[t] + x_{a-1}[t - \tau]). \quad (1.32)$$

Здесь $a = 2, 3, \dots, M_b$ нумерует сгустки в пучке. Колебания первого по счету пучка возмущаются силой (1.32) лишь в том случае, когда $M_b = h$ так, что сгустки равномерно заполняют пучок.

Обозначив $x' = dx/dt$, запишем уравнения движения для центров тяжести пучков

$$x_a'' + (\omega_x^2 + 2\omega_x W)x_a = -2\omega_x W x_{a-1}(t - b\tau). \quad (1.33)$$

Как видно из этого уравнения, самодействие сгустка приводит к изменению частоты колебаний на величину $\Delta\omega_x = W$, а взаимодействие сгустков приводит к раскачке колебаний последующих сгустков пучка колебаниями впереди идущих. Поскольку частоты всех сгустков сдвигаются на одну величину, ниже мы будем считать, что такой сдвиг уже учтен в частоте ω_x заменяя $\omega_x + W$ на ω_x .

Для дальнейшего, удобнее перейти к вращательным координатам в фазовом пространстве

$$\xi_{\pm} = x' \mp i\omega_x x. \quad (1.34)$$

Тогда, например,

$$\xi'_+ = x'' - i\omega_x[\xi_+ + i\omega_x x] = -i\omega_x \xi_+ + x'' + \omega_x^2 x$$

и поэтому

$$\xi'_{+a} + i\omega_x \xi_{+a} = iW(\xi_{-,a-1} - \xi_{+,a-1}). \quad (1.35)$$

$$\xi'_{-a} - i\omega_x \xi_{-a} = iW(\xi_{-,a-1} - \xi_{+,a-1}). \quad (1.36)$$

Связь колебаний ξ_{\pm} мала, если мала величина W (именно, если $W \ll \omega_x$). Действительно, решения уравнений (1.35) и (1.36) записываются в виде

$$\xi_{\pm} = A_{\pm} e^{\mp i\omega_x t}.$$

При этом, например, величина A_+ удовлетворяет уравнению

$$A'_{+,a} = -iW(A_{+,a-1} - A_{-,a-1} e^{2i\omega_x t}).$$

При выполнении условия $W \ll \omega_x$ первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает систематическое изменение величины A_+ , а второе ее быстрые осцилляции. Относительная амплитуда таких осцилляций определяется отношением W/ω_x и потому мала. Интересуясь систематическим изменением A_+ , мы усредним это уравнение по интервалу времени такому, что

$$\frac{1}{\omega_x} \ll \Delta t \ll \frac{1}{W}.$$

Усредненные уравнения

$$\xi'_{+a} + i\omega_x \xi_{+a} = -iW \xi_{+,a-1}, \quad (1.37)$$

$$\xi'_{-a} - i\omega_x \xi_{-a} = iW \xi_{-,a-1}. \quad (1.38)$$

описывают несвязанные колебания мод (+) и (-). Такие уравнения решаются методом преобразования Фурье по времени. Используя соотношение

$$\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \xi' = -\xi(0) - i\omega \xi(\omega),$$

заменяем, например, уравнения (1.37) следующей системой уравнения для Фурье-амплитуд $\xi_{+,a}(\omega)$ (знак + для краткости опускаем)

$$-i[\omega - \omega_x] \xi_a(\omega) = \xi_a(0) - iW\lambda \xi_{a-1}(\omega), \quad \lambda = \exp(i\omega\tau). \quad (1.39)$$

Решение такой системы уравнений легко находится по индукции. Для первого сгустка имеем

$$\xi_1 = \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x}. \quad (1.40)$$

Для второго

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \xi_1(\omega) \\ &= \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Аналогичным образом для третьего и четвертого получаем

$$\begin{aligned} \xi_3(\omega) &= \frac{i\xi_3(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \left[\frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x} \right] \\ &= \frac{i\xi_3(0)}{\omega - \omega_x} + \frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \frac{i\xi_2(0)}{\omega - \omega_x} \\ &\quad + \left(\frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \right)^2 \frac{i\xi_1(0)}{\omega - \omega_x}, \end{aligned}$$

и

$$\xi_4(\omega) = \sum_{a=1}^4 \left(\frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \right)^{4-a} \frac{i\xi_a(0)}{\omega - \omega_x}. \quad (1.42)$$

Поэтому для произвольного сгустка пучка пишем

$$\xi_a(\omega) = \frac{i}{\omega - \omega_x} \sum_{p=1}^a \left(\frac{W\lambda}{\omega - \omega_x} \right)^{a-p} \xi_p(0). \quad (1.43)$$

Эти соотношения выполняются при любых значениях $\omega \neq \omega_x$. Зависимость амплитуд колебаний от времени находится обратным преобразованием Фурье

$$\xi_a(t) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \xi_a(\omega), \quad (1.44)$$

где контур интегрирования идет из $\omega = -\infty$ в $\omega = +\infty$ выше действительной оси ω . Подставив в (1.44) амплитуды из (1.43), найдем ($\lambda[\omega_x] = e^{i\omega_x \tau}$)

$$\begin{aligned} \xi_a(t) &= e^{-i\omega_x t} \sum_{p=1}^a \xi_p(0) (W\lambda[\omega_x])^{a-p} \\ &\quad \times \int_C \frac{d\omega e^{-i\omega[t-(a-p)\tau]}}{(-2\pi i)\omega^{a-p+1}}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Для простоты ограничимся вычислением интеграла по ω для $t > M_b T_0$. Тогда все сгустки дают вклад в правую часть (1.45), а интегралы вычисляются замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость ω . В отличие от аналогичных выражений, полученных в предыдущем параграфе, значение интеграла в (1.45) определяется кратными полюсами подынтегрального выражения в точках $\omega = 0$. Простые вычисления приводят к результату

$$\int_C \frac{d\omega e^{-i\omega[t-(a-p)\tau]}}{(-2\pi i)\omega^{a-p+1}} = \frac{(-it)^{a-p}}{(a-p)!}.$$

Поэтому

$$\xi_a(t) = e^{-i\omega_x t} \sum_{p=1}^a \xi_p(0) \frac{(-itW\lambda[\omega_x])^{a-p}}{(a-p)!}. \quad (1.46)$$

Неэкспоненциальное нарастание амплитуд когерентных колебаний со временем является одной из наиболее характерных особенностей неустойчивостей прерывания пучка. Как видно из полученного выражения, неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой колебаний позади идущих сгустков впереди идущими и накоплением этой раскачки вдоль сгустка (в зарубежной литературе такое накопление называют кумулятивным). Другой особенностью такой неустойчивости является зависимость характера нарастаний колебаний от распределения начальных амплитуд колебаний сгустков в пучке.

1.3 Задачи к Лекции 1

1. Пусть $n < N$ равноудаленных вдоль орбиты частиц пучка имеют в начальный момент равные отклонения b и нулевые скорости радиальных колебаний. Считая частоты колебаний

1. равными;
2. распределенными согласно $\omega_a = \Omega + \delta_{a,2m}\Delta - \delta_{a,2m+1}\Delta$, где $\delta_{a,b}$ – символ Кронеккера, а $\Omega > \Delta$;
3. равномерно распределенными в интервале $\Omega \pm \Delta$ ($\Omega \gg \Delta$) с плотностью $f(\omega) = 1/(2\Delta)$

вычислить амплитуды колебаний частиц.

2. Положим, что разброс частот бетатронных колебаний в пучке создается разбросом частот обращения частиц $\omega_{x,a} = \omega_0(p_a)\nu_x$.

Приняв, что распределение импульсов в пучке гауссово

$$f(p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(p-p_s)^2}{2\sigma^2}\right),$$

а частицы между собой не взаимодействуют, вычислить зависимость дипольного момента пучка от времени. Объяснить отсутствие эха в когерентном сигнале.

3. В рамках описанной модели изучить влияние запаздывания взаимодействия

$$F_x = N \int_{-\infty}^t dt' k(t-t')d(t'), \quad k(t < 0) = 0$$

на устойчивость дипольных колебаний пучка.

4. На расстояниях, меньших радиуса вакуумной камеры, ионы (заряда Qe) взаимодействуют по закону Кулона. В приближении сглаженной фокусировки изучить устойчивость малых вертикальных колебаний ионов при их эквидистантном распределении вдоль орбиты (так называемый кристаллический пучок). Продольное расстояние между ионами $d = \Pi/N$ велико по сравнению с их вертикальными отклонениями z_a ($a = 1, \dots, N$); разбросом частот в ионном пучке пренебречь. Обсудить влияние модуляции фокусировки на устойчивость такого пучка.

2 Когерентные колебания встречных пучков.

Одно из основных ограничений светимости установок с встречными пучками связано с возмущениями движения частиц полями встречного сгустка. По принятой в отечественной литературе терминологии этот многоплановый круг явлений сокращенно называют эффектами встречи. Они выражаются в появлении неустойчивости колебаний индивидуальных частиц, либо сгустков в целом.

Применим описанную в предыдущем параграфе модель для изучения устойчивости дипольных когерентных колебаний встречных пучков (В.И. Балбеков, А.А. Коломенский 1967 [5]). Для упрощения расчетов мы примем, что пучки содержат по одному сгустку круглого сечения и что сгустки движутся в идентичных кольцах (геометрия таких столкновений схематически изображена на Рис.3).

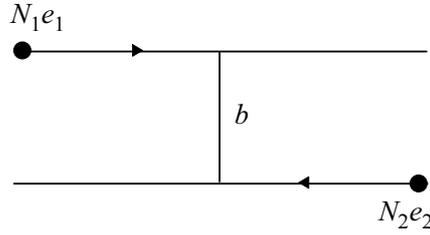


Рис. 3: К задаче о неустойчивости встречных пучков. Раз в период обращения пучки с зарядами N_1e_1 и N_2e_2 сталкиваются в месте встречи с прицельным параметром $b = d_1 - d_2$, а затем разводятся по своим кольцам.

Мы также пренебрежем разбросами частот бетатронных колебаний частиц из-за разброса энергий и нелинейности фокусировки. Энергию частиц считаем ультрарелятивистской ($E = \gamma Mc^2$, $\gamma \gg 1$). Поперечное электрическое поле сгустка, движущегося вдоль равновесной орбиты со скоростью $\mathbf{v}_2 = \{0, -c, 0\}$ и имеющего плотность

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.1)$$

с ультрарелятивистской точностью определяется выражением:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r} E, \quad E = \frac{2Ne_2}{\sigma^2 r} \rho(s + ct) \int_0^r dr r e^{-r^2/2\sigma^2}. \quad (2.2)$$

После простого интегрирования получаем:

$$E = 2Ne_2\rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \quad (2.3)$$

С той же точностью магнитное поле сгустка равно

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{E}]/c. \quad (2.4)$$

Сила, действующая на частицы встречного сгустка, движущегося со скоростью $\mathbf{v}_1 = \{0, c, 0\}$, равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2} &= e_1(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}]/c^2), \\ &\simeq 2e_1\mathbf{E} \quad (2.5) \\ &= 4Ne_1e_2\rho(s + ct) \\ &\frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Она линейна вблизи центра сгустка, однако при увеличении расстояния от центра она сначала проходит

максимум, а затем уменьшается пропорционально $1/r$ (см. также на Рис.4). Как функция времени эта сила представляет собой серию периодических, коротких толчков. Если сгустки движутся в разных кольцах с частотой обращения ω_0 каждый, то период этих толчков равен $2\pi/\omega_0$. При длине сгустков σ_s длительность толчков есть $\delta t = \sigma/(2c)$. Как и всякое другое, такое периодическое возмущение приводит к резонансным неустойчивостям как некогерентных, так и когерентных колебаний пучка.

Если сгусток (2) совершает, скажем вертикальные, когерентные колебания с дипольным моментом $d_2(t)$ так что

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + (z - d_2(t))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.6)$$

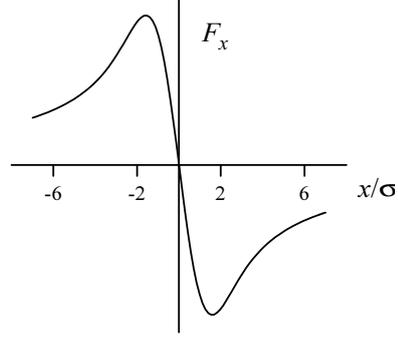


Рис. 4: Зависимость (радиальной) силы, возмущающей встречный пучок, от поперечного смещения частицы. Плотность распределения поперечных координат во встречном сгустке гауссова.

то возмущающие поля определяются уравнениями (2.2) и (2.4), в которых аргумент z должен быть заменен на $z - d_2(t)$. При этом для вертикальной проекции силы действующей на встречный сгусток вместо (2.5) получим ($r^2 = x^2 + (z - d_2)^2$)

$$F_z = 4N e_1 e_2 \rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} (z - d_2(t)). \quad (2.7)$$

Подставив это выражение в уравнения движения частиц, в линейном приближении ($r \ll \sigma$) получим:

$$\ddot{z}_{a1} + \omega_z^2 z_{a1} = \frac{F_z}{\gamma M} \simeq \frac{2N e_1 e_2}{\sigma^2 \gamma M} (z_{a1} - d_2) \rho(s_a(t) + ct). \quad (2.8)$$

В связи с задачей об эффектах встречи в этом и аналогичных уравнениях в качестве независимой переменной обычно используют обобщенный азимут $\theta = \omega_0 t$. Тогда, учитывая, что для частиц 1-го сгустка $s_a(t) = ct + s_a$, а $ct \simeq R_0 \theta$, уравнение (2.8) может быть переписано в виде:

$$z''_{a1} + \nu_z^2 z_{a1} = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\Pi \xi \nu_z (z_{a1} - d_2) \rho(2R_0 \theta + s_a), \quad (2.9)$$

где $\Pi = 2\pi R_0$ – периметр орбиты, $z' = dz/d\theta$, а

$$\xi = \frac{N e^2 \beta_0}{4\pi r c \sigma^2}, \quad e^2 = |e_1 e_2|, \quad \beta_0 = R_0 / \nu_z \quad (2.10)$$

так называемый параметр пространственного заряда. Аналогично, если дипольные колебания совершает сгусток (1), уравнение для частиц второго сгустка ($s_a(t) = -ct + s_a$) записывается в виде:

$$z''_{a2} + \nu_z^2 z_{a2} = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\Pi \xi \nu_z (z_{a2} - d_1) \rho(2R_0 \theta - s_a). \quad (2.11)$$

Здесь, для простоты, положено $\rho(s) = \rho(-s)$.

Также как и в уравнении (1.1) решения уравнений (2.9) и (2.11) могут быть выражены через интегралы от дипольных моментов

d_1 и d_2 . Сами уравнения для d_1 и d_2 получаются суммированием уравнений (2.9) либо (2.11):

$$d_{1,2} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N (z_a)_{1,2} \rho(s_a).$$

В результате приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} d_1'' + \nu_z^2 d_1 &= \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z (d_1 - d_2) K(\theta), \\ d_2'' + \nu_z^2 d_2 &= -\text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z (d_1 - d_2) K(\theta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$K(\theta) = 2\Pi \int_{-\infty}^{\infty} ds \rho(s + ct) \rho(s - ct). \quad (2.13)$$

Учитывая, что $K(t)$ в (2.13) в действительности является периодической функцией θ с периодом 2π , пишем

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{-in\theta}, \quad K_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} K(\theta) e^{in\theta}. \quad (2.14)$$

Распределение гармоник K_n по номерам зависит от ширин линейных плотностей частиц в сталкивающихся сгустках. Если, например,

$$\rho(s) = \frac{\exp[-s^2/(2\sigma_s^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_s},$$

то вычисление интеграла в (2.13) даёт

$$K(\theta) = 2\Pi \frac{\exp[-(ct)^2/\sigma_s^2]}{2\pi\sigma_s} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2},$$

или

$$K(\theta) = 2\pi \frac{\exp[-(\theta)^2/\sigma_\phi^2]}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi}, \quad \sigma_\phi = \sigma_s/R_0.$$

Тогда, для сгустков с длинами $\sigma_s \ll R_0$, имеем

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) \\ &= \exp[-(n\sigma_\phi)^2/4]. \end{aligned}$$

Поэтому для не очень высоких номеров гармоник ($n \ll R_0/\sigma_s$) амплитуды K_n мало отличаются от единицы ($K_n \simeq 1$). Подстановка этих выражений в (2.12) дает

$$\begin{aligned} d_1'' + \nu_z^2 d_1 &= \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z (d_1 - d_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}, \\ d_2'' + \nu_z^2 d_2 &= -\text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z (d_1 - d_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Прежде чем решать уравнения (2.15) выясним физический смысл входящего в них параметра ξ . Для этого запишем, например, уравнение (2.11) в виде:

$$z_{a2}'' + \nu_z^2 z_{a2} = \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z \left\{ z_{a2} - d_1 + (z_{a2} - d_1) \sum_{n \neq 0} e^{-in\theta} \right\},$$

или, если $d_1 = 0$,

$$z_{a2}'' + (\nu_z^2 + 2\nu_z \text{sgn}(e_1 e_2) \xi) z_{a2} = \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z z_{a2} \sum_{n \neq 0} e^{-in\theta}. \quad (2.16)$$

В этом уравнении слагаемое в правой части описывает изменение β -функции в месте встречи из-за полей встречного сгустка. Если

это изменение пренебрежимо мало, что означает, что ν_z не близко к целому, либо к полужелому числу, то влияние поля встречного сгустка в уравнении (2.16) сводится к сдвигу частоты бетатронных колебаний на величину $\text{sgn}(e_1 e_2)\xi$.

Для нахождения собственных частот когерентных колебаний заметим, что уравнения (2.15) разделяют два вида решений. Так называемая σ -мода описывается суммой

$$X = d_1 + d_2. \quad (2.17)$$

Она удовлетворяет однородному уравнению

$$X'' + \nu_z^2 X = 0, \quad (2.18)$$

а её собственные частоты ($X \propto e^{-i\nu\theta}$) равны $\nu = \pm\nu_z$ и не зависят от взаимодействия пучков.

Напротив, собственные частоты так называемой π -моды, которая описывается разностью

$$b = d_1 - d_2 \quad (2.19)$$

и удовлетворяет уравнению

$$b'' + \nu_z^2 b = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\xi \nu_z b \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}, \quad (2.20)$$

существенно определяются взаимодействием пучков. Решение уравнения (2.20) ищем в виде:

$$b = \exp(-i\nu\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}. \quad (2.21)$$

Подстановка этого выражения в (2.20) дает коэффициенты b_n

$$b_n = \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \frac{4\nu_z}{\nu_z^2 - (\nu - n)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k. \quad (2.22)$$

Суммированием этих уравнений получаем дисперсионное уравнение для нахождения собственных частот колебаний:

$$1 = \operatorname{sgn}(e_1 e_2) \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\nu_z}{\nu_z^2 - (\nu - n)^2}. \quad (2.23)$$

Вычисление ряда в (2.23) позволяет преобразовать это уравнение к виду

$$\cos 2\pi\nu = \cos 2\pi\nu_z + 4\pi \operatorname{sgn}(e_1 e_2) \xi \sin 2\pi\nu_z. \quad (2.24)$$

При этом, требование $|\cos 2\pi\nu| \leq 1$ определяет границу области

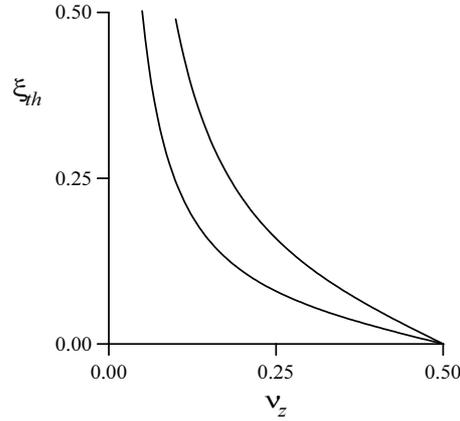


Рис. 5: Граница области устойчивости некогерентных (верхняя линия) и когерентных (нижняя линия) колебаний встречных пучков. Колебания неустойчивы выше граничной кривой. При увеличении ν_z кривые повторяются с периодом $1/2$.

устойчивости в плоскости (ξ, ν_z) (см. на Рис.5). Если величина ξ мала, так что рабочая точка (ν_z) не близка к границе области

устойчивости, уравнение (2.24) позволяет вычислить когерентный сдвиг частоты ($\nu = \nu_z + \delta\nu$, $|\delta\nu| \ll \nu_z$). Поскольку при этом

$$\cos 2\pi\nu \simeq \cos 2\pi\nu_z - 2\pi\delta\nu \sin 2\pi\nu_z,$$

из (2.24) получаем

$$\delta\nu \simeq -2\text{sgn}(e_1 e_2)\xi. \quad (2.25)$$

Отметим, что это значение вдвое больше сдвига частоты некогерентных колебаний.

Решение дисперсионного уравнения особенно упрощается, если ν_z близко к какому-либо из резонансных значений ($\nu_z = k$, или $\nu_z = k + 1/2$). Пусть, например, $\nu_z \simeq k$. Тогда, отбирая в (2.23) резонансные слагаемые ($n = k$ и $n = -k$), пишем:

$$1 = \text{sgn}(e_1 e_2)4\xi\nu_z \frac{1}{2\nu_z} \left(\frac{1}{\Delta - \nu} + \frac{1}{\Delta + \nu} \right), \quad \Delta = \nu_z - k,$$

или

$$1 = -\frac{4\Delta\text{sgn}(e_1 e_2)\xi}{\nu^2 - \Delta^2}. \quad (2.26)$$

Отсюда получаем

$$\nu = \pm\sqrt{\Delta^2 - 4\Delta\text{sgn}(e_1 e_2)\xi}. \quad (2.27)$$

При $\text{sgn}(e_1 e_2) < 0$ (электрон-позитронные, либо протон-антипротонные встречные пучки) неустойчивые решения возможны внутри полосы

$$-4\xi \leq \Delta \leq 0. \quad (2.28)$$

Величина инкремента колебаний максимальна в центре полосы неустойчивости ($\Delta = -2\xi$), где

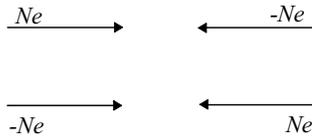
$$\text{Im}\nu_{\max} = 2\xi. \quad (2.29)$$

Вне этой запрещенной полосы когерентные колебания пучков не нарастают. При неустойчивости дипольных колебаний пучков светимость установки уменьшается как

$$\mathcal{L} = \frac{N^2}{4\pi\sigma^2 T_0} \exp\left(-\frac{b^2}{4\sigma^2}\right), \quad (2.30)$$

где $T_0 = \omega_0/2\pi$. По этой причине рабочая точка накопителя (ν_z, ν_x) , вообще говоря, не должна попадать в полосы (2.28) под целыми и полуцелыми резонансами. В действительности, нелинейная (и убывающая на больших амплитудах колебаний) зависимость отклоняющей силы от b приводит к тому, что внутри запрещенной полосы экспоненциальное нарастание отклонений частиц сменяется колебаниями b вблизи некоторого стационарного значения b_s . При малых расстройках от резонанса $|\Delta| \ll \xi$, по порядку величины $b_s \sim \sqrt{\xi/|\Delta|} \gg \sigma$. В таких условиях основной вклад в светимость дают области фаз бетатронных колебаний порядка $\Delta\psi \sim \sigma/b_s$, что при возбуждении одномерных когерентных колебаний приводит к асимптотическому уменьшению светимости установки пропорционально $\mathcal{L} \propto \sigma/b_s \propto \sqrt{|\Delta|/\xi}$.

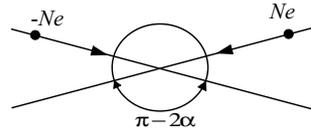
2.1 Задачи к Лекции 2



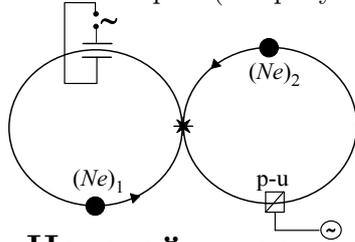
1. Для компенсации некогерентных эффектов встречи предлагалось сталкивать пучки парами, которые при идеальном совмещении пучков имеют нулевой пространственный заряд (см. рисунок к задаче). Такие схемы получили название схем с компенсированными встречными пучками. Найти условия устойчивости дипольных когерентных колебаний компенсированных встречных

пучков. Проанализировать отличия границ области устойчивости компенсированных и некомпенсированных встречных пучков.

2. Встречные пучки в месте встречи пересекаются под углом 2α . Поскольку электрическое поле релятивистского сгустка направлено поперек его скорости, при таком пересечении частицы испытывают удар как в поперечном, так и в продольном направлениях. Вычислить условие устойчивости дипольных когерентных колебаний коротких, одинаковых сгустков электронов и позитронов вблизи синхротронных резонансов $\nu_x \pm \nu_c = n$, ν_c – безразмерная частота синхротронных колебаний. Поперечное сечение сгустков считать круглым.



3. Спектры колебаний встречных пучков можно изучать, раскачивая колебания сгустка в одном кольце и измеряя колебания сгустка во втором (см. рисунок к задаче).



Вычислить резонансную кривую колебаний встречных пучков; качественно проанализировать влияние нелинейности поля встречного сгустка на форму резонансной кривой.

3 Неустойчивость отрицательной массы.

Более полное представление о свойствах когерентных колебаний пучка получается прямым решением уравнений Власова. Мы начнем с рассмотрения наиболее простых задач – об устойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Эти задачи имеют практическое значение для накопителей протонов или антипротонов. В методическом отношении их ценность

определяется возможностью проведения вычислений до конца.

В большинстве задач об устойчивости продольных когерентных колебаний фазовое пространство двумерно. Поэтому $f(\Delta p, \theta, t)$. Если пучок однороден по азимуту, чему соответствует $f = f(\Delta p)$, то Δp сохраняется, а $\theta = \omega_0(p)t + \phi$. Когерентные колебания проявляются в азимутальной модуляции линейной плотности пучка

$$f = f_0(\Delta p) + \delta f(\Delta p, \theta, t). \quad (3.1)$$

Действие на частицы продольных полей ($E(\theta, t)$), наводимых добавкой δf , в силу уравнений движения

$$\dot{\Delta p} = eE, \quad \dot{\theta} = \omega_0 \quad (3.2)$$

может приводить к группировке пучка. Начальная стадия этого процесса будет выражаться в неустойчивости колебаний (δf).

В частности, такая неустойчивость может быть обусловлена кулоновским расталкиванием частиц, если их энергии превышают критическую энергию машины (так называемая неустойчивость отрицательной массы; А.А. Коломенский и А.Н. Лебедев 1958 г. [6]). В этой области эффективная масса фазового движения частиц ($d\omega_0/dp$) отрицательна. По этой причине расталкивание частиц может приводить нарастанию в пучке начальных азимутальных неоднородностей.

В отсутствии столкновений (стохастических процессов) эволюция f описывается уравнением Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + eE(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial \Delta p} = 0. \quad (3.3)$$

Предполагая, что $f_0 \gg |\delta f|$, линеаризуем (3.3) по δf . В результате получим

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} + eE \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку f_0 не зависит от азимута, решение (3.4) ищем в виде

$$\delta f = \sum_n f_n(\Delta p) e^{in\theta - i\omega t}. \quad (3.5)$$

Это дает следующие уравнения для коэффициентов f_n

$$i(\omega - n\omega_0)f_n = eE_n(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p}. \quad (3.6)$$

Для вычисления гармоник поля $E_n(\omega)$ необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла. Строго говоря, вакуумная камера накопителя представляет для пучка волновод. Вместе с тем, для большей части частот из спектра колебаний пучка этот волновод - закритичный, то-есть колебания пучка не сопровождаются излучением (см. также в Приложении ??). Поскольку ниже мы будем интересоваться лишь такими низкочастотными гармониками, для вычисления полей пучка мы можем воспользоваться следующим приёмом.

Предположим, что стенки камеры обладают идеальной проводимостью, а также пренебрежем кривизной траектории частиц. Кроме того, мы также предположим, что вакуумная камера и пучок представляют собой цилиндры радиуса l_\perp и a , соответственно, и что частицы равномерно распределены внутри радиуса a

$$f(\mathbf{r}_\perp, \Delta p) = \frac{f(\Delta p)}{\pi a^2} \begin{cases} 1, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (3.7)$$

В этих предположениях для вычисления гармоник E мы можем воспользоваться законом Фарадея:

$$\oint d\mathbf{L}\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \int d\Sigma \mathbf{H}_\omega, \quad \omega = n\omega_s. \quad (3.8)$$

Контур интегрирования l и окружаемая им поверхность Σ показаны на Рис.6. В цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) с осью

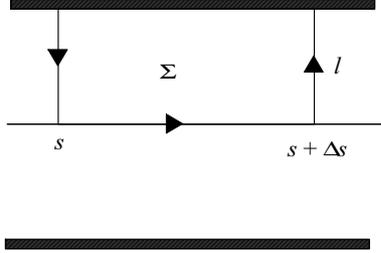


Рис. 6: К расчету полей пучка для неустойчивости отрицательной массы

z направленной вдоль оси камеры уравнение (3.8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta s[E(\omega) - E^w(\omega)] + \int_0^{l_\perp} dr[E_r(r, s + \Delta s) - E_r(r, s)] = \\ = \frac{in\omega_0}{c} \Delta s \int_0^{l_\perp} dr H_\phi(r, s), \end{aligned}$$

или, после перехода к азимутальным гармоникам

$$E_n(\omega) = E^w(\omega) - \frac{in}{R_0} \int_0^{l_\perp} dr E_{r,n} + \frac{inv_s}{R_0 c} \int_0^{l_\perp} dr H_{\phi,n}(r). \quad (3.9)$$

На поверхности камеры с идеальной проводимостью стенок имеем $E_n^w(\omega) = 0$. Компоненты же E_r and H_ϕ для длинноволновых колебаний вычисляются с использованием законов Гаусса и Ампера:

$$\begin{aligned} H_\phi(n, \omega) &= \frac{v_s}{c} E_r(n, \omega), \\ E_r(n, \omega) &= \frac{N\epsilon\rho_n(\omega)}{a^2\Pi} \begin{cases} r, & r \leq a, \\ a^2/r, & r > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (3.9) позволяет выразить E_n через

гармоники линейной плотности пучка $\rho_n(\omega)$

$$\begin{aligned} E_n(\omega) &= -\frac{iNne}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_\perp/a) + 1] \rho_n(\omega), \\ \rho_n(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\Delta p). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, с учетом (3.10) уравнение (3.6) может быть преобразовано в однородное интегральное уравнение, определяющее собственные частоты и моды колебаний:

$$(\omega - n\omega_0(\Delta p))f_n = -\frac{Nne^2}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_\perp/a) + 1] \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \rho_n(\omega). \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.11) с точностью до произвольного множителя (C) записывается в виде

$$f_n = C \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}. \quad (3.12)$$

Подстановка этого решения в (3.11) дает дисперсионное уравнение

$$1 = -\frac{Nne^2}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_\perp/a) + 1] \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}. \quad (3.13)$$

Решение (3.13) в общем случае требует привлечения численных методов. Мы рассмотрим несколько примеров, когда оно может быть решено точно. Пусть сначала $f_0 = \delta(\Delta p)$ (монохроматический пучок). Выполнение в (3.13) интегрирования с учетом свойств δ -функции приводит к квадратному уравнению ($\omega'_0 = d\omega_0/dp$)

$$(\omega - n\omega_0)^2 = \Omega_n^2, \quad \Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2 \omega'_0}{\Pi R_0 \gamma^2} [2 \ln(l_\perp/a) + 1]. \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что колебания неустойчивы ($\omega^2 < 0$) при $\omega'_0 < 0$, то-есть когда эффективная масса продольного движения отрицательна.

Неустойчивость отрицательной массы может стабилизироваться разбросом частот обращения в пучке. Чтобы убедиться в этом рассмотрим случай, когда f_0 есть лоренцево распределение

$$f_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2}. \quad (3.15)$$

При этом ($\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p \partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)} = -\frac{n\omega'_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\Delta p^2 + \Delta^2} \frac{d\Delta p}{(\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p)^2}. \quad (3.16)$$

Поскольку $\text{Im}\omega > 0$, интеграл в (3.16) наиболее просто вычисля-

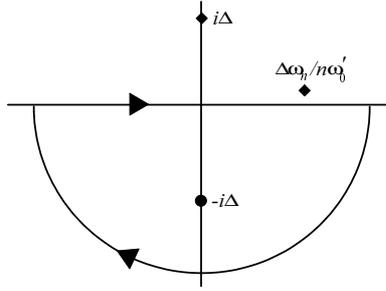


Рис. 7: Контур интегрирования для вычисления интеграла в уравнении (3.16).

ется замыканием контура интегрирования в нижнюю полуплоскость комплексной переменной Δp (Рис.7). После этого вычисление вычета в полюсе $\Delta p = -i\Delta$ приводит к дисперсионному уравнению

$$1 = \frac{\Omega_n^2}{(\Delta\omega + i|n|\delta\omega)^2}, \quad \delta\omega = |\omega'_0|\Delta. \quad (3.17)$$

Поскольку теперь

$$\Delta\omega_n = -i|n|\delta\omega \pm \sqrt{\Omega_n^2}, \quad (3.18)$$

колебания могут стать неустойчивыми лишь в том случае, когда ток пучка превысит пороговое значение

$$N \leq N_{th} = \frac{\text{П}\gamma^2 p v}{e^2 |\alpha_p|} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2, \quad \alpha_p = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha. \quad (3.19)$$

Отметим, что пороговый ток неустойчивости отрицательной массы не зависит от номера гармоники n .

3.1 Задачи к Лекции 3

1. Пренебрегая взаимодействием частиц, вычислить зависимости от времени гармоник линейной плотности пучка для следующих функций распределения

$$f(\theta, \Delta p) = \delta(\theta) \frac{\Delta/\pi}{\Delta^2 + \Delta p^2};$$

$$f(\theta, \Delta p) = \frac{\delta(\theta)}{2\Delta} \begin{cases} 1, & |\Delta p| \leq \Delta, \\ 0, & |\Delta p| > \Delta; \end{cases}$$

$$f(\theta, \Delta p) = \frac{\delta(\theta)}{(2\pi)^{1/2} \Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right).$$

2. Пользуясь приближением локального наведенного поля, уравнением Власова и уравнениями Максвелла найти дисперсионное уравнение неустойчивости отрицательной массы, не предполагая малость радиуса пучка по сравнению с радиусом вакуумной камеры.

3. Приняв, что распределение импульсов в пучке гауссово

$$f(\Delta p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \Delta} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right)$$

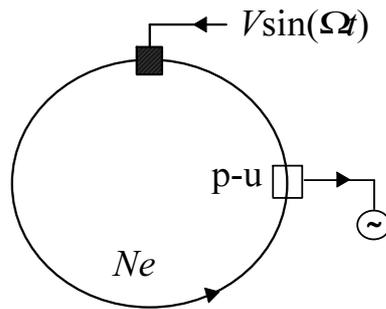
вычислить инкремент неустойчивости отрицательной массы в надпороговой области. Построить зависимость инкремента от числа частиц в пучке.

4. Установить, что охлаждение несгруппированного пучка не влияет на величину порогового тока неустойчивости отрицательной массы. Почему?

5. Предположим, что на замкнутой орбите, на азимуте $\theta = 0$ расположен ускоряющий зазор, в котором возбуждено ВЧ-поле

$$E(\theta, t) = \delta(\theta)V \sin \Omega t/R_0.$$

Если величина напряжения V невелика, то измеряя интегральным пикап-электродом вынужденные колебания линейной плотности пучка (см. рисунок), можно изучать его спектральные свойства. Предполагая, что пучок взаимодействует с гладкой, идеально проводящей вакуумной камерой,



вычис-

лить резонансную кривую продольных когерентных колебаний.

4 Импедансы связи.

Простота описания неустойчивости отрицательной массы в значительной степени обусловлена возможностью записать связь гармоник E_n и линейной плотности ρ_n соотношением (3.10). В более общем случае возможность применения аналогичного описания наведенных пучком полей связана с использованием ряда пред-

положений. Не вдаваясь пока в обоснованность этих предположений, мы можем принять, что при прохождении какого-либо элемента камеры действующие на пучок поля определяются разностью потенциалов на входе и выходе пучка из этого элемента. Если обозначить через $U_n(\omega)$ гармонику этой разности потенциалов и учесть, что гармоники тока пучка равны

$$j_n(\omega) = Ne\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\omega, \Delta p), \quad (4.1)$$

то используя аналогию с теорией цепей, мы можем записать

$$U_n(\omega) = -Z_n(\omega)j_n(\omega). \quad (4.2)$$

Входящий в это соотношение коэффициент $Z_n(\omega)$ называется импедансом связи пучка с окружающими электродами. Посредством n он описывает локализацию наведенных пучком полей, а посредством ω – зависимость этих полей от времени. Поскольку при решении задач об устойчивости когерентных колебаний мы обычно имеем дело с СВЧ-полями, импеданс $Z_n(\omega)$ вообще зависит от траектории пучка в месте расположения электродов. Концептуальная ценность использования импедансов связи в теории когерентных колебаний обусловлена упрощением описания наведенных полей, а также возможностью их вычисления (например, с использованием теории цепей), или измерения.

В силу принципа причинности величина $Z_n(\omega)$ в (4.2) является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной ω . Если она достаточно быстро спадает при $|\omega| \rightarrow \infty$, то на действительной оси ω действительная и мнимая части $Z_n(\omega) = Z'_n(\omega) + iZ''_n(\omega)$ удовлетворяют дисперсионным соотноше-

НИЯМ

$$\begin{aligned} Z'_n(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} Z''_n(\omega'), \\ Z''_n(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} Z'_n(\omega'). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь перечеркнутый символ интеграла означает его вычисление в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} [\dots] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - \eta} + \int_{\omega + \eta}^{\infty} \right) \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} [\dots].$$

Поскольку

$$Z_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} Z_n(\omega) e^{-i\omega t}$$

является действительной величиной, реальная часть $Z_n(\omega)$ является четной, а мнимая нечетной функцией ω на действительной оси:

$$Z'_n(\omega) = Z'_n(-\omega), \quad Z''_n(\omega) = -Z''_n(-\omega). \quad (4.4)$$

Для пассивных систем $Z'_n(0) > 0$. Тогда из (4.3) можно, например, получить неравенство

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega Z''_n(\omega)}{\omega} > 0. \quad (4.5)$$

Коль скоро нам известно "ускоряющее напряжение" $U_n(\omega)$, мы можем воспользоваться обычным соотношением теории ускорения частиц:

$$E_n(\omega) = \frac{U_n(\omega)}{\Pi},$$

или

$$E_n(\omega) = -\frac{Ne\omega_0 Z_n(\omega)}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_n(\omega, \Delta p). \quad (4.6)$$

Для получения дисперсионного уравнения теперь достаточно подставить (4.6) в (3.6). В методическом плане, однако, лучше начать с уравнения (3.4) и повторить некоторые вычисления предыдущего раздела. Как и раньше, пишем

$$\delta f(\Delta p, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\Delta p, t) e^{in\theta}, \quad (4.7)$$

что в силу (3.4) даёт

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + in\omega_0(\Delta p)f_n + eE_n \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} = 0. \quad (4.8)$$

Умножением обеих частей этого уравнения на $e^{i\omega t}$ и интегрированием по t от 0 до ∞ преобразуем его в уравнение для гармоник $f_n(\omega, \Delta p)$. При этом учтём, что

$$\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_n}{\partial t} = -f_n^{(0)}(\Delta p) - i\omega f_n(\omega, \Delta p), \quad \text{Im}\omega > 0,$$

где величины $f_n^{(0)}(\Delta p)$ задают начальные значения амплитуд колебаний. В результате уравнения для $f_n(\omega, \Delta p)$ принимают вид

$$f_n(\omega, \Delta p) = \frac{if_n^{(0)}(\Delta p)}{\omega - n\omega_0(\Delta p)} - ieE_n(\omega) \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}. \quad (4.9)$$

В отличие от (3.6) уравнение (4.9) представляет собой неоднородное интегральное уравнение. Его решения могут использоваться как для нахождения спектра колебаний, так и для описания эволюции начальных состояний (при выполнении, конечно, условия $f_0 \gg |\delta f|$). Подставив $f_n(\omega, \Delta p)$ в (4.6), получим уравнение для амплитуд поля

$$E_n(\omega)\epsilon_n(\omega) = E_n^{(0)}(\omega), \quad (4.10)$$

где

$$E_n^{(0)}(\omega) = -i \frac{Ne\omega_0 Z_n(\omega)}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{f_n^{(0)}(\Delta p)}{\omega - n\omega_0(\Delta p)}, \quad (4.11)$$

а

$$\epsilon_n(\omega) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega_0'} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\omega - n\omega_0(\Delta p)} \quad (4.12)$$

и

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2 \omega_0 \omega_0'}{\Pi} \left(\frac{-i Z_n(\omega)}{n} \right). \quad (4.13)$$

Поскольку введенная в (4.11) величина $E_n^{(0)}(\omega)$ представляет собой наведенное поле пучка, вычисленное в пренебрежении коллективным движением, соотношение (4.10) описывает уменьшение поля пучка его коллективной реакцией. Аналогично, если бы мы учли в уравнении (4.9) действие на пучок внешнего поля ($(E_n(\omega))_{ext}$), то при нулевых начальных условиях мы получили бы соотношение

$$E_n(\omega) = \frac{[E_n(\omega)]_{ext}}{\epsilon_n(\omega)}.$$

Эти соображения позволяют интерпретировать введенную в (4.12) величину $\epsilon_n(\omega)$ как диэлектрическую постоянную пучка.

Как и прежде, собственные частоты колебаний определяются решением однородной части уравнения (4.9). Это позволяет записать дисперсионное уравнение в виде:

$$\epsilon_n(\omega) = 0. \quad (4.14)$$

Для выяснения физического смысла введенной в (4.13) величины Ω_n^2 положим $f_0 = \delta(\Delta p)$. Для такого распределения дисперсионное уравнение переписывается в виде

$$\omega = n\omega_0 \pm \sqrt{\Omega_n^2}. \quad (4.15)$$

Кроме того, примем, что $Z_n(\omega) = iY_n$ и не зависит от ω . Такой случай реализуется, например, для неустойчивости отрицательной массы, когда, как это видно из (3.10),

$$\frac{-iZ_n(\omega)}{n} = \frac{1}{v\gamma^2}[2\ln(l_\perp/a) + 1]. \quad (4.16)$$

Как видно из (4.15), в этом случае колебания будут устойчивы ($\omega^2 > 0$) при выполнении условия

$$\omega'_0 Y_n/n > 0, \quad (4.17)$$

а уравнение (4.15) определяет когерентный сдвиг частоты ($\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$) относительно гармоник $n\omega_0$. Выражение (4.12) опре-

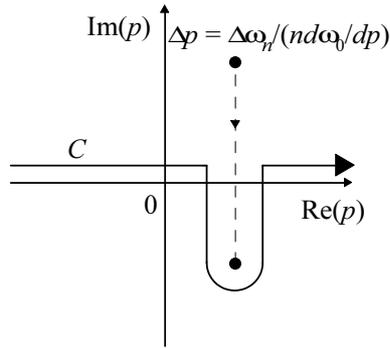


Рис. 8: Изменение контура интегрирования (C) в уравнении (4.12) при изменении знака $\text{Im}\omega$. При движении $\Delta\omega$ в нижнюю полуплоскость и после пересечения полюсом действительной оси контур интегрирования деформируется так, чтобы полюс находился выше контура C .

деляет значение диэлектрической проницаемости пучка ($\epsilon_n(\omega)$) лишь в верхней полуплоскости комплексной переменной ω . Для вычисления $\epsilon_n(\omega)$ в области $\text{Im}\omega < 0$ следует аналитически продолжить (4.12) в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω . Это достигается такой деформацией контура интегрирования по Δp , чтобы особенность подынтегрального выражения при

$n\omega'_0\Delta p = \Delta\omega_n$ обходилась снизу (см. на Рис.8). В результате, вместо (4.12) получаем

$$\begin{aligned}\epsilon_n(\omega) &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu g(\nu)}{\Delta\omega_n - \nu} - 2\pi i g(\Delta\omega_n), \\ g(\nu) &= \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \delta(\nu - n\omega'_0\Delta p).\end{aligned}\quad (4.18)$$

Если функция распределения f_0 имеет полюсы (например, распределение Лоренца), то при аналитическом продолжении контур интегрирования не должен пересекать этих полюсов. Это приводит к появлению полюсных особенностей у $\epsilon_n(\omega)$.

Характер решений дисперсионного уравнения (4.14) существенно зависит от характера зависимости импеданса Z_n от ω , а также от соотношения величины когерентного сдвига ($|\Omega_n^2|$) и частоты обращения. По причинам, которые мы обсудим позднее, обычно принимают $|\Omega_n| \ll \omega_0$. Тогда можно указать два важных случая, когда исследование решений (4.14) существенно упрощается. Это, во первых, случай взаимодействия пучка с низкодобротным окружением, когда при решении (4.14) в $Z_n(\omega)$ можно пренебречь отличием ω от $n\omega_0$. Во вторых, это случай резонансного взаимодействия, когда наоборот зависимость Z_n от $\Delta\omega_n$ является одной из наиболее существенных. Если характеризовать добротность элемента величиной декремента затухания λ_k , то случаю резонансного взаимодействия соответствует область параметров, где $|\Omega_n(n\omega_0)| \gg \lambda_k$.

Рассмотрим более подробно нерезонансный случай. В соответствии со сказанным мы заменим ω в аргументе $Z_n(\omega)$ на $n\omega_0$ и потому ниже вместо $Z_n(\omega)$ будем писать Z_n . Поскольку Z_n обычно является комплексной величиной, для δ -образного распределения согласно (4.15) одна из мод колебаний оказывается неустойчивой. Это неустойчивость будет подавляться разбросом частот в пучке

(затуханием Ландау), если

$$1 > \left| \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta \omega_n - n\omega'_0 \Delta p} \right|. \quad (4.19)$$

Для колоколообразных распределений с шириной Δ ($f'_0 \propto \Delta p / \Delta$, при $|\Delta p| \ll \Delta$) мы можем оценить интеграл в правой части (4.19) следующим образом. Поскольку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta \omega_n - n\omega'_0 \Delta p} \right| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_0^{\infty} ds e^{is(\Delta \omega_n - n\omega'_0 \Delta p)} \right|, \quad \text{Im} \omega > 0, \end{aligned}$$

пишем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta \omega_n - n\omega'_0 \Delta p} \right| \\ & \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_0^{\infty} ds e^{-is(n\omega'_0 \Delta p - i\delta)} \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta p} \right| \end{aligned} \quad (4.20)$$

Определив теперь разброс импульсов в пучке (Δ) равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta p} = \frac{1}{\Delta^2},$$

мы можем переписать неравенство (4.20) в виде ($\delta\omega = |\omega'_0| \Delta$)

$$\left| \frac{\Omega_n^2}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p \partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta \omega_n - n\omega'_0 \Delta p} \right| \leq \frac{|\Omega_n^2|}{n^2 \delta\omega}.$$

Таким образом, неравенство (4.19) будет заведомо справедливо при выполнении более слабого неравенства:

$$|\Omega_n^2| \leq (n\delta\omega)^2, \quad (4.21)$$

или

$$|Z_n/n| \leq \frac{pv|\alpha_p|}{eI_b} \frac{\Delta^2}{p^2}, \quad (4.22)$$

$$I_b = \frac{Ne\omega_0}{2\pi}, \quad \alpha_p = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha.$$

Это упрощенное условие устойчивости носит название Z/n -критерия (или критерия Кайла-Шнелля [7]). Отметим, что согласно (4.22) пороговые значения импеданса (либо тока пучка I_b) квадратично зависят от разброса импульсов в пучке Δ и прямо пропорционально расстоянию до критической энергии кольца.

Вычисление корней уравнения (4.14) обычно затруднено. К тому же для приложений часто важно знать не сами корни, а условия, когда это уравнение вообще не имеет корней в верхней полуплоскости ω . Последняя задача решается построением границы области устойчивости, то-есть кривой в плоскости $(\text{Re}\Omega_n^2, \text{Im}\Omega_n^2)$, либо (Z'_n, Z''_n) , отделяющей область, содержащую неустойчивые решения, от области, не содержащей неустойчивых решений. Такая кривая получается непосредственно из уравнения (4.12) устремлением ω к действительной оси:

$$\frac{1}{\Omega_n^2} = -\frac{1}{n\omega'_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0 / \partial \Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0 \Delta p + i0},$$

или, нормируя Ω_n на разброс частот в пучке,

$$\frac{1}{\zeta} = -\mathcal{P}(\Delta\omega_n) + iJ(\Delta\omega_n), \quad \zeta = \frac{\Omega_n^2}{n^2\delta\omega^2}. \quad (4.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Delta\omega_n) &= n\omega'_0\Delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0/\partial\Delta p}{\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p}, \\ J(\Delta\omega_n) &= \pi n\omega'_0\Delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\partial f_0}{\partial\Delta p} \delta(\Delta\omega_n - n\omega'_0\Delta p).\end{aligned}\quad (4.24)$$

Отделив в (4.23) действительную и мнимую части ($\zeta = \zeta' + i\zeta''$), получим

$$\begin{aligned}\zeta' &= -\frac{\mathcal{P}(\Delta\omega_n)}{\mathcal{P}^2(\Delta\omega_n) + J^2(\Delta\omega_n)}, \\ \zeta'' &= -\frac{J(\Delta\omega_n)}{\mathcal{P}^2(\Delta\omega_n) + J^2(\Delta\omega_n)}.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Учитывая, что $\mathcal{P}(0) = 1$, а $J(0) = 0$, а также, что (Рис.9)

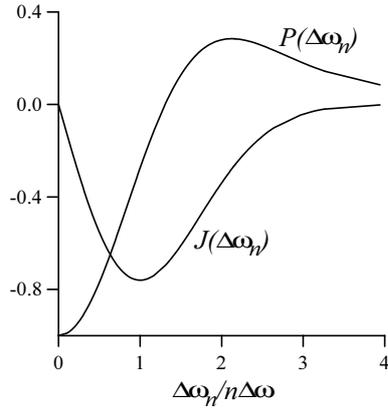


Рис. 9: Зависимости функций \mathcal{P} и J в уравнении 4.24 от частоты ($\Delta\omega_n$). Распределение импульсов в пучке гауссово.

$$\mathcal{P}(\Delta\omega_n) \simeq \frac{n^2\delta\omega}{\Delta\omega_n^2} \gg |J(\Delta\omega_n)|, \quad |\Delta\omega_n| \gg \delta\omega,$$

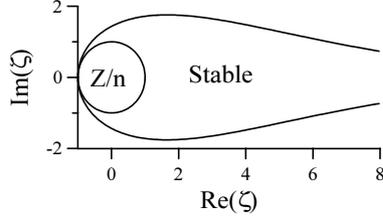


Рис. 10: Граница области устойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Распределение импульсов в пучке гауссово. $\zeta = \Omega_n^2 / (n\Delta\omega)^2$.

находим, что вся граничная кривая (4.25) расположена справа от вертикальной прямой $\zeta' = -1$ (Рис.10).

Положение области устойчивости относительно граничной кривой можно установить вычислением декрементов колебаний в околопороговой области. Для этого заметим, что прямо на пороге неустойчивости дисперсионное уравнение ($\epsilon(N, \Delta\omega_n) = 0$) определяет значения когерентного сдвига частоты ($\Delta\omega_{th}$) и порогового числа частиц в пучке (N_{th}). Разлагая ϵ в околопороговой области в ряд по степеням отклонений $\Delta N = N - N_{th}$ и $x = \Delta\omega_n - \Delta\omega_{th}$, получим приближенное уравнение

$$\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial N}\right)_{th} \Delta N + \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega}\right)_{th} x = 0, \quad |\Delta N| \ll N_{th}, \quad |x| \ll |\Delta\omega_{th}|. \quad (4.26)$$

Учитывая, что на пороге неустойчивости

$$\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial N}\right)_{th} = -\frac{1}{N_{th}}$$

перепишем уравнение (4.26) в виде

$$-\frac{\Delta N}{N_{th}} + x \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega}\right)_{th} = 0.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\Delta N}{N_{th}} \frac{1}{\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega}\right)_{th}}, \quad (4.27)$$

а декремент колебания равен ($\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$)

$$\delta = -\text{Im}x = -\left(1 - \frac{N}{N_{th}}\right) \frac{(\partial \epsilon'' / \partial \omega)_{th}}{|(\partial \epsilon / \partial \omega)_{th}|^2}. \quad (4.28)$$

Положение области устойчивости указывается выполнением условия $\delta > 0$.

4.1 Задачи к Лекции 4

1. Пользуясь граничным условием Леонтовича вычислить поправку к импедансу гладкой идеально проводящей вакуумной камеры круглого сечения.

2. Показать, что границей области устойчивости для лоренцева распределения импульсов в пучке

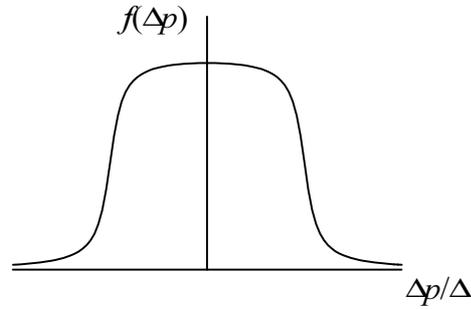
$$f(\Delta p) = \frac{\Delta/\pi}{\Delta^2 + \Delta p^2}$$

является парабола.

3. Прямоугольное распределение импульсов в пучке может моделироваться выражением (см. Рис. к задаче)

$$f = \frac{1}{2\pi\Delta} \left[\arctan\left(\frac{\Delta p + \Delta}{\delta}\right) - \arctan\left(\frac{\Delta p - \Delta}{\delta}\right) \right]$$

Найти уравнение границы области устойчивости для такого распределения; проанализировать изменение формы граничной кривой при уменьшении ширины δ ; вычислить декременты затухания Ландау.



К задаче 3.

4. Построить границу области устойчивости для пучка, связанного с вакуумной камерой посредством импеданса

$$Z = inZ_0 + \frac{dZ_1}{d\Delta p} \Delta p.$$

Распределение импульсов в пучке гауссово

$$f(\Delta p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma}\right).$$

Проанализировать спектр когерентных колебаний монохроматического пучка.

5. Когерентные колебания в том числе и несгруппированного пучка можно подавлять с помощью систем обратной связи. Пример такой системы для подавления продольных колебаний изображен на рисунке. С пикап-электрода, расположенного в месте с ненулевой дисперсионной функцией когерентный сигнал, пропорциональный

радиальному дипольному моменту пучка, через широкополосный усилитель подается на ускоряющий зазор, расположенный в месте с нулевой дисперсионной функцией. Считая, что Фурье-гармоники

ускоряющего напряжения равны

$$E_\omega(\theta) = -\delta(\theta - \theta_k)\kappa(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \Delta p f_\omega(\Delta p, \theta = 0)$$

и что $\kappa(\omega) = \kappa e^{i\omega\tau}$, а время задержки в цепи обратной связи выбрано так, что $\theta_k = \omega_s\tau$, получить условия устойчивости продольных когерентных колебаний несгруппированного пучка. Здесь θ_k азимутальное расстояние между пикап станцией и ускоряющим зазором. Влиянием разброса частот пренебречь.

6. Импеданс связи пучка с резонатором определяется выражением

$$Z(\omega) = \frac{Z_k}{1 + iQ_k \left(\frac{\omega_k}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_k} \right)},$$

где Z_k так называемое шунтовое сопротивление резонатора, ω_k – резонансная частота, а Q_k – добротность резонатора. Выяснить условия устойчивости высоких ($n > \omega_k/\omega_0$) и низких ($n < \omega_k/\omega_0$) гармоник монохроматического пучка, взаимодействующего с таким резонатором. Объяснить различие условий устойчивости.

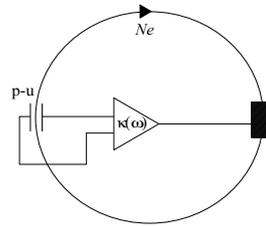


Рис. 11: К задаче 5.

5 Общее интегральное уравнение

Перейдём к построению общей теории когерентных колебаний пучка в накопителе (Я.С. Дербенев, Н.С. Диканский 1969 [8]). Для простоты мы подробно рассмотрим случай, когда когерентные колебания развиваются намного быстрее стохастических процессов.

Как уже говорилось, в этих условиях эволюция функции распределения пучка подчиняется уравнению Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0, \quad (5.1)$$

где

$$H = H_0 - L = H_0 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} + eA_0, \quad (5.2)$$

H_0 гамильтониан, описывающий невозмущенные колебания частиц вблизи замкнутой орбиты, а \mathbf{A} и A_0 соответственно векторный и скалярный потенциалы наведенных полей:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Для определенности будем считать, что потенциалы удовлетворяют калибровочному условию Лоренца

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0.$$

Тогда уравнения для потенциалов записываются в виде

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_0(r, t) &= -4\pi N e \int d^3 p f, \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(r, t) &= -4\pi N e \int d^3 p \frac{\mathbf{v}}{c} f. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В наиболее общем случае невозмущенные колебания частиц вблизи плоской, замкнутой орбиты описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}
x &= x_b + \eta(\theta) \frac{\Delta p}{p}, & \mathbf{p}_\perp &= \frac{p_s}{R_0} \frac{d\mathbf{r}_\perp}{d\theta}, & \Delta p &= p - p_s, \\
(x_b, z) &= \sqrt{J\beta(\theta)} \cos(\psi + \chi(\theta))|_\alpha, & \frac{d\chi_\alpha}{d\theta} + \nu_\alpha &= \frac{R_0}{\beta_\alpha}, \\
\dot{\psi}_\alpha &= \omega_\alpha = \omega_0(p)\nu_\alpha(p, a^2), & \theta &= \theta_s + \phi + \theta_b, \\
\theta_b &= \frac{1}{R_0^2} \left(\eta \frac{dx_b}{d\theta} - x_b \frac{d\eta}{d\theta} \right), \\
\dot{\phi} &= \omega'_0 \Delta p = \omega_0 \alpha_p \Delta p / p_s, & \alpha_p &= 1/\gamma^2 - 1/\gamma_{tr}^2, \\
I_\alpha &= \frac{p_s J_\alpha}{2}, & \alpha &= x, z.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Эти соотношения являются решениями уравнений движения, генерируемых следующим гамильтонианом:

$$\begin{aligned}
H_0 &= R_0 \left[\frac{p_x^2 + p_z^2}{2p_s} + \frac{\Delta p^2}{2\gamma^2 p_s} \right] \\
&+ p_s \left[\frac{g_x(\theta)x^2 + g_z(\theta)z^2}{2R_0} \right] - \frac{R_0}{R(\theta)} \Delta p x,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где g_x и g_z - коэффициенты жесткости горизонтальных и вертикальных бетатронных колебаний. Для сгруппированных пучков (5.4) должны быть дополнены уравнениями, описывающими синхротронные колебания:

$$\begin{aligned}
\phi &= \varphi \cos \psi_c, & \Delta p &= -\frac{\omega_c}{|\omega'_0|} \varphi \sin \psi_c, \\
\dot{\psi}_c &= \omega_c \operatorname{sgn}(\omega'_0), & I_c &= R_0 \frac{\omega_c \varphi^2}{2|\omega'_0|}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Уравнения (5.4) и (5.6) осуществляют каноническое преобразование от переменных \mathbf{P}, \mathbf{r} к переменным действие-фаза невозмущенных колебаний:

$$I_\alpha = I_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t), \quad \psi_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t).$$

После такого преобразования гамильтониан H_0 не зависит от фаз ψ_α , что позволяет записать уравнения движения невозмущенных колебаний в виде:

$$\dot{I}_\alpha = -\frac{\partial H_0}{\partial \psi_\alpha} \equiv 0, \quad \dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial I_\alpha} = \omega_\alpha. \quad (5.7)$$

В пренебрежении действием наведенных пучком полей функция распределения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}} = 0.$$

Его общее решение записывается в виде

$$f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}, t) = f_1[\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t] f_2(\mathbf{I}).$$

произведения начального распределения фаз в пучке f_1 на произвольную функцию действий $f_2(\mathbf{I})$. Функции f_1 и f_2 находятся из начальных условий: $f_1 f_2 = f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}, t = 0)$. Средние от произведений $Q_{m,\alpha} = I_\alpha^{|m_\alpha|/2} \exp(i\mathbf{m}\boldsymbol{\psi})$ зависят от времени согласно выражениям

$$\begin{aligned} \langle Q_{m,\alpha} \rangle(t) &= \int \frac{d\mathbf{I} d\boldsymbol{\psi}}{(2\pi)^3} Q_{m,\alpha} f \\ &= (f_1)_{\mathbf{m}} \int d\mathbf{I} f_2(\mathbf{I}) I_\alpha^{|m_\alpha|/2} \exp(-i\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}t). \end{aligned}$$

Для всех гармоник f , за исключением нулевой, моменты $\langle Q_{m,\alpha} \rangle(t)$ осцилляторно зависят от времени t , возможно, убывающими амплитудами. Эти величины представляют собой мультиполи распределения f в фазовом пространстве. Они описывают (стационарные) когерентные колебания пучка. В соответствии с этим, функция распределения пучка, не совершающего когерентных колебаний, не зависит от фаз $\boldsymbol{\psi}$ ($f \rightarrow f_0(I)$). Ниже мы будем называть такие состояния стационарными.

Действие наведенных полей приводит к нестационарным зависимостям от времени гармоник f

$$f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}, t) = f_0(\mathbf{I}) + \tilde{f}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}, t). \quad (5.8)$$

В силу линейности уравнений поля потенциалы \mathbf{A} и A_0 также представляются в виде:

$$(\mathbf{A}, A_0) = (\mathbf{A}, A_0)_0 + (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{A}_0). \quad (5.9)$$

По этой причине лагранжиан взаимодействия пучка с наведенными полями (L) представляется суммой двух слагаемых

$$L = L_0 + \tilde{L}.$$

Первое слагаемое (L_0) описывает возмущение частиц стационарными током и плотностью заряда пучка. В силу цикличности движения частиц величина L_0 является периодической функцией фаз ($\boldsymbol{\psi}$) и азимута θ . Она может быть представлена разложением в ряд Фурье:

$$L_0 = \sum_{m,n} (L_0)_{mn} \exp(i\mathbf{m}\boldsymbol{\psi} + in\theta). \quad (5.10)$$

При этом, если рабочая точка по частотам колебаний частиц приближена к линиям машинных резонансов:

$$\mathbf{m}\boldsymbol{\nu} + n \simeq 0, \quad (5.11)$$

то согласно уравнениям движения

$$\dot{I}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}, \quad \dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial I_\alpha} = \omega_\alpha - \frac{\partial L}{\partial I_\alpha}. \quad (5.12)$$

слагаемое L_0 , вообще говоря, вызывает систематическое изменение f_0 , которое будет проявляться в модуляции фазовых траекторий частиц, а также в захвате частиц пучка в соответствующие области автофазировки. Ниже мы будем считать, что рабочая

точка наоборот удалена от машинных резонансов. В этих условиях и в первом приближении теории возмущений все слагаемые в L_0 с $\mathbf{m} \neq 0$ и с $n \neq 0$ представляют собой быстроосциллирующие функции времени. Они вызывают появление у f_0 столь же быстроосциллирующей добавки, амплитуда которой мала. Систематическое изменение f_0 вызывает слагаемое $(L_0)_{0,0}$, которое согласно (5.12) определяет сдвиги частот ω_α за счет взаимодействия пучка с окружающими элементами камеры

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha - \frac{\partial(L_0)_{0,0}}{\partial I_\alpha}.$$

Считая что эти сдвиги уже учтены в ω_α и имея в виду решение (5.1) в первом порядке теории мы можем переписать H в виде

$$H = H_1 - \tilde{L}, \quad H_1 = H_0 - (L_0)_{0,0}. \quad (5.13)$$

Если характеристики стационарного состояния (f_0 , \mathbf{A}_0 и A_0) заданы, решение уравнений (5.1) и (5.3) более или менее упрощается в тех случаях, когда эти уравнения можно линеаризовать по отклонениям от стационарных значений. В этой связи могут решаться два круга задач. Во-первых, это задачи об устойчивости малых когерентных колебаний, когда малость отклонений предполагается по условию. Основными результатами таких расчетов являются условия устойчивости колебаний, величины пороговых токов пучка, величины когерентных сдвигов частот и декрементов колебаний. Решение этого круга задач не требует знания начальных отклонений.

Во-вторых, решение линеаризованных уравнений Власова могут, конечно, применяться для описания эволюции начальных отклонений. В этом случае, помимо знания спектров колебаний, необходимо вычисление соответствующих функций Грина:

$$f(\Gamma, t) = \int d\Gamma' R(\Gamma, \Gamma', t) f(\Gamma', t = 0).$$

Обычно такое описание справедливо лишь на ограниченных интервалах времени, когда выполняются пределы применимости линейного приближения.

Решение уравнений (5.3) выражается через функции Грина этих уравнений ($\alpha, \beta = x, z, c$)

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty d\tau \int d\Gamma_2 G_{00}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) f(\Gamma_2, t - \tau), \quad (5.14) \\ A_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty d\tau \int d\Gamma_2 \frac{v_\beta^{(2)}}{c} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) f(\Gamma_2, t - \tau). \end{aligned}$$

Определив

$$G(1, 2, \tau) = G_{00}(1, 2, \tau) - \frac{v_\alpha^{(1)} v_\beta^{(2)}}{c^2} G_{\alpha\beta}(1, 2, \tau), \quad (5.15)$$

мы можем записать

$$\tilde{L} = N e^2 \int d\Gamma_2 \int_0^\infty d\tau G(1, 2, \tau) \tilde{f}(2, t - \tau). \quad (5.16)$$

Тогда, линеаризованное уравнение для \tilde{f} имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\psi}} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} = 0. \quad (5.17)$$

В силу цикличности движения частиц, зависимость функции \tilde{L} от времени всегда содержит модуляции с периодом T_0 . По этой причине решения уравнения (5.17) могут быть представлены рядами:

$$\tilde{f} = e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{m}, n} f_{\mathbf{m}, n}^\omega(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\psi} + in\omega_0 t}.$$

Приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $e^{in\omega_0 t}$, получаем систему связанных уравнений для амплитуд $f_{\mathbf{m},n}^\omega$:

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega_{mn})f_{\mathbf{m},n}^\omega &= Ne^2 \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \sum_{n_1, n_2} \sum_{\mathbf{m}_2} \int d\Gamma_2 f_{\mathbf{m}_2, n-n_1+n_2}^\omega \quad (5.18) \\
&\times \{G_{n_1, n_2}(1, 2, \omega + (n_1 - n)\omega_0) \exp[in_1 \Delta\theta_1 - in_2 \Delta\theta_2]\}_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}, \\
\omega_{mn} &= \mathbf{m}\boldsymbol{\omega} + n\omega_0, \quad \Delta\theta(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) = \theta - \omega_0 t, \\
X_{\mathbf{m},n} &= \int_0^{2\pi} \frac{d^3\boldsymbol{\psi}}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} X(\boldsymbol{\psi}, \theta) e^{-in\theta - i\mathbf{m}\boldsymbol{\psi}}
\end{aligned}$$

Возможность упрощения полученных уравнений связана с тем, что в типичных условиях искажения траекторий частиц наведенными полями за период обращения мало. По этой причине можно ожидать, что спектры малых когерентных колебаний близки к невозмущенным ($\omega_{mn} = m_\alpha \omega_\alpha + n\omega_0$) и, соответственно, искать решения уравнений (5.18) в виде рядов по степеням $\Delta\omega_{mn}/\omega_{mn}$. Здесь, $\Delta\omega_{mn} = \omega - \omega_{mn}$. Слагаемые в правой части (5.18) эффективно содержат частотные знаменатели:

$$\omega - m_2\omega_2 - (n - n_1 + n_2)\omega_0 = \Delta\omega_{mn} + (m_1 - m_2)\omega + (n_1 - n_2)\omega_0.$$

По этой причине вклады недиагональных элементов ($n' \neq n$) и ($m'_\alpha \neq m_\alpha$) в изменение f_{mn} будут подавлены в $|\Delta\omega_{mn}/\omega_{lq}|$ раз (l и q произвольные целые числа), если величины когерентных сдвигов частоты $\Delta\omega_{mn}$ малы по сравнению с расстояниями в невозмущенном спектре $|\omega_{lq}|$. С такой точностью (5.18) можно заменить системой несвязанных интегральных уравнений

$$\Delta\omega_{mn} f_{\mathbf{m},n}^\omega = Ne^2 \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d\Gamma_2 K_n(1, 2, \omega - n\omega_0) f_{\mathbf{m},n}^\omega, \quad (5.19)$$

где

$$K_n = \sum_{n_1} \{G_{n_1, n_1-n}(1, 2, \omega + (n_1 - n)\omega_0) e^{in_1(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)}\}_{\mathbf{m}, \mathbf{m}}. \quad (5.20)$$

Поскольку собственные частоты ω входят в (5.19) в комбинациях $\omega - n\omega_0$, спектры всех этих уравнений отличаются лишь сдвигом на $n\omega_0$. По этой причине собственные частоты могут находиться решением какого-то одного уравнения (скажем, для $n = 0$):

$$\Delta\omega_m f_m^\omega = Ne^2 \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d\Gamma_2 K_0(1, 2, \omega) f_m^\omega. \quad (5.21)$$

Неоднозначность вычисления частот когерентных колебаний связана с периодичностью действующего на пучок возмущения. Как и в случае нахождения частот бетатронных колебаний частицы, она устраняется вычислением β -функций коллективных мод. Отметим, что вычисление декрементов ($\delta = -\text{Im}\omega$) колебаний не содержит такой неоднозначности.

Легко проверить, что использование уравнения (5.21) эквивалентно вычислению f_m^ω в первом приближении метода усреднения. Действительно, в соответствии с общей идеей этого метода, после выделения в (5.17) медленных зависимостей функций f_m and L_m от времени:

$$\tilde{f} = \bar{f} + \tilde{f}, \quad \tilde{L} = \bar{L} + \tilde{L},$$

где

$$\bar{X}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_s}{2\pi} X(\theta_s, t), \quad \tilde{X} = X - \bar{X},$$

и подстановки $\bar{f}_m(t) = f_m^\omega e^{-i\omega t}$ получается интегральное уравнение, совпадающее с (5.21):

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m^\omega &= \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \bar{L}_m(\mathbf{I}, \omega) \\ &= Ne^2 \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d\Gamma_2 K_0(1, 2, \omega) f_m^\omega(2). \end{aligned}$$

5.1 Колебания несгруппированного пучка

1. Уравнение (5.21) допускает значительные упрощения при описании взаимодействия несгруппированного пучка с внешними электродами. При этом, в силу азимутальной симметрии стационарного состояния ($f_0 = f_0(\mathbf{I}_\perp, \Delta p)$) продольной фазовой переменной является величина

$$\psi_{\parallel} = \phi = \omega'_0 \Delta p t + \psi_0.$$

В результате, интегрирование по ψ_{\parallel} в правой части (5.19) сводится к вычислению интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(m_{\parallel} - n)\phi} = \delta_{m_{\parallel}, n}.$$

Последующее суммирование по n и переопределение ω ($\omega \rightarrow \omega - n\omega'_0 \Delta p$) приводят к системе несвязанных уравнений для азимутальных гармоник функции распределения ($\omega_{mn} = \mathbf{m}_\perp \boldsymbol{\omega}_\perp - n\omega_0(\Delta p)$)

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{mn}) f_{\mathbf{m}, n} &= N e^2 \left(\mathbf{m}_\perp \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_\perp} + \frac{n}{R_0} \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \right) \\ &\times \int d\Gamma_\perp d\Delta p \{G_{n, n}(1, 2, \omega)\}_{\mathbf{m}_\perp, \mathbf{m}_\perp} f_{\mathbf{m}, n}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Как видно из уравнения (5.20), различные комбинации чисел \mathbf{m} определяют различные моды коллективных колебаний пучка. Помимо того, что \mathbf{m} являются номерами гармоник f , они определяют геометрию колебания в фазовом пространстве. По этой причине, числа \mathbf{m} называют номерами мультипольности колебаний. Так набору $\sum_\alpha |m_\alpha| = 1$ соответствуют дипольные моды, набору $\sum_\alpha |m_\alpha| = 2$ - квадрупольные, $\sum_\alpha |m_\alpha| = 3$ - секстипольные и так далее.

Для вычисления $f_m(t)$ в уравнении (5.18) следует удержать слагаемое, описывающее начальные условия:

$$\left(\frac{\partial f_m}{\partial t}\right)_\omega = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_m}{\partial t} = -f_m(I, t=0) - i\omega f_m(\mathbf{I}, \omega). \quad (5.23)$$

В этом случае уравнения (5.18) и (5.21) заменяются неоднородными интегральными уравнениями ($\Delta\omega_m = \omega - \omega_{mn}$)

$$\Delta\omega_m f_m^\omega = i f_m(\mathbf{I}, 0) + Ne^2 \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \int d\Gamma_2 K_0(1, 2, \omega) f_m^\omega. \quad (5.24)$$

Поскольку входящие в (5.23) интегралы должны сходиться в том числе и для нарастающих решений, переменная ω в уравнениях (5.23) и (5.24) должна удовлетворять условию $\text{Im}\omega > \delta_{max}$, где δ_{max} - максимальное значение инкремента. Расширение области определения решений, например, (5.24) на более широкие области в плоскости комплексной переменной ω должно производиться аналитическим продолжением соответствующих функций.

После решения (5.24) амплитуды $f_m(\mathbf{I}, t)$ находятся обратным преобразованием Фурье:

$$f_m(I, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_m(I, \omega), \quad \text{Im}\omega > \delta_{max}.$$

Поле пучка в вакуумной камере накопителя всегда является суммой кулоновского поля и полей, наводимых пучком в стенках камеры и окружающих электродах. Характерные масштабы для изменений кулоновской части полей определяются размерами пучка. Такие поля фигурировали, например, в задаче об устойчивости когерентных колебаний встречных пучков. Помимо этого необходимость учета кулоновских полей специфична для задач об устойчивости пучков с нерелятивистскими энергиями частиц. В таких случаях решение основного интегрального уравнения значительно усложняется.

При релятивистских энергиях частиц действие кулоновских полей на движение частиц подавлено в γ^2 раз, а наиболее существенным являются возмущения движения полями, наведенными в окружающих пучок электродах. В таком случае функции Грина представляются хорошо сходящимися рядами Тэйлора по степеням поперечных отклонений частиц от замкнутой орбиты \mathbf{r}_\perp . Это связано с тем, что заряды-изображения в таких случаях удалены от пучка на расстояния порядка радиуса вакуумной камеры, который существенно превышает поперечные размеры пучка. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить вычисление гармоник G по фазам бетатронных колебаний. Действительно, для любой функции вида

$$X(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \frac{\partial^l X}{\partial x^l}, \quad x = \sqrt{J_x \beta_x} \cos(\psi_x + \chi_x(\theta)),$$

где производные вычисляются в точке $x = 0$, мы можем написать

$$X_m = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x}{2\pi} e^{-im_x \psi_x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l X}{\partial x^l} \left(\frac{J_x \beta_x}{2} \right)^{l/2} \times \\ \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} \exp\{i(l-2k)(\psi_x + \chi_x(\theta))\}.$$

Используя

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(i[l-2k-m]\psi) = \delta_{l,m+2k},$$

пишем

$$X_m = \left(\frac{\sqrt{J_x \beta_x}}{2} e^{i\chi_x(\theta)} \right)^{m_x} \left\{ \frac{1}{m_x!} \frac{\partial^{m_x} X}{\partial x^{m_x}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{J_x \beta_x} e^{i\chi_x} / 2)^{2k}}{k!(m_x + k)!} \frac{\partial^{m_x + 2k} X}{\partial x^{m_x + 2k}} \right\}.$$

Если характерным масштабом изменения X является l_{\perp} , а $a = \sqrt{J\beta} \ll l_{\perp}$, то оценивая величину $\partial^m X / \partial x^m$ посредством $\partial^m X / \partial x^m \approx 1 / (l_{\perp})^m$ и пренебрегая поправками порядка $(a/l_{\perp})^2 \ll 1$, получаем

$$X_m = \left(\frac{\sqrt{J_x \beta_x}}{2} e^{i\chi_x(\theta)} \right)^{m_x} \frac{1}{m_x!} \frac{\partial^{m_x} X}{\partial x^{m_x}}. \quad (5.25)$$

Таким образом, в задачах о взаимодействии пучка с электродами функции $G_{mn}(1, 2, \omega)$ имеют следующую зависимость от амплитуд поперечных колебаний

$$G_{mn}(1, 2, \omega) \simeq (I_x I'_x)^{m_x/2} (I_z I'_z)^{m_z/2} g_{mn}(\omega), \quad (5.26)$$

где g_{mn} выражается через производные G на равновесной орбите.

Если добротность электродов не высока, так что ω в $g_{mn}(\omega)$ можно заменить невозмущенным значением $\omega = \omega_{mn}$, уравнение (5.22) может быть решено точно. Для колебаний с $m_x^2 + m_z^2 \neq 0$ пишем

$$f_{mn} = C_{mn} \frac{I_x^{m_x/2} I_z^{m_z/2}}{\omega - \omega_{mn}} \left(\mathbf{m}_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_{\perp}} \right), \quad m_{\perp}^2 \neq 0. \quad (5.27)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5.22) приводит после отбрасывания поправок порядка $(a/l_{\perp})^2$ к дисперсионному уравнению

$$\epsilon_{mn}(\omega) = 1 - \frac{\Omega_{mn}}{\mathcal{A}_m} \int d^2 I_{\perp} d\Delta p \frac{I_x^{|m_x|} I_z^{|m_z|} (\mathbf{m}_{\perp} \partial F / \partial \mathbf{I}_{\perp})}{\omega - \omega_{mn}(\mathbf{I}_{\perp}, \Delta p)} = 0. \quad (5.28)$$

Здесь

$$\mathcal{A}_m = \int d^2 I_\perp d\Delta p I_x^{|m_x|} I_z^{|m_z|} \left(\mathbf{m}_\perp \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}_\perp} \right), \quad (5.29)$$

а

$$\Omega_{mn} = Ne^2 \mathcal{A}_m g_{mn}(\omega_{mn}). \quad (5.30)$$

Решение уравнения (5.28) особенно упрощается для случая монохроматического пучка, когда мы можем пренебречь в интеграле в правой части зависимостью ω_{mn} от \mathbf{I}_\perp и Δp . При этом частотный знаменатель в (5.28) выносится из под знака интеграла, а оставшееся выражение совпадает с \mathcal{A}_m . В результате получаем

$$\Delta\omega_{mn} = \omega - \omega_{mn} = \Omega_{mn}$$

Таким образом, определенная в (5.30) величина Ω_{mn} имеет смысл когерентного сдвига частоты несгруппированного пучка. Ниже мы увидим, что эта величина является фундаментальной в теории взаимодействия пучков с окружающими электродами.

Как видно из уравнений (5.29) и (5.30) для дипольных когерентных колебаний ($m_x^2 + m_z^2 = 1$) значение Ω_{mn} не зависит от поперечных размеров пучка:

$$\Omega_{mn} = Ne^2 g_{mn}(\omega_{mn}), \quad \mathcal{A}_{\pm 1} = -1,$$

а для мультипольных ($m_x^2 + m_z^2 > 1$) она экспоненциально убывает с увеличением номеров мультипольности

$$\Omega_{mn} \propto (a/l_\perp)^{2|m|-2}.$$

Это определяет иерархию мод в их влиянии на устойчивость пучка в целом.

В монохроматическом пучке колебания неустойчивы при выполнении условия $\text{Im}\Omega_{mn} > 0$. Поскольку $g(\omega)$ является Фурье-образом действительной функции, имеем

$$g^*(\omega) = g(-\omega).$$

Кроме того для пассивных систем $\omega \text{Im}g(\omega) > 0$. Тогда, как видно из (5.30), условие устойчивости монохроматического пучка записывается в виде

$$(m_{\perp}\omega_{\perp} + n\omega_0)\mathcal{A}_m < 0. \quad (5.31)$$

Для одномерных бетатронных колебаний ($m_z = m$, $m_x = 0$) это условие приобретает особенно простой вид

$$m_z(m_z\nu_z + n) > 0. \quad (5.32)$$

В этих выражениях слагаемые, пропорциональные n , описывают возбуждение наведенных полей продольным движением частиц. Видно, что для монохроматического пучка эти слагаемые меняют знаки декрементов колебаний при $n = -m_z\nu_z$. По этой причине, использование пассивных систем не может обеспечить одновременного подавления всех мод такого пучка.

Устойчивость мод с $m_{x,z}n < 0$ может обеспечиваться, например, затуханием Ландау. Как видно из уравнения (5.28) разброс частот поперечных колебаний может вызываться зависимостями частот бетатронных колебаний от их амплитуд, либо от импульса частицы. В последнем случае мы пишем:

$$\omega_z = \omega_{zs} + \frac{d\omega_z}{dp} \Delta p$$

где¹

$$\frac{d\omega_z}{dp} = \omega_{zs} \left(1 + \frac{d \ln \omega_0}{dp} + \frac{d \ln \nu_z}{dp} \right).$$

При этом уравнение (5.28) записывается в виде ($f_0 = F(I_z)f(\Delta p)$)

$$\epsilon_{mn}(\omega) = 1 - \Omega_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p f(\Delta p)}{\Delta\omega_{mn} - \kappa\Delta p} = 0, \quad (5.33)$$

$$\text{Im}\Delta\omega_{mn} > 0, \quad \kappa = n \frac{d\omega_0}{dp} + m \frac{d\omega_z}{dp}.$$

¹Напомним, что величина $d \ln \nu_z / dp$ называется хроматизмом кольца.

Последнее уравнение может использоваться как для вычисления

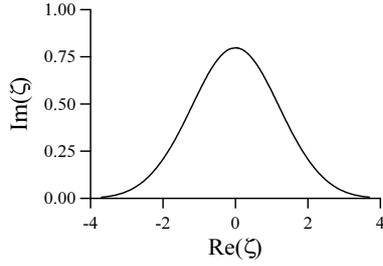


Рис. 12: Граница области устойчивости дипольных поперечных колебаний для случая, когда разброс частот обусловлен разбросом импульсов в пучке. Первая гармоника частоты обращения; распределение импульсов в пучке гауссово ($\zeta = \Omega_m/|\kappa|\sigma$).

собственных частот колебаний, так и для построения границ областей устойчивости (например, Рис.12):

$$\Omega_{mn}(\Delta\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}(\Delta\omega) - iJ(\Delta\omega)}, \quad (5.34)$$

$$\mathcal{P}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p f(\Delta p)}{z - \kappa\Delta p}, \quad J(z) = \pi f(z/\kappa)/|\kappa|.$$

2. Для продольных колебаний несгруппированного пучка $m_x = m_x = 0$ уравнение (5.22) записывается в виде ($\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0(p)$)

$$\Delta\omega_n f_n = Ne^2 \frac{n}{R_0} \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int d\Gamma'_\perp d\Delta p' G_{n,n}(1, 2, \omega) f_n(\Delta p' \omega). \quad (5.35)$$

Как уже говорилось, если зависимости функций Грина от амплитуд бетатронных колебаний являются достаточно гладкими, вычисление гармоник G по фазам поперечных колебаний проводится разложением G в ряды Тэйлора по поперечным координатам. В старшем приближении по a/l_\perp это приводит к замене в (5.35)

величины $G_{n,n}(1, 2, \omega)$ ее значением на равновесной орбите, что позволяет переписать уравнение (5.35) в виде

$$\Delta\omega_n f_n = Ne^2 \frac{n}{R_0} G_{nn}(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' d\Gamma'_{\perp} f_n. \quad (5.36)$$

Теперь заметим, что в этом уравнении коэффициент перед $N\partial f_0/\partial \Delta p$ является Фурье-гармоникой скобки Пуассона $i[\tilde{L}, \Delta p]$. Поскольку в отсутствие возмущений Δp является интегралом движения, последнее выражение можно записать в виде

$$-i\overline{[H, \Delta p]_{n,\omega}} = -\frac{i}{v_s} \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{n,\omega}} = -ie\overline{E_{\parallel}(\mathbf{r}_0(t), t)_{n,\omega}}. \quad (5.37)$$

Используя это выражение мы можем переписать (5.36) в двух эквивалентных формах

$$\Delta\omega_n f_n = \frac{Ne^2\omega}{v_s} G_{nn}(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p' d\Gamma'_{\perp} f_n, \quad (5.38)$$

либо

$$\Delta\omega_n f_{n\omega} = -ieE_{\vartheta}(n, \omega) \frac{\partial f_0}{\partial \Delta p}. \quad (5.39)$$

Здесь,

$$f_{n\omega}(\Delta p) = \int d\Gamma_{\perp} f_{n\omega}(\Delta p, \Gamma_{\perp})$$

функция распределения пучка по импульсам. Подстановка в (5.39) соотношения

$$E_{\vartheta}(n, \omega) = -\frac{Ne\omega_0 Z_n(\omega)}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{n,\omega}(\Delta p)$$

и сравнение уравнений (5.38) и (5.39) позволяет связать гармоники функции Грина $G_{nn}(\omega)$ с импедансом связи $Z_n(\omega)$

$$\frac{iZ_n(\omega)}{n} = \frac{2\pi}{\omega_0} G_{nn}(\omega), \quad (5.40)$$

или, что то же

$$\frac{iZ_n(\omega)}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_s^2} G_{nn}(\omega). \quad (5.41)$$

5.2 Поперечный импеданс связи

Понятие импеданса связи может быть также использовано при исследовании устойчивости поперечных колебаний. Рассмотрим для простоты случай дипольных вертикальных колебаний, когда $f_{m,n}$ удовлетворяет уравнению (5.22) ($m_x = 0$, $m_z = \pm 1$):

$$(\omega - \omega_{m,n})f_{m,n} = Ne^2 m_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \int dI'_z dI'_x G_{m,n}(1, 2, \omega + n\omega_0) f_{m,n}. \quad (5.42)$$

Вообще, величина $G_{m,n}$ содержит слагаемые двух видов. Выражение

$$G_{\parallel} = \frac{v^2}{c^2} G_{\theta,\theta} - G_{0,0} \quad (5.43)$$

описывает эффекты связанные с возбуждением полей продольным движением пучка. Остальные слагаемые в G описывают возбуждение полей поперечными токами пучка (\mathbf{j}_{\perp}) и реакцию пучка на эти поля. Если вкладом этих слагаемых можно пренебречь, то гармоники $G_{m,n}$ записываются в виде

$$G_{m,n} = \frac{R_0}{2p\nu_z} \sqrt{I_z I'_z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} G_{\parallel}(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_{\perp}=0} \right).$$

Подстановка этого выражения в (5.42) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} (\omega - m_z \omega_z) f_{m,n} &= \frac{Ne^2 R_0}{2p\nu_z} m_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \sqrt{I_z} \\ &\times \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} G_{\parallel}(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_{\perp}=0} \right) \int dI'_z dI'_x \sqrt{I'_z} f_{m,n}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

С другой стороны, если колебания не связаны, то

$$\dot{I}_z = \frac{\partial z}{\partial \psi_z} F_z.$$

Поэтому

$$(\omega - \omega_{m,n}) f_{m,n} = m_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} (z)_m \overline{(F_z)_n(\omega)}, \quad (z)_m = \sqrt{\frac{R_0 I_z}{2p\nu_z}}. \quad (5.45)$$

В этом уравнении сила F_z описывает действие наведенных полей. Мы определим ее следующим выражением

$$\overline{(F_z)_n(\omega)} = -\frac{Ne^2\omega_0 Z_n^\perp(\omega + n\omega_0)}{\Pi} \int dI'_z dI'_x \sqrt{\frac{R_0 I'_z}{2p\nu_z}} f_{m,n}, \quad (5.46)$$

в котором функция $Z_n^\perp(\omega)$ играет ту же роль, что и импеданс связи в задачах об устойчивости продольных колебаний. Такая функция называется поперечным импедансом связи пучка с окружающими электродами. Используя определение (5.46), мы можем переписать уравнение (5.45) в виде

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{m,n}) f_{m,n} &= -m_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \frac{Ne^2 R_0}{2p\nu_z} \sqrt{I_z} \\ &\times \frac{\omega_0 Z_n^\perp(\omega + n\omega_0)}{\Pi} \int dI'_z dI'_x \sqrt{I'_z} f_{m,n}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Сравнение уравнений (5.44) и (5.47) позволяет выразить введенный здесь поперечный импеданс связи $Z_n^\perp(\omega)$ через производные функции Грина на равновесной орбите:

$$Z_n^\perp(\omega) = -\frac{2\pi R_0}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} G_{\parallel}(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_\perp=0} \right). \quad (5.48)$$

Используя (5.41) мы можем связать Z_n^\perp с продольным импедансом (Z_n^\parallel)

$$Z_n^\perp(\omega) = \frac{-iv}{\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} Z_n^\parallel(1, 2, \omega) \Big|_{\mathbf{r}_\perp=0} \right). \quad (5.49)$$

Для камеры с сечением близким к круговому оценка производных по порядку величины дает

$$Z_n^\perp(\omega) \simeq \frac{v}{l_\perp^2} \left(\frac{-iZ_n^\parallel(\omega)}{\omega} \right). \quad (5.50)$$

5.3 Задачи к Лекции 5

1. После удара вертикальные импульсы всех частиц в пучке смещаются на величину Δ_z . Считая, что начальное распределение частиц в фазовом пространстве вертикальных колебаний гауссово

$$f = \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2} - \frac{p_z^2}{2\sigma_p^2}\right)}{2\pi\sigma\sigma_p},$$

вычислить гармоники функции распределения по фазам колебаний.

2. Воспользовавшись линеаризованным уравнением Власова решить задачу, сформулированную в §1. Исследовать влияние разброса на устойчивость пучка с таким взаимодействием частиц.

3. Выписать интегральные уравнения, описывающие спектры малых когерентных колебаний встречных пучков нулевой длины. Вычислить когерентный сдвиг частоты, например, вертикальных колебаний, предполагая удаленность ν_z от резонансов $\nu_z = n/m_x$ (где n и m_x – взаимно простые целые числа). В качестве f_0 при-

нять

$$f_0(I_x, I_z) = \frac{\delta(I_x)}{I_{0z}} \begin{cases} 1, & I_z \leq I_{0z} \\ 0, & I_z > I_{0z}. \end{cases}$$

4. В задаче 3. исследовать случай, когда

$$f_0(I_x, I_z) = \delta(I_x) \frac{I_0}{I_z + I_0}.$$

5. Вычислить поперечный импеданс связи идеально проводящей вакуумной камеры круглого сечения с пучком. Вычисления провести в области низких частот $\omega \ll c/l_\perp$, где l_\perp – радиус камеры.

6. То же для камеры прямоугольного сечения.

7. Оценить поправку к поперечному импедансу вакуумной камеры круглого сечения за счет конечной проводимости стенок.

6 Когерентные колебания сгустков

Если пучок сгруппирован в один или несколько сгустков, то в задаче об устойчивости когерентных колебаний появляется дополнительный параметр: отношение величины декремента (инкремента) колебаний к частоте синхротронных колебаний частиц. Если это отношение мало, то моды с синхротронными коллективными колебаниями хорошо разделены. В этом случае спектры колебаний могут вычисляться с помощью уравнения (5.21). Если же это не так, то колебания развиваются на временах сравнимых, или существенно короче периода синхротронных колебаний. При этом, конечно, уравнения (5.21) должны быть заменены более общей системой уравнений, учитывающей связь синхротронных мод.

6.1 Синхробетатронные колебания

В этой лекции мы предполагаем, что декременты когерентных колебаний малы по сравнению с частотами синхротронных колебаний, когда уравнение (5.21) справедливо. Ядро уравнения (5.21) выражается через гармоники фаз синхротронных колебаний. При этом, поскольку (на важность влияния модуляции частот бетатронных колебаний синхротронными на устойчивость поперечных когерентных колебаний сгустков указали К. Пеллегрини и М. Сэндс 1969 [10, 11])

$$\frac{d\psi_z}{dt} = \omega_z(p_s) + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial p} \right)_s \Delta p = \omega_{sz} + \frac{d\phi}{dt} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \omega_0} \right)_s,$$

или

$$\psi_z = \psi_z^s + \frac{d\omega_z}{d\omega_0} \phi,$$

то в пренебрежении модуляцией θ бетатронными колебаниями эти гармоники вычисляются от выражений

$$\exp \left[i \left(n + \mathbf{m}_\perp \frac{d\omega_\perp}{d\omega_0} \right) \phi \right].$$

Если амплитуды синхротронных колебаний малы, то соответствующие интегралы совпадают с функциями Бесселя

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_c}{2\pi} \exp(-im_c\psi_c + in_1\phi) = J_{m_c}(n_1\varphi),$$

где

$$n_1 = n + \mathbf{m}_\perp \frac{d\omega_\perp}{d\omega_0}.$$

Совместно с (5.26) это дает следующее выражение для G_{mn}

$$G_{mn} \simeq (I_x I'_x)^{m_x/2} (I_z I'_z)^{m_z/2} g_{mn}(\omega_{mn}) J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi').$$

Соответственно, мы можем искать решения (5.21) в виде

$$f_m = \frac{I_x^{m_x/2} I_z^{m_z/2}}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}} \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \chi_m(\varphi). \quad (6.1)$$

В зарубежной литературе собственные функции $\chi_m(\varphi)$ принято теперь называть радиальными модами. Этим подчеркивается то обстоятельство, что $\chi_m(\varphi)$ описывают распределение моды по "радиусу" в фазовом пространстве синхротронных колебаний.

Предполагая, что функция распределения в стационарном состоянии может быть представлена произведением

$$f_0(I_\perp, I_c) = F_0(I_\perp) \rho(\varphi),$$

где $\rho(\varphi)$ – распределение по амплитудам синхротронных колебаний, из (5.21) находим интегральное уравнение для гармоник линейной плотности пучка (χ_m)

$$\begin{aligned} \chi_m &= \rho(\varphi) \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') \chi_m(\varphi') \\ &\times \int d\Gamma_\perp \frac{I_x^{|m_x|} I_z^{|m_z|}}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_\perp, \varphi')} (\mathbf{m}_\perp \partial F / \partial \mathbf{I}_\perp). \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_{mn}}{\mathcal{A}_m} J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi')$$

Для синхротронных колебаний аналогичное уравнение записывается в виде

$$\chi_m = \frac{\partial \rho}{\partial(\varphi^2/2)} \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') \frac{\chi_m(\varphi')}{\omega - m_c \omega_c(\varphi')}. \quad (6.3)$$

Из-за азимутальной несимметрии стационарного распределения частиц развитие мод χ_m вообще может определяться совместным

действием заметного количества азимутальных гармоник поля. По этой причине ядра уравнений (6.2) и (6.3), вообще говоря, не факторизуются, что существенно усложняет решение этих уравнений. Исследование полученных уравнений может быть упрощено, если мы пренебрежем разбросом частот из-за нелинейности синхротронных колебаний. В последнем случае, в уравнении, например, (6.2) множитель

$$\int d\Gamma_{\perp} \frac{I_x^{|m_x|} I_x^{|m_x|} (\mathbf{m}_{\perp} \partial F / \partial \mathbf{I}_{\perp})}{\omega - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_{\perp})}$$

не зависит от φ' и потому может быть вынесен за знак интеграла. В результате (6.2) распадается на два независимых уравнения. Первое

$$\begin{aligned} \Omega_m \chi_m(\varphi) &= \rho(\varphi) \sum_{-\infty}^{\infty} \Omega_{mn} J_{m_c}(n_1 \varphi) \\ &\times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1 \varphi') \chi_m(\varphi') \end{aligned} \quad (6.4)$$

определяет собственные моды и спектр собственных частот монохроматического пучка. Второе

$$\epsilon_m(\omega) = 1 - \frac{\Omega_m}{\mathcal{A}_m} \int d\Gamma_{\perp} \frac{I_x^{|m_x|} I_x^{|m_x|} (\mathbf{m}_{\perp} \partial F / \partial \mathbf{I}_{\perp})}{\omega - \mathbf{m}_{\perp} \boldsymbol{\omega}_{\perp}(\mathbf{I}_{\perp})} = 0 \quad (6.5)$$

является собственно дисперсионным уравнением, которое по известным числам Ω_m позволяет вычислять собственные частоты мод ω . Входящие в эти уравнения величины \mathcal{A}_m и Ω_{mn} определены в (5.29) и, соответственно, в (5.30).

Важным свойством интегрального уравнения (6.4) является возможность преобразования ядра этого уравнения в симметричное. Для этого используется подстановка $\chi_m = w(\varphi) \sqrt{\rho/\varphi}$, после

которой уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned}\Omega_m w(\varphi) &= \int_0^\infty d\varphi' K(\varphi, \varphi') w(\varphi'), \\ K(\varphi, \varphi') &= \sqrt{\varphi\varphi' \rho(\varphi)\rho(\varphi')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{m,n} J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi').\end{aligned}\quad (6.6)$$

В силу симметрии ядра $K(\varphi, \varphi') = K(\varphi', \varphi)$, так-называемое, со-
звонное к (6.6) интегральное уравнение

$$\Omega'_m w^*(\varphi) = \int_0^\infty d\varphi' K^*(\varphi, \varphi') w^*(\varphi') \quad (6.7)$$

получается комплексным сопряжением уравнения (6.6), а его соб-
ственные числа комплексно сопряжены Ω_m :

$$\Omega'_m = \Omega_m^* \quad (6.8)$$

Действительно, умножая обе части в (6.6) на w^* и интегрируя это
уравнение по φ , получим

$$\begin{aligned}\Omega_m \langle |w|^2 \rangle &= \int_0^\infty d\varphi d\varphi' w^*(\varphi) K(\varphi, \varphi') w(\varphi'), \\ \langle |w|^2 \rangle &= \int_0^\infty d\varphi |w(\varphi)|^2.\end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией K , перепишем это уравнение в ви-
де

$$\Omega_m \langle |w|^2 \rangle = \int_0^\infty d\varphi d\varphi' w^*(\varphi') K(\varphi, \varphi') w(\varphi),$$

или, что то же

$$\Omega_m \langle |w|^2 \rangle = \int_0^\infty d\varphi d\varphi' \operatorname{Re}\{w^*(\varphi)w(\varphi')\} K(\varphi, \varphi'). \quad (6.9)$$

Аналогично, из (6.7) получаем

$$\Omega'_m \langle |w|^2 \rangle = \int_0^\infty d\varphi d\varphi' \operatorname{Re}\{w^*(\varphi)w(\varphi')\} K^*(\varphi, \varphi'). \quad (6.10)$$

Теперь, сложение уравнений (6.9) и (6.10) дает $\operatorname{Im}(\Omega_m + \Omega'_m) = 0$, а их вычитание – $\operatorname{Re}(\Omega_m - \Omega'_m) = 0$, что доказывает утверждение уравнения (6.8).

Если числа α нумеруют решения (6.6), а нормировка этих решений выбрана так, что $\langle |w_\alpha|^2 \rangle = 1$, то из уравнений (6.8), (6.9) и (6.10) можно получить следующее выражение для декрементов колебаний ($\delta_{m,\alpha} = -\operatorname{Im}\Omega_{m,\alpha}$)

$$\delta_{m,\alpha} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\Omega_{m,n} \left| \int_0^\infty d\varphi \sqrt{\varphi\rho(\varphi)} J_{m_c}(n_1\varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (6.11)$$

По условию полноты собственных решений

$$\sum_{\alpha} w_{\alpha}^*(\varphi') w_{\alpha}(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi'),$$

сумма декрементов мод $[\sum_{\alpha} \delta_{m,\alpha}]$, как и должно быть, совпадает с мнимой частью следа ядра K :

$$\sum_{\alpha} \delta_{m,\alpha} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\Omega_{m,n} \int_0^\infty d\varphi \varphi \rho(\varphi) J_{m_c}^2(n_1\varphi).$$

6.2 Синхротронные когерентные колебания

Получим еще интегральное уравнение для синхротронных когерентных колебаний пользуясь описанием наведенных полей в терминах импеданса связи (А.Н. Лебедев 1967 [9]). В простейшем случае, когда можно пренебречь модуляциями функции Грина поперечным движением сгустка, уравнение (5.22) записывается в виде

$$(\Delta\omega_m = \omega - m_c\omega_c)$$

$$\Delta\omega_m f_m = Ne^2 m_c \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \int_0^\infty d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') f_m(\varphi'). \quad (6.12)$$

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{in\phi}]_{m_c} G_n(\omega + n\omega_0) [e^{-in\phi'}]_{-m_c} \quad (6.13)$$

Учитывая, что для малых синхротронных колебаний $\phi = \varphi \cos \psi_c$, а также что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \exp(in\varphi \cos \psi - im\psi) = J_{m_c}(n\varphi),$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя, перепишем ядро $K(\varphi, \varphi')$ в виде

$$K(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m_c}(n\varphi) J_{m_c}(n\varphi') G_n(\omega + n\omega_0)$$

Заменив в этом уравнении согласно (5.41) гармоники $G_n(\omega)$ на $Z_n(\omega)/\omega$, получаем искомое интегральное уравнение

$$\Delta\omega_m f_m = \frac{Ne^2 \omega_0}{2\pi} m_c \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \int_0^\infty d\varphi' \varphi' Z(\varphi, \varphi') f_m(\varphi'). \quad (6.14)$$

$$Z(\varphi, \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m_c}(n\varphi_c) J_{m_c}(n\varphi'_c) \frac{iZ_n(\omega + n\omega_0)}{(\omega/\omega_0) + n} \quad (6.15)$$

6.3 Затухание Ландау за счет октупольных полей

Неустойчивость когерентных колебаний сгустка может подавляться затуханием Ландау. Однако, ввиду того, что спектр малых колебаний состоит из эквидистантных линий ($\omega_{mn} = m\omega + n\omega_0$), требуемые разбросы частот должны обеспечиваться нелинейностью

ведущих полей. Как уже говорилось, учет нелинейности синхротронных колебаний сталкивается с значительными вычислительными трудностями. По этой причине, ниже мы рассмотрим более простой пример, когда синхротронные колебания считаются линейными, а нелинейность вносится специальным элементом магнитной структуры с октупольным полем:

$$H_z = B(\theta) \frac{(x^3 - 3xz^2)}{6}, \quad H_x = -B(\theta) \frac{(z^3 - 3zx^2)}{6}, \quad (6.16)$$

$$B(\theta) = \left(\frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \right)_{x,z=0}.$$

Если частоты бетатронных колебаний далеки от резонансных, то действие такого октуполя на движение частиц приводит к сдвигу частот колебаний на величины, пропорциональные квадратам амплитуд колебаний. Например, частота вертикальных колебаний запишется в виде

$$\omega_z(I_z, I_x) = \omega_{z0} + aI_z - bI_x, \quad ab > 0 \quad (6.17)$$

В этом случае частоты бетатронных и синхробетатронных когерентных колебаний сгустка определяются дисперсионным уравнением (6.5). Как и прежде, помимо вычисления собственных частот это дисперсионное уравнение может быть использовано для построения границ областей устойчивости колебаний. Здесь мы изучим поведение границ областей устойчивости для наиболее простого случая, когда $m_z = 1$, а $m_x = m_c = 0$. Для такой моды уравнение (6.5) записывается в виде

$$1 = -\Omega_m \int dI_x dI_z \frac{I_z \partial f_0 / \partial I_z}{\Delta\omega_m - aI_z + bI_x}, \quad \Delta\omega_m = \omega - \omega_{z0} \quad (6.18)$$

Полученное дисперсионное уравнение легко упрощается введением функции распределения частот в сгустке. Определив

$$g(w) = - \int dI_x dI_z I_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \delta(w - aI_z + bI_x), \quad (6.19)$$

приведем уравнение (6.18) к следующему виду

$$1 = \Omega_m \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\Delta\omega_m - w}, \quad \text{Im}\omega > 0. \quad (6.20)$$

Заметим, что введенная в (6.19) функция $g(w)$ удовлетворяет следующему условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw g(w) = - \int dI_x dI_z I_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} = \int dI_x dI_z f = 1.$$

Для конкретизации расчетов примем, что f является экспоненциальным распределением

$$f = \frac{1}{I_{0x} I_{0z}} \exp\left(-\frac{I_z}{I_{0z}} - \frac{I_x}{I_{0x}}\right). \quad (6.21)$$

Тогда ($\delta_z = aI_{0z}$, $\delta_x = bI_{0x}$)

$$g(w) = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dz z \exp(-x - z) \delta(w - \delta_z z + \delta_x x). \quad (6.22)$$

Интегрирование в (6.22) выполняется элементарно и приводит к следующему выражению для распределения плотности частот в пучке

$$g(w) = \frac{A}{\delta_x + \delta_z} \begin{cases} \exp\left(-\frac{|w|}{\delta_x}\right), & w < 0 \\ \left(1 + \frac{w}{\delta_x} + \frac{w}{\delta_z}\right) \exp\left(-\frac{w}{\delta_z}\right), & w \geq 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Здесь $A = \delta_x/[\delta_x + \delta_z]$. Уравнение границы области устойчивости получается устремлением $\Delta\omega_m$ в (6.20) к действительной оси сверху. Учитывая, что при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\Delta\omega_m - w + i0} = \mathcal{P}(\Delta\omega_m) - i\pi g(\Delta\omega_m),$$

где

$$\mathcal{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{g(w)}{\omega - w}, \quad (6.24)$$

а знак \int как и прежде означает вычисление интеграла в смысле главного значения, получим уравнение граничной кривой

$$\zeta(\Delta\omega_m) = \frac{1}{\mathcal{P}(\Delta\omega_m) - i\pi(\delta_x + \delta_z)g(\Delta\omega_m)}, \quad \zeta = \frac{\Omega_m}{\delta_x + \delta_z}. \quad (6.25)$$

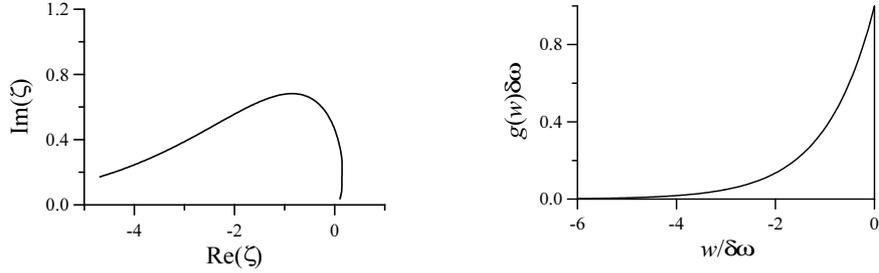


Рис. 13: Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый). Разброс частот вносится окучуполем таким, что $\delta_x \gg \delta_z$; в данном случае $\zeta = \Omega_m/\delta\omega$, а $\delta\omega = \delta_x$.

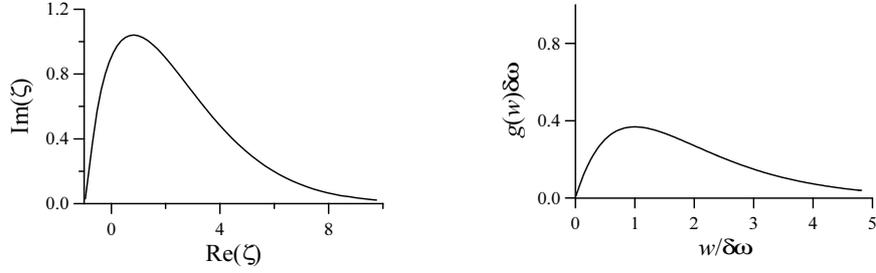


Рис. 14: Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый). Разброс частот вносится октуполем таким, что $\delta_x \ll \delta_z$; в данном случае $\zeta = \Omega_m/\delta\omega$, а $\delta\omega = \delta_z$.

Для распределения частот (6.23) функция \mathcal{P} легко вычисляется

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+, \quad (6.26)$$

$$\mathcal{P}_-(\omega) = A \int_0^\infty dw \frac{\exp(-w/\delta_x)}{\omega + w}, \quad (6.27)$$

$$\mathcal{P}_+(\omega) = A \int_0^\infty \frac{dw \exp(-w/\delta_x)}{\omega - w} \left(1 + \frac{w}{\delta_x} + \frac{w}{\delta_z}\right).$$

Например, сделав в (6.27) замену переменной $t = (w + \omega)/\delta_x$, мы можем выразить \mathcal{P}_- через так называемую интегральную показательную функцию

$$\mathcal{P}_-(\omega) = A \exp(\omega/\delta_x) \int_{\omega/\delta_x}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} = -A \exp(\omega/\delta_x) \text{Ei}(-\omega/\delta_x), \quad (6.28)$$

где

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}.$$

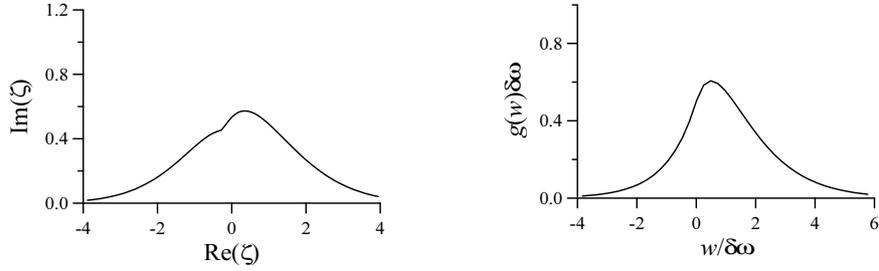


Рис. 15: Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый). Разброс частот вносится октуполем таким, что $\delta_x = \delta_z = \delta$; в данном случае $\zeta = \Omega_m/\delta\omega$, а $\delta\omega = 2\delta$.

Аналогичными вычислениями легко установить, что

$$\mathcal{P}_+(\omega) = A \left\{ -1 - \frac{\delta_z}{\delta_x} + \left(1 + \frac{\omega}{\delta_x} + \frac{\omega}{\delta_z} \right) \exp(-\omega/\delta_z) \text{Ei}(\omega/\delta_z) \right\}. \quad (6.29)$$

Как видно из уравнений (6.23), (6.28) и (6.29) (см. также на Рис.13÷15), характер распределения частот в пучке, а также форма границы области устойчивости существенным образом зависят от соотношения разбросов δ_z и δ_x . В свою очередь это соотношение определяется отношением β -функций вертикальных и радиальных колебаний в месте расположения октуполя и величинами эмиттансов этих колебаний (I_{0z} и I_{0x}). Обычно в электрон-позитронных машинах за счет действия синхротронного излучения величина радиального эмиттанса во много раз превышает величину вертикального. Как правило, величины β -функций в октуполе не компенсируют этой разницы эмиттансов. По этой причине, в типичных условиях электронные и позитронные сгустки

в накопителях имеют поперечное сечение, которое сильно сплюснуто в вертикальном направлении, а между δ_z и δ_x выполняется соотношение $\delta_x \gg \delta_z$. В таких условиях, а также если $b > 0$, граница области устойчивости вертикальных колебаний в основном сосредоточена в области $\text{Re}\zeta < 0$ (Рис.13). При этом и с очевидными заменами, граница области устойчивости радиальных когерентных колебаний имеет форму, изображенную на Рис.14. В протонных (антипротонных и ионных, а также в специальных случаях в электрон-позитронных) машинах поперечное сечение пучков может быть близким к круглому, когда $\delta_x \approx \delta_z$. Для этого случая граница области устойчивости вертикальных когерентных колебаний и соответствующее распределение частот показаны на Рис.15.

6.4 Задачи к Лекции 6

1. Вычислить декремент затухания Ландау для случая, когда разброс частот в пучке существенно превышает величину когерентного сдвига частоты.
2. Вычислить уравнение границы области устойчивости бетатронных колебаний для случая, когда сдвиг частоты некогерентных бетатронных колебаний задан формулой (нелинейность сил пространственного заряда)

$$\Delta\omega_z(I_z, I_x) = \frac{\Delta\omega_0}{1 + I_z/I_{0z}},$$

либо формулой

$$\Delta\omega_z(I_z, I_x) = \frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{1 + I_x/I_{0x}}}.$$

7 Резонансные неустойчивости

Резонансные неустойчивости когерентных колебаний пучка обусловлены его взаимодействием с наведенными полями, которые исчезают за много оборотов частиц в машине. Поэтому характерной особенностью неустойчивостей этого типа является резонансная зависимость величин когерентного сдвига частоты и декрементов мод от частот колебаний частиц. Такая неустойчивость наблюдалась, например, на установке ВЭПП-2.

Для простоты мы проведем вычисления для случая, когда сгусток совершает вертикальные бетатронные колебания и взаимодействует с отдельной модой резонатора (ниже изложение в основном следует работе [12]). Такой резонатор может, например, образовываться локальным расширением вакуумной камеры накопителя. Для получения дисперсионных уравнений мы могли бы воспользоваться общим интегральным уравнением и разложением функции Грина по собственным модам резонатора. Поучительно, однако, снова получить это уравнение непосредственным решением уравнений для осцилляторов наведенных полей. В случае резонансного взаимодействия такой подход оправдан медленным затуханием осцилляторов поля, а также тем обстоятельством, что такая неустойчивость обусловлена взаимодействием отдельной моды резонатора и колебания пучка. Замечая, что после линеаризации и перехода к гармоникам, общее уравнение может быть записано в виде:

$$(\omega - m_z \omega_z) f_m = m_z \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \int_0^{T_0} \frac{dt}{T_0} L_{m,\omega}. \quad (7.1)$$

Интересующая нас неустойчивость обусловлена взаимодействием пучка с вихревой частью наведенных полей. В этой связи, представим L суммой двух слагаемых. Первое описывает взаимодействие с полями, являющимися квазистатическими в системе по-

коя пучка. Это слагаемое лишь изменяет частоты колебаний, но непосредственно неустойчивости мод пучка не вызывает. Как и прежде, мы будем считать, что соответствующие сдвиги частот уже учтены в уравнениях.

Вихревая часть поля в резонаторе описывается набором осцилляторов поля таких, что $A_0 = 0$, а

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= c \sum_k \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) q_k(t), \quad \mathbf{div} \mathbf{A}_k = 0, \\ \Delta \mathbf{A}_k(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_k &= 0, \quad \int d^3r \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k'} = 4\pi \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Подставив это разложение в уравнение для векторного потенциала \mathbf{A}

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi N e}{c} \int d^3p \mathbf{v} f$$

и проинтегрировав обе части с \mathbf{A}_k , получим уравнение для осцилляторов q_k .

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = j_m(t), \quad \omega_k^2 = c^2 k^2. \quad (7.3)$$

$$j_m(t) = N e \int d\Gamma (\mathbf{v} \mathbf{A}_k)^* f_m \exp(im_z \psi_z - i\omega t).$$

Потери в резонаторе из-за конечной проводимости стенок, или по другим причинам, приводят к затуханию мод $q_k(t)$. В таком случае говорят, что моды колебаний имеют конечную добротность. Для феноменологического описания конечной добротности моды k в левую часть уравнения (7.3) дописывают диссипативное слагаемое $2\lambda_k \dot{q}_k$, где $\lambda_k = \omega_k / (2Q_k)$, а Q_k добротность моды. После такой модификации это уравнение принимает вид

$$\ddot{q}_k + 2\lambda_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = j_m(t). \quad (7.4)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{v}\mathbf{A}_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{v}\mathbf{A}_k)_n e^{in\theta},$$

а $\theta = \omega_s t + \phi$, ищем решение (7.4) в виде

$$q_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{kn} \exp(-i\omega t - in\omega_s t).$$

Подстановка этого выражения в (7.4) даёт

$$q_{kn} = \frac{Ne \int d\Gamma V_{m,n}^* f_m}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_s + i\lambda_k)^2}, \quad (7.5)$$

$$V_{mn} = [(\mathbf{v}\mathbf{A}_k)_n e^{in\phi}]_m.$$

Для случая, когда пучок взаимодействует с отдельной модой резонатора k эти выражения позволяют вычислить

$$\int_0^{T_0} \frac{dt}{T_0} L_{m,\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ne^2 V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_s + i\lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m,$$

что после подстановки в (7.1) даёт ещё одну запись основного интегрального уравнения

$$f_m = \frac{\partial f_0 / \partial I_z}{(\omega - m_z \omega_z)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ne^2 m_z V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_s + i\lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m. \quad (7.6)$$

Относительный вклад слагаемых с различными n в (7.6) зависит от соотношения декремента затухания поля в резонаторе λ_k и частоты обращения ω_s . Если $\omega_s \ll \lambda_k$, то отдельные слагаемые в правой части (7.6) слабо зависят от ω и дают близкие вклады. В связи с коллективной устойчивостью пучка в таком случае говорят о взаимодействии с низкодобротным резонатором.

Обратный случай $\omega_s \gg \lambda_k$ соответствует резонансному взаимодействию пучка с наведенными полями. При этом из-за резкой зависимости слагаемых в правой части (7.6) от ω взаимодействие пучка с резонатором становится особенно сильным при выполнении резонансного условия

$$\omega_k \simeq m_z \omega_z + n \omega_s. \quad (7.7)$$

Это обстоятельство позволяет при изучении резонансных эффектов вообще отбросить в уравнении (7.6) нерезонансные слагаемые. В результате мы приходим к более простому уравнению:

$$f_m = \frac{\partial f_0 / \partial I_z}{(\omega - m_z \omega_z)} \frac{N e^2 m_z V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n \omega_s + i \lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m.$$

Вблизи резонанса (7.7) мы можем переписать частотный знаменатель в виде

$$\omega_k^2 - (\omega + n \omega_s + i \lambda_k)^2 \simeq 2 \omega_k (\varepsilon - \Delta \omega_m - i \lambda_k),$$

где

$$\varepsilon = \omega_k - m_z \omega_z - n \omega_s, \quad \Delta \omega_m = \omega - m_z \omega_z.$$

После этих преобразований окончательно получаем

$$f_m = - \frac{\partial f_0 / \partial I_z}{(\omega - m_z \omega_z)} \frac{N e^2 m_z V_{mn}}{2 \omega_k (\Delta \omega_m - \varepsilon + i \lambda_k)} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m. \quad (7.8)$$

Поскольку ядро уравнения (7.8) факторизовано, его решение имеет вид

$$f_m = C_m \frac{V_{mn} \partial f_0 / \partial I_z}{\omega - m_z \omega_z}, \quad \text{Im} \omega > 0,$$

а подстановка этого выражения в (7.8) приводит к дисперсионному уравнению:

$$1 = - \frac{N e^2}{2 \omega_k} \frac{m_z}{\Delta \omega_m - \varepsilon + i \lambda_k} \int d\Gamma \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \frac{|V_{mn}|^2}{\omega - m_z \omega_z}. \quad (7.9)$$

Для выяснения основных особенностей спектров резонансных мод изучим несколько простых примеров. Примем сначала, что мы можем пренебречь разбросами частот и трением в резонаторе. Тогда уравнение (7.9) приобретает особенно простой вид:

$$1 = \frac{m_z \Omega_m^2}{\Delta\omega_m(\Delta\omega_m - \varepsilon)}, \quad \Omega_m^2 = \frac{Ne^2}{2\omega_k} \int d\Gamma f_0 \frac{\partial}{\partial I_z} |V_{m,n}|^2. \quad (7.10)$$

Его корни равны

$$\Delta\omega_m = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4m_z \Omega_m^2}}{2}. \quad (7.11)$$

Как видно из этого уравнения, при $m_z > 0$, что соответствует разностному резонансу, оба корня действительны и, соответственно, колебания не нарастают. При этом, в точном резонансе $\Delta\omega_m = \pm \sqrt{m_z \Omega_m^2}$, а если $|\varepsilon| \gg 4m_z \Omega_m^2$, то

$$\Delta\omega_m \simeq \begin{cases} \varepsilon + \frac{m_z \Omega_m^2}{|\varepsilon|}, \\ -\frac{m_z \Omega_m^2}{|\varepsilon|}. \end{cases}$$

В суммовом резонансе ($m_z < 0$) колебания становятся неустойчивыми при попадании частот (ω_k и ω_z) внутрь запрещенной полосы:

$$\varepsilon^2 \leq 4|m_z| \Omega_m^2. \quad (7.12)$$

В запрещенной полосе инкремент неустойчивой моды равен

$$\delta_m = \text{Im}\omega = \frac{|\varepsilon|}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{th}} - 1}, \quad (7.13)$$

где величина

$$N_{th} = |\varepsilon| \frac{\omega_k}{e^2} \left(\int d\Gamma f_0 \frac{\partial}{\partial I_z} |V_{mn}|^2 \right)^{-1} \quad (7.14)$$

определяет пороговый ток неустойчивости. Описанная неустойчивость носит название динамической.

Перейдем теперь к изучению влияния трения в резонаторе и разброса частот на устойчивость резонансных когерентных колебаний. Пусть сначала разброс частот пучка равен нулю. Тогда дисперсионное уравнение (7.9) записывается в виде

$$1 = \frac{m_z \Omega_m^2}{\Delta \omega_m (\Delta \omega_m - \varepsilon + i \lambda_k)}. \quad (7.15)$$

Корни этого уравнения равны

$$\Delta \omega_m = \frac{\varepsilon - i \lambda_k}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon - i \lambda_k)^2}{4} + m_z \Omega_m^2}. \quad (7.16)$$

Отделив в этом уравнении мнимую часть, получим декременты колебаний

$$\delta = -\text{Im} \omega = \frac{\lambda_k}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}} - X \right)}, \quad (7.17)$$

$$X = \frac{\varepsilon^2 - \lambda_k^2}{4} + m_z \Omega_m^2.$$

Уравнение (7.17) позволяет найти условие устойчивости колебаний

$$\frac{\lambda_k}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}} - X \right)}.$$

Простыми вычислениями:

$$\frac{\lambda_k^2}{4} + \frac{\varepsilon^2 - \lambda_k^2}{8} + \frac{m_z \Omega_m^2}{2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}},$$

$$\left(\frac{\varepsilon^2 + \lambda_k^2}{4} + m_z \Omega_m^2\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon^2 - \lambda_k^2}{4} + m_z \Omega_m^2\right)^2 \geq \frac{\varepsilon^2 \lambda_k^2}{4}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{4} + m_z \Omega_m^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

находим, что колебания в разностном резонансе ($m_z > 0$) всегда устойчивы, а в суммовом ($m_z < 0$) неустойчивы при любом токе пучка. Явление затухания разностных мод может быть использовано для подавления когерентных колебаний пассивным резонатором. Максимальный декремент когерентным колебаниям передаётся в точном резонансе ($\varepsilon = 0$). При этом,

$$\delta_m = \frac{\lambda_k}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_k^2}{4} - m_z \Omega_m^2} \simeq \begin{cases} \frac{m_z \Omega_m^2}{\lambda_k}, & \lambda_k^2 > 4m_z \Omega_m^2, \\ \frac{\lambda_k}{2}, & \lambda_k^2 < 4m_z \Omega_m^2. \end{cases} \quad (7.18)$$

Одновременное демпфирование разностных и суммовых мод может быть достигнуто совместным действием трения в резонаторе и охлаждения, либо затухания Ландау когерентных мод пучка. Для определенности, получим условие устойчивости колебаний несгруппированного пучка за счет действия разброса импульсов. Примем, что распределение импульсов в пучке лоренцево:

$$f_0(\Delta p) = \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)}.$$

Тогда, записывая $\omega_z = \omega_{zs} + \Delta p(d\omega_z/dp)$ и после вычисления в (7.9) интеграла по Δp , получим следующее дисперсионное уравнение

$$1 = \frac{m_z \Omega_m^2}{(\Delta \omega_m + i\lambda_m)(\Delta \omega_m - \varepsilon + i\lambda_k)}, \quad (7.19)$$

$$\lambda_m = |m_z \delta \omega_z| = \left| m_z \frac{d\omega_z}{dp} \right| \Delta.$$

Подстановками $u = \Delta\omega_m + i\lambda_m$ и $\Lambda_{\pm} = \lambda_k \pm \lambda_m$ уравнение (7.19) приводится к тому же виду, что и уравнение (7.15). Поэтому сразу пишем

$$\delta_m = \frac{\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{X^2 + \frac{\varepsilon^2 \Lambda_+^2}{4}} - X \right)}, \quad (7.20)$$

$$X = \frac{\varepsilon^2 - \Lambda_+^2}{4} + m_z \Omega_m^2.$$

Простые вычисления приводят к следующему условию устойчивости

$$\lambda_k \lambda_m \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4\Lambda_+^2} \right) + m_z \Omega_m^2 > 0. \quad (7.21)$$

7.1 Задачи к Лекции 7

1. Показать, что продольный импеданс связи пучка с модой k резонатора определяется выражением

$$Z(\omega) = \frac{Z_k}{1 + iQ_k \left(\frac{\omega_k}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_k} \right)},$$

где Z_k так называемое шунтовое сопротивление резонатора, Q_k – добротность. Выразить Z_k через собственные функции мод резонатора.

2. Исследовать резонансную неустойчивость продольных колебаний несгруппированного пучка.

3. Вычислить спектры радиальных колебаний встречных пучков нулевой длины вблизи резонансов $\nu_x \simeq n/m_x$ (где n и m_x – взаимно простые целые числа), приняв

$$f_0(I_x, I_z) = \frac{\delta(I_z)}{I_{0x}} \begin{cases} 1, & I_x \leq I_{0x} \\ 0, & I_x > I_{0x}. \end{cases}$$

4. В задаче 3. исследовать случай, когда радиальные размеры сталкивающихся сгустков различны.

8 Однооборотные явления

Перейдем к изучению случая, когда наведенные пучком поля затухают существенно быстрее периода обращения частиц в машине ². Поскольку зачастую полного затухания все же не происходит, для корректного выделения в ядре уравнения (6.4) соответствующих слагаемых нам нужна некоторая формальная процедура. Она может быть основана на использовании формулы суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn b(n) \exp(2\pi i l n). \quad (8.1)$$

Для определенности, проведем вычисления для синхротронных мод когерентных колебаний пучка. Тогда, подстановка выражения (8.1) в (6.4) приводит к следующему интегральному уравнению

$$\Omega_m \chi_m(\varphi) = \rho(\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' K(\varphi, \varphi') \chi_m(\varphi'), \quad (8.2)$$

ядро которого может быть представлено суммой двух слагаемых

$$K(\varphi, \varphi') = [K_{st}(\varphi, \varphi', \omega) + K_{mt}(\varphi, \varphi', \omega)], \quad (8.3)$$

где

$$K_{st}(\varphi, \varphi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{m,n} (n\omega_0 + \omega) J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi'), \quad (8.4)$$

²Если пучок состоит из нескольких сгустков, то время затухания должно быть существенно меньше периода следования сгустков

а

$$K_{mt} = \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \exp(2\pi iln) \Omega_{m,n}(n\omega_0 + \omega) J_{m_c}(n_1\varphi) J_{m_c}(n_1\varphi'). \quad (8.5)$$

Для выяснения физического смысла слагаемых K_{st} и K_{mt} заметим, что правая часть уравнения (8.2) является Фурье-амплитудой выражения

$$W = \sum_n g_{mn}(\omega + n\omega_0) \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} e^{in(\phi - \phi')} f(\Delta p', \phi', \omega).$$

Для упрощения вычислений примем, что длина устройства, с которым взаимодействует пучок, мала и потому функция $g_{mn}(\omega)$ может быть заменена на $g_m(\omega + n\omega_0)$. При этом согласно (8.1) слагаемому K_{mt} соответствуют часть W , равная

$$W_{mt} = \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \exp(2\pi iln) g_m(\omega + n\omega_0) \times \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} e^{in(\phi - \phi')} f(\Delta p', \phi', \omega).$$

Поскольку согласно принципу причинности $g_{mn}(\omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , слагаемые с $l > 0$ не дают вклада в W_{mt} . Вклады слагаемых с $l < 0$ определяются особенностями $g(\omega)$ в нижней полуплоскости. Принимая для простоты, что такой особенностью является простой полюс в $\omega = \Omega_k$

$$g_m(\omega) = \frac{\mathcal{G}_k}{\omega - \Omega_k}, \quad \Omega_k = \omega_k + i\lambda_k,$$

получим ($\nu = \omega/\omega_s$)

$$W_{mt} = -2\pi i \mathcal{G}_{\parallel} \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} e^{-i\nu(\phi-\phi')} f(\Delta p', \phi', \omega) \times \sum_{l=1}^{\infty} \exp \left[i\Omega_k \left(\frac{\phi - \phi'}{\omega_s} - lT_s \right) \right],$$

Замечая теперь, что $\phi = \theta - \omega_s t$, мы можем переписать последнее выражение в виде суммы вкладов полей, наведенных пучком на оборотах, предшествовавших данному

$$W_{mt} = \sum_{l=1}^{\infty} \int \frac{d\phi' d\Delta p'}{2\pi} W(\phi - \theta' + \omega_s[t - lT_s]) f(\Delta p', \phi', \omega),$$

$$W(\phi) = -2\pi i \mathcal{G}_{\parallel} e^{i\phi\Omega_k/\omega_s}$$

Отсюда следует, что слагаемые W_{mt} и, соответственно, K_{mt} описывают запоминание наведенных полей внешней системой. По существующей терминологии, вызываемые ими эффекты называются многооборотными. Если $\text{Im}\Omega_k T_s \gg 1$, то в первом приближении вкладом монооборотных эффектов можно пренебречь. При этом уравнение (6.4) принимает вид

$$\Omega_m \chi_m(\varphi) = \rho(\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' K_{st}(\varphi, \varphi', \omega) \chi_m(\varphi'), \quad (8.6)$$

Такое уравнение описывает однооборотные эффекты, т.е. эффекты связанные с наведенными полями, которые полностью исчезают за период обращения частиц в накопителе.

9 Эффект быстрого затухания

При изучении когерентных колебаний в накопителе ВЭПП-2 было замечено, что декременты затухания дипольных вертикальных

когерентных колебаний превышают радиационные. При этом добавки к декрементам увеличивались пропорционально току пучка и обратно пропорционально энергии частиц. Для короткого сгустка эта добавка не зависела от длины пучка. Это явление получило название эффекта быстрого затухания когерентных колебаний. Оно было объяснено взаимодействием пучка с имевшимися в камере ВЭПП-2 согласованными пластинами.

Напомним, что если длина пучка l_b превышает характерный поперечный размер вакуумной камеры l_{\perp} , то для частот $\omega \leq c/l_{\perp}$, вносящих основной вклад в когерентное взаимодействие, вакуумная камера представляет собой запертый волновод. При идеальной проводимости стенок камеры наведенные поля являются стационарными в системе покоя пучка, что может вызвать лишь сдвиг частот когерентных колебаний. Если в камеру помещена пластина длины l (рис.16), то отрезок камеры, содержащий эту пластину, представляет собой уже двусвязный волновод. В последнем случае становятся возможными моды электромагнитного поля, у которых электрическое и магнитное поля перпендикулярны, электрическое поле направлено от пластины к стенкам камеры, а линии магнитного поля замыкаются вокруг пластины. Согласно уравнениям Максвелла спектр таких ТЕМ-колебаний непрерывен $\omega = kc$ в области $|k|l_{\perp} < 1$. Если пластина нагружена на волновое сопротивление Z_0 , то реакция когерентных колебаний на излучение ими ТЕМ-волн может проявляться в усилении затухания этих колебаний.

Для описания этого явления заметим, что в бесконечном двусвязном волноводе векторный потенциал поля ТЕМ-волны задается выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_{\perp}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} q_k(t) e^{iks}, \quad (9.1)$$

где $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_{\perp})$ описывает поперечное распределение наведенного по-

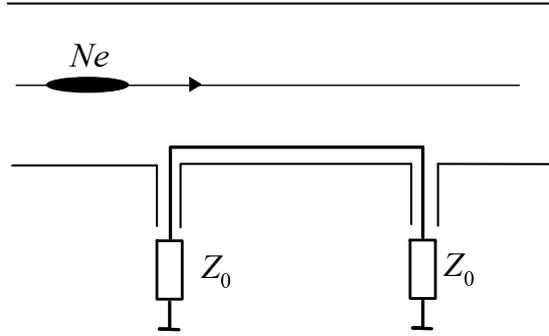


Рис. 16: К задаче о взаимодействии сгустка с согласованной пластиной. Длина пластины l , длина сгустка l_b , характеристическое сопротивление пластины Z_0

ля, а $q_k(t)$ его колебания. Величина \mathbf{A}_0 связана с электростатическим полем пластины, создаваемым разностью потенциалов U_0 между пластиной и вакуумной камерой,

$$\mathbf{A}_0 = \sqrt{cZ_0} \frac{\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp)}{U_0}, \quad \Delta_\perp \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp) = 0.$$

В действительности пучок взаимодействует с отрезком двусвязного волновода. Для длинноволновых колебаний $\omega l_\perp \ll c$ мы можем пользоваться уравнением (9.1), если заменим функцию \mathbf{A}_0 реальным распределением поля, экспоненциально спадающим при удалении от участка, содержащего пластину. При этом вместо (9.1) пишем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= c\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} q_k(t) e^{iks}, \\ \mathbf{A}_0 &= \sqrt{cZ_0} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{U_0}, \quad \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Согласно этим выражениям вблизи краев пластины поле ТЕМ-волны имеет продольную компоненту. Поэтому возможно ее возбуждение продольным движением частиц. Предполагая, что функция \mathbf{A}_0 нормирована условием

$$\int d^3r |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 e^{i(k-k')s} = 8\pi^2 \delta(k-k'),$$

из уравнений Максвелла получим следующее уравнение для осцилляторов поля

$$\ddot{q}_k + c^2 k^2 q_k = j_m(t), \quad (9.3)$$

$$j_m(t) = e \int d\Gamma \mathbf{v} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \exp(-iks) f_m \exp(i\mathbf{m}\psi - i\omega t).$$

Записывая

$$q_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{kn} e^{-i(\omega+n\omega_s)t},$$

получим

$$q_{kn} = \frac{e \int d\Gamma \mathbf{f}_{\mathbf{m}\omega} V_{mn}^*(k)}{k^2 c^2 - (\omega + n\omega_s + i0)^2},$$

$$V_{mn}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} \frac{d\theta}{2\pi} \mathbf{v} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) e^{iks} \exp(i[kR_0 - n]\theta - im_\alpha \psi_\alpha). \quad (9.4)$$

Поскольку поле E потенциально

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{U_0}{\sqrt{cZ_0}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (9.5)$$

пишем

$$V_{mn} = -\int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\mathbf{v} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \right) \exp(i[kR_0 - n]\theta - im_\alpha \psi_\alpha). \quad (9.6)$$

Или учитывая, что

$$\mathbf{v} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{dU}{dt} = \left(v \frac{\partial U}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial U}{\partial \psi} \right), \quad \frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0$$

и интегрируя в (9.6) по частям, получим

$$V_{mn}(k) = i(kv - n\omega_s - \mathbf{m}\boldsymbol{\omega})(Ue^{iks})_{\mathbf{m},n}, \quad (9.7)$$

где

$$(Ue^{iks})_{\mathbf{m},n} = \int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} e^{-im_\alpha\psi_\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} U(\mathbf{r}_\perp, \theta) \exp(i[kR_0 - n]\theta). \quad (9.8)$$

При вычислении азимутальных гармоник функции $U \exp(iks)$ для длинноволновых колебаний поля ($|k|l_\perp \ll 1$) можно заменить $U(\theta)$ ступенчатой функцией ($\theta_0 = l/R_0$)

$$U(\mathbf{r}_\perp, \theta) = U(\mathbf{r}_\perp) \begin{cases} 1, & |\theta| \leq l/(2R_0), \\ 0, & |\theta| > l/(2R_0). \end{cases}$$

Тогда $(Ue^{iks})_{mn} = b_{kn}U_m(\mathbf{I})$, где

$$b_{kn} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta[kR_0 - n]} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\theta_0[kr_0 - n])}{kR_0 - n}.$$

Полученные выражения позволяют вычислить средние по периоду обращения гармоники Лагранжиана взаимодействия частицы с полем ТЕМ-волны

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\mathbf{m},\omega} &= e^2 U_m(\mathbf{I}_\perp) \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{(kv - n\omega_s - m_\alpha\omega_\alpha)^2 b_{kn}^2}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2} \\ &\times \int d\Gamma U_m^*(\mathbf{I}'_\perp) f_{m,\omega}(\mathbf{I}') e^{in(\phi - \phi')}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Как видно из этого выражения, в задаче о взаимодействии протяженного пучка с согласованной пластиной зависимость ядра основного уравнения от \mathbf{I}_\perp и ϕ факторизуется. По этой причине для несгруппированного пучка решения уравнения (5.22) записываются в виде

$$f_{mn} = C_{mn} \frac{U_m(\mathbf{I}_\perp) \mathbf{m}_\perp \partial F_0 / \partial \mathbf{I}_\perp}{\omega - \omega_{mn}},$$

а Ω_{mn} определяется выражением

$$\Omega_{mn} = Ne^2 \left\langle \mathbf{m}_\perp \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{I}_\perp} \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{(kv - \omega_{mn})^2 b_{kn}^2}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2} \quad (9.10)$$

Входящий в это выражение интеграл по k может быть вычислен точно. Используя соотношение

$$b_{kn}^2 = 2 \left(\frac{\theta_0}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 dz (1-z) \cos(2\theta_0 z [kR_0 - n]),$$

перепишем этот интеграл в виде

$$I_n = \left(\frac{\theta_0}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 dz (1-z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{(kv - \omega_{mn})^2}{k^2 c^2 - (\omega_{mn} + i0)^2} \times [\exp(2i\theta_0 z [kR_0 - n]) + c.c.].$$

Теперь, интеграл по k определяется вычетами в простых полюсах $kc = \pm(\omega_{mn} + i0)$. При этом полюс $kc = \omega_{mn}$ определяет вклад излучения вперед, а полюс $kc = -\omega_{mn}$ — излучения назад. Оставшееся интегрирование по z также выполняется элементарно. В результате получается следующее довольно громоздкое выраже-

ние

$$I_n = - \left(\frac{\theta_0}{\pi} \right)^2 \frac{\omega_s(m_z \nu_z + n)}{4c} \left\{ \frac{(1-\beta)^2}{2\nu_- \theta_0} \left(1 - \frac{\sin 2\theta_0 \nu_-}{2\nu_- \theta_0} \right) + \frac{(1+\beta)^2}{2\nu_+ \theta_0} \left(1 - \frac{\sin 2\theta_0 \nu_+}{2\nu_+ \theta_0} \right) - i \left[(1-\beta)^2 \left(\frac{\sin \theta_0 \nu_-}{\nu_- \theta_0} \right)^2 + (1+\beta)^2 \left(\frac{\sin \theta_0 \nu_+}{\nu_+ \theta_0} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\nu_{\pm} = \beta(m_z \nu_z + n) \pm n, \quad \beta = v/c.$$

Подставив это выражение в (9.10) и учитывая, что в приближении сглаженной фокусировки $I_z = p_s \nu_z a_z^2 / 2R_0$, перепишем $\Omega_{m,n}$ в виде

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n} &= \frac{Nr_0 c}{4\gamma \nu_z} \left\langle m_z \frac{\partial}{\partial a_z^2} |U_{\mathbf{m}\perp}|^2 \right\rangle (m_z \nu_z + n) \left(\frac{\theta_0}{\pi} \right)^2 \\ &\times \left\{ \frac{(1-\beta)^2}{2\nu_- \theta_0} \left(1 - \frac{\sin 2\theta_0 \nu_-}{2\nu_- \theta_0} \right) + \frac{(1+\beta)^2}{2\nu_+ \theta_0} \left(1 - \frac{\sin 2\theta_0 \nu_+}{2\nu_+ \theta_0} \right) \right. \\ &\left. - i \left[(1-\beta)^2 \left(\frac{\sin \theta_0 \nu_-}{\nu_- \theta_0} \right)^2 + (1+\beta)^2 \left(\frac{\sin \theta_0 \nu_+}{\nu_+ \theta_0} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Из полученного выражения видно, что в для ультрарелятивистских частиц вклад излучения вперед в Ω_{mn} подавлен в $1/\gamma^2$ раз.

Для вычисления декрементов когерентных бетатронных колебаний сгруппированного пучка воспользуемся формулой (6.11):

$$\delta_{m,\alpha} = - \int_{-\infty}^{\infty} dn \operatorname{Im} \Omega_{m,n} \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} J_0(n_1 \varphi) w_{\alpha}(\varphi) \right|^2. \quad (9.12)$$

Поскольку поле над пластиной существует лишь в течение времени пролета сгустком пластины ($\Delta t \sim l/c$), взаимодействие колебаний с пластиной существенно однооборотно. По этой причине

суммирование по n в (9.12) заменено интегрированием. Для ультрарелятивистских частиц ($\gamma \gg 1$) подстановка в (9.12) Ω_{mn} из (9.11) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \delta_{m,\alpha} = & -\frac{Nr_0c}{2\gamma\nu_z} \left\langle m_z \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_z^2} \right\rangle \left(\frac{\theta_0}{\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_+ (m_z\nu_z + \nu_+) \\ & \times \left(\frac{\sin \theta_0 \nu_+}{\nu_+ \theta_0} \right)^2 \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} J_0(n_1\varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Если величина φ_b определяет длину пучка ($l_b = 2R_0\varphi_b$), так что $\rho(\varphi)$ спадает после $\varphi \simeq \varphi_b$, то из выражения (9.13) видно, что основной вклад в интеграл по n дают гармоники интервала $|n|\varphi_b \leq 1$. Поэтому, если длина сгустка мала ($l_b \ll l$, $l_b d \ln \nu_z / dR_0 \ll 1$), то в основной области интегрирования ($|n|\theta_0 < 1$) мы можем заменить функцию $J_0(n_1\varphi)$ ее значением в нуле ($J_0 \simeq 1$). После этого интегрирование по ν_+ выполняется элементарно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_+ (m_z\nu_z + \nu_+) \left(\frac{\sin \theta_0 \nu_+}{\nu_+ \theta_0} \right)^2 = \frac{\pi m_z \nu_z}{\theta_0},$$

а подстановка этого выражения в (9.13) дает

$$\delta_{m,\alpha} = -\frac{Nr_0c}{2\gamma} \left\langle m_z^2 \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_z^2} \right\rangle \frac{l}{\Pi} \left| \int_0^{\infty} d\varphi \sqrt{\varphi \rho(\varphi)} w_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (9.14)$$

По порядку величины $w_\alpha \sim \sqrt{\varphi \rho}$. Тогда, учитывая что

$$\int_0^{\infty} d\varphi \varphi \rho(\varphi) = 1,$$

получаем следующую оценку декрементов быстрого затухания мод

$$\delta_{m,\alpha} = -\frac{Nr_0c}{2\gamma} \left\langle m_z^2 \frac{\partial |U_m|^2}{\partial a_z^2} \right\rangle \frac{l}{\Pi}. \quad (9.15)$$

Как упоминалось в §(5.2), в тех случаях, когда возбуждение наведенных полей поперечным током пучка пренебрежимо мало, взаимодействие (дипольных) когерентных колебаний с окружающими электродами может описываться в терминах поперечных импедансов связи. При этом согласно (5.48) и (5.26) имеем

$$g_{mn}(\omega_{mn}) = \frac{\omega_0}{2\Pi} Z_n^\perp(\omega_{mn}), \quad \omega_{mn} = \omega_0(m_z\nu_z + n), \quad (9.16)$$

а, например, уравнение (6.11) переписывается в виде ($m_z = \pm 1$)

$$\delta_m = m_z \frac{Ne^2\omega_0}{4\pi p\nu_z} \int_{-\infty}^{\infty} dn \operatorname{Im} \left[Z_n^\perp(\omega_{mn}) \right] h(n|w), \quad (9.17)$$

где

$$h(n|w) = \left| \int_0^\infty d\varphi \sqrt{\varphi\rho(\varphi)} J_0(n_1\varphi) w_\alpha(\varphi) \right|^2.$$

Поскольку

$$\operatorname{Im} Z_n^\perp(-\omega) = -\operatorname{Im} Z_n^\perp(\omega), \quad J_m(-x) = (-1)^m J_m(x),$$

а

$$n_1 = n + m_z\nu_z + \frac{d\nu_z}{d \ln \omega_0}$$

то для локализованных наведенных полей ($Z_n(\omega) = Z(\omega)$) из (9.17) получаем, что декремент колебаний обращается в нуль, если зануляются длина пучка φ_b , либо хроматизм машины $\zeta = \varphi_b d\nu_z/d \ln \omega_0$. Таким образом, в случае локализованного взаимодействия в декременте отсутствует слагаемое, описывающее эффект быстрого затухания. Причина этого понятна – эффект быстрого затухания обязан действию на пучок силы реакции излучения (вообще, радио или СВЧ волн) в окружающие электроды, а для этого пучок должен пройти с полем по крайней мере расстояние равное длине формирования излучения.

Для вакуумной камеры круглого сечения радиуса l_{\perp} поперечный и продольный импедансы связаны соотношением (5.50). Тогда ³

$$\delta_{m,\alpha} = m_z \frac{Ne^2 \omega_0 R_0^2}{4\pi p \nu_z l_{\perp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{\operatorname{Re}\{Z_n^{\parallel}(n + m_z \nu_z)\}}{n + m_z \nu_z} h(n|w). \quad (9.18)$$

Если длина сгустка мала, то снова полагаем в (9.18) $J_0 \simeq 1$ и $w_{\alpha} \sim \sqrt{\varphi \rho}$. Тогда требование $\delta_{m,\alpha} > 0$ позволяет записать условие устойчивости дипольных вертикальных бетатронных колебаний в следующем виде

$$\int_0^{\infty} dn \left[\frac{\operatorname{Re}\{Z_n^{\parallel}(n + \nu_z)\}}{n + \nu_z} - \frac{\operatorname{Re}\{Z_n^{\parallel}(n - \nu_z)\}}{n - \nu_z} \right] > 0. \quad (9.19)$$

Из этих соотношений видно, что при возбуждении наведенных полей продольным движением условие появления быстрого затухания требует, чтобы вклады в δ_m разностных резонансов превышали вклады суммовых.

9.1 Задачи к Лекции 9

1. Вычислить линейные плотности заряда, соответствующие распределению амплитуд синхротронных колебаний $\rho(\varphi) = \delta(\varphi^2 - \varphi_0^2)$, а также распределению

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{\varphi_0^2} \begin{cases} 1, & \varphi \leq \varphi_0 \\ 0, & \varphi > \varphi_0. \end{cases}$$

2. Приняв

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{\varphi_0^2} \begin{cases} 1, & \varphi \leq \varphi_0 \\ 0, & \varphi > \varphi_0. \end{cases}$$

³В последнем уравнении отношение $Z_n(\omega)/\omega \propto G_{mn}(\omega)$ является несингулярной функцией ω при $\omega = 0$.

вычислить декременты синхротронных колебаний короткого ($R_0\varphi_0 \ll l$), ультрарелятивистского сгустка, взаимодействующего с согласованной пластиной.

10 Head-Tail эффект

Другой важный класс однооборотных эффектов связан с взаимодействием частиц сгустка посредством наведенных ими полей и с возбуждением когерентных синхробетатронных колебаний сгустка ($m_c \neq 0$) (К. Пеллегрини и М. Сэндс 1969 [10, 11]). Для того, чтобы пояснить характер протекающих в пучке явлений обсудим результат взаимодействия посредством наведенных полей каких-либо двух частиц. Положим, что в начальный момент частицы 1 и 2 занимают крайние продольные положения на своих фазовых траекториях синхротронных колебаний, а наведенные ими поля затухают намного быстрее периода обращения в машине. Если частица 1 находится впереди, то из-за запаздывания наведенных полей она возмущает колебания частицы 2, тогда как частица 2 не возмущает колебаний частицы 1. Сила, возмущающая (бетатронные) колебания частицы 2, пропорциональна (вертикальному) отклонению частицы 1, а коэффициент пропорциональности выражается через поперечный импеданс связи [$F_{1,2} \propto z_1 w(s_1 - s_2)$ см. также Рис. 17]. Через половину периода синхротронных колебаний частицы 1 и 2 займут в сгустке такие положения, когда частица 2 окажется впереди частицы 1 и соответственно начнет раскачивать ее колебания с силой $F_{2,1} \propto z_2 w(s_2 - s_1)$. Таким образом, из-за запаздывания полей колебания головных частиц сгустка будут раскачивать колебания частиц, расположенных в хвосте сгустка, а синхротронные колебания частиц замыкают обратную связь колебаний отдельных частей сгустка. При определенных условиях это может приводить к неустойчивости когерентных колебаний пуч-

ка. По предложению авторов (К. Пеллегрини и М. Сэндс) такая неустойчивость получила название head-tail эффекта, или head-tail неустойчивости.

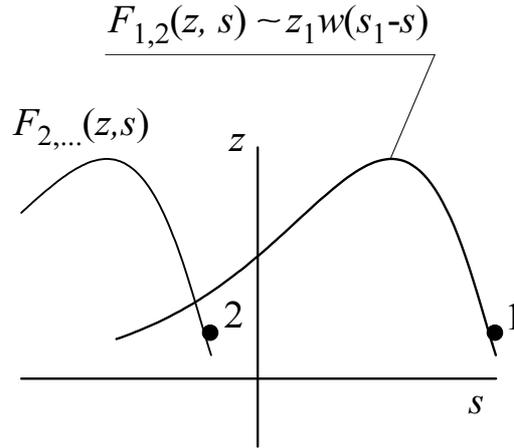


Рис. 17: К задаче о взаимодействии частиц сгустка посредством наведенных в окружающих электродах полей.

В этой лекции мы обсудим задачи, в которых пороговые токи неустойчивостей (либо просто токи сгустков) таковы, что величины когерентных сдвигов частот мод ($\Delta\omega_m = \omega - m_z\omega_z - m_c\omega_c$) малы по сравнению с частотой синхротронных колебаний. При этом синхробетатронные колебания сгустка хорошо разделены по m_c , а их амплитуды и спектры собственных частот определяются уравнением (8.6). Для упрощения вычислений, а также для иллюстрации методов вычисления собственных частот и декрементов колебаний, воспользуемся моделью, в которой бетатронные колебания дипольны, а величины когерентных сдвигов частоты опре-

деляются выражениями

$$\Omega_{mn} = \frac{i\Omega_m}{\pi[n + m_z\nu_z + i0]}. \quad (10.1)$$

При этом уравнение (8.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m\chi_m &= \rho(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{\pi} \frac{i\Omega_m}{n - m_z\zeta + i0} J_{m_c}(n\varphi) \\ &\times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') \chi_m(\varphi'). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Здесь символ *calP* означает вычисление интеграла в смысле главного значения, $\zeta = d\nu_z/d\ln\omega_0$ – хроматизм кольца, а параметр Ω_m характеризует силу взаимодействия. Эта величина может быть выражена через импеданс связи пучка с электродами. Действительно, согласно уравнению (5.47) величины когерентного сдвига частоты несгруппированного, монохроматического пучка и поперечного импеданса соотносятся согласно формуле

$$\Omega_{m,n}(\omega) = m_z \frac{Ne^2\omega_s}{4\pi p\nu_z} Z^\perp(\omega),$$

или с использованием, например, (5.50)

$$\Omega_{m,n}(\omega) = m_z \frac{Ne^2\omega_s}{2\pi p\nu} \frac{R_0^2}{2\nu_z l_\perp^2} \left[\frac{-iZ^\parallel(\omega)}{(\omega/\omega_s)} \right].$$

Сравнение этого соотношения и уравнения (10.1) позволяет написать

$$\Omega_m = -m_z \frac{Ne^2\omega_s}{2p\nu} \frac{R_0^2}{2\nu_z l_\perp^2} Z^\parallel(\omega). \quad (10.3)$$

Отсюда следует, что Ω_m является действительным числом, если импеданс связи чисто резистивный ($Z^\parallel(\omega) = Z_0$). Поскольку для

пассивных систем $Z_0 > 0$, из (10.3) следует, что знак Ω_m противоположен знаку m_z ($m_z \Omega_m < 0$).

Если величина хроматизма не велика так, что $\zeta \varphi_b \ll |m_c|$ ($\varphi_b = l_b/2R_0$), а $|m_c| \geq 1$, то уравнение (10.2) можно существенно упростить. Действительно, с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\dots)}{x+i0} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\dots)}{x} - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx(\dots)\delta(x)$$

перепишем (10.2) в виде

$$\begin{aligned} \chi_m &= \frac{i\Omega_m \rho(\varphi)}{\pi \Delta\omega_m} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_c}(n\varphi)}{n-\zeta} \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') \chi_m(\varphi') \\ &\quad - \frac{\Omega_m \rho(\varphi)}{\Delta\omega_m} J_{m_c}(\zeta\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(\zeta\varphi') \chi(\varphi'). \end{aligned} \quad (10.4)$$

В области $\varphi_b |\zeta| \ll |m_c|$ второе слагаемое в правой части этого уравнения пропорционально $(\zeta \varphi_b)^{|m_c|} \ll 1$. Для вычисления спектра колебаний в первом приближении по $\varphi_b |\zeta|$ вкладом этого слагаемого можно пренебречь. Разложение же первого слагаемого в ряд по степеням $\varphi_b \zeta$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m \chi_m &= \rho(\varphi) \frac{i\Omega_m m_z \zeta}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_c}(n\varphi)}{n^2} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') \chi_m(\varphi'), \end{aligned} \quad (10.5)$$

или, после определения $\Delta\omega_m = 2\Lambda_m i\Omega_m m_z \varphi_b \zeta / \pi$ и $w_m = \chi_m \sqrt{\varphi/\rho}$,

$$\begin{aligned} \Lambda_m w_m &= \int_0^{\infty} d\varphi' K(\varphi, \varphi') w_m(\varphi'), \\ K(\varphi, \varphi') &= \sqrt{\varphi \varphi' \rho(\varphi) \rho(\varphi')} \int_0^{\infty} \frac{dn}{\varphi_b n^2} J_{m_c}(n\varphi) J_{m_c}(n\varphi'). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Теперь заметим, что ядро полученного уравнения помимо симметрии по φ и φ' является положительно определенным в том смысле, что

$$J(w) = \int_0^\infty d\varphi d\varphi' w(\varphi) K(\varphi, \varphi') w(\varphi') \geq 0.$$

Все собственные числа такого уравнения положительны и минимизируют функционал $J(w)$ таким образом, что если Λ_α и w_α являются собственным числом и соответствующей ему собственной функцией, то

$$\Lambda_\alpha = \min\{J(w)\} = \lim_{w \rightarrow w_\alpha} J(w),$$

$$\int_0^\infty d\varphi w^2(\varphi) = 1. \quad (10.7)$$

Это утверждение позволяет проводить вычисление собственных функций и частот не решая непосредственно уравнение (10.6). В качестве иллюстрации проведем расчет декрементов основного состояния для случая, когда

$$\rho(\varphi) = 2 \frac{\exp[-\varphi^2/\varphi_b^2]}{\varphi_b^2} \quad (10.8)$$

и, соответственно,

$$K(u, u') = 2 \exp\left(-\frac{u^2 + u'^2}{2}\right) \sqrt{uu'} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} J_{m_c}(xu) J_{m_c}(xu').$$

Согласно общим теоремам анализа собственная функция основного состояния не должна иметь корней везде исключая точку $\varphi = 0$. С учетом этого обстоятельства и из явного выражения для $K(u, u')$ мы выберем пробную функцию w в виде ($m = |m_c|$)

$$w_m = A_m u^{m+1/2} e^{-\beta u^2/2}, \quad A_m^2 = \frac{2\beta^{m+1}}{m!}. \quad (10.9)$$

Параметр β подбирается так, чтобы минимизировать интеграл $J(w)$. Вычислив $J(w)$ при заданном β , получим

$$\begin{aligned}
J &= 2A_m^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \left(\int_0^\infty du u^{m+1} J_m(xu) \exp \left[-\frac{u^2}{2}(1+\beta) \right] \right)^2 \\
&= \frac{2A_m^2}{(1+\beta)^{2m+2}} \int_0^\infty dx x^{2m-2} \exp \left(-\frac{x^2}{1+\beta} \right) \\
&= \frac{2\beta^{m+1}}{(1+\beta)^{m+5/2}} \frac{\Gamma(m-1/2)}{m!}. \tag{10.10}
\end{aligned}$$

Функция $J(\beta)$ достигает минимального значения при $\beta = 2(m+1)/3$. Подстановка этого значения в (10.9) и (10.10) приводит к выражениям

$$w_m = A_m u^{m+1/2} e^{-(m+1)u^2/3}, \tag{10.11}$$

$$\Lambda_m \geq [\Lambda_m]_{\min}$$

$$[\Lambda_m]_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(m-1/2)}{m!} \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+5/2)^{m+5/2}}. \tag{10.12}$$

Верхняя граница Λ_m определяется суммой собственных чисел уравнения (10.6):

$$\Lambda_\Sigma = \int_0^\infty du u^2 e^{-u^2/2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} J_m^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{4m^2-1}. \tag{10.13}$$

Таким образом, декременты ($\delta = -\text{Im}\omega$) синхробетатронных мод короткого сгустка оцениваются выражениями:

$$\begin{aligned}
\delta_m &= -\frac{2\varphi_b \zeta}{\pi} \Lambda_m \text{Re}(m_z \Omega_m), \quad |m_c| \neq 0, \\
[\Lambda_m]_{\min} &\leq \Lambda_m \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{4m^2-1}. \tag{10.14}
\end{aligned}$$

Подставив в последнее выражение Ω_m из (10.3), получим

$$\delta_m = \Lambda_m \frac{Ne^2 \omega_s Z_0 \beta_z l_b}{2\pi p v} \frac{d\nu_z}{2l_\perp^2 d \ln \omega_0}, \quad \beta_z \simeq \frac{R_0}{\nu_z}. \quad (10.15)$$

Замена R_0/ν_z на β_z проведена не случайно. Такой результат сохраняется и при более общем рассмотрении. Зависимость декремента head-tail неустойчивости от β -функции в месте расположения электродов описывает тот факт, что эта неустойчивость связана с возбуждением полей продольным движением сгустка.

Величина δ_m в (10.14) будет положительна и, следовательно, синхробетатронные моды будут устойчивы, если $\text{Re}(m_z \Omega_m) \zeta < 0$.

Для вычисления декремента бетатронной моды удобно воспользоваться следующими соображениями. Поскольку

$$\sum_{m_c=-\infty}^{\infty} J_{m_c}^2(x) = 1,$$

легко видеть, что сумма декрементов бетатронной моды и всех синхробетатронных мод уравнения (10.2) равна нулю:

$$\sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \delta_{m_c} = \Omega_m \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n - m_z \zeta} = 0. \quad (10.16)$$

Поэтому пишем

$$\delta_{m_z, 0} = - \sum_{m_c \neq 0} \delta_{m_z, m_c}. \quad (10.17)$$

10.1 Задачи к Лекции 10

1. Приняв $\rho(\varphi) = \delta(\varphi^2 - \varphi_0^2)$ вычислить декременты вертикальных синхробетатронных мод ($\omega \simeq m_z \omega_z + m_c \omega_c$) короткого, ультрарелятивистского сгустка, взаимодействующего с согласованной пластиной. Длина пластины l , $R_0 \varphi_0 \ll l$, разбросом частот бетатронных и синхротронных колебаний пренебречь.

2. Для описанного модельного импеданса найти условия устойчивости когерентных колебаний сгустка составленного из двух частиц заряда $Ne/2$ каждая и совершающих противофазные синхротронные колебания с амплитудой φ_0 .

3. Воспользовавшись свойством экстремальности собственных значений интегральных уравнений с положительно определенным и симметричным ядром и приняв

$$\rho(\varphi) = 2 \frac{\exp(-\varphi^2/\varphi_0^2)}{\varphi_0^2}$$

вычислить декременты синхротронных колебаний основного состояния короткого ($R_0\varphi_0 \ll l$), ультрарелятивистского сгустка, взаимодействующего с согласованной пластиной.

11 Связь синхробетатронных мод

1. Еще один вид неустойчивостей когерентных колебаний сгустка, носящих глобальный характер, может вызываться связью синхробетатронных мод пучка (Р. Кохаупт 1980 [13]). Ясно, что такие неустойчивости будут проявляться лишь при достаточно больших токах, когда величины когерентных сдвигов частот отдельных синхробетатронных мод сравниваются, или превышают частоту синхротронных колебаний ⁴. Как упоминалось в §5, в таких условиях мы не можем пренебречь в уравнении (5.18) связью мод с отличающимися m_c . В результате, спектры когерентных колебаний пучка определяются следующей бесконечной системой связанных

⁴Такая связь может также вызываться разбросами частот бетатронных и синхротронных колебаний превышающими, либо сравнимыми с ω_c

интегральных уравнений

$$(\Delta\omega_m - m_c\omega_c)\chi_m = \rho(\varphi_c) \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_m(n) J_{m_c}(n_1\varphi) \\ \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m'_c}(n_1\varphi') \chi_{m'}(\varphi') \quad (11.1)$$

Поскольку такая система уравнений не может быть решена в общем виде, ниже мы рассмотрим модель, в которой

$$\rho(\varphi) = \delta(\varphi_0^2 - \varphi^2), \quad \Omega_m(n) = \frac{i\Omega_m}{\pi(n + i\Delta)}, \quad (11.2)$$

а хроматичность фокусировки равна нулю ($dv_z/d\omega_s = 0$).

Поскольку в рассматриваемой модели

$$\chi_m(\varphi) = C_m \delta(\varphi_0^2 - \varphi^2), \quad (11.3)$$

интегральные уравнения (11.1) заменяются бесконечной системой алгебраических уравнений для амплитуд C_m

$$(\Delta\omega_m - m_c\omega_c)C_m = \frac{i\Omega_m}{\pi} \sum_{m'_c=-\infty}^{\infty} C_{m'} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n + i\Delta} J_{m_c}(n\varphi_0) J_{m'_c}(n\varphi_0), \quad (11.4)$$

Вводя обозначения

$$x = \frac{\Delta\omega_m}{\omega_c}, \quad w = \frac{\Omega_m}{\omega_c},$$

мы перепишем эту систему в виде

$$(x - m_c)C_m = \frac{iw}{\pi} \sum_{m'_c=-\infty}^{\infty} C_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n + i\Delta} J_{m_c}(n) J_{m'_c}(n). \quad (11.5)$$

11.1 Связь соседних мод

Хотя дисперсионное уравнение системы (11.5) может быть найдено точно, полезно начать изучение особенностей решений этой системы в области $|w| < 1$. Мы ожидаем, что неустойчивость колебаний связана с сближением частот синхробетатронных мод. В рассматриваемой модели, в области $0 \leq w \leq 1$ это может происходить из-за приближения частоты бетатронной моды ($\omega \approx \omega_z + \Omega_m$) к частоте первой синхробетатронной моды ($\omega \approx \omega_z + \omega_c$). Предполагая, что это сближение может быть учтено по теории возмущений, перепишем систему (11.5), оставив в ней лишь те слагаемые, которые описывают связь этих мод

$$\begin{aligned} xC_0 &= \frac{iw}{\pi} \left[C_0 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0^2(n)}{n+i\Delta} + C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0(n)J_1(n)}{n+i\Delta} \right], \\ (x-1)C_1 &= \frac{iw}{\pi} \left[C_0 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0(n)J_1(n)}{n+i\Delta} + C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_1^2(n)}{n+i\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Учитывая теперь, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{n+i\Delta} = \mathcal{P} \frac{1}{n} - i\pi\delta(n),$$

а также, что $J_0(n)$ является четной, а $J_1(n)$ – нечетной функцией, мы можем переписать уравнения (11.6) в виде

$$\begin{aligned} (x-w)C_0 &= i \frac{4w}{\pi^2} C_1, \\ (x-1)C_1 &= i \frac{4w}{\pi^2} C_0. \end{aligned} \quad (11.7)$$

В последние уравнения подставлено численное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n} J_0(n)J_1(n) = \frac{4}{\pi}.$$

Согласно уравнениям (11.7), частоты связанных мод определяются уравнением

$$(x - w)(x - 1) = -\frac{16w^2}{\pi^4}, \quad (11.8)$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{1 + w}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}}. \quad (11.9)$$

Обе моды устойчивы при выполнении условия

$$(1 - w)^2 - \frac{64w^2}{\pi^4} \geq 0. \quad (11.10)$$

Знаку равенства соответствует порог неустойчивости. Можно видеть, что полученное условие устойчивости колебаний вообще не зависит от знака Ω_m . Если $\Omega_m < 0$, то неустойчивыми оказываются бетатронная и (-1)-я синхробетатронная моды. Поскольку факт появления неустойчивых мод не зависит от знака w , пороговое соотношение можно записать в виде

$$|w| \leq w_{th}, \quad w_{th} = \frac{1}{1 + 8/\pi^2} \approx 0.552. \quad (11.11)$$

Выше этого порога частоты связанных мод совпадают (см. на Рис.18), а одна из мод колебаний становится неустойчивой.

Отметим, что хотя неустойчивость из-за связи синхробетатронных мод является однооборотной и обусловлена быстрозатухающими наведенными полями, эта неустойчивость относится к неустойчивостям динамического типа. Поэтому условие устойчивости ограничивает допустимую величину когерентного сдвига частоты колебаний, а инкремент неустойчивой моды вблизи порога неустойчивости увеличивается пропорционально $\sqrt{|w| - w_{th}}$.

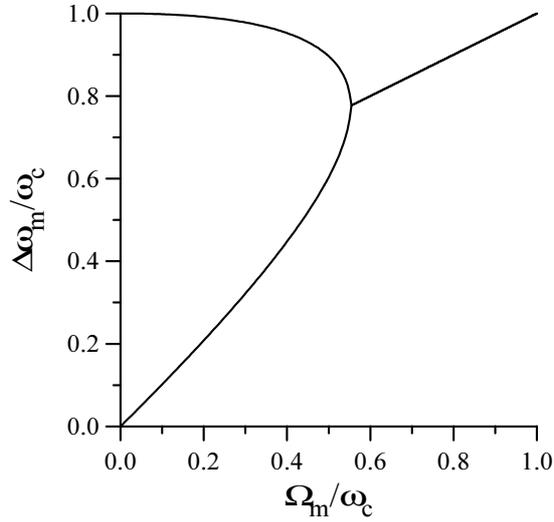


Рис. 18: Зависимости когерентных сдвигов частоты бетатронной и первых синхробетатронных мод от тока пучка (Ω_m)

11.2 Влияние затухания мод

Если Δ_1 и Δ_0 сдвиги частот связанных мод, то неустойчивы моды, для которых выполняется "условие суммового резонанса"

$$\omega_c \approx \Delta_1 + \Delta_0.$$

По этой причине для демпфирования неустойчивости необходимо демпфирование обеих связанных мод. Пусть, например, λ_0 декремент бетатронной, а λ_1 – синхробетатронной моды. Тогда уравнение (11.8) принимает вид

$$(x - w + i\lambda_0)(x - 1 + i\lambda_1) = -\frac{16w^2}{\pi^4}. \quad (11.12)$$

Такое уравнение имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{1+w-i\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-w-i\Lambda_-)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}}, \quad (11.13)$$

где $\Lambda_{\pm} = \lambda_1 \pm \lambda_0$. Соответственно, декременты колебаний определяются выражениями

$$-\operatorname{Im}x = \frac{\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}} - X \right]}, \quad (11.14)$$

$$X = \frac{(1-w)^2 - \Lambda_-^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}.$$

Как видно из этих выражений, наиболее простым является случай, когда декременты бетатронной и синхробетатронной мод равны ($\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$). При этом вместо (11.13) пишем

$$x_{1,2} = -i\lambda + \frac{1+w}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}},$$

а пороговый ток определяется равенством

$$\lambda^2 = \frac{(1-w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}.$$

При произвольных величинах λ_0 и λ_1 , но положительном значении величины Λ_+ , оба декремента положительны при выполнении условия

$$\frac{\Lambda_+}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}} - X \right]}.$$

Возведя обе части этого неравенства в квадрат и проводя несложные преобразования

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{X}{2} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}}, \\ \left(\frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{X}{2}\right)^2 - \frac{X^2}{4} &\geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{16}, \\ \Lambda_+^2 \left(\frac{\Lambda_+^2}{4} + X\right) &\geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}, \\ \Lambda_+^2 \left(\frac{(1-w)^2}{4} + \lambda_0\lambda_1 - \frac{16w^2}{\pi^4}\right) &\geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4},\end{aligned}$$

получим

$$(1-w)^2 \frac{\lambda_0\lambda_1}{\Lambda_+^2} + \lambda_0\lambda_1 - \frac{16w^2}{\pi^4} \geq 0. \quad (11.15)$$

Если один из декрементов равен нулю ($\lambda_0\lambda_1 = 0$), это условие всегда нарушено. Поэтому, как уже говорилось, для стабилизации неустойчивости связанных мод необходимо демпфирование обеих мод. При выполнении условия (11.15) бетатронная и первая синхробетатронная моды затухают. Это, однако, только отодвигает порог неустойчивости, который теперь будет определяться присоединением к моде второй синхробетатронной моды. Повышение порога устойчивости новой конфигурации, в свою очередь, потребует демпфирования этой моды.

11.3 Точное решение для монохроматического сгустка

Возвращаясь к решению полной системы уравнений (11.5) заметим, что если воспользоваться соотношениями

$$J_m(0) = \delta_{m,0}, \quad J_m(-n) = (-1)^m J_m(n),$$

$$J_{-m}(n) = (-1)^m J_m(n)$$

и

$$\frac{\pi}{2}(m^2 - m'^2) \int_0^\infty \frac{dn}{n} J_m(n) J_{m'}(n) = \sin \left[\frac{\pi}{2}(m - m') \right],$$

то этим уравнениям можно придать следующий вид

$$(x - w)C_0 = iW \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}^-}{(2k+1)^2}, \quad (11.16)$$

$$C_{2k+1}^- = iW \frac{2x}{x^2 - (2k+1)^2} \left[\frac{C_0}{(2k+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_{2p}^+}{(2k+1)^2 - 4p^2} \right], \quad (11.17)$$

$$C_{2p}^+ = iW \frac{2x}{x^2 - 4p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}^-}{(2k+1)^2 - 4p^2}. \quad (11.18)$$

Здесь $W = (4w/\pi^2)$ а

$$C_{2k}^+ = C_{2k} + C_{-2k}, \quad C_{2k+1}^- = C_{2k+1} - C_{-(2k+1)}.$$

Полученная система уравнений может быть решена точно (например, [14]) в том смысле, что она позволяет найти собственные векторы и дисперсионное уравнение задачи. Действительно, подставляя (11.18) в (11.17), перепишем это уравнение в виде

$$C_{2k+1}^- = iW \frac{2x}{x^2 - (2k+1)^2} \left[\frac{C_0}{(2k+1)^2} + \sum_{k'=0}^{\infty} C_{2k'+1}^- \right. \\ \left. \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2iWx}{[(2k+1)^2 - 4p^2][x^2 - 4p^2][(2k'^2 - 4p^2)]} \right]. \quad (11.19)$$

Учитывая, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - 4p^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \left[\cot \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{2}{\pi\alpha} \right],$$

выполним суммирование по p :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{[(2k+1)^2 - 4p^2][x^2 - 4p^2][(2k+1)^2 - 4p^2]} \\ &= -\frac{1}{2x^2(2k+1)^2(2k'^2)} + \frac{\pi}{4x} \frac{\cot(\pi x/2)}{[x^2 - (2k+1)^2][x^2 - (2k'^2)]}. \end{aligned}$$

Используя это выражение, вместо (11.19) получаем

$$\begin{aligned} C_{2k+1}^- &= -\frac{2W^2}{(2k+1)^2[x^2 - (2k+1)^2]} \frac{w}{x-w} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{C_{2k'+1}^-}{(2k'^2)} \\ &\quad - W^2 \frac{\pi x \cot(\pi x/2)}{[x^2 - (2k+1)^2]^2} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{C_{2k'+1}^-}{x^2 - (2k'^2)}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Решения последних уравнений очевидны:

$$C_{2k+1}^- = \frac{A(x)}{(2k+1)^2[x^2 - (2k+1)^2]} + \frac{B(x)}{[x^2 - (2k+1)^2]^2}. \quad (11.21)$$

Подстановка этой формулы в (11.20) приводит к дисперсионному уравнению задачи

$$1 - \frac{x}{w} = 2W^2 V_1(x) - \left(\frac{2W^4 \pi x \cot(\pi x/2) V_2^2(x)}{1 + W^2 \pi x \cot(\pi x/2) V_3(x)} \right). \quad (11.22)$$

Здесь

$$V_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4 [x^2 - (2k+1)^2]},$$

$$V_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [x^2 - (2k+1)^2]^2}, \quad (11.23)$$

$$V_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[x^2 - (2k+1)^2]^3}. \quad (11.24)$$

С использованием соотношения

$$\tan \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 - x^2},$$

функции V_1, V_2 and V_3 могут быть выражены через тригонометрические функции.

11.4 Влияние затухания Ландау

В заключение этого раздела обсудим влияние затухания Ландау на устойчивость связанных синхротронных мод (например, в [15]). В используемой здесь модели и для дипольных поперечных колебаний оно описывается уравнениями:

$$C_0[1 - wF(x)] = \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}M_{2k+1}}{(2k+1)^2},$$

$$C_{2k+1} = \frac{4iw}{\pi^2} \frac{C_0F(x)}{(2k+1)^2} + \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_{2p}M_{2p}}{(2k+1)^2 - 4p^2}, \quad (11.25)$$

$$C_{2p} = \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}M_{2k+1}}{(2k+1)^2 - 4p^2}, \quad (11.26)$$

$$C_{-2k-1} = -C_{2k+1}, \quad C_{-2p} = C_{2p},$$

где $M_p = F(x-p) + F(x+p)$, а

$$F(\omega) = - \int_0^\infty dI \frac{I \partial f_0 / \partial I}{\omega - \omega_z(I)}, \quad \text{Im} \omega > 0.$$

Эти уравнения, однако, не могут быть решены так же легко, как те, что описывали спектры колебаний в отсутствие разброса частот. По этой причине ниже мы перейдем к изучению решений приближенных уравнений, которые получаются обрывом системы (11.25) на некотором $m_c = M$. В последнем случае уравнения (11.25) заменяются следующими

$$\sum_{m'_c=0}^M Q_{m_c, m'_c}(x) C_{m'_c} = 0,$$

а дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\Phi(x) = \det(\mathbf{Q}(x)) = 0. \quad (11.27)$$

Условие устойчивости мод, описываемых этим уравнением может быть получено с помощью так называемого критерия Найквиста. Этот критерий основан на вычислении набега фазы $\Phi(x)$ при изменении x вдоль (и слегка выше) действительной оси. Если функция распределения пучка является несингулярной функцией I , то F и Φ – также несингулярные функции в верхней полуплоскости комплексной переменной x . По этой причине, а также поскольку

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1,$$

число корней дисперсионного уравнения в верхней полуплоскости x равно упомянутому набегу фазы Φ , деленному на 2π . Функция $\Phi(x)$ отображает действительную ось x в некоторую замкнутую

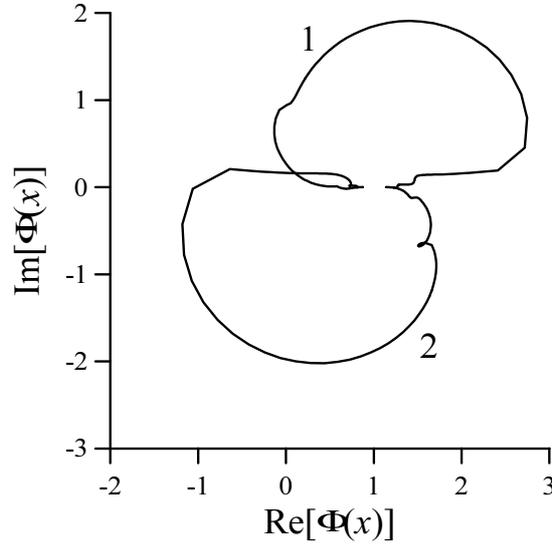


Рис. 19: Годограф $\Phi(x)$ для дисперсионного уравнения (11.27). 1: $\omega_c = 3 \times \delta\omega_z$, $\Omega_m = 1.7 \times \delta\omega_z$; 2: $\omega_c = 3 \times \delta\omega_z$, $\Omega_m = -1.7 \times \delta\omega_z$.

кривую в плоскости комплексной переменной Φ (так называемый годограф Φ). Критерий Найквиста утверждает, что моды устойчивы, если годограф Φ не охватывает начало координат.

Для упрощения вычислений мы рассмотрим один из наиболее простых случаев, когда ω_z линейно изменяется с I ($\omega_z = \omega_{z0} + \kappa I$, $\kappa = \partial\omega_z/\partial I_z$), а f_0 является показательной функцией ($f_0 = \exp(-I/I_0)/I_0$). При этом

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^\infty du \frac{ue^{-u}}{x - zu + i\Delta}, \quad z = \frac{\delta\omega_z}{\omega_c}, \quad \delta\omega_z = \kappa I_0, \\
 &= ve^{-v}[\text{Ei}(v) - i\pi\theta(v)] - 1, \quad v = x/z, \quad (11.28)
 \end{aligned}$$

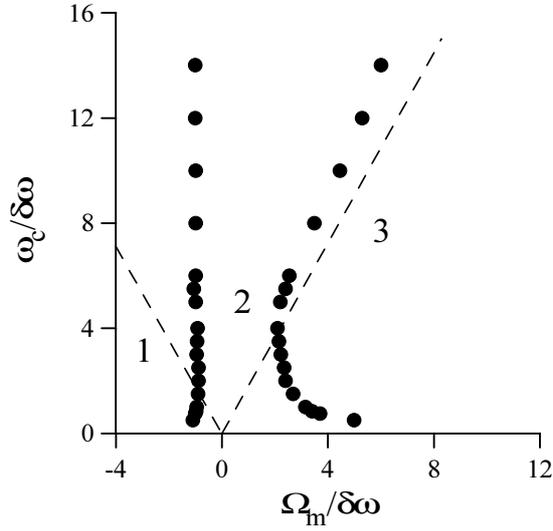


Рис. 20: Граница области устойчивости связанных синхробета-тронных мод (точки), вычисленная с учетом разброса частот бетатронных колебаний ($\omega_z = \omega_{z0} + I_z(\partial\omega_z/\partial I_z)$). Сплошная линия представляет границу области устойчивости, определяемую условием (11.11). Колебания неустойчивы в областях 1 и 3.

где $Ei(x)$ так называемая интегральная показательная функция

$$Ei(x) = - \int_{-x}^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t},$$

а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Два таких годографа приведены в качестве примера на Рис.19. Как видно, годограф 1, соответствующий положительному когерентному сдвигу частоты, не окружает начала координат, что

соответствует устойчивым модам. Численное значение w в этом случае не противоречит порогу в (11.11). В противоположность этому, годограф 2 на Рис.19, вычисленный для такого же по величине но отрицательного w соответствует неустойчивым колебаниям. Несимметрия поведения мод для положительных и отрицательных Ω_m обязана принятой здесь упрощенной модели нелинейности бетатронных колебаний. Напомним, что аналогичное поведение имеет граница области устойчивости несвязанных синхробетатронных мод (например, на Рис. 14). В более реалистической модели, учитывающей зависимости ω_z от I_z и I_x , например (6.17):

$$\omega_z = \omega_{z0} + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial I_z} \right)_0 I_z + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial I_x} \right)_0 I_x,$$

такая несимметрия может оказаться менее выраженной за счет сближения парциальных разбросов частот $I_{z0} |(\partial \omega_z / \partial I_z)_0|$ и $I_{x0} |(\partial \omega_z / \partial I_x)_0|$.

Изучение поведения годографов при изменении Ω_m и ω_c позволяет построить границу области устойчивости, соответствующую дисперсионному уравнению (11.27). Как уже говорилось, она несимметрична относительно оси $\Omega_m = 0$ (Рис.20). Кроме того, ширина полосы, в которой колебания затухают, увеличивается (при $\Omega_m > 0$) в областях, где $\omega_c \gg \delta\omega_z$, либо $\omega_c \ll \delta\omega_z$. Для высоких частот синхротронных колебаний условие устойчивости асимптотически приближается к определяемому (11.11). Увеличение ширины области устойчивости при малых частотах синхротронных колебаний согласуется с аналогичным поведением границы области устойчивости бетатронных колебаний. Однако, очень сильное уменьшение частоты синхротронных колебаний ($\omega_c \ll \delta\omega_z$) может поменять характер развития неустойчивости таким образом, что поведение отдельных мод становится малосущественным. Этот случай будет рассмотрен подробнее в следующем разделе.

Причину неустойчивости бетатронной и первой синхробетатронной мод в области $\omega_c \gg \delta\omega_z$ и $-1 < w < 0$ иллюстрируют следующие простые вычисления. Если предположить $|\Omega_m| \gg \delta\omega_z$, собственные частоты задачи определяются уравнением, аналогичным уравнению (11.8)

$$\begin{aligned} 1 &= wF(x) - \frac{16w^2}{\pi^4} F(x)[F(x+1) + F(x-1)], \\ &= w_{eff}F(x), \quad w_{eff} = w \left(1 - \frac{16w}{\pi^4} [F(x+1) + F(x-1)] \right). \end{aligned} \quad (11.29)$$

В силу принятого предположения можно ожидать, что инкременты мод будут малы по сравнению с величинами когерентных сдвигов частоты. В таких условиях для F можно использовать следующее приближенное выражение.

$$F(x) \simeq \frac{1}{x} - i\pi\Lambda(x), \quad \Lambda(x) = \frac{xe^{-x/z}}{z}\theta(x).$$

Корни (11.29) пишем в виде $x = x_0 + i\delta$, где когерентные сдвиги частот x_0 определяются с помощью невозмущенного дисперсионного уравнения

$$1 - \frac{w}{x_0} + \frac{32w^2}{\pi^4} \frac{1}{x_0^2 - 1} = 0.$$

Если w отрицательно, мы должны вычислять инкременты решений с $x_0 < 0$, что в первом порядке теории возмущений дает

$$\delta = -\frac{16|w|}{\pi^4 z} \frac{x_0(1+x_0) \exp\left(-\frac{1+x_0}{z}\right)}{1 + \frac{16|w|}{\pi^4} \frac{x_0^2}{(1-x_0^2)^2}}. \quad (11.30)$$

Последнее выражение всегда положительно, что соответствует неустойчивым колебаниям. Мы, однако, должны отметить, что ниже порога, определяемого (11.11), а также при условии, что $z \ll 1$ и

$|w| \gg 1$, полученные инкременты неустойчивых мод экспоненциально малы. По этой причине можно ожидать, что положение левой границы области устойчивости будет весьма чувствительно к проявлению дополнительных механизмов демпфирования колебаний⁵, которые не учитывались в нашем упрощенном расчете. Отметим также, что при изменении знака нелинейности магнитного поля κ , область устойчивости отражается относительно оси ω_c . При этом более широкой становится область устойчивости для $\Omega_m < 0$.

11.5 Задачи к Лекции 11

Построить область устойчивости первых связанных вертикальных синхробетатронных мод для случая, когда $\omega_z(I_z, I_x) = \omega_{0z} + \kappa I_x$. Функция распределения по амплитудам радиальных бетатронных колебаний равна $f(I_x) = \exp(-I_x/I_{0x})/I_{0x}$. Оценить декременты затухания Ландау связанных мод в области, где когерентный сдвиг частоты существенно превышает разброс частот.

12 Быстрые однооборотные неустойчивости

1. Перейдем к описанию случая, когда $|\Omega_m| \gg \omega_c$. В этих условиях неустойчивость в пучке развивается настолько быстро, что за время нарастания колебаний (τ_m) частицы не успевают заметно сместиться по фазам ϕ (например, для частицы с амплитудой синхротронных колебаний φ такое смещение не превышает $\Delta\phi \sim \omega_c \tau \varphi \ll \sigma_s$, где σ_s длина сгустка в единицах среднего радиуса замкнутой орбиты).

⁵Например, эффект быстрого затухания бетатронных мод и head-tail подавление синхробетатронных мод.

Развитие быстрых однооборотных неустойчивостей обладает целым рядом особенностей. Наиболее важной является отсутствие спектра нормальных колебаний. Физически этот факт заранее очевиден. Отсутствие перемешивания частиц в пучке за время развития неустойчивости приводит к разрыванию обратной связи колебаний головной и хвостовой частей пучка. По этой причине колебания головных частиц никак не связаны с колебаниями хвостовых, что обуславливает отсутствие спектра собственных мод сгустка.

Первоначально быстрые однооборотные неустойчивости обсуждались в связи с транспортировкой интенсивных пучков в линейных ускорителях (так называемый эффект прерывания пучка). Позже было выяснено, что аналогичные явления могут иметь место и для сгустков в накопителях.

Коль скоро ожидаемые времена развития неустойчивостей короче периода синхротронных колебаний, уместно в качестве продольных переменных взять $(\Delta p, \phi)$. Для простоты мы проведём вычисления для дипольных бетатронных колебаний. Тогда в пренебрежении продольной подвижностью частиц, основное интегральное уравнение записывается в виде

$$(\omega - \omega_m)f_m = if_m^{(0)} - \lambda(\phi)\sqrt{I_z}\frac{\partial F_0}{\partial I_z} \int dI'_z d\Delta p' d\phi' K(\phi - \phi')\sqrt{I'_z}f_m. \quad (12.1)$$

Здесь $f_0 = \lambda(\phi)F_0(I_z, \Delta p)$ – функция распределения в стационарном состоянии, а

$$K(\phi - \phi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{mn} e^{in(\phi - \phi')}. \quad (12.2)$$

Для упрощения вычислений мы снова воспользуемся моделью, когда

$$\Omega_{mn} = \frac{i\Omega_m}{\pi(n + m_z\nu_z + i0)}. \quad (12.3)$$

При этом вычисление интеграла в (12.2) даёт

$$K(\phi) = \Omega_m e^{-im_z \nu_z \phi} \begin{cases} 1, & \phi \leq 0, \\ 0, & \phi > 0. \end{cases}$$

Подстановка этого выражения, а также решений в форме

$$f_m = \frac{if_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} - \lambda(\phi)\chi(\phi)e^{im_z \nu_z \phi} \frac{\sqrt{I_z} \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - \omega_m} \quad (12.4)$$

в уравнение (12.1) приводит к следующему уравнению для новой неизвестной функции χ :

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d_m^{(0)}(\phi') d\phi' + \Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} \lambda(\phi') \chi(\phi'). \quad (12.5)$$

Здесь

$$d_m^{(0)} = \int dI_z d\Delta p \frac{\sqrt{I_z} f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} \quad (12.6)$$

-Фурье-амплитуда начальной линейной плотности дипольного момента сгустка, а

$$\Lambda_m = -\Omega_m \int dI_z d\Delta p \frac{I_z \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - \omega_m}. \quad (12.7)$$

В отличие от уравнений, которые нам приходилось решать до этого, уравнение (12.5) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Вольтерра. Относительно этих уравнений известно, что однородные интегральные уравнения Вольтерра не имеют нетривиальных решений. Этим доказывается отсутствие спектров собственных частот быстрых неустойчивостей.

Уравнение (12.5) решается преобразованием его в дифференциальное уравнение. После дифференцирования обеих частей получаем

$$\frac{d\chi}{d\phi} = -i\Omega_m d_m^{(0)} - \Lambda_m \lambda(\phi) \chi. \quad (12.8)$$

Записывая

$$\chi = A(\phi) \exp \left(\Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \lambda(\phi') \right),$$

с использованием граничного условия $A(\infty) = 0$ получаем

$$A = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp \left(-\Lambda_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \lambda(\phi'') \right)$$

или окончательно

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp \left(-\Lambda_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'') \right) \quad (12.9)$$

2. Зависимость полученных решений от времени получается комбинированием выражений (12.4), (12.9) и выполнением обратного преобразования Фурье:

$$f_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_m(\omega).$$

Анализ решений существенно упрощается в случае, когда можно пренебречь разбросами частот в пучке. При этом

$$d_m^{(0)} = \frac{D_m}{\omega - \omega_m}, \quad D_m = \int dI_z d\Delta p \sqrt{I_z} f_m^{(0)},$$

а $\Lambda_m = \Omega_m / (\omega - \omega_m)$. Тогда, например, для амплитуды дипольного момента

$$d_m = \int dI_z d\Delta p \sqrt{I_z} f_m$$

получаем:

$$\begin{aligned} d_m(\phi, t) e^{i\omega_m t} &= D_m(\phi) + \lambda(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m(\phi') R_m(\phi, \phi', t), \\ R_m(\phi, \phi', t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} R_m(\phi, \phi', \omega), \\ R_m(\phi, \phi', \omega) &= \frac{i\Omega_m}{\omega^2} \exp \left(-\frac{\Omega_m}{\omega} \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'') \right). \end{aligned} \quad (12.10)$$

Входящая в эти соотношения функция $R_m(\phi, \phi', \omega)$ является резольвентой интегрального уравнения (12.5). Как известно, для задач, допускающих нахождение спектра собственных значений, особенностями резольвенты как функции комплексной переменной ω являются либо простые полюсы, либо полюсы конечной кратности. В отличие от этого единственной особой точкой функции $R_m(\omega)$ является существенно особая точка при $\omega = 0$. Это обстоятельство еще раз указывает на отсутствие спектра собственных частот в обсуждаемой задаче. Определённые заключения о характере развития колебаний даёт разложение функции $R_m(\omega)$ в ряд Тэйлора

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{i\Omega_m}{\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \frac{1}{\omega^k}, \quad \xi = \Omega_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'') \quad (12.11)$$

В этом уравнении первое слагаемое описывает резонансную раскачку частиц в точке ϕ частицами в точке ϕ' , как если бы между ними не было промежуточных частиц. Следующее слагаемое описывает раскачку частиц в точке ϕ частицами, расположенными в промежуточной точке $\phi < \phi'' < \phi'$, колебания которых возбуждены резонансной раскачкой частицами в точке ϕ' . Это приводит к повышению порядка полюса на единицу и т.д. Таким образом, выражение (12.11) описывает резонансную раскачку колебаний частиц в точке ϕ с учетом коллективной реакции промежуточных частиц.

Интеграл по ω , определяющий функцию $R_m(\phi, \phi', t)$, вычисляется подстановкой разложения (12.11) в (12.10):

$$R_m(\phi, \phi', t) = \Omega_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}}. \quad (12.12)$$

Используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}} = \frac{1}{(k+1)!} \left. \frac{d^{(k+1)} \exp(-i\omega t)}{d\omega^{(k+1)}} \right|_{\omega=0} = \frac{(-it)^{(k+1)}}{(k+1)!},$$

перепишем (12.12) в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi t)^k}{k!(k+1)!}. \quad (12.13)$$

Как и ожидалось, на малых интервалах времени ($|\Omega_m|t \ll 1$) это выражение описывает линейный рост амплитуды колебания, специфичный для резонансной раскачки. Для выяснения обратной асимптотики ($|\Omega_m|t \gg 1$) воспользуемся соотношением

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(k+1)!},$$

где $J_1(z)$ функция Бесселя порядка 1. Тогда (12.13) записывается в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \frac{J_1(2\sqrt{-i\xi t})}{\sqrt{-i\xi t}}. \quad (12.14)$$

Учитывая, что при больших $\text{Im}z$ функция $J_1(z)$ растет как $J_1 \propto \exp(\text{Im}z)$, с точностью до неэкспоненциального множителя пишем

$$R_m(\phi, \phi', t) \propto \exp \left\{ \sqrt{\frac{|\Omega_m|t}{2}} \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'') \right\}, \quad |\Omega_m|t \gg 1. \quad (12.15)$$

Как видно из этого выражения, в отличие от синхробетатронных мод времени нарастания быстрых неустойчивостей определяются действительной частью Ω_m , а также зависят от расстояния до головной части сгустка. Такое поведение колебаний отражает то

обстоятельство, что неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой частиц пучка впереди идущими.

3. Развитие описанной неустойчивости может ограничиваться трением (охлаждением пучка), разбросом частот бетатронных колебаний частиц ⁶ а также специальным разведением частот бетатронных колебаний частиц по длине сгустка ($\omega_z(\phi)$). Последний механизм был предложен для подавления таких неустойчивостей в линейных ускорителях (В.Е. Балакин, А.В. Новохатский, В.П. Смирнов, 1978 [16]) и по фамилиям авторов получил название БНС-подавление (BNS-damping).

Рассмотрим кратко влияние затухания за счет разброса частот и за счет трения. Для простоты мы предположим, что разброс частот бетатронных колебаний обусловлен разбросом импульсов в пучке, а в качестве функции распределения по импульсам возьмём лоренцево распределение. Тогда, повторение вычислений п.1 с удержанием усреднения частотных знаменателей по импульсам приводит к замене в соответствующих формулах частотных знаменателей $1/(\omega - \omega_m)$ на

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)} \frac{d\Delta p}{\omega - \omega_m - \zeta \Delta p} = \frac{1}{(\omega - \omega_m + i\delta_m)},$$

$$\zeta = m_z \frac{d\omega_z}{d\Delta p}, \quad \delta_m = |\zeta| \Delta.$$

Учитывая это обстоятельство, легко убедиться в том, что, напри-

⁶Поскольку в задаче отсутствуют собственные моды когерентных колебаний, разбросы частот не приводят к затуханию Ландау колебаний. В случае быстрых неустойчивостей когерентные колебания затухают за счет процессов их расфазировки. В интенсивных сгустках взаимодействие частиц вдоль пучка кумулятивно изменяет характер расфазировки различных частей сгустка и тем изменяет зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени.

мер, первое уравнение в (12.10) переписывается в виде

$$d_m(\phi, t)e^{i\omega_m t + \delta_m t} = D_m(\phi) + \lambda(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m(\phi') R_m(\phi, \phi', t). \quad (12.16)$$

Характер поведения этих решений на малых временах ($|\Omega_m|t \ll 1$) совпадает с уже обсуждавшимися. На больших временах ($\delta_m t \gg 1$), поскольку R_m растёт не быстрее $\exp(\sqrt{t/\tau_m})$, величины $d_m(\phi, t)$ экспоненциально затухают. Это означает, что даже если $|\Omega_m| > \delta_m$, с течением времени разброс частот абсолютно подавляет развитие неустойчивости. При этом требование отсутствия потерь пучка лишь устанавливает нижний предел на апертуру вакуумной камеры.

Аналогичным образом действует трение. Разница заключается лишь в том, что если λ_z – декремент затухания вертикальных бетатронных колебаний, то при $\lambda_z \gg \delta_m$ величина δ_m в (12.16) должна быть заменена на $|m_z|\lambda_z$.

Изучение BNS-подавления вообще требует большего количества вычислений. Мы приведём критерий устойчивости для специального случая, когда $\omega_z(\phi) = \omega_z + \kappa\phi$, линейная плотность пучка задаётся ступенчатой функцией

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{\phi_b} \begin{cases} 1, & |\phi| \leq \phi_b/2, \\ 0, & |\phi| > \phi_b/2, \end{cases}$$

а начальное отклонение одинаково для всех частиц пучка. Такой критерий имеет вид

$$0 \leq \frac{\operatorname{Re}\Omega_m}{m_z \Delta\omega_z} \leq 1, \quad \Delta\omega_z = \kappa\phi_b. \quad (12.17)$$

При нарушении критерия (12.17) колебания в пучке нарастают по степенному закону.

12.1 Задачи к Лекции 12

1. Получить дисперсионное уравнение для быстрых вертикальных когерентных колебаний.
2. Вычислить зависимость от времени быстрых колебаний дипольного момента пучка, взаимодействующего с участком вакуумной камеры круглого сечения, описываемого импедансом

$$Z_n(\omega) = Z_0 \left(\frac{i\omega_0}{\omega} \right)^s, \quad 0 < s < 1.$$

Принять, что линейная плотность пучка определяется выражением

$$\rho(s) = \frac{1}{2l_b} \begin{cases} 1, & |s| \leq l_b, \\ 0, & |s| > l_b. \end{cases}$$

13 Многооборотные неустойчивости

13.1 Колебания одного сгустка

Изучим теперь особенности спектров колебаний сгустка связанные с неполным затуханием наведенных полей за время оборота пучка в машине. Как уже упоминалось в §8, в этом случае декременты колебаний представляются суммой слагаемых, описывающих соответственно однооборотные и многооборотные явления. В качестве примера мы проведем расчет спектра когерентных колебаний сгустка, взаимодействующего с отдельной модой резонатора, для которой выполнено соотношение

$$\lambda_k \gg \omega_s. \quad (13.1)$$

Для упрощения вычислений проведем расчет пренебрегая влиянием разбросов частот в пучке. С той же целью мы будем предполагать длину сгустка достаточно малой, чтобы можно было прене-

бредь возможностью возбуждения синхробетатронных мод и влиянием хроматизма машины на устойчивость пучка. Для определенности будем говорить о вертикальных дипольных колебаниях, когда $\omega \simeq m_z \omega_z$ ($m_z = \pm 1$).

При выполнении условия (13.1) все слагаемые в правой части уравнения (7.6) примерно равнозначны. Поэтому пишем

$$f_m = \frac{\partial f_0 / \partial I_z}{(\omega - m_z \omega_z)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N e^2 m_z V_{mn}}{\omega_k^2 - (\omega + n \omega_s + i \lambda_k)^2} \int d\Gamma V_{mn}^* f_m. \quad (13.2)$$

Согласно условию (13.1) частоту ω в знаменателе в правой части этого уравнения можно заменить невозмущенным значением $m_z \omega_z$. Учитывая, что V_{mn} фактически является степенной функцией I_z

$$V_{mn} = \sqrt{I_z} v_{mn}, \quad (13.3)$$

ищем решение (13.2) в виде

$$f_m = \chi(\varphi) V_{mn} \frac{\partial F_0}{\partial I_z}, \quad f_0 = F_0(I_z) \rho(\varphi).$$

Это дает следующее уравнение для амплитуд χ_m

$$\begin{aligned} (\omega - m_z \omega_z) \chi = -\rho(\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N e^2 m_z |v_{mn}|^2 J_0(n\varphi)}{\omega_k^2 - (m_z \omega_z + n \omega_s + i \lambda_k)^2} \\ \times \int_0^\infty d\varphi' \varphi' J_0(n\varphi') \chi(\varphi'). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Если α нумерует собственные решения этого уравнения, то собственные частоты (ω_α) определяются равенством (6.11), которое здесь можно переписать в виде:

$$\omega_\alpha - m_z \omega_z = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N e^2 m_z |v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{\omega_k^2 - (m_z \omega_z + n \omega_s + i \lambda_k)^2}, \quad (13.5)$$

где

$$h_{n\alpha} = \left| \int_0^\infty d\varphi \sqrt{\varphi\rho(\varphi)} J_0(n\varphi) \chi_\alpha(\varphi) \right|^2. \quad (13.6)$$

Воспользовавшись формулой суммирования (8.1), представим ω_α суммой однооборотного и многооборотного слагаемых

$$\omega_\alpha = (\omega_\alpha)_{st} + (\omega_\alpha)_{mt}, \quad (13.7)$$

где

$$(\omega_\alpha)_{st} - m_z \omega_z = - \int_{-\infty}^\infty dn \frac{Ne^2 m_z |v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{\omega_k^2 - (m_z \omega_z + n\omega_s + i\lambda_k)^2}, \quad (13.8)$$

а

$$(\omega_\alpha)_{mt} - m_z \omega_z = - \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^\infty dn \frac{Ne^2 m_z |v_{mn}|^2 h_{n\alpha} e^{2\pi i l n}}{\omega_k^2 - (m_z \omega_z + n\omega_s + i\lambda_k)^2}. \quad (13.9)$$

Для получения условий устойчивости вычислим декременты колебаний ($\delta = -\text{Im}\omega$). Согласно (13.7) пишем

$$\delta = \delta_{st} + \delta_{mt}. \quad (13.10)$$

Учитывая, что $|v_{m,n}|^2 = |v_{m,-n}|^2$ и $h_{n,\alpha} = h_{-n,\alpha}$, после простых преобразований из (13.8) получим

$$\delta_{st} = \delta_- - \delta_+, \quad (13.11)$$

где

$$\delta_- = \frac{Ne^2 \lambda_k}{2\omega_k} \int_{-\infty}^\infty dn \frac{|v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{(\omega_k - \omega_z - n\omega_s)^2 + \lambda_k^2},$$

$$\delta_+ = \frac{Ne^2 \lambda_k}{2\omega_k} \int_{-\infty}^\infty dn \frac{|v_{mn}|^2 h_{n\alpha}}{(\omega_k + \omega_z - n\omega_s)^2 + \lambda_k^2}.$$

Из этих выражений видно, что однооборотное слагаемое не ухудшает устойчивости колебаний сгустка ($\delta_{st} > 0$), если вклады разностных резонансов превышают вклады суммовых. Как и должно быть, однооборотное слагаемое, описывающее реакцию излучения пучка, пропорционально декременту затухания моды резонатора.

Многооборотное слагаемое декремента определяется выражением

$$\delta_{mt} = \text{Im} \left\{ \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{Ne^2 m_z |v_{mn}|^2 h_{n\alpha} e^{2\pi i l n}}{\omega_k^2 - (m_z \omega_z + n \omega_s + i \lambda_k)^2} \right\}. \quad (13.12)$$

Для вычисления входящих сюда интегралов заметим, что масштаб изменения v_{mn} по n определяется азимутальной протяженностью резонатора (θ_0), а соответствующий масштаб $h_{n\alpha}$ – длиной пучка (σ_b). Если эти длины таковы, что $\theta_0 \ll 2\pi$ и $\sigma_b \ll 2\pi R_0$, то интеграл по n в (13.12) может вычисляться замыканием контура интегрирования в верхнюю или нижнюю полуплоскости переменной n . Поскольку в верхней полуплоскости подынтегральное выражение не имеет особенностей, слагаемые с $l > 0$ не дают вклада в δ_{mt} . Вклады же слагаемых с $l < 0$ определяются вычетами в полюсах

$$n = \pm \nu_k - \nu_z - i \mu_k, \quad \nu_k = \omega_k / \omega_s, \quad \mu_k = \lambda_k / \omega_s. \quad (13.13)$$

С использованием естественного предположения, что $\omega_k \gg \omega_z, \lambda_k$,

вычисление интеграла по n дает

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{|v_{mn}|^2 h_{n\alpha} e^{2\pi i l n}}{\nu_k^2 - (m_z \nu_z + n + i\mu_k)^2} \\
&= -2\pi i |v_{m,\nu_k}|^2 h_{\nu_k,\alpha} \exp[-2\pi l \mu_k + 2\pi i m_z \nu_z l] \\
&\quad \times \left[\frac{\exp(-2\pi i l \nu_k)}{-2\nu_k} + \frac{\exp(2\pi i l \nu_k)}{2\nu_k} \right] \\
&= \frac{2\pi |v_{m,\nu_k}|^2 h_{\nu_k,\alpha}}{\nu_k} \sin(2\pi l \nu_k) \exp[-2\pi l \mu_k + 2\pi i m_z \nu_z l].
\end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (13.12) приводит к следующему выражению для многооборотного слагаемого декремента

$$\delta_{mt} = \frac{N e^2 T_s |v_{m,\nu_k}|^2 h_{\nu_k,\alpha}}{\omega_k} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l \lambda_k T_s} \sin(2\pi l \nu_z) \sin(2\pi l \nu_k), \quad (13.14)$$

где $T_s = 2\pi/\omega_s$ период обращения равновесной частицы. При выполнении условия (13.1) ряд по l быстро сходится⁷. Поэтому знак

⁷Этот ряд может быть вычислен точно. Записывая

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{l=1}^{\infty} p^l \sin(2\pi l \nu_z) \sin(2\pi l \nu_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} p^l \cos(l\alpha_-) - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} p^l \cos(l\alpha_+),
\end{aligned}$$

где

$$p = e^{-\lambda_k T_s}, \quad \alpha_{\pm} = 2\pi(\nu_k \pm \nu_z),$$

и используя

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} p^l \cos(l\alpha_-) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^l e^{i l \alpha_-} \right),$$

а также

$$\sum_{l=0}^{\infty} p^l e^{i l \alpha_-} = \frac{1}{1 - p \exp(i\alpha_-)} = \frac{1 - p \exp(-i\alpha_-)}{1 - 2p \cos \alpha_- + p^2},$$

δ_{mt} фактически определяется знаком первого слагаемого:

$$\delta_{mt} \simeq \frac{Ne^2 T_s |v_{m,\nu_k}|^2 h_{\nu_k, \alpha}}{\omega_k} e^{-\lambda_k T_s} \sin(2\pi\nu_z) \sin(\omega_k T_s). \quad (13.15)$$

Отсюда видно, что величина δ_{mt} положительна при выполнении следующего условия устойчивости

$$\sin(2\pi\nu_z) \sin(2\pi\nu_k) > 0,$$

или

$$n - \frac{1 - r_k}{4} \leq \nu_z \leq n + \frac{1 + r_k}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$r_k = \text{sgn}(\sin \omega_k T_s). \quad (13.16)$$

Зависимость декрементов и условий устойчивости колебаний от положения рабочей точки обусловлена взаимодействием сгустка с полями, наведенными на предыдущих оборотах, и вообще свойственна многооборотным эффектам.

13.2 Многосгустковые моды

По многим причинам пучки частиц в накопителях могут быть составлены из сгустков. Взаимное расположение сгустков вдоль замкнутой орбиты диктуется кратностью ВЧ-системы накопителя, а также характером решаемой таким разбиением физической задачи. Вместе с тем, наиболее часто используются пучки, в которых сгустки более или менее равномерно заполняют замкнутую

получаем

$$S = \frac{1}{2} \frac{1 - p \cos \alpha_-}{1 - 2p \cos \alpha_- + p^2} - \frac{1}{2} \frac{1 - p \cos \alpha_+}{1 - 2p \cos \alpha_+ + p^2}.$$

Это выражение ещё раз показывает, что условие устойчивости колебаний $\delta_{mt} > 0$ требует превышения вкладов в декременты разностных резонансов над вкладами суммовых.

орбиту, а число частиц в сгустках мало меняется при переходе от одного сгустка пучка к другому. Возможность сгустков совершать различные относительные движения под действием наведенных полей приводит к появлению у когерентных колебаний такого пучка дополнительных коллективных мод. Из общих соображений ясно, что, если пучок составлен, например, из q сгустков, то и общее число мод увеличивается в q раз.

Полученные выражения позволяют найти условия устойчивости и многооборотные части декрементов колебаний пучка, составленного из идентичных и равномерно распределенных по орбите сгустков. Если кратность ВЧ-системы равна q и все сепаратрисы заполнены, то число частиц в каждом сгустке равно N/q , а азимутальное расстояние между ними равно $2\pi/q$. Стационарное состояние такого пучка симметрично относительно поворота на угол $2\pi/q$. По аналогии с колебаниями в несгруппированных пучках такая симметрия приводит к возможности распространения вдоль пучка колебаний с волновыми векторами

$$k_a = \frac{2\pi a}{q}, \quad a = 0, 1, 2, \dots, q - 1. \quad (13.17)$$

Эти моды отличаются друг от друга фазированием колебаний отдельных сгустков пучка. Так в моде k_0 все сгустки колеблются синфазно, а в моде $k_{q/2}$ колебания соседних сгустков сдвинуты на π . Как видно, например, из уравнения (13.15) величина многооборотной части декремента определяется набегом фазы моды за период прохождения пучком электродов. Для одного сгустка – это период обращения частиц в кольце и, стало быть, набег фазы моды за период равен $2\pi m_z \nu_z$.

В случае дипольных колебаний ($m_z = \pm 1$), модам в (13.17) соответствуют комбинационные частоты $m_z \omega_z + a \omega_s$, а частота прохождения пучком электродов равна $q \omega_s$. При этом, набег фазы

колебания за период равен

$$\frac{2\pi(m_z\omega_z + a\omega_s)}{q\omega_s} = 2\pi \frac{m_z\nu_z + a}{q}.$$

Пусть многооборотная часть декремента одного сгустка определяется выражением

$$\delta = m_z\Phi(2\pi m_z\nu_z), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x). \quad (13.18)$$

Многооборотные части декрементов q идентичных сгустков, взаимодействующих с той же системой электродов, получаются из этого выражения заменой $2\pi m_z\nu_z$ на $2\pi(m_z\nu_z + a)/q$. Поскольку многооборотная часть декремента определяется полным током пучка (N), для декрементов мод q идентичных сгустков пишем

$$\delta_a = qm_z\Phi\left(2\pi \frac{m_z\nu_z + a}{q}\right), \quad a = 0, 1, \dots, q-1. \quad (13.19)$$

Если функция Φ при каком-то значении ν может стать отрицательной, то значения ν должны выбираться так, что бы условие устойчивости $m_z\Phi(2\pi[m_z\nu_z + a]/q) > 0$ выполнялось для всех мод. Пусть, например, условие устойчивости одного сгустка имеет вид (в уравнении (13.15) это соответствует случаю, когда $\sin(2\pi\nu_k) > 0$)

$$0 < \nu_z < 1/2.$$

В этом случае условие устойчивости мод q идентичных сгустков записывается в виде

$$0 < \nu_z + a < q/2, \quad a = 0, 1, \dots, q-1. \quad (13.20)$$

Поскольку $\nu_z > 0$, это условие заведомо нарушается для мод с $a > q/2$. Такая неустойчивость цепочки идентичных сгустков обусловлена связью их колебаний через наведенные поля. По этой

причине она может подавляться неравномерным заполнением сепаратрис, разведением частот колебаний сгустков (в обоих случаях изменяется связь колебаний сгустков), либо усилением быстрого затухания в однооборотных частях декрементов. В частности, это может быть достигнуто использованием достаточно широкополосных (в идеале, односгустковых) демпфирующих систем обратных связей.

В накопителях с заметной нелинейностью фокусирующих полей одновременную устойчивость многосгустковых мод может обеспечивать их затухание Ландау. Очевидно, что в таком случае значеня комплексных когерентных сдвигов частот всех мод должны находиться внутри границ областей устойчивости когерентных колебаний пучка. Напомним, что положения и форма этих границ определяются функциями распределения частиц в сгустках. В случае демпфирования колебаний пучка, состоящего из идентичных сгустков, все граничные кривые совпадают. Поэтому оказывается достаточным поместить комплексные когерентные сдвиги частот мод внутри этой единственной границы области устойчивости.

13.3 Задачи к Лекции 13

1. Коллективная реакция пучка вообще изменяет собственные частоты резонатора и тем расстраивает его от резонансной частоты. Считая когерентные колебания пучка малыми, вычислить сдвиг частоты ускоряющего резонатора. Разбросом частот синхротронных колебаний пренебречь.
2. Считая, что кратность ускоряющего ВЧ-поля велика ($q \gg 1$), вычислить декременты синхротронных колебаний пучка, взаимодействующего с основной модой ускоряющего резонатора. Влиянием разброса частот синхротронных колебаний пренебречь.
3. Изучить устойчивость бетатронных когерентных колебаний 3-х

коротких сгустков, движущихся в ВЧ кратности $q = 3$ ($q = 5$).

4. Для сгустка нулевой длины получить условия устойчивости вертикальных когерентных колебаний при его взаимодействии с вакуумной камерой круглого сечения с конечной проводимостью стенок.

5. Пренебрегая влиянием разбросов частот, вычислить декременты когерентных колебаний пучка, взаимодействующего с локализованным импедансом

$$Z(\omega) = Z_0(i\omega_0/\omega)^s, \quad 0 < s < 1.$$

14 О эффекте удлинения сгустков

Помимо прочего, действие наведенных пучком полей может выражаться в увеличении длины сгустков. Такой эффект наблюдался на многих накопителях и в большинстве случаев является нежелательным. Вместе с тем, поскольку описание эффекта удлинения часто требует выхода расчетов за рамки применимости теории возмущений, последовательная теория этого явления недостаточно развита. Ниже мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности расчетов, а также некоторые характерные особенности этого явления.

14.1 Удлинение за счет искажения ВЧ-ямы наведенными полями

1. Наиболее очевидной причиной удлинения сгустка может быть уменьшение жесткости потенциальной ямы синхротронных колебаний наведенными полями пучка. Чтобы упростить расчеты, мы предположим, что сгусток взаимодействует с локализованным однооборотным элементом. Поэтому наведенное сгустком поле мы

запишем в следующей форме:

$$E(\phi) = -\frac{Ne^2\omega_s}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n e^{in(\phi-\phi_s)}, \quad (14.1)$$

имея в виду, что Z_n на самом деле описывает зависимость наведенного поля от времени. Если мощность потерь энергии частицы на синхротронное излучение есть $W(\mathcal{E})$, то суммарная скорость изменения энергии частицы равна

$$\frac{d\mathcal{E}_s}{dt} = \frac{eV\omega_s \cos \phi_s}{2\pi} - W(\mathcal{E}_s) - v_s \frac{Ne^2\omega_s}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n,$$

а значение равновесной фазы (ϕ_s) определяется уравнением

$$\frac{eV\omega_s \cos \phi_s}{2\pi} = W + v_s \frac{Ne^2\omega_s}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n. \quad (14.2)$$

Учитывая свойства симметрии ($Z_n = Z'_n + iZ''_n$)

$$Z'_n = Z'_{-n}, \quad Z''_n = -Z''_{-n},$$

видим, что в тех случаях, когда $\rho(\phi)$ является четной функцией, только реактивная часть импеданса (Z'_n) вносит вклад в изменение ϕ_s .

С учетом наведенных полей синхротронные колебания частиц описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega, \quad \frac{d\Delta\omega}{dt} + 2\lambda\Delta\omega + (\omega_c^2)_0\phi = \\ - \frac{Ne^2\omega_s^2\alpha_p}{\Pi p} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_n \rho_n (e^{in\phi} - 1) + X(t). \end{aligned} \quad (14.3)$$

Здесь ϕ – отклонение фазы частицы от равновесного значения,

$$\Delta\omega = \frac{\omega_s\alpha_p}{pv} \Delta\mathcal{E}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}_s},$$

$$(\omega_c^2)_0 = \omega_s^2 \frac{eV \sin \phi_s \alpha_p}{2\pi p v} \quad (14.4)$$

– частота синхротронных колебаний частицы при нулевом токе пучка, а $X(t)$ случайная сила

$$\langle X(t) \rangle = 0, \quad \langle X(t)X(t') \rangle = \langle X^2 \rangle \delta(t - t'),$$

описывающая возбуждение синхротронных колебаний квантовыми флуктуациями излучения. Для оценки изменения длины пучка наведенными полями мы примем, что амплитуды синхротронных колебаний частиц малы, а сами поля слабы и являются достаточно плавными функциями ϕ , которые могут быть разложены в ряды Тэйлора по степеням ϕ . Тогда в линейном приближении получаем

$$\ddot{\phi} + 2\lambda\dot{\phi} + \omega_c^2\phi = X(t),$$

$$\omega_c^2 = (\omega_c^2)_0 \left\{ 1 - \frac{Ne^2\omega_s}{v_s eV \sin \phi_s} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\frac{-iZ(n)}{n} \right) n^2 \rho(n) \right\}. \quad (14.5)$$

Вынужденное решение этого уравнения записывается в виде

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{X(\omega)e^{-i\omega t}}{\omega_c^2 - 2i\lambda\omega - \omega^2}$$

или

$$\phi(t) = \int_0^t dt_1 X(t_1) e^{-\lambda(t-t_1)} \frac{\sin \omega_c(t-t_1)}{\omega_c}.$$

При этом средний квадрат ϕ имеет следующее асимптотическое значение:

$$\langle \phi^2(t \rightarrow \infty) \rangle = \frac{1}{\omega_c^2} \frac{\langle X^2 \rangle}{2\lambda}.$$

Поскольку для гауссова распределения $\langle \phi^2 \rangle = \sigma_\phi^2$, то определяя длину пучка при нулевом токе пучка соотношением

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{(\omega_c^2)_0} \frac{\langle X^2 \rangle}{2\lambda},$$

можем записать

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_0^2} = \frac{(\omega_c^2)_0}{\omega_c^2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{Ne^2\omega_s}{v_s eV \sin \phi_s} \int dn \left(\frac{-iZ(n)}{n}\right) n^2 \rho(n)\right]}. \quad (14.6)$$

Предположив, например, что

$$\frac{-iZ}{n} = \left(\frac{-iZ}{n}\right)_0 \frac{n_0^2}{n^2 + n_0^2}, \quad \rho(n) = \exp\left(-\frac{n^2 \sigma_\phi^2}{2}\right),$$

для коротких пучков ($n_0 \sigma_\phi \ll 1$) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\frac{-iZ(n)}{n}\right) n^2 \rho(n) \simeq \left(\frac{-iZ}{n}\right)_0 n_0^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\phi}.$$

Подстановка этой формулы в (14.6) приводит к следующему выражению:

$$\frac{\sigma_\phi^2}{(\sigma_\phi^2)_0} = \frac{1}{\left[1 - \frac{Ne^2\omega_s}{v_s eV \sin \phi_s} \left(\frac{-iZ}{n}\right)_0 n_0^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\phi}\right]}. \quad (14.7)$$

Для ультрарелятивистских электронов $\sin \phi_s < 0$. Поэтому уравнение (14.7) предсказывает удлинение сгустка, если он взаимодействует с индуктивным импедансом

$$\left(\frac{-iZ}{n}\right)_0 < 0.$$

Наоборот, если сгусток взаимодействует с емкостным импедансом, уравнение (14.7) предсказывает его укорочение. Такой результат

не очень удивителен, поскольку индуктивная связь уменьшает, а емкостная увеличивает жесткость ВЧ-ямы. Если эффект удлинения мал, уравнение (14.7) записывается в виде

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_0^2} = 1 + \frac{Ne^2\omega_s}{v_s eV \sin \phi_s} \left(\frac{-iZ}{n} \right)_0 n_0^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\phi}. \quad (14.8)$$

Учитывая, что при релятивистских энергиях частиц напряжение на ускоряющем резонаторе должно наращиваться пропорционально γ^4 , перепишем (14.8) в виде

$$\frac{\sigma_\phi^2}{(\sigma_\phi^2)_0} = 1 + C \frac{N}{\gamma^4 \sigma_\phi}, \quad (14.9)$$

где C – безразмерный фактор, зависящий от параметров машины. Полученная формула замечательна тем, что именно она использовалась для подгонки данных в первоначальных экспериментах по удлинению.

14.2 Уравнение Хайсинского

Приведенные вычисления указывают на желательность более систематического подхода к расчету влияния искажения потенциальной ямы на линейную плотность пучка. Один из возможных подходов к решению подобной задачи базируется на предположении, что в конечном счете пучок достигает равновесного состояния с больцмановским распределением частиц в фазовом пространстве синхротронных колебаний

$$f \propto \exp[-h(\Delta p, \phi)/T]. \quad (14.10)$$

где h – гамильтониан синхротронных колебаний, учитывающий действие наведенных полей

$$h = \frac{\Delta\omega^2}{2} - \frac{(\omega_c^2)_0 \phi^2}{2} + \omega_s \frac{Ne^2 \alpha_p}{\Pi p} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{-iZ_n}{n} \rho_n e^{in\phi}, \quad (14.11)$$

а T – продольная температура пучка, выраженная в соответствующих единицах. Если мы принимаем такое предположение, то равновесная функция распределения равна ($\sigma_\Delta = \omega_c \sigma_0$)

$$f(\Delta\omega, \phi) \propto \exp\left(-\frac{h}{2\sigma_\Delta^2}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{2\sigma_\Delta^2} - \frac{\phi^2}{2\sigma_0^2} - \frac{Ne^2\omega_s}{eV \sin \phi_s \sigma_0^2} \int dn \frac{-iZ_n}{n} \rho_n e^{in\phi}\right), \quad (14.12)$$

где σ_Δ равновесный разброс частот пучка, который по предположению не зависит от N . Интегрирование f по $\Delta\omega$ приводит к следующему выражению для линейной плотности пучка

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \rho_0 \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_0^2} - \int_{-\infty}^{\infty} d\phi' w(\phi' - \phi) \rho(\phi')\right), \\ w(\phi) &= \frac{Ne^2\omega_s}{eV \sin \phi_s \sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{-iZ_n}{n} e^{-in\phi}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Поскольку правая часть этого выражения содержит неизвестную функцию $\rho(\phi)$, (14.13) представляет собой нелинейное интегральное уравнение. Это так называемое уравнение Хайсинского [17], которое в настоящее время регулярно используется для расчета удлинения из-за искажения потенциальной ямы. В силу условия причинности $w(\phi < 0) = 0$. Поэтому уравнение Хайсинского является интегральным уравнением Вольтерра. Хотя возможность прямого решения таких уравнений довольно редка, имеются теоремы о существовании и единственности решений таких уравнений, если наведенные поля несингулярны

$$\overline{w^2} = \int_0^\infty d\phi w^2(\phi) < \infty. \quad (14.14)$$

Вместе с тем ясно, что в таких случаях особый интерес представляют решаемые примеры, когда уравнение Хайсинского может быть решено точно. Один из таких примеров был указан А.Г.

Ружжеро с сотрудниками [18], которые получили решение уравнения Хайсинского, предположив, что сгусток взаимодействует с устройством, имеющим чисто активный импеданс

$$Z(n) = Z_0.$$

При этом

$$w(\phi) = \frac{Ne^2\omega_s\pi Z_0}{eV \sin \phi_s \sigma_0^2} \text{sgn}(\phi),$$

а уравнение (14.13) принимает вид ($x = \phi/\sigma_0$):

$$\ln \rho = -\frac{x^2}{2} - \frac{Ne^2\omega_s Z_0 \alpha_p}{2\nu_c^2 p v \sigma_0} \left[\int_{-\infty}^x - \int_x^{\infty} \right] dx' \rho(x'),$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по x , получим

$$\frac{\rho'}{\rho} = -x - \xi \rho, \quad \xi = \frac{Ne^2\omega_s Z_0 \alpha_p}{2\nu_c^2 p v \sigma_0}. \quad (14.15)$$

Подставив сюда $\rho = \exp(-x^2/2)\chi(x)$ и интегрируя уравнение

$$\frac{\chi'}{\chi^2} = -\xi \exp(-x^2/2),$$

найдем

$$\frac{1}{\chi(0)} - \frac{1}{\chi(x)} = \xi \int_0^x dx' e^{-x'^2/2},$$

или

$$\rho(x) = \frac{\rho(0) \exp(-x^2/2)}{1 + \xi \rho(0) \int_0^x dx' \exp(-x'^2/2)}. \quad (14.16)$$

Постоянная $\rho(0)$ определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \rho(\phi) = 1.$$

Вычисление нормировочного интеграла

$$\sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\rho(0) \exp(-x^2/2)}{1 + \xi \rho(0) \int_0^x dx' \exp(-x'^2/2)}$$

облегчается тем, что числитель подынтегрального выражения в точности равен производной знаменателя. В результате находим

$$\rho(x) = \frac{\exp(-x^2/2)/(\sqrt{2\pi}\zeta\sigma_0)}{\coth(\zeta) + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})}, \quad \xi = 2\sigma_0\zeta. \quad (14.17)$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}.$$

Если действие наведенных полей мало $\zeta \ll 1$, полученное решение близко к распределению Гаусса

$$\rho(x) \simeq \exp(-x^2/2)/(\sqrt{2\pi}\sigma_0)[1 - \zeta \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})],$$

а увеличение длины пучка мало.

Эффект удлинения велик в области $\zeta \gg 1$, где линейная плотность пучка $\rho(x)$ принимает форму, близкую к треугольной (Рис.21)

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{|x|}{\xi} \frac{g(x)}{1 + g(x)(1 - 1/x^2)}, & x < 0. \end{cases} \quad (14.18)$$

Здесь

$$g(x) = \frac{\exp(-x^2/2 + 2\zeta)}{\sqrt{2\pi}|x|}.$$

Как видно из Рис.21, при этом распределение поля внутри пуч-

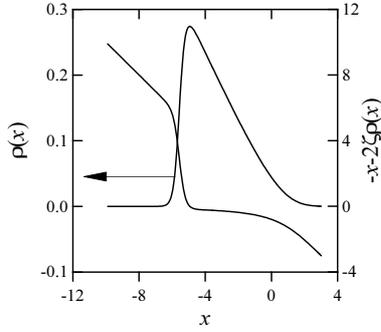


Рис. 21: Линейная плотность пучка (левая ось) и распределение продольного поля в пучке (правая ось: $-x - 2\zeta\rho(x)$). $\zeta = 9$.

ка в значительной степени выполаживается. Ширина $\rho(x)$ в этом случае может оцениваться неравенствами

$$-2\sqrt{\zeta} \leq x \leq 0,$$

что дает

$$\sigma_\phi(N) \simeq \sqrt{\frac{Ne^2\omega_s Z_0 \alpha_p}{\nu_c^2 p v}} \gg \sigma_0. \quad (14.19)$$

Как видно из Рис.22, такая асимптотическая зависимость качественно согласуется с вычислением длины пучка по формуле

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \rho(x).$$

Другой решаемый пример соответствует взаимодействию пучка с чисто индуктивным элементом, когда

$$\frac{-iZ_n}{n} = -L\omega_0$$

и, соответственно,

$$w(\phi) = \frac{2\pi Ne\omega_0^2 L}{V |\sin \phi_s| \sigma_0^2} \delta(\phi),$$

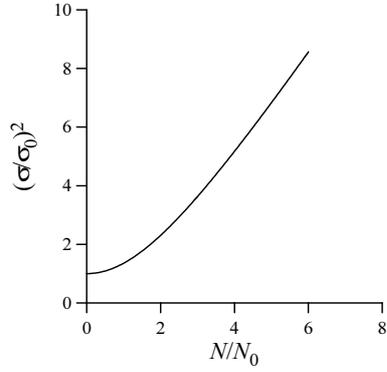


Рис. 22: Зависимость длины пучка от тока при взаимодействии с резистивным элементом камеры.

а уравнение Хайсинского превращается в трансцендентное уравнение относительно линейной плотности ρ

$$\chi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \zeta[\chi(x) - 1]\right), \quad \chi = \frac{\rho}{\rho(0)}, \quad (14.20)$$

$$\zeta = \frac{2\pi N e \omega_0^2 L}{V |\sin \phi_s| \sigma_0^2} \rho(0).$$

Постоянная $\rho(0)$ в этом уравнении определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = 1.$$

Поскольку мы ведем расчет для индуктивного импеданса, плотность $\rho(x)$ является четной функцией x [$\rho(-x) = \rho(x)$].

В виду неявной зависимости χ от x в такой модели при вычислении интегралов по x удобнее проводить замену переменной интегрирования согласно $u = \chi(x)$. Тогда, например, нормировоч-

ный интеграл записывается в виде

$$1 = \sqrt{2}\rho(0) \int_0^1 d\chi \frac{1 + \zeta\chi}{\sqrt{\zeta(1-\chi) - \ln \chi}}, \quad (14.21)$$

а длина пучка определяется выражением

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = 2\sqrt{2}\rho(0) \int_0^1 d\chi (1 + \zeta\chi) \sqrt{\zeta(1-\chi) - \ln \chi}. \quad (14.22)$$

Как видно из Рис.23, при большом токе пучка ($\zeta = N/N_0$) длина

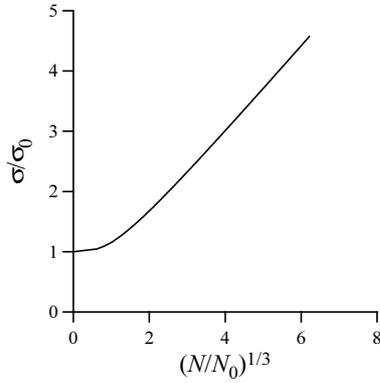


Рис. 23: Зависимость длины пучка от тока при взаимодействии с индуктивным элементом камеры.

пучка увеличивается согласно

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} \propto \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1/3}. \quad (14.23)$$

В обоих рассмотренных примерах значение длины сгустка при большом токе пучка находится в хорошем качественном соответствии с предположением о выполаживании потенциальной ямы синхротронных колебаний наведенными полями.

14.3 Синхротронные колебания в искаженной яме

Уменьшение крутизны потенциальной ямы синхротронных колебаний наведенным полем пучка искажает фазовые траектории и приводит к уменьшению частот синхротронных колебаний частиц. В рассмотренных примерах изменение частот может быть вычислено точно. Поскольку движение происходит в поле с потенциалом $U_{eff} = -\ln \rho(x)$, то определив гамильтониан выражением

$$h = \frac{q^2}{2} + U_{eff}(x), \quad q = p/\nu_{c0},$$

найдем, что переменная действие возмущенных колебаний определяется интегралом

$$J(h) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{x_2}^{x_1} dx \sqrt{h + \ln \rho}, \quad h + \ln \rho(x_{1,2}) = 0. \quad (14.24)$$

При этом частоты колебаний равны

$$\nu_c(J) = \nu_{c0} \frac{\partial h}{\partial J}. \quad (14.25)$$

Характер изменения частот полем пучка, наведенным в резистивных и индуктивных элементах, вообще, отличается. Это обстоятельство прослеживается уже при вычислении частот малых колебаний в искаженных ямах. В обоих случаях частота малых колебаний определяется второй производной U_{eff} , вычисленной в точке равновесия

$$U_{eff}(x) \simeq U_0 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2, \\ k = \left. \frac{d^2 U_{eff}}{dx^2} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{dU_{eff}}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (14.26)$$

При этом

$$\nu_c^2 = k\nu_{c0}^2. \quad (14.27)$$

Если пучок взаимодействует с резистивным элементом ($Z_n = Z_0$), то положение равновесия определяется уравнением

$$\left. \frac{dU_{eff}}{dx} \right|_{x=x_0} = - \left. \frac{\rho'}{\rho} \right|_{x=x_0} = x_0 + \xi\rho(x_0) = 0, \quad (14.28)$$

а вычисление второй производной дает

$$U''_{eff}(x_0) = 1 + \xi\rho'(x_0) \quad (14.29)$$

Поскольку согласно (14.28) $\rho'(x_0) = 0$ из (14.27) получаем

$$\nu_c^2 = \nu_{c0}^2. \quad (14.30)$$

Таким образом, в данном случае частоты малых синхротронных

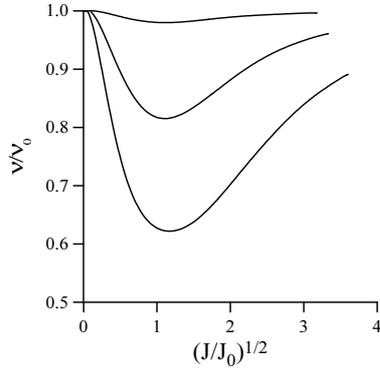


Рис. 24: Зависимость частоты синхротронных колебаний от действия. Сверху вниз $N/N_0 = 1, 4, 9$; $J_0 = R_0 p \nu_{s0} \sigma_0^2 / (2\alpha)$.

колебаний в искаженной и неискаженной ямах совпадают при

всех токах пучка. Влияние искажения ямы наведенными полями проявляется в заметном увеличении нелинейности колебаний, что приводит к своеобразной зависимости частот колебаний от действия J (Рис.21 и Рис.24), когда частота ν_c сначала уменьшается и после прохождения минимума постепенно возвращается к невозмущенному значению ν_{c0} . Как показано на Рис.24 глубина провала $\nu_c(J)$ увеличивается при увеличении тока пучка N , однако в абсолютных числах она невелика.

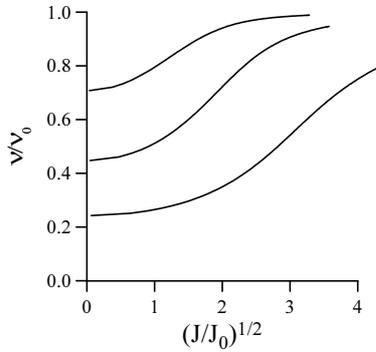


Рис. 25: Зависимость частоты синхротронных колебаний от амплитуды (\sqrt{J}) при взаимодействии пучка с индуктивным элементом. Сверху вниз $N/N_0 = 1, 4, 16$; $J_0 = R_0 p \nu_{c0} \sigma_0^2 / (2\alpha)$.

Совсем иную зависимость от J и тока пучка (N) имеет частота синхротронных колебаний частицы при искажении ямы индуктивными наведенными полями. В этом случае минимум U_{eff} приходится на точку $x_0 = 0$, в которой $\chi'(0) = 0$. Вычисление второй производной U_{eff} в этой точке приводит к следующему выражению для частоты малых синхротронных колебаний

$$\nu_c^2 = \frac{\nu_{c0}^2}{1 + N/N_0}. \quad (14.31)$$

Отсюда видно, что частота малых колебаний монотонно уменьша-

ется при увеличении тока пучка N . Такая тенденция сохраняется и для колебаний большой амплитуды (Рис.25). Качественно, ход кривых на Рис.25 напоминает зависимость $\nu_c(J)$, вычисленную для ямы с плоским дном и параболическими стенками

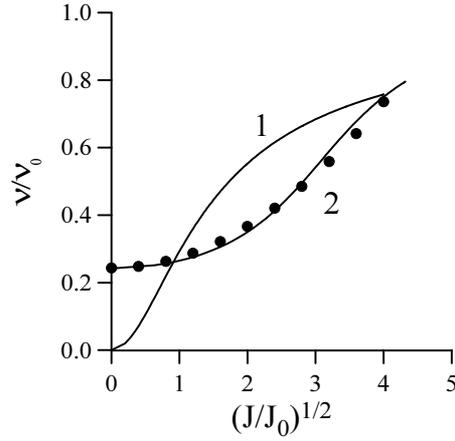


Рис. 26: Сравнение зависимостей $\nu_c(J)$, вычисленных с использованием формулы (14.32)– (1), и использованием уравнения Хайсинского (2, сплошная линия; $N/N_0 = 16$) для взаимодействия с индуктивным элементом и с учетом конечной продольной температуры пучка. Точки на кривой (2) показывают результат подгонки с помощью формулы $\nu_c = 0.2428 + u/5.7$; $u = J/J_0$, $J_0 = R_0 p \nu_{c0} \sigma_0^2 / (2\alpha)$.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| < x_1, \\ \frac{\nu_0^2 (x - x_1)^2}{2}, & |x| \geq x_1, \end{cases}$$

когда

$$\nu = \nu_0 \frac{J/J_0}{1 + J/J_0 + \sqrt{1 + J/J_0}}, \quad J_0 = \frac{2x_1^2}{\pi^2 \nu_0}. \quad (14.32)$$

Однако, прямое сравнение хода $\nu_c(J)$ с предсказываемым уравнением (14.32) указывает на большие расхождения такой упрощенной моделью даже для весьма больших токов пучка (Рис.26).

Уменьшение частот синхротронных колебаний частиц при увеличении тока пучка, а также немонотонная зависимость частоты от амплитуды в случае, когда пучок взаимодействует с резистивным элементом, в целом, ухудшают устойчивость стационарного состояния, определяемого уравнением Хайсинского и нарушают предположения, использовавшиеся при его получении. Ввиду различия в зависимости частоты синхротронных колебаний от амплитуды можно ожидать, что характер неустойчивости может быть различен для случаев, когда пучок взаимодействует с индуктивным, или резистивным элементами вакуумной камеры. В первом случае из-за уменьшения частоты малых колебаний частиц следует ожидать усиления роли неустойчивостей продольных или поперечных колебаний из-за связи синхротронных мод сгустка. Разброс частот синхротронных колебаний, сопровождающий искажение ямы, вообще, непросто влияет на устойчивость коллективных мод пучка. С одной стороны, увеличение разбросов частот колебаний усиливает затухание Ландау мод и тем способствует увеличению пороговых токов неустойчивостей. Это справедливо, по крайней мере, пока моды не связаны. Для обеспечения устойчивости связанных синхробетатронных мод, как мы уже видели в §11, необходим также разброс частот бетатронных колебаний. Далее, согласно формуле (14.31) с увеличением тока пучка (N) частота $[(m+1)\nu_c(0)]$ моды $m+1$ может стать меньше частоты

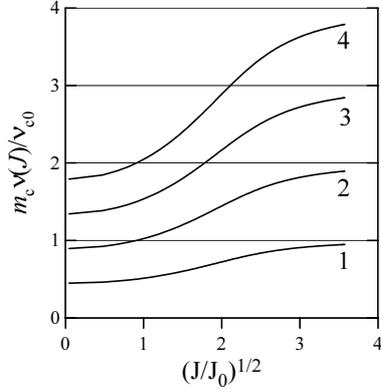


Рис. 27: Зависимости частот первых четырех гармоник функции распределения от амплитуд синхротронных колебаний (цифры около кривых указывают номера мультипольности). Импеданс электродов индуктивный; $N/N_0 = 4$.

$m(\nu_c)_0$ (см. Рис.27), если

$$N \geq (N_c)_m = N_0 \frac{2m+1}{m^2}. \quad (14.33)$$

При выполнении этого условия мода $m+1$ в области малых амплитуд и мода m в области больших амплитуд синхротронных колебаний оказываются резонансно связанными. Хотя исследование устойчивости когерентных колебаний в этом случае затруднено, можно заметить, что при уменьшении частоты малых колебаний на столько, что $\nu_c(0) < (\nu_c)_0/2$, искажение потенциальной ямы связывает все синхротронные моды, а когерентные колебания пучка становятся быстрыми. В таком случае, условия устойчивости когерентных колебаний перестают зависеть от разброса частот синхротронных колебаний и скорее определяются разбросом импульсов в пучке.

Наконец, если пучок взаимодействует с резистивным элементом, то помимо (более слабой) возможности перекрытия мод, из-за минимума в зависимости $\nu_c(J)$ резонансными оказываются колебания малых и больших амплитуд одной и той же моды. Кроме того, стационарное распределение, которое, напомним, вычислялось в адиабатическом приближении по бетатронным колебаниям,

будет весьма чувствительно к влиянию также и некогерентных резонансных возмущений. Последнее обстоятельство может быть особенно существенным, например, для устойчивости встречных пучков.

14.4 "Турбулентное" удлинение сгустков

Приведенные соображения и, что более важно, экспериментальное изучение эффекта удлинения сгустков в реальных машинах указывает на то, что начиная с некоторого порогового тока увеличение длины сгустка может определяться возможностью развития в нем (неустойчивых) когерентных колебаний. В отличие от удлинения за счет искажения потенциальной ямы такой процесс сопровождается ростом продольной температуры пучка. Надо заметить, что увеличение температуры не обязательно связано с возбуждением колебаний пучка с большими амплитудами. Можно показать, что наличие порогов неустойчивости, зависящих от температуры пучка, вообще препятствует охлаждению пучка под порог неустойчивости (см. например, в [1]). Причиной этого является аномальный рост уровня когерентных флуктуаций пучка в околороговой области и рассеяние частиц на этих флуктуациях. Удлинение сгустка из-за развития в нём коллективных неустойчивостей принято называть турбулентным, имея ввиду, что в такой процесс вносит вклад большое число коллективных мод пучка.

Последовательное описание нагрева пучка вблизи порогов неустойчивости его коллективных мод вообще говоря требует расчетов, выходящих за рамки применимости теории возмущений. Такая задача осложняется еще и тем, что в интересующих здесь случаях потенциальная яма синхротронных колебаний частиц далека от параболической. Поэтому величина равновесной температуры пучка определяется совместным изменением происходящих в нем кинетических и динамических процессов. В этой связи, для прак-

тических расчетов установившихся длин пучков за счет турбулентного удлинения обычно принимается, что равновесная продольная температура пучка (T) примерно соответствует выходу пучка на порог неустойчивости. Поскольку в сгруппированном пучке температура и длина пучка связаны соотношением

$$T = R_0 \frac{\Delta\omega_0^2}{|\omega'_0|} = R_0 \frac{\omega_c^2 \theta_b^2}{|\omega'_0|}, \quad (14.34)$$

увеличение температуры сопровождается удлинением пучка $l_b = 2R_0\theta_b$.

Вообще, даже такой упрощенный способ расчета может потребовать довольно сложных вычислений пороговых токов пучка. Тем не менее, для оценки эффекта можно воспользоваться тем фактом, что при релятивистских энергиях частиц большая часть машин работает выше своей критической энергии. Поэтому так, или иначе, условия устойчивости в основном соответствуют выполнению Z/n -критерия. Как мы видели в §4, величина порогового тока в этом критерии зависит от номера азимутальной гармоники моды. Для сгруппированного пучка в соответствующий критерий устойчивости входят суммы Z_n/n с некоторыми весами, зависящими от устройства мод. Чтобы избежать сложных вычислений и оценить продольную температуру сгустка по порядку величины, принимается, что условие устойчивости определяется гармониками с $|n|\theta_b \leq 1$. Для достаточно длинных пучков принимается также, что входящая в Z/n -критерий величина Z/n начинает изменяться после такого $|n| = n_0$, что $n_0\theta_b \gg 1$, а наведенные поля определяются линейной плотностью пучка. В этом случае Z/n -критерий записывается в виде

$$\Delta\omega_0^2 = \frac{Ne^2\omega_s\omega'_0}{l_b} \left(\frac{-iZ_n}{n} \right), \quad |n| < n_0, \quad (14.35)$$

Воспользовавшись (14.34), мы перепишем это соотношение в виде

$$\theta_b^2 = \frac{Ne^2\omega_s\omega'_0}{l_b\omega_c^2} \cdot \left(\frac{-iZ_n}{n} \right) \quad (14.36)$$

При этом длина пучка ($l_b = 2R_0\theta_b$) увеличивается пропорционально $N^{1/3}$

$$l_b \propto y^{1/3}, \quad y = \frac{N\alpha}{pcv_c^2}.$$

Такая зависимость длины пучка от его тока наблюдалась на многих установках.

15 Суммы декрементов коллективных мод

Вычисление собственных частот коллективных мод пучка часто требует решения весьма сложных линейных интегральных уравнений. Встречающиеся при этом математические трудности делают особенно привлекательными методы анализа таких общих свойств спектров и вычисления таких величин, которые не требуют непосредственного решения этих интегральных уравнений. Как известно, для линейных интегральных уравнений такими величинами являются инварианты, выражающиеся через свертки различных степеней ядра данного уравнения. Простейшей величиной такого рода является сумма собственных чисел. Если интересующие уравнения имеют вид

$$\lambda w_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sum_{m'} K_{m,m'}(x, x') w_{m'}(x'), \quad (15.1)$$

а α нумерует собственные решения, то искомая сумма выражается через след ядра:

$$\lambda_\Sigma = \sum_\alpha \lambda_\alpha = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dx K_{m,m}(x, x). \quad (15.2)$$

Важность такого инварианта обусловлена его связью с суммами декрементов коллективных мод пучка, характеризующими возможность, или невозможность демпфирования этих колебаний "в среднем". Из определения сумм декрементов ясно, что разумно рассмотреть отдельно свойства сумм декрементов мод в отсутствие разбросов частот и сумм декрементов затухания Ландау. Для упрощения вычислений мы обсудим свойства сумм декрементов монохроматического пучка (обсуждение свойств сумм декрементов с учетом затухания Ландау можно найти в книгах [1] или [2]). В этом случае собственные частоты мод находятся решением уравнения (5.21), которое мы перепишем в виде

$$\Delta\omega_m f_m = Ne^2 \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \sum_{m'_c} \sum_n \int d\Gamma' G_{m,n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}', \omega + n\omega_s) f_{m'}(\mathbf{I}'). \quad (15.3)$$

В этом уравнении учтено, что реально коллективное взаимодействие связывает лишь синхротронные моды пучка. Если наведенные поля представляются "хорошим" набором осцилляторов, то уравнение (15.3) заменяется следующей системой линейных уравнений для амплитуд

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m &= \mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \sum_k \sum_n (\mathbf{v}\mathbf{A}_k)_{m,n} q_{k,n}, \\ [\omega_k^2 - (\omega + n\omega_s + i\lambda_k)^2] q_{k,n} &= Ne^2 \int d\Gamma' \sum_m (\mathbf{v}\mathbf{A}_k)_{m,n}^* f_m(\mathbf{I}'). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Сумма декрементов решений этих уравнений очевидно равна сумме декрементов осцилляторов поля

$$\sum_{\alpha} (-\text{Im}\Delta\omega_{\alpha}) = \sum_k \lambda_k. \quad (15.5)$$

Эта величина положительная и поэтому имеется по крайней мере принципиальная возможность обеспечения устойчивости всех мод. Поскольку связь пучка с наведенными полями перераспределяет декременты λ_k между осцилляторами поля и коллективными модами пучка, точное соотношение (15.5), к сожалению, не дает представления о относительной доле λ_k вносимой в коллективные колебания пучка. Мы уже видели, что при нерезонансном взаимодействии эта доля вообще невелика. В этой связи, оценка потенциальной возможности демпфирования колебаний с помощью той или иной системы должна проводиться прямым вычислением суммы декрементов уравнений (15.4). Предполагая, что пучок взаимодействует с низкодобротной системой электродов и используя (15.2), пишем

$$\Delta\omega_\Sigma = Ne^2 \sum_{m,n} \int d\Gamma \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) G_{mn}(1, 1, \omega_{mn}). \quad (15.6)$$

Учитывая, что на действительной оси ω

$$\operatorname{Re}G(\omega) = \operatorname{Re}G(-\omega), \quad \operatorname{Im}G(\omega) = -\operatorname{Im}G(-\omega),$$

получаем, что $\Delta\omega_m = -\Delta\omega_{-m}$. Поэтому $\Delta\omega_\Sigma = -i\delta_\Sigma$, а

$$\begin{aligned} \delta_\Sigma &= -Ne^2 \sum_{m,n} \int d\Gamma \left(\mathbf{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{I}} \right) \operatorname{Im}G_{mn}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{mn}) \\ &= Ne^2 \sum_{m,n} \int d\Gamma f_0 \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \operatorname{Im}G_{mn}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{mn}). \end{aligned} \quad (15.7)$$

Чтобы понять смысл полученного соотношения, вычислим декременты потерь энергии частицы за счет реакции ее излучения в ту же систему электродов. Поскольку I_α – интегралы движения

невозмущенных колебаний, в первом приближении метода усреднения пишем

$$\begin{aligned}\frac{dI_\alpha}{dt} &= \overline{\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}}, \quad \Gamma = (\mathbf{p}, \mathbf{r}), \\ \overline{\frac{\partial L}{\partial \psi}} &= e^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^\infty d\tau G(\Gamma(t), \Gamma(t - \tau), \tau).\end{aligned}\quad (15.8)$$

Используя разложение

$$\begin{aligned}G(\Gamma(t), \Gamma(t - \tau), \tau) &= \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} \sum_{n, n'} G_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}^{n, n'} \\ &\times \exp[i\mathbf{m}\boldsymbol{\psi}(t) - \mathbf{m}'\boldsymbol{\psi}(t - \tau) + n\theta(t) - n'\theta(t - \tau)],\end{aligned}$$

убеждаемся, что в нерезонансном случае ($\mathbf{m}\boldsymbol{\nu} \neq l$), усреднение по времени отбирает в (15.8) гармоники $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ и $n = n'$. После этого \overline{L} записывается в виде

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial L}{\partial \psi}} &= ie^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \int_0^\infty d\tau G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \tau) e^{i\tau[\mathbf{m}\boldsymbol{\omega} + n\omega_s]} \\ &= ie^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{\mathbf{m}, n}) \\ &= -e^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \text{Im} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{\mathbf{m}, n}),\end{aligned}\quad (15.9)$$

что дает

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = -e^2 \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{m} \text{Im} G_{\mathbf{m}, n}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \omega_{\mathbf{m}, n}).\quad (15.10)$$

Если теперь определить мгновенные декременты частиц соотношением

$$\delta_a = -\frac{\partial \dot{I}_a}{\partial I_a},$$

то согласно уравнению (15.10) сумма мгновенных декрементов всех частиц пучка, взаимодействующих с системой независимо друг от друга, равна

$$\delta_{\Sigma} = \sum_{a=1}^N \delta_a = \sum_{a=1}^N e^2 \sum_{\mathbf{m},n} \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \text{Im} G_{m,n}(\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_a, \omega_{m,n})$$

Заменяв в этом соотношении суммирование по частицам усреднением с функцией распределения частиц, получим, что величина

$$\delta_{\Sigma} = N e^2 \int d\mathbf{I} \sum_{\mathbf{m},n} \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \text{Im} G_{m,n}(\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_a, \omega_{m,n}) \quad (15.11)$$

точно равна сумме декрементов мод когерентных колебаний. Таким образом, мы установили, что для монохроматического пучка сумма декрементов мод когерентных колебаний равна сумме декрементов отдельных частиц, взаимодействующих с той же системой независимо друг от друга (Я.С. Дербенев, Н.С. Диканский, Д.В. Пестриков 1970 [19]).

Это утверждение носит название теоремы о сумме декрементов коллективных колебаний. Обратим внимание на то, что в отличие от демпфирования за счет реакции синхротронного излучения частиц, суммы декрементов когерентных мод определяются не полной мощностью излучения, а модуляцией парциальных мощностей. По этой причине, разумное усиление демпфирования когерентных колебаний не ужесточает энергетических проблем установок.

Поскольку

$$\left\langle \sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha}}{\partial I_{\alpha}} \right\rangle = - \langle \text{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \rangle, \quad (15.12)$$

суммы декрементов коллективных мод пучка, взаимодействующего с низкочастотной системой, слабо зависят от особенностей

колебаний частиц относительно замкнутой орбиты. В частности, суммы декрементов дипольных мод не зависят от связи радиального и продольного движения частиц. Это важное утверждение можно проиллюстрировать следующими простыми вычислениями.

Пусть пучок взаимодействует с низкодобротной системой, импеданс которой точно равен нулю на равновесной орбите, а радиальный градиент этого импеданса не равен нулю. При этом гармоники продольного наведенного поля равны

$$E(n, \omega) = -\frac{e\omega_s}{\Pi} \int d\Gamma Z_n(x, \omega) f_{n, \omega}, \quad (15.13)$$

а уравнение для синхротронных когерентных колебаний принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\omega_m f_m = & \frac{Ne^2\omega_s}{2\pi} m_c \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \int_{-\infty}^{\infty} dn J_{m_c}(n\varphi) \\ & \times \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' f_m \left\{ \frac{iZ_n(x, n\omega_s + m_c\omega_c)}{n + m_c\nu_c} e^{in\varphi \cos\psi_c} \right\}_{m_c}. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Теперь примем во внимание, что

$$Z_n(x, \omega) = \left(\frac{\partial Z'}{\partial x} \right)_s x = \left(\frac{\partial Z'}{\partial x} \right)_s \eta \frac{\Delta p}{p},$$

а также предположим, что Z является чисто активным импедансом ($Z = Z' + iZ''$, $Z'' = 0$) и не зависит от частоты ω

$$\left| \frac{\partial Z'}{\partial \omega} \right| \ll \left| \frac{Z'}{\omega} \right|.$$

В этом случае вычисление гармоник в (15.14) дает

$$\begin{aligned}
& [\Delta p/p \exp(in\varphi \cos \psi_c)]_{m_c} = \\
& = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_c}{2\pi} \frac{\Delta p}{p} \exp(in\varphi \cos \psi_c - im\psi_c) \\
& = - \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_c}{2\pi} \frac{\nu_c}{\alpha_p} \varphi \sin \psi_c \exp(in\varphi \cos \psi_c - im\psi_c) \\
& = \frac{m_c \nu_c}{\alpha_p n} J_{m_c}(n\varphi).
\end{aligned}$$

Удерживая в (15.14) низшие степени $m_c \nu_c$, вместо (15.14) получим

$$\begin{aligned}
\Delta \omega_m f_m & = i \frac{N e^2 \omega_s}{2\pi} \frac{m_c^2 \nu_c}{\alpha_p} \frac{\partial f_0}{\partial I_c} \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \left(\frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \\
& \times J_{m_c}(n\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n\varphi') f_m, \quad |m_c \nu_c| \ll 1. \quad (15.15)
\end{aligned}$$

Подстановки $u = \sqrt{\varphi^2/2}$, $f_m = \chi_m \sqrt{-\partial f_0/\partial u}$ и

$$\Delta \omega_m = -i \Lambda \frac{N e^2 \omega_s}{2\pi p} \frac{m_c^2}{R_0}, \quad (15.16)$$

позволяют преобразовать это уравнение в интегральное уравнение с действительным, симметричным ядром

$$\begin{aligned}
\Lambda \chi_m & = \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \left(\frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \int_0^{\infty} du' K_m(u, u') \chi_m(u'), \\
K_m(u, u') & = \sqrt{\frac{\partial f_0}{\partial u} \frac{\partial f_0}{\partial u'}} J_{m_c}(n\sqrt{u}) J_{m_c}(n\sqrt{u'}). \quad (15.17)
\end{aligned}$$

Ядро этого уравнения будет положительно определенным

$$\int_0^{\infty} dx dx' w(x) K(x, x') w(x') > 0$$

и следовательно все Λ – положительными действительными числами, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s > 0. \quad (15.18)$$

Согласно соотношению (15.16) в этом случае все синхротронные когерентные моды пучка будут затухать. Суммы декрементов мод с заданным m_c даются выражениями

$$\delta_{\Sigma}^{(m)} = -\omega_s \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p v} m_c^2 \int_0^{\infty} du \frac{\partial f_0}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \left(\eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s J_{m_c}^2(n\sqrt{u}), \quad (15.19)$$

а полная сумма декрементов синхротронных мод получается суммированием $\delta_{\Sigma}^{(m)}$ по m_c . Необходимая для этого сумма

$$S_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 J_m^2(x)$$

вычисляется с использованием разложения

$$\exp(ix \cos \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\psi},$$

или

$$\frac{d}{d\psi} \exp(ix \cos \psi) = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} m J_m(x) e^{im\psi}.$$

Отсюда, после возведения обеих частей равенства в квадрат по модулю и усреднения по ψ , получаем

$$S_2 = x^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \sin^2 \psi = \frac{x^2}{2},$$

а

$$\delta_{\Sigma}^{(c)} = \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \delta_{\Sigma}^{(m)} = \omega_s \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p v} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s. \quad (15.20)$$

Теперь, для выяснения зависимости суммы декрементов синхротронных и радиальных мод от радиально-продольной связи колебаний частиц нам нужно вычислить сумму декрементов дипольных ($m_x = \pm 1$) радиальных бетатронных и синхробетатронных когерентных колебаний. В данном случае кажется удобным исходить из общего интегрального уравнения, записанного с использованием выражения

$$\dot{I}_\alpha = \frac{\partial I_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F}.$$

При этом

$$(\omega - m_x \omega_x - m_c \omega_c) f_m = -i \overline{\left(\frac{\partial I_x}{\partial \Delta p} e E_\vartheta \right)_{m_x, m_c}} \frac{\partial f_0}{\partial I_x}. \quad (15.21)$$

Предполагая как и прежде, что в месте расположения электродов $\eta' = 0$, пишем

$$I_x = \frac{p \nu_x a_x^2}{2R_0}, \quad \frac{\partial I_x}{\partial \Delta p} = -\frac{\nu_x \eta}{R_0} a_x \cos \psi_x. \quad (15.22)$$

Подстановка этого выражения в (15.21) после вычисления гармоник приводит к следующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \Delta \omega_m f_m &= -i \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \frac{N e^2 \omega_s}{2\Pi p} \sqrt{I_x} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \\ &\times J_{m_c}(n_1 \varphi) \int d\Gamma' \sqrt{I'_x} J_{m_c}(n_1 \varphi') f_m \end{aligned}$$

где $\Delta \omega_m = \omega - m_x \omega_x - m_c \omega_c$. Подставив сюда $f_0 = F_0(I_x) \rho(\varphi)$ и $f_m = \chi_m(\varphi) \sqrt{I_x} \partial F_0 / \partial I_x$, получим

$$\begin{aligned} \Delta \omega_m \chi_m &= i \rho(\varphi) \frac{N e^2 \omega_s}{2\Pi p} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s \\ &\times J_{m_c}(n_1 \varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_c}(n_1 \varphi') \chi_m(\varphi'). \quad (15.23) \end{aligned}$$

След ядра полученного уравнения дает искомую сумму декрементов бетатронных и синхробетатронных мод. Учитывая, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(x) = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma}^{(x)} &= \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} (\delta_{1,m_c} + \delta_{-1,m_c}) \\ &= -\omega_s \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi p v} \int_{-\infty}^{\infty} dn \left(\eta \frac{\partial Z'_n}{\partial x} \right)_s. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Теперь, сложение выражений (15.20) и (15.24) дает

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{\Sigma}^{(c)} + \delta_{\Sigma}^{(x)} = 0, \quad (15.25)$$

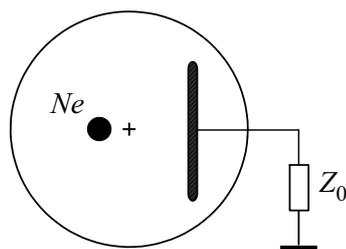
что доказывает наше утверждение.

15.1 Задачи к Лекции 15

1. Преобразованием к эквивалентному дифференциальному уравнению решить уравнение (15.23) для случая, когда

$$\rho(\varphi) = \frac{\varphi_0}{\varphi_0^2 + \varphi^2}.$$

2. Вычислить поправку к декременту радиальных когерентных колебаний, описывающую эффект радиально-продольной связи для сгустка, взаимодействующего с вертикально расположенной согласованной пластиной (см. рисунок). Длина пластины велика по сравнению с длиной сгустка.



Библиография

- [1] Н.С. Диканский, Д.В. Пестриков. Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989.
- [2] N.S. Dikansky, D.V. Pestrikov. Physics of Intense Beams and Storage Rings. AIP PRESS, New York, 1994.
- [3] А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. Москва: Физматгиз, 1962.
- [4] А.Н. Лебедев, А.В. Шальнов. Основы физики и техники ускорителей. Москва: Энергоатомиздат, 1991.
- [5] В.И. Балбеков, А.А. Коломенский. ЖТФ, **37**, стр. 2021, 1967.
- [6] А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Атомная энергия, т. 7, с. 549, 1958.
- [7] E. Keil, W. Schnell. CERN-ISR-TH-RF-69-48. CERN, 1969.
- [8] Я.С. Дербенев, Н.С. Диканский. Препринт ИЯФ 315, Новосибирск 1969.
- [9] A.N. Lebedev. In Proc. of the 6th Intern. Conf. on High Energy Accel. Cambridge, Mass. p. 284, 1967.
- [10] C. Pellegrini. Il Nuovo Cimento, **64A**, p. 447, 1969.
- [11] M. Sands. SLAC TN-69-8, SLAC, 1969.
- [12] Я.С. Дербенев, Н.С. Диканский. Труды Всесоюзн. совещан. по ускорителям заряженных частиц. Москва 1968 г. Т. 2, с. 391 – Москва, 1970.
- [13] R.D. Kohaupt. DESY Report 80/22, 1980.

- [14] D.V. Pestrikov. Particle Accelerators, **41**(1), p. 13, 1993.
- [15] D.V. Pestrikov. Nucl. Instr. and Meth. in Physics Research, A-373, p. 179, 1996.
- [16] В.Е. Балакин, И.А. Кооп, А.В. Новохатский, А.Н. Скринский, В.П. Смирнов. В Трудах IV Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т.1, стр. 143, Дубна 1978, Дубна, 1979; см. также в V.E. Balakin, A.V. Novokhatski, V.P. Smirnov. In the Proceedings of the 12th Intern. Conf. on High Energy Accel., p. 119, Fermilab, 1983.
- [17] J. Haissinski. Il Nuovo Cimento, **18B**, p. 72, 1973.
- [18] A.G. Ruggiero et al. IEEE Trans. On Nucl. Science, **NS-24**, p. 1205, 1977.
- [19] Я.С. Дербенев, Н.С. Диканский, Д.В. Пестриков. В Трудах II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т. 2, стр. 62, Москва 1970, Москва: Наука 1972.