

# Механика и теория относительности

## Задание 1. Нерелятивистская и релятивистская кинематика

(сдать до 15 октября)

Задачи 6–10 — релятивистские.

1. Студент массой  $m$ , стоящий на неподвижной лодке массой  $M$ , прыгает на берег под углом  $\alpha$  к горизонту и приземляется на линии берега через время  $t$ . На каком расстоянии от берега будет находиться лодка в момент его приземления?

2. Конвейерная лента движется со скоростью  $V = 1$  м/с. Начальная скорость бруска на этой ленте равна (относительно земли)  $u = 2$  м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какова минимальная скорость бруска относительно земли при последующем движении? Коэффициент трения бруска о ленту достаточно велик, чтобы предотвратить падение бруска с ленты.

3. С обода катящегося без проскальзывания велосипедного колеса радиуса  $R$  отрываются частицы грязи. Найти максимальную высоту относительно центра колеса, на которую подлетают частицы. Скорость центра колеса  $v > \sqrt{gR}$ .

4. Материальная точка движется по окружности радиуса  $R$  без начальной скорости с постоянным по величине полным ускорением  $|\mathbf{a}(t)| = a$ . На какой угол повернется радиус-вектор частицы из центра окружности к моменту, когда скорость частицы достигнет максимального значения?

5. Катер переплывает реку шириной  $L$  с постоянной скоростью  $v$  относительно воды. Скорость течения реки меняется по линейному закону, от нуля на берегах до  $u$  в середине реки. Под каким постоянным углом  $\alpha$  к берегу должен плыть катер, чтобы попасть в строго противоположную точку на другом берегу?

6. Человек бежит со скоростью  $V$  в сторону туннеля длиной  $L$ , в дальнем конце которого находится источник света. В тот момент, когда человек вбегает в туннель, источник одновременно (в системе туннеля) излучает фотон, который движется по туннелю к человеку. Когда человек и фотон встречаются, местоположение человека составляет долю  $f$  вдоль туннеля. Чему равно  $f$ ? Решить задачу сначала в системе туннеля, затем в системе человека.

7. Когда космический корабль пролетает мимо Земли со скоростью  $v = 4c/5$ , наблюдатели на корабле и на Земле запускают каждый свои часы. Через  $t'_0 = 30$  минут по часам корабля с него отправляют радиосообщение назад на Землю.

а) Какое время показывают часы наблюдателя на Земле в момент получения сигнала?  
б) Сразу после получения сообщения с корабля станция на Земле посылает свой ответ на корабль. Какое время будут показывать часы на корабле в момент приема ответа?  
Решить задачу в буквенном виде и получить численный ответ.

8. Две лампы, расстояние между которыми в системе  $S$  равно  $l$ , зажглись одновременно в  $S$ . В другой инерциальной системе  $S'$  лампы включились на расстоянии  $l'$  друг от друга через промежуток времени  $\tau$ .

а) Выразить  $l$  через  $l'$  и  $\tau$ .

б) Предполагая дополнительно, что система  $S'$  движется вдоль прямой, соединяющей две лампы, найти относительную скорость двух систем.

9. Два космических истребителя решили устроить гонку. Скорость первого истребителя  $\beta_1 = 1/2$ , скорость второго  $\beta_2 = 47/74$ . Неожиданно на их пути из гиперпространства выходит (с нулевой скоростью) крейсер, и в него врезается второй истребитель, когда его часы показывают время  $\tau = 30$  с.

а) Какое время  $\tau_1$  покажут часы пилота первого истребителя, когда он увидит столкновение?

б) Сколько времени  $\delta t$  у него останется на маневр уклонения?

Решить задачу в буквенном виде и получить численный ответ.

10. Между излучением и поглощением фотона с частотой  $\omega$  в системе  $S$  проходит время  $\Delta t$ . В другой инерциальной системе  $S'$  промежуток времени между излучением и поглощением фотона равен  $\Delta t'$ . Найти частоту фотона в системе отсчета  $S'$ .

## Задание 2. Нерелятивистская и релятивистская динамика

(сдать до 15 ноября)

Задачи 6–9 — релятивистские.

1. На внутренней поверхности жесткого обруча радиуса  $R$  и массой  $m$ , который может катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости, закреплено небольшое тело той же массы. Какую скорость должен иметь центр обруча в тот момент, когда тело находится в нижнем положении, чтобы обруч подпрыгивал, когда тело будет находиться в верхнем положении?

2. Шарик массой  $m$  падает в поле тяжести без начальной скорости с высоты  $h$  на плиту. На шарик действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату скорости:  $F_c = kv^2$ . На какую высоту  $h'$  поднимется шарик после упругого удара о плиту?

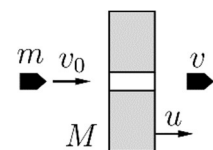
3. Три маленьких шарика с массами  $m$  несут одинаковый электрический заряд  $q$  и соединены нитями из изолирующего материала так, что образуют треугольник  $ABC$ , где  $|AB|=|AC|$ , угол  $\angle BAC = 120^\circ$  и длина нити  $|BC|$ , противоположной шарика  $A$ , равна  $L$ . Нить  $BC$  перерезают. Найти

а) максимальную скорость шарика  $A$  при последующем движении,

б) ускорение шариков сразу после перерезания нити.

Гравитационным взаимодействием пренебречь.

4. Пуля массой  $m$ , двигавшаяся с начальной скоростью  $v_0$ , пробивает массивную незакрепленную, первоначально покоящуюся мишень массой  $M = 8m$ . Во время проникания на пулю действует известная постоянная сила сопротивления  $F$ . На выходе из мишени скорость пули в два раза больше скорости мишени.

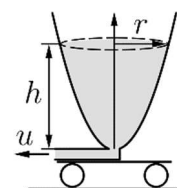


а) Определить законы движения пули  $v(t)$  и мишени  $u(t)$ .

б) Найти время проникания  $\tau$ .

в) Какая доля начальной энергии пули перейдет в тепло?

5. На тележке, покоящейся на рельсах, вертикально установлена емкость в виде параболоида вращения  $h(r) = kr^2$ , заполненная водой до высоты  $h_0$ . Вода вытекает параллельно рельсам через трубу малого диаметра вблизи вершины параболоида со скоростью  $u = \sqrt{2gh}$  относительно тележки. Найти скорость тележки к моменту истечения всей жидкости. Массу тележки с пустой емкостью считать пренебрежимо малой, трением пренебречь.



6. Фотон с энергией  $E_0$  сталкивается со встречным фотоном неизвестной энергии и рождает нестабильную частицу, которая распадается на два фотона, один из которых имеет энергию  $E_1$  и летит перпендикулярно линии движения исходных фотонов. Найти массу этой частицы.

7. Пучок протонов, ускоренных до очень высокой энергии, падает на бериллиевую мишень и образует ливень частиц. Два детектора размещаются за мишенью симметрично относительно оси пучка протонов в одной плоскости с этой осью. Каждый детектор составляет угол  $45^\circ$  с осью пучка протонов и регистрирует  $\mu^+\mu^-$ -пары, один тип частиц в каждом детекторе. Когда импульс каждого мюона равен  $2.2 \text{ ГэВ}/c$ , наблюдается увеличение скорости счета мюонов. Это интерпретируется как возникновение резонанса  $R$  массой  $M_R$ , распадающегося на мюоны. Какова масса  $M_R$  этого резонанса? Масса мюона  $m_\mu = 106 \text{ МэВ}/c^2$ .

8. Фотон с энергией  $E_0$  сталкивается с покоящейся частицей массой  $m$ . Найти  
 а) суммарную энергию этих частиц в системе центра инерции,  
 б) импульс частицы  $m$  в системе центра инерции.

9. Электрон ускоряется из состояния покоя в прямолинейном изолированном вакуумном цилиндре длиной  $L = 100 \text{ м}$  с постоянным электрическим полем вдоль трубки напряженностью  $\mathcal{E} = 10^4 \text{ В/м}$ . За какое время частица пройдет через трубку?

10. Нерелятивистская частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  рождается с начальной скоростью  $v_0$ , направленной перпендикулярно однородному магнитному полю  $B$ . На частицу действует сила трения, пропорциональная ее скорости,  $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\alpha\mathbf{v}$ . На каком расстоянии от точки старта частица остановится? Схематично нарисовать траектории частицы при слабом и сильном трении.

### Задание 3. Одномерное движение. Колебания. Центральное поле. Движение твердого тела. Неинерциальные системы

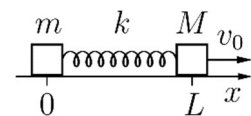
(сдать до 27 декабря)

1. Частица массой  $m$  совершает одномерное движение в поле с потенциальной энергией  $U(x) = -U_0(x/a)e^{-x/a}$ , где  $U_0, a$  — положительные постоянные.

а) Построить качественный график потенциальной энергии, найти положение устойчивого равновесия и частоту малых колебаний вблизи положения равновесия.

б) При какой энергии  $E$  возможно колебательное движение частицы?

2. Два маленьких бруска с массами  $m$  и  $M$ , соединенные недеформированной пружиной жесткости  $k$ , покоятся на гладком столе на расстоянии  $L$  друг от друга. Бруску  $M$  коротким ударом сообщается скорость  $v_0$  вдоль пружины. Найти зависимости координат брусков от времени  $x_m(t)$  и  $x_M(t)$ .



3. В чаше сферической формы по горизонтальной траектории скользит бусинка массой  $m$ . Траектория расположена на широте  $45^\circ$  ниже экваториальной плоскости. Во сколько раз надо увеличить скорость бусинки, чтобы она достигла высоты экватора?

4. Рассмотрим однородный куб. Найти отношение гравитационной потенциальной энергии точечной массы в углу куба к гравитационной потенциальной энергии той же массы в центре куба.

5. Планета движется вокруг звезды по эллипсу с большой полуосью  $a$ . Звезда взрывается, и половина ее массы быстро разлетается на бесконечность. Эксцентриситет орбиты планеты при этом не изменяется. Найти новую большую полуось орбиты  $a_1$ .

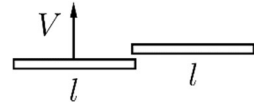
6. Тело, движущееся в центральном поле, описывает траекторию  $r = a/\sin(b\theta)$ , где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные, причем  $b > 1$ .

а) Нарисовать траекторию, указать направление движения, расстояния и углы.

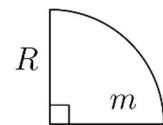
б) Найти потенциал  $U(r)$  этого поля с точностью до постоянного множителя. Это поле притяжения или отталкивания?

7. Частице массой  $m$ , двигавшейся по круговой орбите радиуса  $R$  под действием силы  $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$  с положительной постоянной  $\alpha$ , сообщили толчок в радиальном направлении, так что ее энергия увеличилась на  $\Delta E$ . Найти амплитуду и частоту возникших малых радиальных колебаний частицы и сравнить эту частоту с угловой частотой орбитального движения.

8. Палка летит перпендикулярно своей оси со скоростью  $V$  и задевает концом другую такую же неподвижную палку. Удар упругий. Найти конечные поступательные и угловые скорости палок.



9. Вычислить момент инерции четверти диска радиуса  $R$  и массой  $m$  относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости фигуры.



10. Окружность радиуса  $R$  из тонкой гладкой проволоки вращается вокруг вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  в поле тяжести. Бусинка, надетая на проволоку, находится в равновесии на некотором расстоянии от оси вращения. При какой частоте вращения возможно такое равновесие и является ли оно устойчивым? Чему равна частота малых колебаний бусинки вблизи этого равновесия?