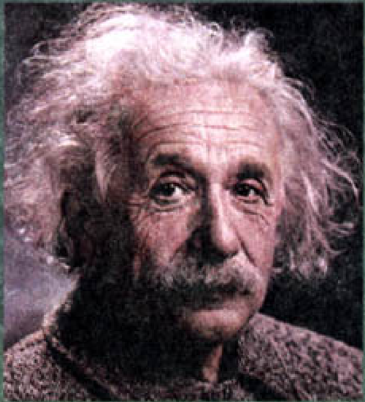
 

Задачи по механике и теории относительности

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

ЗАДАЧИ ПО МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

Под редакцией В. И. Тельнова

Новосибирск
2016

УДК 530.12:531.18 531
ББК 22.2 22.3
З 153

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 гг.

Учебное пособие рекомендовано к изданию Ученым советом физического факультета НГУ.

З 153 **Задачи по механике и теории относительности** : учеб. пособие / Т. Д. Ахметов, А. В. Болеста, Ф. А. Еманов, А. С. Руденко, В. И. Тельнов, А. А. Шошин ; под ред. В. И. Тельнова ; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. – 170 с.

ISBN 978-5-4437-0562-0

Сборник содержит задачи по механике и теории относительности для изучения курса общей физики на физических факультетах университетов. Основу пособия составляют оригинальные задачи, предложенные преподавателями Новосибирского государственного университета – сотрудниками физических институтов Сибирского отделения РАН для семинаров и самостоятельной работы студентов. Задачи сгруппированы в соответствии с программой семинарских занятий на физическом факультете НГУ. Каждая глава начинается с напоминания теории, для многих задач наряду с ответами приведены решения задач.

УДК 530.12:531.18 531
ББК 22.2 22.3

ISBN 978-5-4437-0562-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник содержит около 320 задач по механике и теории относительности и предназначен в первую очередь для студентов первого курса физического факультета Новосибирского государственного университета. Особенностью курса общей физики на физфаке НГУ является достаточно подробное изучение специальной теории относительности. Эта традиция была заложена с самого основания НГУ академиком Г. И. Будкером. Данный задачник, читаемый на физфаке в первом семестре первого курса, следует базовому учебнику В.И. Тельнова «Механика и теория относительности» и излагается в следующей последовательности: введение, нерелятивистская кинематика, релятивистская кинематика, нерелятивистская динамика, релятивистская динамика. Затем следуют традиционные разделы: одномерное движение, колебания, волны в упругой среде, движение в центральном поле, движение твердого тела, элементы гидродинамики, неинерциальные системы отсчета, элементы общей теории относительности. Именно в таком же порядке подобраны задачи, которые предлагаются для решения на семинарских занятиях, домашней работы и самостоятельного изучения. Для всех задач даны ответы, а для многих приведены решения. Каждая тема начинается с напоминания теории.

Большинство задач взято из сборников задач, предложенных преподавателями НГУ для семинарских занятий и контрольных работ и издававшихся несколько раз начиная с 1978 г. Последнее такое издание было подготовлено Ю. И. Бельченко, Е. А. Гилевым, З. К. Силагадзе в 2008 г. Также использовались другие задачники и авторские наработки.

В вводной части дано около 20 «школьных» задач по механике с решениями, предлагавшихся ранее на вступительных письменных экзаменах в НГУ. Студентам предлагается посмотреть их самостоятельно, после чего, через 15–20 дней после начала семестра, проводится контрольная работа по аналогичным задачам, чтобы получить первое представление о принятых на физфак НГУ студентах.

ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

ШКОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МЕХАНИКЕ

1. Ускорение свободного падения у поверхности планеты равно g_0, а на высоте h над поверхностью – g. Найдите радиус планеты.

Решение.

На расстоянии R от центра сила тяжести $mg_0 = GMm/R^2$, а для $R + h$: $mg = GMm/(R+h)^2$. Отсюда $R = h/(\sqrt{g_0/g} - 1)$.

2. Мотоциклист едет ночью по окружности радиуса R со скоростью V (рис. 2а). Свет фары образует конус с углом раствора 2α. В течение какого времени видит свет фары наблюдатель, находящийся на очень большом расстоянии?

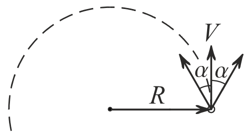


Рис. 2а

Решение.

Свет идет вверх (рис. 2б), в направлении наблюдателя, пока мотоциклист движется по дуге AB, соответствующей изменению направления движения на угол 2α. Дуга AB равна $l = R \cdot 2\alpha$. Время наблюдения $t = 2R\alpha/V$.

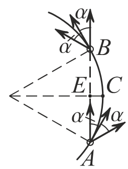


Рис. 2б

3. Летевший вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. Осколки снаряда выпадают на землю в течение времени τ. Найдите скорость осколков в момент взрыва. Ускорение свободного падения равно g.

Решение.

Высота взрыва $h = ut_1 + gt_1^2/2 = -ut_2 + gt_2^2/2$, откуда $\tau = t_2 - t_1 = 2u/g$, т. е. $u = g\tau/2$.

4. После упругого столкновения с покоящейся частицей массой M налетающая частица полетела под прямым углом к первоначальному направлению движения, а частица M – под углом α к этому направлению. Найдите массу m налетающей частицы.

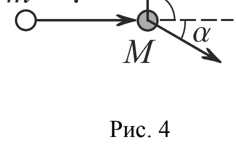


Рис. 4

Решение.

Пусть скорость налетающей частицы равна v, после рассеяния u, а частица с массой M приобретает скорость V. Из закона сохранения импульса: $MV\sin\alpha = mu$, $MV\cos\alpha = mv$, откуда $u = v\,\mathrm{tg}\alpha$, а $V = mv/M\cos\alpha$. Из закона сохранения энергии $mv^2/2 = mu^2/2 + MV^2/2$ после подстановки полученных для u и V выражений следует ответ:

$$m = M\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = M\cos 2\alpha.$$

5. Шарики с массами m и M соединены легкой недеформированной пружиной. Шарику массой m сообщили скорость V в направлении шарика M. В момент максимального растяжения пружина порвалась. Какое количество тепла выделилось к моменту окончания колебаний?

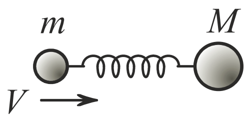


Рис. 5

Решение.

Максимальное растяжение пружины наступает в момент, когда скорости шариков u одинаковы. Записав законы сохранения импульса и энергии: $mV = (M+m)u$, $mV^2/2 = (M+m)u^2/2 + Q$, где Q – энергия, перешедшая в тепло, получаем ответ:

$$Q = \frac{Mm}{M+m}\frac{V^2}{2}.$$

6. Опускаясь, груз массой m подтягивает брусок массой M. Найдите ускорение бруска. Трением в системе и массой блока пренебречь.

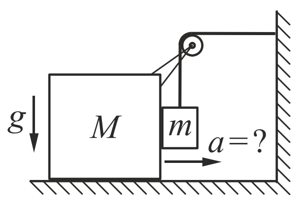


Рис. 6

Решение.

На груз массой m по вертикали действует сила тяжести mg и натяжение T. По второму закону Ньютона $ma = mg - T$. По горизонтали же действует только сила нормального давления N со стороны бруска. Горизонтальное ускорение то же, что и бруска a_1. Поэтому из второго закона Ньютона $ma_1 = N$. Для бруска получаем $Ma_1 = T - N$. Поскольку нить нерастяжима, $a_1 = a$. Отсюда получаем $a = g\,m/(M+2m)$.

7. Сферический слой несжимаемой жидкости расширяется симметричным образом. В некоторый момент скорость наружной сферической поверхности радиуса R равна V. С какой скоростью движется внутренняя сферическая поверхность жидкости, имеющая в этот момент радиус r?

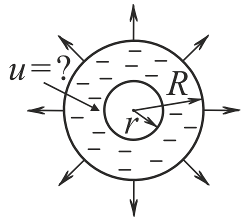


Рис. 7

Решение.

Из условия несжимаемости жидкости имеем $V \cdot 4\pi R^2 = u \cdot 4\pi r^2$, т. е. $u = V\, R^2 / r^2$.

8. На груз массой M, висящий на пружине, кладут перегрузок массой m, удерживая груз в первоначальном положении, а затем его отпускают. Найдите максимальное значение силы, действующей на перегрузок со стороны груза.

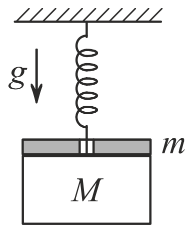


Рис. 8

Решение.

Начальное равновесие дает $kx_0 = Mg$. Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{kx_0^2}{2} + (M+m)g(x_{max} - x_0) = \frac{kx_{max}^2}{2}; \quad x_{max} \neq x_0.$$

Подставляя $x_0 = Mg/k$, получаем $x_{max} = (M+2m)g/k$. Из второго закона Ньютона

$$ma = mg - N,$$

$$(M+m)a = (M+m)g - kx.$$

Отсюда $N = mkx/(M+m)$, т. е. $N_{max} = \dfrac{mkx_{max}}{M+m} = mg\dfrac{M+2m}{M+m}$.

9. У стенки, прижимаясь к ней, лежит катушка радиуса $2R$, на внутренний цилиндр которой намотана нить. За нить тянут вертикально вниз. При каком значении силы натяжения нити F катушка начнет вращаться? Коэффициенты трения о пол и стенку одинаковы и равны μ, радиус внутреннего цилиндра равен R.

Решение.

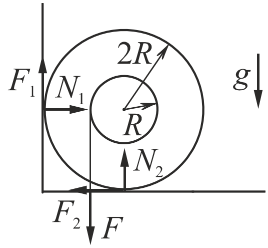


Рис. 9

Условие равенства моментов относительно центра катушки: $FR = (F_1 + F_2) \cdot 2R$; $F_1 = \mu N_1$, $F_2 = \mu N_2$. Равновесие по горизонтали дает $N_1 = \mu N_2$, а по вертикали приводит к условию $N_2 + \mu N_1 = mg + F$. Из этих уравнений получаем

$$F = \frac{2\mu(1+\mu)}{1-2\mu-\mu^2} mg \text{ при } \mu \le \mu_1 = \sqrt{2} - 1.$$

Условие заклинивания $\mu > \mu_1 = \sqrt{2} - 1$ (μ_1 получается из уравнения $1 - 2\mu_1 - \mu_1^2 = 0$).

10. На плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит шайба массой m. Какую минимальную силу надо приложить к шайбе в горизонтальном направлении вдоль плоскости, чтобы она сдвинулась? Коэффициент трения равен μ.

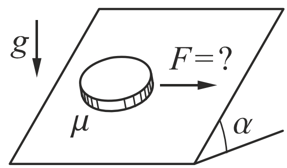


Рис. 10

Решение.

Сила трения $\mu mg \cos\alpha$ направлена против результирующей силы $\sqrt{F_{min}^2 + (mg \sin\alpha)^2}$. Приравнивая силы, получаем

$$F_{min} = mg\sqrt{\mu^2 \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \text{ при } \mu \ge \operatorname{tg}\alpha,$$

$$F_{min} = 0 \text{ при } \mu < \operatorname{tg}\alpha.$$

11. Катер, движущийся со скоростью v прямо навстречу волнам, испытывает f ударов о гребни волн в единицу времени. При изменении курса на угол θ и той же скорости катера число ударов в единицу времени стало равно f'. Какова скорость волн?

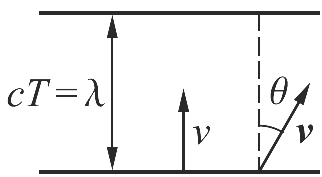


Рис. 11

Решение.

Пусть скорость волн равна c. За время $\Delta T = 1/f$ катер испытает один удар. Если расстояние между волнами λ, то $\Delta T = 1/f = \lambda/(c+v)$. При изменении курса $\Delta T' = 1/f' = \lambda/(c + v\cos\theta)$. Приравнивая значения λ, получаем ответ:

$$c = v\frac{f' - f\cos\theta}{f - f'}.$$

12. Два шарика с разными массами, но равными радиусами подвешены на нитях одинаковой длины. Шарики отклоняют в разные стороны на угол α и отпускают одновременно. После упругого столкновения шариков один из них останавливается. На какой угол отклонится другой шарик?

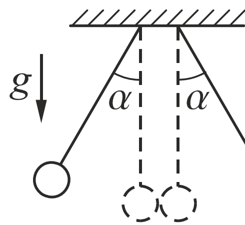


Рис. 12

Решение.

Введя массы шариков m_1 и m_2 и их скорость до удара v и после удара 0 и u, получаем из закона сохранения импульса $(m_2 - m_1)v = m_1 u$. Закон сохранения энергии $(m_2 + m_1)v^2/2 = m_1 u^2/2$, откуда $m_2 = 3m_1$ и $u = 2v$. Из закона сохранения энергии для поднимающегося шарика имеем $m_1 gl(1-\cos\alpha) = m_1 v^2/2$ и $m_1(2v)^2/2 = m_1 gl(1-\cos\beta) = 4m_1 gl(1-\cos\alpha)$, откуда ответ:

$$\cos\beta = 4\cos\alpha - 3.$$

13. Скользящий по верхней ступеньке лестницы шарик срывается с нее и через время τ упруго ударяется о вторую ступеньку. Через какое время после этого произойдет следующий удар, если он приходится на третью ступеньку? Высота ступенек одинакова.

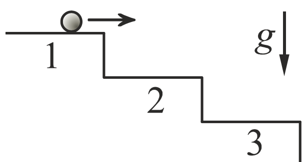


Рис. 13

Решение.

Пусть высота ступеньки H. Так как шарик двигался вначале горизонтально, то H связана с временем τ формулой $H = g\tau^2/2$. Горизонтальная компонента скорости при движении не меняется. После первого упругого удара вертикальная компонента скорости, сохраняясь по величине, меняет знак. В течение времени τ шарик будет подниматься до своей максимальной высоты, а затем до следующего удара падать с высоты $2H$ в течение времени t_1, которое определяется из $2H = gt_1^2/2$. Искомое время:

$$t = \tau + t_1 = \tau + \sqrt{2}\tau = (1+\sqrt{2})\tau.$$

14. Колесо катится без проскальзывания с постоянной скоростью v. С верхней точки обода колеса срывается камешек. Через какое время колесо наедет на этот камешек? Радиус колеса – R, ускорение свободного падения – g.

Решение.

Если ось колеса движется со скоростью v и нет проскальзывания, то скорость нижней точки равна нулю, а верхней, как и горизонтальная скорость камешка, равна $2v$. Время падения камешка $t = \sqrt{2 \cdot 2R/g}$, время движения оси по горизонтали $T = 2vt/v = 2t$ в два раза больше. Значит, наезд произойдет через $T = 4\sqrt{R/g}$.

15. Пружина жесткости k связывает тело массой m со стенкой. Второе тело такой же массы m прислонено к первому. Пружину деформируют, смещая тела на расстояние x по направлению к стенке, а затем отпускают. Найдите расстояние между телами в момент, когда первое остановится. Трения нет.

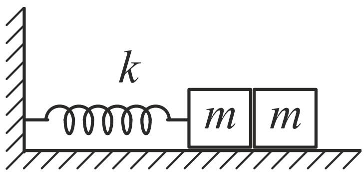


Рис. 15

Решение.

Скорость в положении, где пружина не деформирована:

$$\frac{2mV^2}{2} = \frac{kx^2}{2},$$

откуда $V = x\sqrt{k/2m}$. С этой скоростью движется правое тело после разъединения. Левое сдвинется из положения равновесия на y;

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{ky^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{kx^2}{2},$$

откуда $y = x/\sqrt{2}$.

Правое тело за четверть периода $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ проедет $z = V\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi x}{2\sqrt{2}}$.

Искомое расстояние будет $z - y = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{x}{\sqrt{2}}$.

16. В стене укреплен горизонтальный стержень, по которому без трения может двигаться бусинка массой m. Бусинка соединена со стенкой нитью длины $2L$, к середине которой привязан груз массой M. Вначале нить натянута. Грузы отпускают. Какие скорости наберут груз и бусинка перед ударом о стенку? Ускорение свободного падения g, размерами тел можно пренебречь.

Решение.

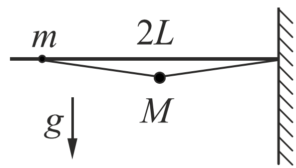


Рис. 16

Скорость бусинки всегда вдвое больше горизонтальной составляющей скорости груза, перед ударом $u = 2V$. Сохранение энергии дает

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = MgL.$$

Ответ. $V = \sqrt{\frac{2gL}{M+4m}}$, $u = 2\sqrt{\frac{2gL}{M+4m}}$.

17. К концу стержня, закрепленного на широкой подставке, привязан на нерастяжимой нити груз массой m. Масса подставки со стержнем – M. Груз отклонили на 90° от вертикали и отпустили. Найдите коэффициент трения между подставкой и горизонтальной поверхностью стола, если подставка начала сдвигаться в момент, когда нить составляла угол α с вертикалью.

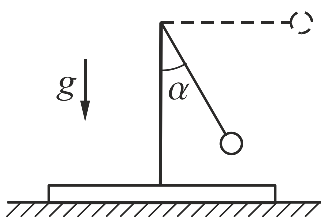


Рис. 17

Решение.

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgR\cos\alpha.$$

Чтобы найти натяжение нити в конечном состоянии, запишем второй закон Ньютона для проекции сил вдоль нити:

$$T = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\alpha.$$

Из двух предыдущих соотношений получаем, что $T = 3mg\cos\alpha$. В момент, когда подставка сдвинется с места, проекция силы натяжения нити вдоль пола, равная $T\sin\alpha$, должна сравняться с величиной силы трения скольжения μN, где $N = Mg + T\cos\alpha$ – реакция опоры со стороны пола. Следовательно,

$$\mu = \frac{T\sin\alpha}{Mg + T\cos\alpha} = \frac{3m\sin\alpha\cos\alpha}{M + 3m\cos^2\alpha}.$$

18. На тело массой m, вначале покоившееся на горизонтальной плоскости, в течение времени t действует горизонтальная сила F. Коэффициент трения тела о плоскость равен k. Какое расстояние пройдет тело за время движения?

Решение.

Пусть L – искомый путь; l – путь, пройденный после окончания действия силы F; v – скорость тела после разгона; a – ускорение при разгоне. Из кинематики следует, что $L = l + at^2/2$, $v = at$. По второму закону Ньютона имеем $ma = F - kmg$. Кинетическая энергия расходуется на работу против силы трения:

$$kmgl = \frac{mv^2}{2}.$$

Ответ. $L = \dfrac{F}{2kmg}\left(\dfrac{F}{m} - kg\right)t^2.$

19. По гладкому столу движутся два тела массой m_1 и m_2, соединенные невесомой нерастяжимой нитью длины l. В некоторый момент времени скорость тела массой m_1 оказывается равной нулю, а скорость тела массой m_2 – равной v и направленной перпендикулярно нити. Найти силу натяжения нити.

Решение.

Можно считать, что тела участвуют в двух движениях: во вращении вокруг центра масс системы и в поступательном движении вместе с центром масс. Положение центра масс относительно тела массой m_1 находим из уравнения

$$x_1(m_1+m_2)=lm_2; \text{ отсюда } x_1=l\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

Второе тело находится на расстоянии $x_2=l-x_1$ от центра масс. Так как суммарная скорость тела массой m_2 равна v, а скорость тела массой m_1 равна нулю, то имеем систему уравнений

$$v_{\text{ц.м.}}+\omega x_2=v,\ \ v_{\text{ц.м.}}-\omega x_1=0,\ \ m_2x_2=m_1x_1,$$

где ω – угловая скорость вращения, а $v_{\text{ц.м.}}$ – скорость центра масс. Отсюда

$$v_{\text{ц.м.}}=\frac{m_2}{m_1+m_2}v.$$

Сила натяжения $T=m_1v_{\text{ц.м.}}^2/x_1$. Окончательно

$$T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{v^2}{l}.$$

Можно было бы решить задачу, перейдя в систему центра масс, инерциальную в отсутствие внешних горизонтальных сил. В этой системе сила натяжения T обусловливает вращательное движение каждого из тел вокруг центра масс. Скорость каждого тела легко вычисляется. Если известны скорость, масса и радиус вращения, можно найти T.

20. Какое количество теплоты выделится при перевертывании наполовину погруженного в воду свободно плавающего бруска квадратного сечения из неустойчивого вертикального положения в более устойчивое горизонтальное? Масса бруска $m=10$ г, длина $l=20$ см, сечение $d\times d=1\times 1$ см^2. Считать, что ускорение свободного падения $g=10$ см/с^2.

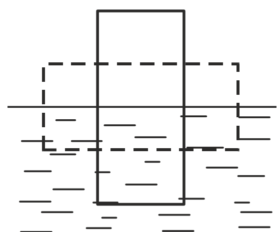


Рис. 20

Решение.

Так как брусок свободно плавает, масса вытесненной им воды равна массе бруска m. После перевертывания бруска центр масс вытесненной воды поднялся на высоту $(l-d)/4$. Центр масс бруска остался на уровне поверхности воды, поскольку брусок снова находится в равновесии. По закону сохранения энергии количество выделившейся теплоты равно убыли потенциальной энергии воды:

$$Q=mg(l-d)/4\approx 4{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

ЧАСТЬ 1

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

1.1. С подводной лодки, погружающейся вертикально и равномерно, испускаются звуковые импульсы длительности τ_0. Длительность приема отраженного от дна импульса τ. Скорость звука в воде c. С какой скоростью погружается подводная лодка?

Ответ. $v = c(\tau_0 - \tau)/(\tau_0 + \tau)$.

1.2. Электрон дрейфует вдоль плоскости раздела областей с различными магнитными полями (рис. 1.2). Его траектория состоит из чередующихся полуокружностей радиуса R и r. Скорость электрона постоянна по модулю и равна v. Найдите среднюю скорость электрона за большой промежуток времени.

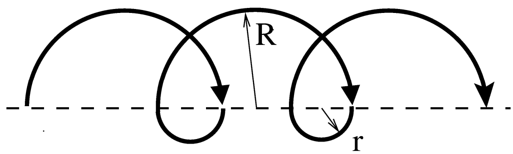


Рис. 1.2

Ответ. $v_{\text{ср}} = \dfrac{2}{\pi} v \dfrac{R-r}{R+r}$; направлена по границе раздела.

1.3. Частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью расстояние L, а затем тормозится с ускорением a. При какой скорости частицы время движения от ее вылета до остановки будет наименьшим?

Ответ. $v = \sqrt{La}$.

1.4. Мигрирующие рыбы, накопив в море запас жира, заходят в устья рек. В пресной воде они не питаются, поэтому им важно добраться до нерестилищ в верховьях реки с наименьшими потерями массы. Расход жира на поддержание основного обмена веществ в организме рыбы за единицу времени равен N, а добавочный расход bv^2 тратится на движение со скоростью v. С какой скоростью должны двигаться рыбы, чтобы затраты жира на пути до нерестилища были минимальны? (Рыбы прекрасно чувствуют эту скорость.)

Ответ. $v = \sqrt{N/b}$.

1.5. Мальчик надувает воздушный шарик. При радиусе шарика 10 см скорость увеличения радиуса равна 1 мм/с. Какой объем воздуха ежесекундно выдыхает мальчик?

Ответ. q = 126 см^3/с.

1.6. Тело начинает движение из точки A и движется сначала равноускоренно в течение времени t_0, затем с тем же по модулю ускорением – равнозамедленно. Через какое время от начала движения тело вернется в точку A?

Ответ. $t = (2 + \sqrt{2})\,t_0$.

1.7. а. Из верхней точки окружности по гладкому желобу под углом φ к вертикали начинает скользить шарик (рис. 1.7а). За какое время он достигнет окружности, если ее диаметр D?

б. Из точки A по спицам с разным наклоном одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки (рис. 1.7б). На какой кривой будут находиться бусинки в момент времени t?

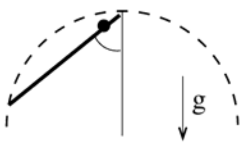


Рис. 1.7а

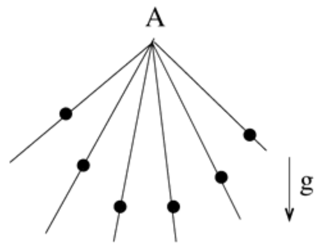


Рис. 1.7б

Ответ. а. $t = \sqrt{2D/g}$. б. На окружности диаметра $gt^2/2$ с верхней точкой A.

1.8. Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом 45° к горизонту вода с начальной скоростью 10 м/с. Площадь сечения отверстия шланга 5 см^2. Определите массу струи, находящейся в воздухе.

Ответ. m = 7 кг.

1.9. Небольшое тело движется по окружности радиуса r со скоростью, которая линейно увеличивается во времени по закону $\upsilon = kt$. Найдите зависимость полного ускорения тела от времени.

Ответ. $a = \sqrt{k^2 + k^4 t^4 / r^2}$.

1.10. Одна из частиц пылевого облака (частица A) покоится, а все остальные разлетаются от нее в разные стороны со скоростями, пропорциональными расстояниям от них до частицы A. Какую картину движения обнаружит наблюдатель, движущийся вместе с частицей B?

Ответ. Точно такую же, как и наблюдатель, движущийся с частицей A.

1.11. Какой будет продолжительность полета самолета из Новосибирска в Москву и обратно, происходящего по прямой, если в течение всего полета ветер дует под углом α к трассе со скоростью u? Скорость самолета относительно воздуха v, длина трассы L. При каком направлении ветра продолжительность полета максимальна?

Ответ. $t = \dfrac{2L\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{v^2 - u^2}$. Вдоль трассы.

1.12. При упругом ударе тела о неподвижную стенку (рис. 1.12) скорость $\mathbf{v}$ меняется лишь по направлению. Определите изменение скорости этого тела после удара, если стенка движется: а) со скоростью u навстречу телу; б) со скоростью $w < v$ в направлении движения тела.

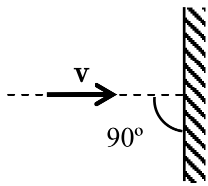


Рис. 1.12

Ответ. а) $\Delta v = -2(v+u)$. б) $\Delta v = -2(v-w)$. (Направление вдоль начальной скорости считается положительным.)

1.13. Тело роняют над плитой на высоте h от нее. Плита движется вертикально вверх со скоростью u. Определите время между двумя последовательными ударами тела о плиту. Удары абсолютно упругие.

Ответ. $t = 2\sqrt{u^2/g^2 + 2h/g}$.

1.14. Мальчик, который может плавать со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки, хочет переплыть эту реку так, чтобы его как можно меньше снесло вниз по течению. Под каким углом к берегу он должен плыть? На какое расстояние его снесет, если ширина реки 200 м?

Ответ. $\alpha = 60°$, $l = 200\sqrt{3} \approx 345$ м.

1.15. Скорость груза A равна v_A (рис. 1.15). Чему равна скорость груза B?

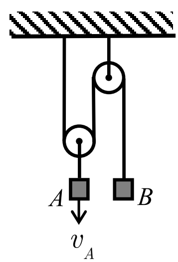


Рис. 1.15

Ответ. $v_B = 2v_A$.

1.16. Угловая скорость катушки равна ω, радиус внутреннего цилиндра r, а радиус внешних цилиндров – R (рис. 1.16). Каковы скорости оси катушки v_1 и груза v_2 относительно земли?

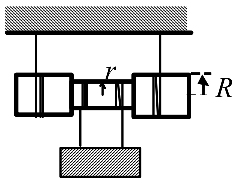


Рис. 1.16

Ответ. $v_1 = \omega R$; $v_2 = \omega(R - r)$.

1.17. Клин, имеющий угол 30°, лежит на горизонтальной плоскости (рис. 1.17). Вертикальный стержень, опускающийся со скоростью v, заставляет клин скользить по этой плоскости. Какова скорость клина?

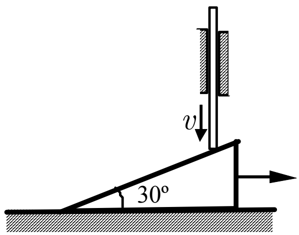


Рис. 1.17

Ответ. $u = v\sqrt{3}$.

1.18. На клине с углом α лежит монета. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтальной плоскости, чтобы монета свободно падала вниз?

Ответ. $a = g\ \mathrm{ctg}\,\alpha$.

1.19. а. Скорость точки A твердого тела равна v и образует угол 45° с направлением прямой AB (рис. 1.18). Скорость точки B этого тела равна u. Определите проекцию скорости точки B на направление AB.

б. Скорости точек A и B твердого тела равны $\mathbf{v}$ (рис. 1.19). Скорость точки C, находящейся в плоскости прямой AB и вектора $\mathbf{v}$, равна $u > v$. Найдите проекцию скорости точки C на ось, перпендикулярную указанной плоскости.

Ответ. а. $u_{AB} = v/\sqrt{2}$. б. $u_1 = \sqrt{u^2 - v^2}$.

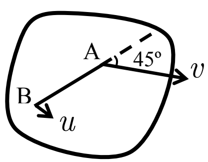


Рис. 1.18

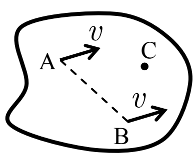


Рис. 1.19

1.20. Нить, намотанную на ось катушки, тянут со скоростью v под углом α к горизонту. Катушка катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Найдите скорость оси и угловую скорость вращения катушки. При каких углах α ось движется вправо? Влево? Нить длинна настолько, что угол α не меняется при движении.

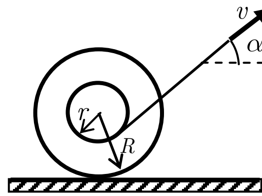


Рис. 1.20

Ответ. $u = \dfrac{vR}{R\cos\alpha - r}$; $\omega = \dfrac{v}{R\cos\alpha - r}$; вправо при $\cos\alpha > r/R$, влево при $\cos\alpha < r/R$.

1.21. а. Луна обращена к Земле постоянно одной стороной. Сколько оборотов совершит она вокруг своей оси за время полного оборота вокруг Земли?

б. На сколько в среднем звездные сутки короче солнечных? Земля обходит Солнце за 365,25 солнечных суток.

Ответ. а. Один оборот. б. На 4 мин.

1.22. Стержень, одним концом шарнирно закрепленный на горизонтальной плоскости, лежит на цилиндре. Угловая скорость стержня ω. Проскальзывания между цилиндром и плоскостью нет. Найдите зависимость угловой скорости цилиндра от угла α между стержнем и плоскостью.

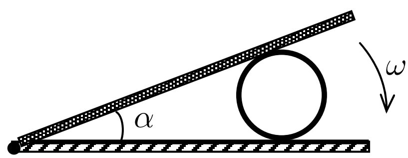


Рис. 1.22

Ответ. $\omega' = \dfrac{\omega}{2\sin^2(\alpha/2)}$.

1.23. Вычислить расстояние до звезды α-Центавра по ее годичному параллаксу π = 0,756" (в метрах, световых годах и парсеках).

Ответ. L = 4,3 св. года = 1,3 пк.

1.24. Нарисовать синхронные графики зависимости от времени координаты x, скорости $\dot{x}$ и ускорения $\ddot{x}$ центра тяжести упругого шарика, подпрыгивающего в поле тяжести над упругой плитой без потерь энергии. Рассмотреть случай, когда деформации шарика существенны. За какое время шарик остановится, если при каждом ударе будет теряться 1 % энергии? Изобразите это движение на плоскости $x,\ \dot{x}$.

Ответ. $T = 200t_1$, где t_1 – время первого подпрыгивания.

1.25. Нарисовать траекторию точки, движущейся по закону

$$r = b/t,\ \ \varphi = \gamma t\ \ (b > 0).$$

Найти закон движения и уравнение траектории в декартовых координатах.

Ответ. $x = \dfrac{b}{t}\cos\gamma t,\ \ y = \dfrac{b}{t}\sin\gamma t,$ траектория $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma b}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1.26. Точка движется по закону $x = 2t,\ \ y = t^2$ (x, y – в метрах, t – в секундах). Определить радиус кривизны траектории в начале движения и через 2 с.

Решение.

Ускорение точки $\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 2$ м/с^2, $|a| = 2$ м/с^2, его тангенциальная компонента $a_\tau = d|V|/dt = 2t/\sqrt{1+t^2}$, нормальная компонента $a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = 4/\left(1+t^2\right)$. Радиус кривизны:

$$R_{\text{кр}} = \frac{V^2}{a_n} = 2\left(1+t^2\right)^{3/2} = \begin{cases} 2\ \text{м} & \text{при}\ t = 0, \\ 10\sqrt{5}\ \text{м} & \text{при}\ t = 2\ \text{с}. \end{cases}$$

1.27. Четыре собаки преследуют друг друга, так что скорость догоняющей собаки **V** всегда направлена на убегающую собаку (рис 1.27). Через какое время собаки догонят друг друга, если сначала они находились в углах квадрата со стороной a? Какова траектория собак? Какими будут время и траектория для N собак?

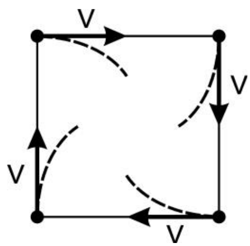


Рис. 1.27

Решение.

Расположим начало полярной системы координат в месте встречи собак. При движении собаки расположены в вершинах правильного N-угольника, а радиальная компонента их скорости равна

$$\dot{\rho} = -V\sin(\pi/N).$$

Время движения собак до встречи имеет величину

$$t = \frac{\rho_0}{|\dot{\rho}|} = \frac{a}{2V\sin^2(\pi/N)},$$

где $\rho_0 = \dfrac{a}{2\sin(\pi/N)}$ – начальное удаление собак от точки встречи.

Поделив радиальную скорость $\dot{\rho}$ на азимутальную $\rho\dot{\varphi} = -V\cos(\pi/N)$, получим уравнение для траектории:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \mathrm{tg}(\pi/N)\,d\varphi.$$

Его решением является уравнение логарифмической спирали

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\left(\varphi - \varphi_n^0\right)\mathrm{tg}\frac{\pi}{N}\right] = \frac{a}{2\sin(\pi/N)}\exp\left[\left(\varphi - \varphi_n^0\right)\mathrm{tg}\frac{\pi}{N}\right],$$

где φ_n^0 – начальная угловая координата n-й собаки.

1.28. Заяц бежит по прямой линии со скоростью u. В начальный момент времени (рис. 1.28) его начинает преследовать собака со скоростью V. В ходе погони собака всегда бежит в направлении зайца. Через какое время собака настигнет зайца? Начальное расстояние между ними L.

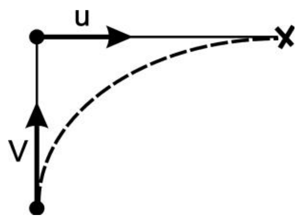


Рис. 1.28

Решение.

Пусть собака догонит зайца через время T. При этом заяц успевает пробежать расстояние uT. С другой стороны, это расстояние равно горизонтальной проекции пути, пройденного собакой, которая складывается из элементарных участков длиной $V\sin\alpha\,dt$, где α – угол между направлением скорости собаки $\mathbf{V}$ и нормалью к линии движения зайца. Отсюда получаем соотношение:

$$uT = \int_0^T V\sin\alpha(t)\,dt = V\int_0^T \sin\alpha(t)\,dt.$$

В системе отсчета собаки скорость сближения собаки и зайца равна $(V - u\sin\alpha)$, так что

$$\int_0^T \left(V - u\sin\alpha(t)\right)dt = L,$$

где L – начальное расстояние. Отсюда следует, что

$$\frac{VT-L}{u}=\int_0^T \sin\alpha(t)\,dt=\frac{uT}{V}\ .$$

Получаем ответ: $T=\dfrac{LV}{V^2-u^2}$.

1.29. Сферические координаты векторов $\mathbf{r}_1=(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ и $\mathbf{r}_2=(r_2,\theta_2,\varphi_2)$. Определить угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Решение.

Угол между векторами находим с помощью скалярного произведения векторов:

$$\alpha=\arccos\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1|\cdot|\mathbf{r}_2|}=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

1.30. Для двух кораблей, движущихся неизменными пересекающимися курсами, выразить расстояние наибольшего сближения и время до сближения через векторы скоростей и начальных положений.

Решение.

В системе отсчета первого корабля расстояние между кораблями равно $\mathbf{R}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, а скорость второго корабля $\mathbf{V}=\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1$. Минимальным расстоянием между кораблями в этой системе отсчета будет длина перпендикуляра, опущенного на линию движения второго корабля, при этом для достижения минимального расстояния второму кораблю необходимо пройти путь

$$R\cos\alpha=-\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)}{|\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1|}$$

(здесь косинус угла между векторами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}$ записан через скалярное произведение соответствующих векторов).

Время движения до максимального сближения кораблей определится расстоянием и скоростью сближения кораблей V:

$$t_{\min}=\frac{R\cos\alpha}{V}=-\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)}{|\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1|^2}.$$

Минимальное расстояние между кораблями получим с помощью векторного произведения:

$$R_{\min} = R\sin\alpha = \left|\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\times(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)}{|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1|}\right|.$$

1.31. Снаряд, летящий на большой высоте со скоростью *V*, разрывается на осколки, которые в системе снаряда разлетаются в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями *u*. Какое положение в пространстве они займут в момент времени *t*? Опишите движение осколков в системе координат, связанной с одним осколком.

Решение.

В неинерциальной С.О. снаряда S' осколки разлетаются изотропно и расположены на расширяющейся сфере, описываемой уравнением $\mathbf{r}'^2 = u^2t^2$. Радиус-вектор осколка в С.О. снаряда $\mathbf{r}'$ связан с радиус-вектором в С.О. Земли $\mathbf{r}$ соотношением $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{V}t + \mathbf{g}t^2/2$ – положение начала координат системы S', движущейся относительно Земли со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{g}t$. В системе отсчета Земли поверхность сферы, на которой расположены осколки, описывается уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = u^2t^2.$$

Перейдем в систему отсчета S'' осколка, движущегося относительно снаряда со скоростью $\mathbf{u}$. Радиус-векторы осколков в системах S' и S'' связаны соотношениями $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}''_0$, где $\mathbf{r}''_0 = -\mathbf{u}t$ – положение начала координат системы S' относительно системы S''. В системе отсчета S'' уравнение поверхности, на которой расположены осколки, будет иметь вид

$$(\mathbf{r}'' + \mathbf{u}t)^2 = u^2t^2.$$

Это сфера радиусом ut и центром в точке $-\mathbf{u}t$.

1.32. Определите скорость поезда, если при приближении к неподвижному наблюдателю гудок поезда имел частоту, в α раз большую, чем при удалении от наблюдателя.

Ответ. $V = c\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, где c – скорость звука.

1.33. Машинисты двух сближающихся поездов сигнализируют друг другу гудками. Определите скорости поездов, если частоты принимаемых машинистами сигналов превышают «собственную» частоту гудка в α и β раз соответственно. Сигнальные устройства локомотивов одинаковы.

Решение.

Пусть скорости поездов V_1 и V_2. Перейдем в систему отсчета первого поезда. Тогда источник звука приближается к нему со скоростью $V_1 + V_2$, а скорость звука равна $c + V_1$. По эффекту Доплера частота звука, принимаемого первым машинистом, будет

$$f_1 = \frac{f}{1-(V_1+V_2)/(c+V_1)},$$

а соотношение частот –

$$\alpha = \frac{f_1}{f} = \frac{c+V_1}{c-V_2}.$$

Аналогично получим значение

$$\beta = \frac{c+V_2}{c-V_1}.$$

Решая систему

$$\begin{cases} V_1 + \alpha V_2 = (\alpha - 1)c \\ \beta V_1 + V_2 = (\beta - 1)c \end{cases},$$

находим скорости

$$V_1 = c\left(1 - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha\beta - 1}\right) \text{ и } V_2 = c\left(1 - \frac{2(\beta-1)}{\alpha\beta - 1}\right).$$

1.34. Какова угловая скорость вращения Луны с точки зрения наблюдателя, находящегося на поверхности Земли?

Ответ. Луна вращается с запада на восток с угловой скоростью

$$\omega = \omega_1 - \frac{2\pi}{T} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с},$$

где $\omega_1 \approx 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с – угловая скорость суточного вращения Земли, $T = 27$ дней – период обращения Луны вокруг Земли.

1.35. Найти траекторию и закон движения конца часовой стрелки часов в системе координат, связанной с концом минутной стрелки.

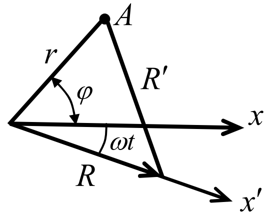


Рис. 1.35

Решение.

Направим ось x' системы координат S', связанной с концом часовой стрелки, в направлении, продолжающем стрелку. Пусть угол φ характеризует поворот часовой стрелки и изменяется по закону $\varphi = -\omega_1 t$, где ω_1 – где угловая скорость часовой стрелки. Координаты конца часовой стрелки в системе S' будут меняться по закону $x' = r\cos(\omega-\omega_1)t - R$, $y' = r\sin(\omega-\omega_1)t$, т. е. конец часовой стрелки в системе S' будет двигаться с угловой скоростью $\omega-\omega_1$ по окружности радиусом r

$$(x'+R)^2 + y'^2 = r^2.$$

1.36. Жесткий стержень *AB* движется в плоскости *XOY*, опираясь на окружность радиуса *R*, центр которой находится в начале координат. Найти угловую скорость стержня, если его конец *B* движется вдоль оси *x* с постоянной скоростью *V*.

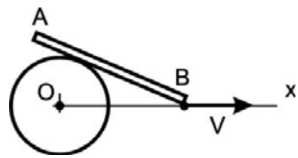


Рис. 1.36

Решение.

Пусть φ – угол наклона стержня к горизонту, $|OB| = x_0$. Тогда $\sin\varphi = R/(x_0+Vt)$, $\dot\varphi\cos\varphi = -RV/(x_0+Vt)^2$ и угловая скорость стержня:

$$\dot\varphi = -\frac{VR}{x\sqrt{x^2-R^2}}, \text{ где } x = x_0 + Vt.$$

1.37. Стержень *OA* равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг точки *O*, расположенной на окружности радиуса *R*. Определить скорость и ускорение колечка, надетого на стержень и окружность.

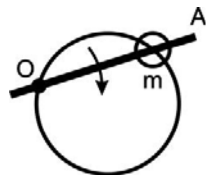


Рис. 1.37

Решение.

Центральный угол φ, опирающийся на дугу окружности, вдвое больше, чем вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Следовательно, угловая частота вращения колечка вдвое больше частоты вращения стержня. При этом линейная скорость колечка $V = 2\omega R,$ а тангенциальная и нормальная компоненты ускорения равны

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0, \ \ a_n = \frac{V^2}{R} = 4\omega^2 R.$$

1.38. Между двумя зубчатыми рейками зажата шестеренка радиусом R = 0,5 м. Ускорения реек a_1 = 1,5 м/с^2 и a_2 = 2,5 м/с^2 . Найти поступательное и угловое ускорение шестеренки.

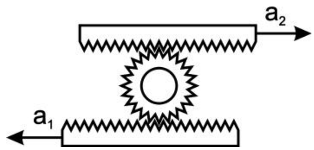


Рис. 1.38

Решение.

Считаем, что шестеренка движется со скоростью V и вращается с угловой скоростью ω. Запишем выражения для скоростей верхней и нижней реек: $V_2 = V + \omega R, \ \ -V_1 = V - \omega R.$

Дифференцируя их, получим $a_2 = \dot{V} + \dot{\omega} R, \ -a_1 = \dot{V} - \dot{\omega} R.$ Для поступательного и углового ускорений шестеренки имеем

$$\dot{V} = \frac{a_2 - a_1}{2} = 0,5 \text{ м/с}^2, \ \ \dot{\omega} = \frac{a_2 + a_1}{2R} = 4 \text{ с}^{-2}.$$

1.39. По стенке дома затаскивают бревно длиной L, так что его верхний конец движется вертикально вверх с постоянной скоростью V, а нижний передвигается по земле. Найти угловую скорость и угловое ускорение бревна, а также ускорение точек бревна в зависимости от времени.

Решение.

Выберем декартову систему координат с осью y, направленной от земли вдоль стены. Координата верхнего конца бревна изменяется по закону $y = Vt,$ при этом угол наклона бревна к горизонтали $\alpha = \arcsin(Vt/L).$ Дифференцируя, найдем угловую скорость и угловое ускорение бревна:

$$\dot{\alpha} = \frac{V}{\left(L^2 - V^2 t^2\right)^{1/2}}, \ \ \ddot{\alpha} = \frac{V^3}{\left(L^2 - V^2 t^2\right)^{3/2}}.$$

Координаты точки бревна, отстоящей на расстояние l от его нижнего конца, запишутся в виде $y = Vt(l/L), \ \ x = \sqrt{L^2 - V^2 t^2}\,(1 - l/L).$ Дифференцируя, найдем ускорение точки бревна:

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{x} = -\frac{(L-l)LV^2}{\left(L^2 - V^2t^2\right)^{3/2}}.$$

1.40. Сферический резервуар, стоящий на земле, имеет радиус R. При какой наименьшей скорости брошенный с земли камень может перелететь через резервуар, лишь коснувшись его вершины?

Ответ. $V_{\min} = \sqrt{5gR}$.

ЧАСТЬ 2

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

Специальная теория относительности, созданная Эйнштейном в 1905 г., означала пересмотр представлений классической физики о свойствах пространства и времени. Термин «специальная» подчеркивает то обстоятельство, что эта теория рассматривает явления только в инерциальных системах отсчета.

В качестве исходных позиций специальной теории относительности выделим следующие:

- *принцип относительности. Законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Никакими экспериментами нельзя установить, какая система движется, а какая покоится*;
- *существует предельная скорость передачи сигналов c.* Из принципа относительности следует, что эта скорость одинакова во всех системах отсчета.

В настоящее время с высокой точностью установлено, что предельная скорость c совпадает со скоростью света в пустоте. Все содержание специальной теории относительности вытекает из этих двух ее постулатов.

Относительность одновременности. Из-за конечности скорости света события, одновременные в одной системе отсчета, не являются одновременными в другой системе отсчета, т. е. одновременность, в отличие от представлений ньютоновской механики, является понятием относительным.

Замедление времени. Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, называют *собственным временем* этого тела $\Delta\tau$. Если в точке расположения часов, движущихся со скоростью V, прошло время $\Delta\tau$, то в лабораторной системе отсчета пройдет время

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Асимметрия возникает за счет того, что время одних движущиеся часов сравнивается последовательно со многими синхронизованными часами, расположенными в разных точках в лабораторной системе отсчета.

Лоренцево сокращение. Длину l_0, измеренную в системе отсчета, где стержень неподвижен, называют *собственной длиной*. Продольный (т. е. в направлении движения) размер движущегося со скоростью V стержня оказывается меньше его собственной длины:

$$l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\ .$$

Данное сокращение относится только к продольным размерам тел, поперечные же размеры не меняются.

Преобразования Лоренца являются аналогом преобразования Галилея в случае больших скоростей. По ним осуществляется преобразование координат и времени любого события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Преобразования Лоренца при переходе от системы K к системе K', движущейся со скоростью V вдоль оси x относительно системы K, имеют вид

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ ,$$

а при обратном переходе от системы K' к системе K –

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\quad y = y',\quad z = z',\quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ .$$

Для более краткой записи формул приняты следующие обозначения: $\beta = V/c$ и $\gamma = 1\big/\sqrt{1 - V^2/c^2} = 1\big/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Интервал. Важной инвариантной величиной является *интервал* s_{12} между событиями 1 и 2, квадрат которого определяется как

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv},$$

где $t_{12} = t_2 - t_1$ – промежуток времени между событиями 1 и 2, l_{12} – расстояние между двумя точками, в которых происходят эти события, $l_{12}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2$.

Утверждение «два события разделены таким-то интервалом s» имеет абсолютный характер – оно справедливо во всех инерциальных системах отсчета. Инвариантность интервала играет фундаментальную роль в теории относительности.

Преобразование скорости. Пусть в системе K движется частица со скоростью $\vec{v}$, проекции которой на оси координат v_x, v_y и v_z. Тогда проекции скорости этой частицы v_x', v_y' и v_z' в системе K' равны

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}.$$

Заменив $V \to -V$ и поменяв местами величины со штрихом и без штриха, получим обратные формулы преобразования:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}.$$

Релятивистская кинематика (задачи)

2.1. Найти скорость *u* точки пересечения лезвий гильотинных ножниц, если угол между кромками лезвий равен α и верхнее лезвие в данный момент падает со скоростью *V*. Может ли *u* быть больше скорости света?

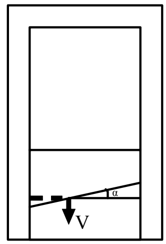


Рис. 2.1

Ответ. $u = \dfrac{V}{\text{tg}\alpha}$, может быть больше скорости света.

2.2. а. Фронт плоской световой волны, идущей в вакууме, падает под углом α на плоскую поверхность *AB* фотолюминесцирующего вещества. Найти скорость перемещения границы свечения $\varPhi$ вдоль прямой *AB*. Можно ли считать эту скорость скоростью распространения некоторого сигнала вдоль прямой *AB*?

б. Найти, с какой скоростью перемещается по поверхности Земли световой «зайчик» от пульсара PSR B0531+21 в центре Крабовидной туманности (угловая скорость вращения пульсара $\omega \sim 30$ с$^{-1}$, расстояние до пульсара $R \sim 2$ кпк). Можно ли скорость перемещения «зайчика» пульсара рассматривать как скорость распространения светового сигнала?

Ответ. а. $u = \dfrac{c}{\sin\alpha} > c$. б. $v = \omega R \sim 2 \cdot 10^{21}$ м/с. В обоих случаях скорости не соответствуют распространению какого-либо физического объекта, а потому не являются скоростями распространения сигнала.

2.3. Загадка Эйнштейна. Космонавт находится в неосвещенном космическом корабле, движущемся относительно Земли со скоростью, очень близкой к скорости света. Внутри корабля перед космонавтом расположено зеркало. Увидит ли космонавт свое изображение в зеркале после включения источника света, расположенного рядом с космонавтом?

Ответ. Да, увидит через время $t = 2L/c$ (если пренебречь временем реакции глаза), где L – расстояние от космонавта до зеркала.

2.4. На ракете, летящей относительно наблюдателя со скоростью, близкой к скорости света, произошла вспышка света. С точки зрения космонавта, находящегося в ракете, волновой фронт от вспышки представляет собой равномерно расширяющуюся сферу. Каким представляется волновой фронт наблюдателю?

Ответ. Волновой фронт будет сферой во всех инерциальных системах отсчета.

2.5. За 5 лет наблюдений с Земли светящийся объект, находящийся на расстоянии 10^5 св. лет, совершил видимое угловое перемещение 10^{-4} рад, т. е. его кажущаяся скорость в два раза больше скорости света c. Найдите, под каким углом к линии наблюдения может двигаться объект, чтобы его реальная скорость была меньше c. Какова минимально возможная скорость объекта?

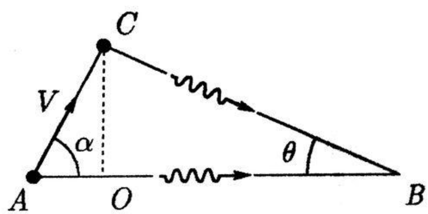


Рис. 2.5

Решение.

Пусть объект движется со скоростью V под углом α к линии наблюдения AB.

Если объект пройдет путь AC, то видимое с Земли перемещение будет равно $OC = L \approx 10$ св. лет. Свет, испущенный объектом из точки A, придет к Земле раньше, чем свет, испущенный из точки C, на время:

$$T = \left(\frac{AC}{V} + \frac{BC}{c}\right) - \frac{AB}{c} \approx \frac{AC}{V} - \frac{AO}{c} = \frac{L}{V\sin\alpha} - \frac{L\operatorname{ctg}\alpha}{c}$$

(так как угол θ мал, то $BC \approx OB$). Отсюда следует, что скорость объекта:

$$V = \frac{c}{\cos\alpha + \frac{cT}{L}\sin\alpha}.$$

Из условия $V < c$ находим, что $\alpha < 2arctg\frac{1}{2} \approx 53°$.

Скорость объекта будет минимальной тогда, когда выражение $\cos\alpha + \frac{cT}{L}\sin\alpha$ принимает максимальное значение. Это происходит при $\alpha = arctg\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$, так что $V_{\min} = \frac{2}{\sqrt{5}}c \approx 0{,}9c$.

2.6. Каким станет угол между диагоналями квадрата, когда он будет двигаться со скоростью V в направлении, параллельном одной из его сторон?

Ответ. Продольный размер квадрата сократится в γ раз, поперечный останется прежним. Угол между диагоналями $\pi - 2\mathrm{arctg}\gamma$.

2.7. В двух точках инерциальной системы отсчета K произошли события, разделенные промежутком времени Δt. Покажите, что если эти события причинно связаны в системе K (например, выстрел и попадание пули в мишень), то они причинно связаны и в любой другой инерциальной системе отсчета K' .

Решение.

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \beta\frac{\Delta x}{c}\right) = \gamma\Delta t\left(1 - \beta\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right) > 0\,,$$

так как для причинно связанных событий $\Delta t > 0$ и $\left|\Delta x/\Delta t\right| \le c$.

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c\Delta t\right) = \gamma\Delta t\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta c\right),$$

тогда

$$\left|\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right| = \frac{\left|\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta c\right|}{1 - \beta\frac{\Delta x}{c\Delta t}}\,.$$

Покажем, что $\left|\Delta x'/\Delta t'\right| \le c$. Действительно, в зависимости от знака $\Delta x'$ получаем либо $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t} - c\right)(\beta + 1) \le 0$, либо $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + c\right)(\beta - 1) \le 0$, что верно всегда.

2.8. В инерциальной системе отсчета *K* два события *P* и *Q* произошли на расстоянии $3 \cdot 10^6$ км друг от друга, причем сначала произошло событие *P*, а через 15 с после него событие *Q*. Существует ли инерциальная система отсчета, в которой событие *Q* случилось раньше события *P*? А другая инерциальная система отсчета, в которой события *P* и *Q* произошли в одном и том же месте?

Решение.

За 15 с свет проходит расстояние $\approx 4{,}5 \cdot 10^6$ км. Это больше, чем расстояние в пространстве между событиями *P* и *Q*. Значит, в принципе событие *P* могло быть причиной события *Q*, а последовательность таких событий во времени ни в какой инерциальной системе отсчета не может оказаться перевернутой. Зато какая-нибудь ракета вполне могла за 15 с перелететь (с постоянной скоростью, меньшей *c*) от места события *P* к месту события *Q*. В системе отсчета ракеты события *P* и *Q* произошли в одном месте.

2.9. В системе Земли событие *B* произошло через 1 с после события *A* и на расстоянии $6 \cdot 10^5$ км от него. С какой скоростью и в каком направлении должна лететь ракета, чтобы в связанной с ней инерциальной системе отсчета события *A* и *B* были одновременны?

Решение.

Так как в системе ракеты события *A* и *B* одновременны, т. е. $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \beta\dfrac{\Delta x}{c}\right) = 0$, то $\beta = \dfrac{c\Delta t}{\Delta x}$. Пусть ось *x* направлена от места, где произошло событие *A*, к месту, где произошло событие *B*, тогда $\Delta x = 6 \cdot 10^5$ км, $\Delta t = 1$ с, и $\beta = \dfrac{c\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, ракета должна лететь со скоростью $v = 0{,}5c$ в направлении от точки *A* к точке *B*.

2.10. На концах двух стержней собственной длины l_0 укреплены одинаковые синхронизированные друг с другом часы. Стержни приведены в движение с относительной скоростью v . В момент, когда часы 1 и $1'$ находятся друг против друга, стрелки обоих часов показывают нулевой отсчет. Определите показания часов в момент, когда поравняются друг с другом часы: а) 1 и $2'$; б) 2 и $1'$; в) 2 и $2'$.

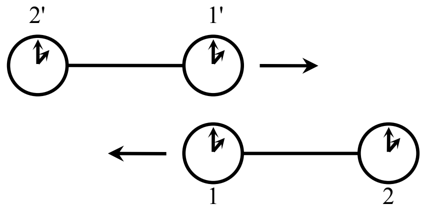


Рис. 2.10

Ответ. а) $t_1 = \dfrac{l_0}{\gamma v}$, $t_2' = \dfrac{l_0}{v}$; б) $t_2 = \dfrac{l_0}{v}$, $t_1' = \dfrac{l_0}{\gamma v}$; в) $t_2 = t_2' = \dfrac{l_0}{\gamma v} + \dfrac{l_0}{v}$.

В системе K сначала поравняются друг с другом часы 1 и $2'$ и только затем часы 2 и $1'$. В системе K', наоборот, сначала поравняются часы 2 и $1'$, а затем часы 1 и $2'$.

2.11. Два кольца вращаются с равными по величине и противоположными по направлению угловыми скоростями ω вокруг общего центра. Предположим, что на одном кольце сидит Алиса, на другом – Боб и в некоторый момент времени, когда они проезжают друг мимо друга, показания их часов совпадают. Алиса думает, что раз Боб движется относительно её, то его часы идут медленнее и к их следующей встрече ее часы уйдут вперед, а Боб придерживается противоположного мнения. Что же произойдет в действительности?

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что при следующей встрече Алисы и Боба показания их часов будут одинаковыми. В этом нетрудно убедиться, рассматривая интервалы собственного времени Алисы и Боба в системе координат, связанной с покоящимся инерциальным наблюдателем.

В полярных координатах $d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2$.

Координаты мгновенно сопутствующей инерциальной системы, связанной с Алисой, $\varphi_A = \omega t$ при постоянных r и z, координаты Боба $\varphi_B = -\omega t$ при постоянных r и z. Следовательно, $d\tau_A^2 = d\tau_B^2 = dt^2\left(1 - r^2\omega^2\right)$ и интервалы собственного времени для Алисы и Боба совпадают.

2.12. Луч света движется через систему зеркал, расположенных в вершинах квадрата со стороной L. Найти время движения фотона через систему с точки зрения наблюдателей, движущихся со скоростью V, в направлениях параллельно и перпендикулярно начальной скорости фотона.

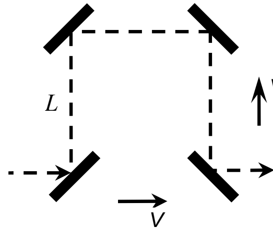


Рис. 2.12

Ответ. Для наблюдателя, движущегося параллельно начальной скорости фотона: $t_{\parallel} = (3-\beta)\gamma L/c$, для наблюдателя, движущегося перпендикулярно: $t_{\perp} = 3\gamma L/c$.

2.13. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью V. Через время T после его старта с Земли посылают сигнал связи. Каково с точки зрения космонавтов расстояние между Землей и кораблем в момент получения сигнала?

Решение.

В системе отсчета корабля сигнал с Земли будет послан в момент времени γT, Земля будет находиться при этом на расстоянии γTV. Сигнал пройдет это расстояние за время $\gamma\beta T$, в течение которого Земля удалится еще на расстояние $\gamma\beta TV$. Таким образом, с точки зрения космонавтов расстояние между Землей и кораблем в момент получения сигнала составит $L = \gamma TV + \gamma\beta TV = \gamma VT(1+\beta)$.

2.14. Пуля, летящая со скоростью v относительно камеры и имеющая в своей системе покоя длину b, сфотографирована с большого расстояния (рис. 2.14). За пулей параллельно ее траектории расположен метровый стержень, покоящийся относительно камеры. Направление на камеру составляет угол α с направлением скорости пули. Чему равна кажущаяся длина пули, измеренная по снимку? (Какая часть метрового стержня на снимке будет закрыта пулей?)

Решение.

Традиционный ответ b/γ относится к измерениям, произведенным одновременно в лабораторной системе отсчета, но фотоны в лабораторной системе отсчета *испускаются* не одновременно. Они *приходят* одновременно, в силу чего (см. рис. 2.14) фотон 2 должен пройти за дополнительное время путь $b'\cos\alpha$, где b' – кажущаяся длина пули. Из преобразования Лоренца находим (здесь штрихованные координаты относятся к Л-системе)

$$b = \Delta x = \gamma\left(\Delta x' - V\Delta t'\right) = \gamma\left(b' - \beta b'\cos\alpha\right),$$

откуда $b' = \dfrac{b}{\gamma\left(1-\beta\cos\alpha\right)}$.

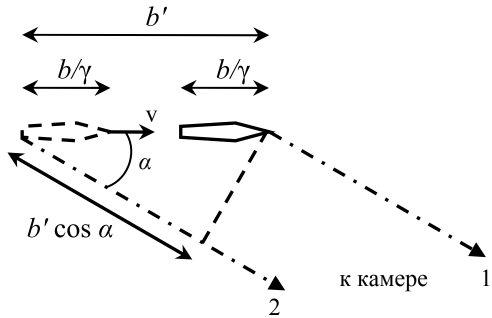


Рис. 2.14

2.15. Хотя время жизни неподвижного мюона мало – около $2\cdot10^{-6}$ с, мюоны, рожденные космическими лучами на высоте 30 км, достигают поверхности Земли. Определите верхний предел разницы между скоростью света и скоростью мюонов.

Ответ. $l = \gamma\tau v \Rightarrow c - v \le \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{c\tau}{l}\right)^2 = 2\cdot10^{-4}c$.

2.16. Насколько должна отличаться от скорости света скорость образующихся на Солнце мюонов, чтобы от Солнца до Земли успевало долететь, не распавшись, 95 % частиц? Собственное время жизни мюонов около $2\cdot10^{-6}$ с. Свет идет от Солнца до Земли около 500 с.

Решение.

Из закона радиоактивного распада $dN/dt = -\lambda N$, где λ – обратное время жизни мюонов в лабораторной системе, $\lambda = 1/\gamma\tau$, найдем число долетевших до Земли мюонов $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Учитывая, что

$t = L/v = ct_\gamma/v = t_\gamma/\beta$, где $t_\gamma = 500$ с, найдем $\gamma\beta \approx 5\cdot 10^9$ и, соответственно, $c - v \approx \dfrac{c}{2\gamma^2\beta^2} \approx 2\cdot 10^{-20}c$.

2.17. Источник света находится на расстоянии L от неподвижного зеркала. По пути от источника к зеркалу и обратно свет проходит через стеклянную пластинку толщиной l с показателем преломления n, движущуюся от источника вдоль луча со скоростью V. Найти время движения света от источника до зеркала и обратно.

Решение.

Рассмотрим два события: A – вход фотона в пластинку, B – выход фотона из пластинки. В системе пластинки расстояние между этими событиями $\Delta x' = l$, а время $\Delta t' = nl/c$. В лабораторной системе $\Delta x = \gamma l(1+\beta n)$, $\Delta t = \gamma l(n/c + \beta/c)$. Полное время движения фотона от источника до зеркала складывается из времени движения внутри пластинки и вне ее:

$$T = \Delta t + \frac{L - \Delta x}{c} = \frac{L}{c} + \frac{\gamma l}{c}(n-1)(1-\beta).$$

Время движения фотона в обратном направлении получается из этого выражения заменой $V \to -V$. Таким образом, суммарное время движения света от источника и обратно равно

$$T = \frac{2L}{c} + \frac{2\gamma l}{c}(n-1).$$

2.18. Вдоль оси пенала длиной L, закрывающегося с торцов крышками A и B (рис. 2.18 *а*), со скоростью V движется карандаш. Собственная длина карандаша L_0 удовлетворяет условию $L_0 > L > L_0/\gamma$ (где γ – релятивистский фактор карандаша). Сначала крышка A пенала открыта, а крышка B закрыта. Когда карандаш влетает в пенал, крышка A закрывается, так что в течение некоторого времени карандаш находится в закрытом пенале (рис. 2.18 *б*). Опишите явление в системе отсчета карандаша.

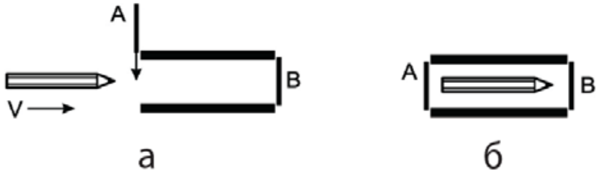


Рис. 2.18

2.19. Релятивистский трактор движется по полю с постоянной скоростью V. Сидящий в кабине тракторист насчитал на каждой половине гусеницы по N траков. Сколько траков насчитает на верхней и нижней половинах гусеницы неподвижный наблюдатель?

Решение.

Пусть L – длина рамы трактора, а l – длина одного трака в сопутствующей системе отсчета. По условию $L/l = N$. В системе неподвижного наблюдателя рама имеет длину L/γ, а каждый из траков нижней половины гусеницы – длину γl, так как относительно земли эти траки не движутся. Отсюда следует, что число траков на нижней половине гусеницы равно $N_1 = N\left(1-\beta^2\right)$. Тогда на верхней половине число траков равно $N_2 = 2N - N_1 = N\left(1+\beta^2\right)$.

2.20. Пусть в системе K две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = \beta_1 c$ и $v_2 = \beta_2 c$, где β_1 и β_2 больше 1/2, но меньше 1. Найти скорость сближения этих частиц в системе K. Противоречит ли результат теории относительности? Найти относительную скорость частиц согласно формуле преобразования скоростей.

Ответ. Скорость сближения частиц в системе K равна $v_1 + v_2 = \left(\beta_1 + \beta_2\right)c > c$. Однако это не есть реальная скорость распространения чего бы то ни было физического.

Относительная скорость частиц в теории относительности – это скорость одной частицы в системе отсчета, где другая частица покоится:

$$v_{отн} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \cdot c < c \text{, так как } \left(1-\beta_1\right)\left(\beta_2 - 1\right) < 0 .$$

2.21. В системе галактики фотон пролетает ее диаметр за время $T = 10^5$ лет. Сколько времени потребуется фотону на это путешествие в системе отсчета протона с релятивистским фактором $\gamma = 10^{10}$, летящего следом за фотоном? Как изменится результат, если протон летит навстречу фотону?

Решение.

а) В системе протона, летящего вслед за фотоном, галактика имеет размер L/γ, причем край галактики приближается к протону со скоростью V, фотон и край галактики сближаются со скоростью $c+V$ и встретятся через время

$$T' = \frac{L}{\gamma(c+V)} \approx \frac{L}{2\gamma c} = \frac{T}{2\gamma} = 5\cdot 10^{-6} \text{ лет.}$$

б) Если протон летит навстречу фотону, то в системе протона край галактики и фотон сближаются со скоростью $c-V$. В результате фотон догонит удаляющийся от него край галактики за время

$$T' = \frac{L}{\gamma(c-V)} \approx \frac{2\gamma L}{c} = 2\gamma T = 2\cdot 10^{15} \text{ лет.}$$

2.22. Два одинаковых стержня собственной длины l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу с одной и той же скоростью V относительно лабораторной системы отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

Ответ. $l = \dfrac{1-\beta^2}{1+\beta^2} l_0$.

2.23. Массивная плита, движущаяся перпендикулярно своей плоскости со скоростью $c/2$, налетает на легкую неподвижную частицу. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плитой.

Решение.

В системе плиты скорость частицы до столкновения была $c/2$, и после упругого столкновения частица удаляется от плиты также со скоростью $c/2$. Согласно формуле сложения скоростей, в лабораторной системе скорость частицы после отражения будет равна $u = \dfrac{2\beta}{1+\beta^2} c = 0{,}8c$.

2.24. С помощью формулы преобразования скоростей получить результат опыта Физо. В этом опыте в лабораторной системе отсчета определялась скорость света в воде, текущей со скоростью V. Показатель преломления света в воде n.

Решение.

Пусть K' – система отсчета, где вода покоится. В этой системе скорость света равна c/n. Переходя к системе *K*, относительно которой K' движется со скоростью $u \ll c$, имеем

$$v = \frac{\dfrac{c}{n}+u}{1+\dfrac{u}{cn}} \approx \left(\frac{c}{n}+u\right)\left(1-\frac{u}{cn}\right) \approx \frac{c}{n}+u\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

2.25. Релятивистский танк движется по направлению к крепости со скоростью *V*. Он выпускает n' снарядов в секунду (по часам танкиста). Скорость снарядов относительно танка *u*. Сколько снарядов в секунду попадает в крепость (по часам гарнизона в крепости)?

Решение.

В системе отсчета танка расстояние между двумя последовательно выпущенными снарядами $\lambda' = u/n'$, при этом крепость движется навстречу со скоростью V и снаряды попадают в крепость через промежутки времени $\Delta t' = \lambda'/(u+V)$. В системе отсчета крепости расстояние между попавшими снарядами $\Delta x = 0$, следовательно $\Delta t' = \gamma_V \Delta t$. Отсюда получаем частоту попадания снарядов в системе отсчета крепости:

$$n = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\gamma_V}{\Delta t'} = \frac{\gamma_V\left(u+V\right)}{\lambda'} = n'\gamma_V\left(1+\frac{V}{u}\right).$$

2.26. Фотон летит поперек ракеты со скоростью света относительно ракеты. Ракета же сама движется относительно звезд со скоростью *V*. Определить полную скорость фотона в системе звезд.

Решение.

В системе звезд скорость фотон имеет две составляющие: продольную (вдоль движения ракеты) $u_x = V$ и поперечную $u_y = c/\gamma_V$. Полная скорость фотона в системе звезд равна $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c$. Как и следовало ожидать, в любой инерциальной системе отсчета фотон имеет одинаковую по модулю скорость *c*, но только она по-разному проектируется на оси координат (так как направление полета фотона зависит от системы отсчета).

2.27. Катер, имеющий относительно воды скорость u, движется из пункта A в пункт B, находящийся строго напротив на другом берегу релятивистской реки шириной L, текущей со скоростью V. За какое время он пересечет реку?

Ответ. $t = \dfrac{L}{\gamma_V \sqrt{u^2 - V^2}}$.

2.28. При быстром движении наблюдателя относительно небосвода в передней полусфере насчитывается в N раз больше звезд, чем в задней. Определите скорость этого движения, если для неподвижного наблюдателя звезды распределены по небу изотропно.

Ответ. $V = c\dfrac{N-1}{N+1}$.

2.29. Из двух точек, разделенных расстоянием L, одновременно вылетают две частицы с перпендикулярными друг другу одинаковыми по величине скоростями V. Найти минимальное расстояние между частицами:

а) в лабораторной системе отсчета;

б) в системе одной из частиц.

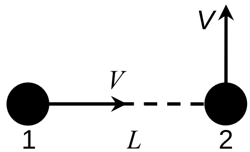


Рис. 2.29а

Решение.

а) В лабораторной системе отсчета частицы сближаются со скоростью $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ и вектор скорости сближения составляет угол $45°$ с осью x. Минимальным расстоянием между частицами будет длина перпендикуляра, опущенного из конца отрезка L на вектор скорости сближения частиц:

$$L_{\min} = L \sin 45° = L/\sqrt{2}\,.$$

б) Если в лабораторной системе отсчета частицы имели координаты $x_1 = y_1 = t_1 = 0$ и $x_2 = L$, $y_2 = t_2 = 0$, то в системе отсчета первой частицы их координаты будут равны $x_1' = y_1' = t_1' = 0$ и $x_2' = \gamma L$, $y_2' = 0$, $t_2' = -\gamma\beta\, L/c$.

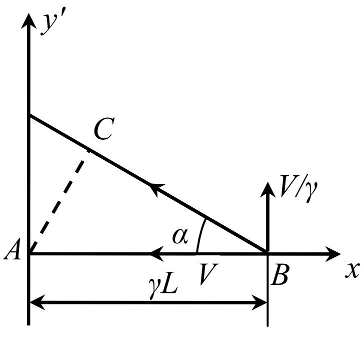


Рис. 2.29б

В системе отсчета первой частицы вторая частица движется в направлении BC со скоростью, проекции которой на оси координат равны $V_x' = -V$, $V_y' = V/\gamma$. Минимальным расстоянием между частицами будет длина перпендикуляра AC, опущенного из начала координат A на линию движения второй частицы (рис. 2.29б), и

$$L_{\min} = \gamma L \sin\alpha = \frac{\gamma L}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\gamma L}{\sqrt{1+\gamma^2}}.$$

2.30. Два стержня с собственной длиной L_0, ориентированные перпендикулярно друг другу, движутся с одинаковыми по величине скоростями V вдоль своей длины. Какова длина одного из стержней в системе отсчета другого стержня? Каким будет результат в случае, если стержни движутся перпендикулярно своей длине?

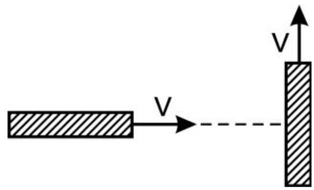


Рис. 2.30а

Решение.

а) Пусть первый стержень ориентирован вдоль оси x лабораторной системы отсчета и движется вдоль нее со скоростью V, а второй стержень движется вдоль оси y так, что в момент времени t координаты его концов были равны (x, y_1) и (x, y_2). В лабораторной системе оба стержня имеют длину $L = L_0/\gamma$. В системе первого стержня второй стержень имеет компоненты скорости $V_x' = -V$ и $V_y' = V/\gamma$ (рис. 2.30б).

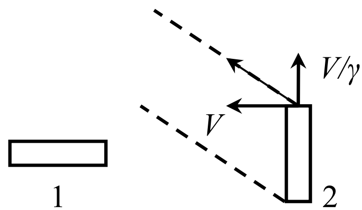


Рис. 2.30б

По преобразованиям Лоренца координаты концов второго стержня в момент времени $t' = \gamma(t - \beta x/c)$ равны $(\gamma(x - Vt), y_1)$ и $(\gamma(x - Vt), y_2)$. Следовательно, стержень остается параллельным оси y', а его длина равна $L' = y_2 - y_1 = L_0/\gamma$.

б) Пусть стержни движутся перпендикулярно своей длине (например, в лабораторной системе первый стержень ориентирован по оси y и движется вдоль оси x, а второй

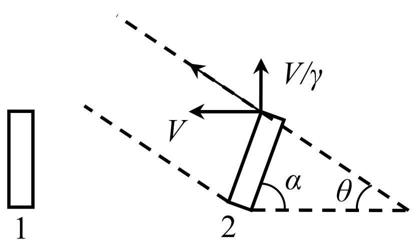


Рис. 2.30в

стержень параллелен оси x и движется вдоль оси y). В системе отсчета первого стержня второй стержень будет двигаться под углом $\theta = \operatorname{arctg}(1/\gamma)$ к оси x' (рис. 2.30в), причем ось второго стержня будет наклонена под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(\gamma\beta^2)$ к оси x'.

Обсудим более подробно, почему ось второго стержня будет наклонена. Пусть в лабораторной системе в момент времени t координаты концов второго стержня равны (x_1, y) и (x_2, y), при этом $x_2 - x_1 = L_0$. В системе первого стержня координаты концов второго стержня измеряются в один и тот же момент времени $t_1' = t_2'$, т. е. $\gamma(t_1 - \beta x_1/c) = \gamma(t_2 - \beta x_2/c)$, откуда $t_2 - t_1 = \beta L_0/c$. Таким образом, в лабораторной системе отсчета координата правого конца второго стержня измеряется позже на время $\beta L_0/c$ и равна $y_2 = V\beta L_0/c = \beta^2 L_0$. В системе первого стержня $y_1' = y_1 = 0$, $y_2' = y_2 = \beta^2 L_0$. По преобразованиям Лоренца:

$$x_2' - x_1' = \gamma\left((x_2 - x_1) - \beta c(t_2 - t_1)\right) = \gamma\left(L_0 - \beta^2 L_0\right) = L_0/\gamma .$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{\beta^2 L_0}{L_0/\gamma} = \gamma\beta^2 ,$$

т. е. второй стержень наклонен под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(\gamma\beta^2)$ к оси x'.

Длина второго стержня равна

$$L' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = L_0\sqrt{1 - \beta^2 + \beta^4} .$$

2.31. Парадокс метрового стержня. Метровый стержень, расположенный параллельно оси x системы K, движется вдоль оси x со скоростью V. Тонкая пластинка, параллельная плоскости xz системы K, движется вверх вдоль оси y со скоростью u. В пластинке проделано круглое отверстие диаметром в 1 м, центр которого лежит на оси y. Середина метрового стержня оказывается в начале координат системы K в тот самый момент, когда движущаяся вверх пластинка достигает плоскости $y = 0$. Но метровый стержень относительно K испытал лоренцево сокращение и, следовательно, свободно проходит через отверстие. Соударения между стержнем и пластинкой по этим соображениям не произойдет.

Однако рассмотрим это «столкновение» с точки зрения системы K', связанной со стержнем. В системе K' стержень не подвержен сокращению, поскольку он покоится, зато лоренцево сокращение испытывает отверстие в пластине. Следовательно, по этим соображениям соударение между стержнем и пластинкой будто бы неизбежно.

Произойдет ли соударение стержня с пластинкой в действительности?

Ответ. Соударения не произойдет и в системе K', так как в ней плоскость движущейся стенки наклоняется. В итоге метровый стержень с полностью «сохранившейся» длиной проскальзывает через сократившееся отверстие, но расположенное уже под углом к стержню. При этом концы стержня проходят через плоскость пластинки не одновременно.

ЧАСТЬ 3

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

В нерелятивистской динамике движение материальной точки в инерциальной системе отсчета подчиняется основному уравнению динамики (второй закон Ньютона):

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} .$$

Согласно третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух материальных точек i и k равны по модулю и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki} .$$

Прямым следствием второго и третьего законов Ньютона является сохранение полного импульса замкнутой системы двух материальных точек:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathrm{const} .$$

А для незамкнутой системы произвольного количества N материальных точек более общим следствием второго и третьего законов Ньютона является уравнение, связывающее ее полный импульс и полную внешнюю силу:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_{i\,\text{внеш}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} .$$

Учитывая данное соотношение в нерелятивистской системе, целесообразно ввести понятие центра масс, расположенного в точке:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i ,$$

где $m = \sum m_i$ – полная масса. Тогда для скорости центра масс $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ выполняется уравнение

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} ,$$

в соответствии с которым поступательное движение произвольного тела (системы материальных точек) можно рассматривать как движение материальной точки массой m, расположенной в центре масс $\mathbf{R}$. Также из этого уравнения следует сохранение проекции полного импульса системы на любое направление, вдоль которого не действует внешняя сила.

Полную силу, действующую на произвольное тело можно разделить на потенциальную и непотенциальную составляющие:

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \mathbf{F}_п + \mathbf{F}_н .$$

Потенциальная сила зависит только от положения точки в пространстве и может быть представлена как градиент (производная по координате) некоторой функции $U(\mathbf{r})$, называемой потенциальной энергией:

$$\mathbf{F}_п = -\nabla U, \; F_{пx} = -\frac{\partial U}{\partial x} .$$

Для произвольного тела, движущегося вдоль некоторого пути $\mathbf{l}$ под действием силы $\mathbf{F}$ из точки 1 в точку 2, можно ввести понятие работы, которая равна приращению кинетической энергии тела $K = mv^2/2$:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{F}\mathbf{v}dt = \int_1^2 m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1 .$$

А если в силе $\mathbf{F}$ есть потенциальная составляющая, то можно ввести понятие полной энергии тела в потенциальном поле:

$$E = K + U ,$$

приращение которой равно работе только непотенциальных сил:

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{н}} d\mathbf{l} .$$

Следствием этого является закон сохранения полной энергии, если на систему не действуют непотенциальные (неконсервативные) силы: $E_1 = E_2$.

Нерелятивистская динамика (задачи)

3.1. Четырьмя натянутыми нитями груз закреплен на тележке. Сила натяжения горизонтальных нитей соответственно T_1 и T_2, а вертикальных – T_3 и T_4. С каким ускорением тележка движется по горизонтальной плоскости?

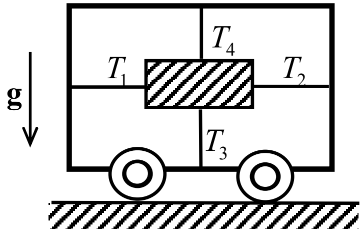


Рис. 3.1

Решение.

Выпишем уравнения движения груза массой m в вертикальном и горизонтальном направлении соответственно с учетом того, что в вертикальном направлении скорость и ускорение равны нулю:

$$0 = mg + T_3 - T_4,$$

$$ma = T_2 - T_1.$$

Сокращаем m и получаем ответ: $a = g\left(T_2 - T_1\right)/\left(T_4 - T_3\right)$.

3.2. Два тела массой m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T. К телам в разных направлениях вдоль нити приложены силы $F_1 = \alpha t$ и $F_2 = 2\alpha t$, где α – постоянный коэффициент, t – время действия силы. Определите, в какой момент времени нить порвется.

Ответ. $t = \dfrac{T\left(m_1 + m_2\right)}{\alpha\left(2m_1 + m_2\right)}$.

3.3. Маляр работает в подвесной люльке. Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что сила его давления на пол люльки уменьшается до 400 Н. Масса люльки 12 кг, масса маляра 72 кг. Чему равно ускорение люльки?

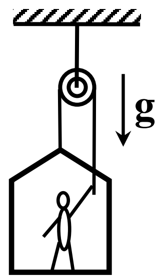


Рис. 3.3

Ответ. $a = 3{,}5$ м/с^2.

3.4. Два шарика массой m каждый, связанные нитью длины l, движутся со скоростью v по горизонтальному столу в направлении, перпендикулярном связывающей их нити (нить не провисает). Середина нити налетает на гвоздь. Чему равна сила натяжения нити сразу после этого события?

Ответ. $T = 2mv^2/l$.

3.5. Тело прикреплено к двум соединенным последовательно пружинам жесткости k_1 и k_2. К свободному концу цепочки пружин приложена постоянная сила F. Каково суммарное удлинение пружин, если колебания уже прекратились?

Ответ. $x = F(k_1 + k_2)/(k_1 k_2)$, эффективная жесткость двух пружин, соединенных последовательно $1/k_{эфф} = 1/k_1 + 1/k_2$.

3.6. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

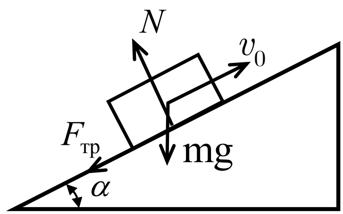


Рис. 3.6

Решение.

На тело действуют сила тяжести mg , сила реакции опоры N и сила трения $F_{тр}$, по модулю равная kN .

Проекции уравнения движения на направления вдоль и перпендикулярно плоскости дают

$$ma = -mg(k\cos\alpha + \sin\alpha),$$

$$0 = N - mg\cos\alpha .$$

Таким образом, тело движется с постоянным ускорением

$$a = -g(k\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Интегрируем уравнение движения

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a .$$

Решение при начальных условиях $s(0) = 0$ и $ds/dt(0) = v_0$ получаем двумя последовательными интегрированиями по времени:

$$s(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t\ .$$

Максимальное расстояние $v_0^2/2|a|$ тело проходит в момент времени $t_1=v_0/|a|$. Следовательно, чтобы расстояние было наименьшим, модуль ускорения должен быть наибольшим. Находим угол, обеспечивающий наибольшее ускорение из условия $d|a|/d\alpha=0$. Решением является $\mathrm{tg}\alpha=1/k$ и $s_{\min}=v_0^2/\left(2g\sqrt{1+k^2}\right)$.

3.7. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Покрытие плоскости неоднородно и коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $k=\gamma x$, где γ – постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и его максимальную скорость.

Ответ. $s=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{\gamma}$, $v_{\max}=\sqrt{\dfrac{g}{\gamma}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}$.

3.8. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за привязанную к нему веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни k. Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы с наименьшим усилием втащить ящик?

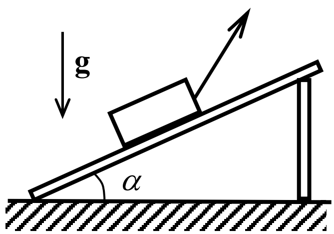


Рис. 3.8

Ответ. $\beta=\alpha+\mathrm{arctg}\,k$.

3.9. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана, пропорциональна произведению радиуса на скорость: $f=-\gamma rv$. Капли радиуса 0,1 мм, падая с большой высоты, у земли имеют скорость около 1 м/с. Какую скорость будут иметь капли, радиус которых в два раза меньше? В десять раз меньше?

Решение.

Падающая капля будет увеличивать свою скорость до тех пор, пока сила тяжести не станет равна силе сопротивления воздуха:

$$\gamma rv=mg=\rho\frac{4}{3}\pi r^3g\ .$$

Из чего следует, что установившаяся скорость капли будет пропорциональна квадрату радиуса: $v \sim r^2$.

Ответ. 0,25 м/с, 0,01 м/с.

3.10. Тело массой m, подброшенное вертикально вверх с малой скоростью V_1, вернулось обратно со скоростью V_2. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости $F = -\alpha V$, ускорение свободного падения g. Сколько времени тело находилось в полете?

Решение.

Запишем уравнение движения тела в поле тяжести, учитывая силу сопротивления воздуха:

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - \alpha V.$$

Это уравнение решается разделением переменных:

$$\int_{V_1}^{-V_2} \frac{dV}{\alpha V + mg} = -\int_0^T \frac{dt}{m},$$

$$T = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{1+\dfrac{\alpha V_1}{mg}}{1-\dfrac{\alpha V_2}{mg}}.$$

Так как начальная скорость мала, разложим логарифмы до квадратичных членов по $\alpha V/mg$.

Ответ. $T \approx \dfrac{V_1+V_2}{g}\left(1-\dfrac{\alpha}{2mg}\left(V_1-V_2\right)\right)$.

3.11. Сила сопротивления, тормозящая моторную лодку массой m, пропорциональна квадрату скорости $F = -\alpha V^2$. За какое время после выключения мотора ее скорость уменьшится вдвое? Какое расстояние при этом пройдет лодка?

Ответ. $T = \dfrac{m}{\alpha V_0}$, $s = \dfrac{m}{\alpha}\ln 2$.

3.12. Диск диаметром D и массой M бомбардируется однородным потоком точечных пылинок массой $m \ll M$, плотностью (количеством частиц в единице объема) n, скоростью V. За какое время первоначально неподвижный диск ускорится до скорости u? Удары пылинок упругие.

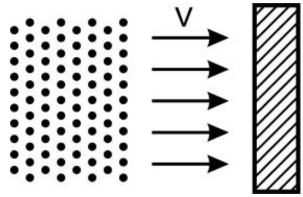


Рис. 3.12

Ответ. $T = \dfrac{2Mu}{\pi nmD^2 V\left(V-u\right)}$.

3.13. Плоская тележка, двигавшаяся со скоростью V, попадает под вертикально падающий дождь. Скорость капель u, средняя плотность дождя ρ, площадь горизонтальной поверхности тележки S. За какое время тележка остановится, если коэффициент трения колес о плоскость k? Вода с тележки стекает, так что ее масса M остается постоянной.

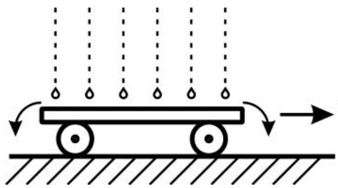


Рис. 3.13

Решение.

Сила, тормозящая лодку, складывается из двух составляющих. Первой является сила трения, равная

$$F_{\text{тр}} = -kN = -k\left(Mg + \rho S u^2\right),$$

где сила реакции опоры N компенсирует вес тележки и суммарный вертикальный импульс, передаваемый дождем тележке в единицу времени. Последний является произведением массы капель $\rho S u$, падающей на тележку в единицу времени, и изменения вертикальной скорости капель во время падения u . Второй составляющей является сила, возникающая в результате приобретения каплями воды, упавшими на тележку, импульса в горизонтальном направлении (считаем, что вода стекает одинаково во все стороны), которая, соответственно, равна

$$F_{\text{к}} = -\rho S u V .$$

Таким образом, уравнение движения тележки в горизонтальном направлении:

$$\frac{MdV}{dt} = -\rho S u V - k\left(Mg + \rho S u^2\right).$$

Уравнение интегрируется разделением переменных:

$$\int_V^0 \frac{dV}{V + ku + \dfrac{kgM}{\rho Su}} = -\frac{\rho Su}{M}\int_0^T dt \, .$$

В результате интегрирования получаем искомое время до остановки:

$$T = \frac{M}{\rho Su}\ln\left(1 + \frac{V}{k\left(Mg + \rho Su^2\right)}\right).$$

3.14. Протон с начальной скоростью v летит прямо (лобовое столкновение) на первоначально покоящееся ядро гелия. Какова скорость частиц при наибольшем их сближении? Масса ядра гелия близка к учетверенной массе протона.

Ответ. $u = 0,2\,v$.

3.15. При β -распаде покоящегося первоначально нейтрона образуются протон, электрон и нейтрино. Импульсы протона и электрона p_1 и p_2 соответственно, угол между ними α . Определите импульс нейтрино.

Ответ. $p = \sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos\alpha + p_2^2}$.

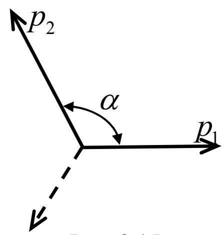


Рис. 3.15

3.16. Две небольшие шайбы масс m_1 и m_2 связаны нитью длины l и движутся по гладкой плоскости. В некоторый момент скорость одной шайбы равна нулю, а другой – v , причем ее направление перпендикулярно нити. Найти силу натяжения нити.

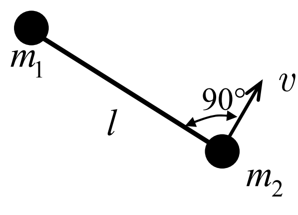


Рис. 3.16

Решение.

Центр масс замкнутой системы из двух шайб, находящийся на расстоянии $x_1 = lm_2/\left(m_1 + m_2\right)$ от первой шайбы, будет двигаться с постоянной скоростью

$$V_{\text{цм}} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \, .$$

В системе отсчета S', в которой центр масс покоится, шайбы будут вращаться вокруг него со скоростями

$$v_1' = -V_{\text{цм}} = -\frac{m_2 v}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = v - V_{\text{цм}} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, сила натяжения нити, обеспечивающая центростремительное ускорение каждой шайбы:

$$T = m_1 \frac{v_1'^2}{x_1} = \frac{v^2}{l} \frac{m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)},$$

что аналогично силе натяжения нити при вращении шайбы с приведенной массой $\mu = m_1 m_2 / \left(m_1 + m_2\right)$.

3.17. Где находится центр масс у а) однородного прута, согнутого посередине под прямым углом; б) однородной треугольной пластинки; в) гардеробного номерка в виде диска с круглым отверстием (рис. 3.17)?

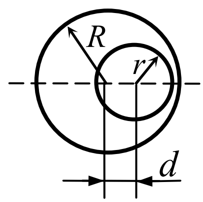


Рис. 3.17

Ответ. а) На середине отрезка, соединяющего центры двух половинок прута; б) в точке пересечения медиан; в) на прямой, соединяющей центры диска и отверстия, на расстоянии $l = dr^2 / \left(R^2 - r^2\right)$ от центра диска влево.

3.18. Человек с поднятыми руками стоит на платформе медицинских весов. Как изменяются показания весов при ускоренном движении рук вниз?

Ответ. Уменьшаются.

3.19. Однородный гибкий канат, висевший вертикально, касаясь поверхности своим нижним концом, падает на площадку весов. Найти зависимость показаний весов от времени и полный импульс, который канат передаст весам.

Решение.

Рассмотрим небольшой элемент каната длиной *dx*, расположенный на высоте *x* над столом. Масса этого элемента $dm = (m/l)dx$. В процессе падения на него действует только сила тяжести, и его скорость непосредственно перед ударом о поверхность равна $v = \sqrt{2gx}$, а длина части каната, уже упавшей к моменту времени *t*, равна $x = gt^2/2$. После удара этот элемент покоится, и поэтому импульс, передаваемый столу за время dt, равен $dp = (m/l)\sqrt{2gx}dx$. Таким образом, показания весов в момент времени t будут складываться из силы тяжести, действующей на уже упавшую часть каната, и скорости передачи импульса от падающей части:

$$F = \frac{m}{l} g\, x(t) + \frac{dp}{dt} = \frac{m}{l} g \frac{gt^2}{2} + \frac{m}{l} v^2 = \frac{3m}{l} gx = \frac{3m}{2l} g^2 t^2 \ .$$

Следовательно, в момент завершения падения всего каната весы покажут $F = 3mg$ при $x = l$.

Полный импульс, переданный канатом весам:

$$p = \int_0^l \frac{m}{l}\sqrt{2gx}\, dx = \frac{2m}{3}\sqrt{2gl} = \frac{2\sqrt{2}m}{3}\sqrt{2g\frac{l}{2}} \,,$$

что несколько меньше, чем если рассматривать канат как материальную точку, расположенную в центре масс на высоте $l/2$.

3.20. Свернутая в клубок тяжелая однородная цепь лежит на краю горизонтального стола, причем вначале одно звено цепи свешивается со стола. Под действием силы тяжести цепь начинает соскальзывать. Принимая нулевые начальные условия, определить закон движения цепи. Считать, что звенья цепи поочередно приобретают только вертикальную скорость.

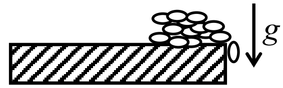


Рис. 3.20

Ответ. $x = \dfrac{gt^2}{6}$.

3.21. Цепь с неупругими звеньями перекинута через блок, причем часть ее лежит на столе, а часть – на полу. После того как цепь отпустили, она начала двигаться. Найдите скорость установившегося равномерного движения цепи. Высота стола h.

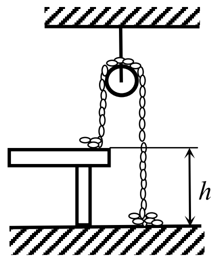


Рис. 3.21

Ответ. $v = \sqrt{gh}$.

3.22. Платформа с двигателем, на которой находится цистерна с водой, начинает движение по рельсам из состояния покоя. Двигатель обеспечивает постоянную силу тяги f. В дне цистерны имеется отверстие, через которое вытекает масса α за единицу времени. До какой скорости разгонится платформа за время, когда суммарная масса содержимого платформы уменьшится вдвое? Трением пренебречь.

Решение.

Так как вода вытекает вниз, то каждый элемент ее массы $dm_{\text{в}}$, вытекающий за время dt, в процессе истечения не меняет текущей горизонтальной скорости v, в то время как скорость тележки с оставшейся водой прирастает на dv. Пусть текущее значение массы тележки с водой m. Тогда уравнение движения для системы выглядит следующим образом:

$$\frac{(m - dm_{\text{в}})(v + dv) + dm_{\text{в}}\, v - mv}{dt} = m\frac{dv}{dt} = f\ ,$$

где произведением приращений $dm_{\text{в}}dv$ пренебрегаем. Кроме того, так как скорость истечения воды постоянна, то уравнение для текущей массы тележки с водой, учитывая, что $dm = -dm_{\text{в}}$:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha\ .$$

Оно легко интегрируется:

$$m = m_0 - \alpha t\ ,$$

где m_0 – масса тележки с водой в начальный момент времени. В итоге получаем уравнение движения

$$\left(m_0-\alpha t\right)\frac{dv}{dt}=f\ ,$$

которое интегрируем разделением переменных:

$$\int\limits_{v_0}^{v}dv=\int\limits_0^t\frac{fdt}{m_0-\alpha t}\ ,$$

$$v=\frac{f}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\ .$$

Учитывая, что время, через которое масса тележки уменьшится вдвое, равно $m_0/2\alpha$, получаем ответ:

$$v=\frac{f}{\alpha}\ln 2\ .$$

3.23. Найти закон движения сферической капли жидкости через неподвижный туман в поле тяжести. В начальный момент масса капли мала, а скорость равна нулю. Считать, что при соударении частички тумана прилипают к капле.

Ответ. $x=\dfrac{gt^2}{14}$.

3.24. Ледяной метеорит сферической формы тормозится в атмосфере Земли. Сила трения о воздух пропорциональна его площади и скорости: $F=-\alpha Sv$. Скорость испарения вещества метеорита пропорциональна его площади: $dM/dt=-\beta S$, причем в системе отсчета метеорита испарение изотропно. Найти зависимость скорости метеорита от времени, если его плотность ρ, а начальный радиус равен R_0. Силой тяжести пренебречь. Начальная скорость метеорита V_0.

Ответ. $v=v_0\left(1-\dfrac{\beta}{\rho R_0}t\right)^{\frac{3\alpha}{\beta}}$.

3.25. Найти зависимость скорости движения кальмара от времени, если он затрачивает мощность N и выбрасывает воду со скоростью u. Стартовая скорость кальмара равна нулю. Сила трения $F=-\alpha V$.

Решение.

Пусть кальмар в единицу времени захватывает массу μ покоящейся воды и выбрасывает ее назад со скоростью u относительно себя. Тогда энергия, которую он затрачивает на разгон этой порции воды: $N = \mu u^2/2$, т. е. $\mu = 2N/u^2$. Запишем уравнение движения для системы, состоящей из кальмара и порции воды $\mu\,dt$, которую он за время dt захватил и выбросил:

$$\frac{m(V+dV)+\mu(V-u)dt - mV - 0\cdot\mu dt}{dt} = -\alpha V,$$

$$\frac{mdV}{dt} = -\alpha V + \mu(u - V).$$

В полученном уравнении, введя обозначение $V_{\text{пр}} = \mu u/(\alpha+\mu)$, разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_0^V \frac{dV}{V - V_{\text{пр}}} = -\frac{\alpha+\mu}{m}\int_0^t dt .$$

Получаем ответ:

$$V = V_{\text{пр}}\left(1 - e^{-\frac{\alpha+\mu}{m}t}\right) = u\frac{\mu}{\alpha+\mu}\left(1 - e^{-\frac{\alpha+\mu}{m}t}\right).$$

3.26. Водометный катер движется в спокойной воде. Сила сопротивления воды движению катера $F = -\alpha v^2$. Скорость выбрасываемой воды относительно катера u. Определите установившуюся скорость катера, если сечение потока захваченной двигателем воды S, плотность воды ρ.

Ответ. $V = \rho S u/(\rho S + \alpha)$.

3.27. При какой минимальной мощности двигателей ракета сможет оторваться от стартового стола? Скорость истечения газов u = 2 км/с, начальная масса ракеты $M_0 = 10^3$ т. Какую массу газов должна она ежесекундно выбрасывать, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести?

Решение.

Для того чтобы ракета оторвалась от стартового стола, а также оставалась неподвижной в поле тяжести, двигатели ракеты должны обеспечивать реактивную силу $F_{\text{р}} = \mu u$, равную силе тяжести, действующей на ракету:

$$\mu u = mg .$$

Следовательно, в начальный момент времени мощность двигателей должна быть равна:

$$N_0 = \frac{\mu u^2}{2} = \frac{M_0 g u}{2} = 10^{10}\ \text{Вт} = 10\ \text{ГВт} .$$

В дальнейшем за счет выброса газа масса ракеты будет уменьшаться:

$$\frac{dm}{dt} = -\mu = -\frac{mg}{u},$$

и после интегрирования

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dm}{m} = -\int_0^t \frac{g\,dt}{u}$$

получаем

$$\mu = \frac{M_0 g}{u} \exp\left(-\frac{gt}{u}\right) = 5 \exp\left(-\frac{t[\text{с}]}{200}\right) \text{т/с} .$$

Ответ. $N_0 = 10\,\text{ГВт}$, $\mu = 5 \exp\left(-\frac{t[\text{с}]}{200}\right)$ т/с .

3.28. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газов относительно ракеты меньше скорости самой ракеты, т. е. вытекающие из сопла ракеты газы летят вслед за ракетой?

Ответ. Скорость ракеты будет увеличиваться.

3.29. Газ, вытекающий из сопла ракеты, имеет скорость u относительно нее. Определите изменение скорости ракеты после того, как ее масса из-за истечения газа уменьшилась в n раз.

Ответ. $\Delta v = u \ln n$.

3.30. Ракета взлетает вертикально вверх, выбрасывая раскаленные газы последовательно двумя равными малыми, по сравнению с массой ракеты, порциями. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна u. Каким должен быть промежуток времени между сгоранием порций, чтобы ракета достигла максимальной высоты? Сгорание топлива происходит мгновенно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Высота подъема ракеты в отсутствие сил трения будет определяться законом сохранения энергии, поэтому максимальная высота будет достигнута в случае максимума кинетической энергии, приобретенной ракетой в результате двух запусков двигателя. Каждый запуск в силу сохранения полного импульса обеспечивает прирост импульса ракеты:

$$m\Delta v = u\Delta m_{\text{г}},$$

где $\Delta m_{\text{г}}$ – масса газов, выброшенных в одной порции. При этом прирост кинетической энергии в результате запуска двигателя:

$$\Delta K = m\frac{(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})^2}{2} - m\frac{\mathbf{v}^2}{2} = m\mathbf{v}\Delta\mathbf{v} + m\frac{(\Delta\mathbf{v})^2}{2} = vu\,\Delta m_{\text{г}} + u^2\frac{(\Delta m_{\text{г}})^2}{2m}.$$

Следовательно, максимальный прирост кинетической энергии во втором запуске будет обеспечен в случае максимального значения скорости ракеты v в этот момент времени, т. е. сразу после первого запуска.

Ответ. Второй запуск двигателя следует делать сразу после первого.

3.31. Из длинной полоски резины жесткости k сделали рогатку. Найдите кинетическую энергию грузика, выпущенного из этой рогатки, если резину растянули с силой F и затем отпустили.

Ответ. $K = F^2/(8k)$.

3.32. На легкий стержень насажен массивный шар. В каком случае стержень упадет быстрее: если его поставить вертикально на конец A или на конец B? Стоящий на земле конец стержня не проскальзывает.

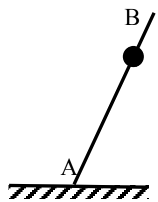


Рис. 3.32

Ответ. Стержень упадет быстрее, если его поставить на конец B.

3.33. Гантель длины l с шариками одинаковой массы на концах установлена вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. Затем гантель отпускают. Определите скорость верхнего шарика перед ударом о плоскость.

Ответ. $v = \sqrt{2gl}$.

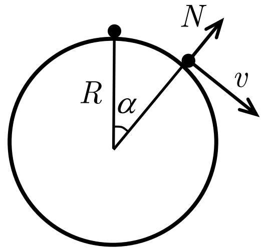


Рис. 3.34

3.34. Материальная точка покоится в верхней точке абсолютно гладкой сферы радиуса R, а затем начинает скользить вниз по поверхности сферы под действием силы тяжести. Какое расстояние пройдет она вниз от начальной точки прежде, чем оторвется от сферы?

Решение.

Пусть точка прошла расстояние $s = R\alpha$, тогда по закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha) .$$

Центростремительное ускорение точки обеспечивается равнодействующей силы тяжести и силы реакции опоры N :

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N .$$

А условием отрыва от сферы является равенство нулю силы реакции опоры $N = 0$, что дает $\cos\alpha = 2/3$.

Ответ. $s = R\arccos(2/3)$.

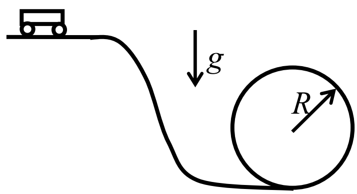


Рис. 3.35

3.35. Тележка скатывается по гладким рельсам, образующим вертикальную петлю радиуса R. С какой минимальной высоты от нижней точки петли должна скатиться тележка для того, чтобы не покинуть рельсы?

Ответ. $h = 2{,}5R$.

3.36. Груз массой m, подвешенный на пружине жесткости k, находится на подставке. Пружина при этом не деформирована. Подставку быстро убирают. Определите максимальное удлинение пружины и максимальную скорость груза.

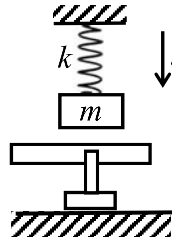


Рис. 3.36

Ответ. $h = 2mg/k$, $v = g\sqrt{m/k}$.

3.37. Тело массой m, подвешенное на пружине жесткости k, лежит на доске таким образом, что пружина не деформирована. Доску начинают опускать с ускорением a. Чему равно удлинение пружины в момент отрыва тела от доски? Каково максимальное удлинение пружины?

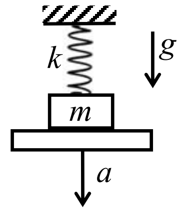


Рис. 3.37

Ответ.

$$x = (m/k)(g - a), \quad x_{\text{макс}} = (m/k)\left(g + \sqrt{2ga - a^2}\right).$$

3.38. Локомотив массой m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – постоянная, x – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд.

Решение.

Уравнение движения локомотива:

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

где F – суммарная сила, действующая на локомотив.

Так как известна зависимость скорости от пройденного пути, то можно найти силу:

$$F = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha m}{2\sqrt{x}}v = \frac{m\alpha^2}{2}.$$

Т. е. локомотив движется с постоянным ускорением $\alpha^2/2$. Работа силы F равна кинетической энергии, которую локомотив приобретет за время t:

$$A=\int_0^x Fdx=m\int\frac{dv}{dt}dx=m\int_0^v vdv=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\frac{\alpha^2 t}{2}\right)^2=\frac{m\alpha^4 t^2}{8}.$$

3.39. Груз массой m медленно поднимают на высоту h по наклонной плоскости с помощью блока и троса. При этом совершается работа A. Затем трос отпускают и груз скользит вниз. Какую скорость он наберет, опустившись до исходной точки?

Ответ. $v=\sqrt{4gh-2A/m}$.

3.40. Небольшое тело массой m медленно втащили в горку, действуя силой $\mathbf{F}$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории. Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания l и коэффициент трения k.

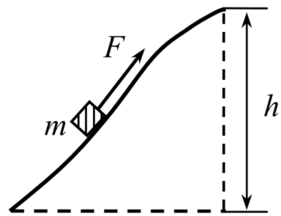


Рис. 3.40

Ответ. $A=mg\left(h+kl\right)$.

3.41. Частица массой m влетает в область действия тормозящей силы F под углом α к направлению этой силы. Под каким углом к направлению силы F она вылетит из этой области? Ширина области действия силы l. При каком условии частица не сможет пересечь эту область?

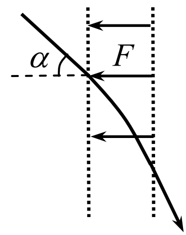


Рис. 3.41

Решение.

Постоянная сила F является потенциальной, так как может быть представлена градиентом потенциальной энергии $U=Fx$. Следовательно, можно записать закон сохранения полной энергии частицы:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv'^2}{2}+Fl,$$

где v' – скорость вылетевшей частицы. В направлении, перпендикулярном действию силы, импульс частицы также сохраняется:

$$mv\sin\alpha=mv'\sin\beta,$$

где β – угол вылета частицы. Выражая v' из первого соотношения и подставляя во второе, получаем:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{2Fl}{mv^2}}}.$$

Если $\beta = \pi/2$, частица не сможет пересечь область действия силы.

Ответ. $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{2Fl}{mv^2}}}$; при $Fl > \dfrac{mv^2}{2}\cos^2\alpha$.

3.42. На покоящийся шар налетает шар такой же массы. Найдите угол разлета шаров после нецентрального упругого удара.

Ответ. $\alpha = \pi/2$.

3.43. При упругом столкновении налетающей частицы с покоящейся первая полетела под углом α к направлению первоначального движения, а вторая – под углом β . Найдите отношение масс этих частиц.

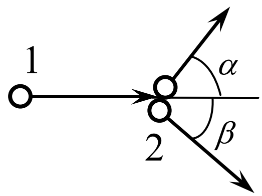


Рис. 3.43

Ответ. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$.

3.44. Три упругих шара с массами m_1, m_2 и m_3 находятся на одной прямой в покое. Потом шар m_1 ударяет шар m_2 с известной скоростью v_1 . Какова должна быть масса m_2 второго шара, чтобы после его удара о шар m_3 скорость последнего была наибольшей?

Решение.

Пусть скорости шаров после удара u_1, u_2 и u_3. Законы сохранения для удара первого шара со вторым:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 .$$

Перенеся первые слагаемые справа налево и деля первое выражение на второе, получим

$$v_1 + u_1 = u_2 .$$

Исключая u_1, получим

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 .$$

Аналогично можно получить для удара второго шара с третьим:

$$u_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_2 = \frac{2m_2}{(m_2 + m_3)} \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1 = \frac{4m_1 v_1}{m_1 + m_2 + m_3 + \dfrac{m_1 m_3}{m_2}} .$$

Наибольшее u_3 будет при наименьшем знаменателе:

$$\frac{d}{dm_2}\left(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{m_1 m_3}{m_2} \right) = 1 - \frac{m_1 m_3}{m_2^2} = 0 .$$

Ответ. $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

3.45. Бусинки массой m_1, m_2 и m_3 могут скользить вдоль горизонтальной спицы без трения, причем $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$. Определить максимальные скорости крайних бусинок, если вначале они покоились, а средняя бусинка имела скорость v. Удары упругие.

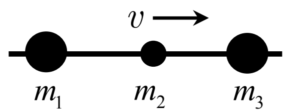


Рис. 3.45

Ответ. $v_1 = v\sqrt{\dfrac{m_2 m_3}{m_1 (m_1 + m_3)}}$, $v_3 = v\sqrt{\dfrac{m_2 m_1}{m_3 (m_1 + m_3)}}$.

3.46. Тяжелая частица массой m_1 сталкивается с покоящейся легкой частицей массой m_2. На какой наибольший угол может отклониться тяжелая частица в результате упругого удара?

Ответ. $\sin\alpha = m_2 / m_1$.

3.47. По горизонтальной плоскости может скользить без трения гладкая горка высоты h и массой m_1. Горка плавно переходит в плоскость. При какой наименьшей скорости горки небольшое тело массой m_2, неподвижно лежащее на ее пути, перевалит через вершину?

Ответ. $v = \sqrt{2gh(1 + m_2/m_1)}$.

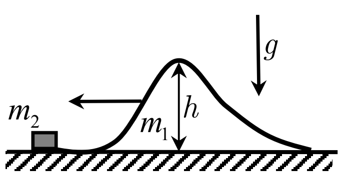


Рис. 3.47

3.48. Какой минимальной скоростью должен обладать нерелятивистский нейтрон, чтобы при столкновении с покоившимся ядром массой M увеличить его внутреннюю энергию на ΔE ?

Решение.

Чтобы внутренняя энергия ядра при столкновении возросла, столкновение должно быть неупругим. Пусть масса нейтрона m, его скорость до столкновения v , после столкновения – v' , а скорость ядра после столкновения u. Тогда запишем законы сохранения импульса и энергии в нерелятивистском приближении (рассматриваем лобовое столкновение):

$$mv = Mu + mv',$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} + \Delta E.$$

Выразим v' из первого выражения, подставим во второе и получим

$$v = \frac{M+m}{2m}u + \frac{\Delta E}{Mu}.$$

Для нахождения минимального значения v приравниваем нулю производную:

$$\frac{dv}{du} = \frac{M+m}{2m} - \frac{\Delta E}{Mu^2} = 0,$$

из чего получаем

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta E m}{M(m+M)}},$$

$$v_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{2\Delta E(m+M)}{mM}} = \sqrt{\frac{2\Delta E}{\mu}},$$

где $\mu = mM/(m+M)$ – приведенная масса.

Второй, более простой способ, решения данной задачи заключается в том, чтобы рассмотреть процесс в системе покоя центра масс, в которой нейтрон и ядро движутся навстречу друг другу и суммарный импульс системы равен нулю. Очевидно, что для наиболее эффективной передачи кинетической энергии их движения во внутреннюю энергию ядра их скорости после столкновения должны быть равны нулю (при этом полный импульс в системе центра масс сохранится). Из чего следует, что в лабораторной системе их скорости должны быть равны $v' = u$, что после постановки в законы сохранения дает тот же ответ.

3.49. Два тела массой m_1 и m_2 прикреплены к нитям одинаковой длины с общей точкой подвеса и отклонены: одно влево, другое вправо – на один и тот же угол. Тела одновременно отпускают. При ударе друг о друга они слипаются. Определите отношение высоты, на которую тела поднимаются после слипания, к высоте, с которой они начали свое движение вниз.

Ответ. $h/h_0 = \left[(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)\right]^2$.

3.50. Снаряд, летящий со скоростью $v = 500$ м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы увеличилась в $\eta = 1,5$ раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

Ответ. $v_{\text{макс}} = v\left(1 + \sqrt{2(\eta - 1)}\right) = 1\,\text{км/с}$.

ЧАСТЬ 4

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Релятивистские энергия и импульс

4-вектор импульса вводится путем замены обычной скорости $\mathbf{v}$ на 4-скорость u_μ:

$$P_\mu = m\frac{dR}{d\tau} = m u_\mu = \{p_0, \mathbf{p}\};\; p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\; \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

а закон сохранения импульса запишем как закон сохранения 4-импульса:

$$\sum_i P_\mu = \sum_j P'_\mu, \qquad \mu = 0\ldots 3\,.$$

Величины

$$E = p_0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ – релятивистская энергия,

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ – релятивистский импульс.

Квадрат 4-импульса является инвариантом при преобразованиях Лоренца:

$$P_\mu^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 = \mathrm{inv}\,.$$

Энергия и импульс связаны соотношением:

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}\,.$$

Преобразования Лоренца для энергии и импульсов:

$$E = \gamma(E' + \mathbf{V}\mathbf{p}'),\; p_x = \gamma(p'_x + \frac{V}{c^2}E'),\;\; p_y = p'_y,\;\; p_z = p'_z;$$

$$E' = \gamma(E - \mathbf{V}\mathbf{p}),\;\; p'_x = \gamma(p_x - \frac{V}{c^2}E),\;\; p'_y = p_y,\;\; p'_z = p_z,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2/c^2}$.

Для фотона $m=0$, тогда $E_\gamma = p_\gamma c$. Энергия фотона $E_\gamma = \hbar\omega$, импульс $p_\gamma = \hbar\omega/c$.

Поскольку $\left\{E_\gamma/c, \mathbf{p}_\gamma\right\}$ – 4-вектор, то является 4-вектором и $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$, где $|k| = \omega/c$. Отсюда следуют формулы для эффекта Доплера:

$$\omega' = \gamma(\omega - k_x V),\ \ k'_x = \gamma(k_x - \beta\frac{\omega}{c}),\quad k'_y = k_y,\ k'_z = k_z .$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p'\sin'\vartheta}{\gamma\left(p'_x + \dfrac{E'}{c^2}V\right)} = \frac{\sin'\vartheta}{\gamma\left(\dfrac{V}{v'} + \cos\vartheta'\right)} .$$

Релятивистская сила

По определению трехмерная сила $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Дифференцируя $E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^2$, получаем $EdE = c^2\mathbf{p}d\mathbf{p}$, откуда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = (\mathbf{vF}) ,$$

как и в классике, изменение энергии равно работе сил.

Примечание: следует обратить внимание, что фактор γ используется в двух значениях. Он может относиться как к скорости v рассматриваемой частицы, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, как в предыдущей формуле, а может и к скорости V системы отсчета S', если речь идет о преобразовании какой-либо величины при переходе к другой системе отсчета.

Тогда закон преобразования сил при переходе из неподвижной системы S в систему S', движущуюся со скоростью V в направлении оси X, получается из определения трехмерной силы:

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\gamma(dp_x - \dfrac{V}{c^2}dE)}{\gamma(dt - \dfrac{V}{c^2}dx)} = \frac{F_x - \dfrac{V}{c^2}(\mathbf{Fv})}{1 - \dfrac{Vv_x}{c^2}} ,$$

$$F'_{y,z} = \frac{dp'_{y,z}}{dt'} = \frac{dp_{y,z}}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} = \frac{F_{y,z}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}},$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2/c^2}$, V – скорость системы S'. Обратный закон преобразования получается заменой $V \to -V$:

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{V}{c^2}(\mathbf{F}'\mathbf{v}')}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad F_{y,z} = \frac{F'_{y,z}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}.$$

Например, если тело покоится в S' системе, т. е. $v' = 0$, и на него действует сила $\mathbf{F}'$, то сила в неподвижной системе S:

$$F_x = F'_x, \qquad F_{y,z} = F'_{y,z}\sqrt{1-V^2/c^2}.$$

Продольные силы одинаковы в обеих системах, а поперечные отличаются в γ раз.

Связь между силой $\mathbf{F}$ и ускорением $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ в релятивистском случае:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{v}) = m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3\frac{(\mathbf{av})\mathbf{v}}{c^2} = m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{a}),$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.

Отсюда можно получить (см. лекции [1]) ускорение:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\gamma m}.$$

Направления ускорения и силы могут не совпадать.

Релятивистская ракета, равноускоренная в собственной системе отсчета

В сопутствующей системе отсчета S' уравнение движения имеет вид

$$F'_x = ma'_x = mg.$$

В системе Земли (S) корабль имеет мгновенную скорость $v = V$. Поскольку v'_x корабля равна нулю, из формулы преобразования сил следует $F_x = F'_x$. Отсюда уравнение движения в неподвижной системе:

$$\frac{dp}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\gamma m v) = F_x = mg \, .$$

Интегрируя , находим $m\gamma v = mgt$ или

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = gt \;\Rightarrow\; v = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + g^2 t^2/c^2} \, .$$

Путь, пройденный кораблем в неподвижной системе:

$$x = \int_0^t \frac{gt dt}{\sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}} = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} - 1\right).$$

При $gt/c \ll 1$ $\qquad x = \dfrac{gt^2}{2}$,

при $gt/c \gg 1$ $\qquad x \approx \dfrac{c^2}{g}\left(\dfrac{gt}{c}\sqrt{\dfrac{c^2}{g^2 t^2} + 1} - 1\right) \approx ct - \dfrac{c^2}{g}$.

По часам на корабле проходит время

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma \, ,$$

откуда

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + g^2 t^2/c^2}} = \frac{c}{g}\operatorname{arcsh}\left(\frac{gt}{c}\right) \equiv \frac{c}{g}\left(\ln\frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}\right).$$

И наоборот, $gt/c = \operatorname{sh}(g\tau/c)$.

В предельных случаях:

$$\tau \approx t \text{ при } gt/c << 1\,, \qquad \tau \approx \frac{c}{g}\ln\frac{2gt}{c} \text{ при } gt/c >> 1\,.$$

Скорость и путь по часам на корабле:

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}} = c\,\mathrm{th}\frac{g\tau}{c}\,, \qquad x = \frac{c^2}{g}\left(\mathrm{ch}\frac{g\tau}{c} - 1\right).$$

При $gt/c \gg 1$

$$x = \frac{c^2}{2g}\exp\frac{g\tau}{c}\,, \qquad \tau = \frac{c}{g}\ln\frac{2gx}{c^2}\,.$$

Расход горючего

Аналог формулы Циолковского в релятивистском случае (см. лекции [1]):

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{1-v/c}{1+v/c}\right)^{c/2u_0},$$

где u_0 – скорость истечения газов относительно ракеты. Для фотонного двигателя при $u_0 = c$:

$$\frac{m}{m_0} = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,.$$

Для ракеты с фотонным двигателем, движущейся равноускоренно, ее масса зависит от собственного времени как

$$m = m_0 \exp(-g\tau/c)\,.$$

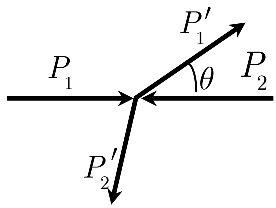
Упругие столкновения частиц

Все задачи на столкновения и распады решаются на основании закона сохранения 4-импульса.

В случае упругого столкновения двух частиц с массами m_1 и m_2 закон сохранения 4-импульса имеет вид

$$P_1 + P_2 = P_1' + P_2'\,,$$

здесь и далее большая буква $P = \{E/c, \mathbf{p}\}$ означает 4-импульс. Это уравнение является на самом деле четырьмя уравнениями. Однако часто удобнее оперировать целыми 4-векторами. Для упрощения вычислений удобно полагать $c = 1$. В конце вычислений всегда видно, где по размерности нужно добавить c.



Пусть две частицы сталкиваются навстречу друг другу с энергиями E_1 и E_2 и задан угол рассеяния первой частицы θ. Нужно найти энергию этой частицы. Параметры второй частицы после этого находятся простым вычитанием. Для решения задачи исключим одним шагом две неизвестные величины, относящиеся ко второй частице:

$$(P_2')^2 = (P_1 + P_2 - P_1')^2 = m_2^2 \quad (c = 1) .$$

После этого остается одно уравнение с одной неизвестной $|\,p_1'\,|$, которое легко решить, учитывая правила работы с 4-векторами: $(AB) = a_0 b_0 - \mathbf{ab}$.

Распад частиц

Рассмотрим распад покоящейся частицы с массой M на две частицы с массами m_1 и m_2. Закон сохранения 4-импульса при таком распаде имеет вид

$$P = P_1 + P_2 .$$

Для нахождения энергии первого осколка исключим параметры второй частицы

$$(P - P_1)^2 = P_2^2 = m_2^2 .$$

Остается одно уравнение с одной неизвестной $|\,p_1\,|$, которое легко решить. Учитывая, что $P = \{M, \mathbf{0}\}$, $P_1 = \{E_1, \mathbf{p}_1\}$, получаем

$$M^2 - 2ME_1 + m_1^2 = m_2^2 ,$$

откуда (возвращаем «c»)

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2 .$$

Неупругие столкновения, пороги рождения частиц, встречные пучки

При неупругом столкновении (слипании) двух частиц с массами m_1 и m_2 с 4-импульсами $P_1 = \{E_1, \mathbf{p}_1\}$, $P_2 = \{E_2, \mathbf{p}_2\}$ масса конечной частицы M находится из ($c = 1$)

$$M^2 = P^2 = (P_1 + P_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 .$$

В случае столкновения движущейся частицы с покоящейся частицей

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2 ,$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = \mathbf{p_1} .$$

Образовавшаяся частица движется со скоростью

$$v = \frac{c^2 p}{E} = \frac{p_1 c^2}{E_1 + m_2 c^2} ,$$

ее масса

$$M^2 = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \quad .$$

Отсюда для рождения частицы с массой M при столкновении движущейся частицы с неподвижной необходима энергия

$$E_1 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2} .$$

На встречных пучках рожденная система (или одна частица) имеет массу $M = 2E/c^2$.

Сила Лоренца

На заряд, движущийся со скоростью $\mathbf{V}$, действует *сила Лоренца*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}) ,$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – это электрическое и магнитное поля, создаваемые источником полей.

Движение заряженной частицы в магнитном поле

Компонента силы Лоренца вдоль поля равна нулю, поэтому продольная компонента импульса сохраняется. Закон изменения поперечного импульса:

$$\frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{q[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]}{c}.$$

Поскольку сила перпендикулярна скорости, магнитное поле не совершает работы, изменяется лишь направление движения, и, в случае постоянного поля, это будет движение по окружности с радиусом

$$R=\frac{p_{\perp}c}{qB}.$$

Для $q=e$ (заряд электрона) это уравнение можно записать в удобном для расчетов виде

$$R\approx\frac{3333\,p_{\perp}c\,[\text{ГэВ}]}{B\,[\text{кГс}]},\ \text{см}.$$

Системы единиц электрических величин

Основное отличие системы СГС(Э) и СИ состоит в электрических единицах. Обычные механические законы записываются одинаково в обеих системах единиц, отличие состоит только в величинах, взятых за единицу измерений. В случае же электрических явлений имеется отличие даже в формулах.

Единица заряда

В системе СГСЭ единицей заряда является «*единица заряда СГСЭ*» – это такой заряд, что сила взаимодействия двух зарядов по одной единице СГСЭ, расположенных на расстоянии 1 см, равна 1 дин.

$$F=\frac{q_1q_2}{r^2},$$

здесь сила в динах, заряды в ед. СГСЭ, расстояние в см.

В системе СИ единицей заряда является *кулон* (Кл). Кулон – это заряд, протекающий за 1 с при силе тока 1 *ампер* (А). Ампер (по определению) – это такой ток, при котором два провода с таким током, находящиеся на расстоянии 1 см, притягиваются с силой $2\cdot 10^{-2}$ дин на 1 погонный сантиметр. Откуда можно получить

$$\mathbf{1\ Кл = (c/10)\ ед.\ СГСЭ \approx 3\cdot 10^{9}\ ед.\ заряда\ СГСЭ}$$

(здесь скорость света в СГСЭ $c = 29979245800 \approx 3\cdot 10^{10}$ см/с).

Заряд электрона:

$$e \approx 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{Кл} = 4{,}8\cdot 10^{-10}\,\text{ед. СГСЭ}\,.$$

Электрический потенциал

В СГСЭ: при прохождении единичной разности потенциалов кинетическая энергия заряда в 1 ед. СГСЭ изменяется на 1 эрг. Такая разность потенциалов называется «*единицей потенциала СГСЭ*»:

$$1\,\text{эрг} = 1\,\text{ед. зар. СГСЭ} \times 1\,\text{ед. потенц. СГСЭ}\,.$$

В СИ: при прохождении единичной разности потенциалов кинетическая энергия заряда в 1 Кл изменяется на 1 Дж. Такая разность потенциалов называется *вольт* (В):

$$1\,\text{Дж} = 1\,\text{Кл} \times 1\,\text{В}\,.$$

Учитывая, что 1 Дж $= 10^7$ эрг, получается

$$\frac{1\text{ед. потенциала СГСЭ}}{1\ \text{Вольт}} = \frac{1}{10^7}(c[\text{в СГС}]/10) = 299{,}792458 \approx 300.$$

1 ед. потенциала СГСЭ $\approx$ 300 В.

Магнитное поле

Сила Лоренца в СГСЭ:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B})\,.$$

Единица магнитного поля в СГСЭ – *гаусс* (Гс), эта единица возникает естественным образом, магнитное поле и напряженность электрического поля в системе СГСЭ имеют одинаковую размерность, равную ед. потенциала СГСЭ/см (для напряженности поля в СГСЭ не придумали специального названия).

Сила Лоренца в СИ (по определению):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) ,$$

все как в СГСЭ, но без скорости света. Единица магнитного поля в системе СИ *тесла* (Т). Из сравнения этих формул можно получить

1 Т= 10^4 Гс.

Электрон-вольт – это изменение энергии электрона при прохождении разности потенциалов 1 В.

$$1\,\text{эВ} = e \times 1\,\text{В} = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{Кл} \times 1\,\text{В} = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{Дж} = 1,6 \times 10^{-12}\,\text{эрг}.$$

Релятивистская динамика (задачи)

Масса, энергия и импульс релятивистских частиц

4.1. Вычислить скорость и импульс электронов (в эВ/c), если их кинетическая энергия равна:
а) 5 кэВ (трубка осциллографа);
б) 3 МэВ (электростатический ускоритель Ван-де-Граафа);
в) 50 ГэВ (Стэндфордский линейный ускоритель).

Ответ. a) $v = 4,2 \cdot 10^9$ см/с, p = 72 кэВ/c;
b) $v = 2,97 \cdot 10^{10}$ см/с, p = 3,47 МэВ/c;
c) $v = c(1 - 5 \cdot 10^{-11})$, p = 50 ГэВ/c.

4.2. Заряженные π-мезоны с импульсом p = 54 МэВ/с пролетают в среднем расстояние L = 3 м (от момента рождения до распада). Найти собственное время жизни π-мезонов. Масса π-мезона 140 МэВ/c^2.

Ответ. $\tau_0 = \dfrac{mL}{p} \approx 2,6 \cdot 10^{-8}\,\text{с}$.

4.3. Найти давление, производимое пучком электронов с кинетической энергией $T = 3$ МэВ и током $I = 1$ А, сфокусированным на поглощающей мишени в пятно площадью $S = 1\,\text{мм}^2$.

Ответ. $P = \gamma mnV^2 = \gamma mV \dfrac{I}{eS} \approx (T + mc^2)\dfrac{I}{eSc} \simeq 1,2 \cdot 10^4\,\text{Па}$.

4.4. Плотность мощности солнечного излучения на орбите Земли имеет величину $W = 1.4$ кВт/м^2. Насколько меняется масса Солнца в единицу времени за счет излучения света?

Ответ. $\dfrac{dM}{dt}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{dE}{dt}=\dfrac{W\cdot 4\pi r^2}{c^2}=W4\pi\tau^2\simeq 5\cdot 10^9$ кг/с ,

где r – расстояние до Солнца, $\tau=500$ с – время движения света от Солнца до Земли.

4.5. Зеркало удерживается давлением лазерного луча в поле тяжести. Какова масса зеркала, если мощность лазера 200 кВт?

Решение.

При отражении от неподвижного зеркала фотон передает ему импульс $\Delta p=2E/c$, где E – энергия фотона. При интенсивности пучка N фотонов в секунду и мощности лазера $W=EN$ свет действует с силой

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{2E}{c}N=\frac{2W}{c}.$$

Отсюда масса зеркала $m=2W/cg\simeq 0{,}13$ г.

Преобразование энергии-импульса. Эффект Доплера

4.6. Лазер испускает импульс света длительностью T и полной энергией E, который отражается от идеального зеркала, приближающегося к лазеру со скоростью V. Каковы энергия и длительность светового импульса после отражения? Свет падает по нормали к поверхности зеркала.

Решение.

В Л-системе импульс света продолжительностью T будет отражаться от движущегося навстречу зеркала в течение времени $t=cT/(c+V)$. За это время передний фронт успеет удалиться от зеркала на расстояние $d=(c-V)t=cT(c-V)/(c+V)$, тогда в Л-системе продолжительность отраженного импульса будет

$$T_{\text{отр}}=\frac{d}{c}=T\frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Энергия светового импульса будет равна сумме энергий отраженных отдельных фотонов:

$$E_{\text{отр}}=E\frac{1+\beta}{1-\beta},$$

что можно получить, сделав два преобразования Лоренца или заметив, что длина волны фотонов укоротится в то же число раз, как и длительность импульса, а $E_\gamma \propto 1/\lambda$.

4.7. На космическом корабле, удаляющемся от Земли со скоростью $V = c/2$, вышла из строя энергетическая установка. Чтобы обеспечить корабль энергией, с Земли посылают лазерный луч. Какова должна быть мощность лазера, если на борту корабля потребляется мощность W?

Решение.

Энергия принимаемых на корабле фотонов $E' = \gamma E(1-\beta)$. Длительность вспышки изменяется так же, как и длина волны фотонов, т. е. $T'/T = E/E'$. Отсюда $W = E'/T' = \gamma^2(1-\beta)^2 E/T = \; = \gamma^2(1-\beta)^2 W_0$, т. е. требуемая мощность лазера:

$$W_0 = W\frac{1+\beta}{1-\beta} = 3W.$$

4.8. Пучок электронов со средней энергией частиц 50 ГэВ и относительным разбросом энергий 1 % движется в Л-системе отсчета вдоль оси X. Какова максимальная кинетическая энергия электронов в сопровождающей пучок системе отсчета?

Решение.

При переходе из Л-системы в систему пучка $dE' = \gamma(dE - Vdp)$. Из $E^2 + p^2c^2 = m^2c^4$ имеем $EdE = c^2 pdp.$ С учетом $V = pc^2/E$ получаем $dE' = 0$. Такой странный ответ означает, что $dE' = c_1 dE + c_2(dE)^2 + \dots$, где $c_1 = 0$. В этом случае нужно разложить $p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}$ в ряд Тейлора с учетом квадратичного члена. Получим

$$dp = \frac{E}{pc^2}dE - \frac{m^2}{2p^3}(dE)^2 .$$

После подстановки в исходную формулу, с учетом $p \approx E/c$, получаем

$$dE' \approx \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{E}\right)^2 mc^2 \simeq 25 \text{ эВ}.$$

Другой вариант решения – это нахождение сначала разброса по импульсам в системе покоя пучка (нуля не возникает), а затем энергетического разброса. Но до такого метода нужно догадаться. Первый же способ является прямым решением задачи.

4.9. Найти скорость центра инерции для системы частиц с импульсами $\mathbf{p}_k$ и энергиями E_k.

Ответ. $\mathbf{V} = c^2 \dfrac{\sum \mathbf{p}_k}{\sum E_k}$.

4.10. Определите скорость и рабочую частоту радиомаяка НЛО, если при его приближении к Земле принимаемая частота радиосигнала была ω, а при удалении – $\omega/4$.

Решение.

В общем случае $E = \gamma(E' + \mathbf{V}\mathbf{p}')$. Когда радиомаяк приближается, то скорость НЛО и импульс фотонов имеют одно и то же направление, а когда удаляется, то противоположные. Соответственно, $\omega = \gamma\,\omega_0(1 + V/c)$ и $\omega/4 = \gamma\,\omega_0(1 - V/c)$. Откуда находим $\omega_0 = \omega/2$ и $V = 0{,}6c$.

4.11. Космический корабль, летящий со скоростью V_1, посылает сигнал частотой ω_1 и после его отражения от летящего навстречу другого космического корабля принимает сигнал частотой ω_2 (частоты даны в системе отсчета первого корабля). Найти скорость второго корабля.

Ответ. $V_2 = c \cdot \dfrac{\beta_1(\omega_1 + \omega_2) + \omega_1 - \omega_2}{\beta_1(\omega_2 - \omega_1) - \omega_2 - \omega_1}$.

4.12. Источник света с частотой ν_0 движется со скоростью V в неподвижной среде с показателем преломления n мимо неподвижного наблюдателя. Какую частоту будет регистрировать наблюдатель при приближении источника света и при его удалении?

Решение.

В Л-системе частота света будет $\nu = \nu_0 / \gamma$. Будем считать, что $V < c/n$. Тогда если свет и источник движутся в одном направлении, то за одно колебание свет пройдет путь $c/n\nu$, а источник – путь V/ν . Их разность будет равна длине волны света в среде:

$$\lambda_1 = c/n\nu - V/\nu = \gamma(c/n - V)/\nu_0 .$$

В случае противоположного направления движения:

$$\lambda_2 = c/n\nu + V/\nu = \gamma(c/n + V)/\nu_0 .$$

Для наблюдателя в Л-системе регистрируемая частота света равна

$$\nu_{\text{прибл}} = \frac{c/n}{\lambda_1} = \nu_0 \frac{1}{\gamma(1-n\beta)}, \quad \nu_{\text{удал}} = \frac{c/n}{\lambda_2} = \nu_0 \frac{1}{\gamma(1+n\beta)}.$$

4.13. Для определения скорости космического объекта, пролетающего мимо Земли, его зондируют лазерным лучом с частотой фотонов ν_0. Определите скорость объекта по частоте $\nu_н$ фотонов, «вернувшихся» к наблюдателю, и по углу θ между направлением движения объекта и лучом света.

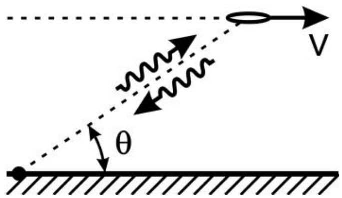


Рис. 4.13

Решение.

Частота света, приходящего на ракету и отраженного от нее, $\nu' = \gamma\nu_0(1-\beta\cos\theta)$. Обратно возвращается свет с частотой $\nu_н$, получаемой из соотношения $\nu' = \gamma\nu_н(1+\beta\cos\theta)$. Отсюда находим

$$\nu_н = \nu_0 \frac{1-\beta\cos\theta}{1+\beta\cos\theta} \quad \text{и} \quad V = c\frac{\nu_0-\nu_н}{\nu_0+\nu_н}\frac{1}{\cos\theta}.$$

4.14. Найти изменение направления движения фотона при отражении от массивного зеркала, движущегося со скоростью V перпендикулярно своей плоскости.

Решение.

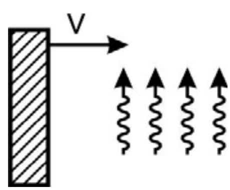


Рис. 4.14

Пусть фотон имеет энергию E. В системе зеркала падающий фотон имеет

$$E' = \gamma E, \;\; p'_x = \gamma(p_x - \frac{V}{c^2}E) = -\gamma\frac{V}{c^2}E, \;\; p'_y = p_y = \frac{E}{c}.$$

После отражения от зеркала горизонтальный импульс меняется на противоположный и становится равным

$$p'_x = \gamma\frac{V}{c^2}E,$$

вертикальный импульс и энергия остаются неизменными. Тогда в Л-системе:

$$p_{x,f} = \gamma(p'_x + \frac{V}{c^2}E') = 2\gamma^2 EV/c^2.$$

В результате

$$\mathrm{tg}\,\theta = p_y \,/\, \mathrm{p}_{x,f} = \frac{c}{2\gamma^2 V}.$$

4.15. Идеальное двухстороннее зеркало ускоряется лучом лазера. Какой будет установившаяся скорость зеркала, если с противоположной стороны его тормозит луч второго лазера в четыре раза меньшей мощности? Свет падает по нормали к поверхности зеркала.

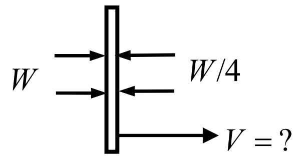


Рис. 4.15

Ответ. $V = c/3$.

Законы сохранения энергии и импульса. Распад частиц

4.16. Релятивистская частица распадается на два фотона. Углы вылета фотонов относительно исходного направления движения частицы равны θ_1 и θ_2 , суммарная энергия фотонов равна *E*. Найти массу распавшейся частицы и ее скорость.

Решение.

Из сохранения энергии и равенства поперечных импульсов фотонов имеем $E = E_1 + E_2$, $E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$, откуда

$$E_1 = E\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}, \quad E_2 = E\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}.$$

Масса распавшейся частицы (полагаем $c = 1$):

$$m^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 = 0 + 0 + 2E_1E_2(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)).$$

Скорость:

$$V = \frac{pc^2}{E} = c\frac{E_1\cos\theta_1 + E_2\cos\theta_2}{E}.$$

4.17. π^0-мезон распадается на лету на два γ-кванта, углы вылета которых составляют соответственно θ_1 и θ_2 с начальным направлением движения π^0-мезона. Найти энергию π^0-мезона, если его масса равна *M*.

Ответ. $E_\pi = \dfrac{Mc^2}{2\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\sqrt{\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}}+\sqrt{\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}}\right).$

4.18. Найти энергию π^0-мезонов, распадающихся по схеме $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, если счетчик, расположенный по направлению их движения, регистрирует γ-кванты распада с энергией 270 МэВ. Масса π^0-мезона 135 МэВ.

Решение.

В системе π^0 мезона энергия фотона $E' = mc^2/2$. В Л-системе:

$$E_\gamma = \gamma E_\gamma'(1+\beta) = \gamma mc^2(1+\beta)/2 .$$

Выразив β через γ, после некоторый преобразований найдем γ и

$$E = \gamma mc^2 = E_\gamma + \frac{m^2c^4}{4E_\gamma}.$$

Но есть более короткое решение. Заметим, что инвариантная масса двух фотонов, летящих в противоположных направлениях, $W^2 = 4E_1E_2 = 4(E-E_\gamma)E_\gamma = m^2c^4$, откуда сразу находим E.

4.19. Энергия возбуждения ядра Fe^{57} равна 14,4 кэВ. Оценить, на сколько отличается от энергии возбуждения энергия фотона, испущенного незакрепленным возбужденным ядром? Какова скорость ядра после испускания фотона?

Решение.

Поскольку энергия фотона много меньше массы ядра (точнее Mc^2), расчет можно сделать приближенно. Полагаем сначала, что фотон полетел с энергией, равной энергии возбуждения E_0. Ядро будет нерелятивистское и его скорость $V \approx (E_0/c)/M = E_0/Mc$. Энергия фотона будет равна энергии возбуждения минус кинетическая энергия ядра:

$$E_\gamma \approx E_0 - \frac{MV^2}{2} = E_0 - \frac{E_0^2}{2Mc^2}.$$

4.20. Частица с массой M и энергией E распадается на лету на две одинаковые частицы с массами m, при этом одна из частиц полетела под прямым углом относительно направления начального движения. Чему равны энергии конечных частиц?

Решение.

Пишем закон сохранения 4-импульса: $P = P_1 + P_2$. «Исключаем» из уравнения вторую частицу (полагаем $c = 1$): $P_2^2 \equiv m^2 = (P - P_1)^2 = P^2 - 2PP_1 + P_1^2 = M^2 - 2EE_1 + m^2$. Откуда, добавляя c по размерности:

$$E_1 = \frac{M^2 c^4}{2E}, \quad E_2 = E - E_1.$$

4.21. Найти массу *J/Ψ* -мезона, распавшегося на электрон и позитрон с одинаковыми энергиями 3,1 ГэВ и углом разлета 60^0.

Ответ. $M_{J/\Psi} = 2\left[\left(\frac{E}{c^2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + m^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}1$ ГэВ.

4.22. Частица с массой m распадается на лету на две частицы с массами m_1 и m_2 $(m_1 < m_2)$. При какой энергии частицы продукты распада будут лететь только в переднюю полусферу?

Ответ. $E > \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1}c^2$.

4.23. Место распада $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ с энергией 1 ГэВ окружено счетчиками, регистрирующими энергии всех γ-квантов распада π^0-мезонов. Во сколько раз будут отличаться скорости счета маленьких счетчиков, установленных под углами 0º и 90º. Масса π^0-мезона равна 135 МэВ/c^2.

Решение.

В системе покоя π^0-мезона распад изотропный:

$$dP \text{ (вероятность)} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{2\pi\sin\theta_0 d\theta_0}{4\pi} = -\frac{1}{2}d(\cos\theta_0).$$

Найдем теперь угловое распределение в лабораторной системе отсчета. Для световой аберрации:

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta - V/c}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta},$$

откуда

$$d(\cos\theta_0)=\frac{d(\cos\theta)}{\gamma^2\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2}.$$

В результате угловое распределение (здесь P – это вероятность):

$$dP=-\frac{1}{2}\frac{d(\cos\theta)}{\gamma^2\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2}=\frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2}.$$

А отношение скоростей счета при углах $\pi/2$ и 0 равно
$(1-V/c)^2\approx 1/4\gamma^4\approx 8\cdot 10^{-5}$.

4.24. Найти распределение распадных частиц по энергиям в Л-системе, если в Ц-системе угловое распределение имеет вид $dN\propto\sin^2\theta_0 d\Omega_0$, где θ_0 – угол между скоростью V первичной частицы и направлением вылета распадной частицы в Ц-системе. Скорость распадных частиц в Ц-системе равна V_0.

Решение.

В Ц-системе $dN\propto(1-\cos\theta_0^2)d(\cos\theta_0)$. Преобразование энергии $E=\gamma(E_0+p_0V\cos\theta_0)$. Поставляя $\cos\theta_0$ в исходную формулу, получаем распределение по энергиям.

Неупругие столкновения. Пороги рождения частиц

4.25. Доказать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Возможна ли однофотонная аннигиляция электрон-позитронной пары по схеме $e^+e^-\rightarrow\gamma$?

Ответ. Посмотрите, не изменится ли масса электрона после поглощения фотона, не приобретет ли массу фотон после аннигиляции электрона и позитрона?

4.26. Два фотона движутся навстречу друг другу. При каких энергиях фотонов будут рождаться электрон-позитронные пары?

Решение.

На пороге рождения $(P_1+P_2)^2=0+4E_1E_2/c^2+0=(2mc)^2$.

Т. е. для рождения пары e^+e^- необходимо $E_1E_2\geq(m_ec^2)^2$.

4.27. Два фотона с энергиями E_1 и E_2 сталкиваются под углом θ и рождают частицу. Чему равна масса этой частицы?

Ответ. $m^2 = \dfrac{2E_1E_2}{c^4}(1-\cos\theta)$.

4.28. Тело большой массой M (стенка), движущееся со скоростью V, слипается с покоящимся телом массой m. Чему равна масса образовавшегося тела? Считать, что $M \gg m$.

Решение.

$$W^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2 = M^2 + 2\gamma Mm + m^2 .$$

Пренебрегая последним членом, находим

$$W = \sqrt{M^2 + 2\gamma Mm} .$$

4.29. Фотон с энергией E сталкивается с покоящейся массой m. Чему равна масса образовавшегося тела и его скорость?

Ответ. $M^2 = (P_1 + P_2)^2 / c^4 = 0 + 2Em/c^2 + m^2$.

$$V = \frac{pc^2}{E + mc^2} = \frac{Ec}{E + mc^2} .$$

4.30. Движущаяся частица с массой m слипается с такой же покоящейся частицей. Какой должна быть энергия налетающей частицы, чтобы образовалась масса M?

Ответ. $E = \dfrac{(M^2 - 2m^2)c^2}{2m}$.

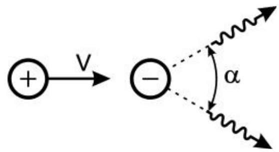
4.31. Частица, движущаяся со скоростью $V = c/2$, сталкивается и слипается с такой же покоящейся частицей. Найти скорость образовавшейся частицы.

Ответ. $V' = \dfrac{pc^2}{E} = \dfrac{c}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})c$.

4.32. Две частицы летят навстречу с энергиями E каждая. Чему равна их полная энергия в системе отсчета, движущейся вдоль оси их движения со скоростью V?

Ответ. $E' = \dfrac{2E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$.

4.33. Найти угол симметричного разлета фотонов, получающихся при аннигиляции покоящегося электрона с движущимся позитроном.



Ответ. $\alpha = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{1+\gamma}}$.

Рис. 4.33

4.34. Пучок электронов с энергиями E_e сталкивается с летящими перпендикулярно пучку электронов (в лабораторной системе отсчета) фотонами. При какой минимальной энергии фотонов будут рождаться электрон-позитронные пары: $\gamma e^- \to e^- e^+ e^-$? Масса электрона (позитрона) равна m.

Ответ. $E = \dfrac{4m^2c^4}{E_e}$.

4.35. Найти минимальную (пороговую) энергию фотонов, при которой в результате столкновения фотонов с покоящимися электронами будут рождаться пары мюонов $\gamma e^- \to e^- \mu^+ \mu^-$. Во сколько раз изменится пороговая энергия, если вместо электронов использовать протоны? (Массы частиц: $m_e \approx 0{,}51$, $m_\mu \approx 106$ МэВ/c^2.)

Ответ. $E_\gamma = 2m_\mu c^2\left(1+\dfrac{m_\mu}{m_e}\right) \approx 40$ ГэВ.

4.36. При какой энергии протонов становится возможным рождение J/Ψ-мезонов с массой 3,1 ГэВ на мишени из неподвижных протонов по схеме $p^+p^- \to p^+p^- J/\Psi$? При какой энергии электронов и позитронов наблюдается рождение J/Ψ-мезона в экспериментах на встречных электрон-позитронных пучках?

Ответ. $E_p = \left(2M_\Psi + M_p + \dfrac{M_\Psi^2}{2M_p}\right)c^2$.

4.37. Найдите мощность фотонных двигателей ракеты, необходимую для поддержания ее равномерного движения со скоростью 0,99 c через межзвездный водородный газ плотностью 10^6 м$^{-3}$. Поперечное сечение ракеты 40 м^2, столкновения с водородом считать неупругими.

Решение.

В системе отсчета ракеты импульс одного атома γmV и в единицу времени на ракету падает γnVS атомов (γ за счет сжатия продольных размеров). Сила торможения $F = dp/dt = \gamma^2 mnV^2 S$. При постоянной скорости сила тяги фотонного двигателя мощности $N = dE/dt$ равна силе торможения, отсюда $N = \gamma^2 mnV^2 Sc = 8\cdot 10^7$ Вт.

Эту задачу можно решать и в Л-системе, однако если считать, что на ракету падает за единицу времени nVS атомов и каждый приобретает импульс γmV, то получим силу в Л-системе (в соответствие с законом преобразования продольных сил она одинакова в Л-системе и СО ракеты) в γ раз меньше, чем получилось в предыдущем решении. Ошибка здесь заключается в том, что, сталкиваясь с ракетой, атом, за счет выделения тепла, увеличивает ее массу на γm (см. задачу 4.28) и для движения этой массы вместе с ракетой ей нужно придать импульс $\gamma m\cdot\gamma V = \gamma^2 mV$. Тогда ответ получится, как и в первом (правильном) решении.

4.38. Релятивистская ракета летит со скоростью V, и на нее ежесекундно налипает масса $dm/dt = \sigma$, которая исходно покоилась в лабораторной системе отсчета. С какой силой нужно толкать ракету, чтобы ее скорость оставалась постоянной?

Ответ. $F = \gamma^2\sigma V$.

4.39. Ракета с фотонным двигателем движется в облаке «космической пыли». Вся пыль, встречающаяся на пути ракеты, улавливается и используется как топливо при аннигиляции в фотонных двигателях с таким же количеством (запасенного на ракете) антивещества. Найти предельную скорость ракеты.

Ответ. $V = \dfrac{2}{\sqrt{5}}c$.

Упругие столкновения

4.40. Фотон с энергией E столкнулся с покоящимся электроном и отразился в перпендикулярном направлении. Чему стала равна его энергия?

Решение.

4-импульс сохраняется. Исключая конечный электрон путем возведения в квадрат его 4-импульса, находим

$$E' = \frac{mc^2}{mc^2 + E}E .$$

4.41. Фотон с энергией 10 эВ рассеивается на угол 90° на электроне, летящем навстречу. Найти энергию рассеянного фотона, если кинетическая энергия электрона была: а) 100 эВ; б) 10 ГэВ.

Ответ. $E_\gamma{}' = E_\gamma \dfrac{mc^2 + T_e + \sqrt{T_e^2 + 2mc^2 T_e}}{mc^2 + T_e + E_\gamma} = \begin{cases} 10 \text{ эВ при } T_e = 100 \text{ эВ} \\ 20 \text{ эВ при } T_e = 10 \text{ ГэВ} \end{cases}.$

4.42. Фотон с длиной волны λ упруго рассеивается на покоящемся электроне с массой m на угол θ. Чему равна длина волны рассеянного фотона? Учесть, что для фотона $E = h\nu = hc/\lambda$.

Ответ. $\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$

4.43. Определить минимальный угол разлета релятивистских частиц после упругого столкновения, если массы обеих частиц одинаковы, а одна из частиц до удара покоилась.

Ответ. Минимальный угол получается при симметричном разлете: $\theta_{\min} = \arccos\dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 3}$.

Релятивистская динамика

4.44. Две частицы с массами m_1 и m_2 расположены на расстоянии L. Частицу с массой m_1 разгоняют постоянной силой F, пока частицы не столкнутся и не слипнутся. Какой будет масса образовавшейся частицы?

Решение.

Энергия первой частицы перед столкновением будет $E_1 = m_1c^2 + FL$. Для массы образовавшейся частицы находим

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\left(m_1c^2 + FL\right)m_2 \big/ c^2 .$$

4.45. Частица движется по окружности радиуса R со скоростью V. Чему равны ускорения в лабораторной и сопутствующей системах?

Решение.

В Л-системе $a = V^2\big/R$ перпендикулярно скорости, а сила $F = \left|d\left(\gamma m\mathbf{v}\right)/dt\right| = \gamma m V^2/R$. В сопутствующей системе ($v_x = V$):

$$F'_y = \frac{F_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\dfrac{Vv_x}{c^2}} = \frac{F_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \gamma^2 m\frac{V^2}{R}.$$

Движение в магнитном поле. Сила Лоренца

4.46. Во сколько раз различаются кинетические энергии протона и электрона с одинаковыми импульсами 200 МэВ/*c*? При какой напряженности магнитного поля радиус траекторий таких частиц равен 1 м?

Решение.

Кинетическая энергия электрона $T_e \approx pc \approx 200$ МэВ, протона $T_p \approx p^2/2M \approx 20$ МэВ. Магнитное поле:

$$B = \frac{pc[\text{МэВ}]}{300R[\text{м}]} = 0.67\text{Т}.$$

4.47. Оценить напряженность магнитного поля, отклоняющего электроны кинетической энергией 10 кэВ на угол 60^0 в телевизионной трубке. Отклоняющая катушка создает магнитное поле на участке трубки длиной 10 см.

Ответ. $B \simeq 100$ Гс $= 10^{-2}$ Т.

4.48. Какой минимальный радиус должен иметь электрон-позитронный ускоритель со встречными пучками, чтобы на нем можно было наблюдать рождение Z-бозонов по схеме $e^+e^-\to Z$? Масса Z-бозона 90 ГэВ. Магнитное поле на дорожке ускорителя 1 Т.

Ответ. $R[\text{м}] = \dfrac{pc[\text{МэВ}]}{300B[\text{Т}]} = \dfrac{45000}{300} = 150$ м.

4.49. Пучок протонов со средней энергией $E = 2$ ГэВ и энергетическим разбросом ± 1 % инжектируется в полупространство с однородным поперечным магнитным полем B = 1 Т (рис 4.49). Какой будет ширина пучка на выходе из магнитного поля?

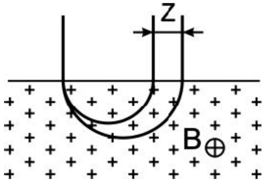


Рис. 4.49

Решение.

$$R = \frac{pc}{eB}, \quad dR = \frac{dp\,c}{eB} = \frac{E^2}{pceB}\frac{dE}{E}.$$

Здесь учли, что $c^2 pdp = EdE$. В результате получаем разброс по координате $2dR \sim 30$ см.

4.50. В ускорителе типа микротрон электрон ускоряется из состояния покоя, проходя узкий ускоряющий зазор резонатора, где получает добавку энергии $E = mc^2 = 0{,}511$ МэВ. После этого он совершает оборот во внешнем поперечном магнитном поле и снова попадает в ускоряющий зазор. Найти время ускорения электрона до энергии 511 МэВ в магнитном поле величиной $B = 2$ Т.

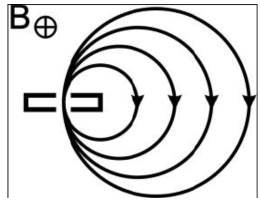


Рис. 4.50

Решение.

Период обращения в однородном магнитном поле:

$$T = \frac{2\pi\gamma mc}{eB}.$$

В микротроне γ увеличивается каждый раз на 1 и электрон приходит все время в ускоряющую фазу напряжения, если его частота –

$$f = \frac{eB}{2\pi mc} = 5{,}6 \cdot 10^{10} \text{ Гц}.$$

Ускорение электрона до энергии 511 МэВ произойдет за время

$$T = \frac{2\pi mc}{eB}(2 + 3 + ...999) \simeq \frac{\pi mc}{eB} 10^6 \simeq 8{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Движение в электрическом поле. Релятивистская ракета

4.51. Электрон влетает в тормозящее постоянное однородное электрическое поле напряженностью E с начальной скоростью V_0. Через какое время электрон вернется в начальную точку? Какой путь он пройдет за это время?

Решение.

Изменение импульса $dp/dt = -eE$, откуда полное время движения $t = 2\gamma mV/eE$. Приравнивая работу поля изменению кинетической энергии электрона, находим пройденный путь:

$$L = \frac{2(\gamma - 1)mc^2}{eE}.$$

4.52. Ракета удаляется от Земли с постоянным ускорением g в сопутствующей системе отсчета. Через время T после старта ей вдогонку посылается сигнал связи. За какое время он догонит ракету? При каком T сигнал уже не сможет догнать ракету?

Ответ. $T > c/g$, см. введение к этой главе.

4.53. Покоящееся тело начинают толкать с силой F. За какое время тело пройдет путь x?

Решение.

В сопутствующей системе будет действовать такая же сила и тело будет испытывать постоянное ускорение $a = F/m$. В этом случае (см. задачу во введении о равноускоренной ракете) $x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right)$. Отсюда искомое время – $t = \frac{c}{a}\sqrt{\left(1+\frac{ax}{c^2}\right)^2-1} = \sqrt{\frac{x^2}{c^2}+2\frac{x}{a}}$.

4.54. До какой энергии ускорится мюон из состояния покоя в однородном электрическом поле напряженностью $\mathcal{E} = 10^7$ В/м за время жизни в собственной системе отсчета $2\cdot10^{-6}$ с? Масса мюона 105 МэВ. Какой будет казаться длина такого ускорителя с точки зрения ускоряемых мюонов, если длиной считать суммарную длину участков ускорителя, измеренную из сопутствующих мюону систем отсчета?

Решение.

Во введении показано, что при равноускоренном в сопутствующей системе движении:

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\operatorname{ch}\frac{a\tau}{c}-1\right).$$

В рассматриваемом случае $a = e\mathcal{E}/m$ и набранная энергия равна

$$E = e\mathcal{E}x = mc^2\left(\operatorname{ch}\frac{e\mathcal{E}\tau}{mc}-1\right) = 3\cdot10^{32} \text{ эВ}.$$

4.55. Электрон с кинетической энергией T влетает в тормозящее однородное электрическое поле напряженностью $\mathcal{E}$ под углом α к пластине конденсатора. Какова высота траектории и минимальная скорость электрона? Найти расстояние между точками влета и вылета электрона и время его пролета через конденсатор.

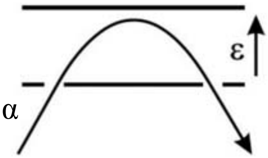


Рис. 4.55

Решение.

В точке поворота остается только горизонтальная компонента импульса, которая постоянна, поэтому

$$E = \sqrt{m^2c^4 + [(mc^2+T)^2 - m^2c^4]\cos^2\alpha}.$$

Соответственно, скорость и высота будут

$$V = c^2\frac{p}{E} = c\sqrt{\frac{(mc^2+T)^2 - m^2c^4}{(mc^2+T)^2 + m^2c^4\,\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$H = \frac{(mc^2+T) - E}{e\mathcal{E}}.$$

Время пролета через конденсатор $T = 2p_{0y}/e\mathcal{E}$, расстояние от точки влета до точки вылета: $L = \dfrac{2p_{0x}c}{e\mathcal{E}}\,\mathrm{arcsh}\dfrac{p_{0y}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0x}^2}}$.

4.56. Космический корабль движется по круговой траектории с постоянной скоростью $V = 0{,}6c$, причем центростремительное ускорение в сопутствующей системе отсчета равно $a'_n = g$. За какое время по собственным часам корабль совершит полный оборот?

Решение.

Поперечное ускорение в Л-системе в γ^2 раз меньше, чем в сопутствующей системе (см. задачу 4.45), т. е. $a_л = V^2/R = g/\gamma^2$. Отсюда $R = \gamma^2V^2/g$ и время полного оборота в Л-системе $t = 2\pi R/V = 2\pi\gamma^2V/g$. В сопутствующей системе время оборота будет в γ раз меньше: $t' = \dfrac{2\pi\gamma V}{g} = 4{,}8$ года.

4.57. Какую скорость приобретет космический корабль с фотонным двигателем, когда его масса уменьшится вдвое? Корабль ускоряется от нулевой начальной скорости. Считать, что масса топлива много больше массы ракеты, а КПД двигателя равен 100 %.

Решение.

Импульс ракеты равен импульсу испущенных фотонов E_γ/c. Из закона сохранения энергии $E + E_\gamma = M_0c^2$, текущая масса ракеты $M^2c^4 = E^2 - p^2c^2 = E^2 - E_\gamma^2$.

Отсюда скорость ракеты: $V = c\dfrac{E_\gamma}{E} = c\dfrac{M_0^2 - M^2}{M_0^2 + M^2} = 0{,}6$ с.

ЧАСТЬ 5

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ, КОЛЕБАНИЯ

Одномерное движение (теория)

Общее уравнение одномерного движения –

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}).$$

Если сила зависит только от координаты, то

$$m\ddot{x} = F(x).$$

В этом случае поле потенциально, и можно ввести потенциальную энергию $U(x)$, которая связана с силой следующим образом:

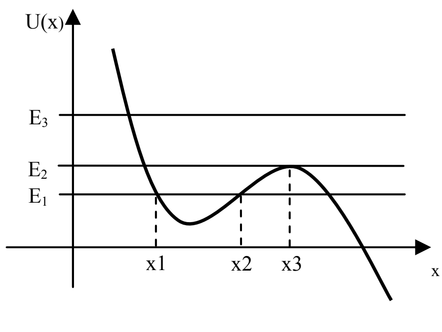
$$U(x) = -\int F(x)dx,$$

а уравнение движения сводится к дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = \text{const}.$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две константы, которые при решении конкретной задачи определяются из начальных условий (x_0, υ_0). При переходе к уравнению первого порядка возникает одна константа – энергия E.

Полученное уравнение первого порядка задает зависимость скорости от координаты, график которой называется фазовой траекторией и может быть изображен на фазовой плоскости с координатными осями x и $\dot{x}$. Каждому значению E соответствует отдельная фазовая траектория. Так как рассматривается случай потенциальных сил, фазовые траектории могут быть замкнутые для финитного движения или разомкнутые для инфинитного. Если в системе присутствует непотенциальная сила, например сила трения, то фазовые траектории



будут незамкнутыми и для финитного движения. Также примечательно, что через одну точку фазовой плоскости проходит только одна траектория.

Рассмотрим потенциал, изображенный на рисунке, приведенном выше. Для данного потенциала характерны три варианта движения: колебания в потенциальной яме, инфинитное движение и движение по сепаратрисе.

Колебания в потенциальной яме возможны, если полная энергия частицы меньше чем $E_2 = U(x_3)$. На примере частицы с энергией E_1 видно, что в случае колебаний есть две точки остановки x_1 и x_2, в которых полная энергия в точности равна потенциальной $E_1 = U(x_1) = U(x_2)$. Найдем период колебаний:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \text{ откуда } \quad dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Знак $\pm$ означает, что при данном x скорость может быть положительной или отрицательной, при этом частица потратит одинаковое время на движение в каждом направлении. Период колебаний:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Для частицы с полной энергией $E_2 = U(x_3)$ точка остановки x_3 является точкой максимума потенциальной энергии – положение неустойчивого равновесия, в котором сила, действующая на частицу, равна нулю. Представим потенциальную энергию около точки x_3 в виде ряда Тейлора:

$$U(x) = U(x_3) + U'(x_3)(x - x_3) + \frac{1}{2!}U''(x_3)(x - x_3)^2 + \ldots .$$

С учетом того, что энергия частицы $E_2 = U(x_3)$ и $U'(x_3) = 0,$ подынтегральное выражение в формуле для периода колебаний запишется следующим образом:

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{U''(x_3)}{2}(x - x_3)}}.$$

Откуда видно, что период колебаний обращается в бесконечность и имеет логарифмическую особенность в точке x_3. Т. е. частица с энергией

E_2 достигает точки x_3 за бесконечное время (с любой стороны). Траектория частицы с такой энергией разделяет области финитного и инфинитного движения сепаратрисой.

Для решения задач данного раздела потребуются дельта-функция Дирака и функция Хевисайда. Дельта-функция $\delta(x)$ – такая функция, для которой выполняются следующие равенства:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1.$$

$\delta(x)$ не равна 0 только в точке $x=0$, поэтому ее интеграл по любой окрестности 0 равен 1.

Функцией Хевисайда: $H(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}.$

Функция Хевисайда является первообразной от дельта-функции Дирака.

Одномерное движение (задачи)

5.1. Найти зависимость силы, действующей на частицу, от координаты, если частица движется по закону, показанному на рис. 5.1а. Нарисовать зависимость потенциала от координаты. Изобразить движение на фазовой плоскости.

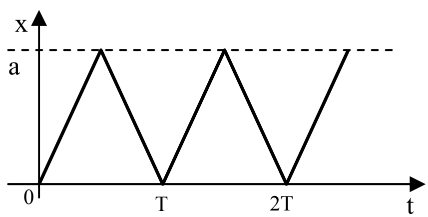


Рис. 5.1а

Ответ.

$$F(x)=\frac{2ma^2}{T^2}\left(\delta(x)-\delta(x-a)\right).$$

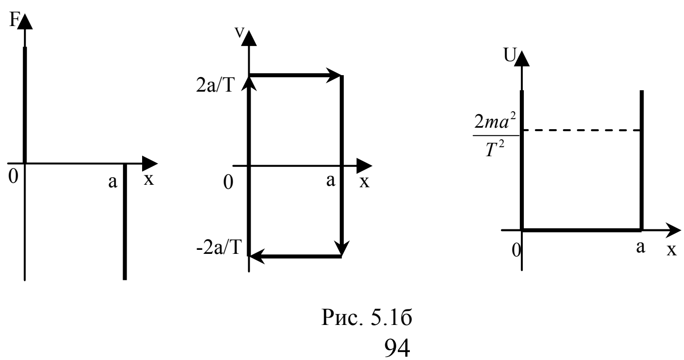


Рис. 5.1б

5.2. Найти зависимость силы, действующей на частицу, от координаты, если закон движения частицы имеет вид $x(t) = a\sin(\omega t)$. Нарисовать зависимость потенциала от координаты, изобразить движение на фазовой плоскости.

Ответ. $F(x) = -m\omega^2 x$, где m – масса частицы. $U(x) = m\omega^2 x^2 / 2 + \text{const}$.

5.3. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -\alpha x^4$ в случае, когда ее полная энергия равна нулю. Нарисовать траекторию частицы на фазовой плоскости.

Решение.

Запишем полную энергию частицы:

$$\frac{mv^2}{2} - \alpha x^4 = 0 .$$

Отсюда найдем зависимость скорости от координаты:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} x^2 = \pm\beta x^2 .$$

Это выражение задает зависимость скорости от координаты, которое нужно для того, чтобы нарисовать фазовую траекторию. Также это выражение представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого $x(t)$ – закон движения частицы. Решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{x^2} = \pm\beta\, dt , \qquad \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \pm\beta t.$$

Ответ. $x = \dfrac{x_0}{1 \pm x_0 t\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}}$.

5.4. Нарисовать траектории частиц на фазовой плоскости для следующих одномерных полей:

1) $U(x) = \alpha(x^2 - b^2)^2$; 2) $U(x) = -\alpha(x^2 - b^2)^2$;

3) $U(x) = U_0 \sin kx$; 4) $U(x) = \alpha^2 \left(\frac{b^2}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$.

5.5. Как зависит период движения частицы в поле $U(x) = \alpha |x|^\beta$ от ее энергии? ($\alpha > 0$).

Решение.

Найдем точки остановки для частицы с произвольной полной энергией E из условия

$$U(x) = \alpha |x|^\beta = E . \qquad x_{1,2} = \pm \left(\frac{E}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} .$$

Период колебаний:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = 2\sqrt{2m} \int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - \alpha x^\beta}} =$$

$$= 2\sqrt{2m} \frac{x_2}{\sqrt{E}} \int_{0}^{x_2} \frac{dx / x_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_2} \right)^\beta}} = 2\sqrt{2m} \frac{E^{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \int_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^\beta}} .$$

Ответ. $T \propto E^{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}}$.

5.6. Найти зависимость периода колебаний частицы от энергии в поле с потенциальной энергией:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{2}, |x| \le a \\ \infty, |x| > a \end{cases} .$$

Ответ. $T = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \sqrt{\frac{ka^2}{2E}}$. Если $E < \frac{ka^2}{2}$, то $T = 2\pi \sqrt{m/k}$

Свободные колебания (теория)

Рассмотрим способы решения дифференциальных уравнений, которые встречаются в задачах о колебаниях.

Метод Эйлера используется для решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 .$$

Операция дифференцирования линейна, поэтому для любых решений уравнения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ их линейная комбинация $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ тоже будет решением этого уравнения. Решениями такого уравнения могут быть синусы, косинусы, экспоненты. Так как синусы и косинусы могут быть представлены в виде экспонент при помощи формулы Эйлера,

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) ,$$

то решение уравнения достаточно искать в виде одних экспонент. Подстановка $e^{\lambda t}$ в дифференциальное уравнение приводит его к характеристическому уравнению.

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 .$$

Это уравнение имеет n решений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Если все корни характеристического уравнения разные, то мы нашли n линейно независимых решений $x_k(t) = e^{\lambda_k t}$, тогда общее решение дифференциального уравнения записывается как линейная комбинация всех этих решений с произвольными комплексными коэффициентами $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} .$$

Если среди корней характеристического уравнения есть кратные, например, λ_1 имеет кратность m, тогда

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}(c_1 + c_2 t + \ldots + c_m t^{m-1}) + c_{m+1} e^{\lambda_{m+1} t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} .$$

При решении задач о вынужденных колебаниях потребуется решать неоднородные линейные дифференциальные уравнения:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) .$$

Общее решение такого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения с такими же коэффициентами и любого частного решения неоднородного уравнения.

В общем решении константы комплексные, в таком виде оно содержит все действительные и комплексные решения. Так как физика оперирует с действительными величинами, на каком-то этапе придется потребовать, чтобы решение уравнения было действительным. Это можно сделать на этапе решения уравнения – искать решения в виде $x_k(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{\lambda t}\right\}$ либо позже, если с решением выполняются только линейные преобразования. Если требуется решить какую-то физическую задачу, то в ней кроме уравнения должен присутствовать набор начальных условий (число условий равно порядку уравнения), при помощи которых находятся константы в общем решении дифференциального уравнения описывающего систему. Одному набору начальных условий соответствует только одно решение уравнения.

Гармонические колебания

Рассмотрим движение частицы в поле $U(x) = kx^2/2$, в этом случае закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E\,,$$

и уравнение движения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \quad \text{где } \omega_0^2 = k/m\,.$$

В выражении для энергии сделаем замену $x_m = \sqrt{2E/k}$ и $\upsilon_m = \sqrt{2E/m}$, тогда оно принимает вид

$$\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_m}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_m}\right)^2 = 1\,.$$

Это уравнение задает фазовую траекторию, представляющую собой эллипс.

Уравнение движения может быть решено интегрированием, но мы применим для его решения метод Эйлера. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, тогда общее решение уравнения движения:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}.$$

В данном выражении используются комплексные функции, коэффициенты c_1 и c_2 – комплексные числа. Теперь нам нужно выбрать подходящие для использования в физике действительные решения. Как обсуждалось выше, для этого можно либо взять действительную часть на каком-то этапе, либо применить физически осмысленные начальные условия (тогда будет автоматически выбрано действительное решение). Рассмотрим вариант применения начальных условия. Допустим, в момент времени $t = 0$ частица имеет нулевое отклонение от положения равновесия и мы придали ей скорость V, тогда

$$\begin{cases} x(0) = 0 = c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) = V = i\omega(c_1 - c_2) \end{cases}.$$

Решая эту систему линейных уравнений, получим

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{V}{2i\omega} \\ c_2 = -\dfrac{V}{2i\omega} \end{cases}.$$

Подставим коэффициенты в общее решение:

$$x(t) = \frac{V}{\omega}\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{V}{\omega}\sin(\omega t).$$

Отсюда видно, что применение начальных условий позволяет выделить из общего решения $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ или их линейную комбинацию. Теперь попробуем привести комплексное решение к более удобному виду:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = \\ &= c_1(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + c_2(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) = \\ &= (c_1 + c_2)\cos(\omega t) + (c_1 - c_2)i\sin(\omega t) = \\ &= a_1\cos(\omega t) + a_2\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Теперь решение состоит из действительных функций и произвольных комплексных констант a_1 и a_2, т. е. для выбора действительных решений уравнения достаточно объявить a_1 и a_2 действительными. Полагая, что эти константы действительные, общее решение можно привести к следующему виду:

$$x(t)=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\cos(\omega t)+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\sin(\omega t)\right)=$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi),$$

где $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ и $\varphi=-\arcsin\left(a_2\Big/\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)$. В данном виде решение уравнения колебаний более наглядно, так как содержит привычные амплитуду и фазу колебаний.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию гармонического осциллятора:

$$K=\frac{m\dot{x}^2}{2}=\frac{m\omega_0 a^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi)=\frac{ka^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi),$$

$$U=\frac{mx^2}{2}=\frac{ka^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi).$$

Тогда полная энергия осциллятора равна

$$E=K+U=\frac{ka^2}{2}=\frac{m\,\omega_0^2 a^2}{2}$$

и не зависит от времени.

Выполним усреднение K и U по периоду колебаний. Среднее значение функции за какое-то время T определяется следующим образом:

$$\langle f\rangle=\frac{1}{T}\int_T f(t)dt.$$

В нашем случае Т – период колебаний осциллятора, тогда

$$\langle K\rangle=\langle U\rangle=\frac{E}{2}.$$

Свободные колебания (задачи)

5.7. Груз массой m подвешен на пружине жесткости k в поле тяжести. Как зависит суммарная сила, действующая на груз, от растяжения пружины x? Найти зависимость потенциальной энергии от смещения x.

Ответ. $F(x) = -kx - mg$, $U(x) = \dfrac{kx^2}{2} + mgx$.

5.8. Под точкой крепления математического маятника с длиной нити L и массой груза m забили тонкий гвоздь, так что при смещении влево от положения равновесия нижняя часть нити длиной l изгибается вокруг гвоздя. Найти период малых колебаний получившейся системы. Каково отношение максимальных отклонений влево и вправо в случае малых колебаний?

Ответ. $T = \pi\left(\sqrt{\dfrac{L}{g}} + \sqrt{\dfrac{l}{g}}\right)$, $n = \sqrt{\dfrac{L}{l}}$.

5.9. Определить частоту колебаний доски, положенной на два быстро вращающихся в противоположные стороны валика, если расстояние между их осями L, коэффициент трения μ.

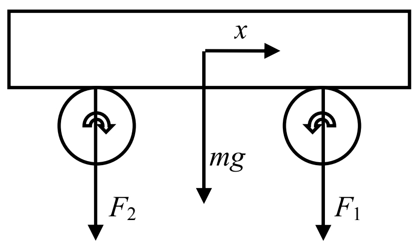


Рис. 5.9

Решение.

Пусть доска сместилась на x в положительном направлении из положения равновесия. Возвращающая сила создается разницей сил трения доски о валики, которая возникает из-за разницы сил давления доски на валики. Силы давления доски на валики находятся из условий равенства нулю момента сил относительно центра масс доски и вертикальной компоненты силы:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{L}{2} - x\right)F_1 = \left(\dfrac{L}{2} + x\right)F_2 \\ F_1 + F_2 = Mg \end{cases}.$$

Решая данную систему двух алгебраических уравнений:

$$x\left(F_1 + F_2\right) = \frac{L}{2}\left(F_1 - F_2\right),$$

$$F_1 - F_2 = \frac{2x}{L} Mg,$$

получаем

$$\Delta F_{\text{тр}} = -\frac{2\mu Mg}{L} x = -kx,$$

где k – эффективная жесткость получившейся колебательной системы. А частота колебаний $\omega^2 = k/M = 2\mu g/L$.

Ответ. $\omega^2 = \dfrac{2\mu g}{L}$

5.10. Найти частоту малых колебаний жидкости в V-образной трубке. Оба прямых участка трубки образуют углы α с вертикалью. Трубка заполнена до высоты H. Высота трубки существенно больше радиуса закругления. Капиллярными эффектами пренебречь.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{H}} \cos\alpha$.

5.11. Два тела массой m_1 и m_2 связаны пружиной жесткости k. Какова частота свободных колебаний такой системы? Вращений нет.

Решение.

При колебаниях данной системы остается неподвижным ее центр масс. Пусть L – длина всей пружины, а l_1 – расстояние от центра масс до первого тела, тогда

$$\frac{l_1}{L} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Жесткость пружины обратно пропорциональна длине пружины:

$$k_1 = k\frac{L}{l_1} = k\frac{m_1 + m_2}{m_2},$$

где k_1 – жесткость пружины, на которой колеблется первое тело относительно центра масс. Теперь можно записать частоту колебаний первого тела относительно центра масс. Если повторить действия для второго тела, то частота колебаний будет такой же, как и для первого. Нетрудно заметить, что эта задача является частным случаем задачи двух тел и, следовательно, она сводится к движению одного тела с приведенной массой.

Ответ. $\omega^2 = \dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$.

5.12. Груз массой m лежит на гладком столе и прикреплен к стене пружинами с жесткостями k_1 и k_2. Найти периоды колебаний системы в следующих случаях: а) пружины соединены последовательно; б) пружины соединены параллельно; с) груз закреплен между пружинами, прикрепленными другими концами к противоположным стенам. Зависит ли в последнем случае период колебаний от расстояния между стенами?

Ответ. а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$; б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$; с) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$, от расстояния между стенами не зависит.

5.13. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой M, на которой установлен математический маятник длины l и массой m. Найти частоту малых колебаний системы.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}$.

5.14. На неподвижную чашку весов массой M с пружиной жесткости k упал вертикально со скоростью V кусок пластилина массой m. Найти зависимость координаты чашки от времени после падения пластилина.

Решение.

Направим ось x вниз, и пусть начальная координата чашки равна нулю. После падения пластилина чашка весов приобретает скорость $V_0 = mV/(m+M)$ из закона сохранения импульса. Чашка с пластилином будет совершать колебания с частотой $\omega = \sqrt{k/(m+M)}$. Положение равновесия чашки с пластилином сместится в точку $x_p = mg/k$. Общее решение уравнения колебаний для данного случая $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + mg/k$. Подставляя в него начальные условия $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = V_0$, найдем константы A, B и получим ответ.

Ответ. $x(t)=\frac{mV}{\sqrt{k(m+M)}}\sin\omega t+\frac{mg}{k}(1-\cos\omega t)$, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}$.

5.15. На закрепленный цилиндр радиусом R намотана нитка. Длина свисающей части L. На ней подвешен груз массой. Найти частоту малых колебаний системы.

Ответ. $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$.

5.16. В точке максимального отклонения математического маятника массой M и длиной L от него откололся кусок массой m. Найти изменение энергии маятника, нарисовать фазовую траекторию маятника.

Ответ. $\Delta E=-mgl\frac{\varphi_{\max}^2}{2}$, фазовая траектория не изменится.

Малые гармонические колебания, затухающие колебания, электрические колебательные контуры (теория)

Пусть потенциал описывается гладкой функцией $U(x)$ с «ямой», т. е. локальный минимум в точке x_0, в обе стороны от которого $U(x)$ возрастает. Рассмотрим колебания частицы при малых отклонениях от x_0. Так как $U(x)$ – гладкая, она как минимум дважды дифференцируема и мы можем в окрестности точки x_0 разложить ее в ряд Тейлора до второго порядка:

$$U(x)=U(x_0)+U'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2+\dots .$$

Поведение системы не зависит от значения $U(x_0)$, и его можно положить равным 0. Производная в локальном минимуме $U'(x_0)=0$, это также означает что x_0 – точка равновесия. В результате потенциальная энергия в окрестности x_0 представляется в виде

$$U(x)=\frac{k(x-x_0)^2}{2},$$

где $k = U''(x_0) > 0$. Значение k больше нуля, так как равновесие в точке x_0 должно быть устойчиво. Данной потенциальной энергии соответствует сила

$$f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -k\,\delta x\,,$$

где $\delta x = x - x_0$. Уравнение движения частицы с массой m имеет вид

$$\delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x = 0\,,$$

где $\omega_0^2 = U''(x_0)/m$. Это уравнение колебаний, которое мы рассматривали ранее.

Затухающие колебания

Рассмотрим колебания при наличии силы трения, пропорциональной скорости тела

$$f_{\text{тр}} = -\beta\dot{x}\,.$$

Данный вид силы соответствует случаю вязкого трения и справедлив для движения в жидкости или газе с малыми скоростями.

Уравнение движения осциллятора с затуханием:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

или в каноническом (общепринятом) виде:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

где $2\gamma = \beta/m$.

Характеристическое уравнение для него

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

имеет решения

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,.$$

Рассмотрим сначала случай $\omega_0 > \gamma$. Обозначим $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, тогда общее решение уравнения дифференциального уравнения движения осциллятора с затуханием:

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t + i\Omega t} + A_2 e^{-\gamma t - i\Omega t} = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\Omega t} + A_2 e^{-i\Omega t}),$$

где A_1 и A_2 – произвольные комплексные константы, которые могут быть найдены из начальных условий. Действительные решения могут быть представлены в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t),$$

где c_1 и c_2 – действительные константы, либо

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \varphi),$$

где A и φ – действительные константы. Константы в этих случаях точно так же нужно определять из начальных условий.

Время затухания колебаний в случае слабого трения при $\gamma \ll \omega_0$:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{\omega_0}{2\pi\gamma} \approx T\frac{\omega_0}{2\pi\gamma} = T\frac{Q}{\pi},$$

где величина $Q = \omega_0 / 2\gamma$ называется добротностью.

В случае сильного трения, если $\gamma > \omega_0$, то решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t + \Omega t} + A_2 e^{-\gamma t - \Omega t}, \text{ где теперь } \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Это апериодическое решение, при котором затухание происходит вообще без колебаний.

Остался случай $\omega_0 = \gamma$, при котором у характеристического уравнения один корень с кратностью два: $\lambda_{1,2} = -\gamma$. Тогда общее решение уравнения:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}.$$

Электрические колебательные контуры

В качестве дополнения к механическим задачам предлагаются задачи на колебания в RLC-контурах, так как для колебаний в этих контурах справедливы такие же уравнения. Поэтому коротко рассмотрим уравнения для электрического колебательного контура.

Закон Ома для замкнутой RLC-цепи –

$$RI + U_c = -L\frac{dI}{dt},$$

где I – ток в цепи, R – сопротивление, L – индуктивность, U_c – напряжение на конденсаторе. В левой части стоит напряжение на сопротивлении и напряжение на конденсаторе, а в правой – напряжение самоиндукции на индуктивности. С учетом того что $I = \dot{q}$ и $U_c = q/C$, где q – заряд, получим

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

или

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Заменой $2\gamma = R/L$ и $\omega_0^2 = 1/LC$ это уравнение приводится к каноническому уравнению затухающих колебаний.

Малые гармонические колебания, затухающие колебания, электрические колебательные контуры (задачи)

5.17. Найти частоту малых колебаний частицы массой m в потенциальной яме $U(x) = ax^4 + bx^2$. Возможны ли малые гармонические колебания в потенциальной яме $U(x) = ax^4$?

Ответ. $\omega_0 = \sqrt{2b/m}$; колебания в потенциальной яме $U(x) = ax^4$ не будут гармоническими, их период будет зависеть от амплитуды.

5.18. Найти частоту малых колебаний частицы массой m возле дна потенциальной ямы, имеющей форму $U(x) = U_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$, $x \in [0, \lambda]$.

Решение.

Найдем точки равновесия для данного потенциала, для этого нам требуется найти решения равнения $U'(x_p) = 0$:

$$U' = -U_0 \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_p\right) = 0,$$

это выражение обращается в 0 при $x_p = 0,\ \lambda/2,\ \lambda$. Колебания возможны в окрестностях точек устойчивого равновесия. При смещении из точки равновесия должна возникать возвращающая сила, что математически означает $U''(x_p) > 0$. Найдем положение устойчивого равновесия:

$$U'' = -U_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

Это выражение отрицательно при $x = 0,\ \lambda$ и положительно при $x = \lambda/2$, т. е. устойчиво только положение равновесия $x = \lambda/2$. Теперь запишем «жесткость» $k = U''(\lambda/2) = U_0 (2\pi/\lambda)^2$, тогда частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 U_o}{m\lambda^2}}$.

Ответ. $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{U_o}{m}}$.

5.19. Частица массой m движется в поле $U(x) = \alpha(x^2 - a^2)^2$. Найти положения равновесия. Возле каких из них возможны малые колебания? Найти частоту малых колебаний.

Ответ. $x = \pm a,\ 0;\ \pm a$ – положения устойчивого равновесия, $\omega_0^2 = \frac{8\alpha a^2}{m}$.

5.20. Бусинка надета на невесомую гладкую нить длиной L, концы которой закреплены на одинаковой высоте на расстоянии d друг от друга. Найти частоту малых колебаний бусинки.

Ответ. $\omega^2 = \frac{2g}{L}\sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}}$.

5.21. Лежащая на плоскости шайба массой M прикреплена к стене пружиной жесткости k. Шайбу сместили из положения равновесия на расстояние A и отпустили. Какой путь пройдет шайба до остановки? Сила трения мала и пропорциональна скорости $F = -\alpha V$, $\alpha^2 \ll kM$.

Ответ. $L = A\,\mathrm{cth}\dfrac{\beta T}{4} \approx A\dfrac{4}{\pi}\dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha}$, где $\beta = \dfrac{\alpha}{2M}$.

5.22. При каком соотношении между сопротивлением R, индуктивностью L и емкостью C контура в цепи гальванометра осуществляется наиболее «оптимальный» апериодический режим демпфирования колебаний рамки гальванометра? Эквивалентная цепь гальванометра соответствует последовательно соединенному RLC-контуру.

Решение.

Отклонение стрелки гальванометра описывается уравнением колебаний с затуханием:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 .$$

Наиболее выгодный режим демпфирования реализуется, если $\gamma \geq \omega_0$, стрелка совершает одно отклонение и плавно возвращается к положению равновесия. Если $\gamma = \omega_0$, то амплитуда и продолжительность колебания будут максимальными. В этом случае общее решение уравнения движения для стрелки $\varphi = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$. Для последовательного RLC-контура $\omega_0^2 = 1/LC = \gamma^2 = \left(R/2L\right)^2$, следовательно $R = 2\sqrt{L/C}$.

Ответ. $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

5.23. В контуре, изображенном на рис. 5.23, $R^2 < 4L/C$, конденсатор C заряжен. За какое время после замыкания ключа K энергия, запасенная в контуре, уменьшится в 20 раз?

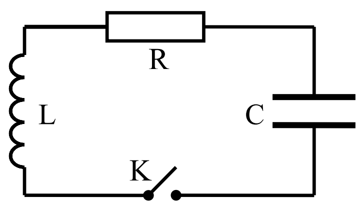


Рис. 5.23

Ответ. $t \approx \dfrac{2L\ln 20}{R}$.

Вынужденные колебания (теория)

Пусть осциллятор с затуханием движется под действием внешней гармонической силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$, тогда уравнение движения:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \ .$$

Решением данного уравнения является сумма общего решения однородного уравнения (правая часть равна 0) и частного решения неоднородного. Решение однородного уравнения было получено ранее, теперь займемся поиском частного решения неоднородного уравнения. Для удобства представим силу в комплексном виде $F = F_0 e^{i\omega t}$ и будем искать решение в виде $z = Ae^{i\omega t}$:

$$A(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \ .$$

Откуда

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma)} \ .$$

И частное решение неоднородного уравнения:

$$z(t) = Ae^{i\omega t} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega)} \ .$$

Для дальнейшего анализа нам потребуется действительная часть этого решения:

$$x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = \frac{F_0 \cos(\omega t + \delta)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = a \cos(\omega t + \delta) \ ,$$

где δ – разность фаз между координатой осциллятора и силой:

$$tg\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Проанализируем амплитуду колебаний:

$$a = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \ .$$

Максимум достигается при частоте:

$$\omega = \omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}\ .$$

При $\omega = 0$ колебаний вынуждающей силы нет, этому случаю соответствует постоянное смещение:

$$a = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}\,.$$

И при $\omega \gg \omega_0$ $\qquad a = \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0\omega_0^2}{k\omega^2}\,.$

При малом трении $\omega_0 \gg \gamma$, $\omega^* \approx \omega_0$:

$$a = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k}Q\,.$$

Т. е. амплитуда при резонансе в Q раз больше, чем при статическом воздействии, где Q – добротность.

Если $\omega_0 \gg \gamma$, то

$$a = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0+\omega)^2(\omega_0-\omega)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{2m\omega_0\sqrt{\Delta\omega^2 + \gamma^2}}\ ,$$

при $\Delta\omega^2 = \gamma^2$ амплитуда падает в $\sqrt{2}$ раз, а энергия колебаний в 2 раза. Смещение частоты между двумя точками, в которых энергия колебаний в два раза ниже максимальной $2\Delta\omega = 2\gamma$, называется шириной резонанса. Относительная ширина резонансной кривой:

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = Q\,.$$

При «переходе» через резонанс изменяется фаза δ :

$$\omega = 0 \Rightarrow \delta = 0\ ,$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \delta = -\pi\,.$$

Следовательно, координата сдвинута по фазе на $-\pi/2$ относительно силы в резонансе, скорость же опережает координату на $\pi/2$, следовательно, скорость и сила находятся в фазе. При этом мощность, закачиваемая в резонатор, максимальна.

Общее решение уравнения затухающих колебаний под действием внешней силы может быть записано в виде

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t + \delta)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} + A\cos(\omega_0 t + \varphi) .$$

Это действительное решение, и в нем A и φ – действительные константы, определяемые из начальных условий.

Интересный случай возникает при отсутствии затухания $\gamma = 0$:

$$x(t) = \frac{F_0 \cos \omega t}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} + A\cos(\omega_0 t + \varphi) .$$

Пусть $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, тогда $\varphi = 0$ и

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right).$$

Здесь содержатся колебания на суммарной и разностной частоте, которые образуют биения – колебания с меняющейся амплитудой.

Параметрический резонанс

Воздействие на осциллятор может осуществляться путем изменения во времени его параметров. При некоторых частотах изменения параметров может возникать параметрический резонанс. Рассмотрим параметрический резонанс на примере раскачки качелей (маятника).

Для раскачки качелей мы в нижней точке встаем, т. е. расстояние от оси до центра масс уменьшается на δl, при общей длине качелей l. Момент импульса сохраняется, поэтому увеличивается скорость:

$$v + \delta v = \frac{vl}{l - \delta l} \approx v\left(1 + \frac{\delta l}{l}\right).$$

В верхней точке мы приседаем, это не влияет на движение качелей, так как они в этот момент покоятся. Найдем изменение энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2}, \ \delta E = mv\delta v = mv^2 \frac{\delta l}{l} = 2E\frac{\delta l}{l} .$$

Это приращение энергии за одно вставание, а за период колебаний мы совершаем два вставания, тогда число вставаний за время dt будет $dN = 2dt/T$, поэтому

$$\frac{dE}{E} = \frac{4\delta l}{l}\frac{dt}{T} = 4\frac{\omega_0}{2\pi}\frac{\delta l}{l}dt , \qquad E = E_0 \exp\left(\frac{2\omega_0}{\pi}\frac{\delta l}{l}t\right).$$

Если есть затухание $E = E_0 e^{-2\gamma t}$, то для роста амплитуды нужно

$$\frac{2\omega_0}{\pi}\frac{\delta l}{l} > 2\gamma .$$

Вынужденные колебания (задачи)

5.24. Рессоры железнодорожного вагона прогибаются под его тяжестью на 4 см, расстояние между стыками железнодорожного полотна 25 м. При какой скорости поезда амплитуда вертикальных колебаний вагона будет максимальной.

Ответ. $\approx 62{,}3\,\text{м/с}$.

5.25. Груз массой m подвешен на пружине жесткости k . Найти амплитуду его колебаний, оставшихся после действия прямоугольного импульса силы амплитудой F и длительностью τ . Сила направлена вдоль пружины. Начальная скорость груза равна нулю.

Решение.

Уравнение колебаний системы имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} F, t \in [0,\tau] \\ 0, t > \tau \end{cases}.$$

Решение уравнения:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{F}{k}(1-\cos\omega t), \ t \in [0,\tau] \\ A\sin(\omega t + \varphi), t > \tau \end{cases}.$$

Вычислим координату и скорость груза в момент выключения силы:

$$x_\tau = \frac{F}{k}(1-\cos\omega\tau)\,,\ \dot{x}_\tau = \frac{\omega F}{k}\sin\omega\tau\,.$$

Энергия осциллятора после выключения силы:

$$E = \frac{kx_\tau^2}{2} + \frac{m\dot{x}_\tau^2}{2} = \frac{F^2}{2k}((1-\cos\omega\tau)^2 + \sin^2\omega\tau) = \frac{2F^2}{k}\sin^2\frac{\omega\tau}{2}\,.$$

Из условия $E = kA^2/2$ найдем амплитуду колебаний после выключения силы.

Ответ. $A = \dfrac{2F}{k}\left|\sin\dfrac{\omega\tau}{2}\right|$.

5.26. Найти энергию, приобретенную осциллятором за все время действия силы $F = F_0 - F_0\exp(-t/\tau)$. В начальный момент $t=0$ энергия осциллятора была равна E_0 и он проходил через положение равновесия.

Ответ. $\Delta E = E(t\to\infty) - E_0 = \dfrac{F_0^2}{2k}\dfrac{1}{(1+\omega^2\tau^2)} - \dfrac{F_0V_0\tau}{1+\omega^2\tau^2}$, где начальная скорость может иметь два знака, $V_0 = \pm\sqrt{2E_0/m}$. Знак "+", если направление начальной скорости совпадает с направлением внешней силы.

5.27. Найти амплитуду установившихся колебаний напряжения на конденсаторе и тока в последовательном RLC-контуре, если на его вход подается переменное напряжении $U = U_0\sin\Omega t$.

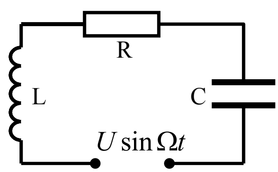


Рис. 5.27

Решение.

Запишем падение напряжения при обходе контура: $L\dot{I} + RI + U_c = U_0\sin\Omega t$. Учитывая, что $I = \dot{Q} = C\dot{U}$, уравнение колебаний:

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{U}{LC} = \frac{U_0}{LC}\sin\Omega t\,.$$

Амплитуда установившихся колебаний в этом случае записывается так же, как и для уравнения колебаний в канонической форме.

Ответ. $a_и = \dfrac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\Omega^2)^2 + R^2C^2\Omega^2}}$.

5.28. Груз массой m подвешен в поле тяжести на пружине жесткости k . Точка подвеса пружины движется по вертикали по закону $y = A\cos\Omega t$. Найти амплитуду установившихся малых колебаний груза.

Ответ. $B = A\dfrac{k/m}{\left|k/m - \Omega^2\right|}$.

5.29. По какому закону нужно менять длину математического маятника, чтобы параметрическая раскачка колебаний была наиболее эффективной? Изобразить движение на фазовой плоскости.

Ответ. Надо уменьшать длину в точке равновесия и увеличивать длину в точках остановки.

Адиабатический инвариант (теория)

Адиабатический инвариант – это физическая величина, которая не изменяется при медленном («адиабатическом») изменении параметров физической системы. Адиабатичность изменения параметра означает, что характерное время этого изменения много больше характерного времени периодических процессов, происходящих в самой системе.

Изучим метод поиска адиабатического инварианта на примере гармонического осциллятора. Изменяться могут два параметра: жесткость пружины и масса груза. Метод поиска адиабатического инварианта одинаков, независимо от того, будем ли мы изменять оба параметра или какой-то один. Сейчас важен сам метод, поэтому возьмем наиболее простой случай – пусть изменяется только жесткость пружины. Случай с изменением только массы имеет дополнительное усложнение, так как при его рассмотрении придется разбираться, уносится ли импульс.

При неизменной жесткости k гармонический осциллятор совершает колебания с периодом T, тогда медленным изменением жесткости считается такое, что

$$T\frac{dk}{dt} \ll k \ .$$

Продифференцируем энергию осциллятора $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$:

$$\dot{E} = \frac{\dot{k}x^2}{2} + kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = \frac{\dot{k}x^2}{2} + \dot{x}(\underbrace{kx + m\ddot{x}}_{0}) = \frac{\dot{k}x^2}{2} \ .$$

При меняющейся жесткости k энергия не сохраняется, но скорость ее изменения мала и пропорциональна $\dot{k}$. Производная энергии зависит как от медленно меняющейся переменной k, так и от быстро меняющейся x. Для выделения систематического хода изменения энергии нужно усреднить это выражение по периоду колебаний. При усреднении медленно меняющиеся величины можно считать константами, так как они мало изменяются за период колебаний.

$$\dot{E} = \dot{k}\frac{a^2}{4} = \frac{\dot{k}}{k}\frac{E}{2} \ .$$

Отсюда

$$\frac{dE}{E} = \frac{1}{2}\frac{dk}{k} \Rightarrow \ln E = \frac{1}{2}\ln k + \text{const} \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const} \ .$$

Так как масса m постоянна, полученное выражение эквивалентно

$$\frac{E}{\omega_0} = \text{const} ,$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Мы нашли комбинацию, которая сохраняется – адиабатический инвариант. Аналогичным способом адиабатический инвариант можно найти для других периодических процессов.

Адиабатический инвариант (задачи)

5.30. Упругий шарик подпрыгивает в поле тяжести над горизонтальной плитой. Поле тяжести медленно изменяется. Как меняется высота подпрыгивания шарика над плитой?

Решение.

Запишем энергию шарика $E = m\dot{x}^2/2 + mgx$. Тогда ее производная

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{g}x + mg\dot{x} = m\dot{g}x .$$

В последнем равенстве учтено, что $\ddot{x} = -g$. Для выделения медленно меняющейся части усредним производную от энергии по периоду полета шарика:

$$\overline{\dot{E}} = m\dot{g}\overline{x} = m\dot{g}\frac{\int\limits_0^{V_o/g}(V_0 t - \frac{gt^2}{2})dt}{V_0/g} = \frac{2}{3}\frac{\dot{g}}{g}\frac{mV_0^2}{2} = \frac{2}{3}\frac{\dot{g}}{g}E .$$

Отсюда $E \propto g^{2/3}$. Учитывая, что $E = mgH$, запишем ответ.

Ответ. $H \propto g^{-1/3}$.

5.31. Масса осциллятора медленно возрастает. Как при этом изменяются амплитуда и период его колебаний? Рассмотреть случаи осцилляторов: 1) груз на пружине; 2) груз на веревке в поле тяжести.

Ответ. Считаем, что новая масса появляется с $v = 0$, т. е. налипает из неподвижного тумана. Тогда адиабатический инвариант в обоих случаях равен E/ω . 1) $T \propto m^{1/2}$, $A \propto m^{-1/4}$; 2) период не меняется, $A \propto m^{-1/2}$.

5.32. Масса осциллятора медленно уменьшается из-за таяния груза. Как при этом изменяются амплитуда и период его колебаний? Рассмотреть случаи осцилляторов: 1) груз на пружине; 2) груз на веревке в поле тяжести.

Ответ. Считаем, что масса исчезает с $v = \dot{x}$, т. е. таяние происходит изотропно во всех направлениях. Тогда адиабатический инвариант для обоих случаев равен $E/\sqrt{km}$. Для маятника эффективная жесткость $k^* = mg/l$. В результате 1) $T \propto m^{1/2}$, $A \propto m^{1/4}$; 2) период и амплитуда не меняются.

5.33. Звезда теряет за счет излучения 10^{-9} часть своей массы в год. За какое время радиус орбиты планеты, вращающейся вокруг звезды, изменится вдвое? Влиянием излучения на планету пренебречь.

Ответ. $T = 10^9 \cdot \ln 2$ лет.

5.34. Частица движется со скоростью V вдоль стороны прямоугольного ящика длинной L, упруго отражаясь от стенок. Ящик медленно поднимают за один конец, поворачивая вокруг ребра перпендикулярного L. При каком угле наклона дня ящика α частица не будет достигать его верхней стенки?

Решение.

Пусть координата x отсчитывается от нижнего края ящика. При горизонтальном положении ящика фазовая траектория представляет собой прямоугольник, площадь внутри которого $\oint v dx = 2LV$. В адиабатическом процессе эта площадь не меняется, что будет доказано в курсе аналитической механики. Когда ящик наклонится на угол α, скорость частицы в верхней точке будет равна нулю. При наклоне на больший угол частица уже не будет доставать до верхней стенки. При таком наклоне скорость частицы в нижней точке $V_{\max} = \sqrt{2gL\sin\alpha}$. Вычислим площадь ограниченную фазовой траекторией:

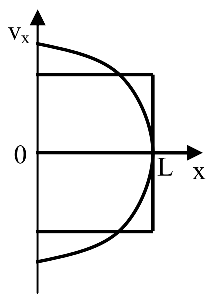


Рис. 5.34

$$S = 2\int_0^L \sqrt{2xg\sin\alpha}\,dx = \frac{\sqrt{32L^3 g\sin\alpha}}{2}, \text{ отсюда } \quad 2LV = \frac{\sqrt{32L^3 g\sin\alpha}}{3}.$$

Ответ. $\alpha = \arcsin\dfrac{9V^2}{8gL}$.

ЧАСТЬ 6

ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Потенциал поля (теория)

Если тело двигается в потенциальном поле $U(r)$, где r – расстояние от центра, то это называют движением в центральном поле. Сила, действующая на частицу, зависит только от расстояния до центра и направлена от центра или к центру:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В центральном поле сохраняется полная энергия, а движение происходит в одной плоскости.

Потенциал поля (задачи)

6.1. Нарисуйте график потенциала и напряженности поля тяготения Земли в зависимости от расстояния до центра Земли.

Ответ. $U(r) = \begin{cases} gR\left(\dfrac{r^2}{2R^2} - \dfrac{3}{2}\right) & \text{при } r < R \\ -g\dfrac{R^2}{r} & \text{при } r \geq R \end{cases}.$

6.2. Найти давление в центре «жидкой планеты» шаровой формы. Плотность жидкости считать однородной и равной 5,5 г/см^3. Радиус планеты 6400 км.

Ответ. $2 \cdot 10^6$ атм.

6.3. На какой высоте от поверхности планеты нужно включить тормозной двигатель космического аппарата, чтобы обеспечить мягкую посадку на поверхность? Спуск происходит по прямой, проходящей через центр планеты. Сила торможения F постоянна. Сопротивлением воздуха и изменением массы аппарата пренебречь. Масса аппарата m, скорость вдали от Земли V_∞.

Решение.

Для мягкой посадки скорость аппарата при касании Земли должна быть нулевой. Значит, суммарная работа, совершенная двигателем, должна быть равна кинетической энергии, которую аппарат имел бы на поверхности Земли при свободном падении:

$$A = F \cdot h = \frac{mV_З^2}{2} = \frac{mV_\infty^{\ 2}}{2} + \frac{GM_Зm}{R_З}.$$

Ответ. $h = \dfrac{mV_\infty^{\ 2}}{2F} + \dfrac{GM_Зm}{R_ЗF}$.

6.4. На спутник, движущийся по круговой орбите, действует слабая тормозящая сила $F = -\alpha V^2$. Найти зависимость скорости спутника от времени. За какое время радиус орбиты уменьшится на 2 %, если за месяц скорость спутника меняется на 1 %?

Ответ. $V = \dfrac{V_0}{1 - \alpha V_0 t/m}$. Радиус уменьшится на 2 % за месяц.

Момент импульса. Центробежный потенциал (теория)

В центральном поле сохраняется момент импульса относительно центра поля:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \mathrm{const}.$$

В полярной системе координат импульс тела равен

$$\mathbf{p} = m(\dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi),$$

что дает

$$\mathbf{M} = mr^2\dot{\varphi}\;\mathbf{e}_z = \mathrm{const}.$$

Отсюда $\dot{\varphi} = M/mr^2$. Подставим это выражение в формулу для полной энергии:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{эф}(r);$$

$$U_{эф}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r),$$

где $U_{эф}(r)$ называют эффективным потенциалом. В данном случае плоское движение сводится к одномерному в поле эффективного потенциала и легко интегрируется:

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{эф}}(r))}, \qquad t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{эф}}(r))}} + \text{const}.$$

Так как $d\varphi = \left(M/mr^2\right)dt,$ траектория движения тела полностью определяется:

$$\varphi = \int \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - U_{\text{эф}}(r))}} + \text{const}.$$

Для частицы, летящей из бесконечности на центр поля с прицельным параметром ρ, момент импульса равен

$$M = \left|[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]\right| = m\rho v_\infty .$$

Момент импульса. Центробежный потенциал (задачи)

6.5. На сферически-симметричный потенциальный барьер радиусом R и высотой U налетает плоский поток частиц с кинетической энергией E. В центре барьера расположена «липкая» сфера радиусом $a < R$. Найти зависимость сечения прилипания частиц к сфере от энергии частиц, построить график.

Ответ. $\sigma = \pi a^2 \left(1 - \dfrac{U}{E}\right).$

6.6. Частица скользит без трения по стенке воронки в поле силы тяжести (рис. 6.6). В начальный момент частица находилась на высоте h и двигалась горизонтально со скоростью V. При какой минимальной скорости V частица не провалится в воронку, отверстие которой имеет радиус ρ_0?

Ответ. $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{g\rho_0 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \left(h \operatorname{ctg}\alpha / 2\rho_0\right)}}$.

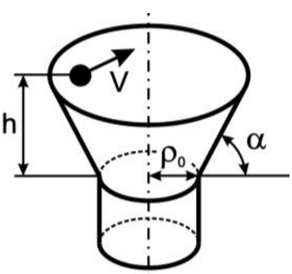


Рис. 6.6

6.7. Найти сечение падения потока метеоритов на Землю. Скорость метеоритов вдали от Земли V_∞.

Решение.

Задачу можно решить как построением графика эффективного потенциала из формулы

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GM_3 m}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{эф}(r),$$

так и из геометрических соображений (рис. 6.7): траекторией с самым большим прицельным параметром $\rho_{кр}$ будет гипербола с $r_{\min} = R_3$, которая касается поверхности Земли. Метеориты с большим прицельным параметром пролетят мимо. Для критической траектории $r = R_3$ – это минимальная точка по радиусу, значит, при $\dot{r}(R_3) = 0$ будет выполняться

$$E = \frac{mV_\infty{}^2}{2} = \frac{M^2}{2mR_3^2} - \frac{GM_3 m}{R_3};$$

так как момент импульса равен $M = m\rho_{кр}V_\infty$, получаем

$$\frac{V_\infty{}^2}{2} = \frac{\rho_{кр}{}^2 V_\infty{}^2}{2R_3} - \frac{GM_3}{R_3}.$$

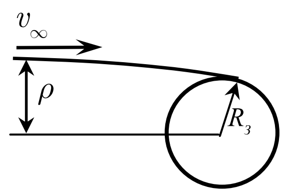


Рис. 6.7

Ответ. $\sigma = \pi\rho_{кр}{}^2 = \pi R_3{}^2\left(1 + \frac{2GM_3}{R_3 V_\infty{}^2}\right).$

6.8. Найти сечение падения в центр поля притяжения $U = -\alpha/r^4$.

Решение.

Эффективный потенциал для частицы с прицельным параметром ρ равен

$$U_{эф}(r) = \frac{m^2\rho^2 v_\infty{}^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^4},$$

его график показан на рис. 6.8. Чтобы попасть в центр, частица должна иметь энергию выше максимального значения эффективного потенциала. Экстремум эффективного потенциала находится взятием производной по r:

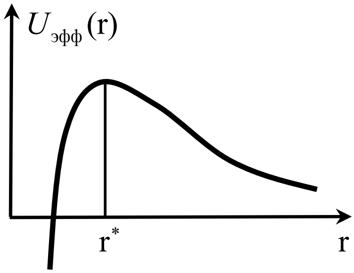


Рис. 6.8

$$r_* = \sqrt{2\alpha / E\rho^2}\,,\ U_{\text{эф}}(r_*) = \frac{E^2\rho^4}{4\alpha}.$$

Получаем условие попадания в центр $E > U_{\text{эф}}(r_*) = E^2\rho^4 / 4\alpha$, что при условии $\sigma = \pi\rho_{\text{кр}}{}^2$ дает сечение падения в центр $\sigma = 2\pi\sqrt{\alpha/E}$.

Кулоновское поле. Законы Кеплера (теория)

При движении в кулоновском и гравитационном полях потенциал равен

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

(в гравитационном поле тела массой $M_{\text{грав}}$: $\alpha = GM_{\text{грав}}m$). Тогда

$$U_{\text{эф}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Интеграл $$\varphi = \int \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - U_{\text{ýô}}(r))}} + \text{const}$$

берется и дает

$$\varphi = \arccos \frac{\dfrac{M^2}{m\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EM^2}{m\alpha^2}}} + \text{const} .$$

Это решение можно переписать в виде

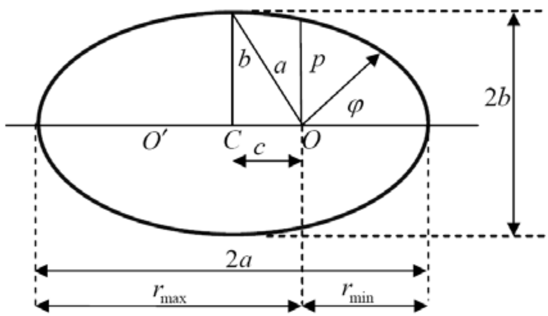
$$\cos\varphi = \frac{\frac{p}{r}-1}{e} \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

где параметр орбиты равен $p = M^2/\alpha m$, эксцентриситет равен $e = \sqrt{1+\left(2EM^2/m\alpha^2\right)}$. Это канонические уравнения кривых второго порядка, которые при $E < 0$, $e < 1$ описывают эллипс; при $E = 0$, $e = 1$ – параболу; при $E > 0$, $e > 1$ – гиперболу.

Для случая $E < 0$ уравнения можно привести к выражению в декартовых координатах:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a = p/\left(1-e^2\right) = \alpha/\left(2|E|\right)$, $b = p/\sqrt{1-e^2} = M/\sqrt{2m|E|}$ и $c = ep/\left(1-e^2\right)$. Траектория движения приведена на рисунке, центр тяготения находится в точке O.



Момент импульса для эллипса прямо связан с секториальной скоростью тела $\mathbf{f}$: $\mathbf{M} = 2m\mathbf{f}$. Тогда за один период обращения T тело покроет площадь эллипса S: $2mS = TM$. Так как площадь эллипса $S = \pi ab$, получаем связь периода движения с большой полуосью и полной энергией тела:

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}.$$

Таким образом мы доказали верность экспериментально установленных Кеплером законов движения планет: 1) планеты двигаются по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце; 2) секториальная скорость планет постоянна; 3) квадраты периодов движения планет пропорциональны кубам больших полуосей эллипсов.

Если тело двигается по круговой орбите радиуса r в гравитационном потенциале, центростремительное ускорение сообщается притягивающей силой

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_З m}{r^2}$$

и скорость тела:

$$v = \sqrt{GM_З/r}\ .$$

Скорость кругового движения по самой низкой орбите вблизи Земли ($r \cong R_З$) называют первой космической скоростью

$$v_1 = \sqrt{GM_З/R}\ .$$

Чтобы тело покинуло гравитационное поле Земли, требуется вторая космическая скорость v_2, которая находится из закона сохранения энергии:

$$E = \frac{mv_2{}^2}{2} - \frac{GM_З m}{R_З} = 0 \text{ при } r \to \infty ,$$

следовательно

$$v_2 = \sqrt{2GM_З/R}\ .$$

Для решения задач иногда удобно использовать теорему о вириале, согласно которой для гравитационного взаимодействия выполняются следующие соотношения между средними полной, кинетической и потенциальной энергиями:

$$E = -T = \frac{U}{2}\ .$$

Кулоновское поле. Законы Кеплера (задачи)

6.9. Какой должна быть минимальная скорость ракеты при выходе из атмосферы Земли, чтобы она смогла покинуть Солнечную систему без дополнительного ускорения?

Ответ. Третья космическая скорость равна $v_3 = \sqrt{v_{\text{Земли}}^2 (\sqrt{2}-1)^2 + v_2^{\,2}} = 16,4$ км/с, где $v_{\text{Земли}}$ – скорость движения Земли вокруг Солнца.

6.10. С какой минимальной скоростью должен покинуть атмосферу Земли космический корабль, направляющийся к Марсу и стартующий по касательной к орбите Земли? Каким будет расстояние от Земли до Марса при посадке корабля на Марс? Радиус орбиты Марса 1,52 а. е. Какова минимальная начальная скорость при полете на Венеру? Радиус орбиты Венеры 0,72 а. е.

Ответ. $V_{\min \text{Марс}} \approx 11{,}56$ км/с, $R_{\text{З-М}} \approx 1{,}5$ а. е., $V_{\min \text{Венера}} \approx 11{,}5$ км/с.

6.11. Спутник движется по околоземной круговой орбите радиусом r. Какую радиальную добавку скорости ему нужно сообщить, чтобы его орбита стала эллиптической с перигеем r_1?

Ответ. $\Delta V_r = \pm\left(\dfrac{r - r_1}{r_1}\right)\sqrt{gr}$.

6.12. В каком году нужно ожидать возвращения кометы, удаляющейся от Солнца на 35 а. е.? Перигелий кометы 0,6 а. е. Предыдущее прохождение кометы через перигелий было в 1986 г.

Решение:

Большая полуось орбиты кометы $a = (35 + 0{,}6)/2 = 17{,}8$ а. е. Для орбиты Земли полуось равна 1 а. е , 1 год,. Следовательно, по третьему закону Кеплера $T = (17{,}8)^{3/2}$ лет.

Ответ. 2061 г.

6.13. За какое время Земля упадет на Солнце, если остановить ее движение по орбите?

Ответ. $t = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ лет $\approx 2{,}1$ месяца .

6.14. Во сколько раз необходимо мгновенно увеличить скорость движения Земли, чтобы продолжительность года увеличилась в 2 раза?

Решение.

Из законов Кеплера $T = \pi\alpha\sqrt{m/2|E|^3}$, значит, $T^2|E|^3 = T'^2|E'|^3$, где

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R},$$

при этом по теореме вириала:

$$E = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{2R}.$$

Пусть изменение скорости было в n раз: $v' = nv$. Тогда

$$E' = \frac{mv'^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mn^2v^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mn^2v^2}{2} - mv^2.$$

Так как $T' = 2T$, из $|E'| = |E|(T/T')^{2/3}$ получаем $n^2 - 2 = -(1/2)^{2/3}$.

Ответ. $n \approx 1.17$.

6.15. Спутник летает по круговой орбите вокруг Земли с радиусом $2R$, где R – радиус Земли. Полюса Земли лежат в плоскости орбиты. Во сколько раз нужно уменьшить скорость спутника над экватором, чтобы он попал на Северный полюс?

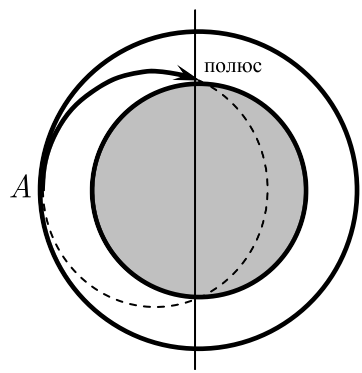


Рис. 6.15

Решение.

При движении по круговой траектории скорость спутника

$$v_0 = \sqrt{GM_з/2R}.$$

После изменения скорости в точке А траекторией движения спутника станет часть эллипса (до удара о Землю), проходящего через оба полюса Земли и точку торможения над экватором (т. А, рис. 6.15). Тогда радиус Земли равен параметру эллипса $p = R$ (уравнение эллипса $r = p/(1+e\cos\varphi)$, $\varphi = 90° \Rightarrow r = p$).

$$p = \frac{M^2}{\alpha m} = \frac{m^2 v_1^2 (2R)^2}{G m^2 M_3}$$

(так как момент импульса в т. А равен $m v_1 \cdot 2R$), следовательно $v_1^2 = GM_3 R/(2R)^2 = GM_3/4R = v_0^2/2$.

Ответ. В $\sqrt{2}$ раз.

6.16. Спутник на геостационарной орбите вышел из строя, и было решено утопить его в океане. Найти необходимое минимальное изменение скорости спутника.

Решение.

При движении по геостационарной орбите $V_Г = \sqrt{GM/R_Г}$. Минимальное изменение скорости определяется из условия минимальности энергии при падении в океан при условии сохранения момента импульса. Оптимальная траектория показана на рис. 6.16.

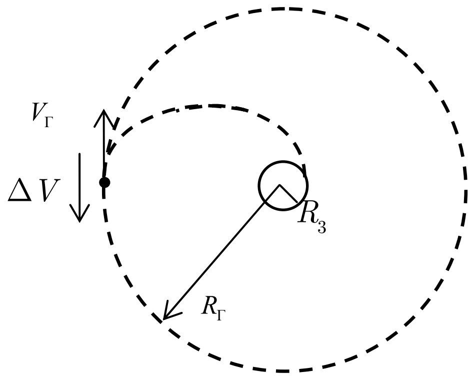


Рис. 6.16

Изменение скорости делаем против направления движения спутника, за счет этого минимален момент импульса $(V_Г - \Delta V)R_Г = V_З R_З$ и, соответственно, минимальна $V_З$ – скорость спутника при ударе о поверхность Земли, следовательно минимально изменение его энергии. Из закона сохранения энергии

$$m\frac{(V_Г - \Delta V)^2}{2} - \frac{GmM}{R_Г} = m\frac{V_З^2}{2} - \frac{GmM}{R_З}.$$

Подставляя $V_З$ из момента импульса, получаем

$$(V_Г - \Delta V)^2 = \frac{2GM}{R_Г}\frac{R_З}{(R_Г + R_З)}.$$

Ответ. $\Delta V = \sqrt{\dfrac{GM}{R_Г}}\left(1-\sqrt{\dfrac{2R_З}{R_Г(R_Г+R_З)}}\right)$.

6.17. Спутник связи имеет перигей над южным полушарием Земли на высоте 500 км, а апогей – на высоте 40 тыс. км над северным полушарием. Каково отношение угловых скоростей обращения спутника в перигее и апогее?

Ответ. ~ 45.

6.18. Два богатыря на полюсе Земли бросают вертикально вверх булавы. Первая упала через неделю, вторая – через 30 дней. На сколько отличались их начальные скорости?

Ответ. $\Delta V \approx 70$ м/с.

Задача двух тел (теория)

Если рассматриваются два тела, сила (или потенциал) взаимодействия которых зависит только от расстояния между ними

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

то систему уравнений

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \text{ и } m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

можно заменить уравнением на вектор расстояния между телами:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}(r)}{m_2} + \frac{\mathbf{F}(r)}{m_1} = \frac{\mathbf{F}(r)}{\mu},$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называют приведенной массой.

Таким образом, задачу двух тел можно свести к движению одного тела с приведенной массой μ в (неподвижном) центральном поле $\mathbf{F}(r)$. Решив задачу движения приведенного тела, можно затем найти закон движения исходных двух тел по формулам:

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R}_{\text{цм}};$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R}_{\text{цм}},$$

где вектор центра масс

$$\mathbf{R}_{\text{цм}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача двух тел (задачи)

6.19. Найти период малых продольных колебаний осциллятора, состоящего из двух масс m и M, закрепленных на концах пружины жесткостью k.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mM}{k(m+M)}}$.

6.20. Два тела с массами m и M соединены последовательно двумя пружинами жесткостью k_1 и k_2. Найти частоту малых колебаний.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{k_{\text{эф}}}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 (k_1 + k_2)}}$.

6.21. Найти частоту колебаний системы (рис. 6.21). Центральное тело может двигаться только вдоль пружин. Масса кольца M, центрального тела m. Жесткость пружин одинакова и равна k. Как изменится ответ, если кольцо закрепить?

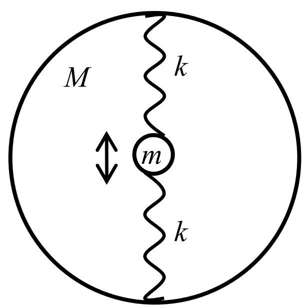


Рис. 6.21

Ответ. $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{2k(m+M)}{mM}}$, $\omega_{\text{закрепл}} = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

6.22. Два шарика массами m и M соединены пружиной жесткости k. Шарики заряжают одноименными зарядами, так что пружина растягивается в α раз (пружина электрическое поле не возмущает). Найти частоту малых продольных колебаний системы.

Ответ. $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}\left(3-\frac{2}{\alpha}\right)}$.

6.23. Через какое время столкнутся две точки с разными массами, начавшие двигаться из состояния покоя под действием силы взаимного гравитационного притяжения?

Ответ. $T = \frac{\pi L^{3/2}}{\sqrt{8G(m+M)}}$.

6.24. Две звезды обращаются друг относительно друга с постоянными по модулю скоростями V_1 и V_2 с периодом T. Найти массы звезд и расстояние между ними.

Решение.

Звезды двигаются по окружностям радиусов R_1 и R_2 вокруг общего центра масс. Расстояние между звездами всегда $R_1 + R_2$. Центростремительные силы равны силе притяжения звезд:

$$\frac{m_1 V_1^2}{R_1} = \frac{G m_1 m_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{m_2 V_2^2}{R_2}.$$

Так как за период T звезда проходит окружность, получаем $V_1 T = 2\pi R_1$ и $V_2 T = 2\pi R_2$, сложив их, получаем $(V_1+V_2)T = 2\pi(R_1+R_2)$. Отсюда

$$\frac{m_1 V_1^2 2\pi}{T V_1} = \frac{G m_1 m_2 4\pi^2}{(V_1+V_2)^2 T^2} = \frac{m_2 V_2^2 2\pi}{T V_2}.$$

Ответ. $m_1 = \frac{T V_2}{2\pi G}(V_1+V_2)^2$, $m_2 = \frac{T V_1}{2\pi G}(V_1+V_2)^2$.

6.25. Минимальное расстояние между компонентами двойной звезды (две звезды, обращающиеся относительно друг друга) равно R_1, при этом их относительная скорость V_1. Сумма масс звезд равна M. Найти расстояние между ними R_2 и их относительную скорость V_2 при их максимальном удалении.

Решение.

При переходе к приведенной массе, вращающейся вокруг центра тяготения, из законов сохранения момента импульса и энергии получаем

$\mu V_1 R_1 = \mu V_2 R_2$ и

$$\frac{\mu V_1^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{R_1} = \frac{\mu V_2^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{R_2}.$$

Откуда $V_2 = V_1 R_1 / R_2$ и $V_1^2 - 2GM/R_1 = V_2^2 - 2GM/R_2$. И в результате получаем квадратное уравнение:

$$R_2^2 (V_1^2 - \frac{2GM}{R_1}) + 2GMR_2 - V_1^2 R_1^2 = 0.$$

Ответ. $R_2 = \dfrac{V_1^2 R_1^2}{2GM - V_1^2 R_1}$; $V_2 = V_1 \dfrac{R_1}{R_2}$.

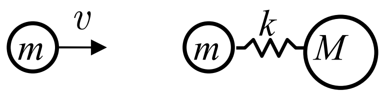


Рис. 6.26

6.26. Система состоит из двух шариков с массами m и M, соединенных между собой невесомой пружиной с коэффициентом упругости k. Третий шарик с массой m, движущийся вдоль оси пружины со скоростью v, претерпевает упругое столкновение с шариком m. Считая шарики абсолютно жесткими, найти после столкновения: 1) кинетическую энергию K движения системы как целого; 2) внутреннюю энергию системы $E_{вн}$; 3) амплитуду колебаний одного шарика относительно другого A. До удара система покоилась, а пружина не была деформирована.

Ответ. $K = \dfrac{(mv)^2}{2(M+m)}$, $E_{вн} = \dfrac{Mmv^2}{2(M+m)}$, $A = v\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$.

6.27. Первая искусственная ядерная реакция $N^{14} + He^4 = O^{17} + p$ наблюдалась Резерфордом в 1919 г. Она идет с поглощением энергии E = 1,13 МэВ. Какую минимальную энергию E_0 надо сообщить в лабораторной системе α-частице (т. е. ядру атома гелия), чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из N^{14} указанная реакция могла пойти?

Решение.

Импульс α-частицы до столкновения $p_0 = m_{He} v_0$. После столкновения импульс сохранится. С ним связана кинетическая энергия движения центра масс:

$$K_{\text{ц.м.}} = \frac{p_0^{\ 2}}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

которая не затрачивается на ядерные превращения. Искомая энергия E_0 найдется из условия:

$$E_0 = E + K_{\text{ц.м.}} = E + \frac{E_0 m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}},$$

откуда $E_0 = \dfrac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} E.$

Ответ. $E_0 = 1{,}45$ МэВ.

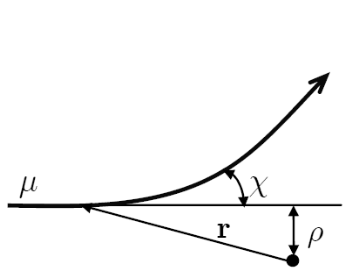
Рассеяние частиц (теория)

Сечением процесса σ называют площадь, в которую должно попасть летящее из бесконечности тело, чтобы процесс произошел. Это сечение легко связать с максимальным прицельным параметром ρ, который может иметь налетающее тело: $\sigma = \pi\rho^2$. Прицельный параметр ρ связан с углом рассеяния θ. Дифференцируя формулу для сечения процесса $\sigma = \pi\rho^2$, мы получим дифференциальное сечение процесса:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta.$$

Если перейти от плоского угла рассеяния θ к связанному с ним элементу телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$, получим

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega.$$



При изучении рассеяния двух частиц задача сводится к рассеянию частицы с приведенной массой на бесконечно тяжело неподвижной частице. Полученное угловое распределение будет соответствовать угловому распределению в системе центра масс. Для кулоновского потенциала, как упоминалось выше, эта задача полностью решается, и можно получить связь угла рассеяния χ (см. рисунок) с параметрами налетающей частицы:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}=\frac{\alpha}{\rho\mu v_{\infty}{}^{2}},$$

откуда $$\rho=\frac{\alpha}{\mu v_{\infty}{}^{2}}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}.$$

Подставив последнее выражение в формулу дифференциального сечения рассеяния, получим формулу Резерфорда:

$$d\sigma=\frac{\rho}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\Omega=\left(\frac{\alpha}{2\mu v_{\infty}{}^{2}}\right)^{2}\frac{d\Omega}{\sin^{4}\frac{\chi}{2}}.$$

Сечение рассеяния в лабораторной системе находится путем пересчета углов из системы ц.м. в лаб. систему.

Рассеяние частиц (задачи)

6.28. Найти зависимость угла рассеяния точечных частиц на абсолютно упругой сфере радиусом R от прицельного параметра ρ.

Ответ. $\theta=2\arccos\dfrac{\rho}{R}$.

6.29. Найти сечение рассеяния на угол, больший 90°, при упругом столкновении точечной частицы массой m с первоначально неподвижной сферой радиусом R, массой M=2m.

Ответ. $\sigma=\pi R^{2}\dfrac{M-m}{2M}=\dfrac{\pi R^{2}}{4}$.

6.30. Два одинаковых шара массой m покоятся, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, касающейся обоих шаров. Найти массу налетающего шара, если после удара он останавливается. Радиусы всех шаров одинаковы. Считать удар упругим.

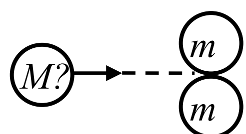


Рис. 6.30

Решение.

При ударе центры шаров будут образовывать равносторонний треугольник, значит, шары m отлетят под углом 30° от линии удара. Из законов сохранения энергии $Mu^2/2 = 2mv^2/2$ и импульса $Mu = 2mv \cdot \cos 30^\circ$.

Ответ. $M = \frac{3}{2}m$.

6.31. Найти сечение рассеяния на угол, больший 90°, при столкновении электрона с энергией T = 10 кэВ с неподвижным протоном. Как изменится результат, если протон не закреплен?

Ответ. $\sigma_0 = \frac{\pi e^4}{4T^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-26}$ м^2, $\sigma_{\text{незакрепл}} = \sigma_0 \left(1 - \frac{m_e{}^2}{M_p{}^2}\right)$.

6.32. Найти зависимость энергии, переданной покоившемуся протону нерелятивистским электроном, от прицельного параметра. Каким будет результат при столкновении ядер дейтерия и гелия? Столкновения упругие.

Ответ. В общем случае, если частица с массой m_1, зарядом q_1 и кинетической энергией T_{10} налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 и зарядом q_2, то последняя приобретает энергию

$$T_2 = T_{10} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\rho T_{10}}{q_1 q_2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2}.$$

e-p: $T_p \simeq T_{e0} \frac{4m_e}{m_p} \frac{1}{1 + 4T_{e0}^2 \rho^2 / e^4}$. D-He: $T_{\text{He}} \simeq T_{D0} \frac{8}{9} \frac{1}{1 + T_{D0}^2 \rho^2 / e^4}$.

6.33. Найти сечение упругого рассеяния электрона с кинетической энергией 1 МэВ на угол, больший 10^{-2} радиан, при пролете мимо первоначально покоившегося протона. Определить максимальную и минимальную энергию, переданную протону при рассеянии.

Ответ. $\sigma = \frac{4\pi e^4}{\theta^2 p^2 V^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-25}$ м^2, $T_{\min} \approx 0,1$ эВ, $T_{\max} \approx 4$ кэВ.

6.34. Какую максимальную добавку к вектору скорости может получить космический аппарат (КА) при гравитационном маневре, т. е. близком пролете около планеты массой M и радиуса R?

Решение.

После пролета мимо планеты скорость КА останется прежней по модулю, но изменится направление. Так как скорости нерелятивистские, задачу можно решать в любой системе отсчета, например в системе отсчета планеты. В данном случае это классическое рассеяние на притягивающем центре и можно сразу связать угол рассеяния с прицельным параметром:

$$\rho = \frac{\alpha}{mv^2} ctg \frac{\theta}{2}.$$

Из геометрии (рис. 6.34) легко находится модуль вектора изменения скорости $\Delta v = 2v\sin(\theta/2)$. Используя тригонометрическое соотношение $\sin^2\frac{\theta}{2} = \left(1 + \mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1}$, получаем $\Delta v = \dfrac{2v}{\sqrt{1 + \dfrac{m^2v^4\rho^2}{\alpha^2}}}$.

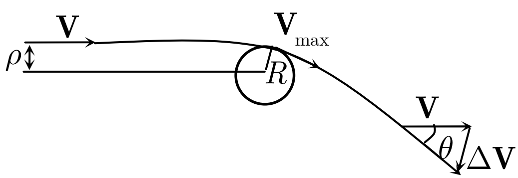


Рис. 6.34

Найдем максимум изменения скорости при переменных ρ и v, при этом КА не должен удариться о планету, т. е. минимальное расстояние до центра планеты не менее ее радиуса. Очевидно (ρ стоит в делителе, т. е. ищем минимальный допустимый ρ), что оптимальный вариант – пролет вблизи планеты, из сохранения момента импульса получаем $\rho v = Rv_{\max}$. Из закона сохранения энергии $v_{\max} = \sqrt{v^2 + v_2^{\,2}}$, где $v_2 = \sqrt{2GM/R}$ – вторая космическая скорость для планеты. Подставив эти выражения в формулу для Δv, получим $(\alpha = GMm)$:

$$\Delta v = \frac{2v}{\sqrt{1+\dfrac{m^2v^4R^2(v^2+v_2{}^2)}{\alpha^2v^2}}} = \frac{2v}{\sqrt{1+\dfrac{4v^2(v^2+v_2{}^2)}{v_2{}^2}}}.$$

Экстремум этой функции находим дифференцированием, он достигается при $v = v_2/\sqrt{2}$ и составляет $\Delta v = v_2/\sqrt{2}$, т. е. первую космическую скорость для планеты, вблизи которой проводится гравитационный маневр.

Ответ. Максимальная добавка $\Delta v = \sqrt{GM/R}$.

6.35. Пучок быстрых отрицательных ионов водорода проходит через перезарядную мишень с интегральной плотностью молекул $\int n\,dx = N$ молекул/см^2. Сечение перезарядки отрицательных ионов в атомы σ_{-0} см^2/мол, сечение перезарядки атомов в протоны σ_{0+} см^2/мол. Какая доля пучка отрицательных ионов выйдет из мишени в виде отрицательных ионов, атомов и протонов? При какой толщине мишени выход атомов максимален?

Ответ. Выход атомов максимален при толщине мишени

$$N = \frac{\ln\left(\sigma_{-0}/\sigma_{0+}\right)}{\sigma_{-0}-\sigma_{0+}}.$$

6.36. Найти полное сечение упругого рассеяния для шариков радиуса a массой m на таких же покоящихся шариках, если сила притяжения между шариками имеет вид $\mathbf{F} = -\alpha\dfrac{\mathbf{r}}{r^4}$.

Ответ. $\sigma = 4\pi a^2 + \dfrac{2\pi\alpha}{mv^2}$.

ЧАСТЬ 7

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

Равновесие тел (теория)

Тело находится в равновесии, если сумма всех сил и моментов сил, приложенных к нему, равна нулю.

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0\,,\ \boldsymbol{\tau}_{\text{внеш}} = 0\,.$$

Данные условия равновесия образуют систему уравнений, в которую входят все силы и моменты сил (известные и неизвестные), действующие на тело. Решая эту систему уравнений, находим силы. Суммарная сила равна нулю, поэтому при решении статических задач момент сил можно считать относительно любой оси. Статические задачи могут иметь множество решений, т. е. они переопределены.

В результате решения статической задачи мы находим множество положений равновесия, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Положение равновесия устойчиво, если при сдвиге в любом направлении возникает возвращающая сила, направленная против сдвига. Наличие такой силы эквивалентно тому, что при смещении из положения равновесия возрастает потенциальная энергия. При неустойчивом положении возникающие силы не препятствуют смещению или помогают ему. При этом потенциальная энергия не возрастает, а кинетическая может остаться прежней или увеличиться.

Для решения задач иногда применяют принцип виртуальной работы: смещают часть тела относительно первоначального положения, при этом затраченная на смещение работа сил реакции должна быть равна изменению потенциальной энергии в системе, т. е. полная работа всех сил на виртуальном перемещении равна нулю: $\sum_i \delta A_i = \sum_i \mathbf{F}_i \boldsymbol{\delta}\mathbf{s}_i = 0.$

Равновесие тел (задачи)

7.1. Цепочка массой m подвешена за концы так, что вблизи точек подвеса она образует с горизонталью угол α. Определить силу натяжения цепочки в нижней точке и в точках подвеса.

Ответ. Натяжение в нижней точке $T = \frac{mg}{2}\text{ctg}\alpha$, в точках подвеса $T = \frac{mg}{2\sin\alpha}$.

7.2. Найти натяжение кольцевой цепочки, надетой на гладкий конус с углом при вершине α.

Решение.

Представим, что цепочка переместилась вниз из положения равновесия на малую величину δh. Ее радиус увеличится на $\delta R = \delta h \cdot tg\left(\alpha/2\right)$, а сумма работ силы натяжения цепочки и силы тяжести равна нулю, откуда $2\pi \cdot \delta R \cdot T = mg\delta h$.

Ответ. $T = \frac{mg}{2\pi}\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

7.3. Найти натяжение кольцевой цепочки радиусом r и весом P, надетой на гладкую сферу радиусом R.

Ответ. $T = \frac{Pr}{2\pi\sqrt{R^2 - r^2}}$.

7.4. Чем ограничивается масса груза, который можно безопасно перевозить в лодке? Груз располагается симметрично относительно бортов лодки.

Ответ. 1) Максимальная сила Архимеда для лодки должна быть достаточна для поднятия груза. 2) Лодка с грузом находится в положении равновесия, оно должно быть устойчивым.

7.5. Нижний конец тонкой деревянной палочки длиной L шарнирно закреплен на дне бассейна. Глубина воды $h < L$. Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.

Ответ. Если $L > h \geq L\sqrt{\rho/\rho_в}$ (ρ – плотность палочки, $\rho_в$ – плотность воды), то существует только вертикальное положение равновесия и оно устойчиво. При $h < L\sqrt{\rho/\rho_в}$ существуют три положения равновесия. Вертикальное положение не устойчиво, а устойчивы положения равновесия с углом наклона θ к вертикали:

$$\sin\theta = \pm\frac{h}{L}\sqrt{\frac{\rho_в}{\rho}}.$$

7.6. Тонкая деревянная палочка длиной L шарнирно подвешена за один конец над поверхностью воды на высоте $h < L$. Плотность палочки ρ, плотность воды $\rho_в$.

Решение.

Пусть палочка находится в равновесии и образует угол θ с вертикалью. Над водой находится часть палочки длиной $l = h/\cos\theta$. Момент силы тяжести относительно точки подвеса $M_1 = \rho l^2 gs \sin\theta/2$, где s – площадь поперечного сечения палочки. Под водой находится часть палочки $l_в = L - h/\cos\theta$. К центру этой части палочки приложены ее сила тяжести и сила Архимеда, которые создают момент $M_в = l_в(\rho - \rho_в)gs(l + l_в/2)\sin\theta$. Суммарный момент сил в положении равновесия равен 0, откуда $\frac{\rho l^2}{2} + (\rho - \rho_в)l_в(l + l_в/2) = 0$. Подставляя выражения для l и $l_в$, получим уравнение относительно $\cos\theta$, решение которого:

$$\cos\theta = \frac{h}{L}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_в}}}.$$

Ответ. Если $h \geq L\sqrt{1 - \rho/\rho_в}$, то существует только вертикальное положение равновесия и оно устойчиво. При $h < L\sqrt{1 - \rho/\rho_в}$ существуют три положения равновесия: $\pm\theta$ от вертикали – устойчивые, и неустойчивое вертикальное положение равновесия.

7.7. Карандаш радиусом r удерживается горизонтально в равновесии на стержне радиусом R в поле тяжести. Оси карандаша и стержня перпендикулярны. Коэффициент трения скольжения μ. При каком максимальном угле отклонения α карандаша от горизонтали он еще вернется в положение равновесия?

Ответ. Если угол наклона карандаша превышает угол трения $\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu$, то карандаш соскальзывает. Если же трение достаточно велико, то карандаш сорвется после прохода через неустойчивое положение равновесия. Угол этого положения задается уравнением $r \cdot tg\alpha = (R + r)\alpha$. Меньший из двух приведенных углов и есть максимальный угол, при котором карандаш еще может вернуться в положение равновесия.

7.8. Однородная пластина длиной $3L$ и весом $3P$ согнута под прямым углом и подвешена (рис. 7.8). Найти натяжение невесомой нити. При каком угле β нить нужно заменить невесомым стержнем?

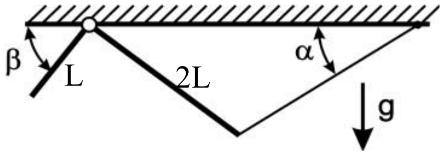


Рис. 7.8

Ответ. $T = P\dfrac{4\sin\beta - \cos\beta}{4\cos(\beta-\alpha)}$, $\beta < \mathrm{arctg}(1/4) \approx 14^\circ$.

7.9. Невесомая плоская параболическая качалка высотой $H = 20$ см и шириной $L = 40$ см установлена вертикально на горизонтальной поверхности в поле тяжести и может качаться в своей плоскости (рис. 7.9). По вертикальной оси качалки снизу вверх ползет маленький жук. До какой высоты он должен доползти, чтобы равновесие качалки стало неустойчивым и она могла наклониться?

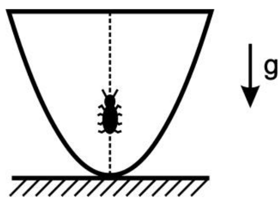
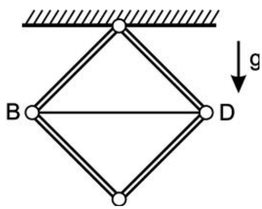


Рис. 7.9

Ответ. $h > \dfrac{L^2}{8H} = 10$ см.

7.10. Найти силу, сжимающую невесомый стержень BD в системе стержней (рис. 7.10). Длина каждого стержня равна L, вес P. Стержни соединены шарнирами и образуют квадрат.



Ответ. $T = 2P$.

Рис. 7.10

7.11. Домкрат представляет собой ромб, составленный из четырех шарнирно закрепленных стержней длиной $a = 25$ см. Винт с шагом резьбы $\delta = 1$ мм расположен вдоль горизонтальной диагонали, приводится во вращение рукояткой и стягивает противоположные углы ромба (рис. 7.11). Найти зависимость момента силы, который следует прикладывать к рукоятке, от высоты подъема груза весом $m = 1$ т, если в начальном положении стержни образовывали квадрат.

Решение.

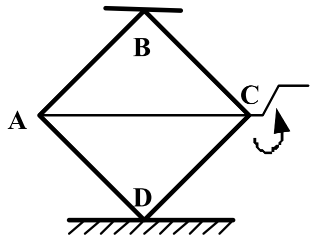


Рис. 7.11

Работа по подъему груза равна $A = mg(2h' - 2h)$, где h – высота груза в некоторый момент времени, h' – его высота в следующий момент времени. В то же время работа по вращению ручки $A = M\varphi$, где M – момент сил, φ – угол поворота ручки за это время, который можно связать с сокращением длины центрального стержня $x = AC' - AC = \delta(\varphi/2\pi)$. Из теоремы Пифагора $h' = \sqrt{a^2 - (AC'/2)^2}$. При малом смещении раскладываем в ряд Тейлора: $h' \approx h + x \cdot AC/4h$. Подставляя в формулу для работы, получаем

$$A = 2mg\frac{xAC}{4h} = M\frac{2\pi x}{\delta}.$$

Ответ. $M = \dfrac{mg\delta}{2\pi}\sqrt{\left(\dfrac{a}{h}\right)^2 - 1}.$

Механика жидкости (теория)

В статической ситуации в жидкости, налитой в сосуд, создается давление

$$P = P_{\text{вн}} + \rho g h,$$

где $P_{\text{вн}}$ – внешнее (атмосферное) давление, ρ – плотность жидкости, h – высота столба жидкости от поверхности. За счет этого давления на тело, погруженное в жидкость, действует сила Архимеда, равная весу вытесненной жидкости. Если вместо тела произвольной формы в сосуде мысленно выделить такой же по форме объем жидкости, то эта жидкость будет находиться в равновесии. Следовательно, сила Архимеда приложена к центру масс вытесненного тела и направлена вверх.

$$F_{\text{А}} = -\rho_{\text{ж}} V g.$$

Следует заметить, что если мы закроем часть поверхности погруженного тела от контакта с жидкостью (например, вдавим тело в дно или боковую стену), то закон Архимеда выполняться не будет.

Рассмотрим простой случай движения жидкости, при котором скорость жидкости в одной точке постоянна по времени, но в разных точках пространства скорости могут различаться. Течения жидкости в этом случае называются стационарными. В таких течениях можно нарисовать неподвижные линии тока, которые, в свою очередь, образуют трубки тока. Количество жидкости в трубке не меняется, поэтому для любых двух сечений $S_{1,2}$ и скоростей в них $V_{1,2}$ справедливо условие непрерывности:

$$S_1V_1 = S_2V_2 .$$

Скорость жидкости в разных сечениях трубки тока может различаться, вместе с ней различается и кинетическая энергия порции жидкости. Это происходит за счет давлений, совершающих работу над жидкостью. Условие сохранения энергии для порции жидкости записывается в виде закона Бернулли:

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \mathrm{const} ,$$

где P – давление, v – скорость жидкости. Здесь учтено, что вход и выход трубки могут находиться на разной высоте.

Механика жидкости (задачи)

7.12. Правильный тетраэдр с ребром a полностью погружен в жидкость плотности ρ так, что его нижняя грань находится на глубине h. Определить силу, действующую на боковую грань, если атмосферное давление равно P.

Ответ. $F = \frac{1}{12}\rho g a^2(3\sqrt{3}h - \sqrt{2}a) + \frac{1}{4}Pa^3\sqrt{3}$.

7.13. Полусферический купол радиуса R плотно прилегает к столу. Через маленькое отверстие на верху купола его заполняют жидкостью плотности ρ. Когда жидкость доходит до отверстия, она приподнимает купол и начинает из-под него течь. Найти массу купола.

Решение.

Перед отрывом от поверхности купол удерживается давлением воды, которая, в свою очередь, давит на стол. Тогда условие равновесия: $mg + 2\pi R^3 \rho g/3 = \rho g R \cdot \pi R^2$, решая это уравнение, получаем выражение для массы.

Ответ. $m = \pi R^3 \rho / 3$.

7.14. Сосуд с водой подвешен к потолку, высота воды в сосуде h. На сколько изменится сила натяжения подвеса, если в дне сосуда открыть маленькое отверстие, из которого будет вытекать струя сечения S? Плотность воды ρ.

Ответ. $\Delta T = 2gh\rho S$.

7.15. Насос должен подавать ежесекундно объем воды V на высоту h по трубе постоянного сечения S. Вычислить мощность насоса, если плотность воды ρ.

Решение.

Энергия, которую двигатель придает воде, расходуется на поднятие воды на высоту и на кинетическую энергию, которая должна быть у воды, чтобы она вытекала из трубы с нужной скоростью. Мощность, расходуемая на работу против силы тяжести, $\dot{U} = \rho V g h$. Мощность, необходимая для ускорения воды, $\dot{K} = m_{\text{в}} v^2 / 2 = \rho V \, (V/S)^2 / 2$. Складывая эти величины, получим минимальную необходимую мощность насоса.

Ответ. $N = \rho V \left(gh + \dfrac{V^2}{2S^2} \right)$.

Вращение с сохранением ориентации оси. Момент инерции (теория)

Для твердого тела изменение момента импульса

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$$

связано с момент приложенных сил

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$$

следующим соотношением:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Для вращающегося с частотой ω вокруг некоторой оси тела:

$$L = I\omega,$$

где I – момент инерции тела относительно этой оси.

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

где r_i – расстояние от оси вращения части тела m_i. Для сплошных тел момент инерции находится интегралом по всему объему тела

$$I = \int r^2 \rho \, dV,$$

где r – расстояние от элемента тела до оси вращения, ρ – плотность тела. Например, в декартовой системе координат при вращении вокруг оси z:

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

в цилиндрической системе координат:

$$I_z = \iiint r^2 \rho(r, \varphi, z) \, r dr \, d\varphi \, dz.$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера позволяет находить момент инерции относительно оси, расположенной на расстоянии *a* от параллельной ей оси, проходящей через центр масс:

$$I = Ma^2 + I_0,$$

где I_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, *M* – масса тела. Координаты центра масс находятся по формулам:

$$\mathbf{R}_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{либо} \quad x_{\text{ЦМ}} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}.$$

Вращение с сохранением ориентации оси. Момент инерции (задачи)

7.16. Крест состоит из однородных стержней массой *m* и длиной *L*, скрепленных посередине под углом α. Найдите его момент инерции относительно конца одного из стержней. Ось вращения перпендикулярна плоскости креста.

Ответ. $I = \dfrac{2mL^2}{3}$.

7.17. Найти момент инерции конуса массой *M* высотой *H* и углом при вершине α. Ось вращения совпадает с осью симметрии конуса.

Решение.

Используем цилиндрическую систему координат с центром в вершине конуса:

$$I_z = \rho\iiint r^3 dr\,d\varphi\,dz = \rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^H dz\int_0^{z-\mathrm{tg}\alpha/2} r^3 dr.$$

Плотность ρ найдем из интеграла

$$M = \int \rho dV = \rho\iiint r\,dr\,d\varphi\,dz,$$

где пределы интегрирования, как в предыдущем интеграле.

$$I_z = 2\pi\rho\int_0^H \frac{1}{4}\left(z\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^4 dz = \frac{\pi\rho}{10}H^5\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $I_z = \dfrac{3}{10}MH^2\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

7.18. Найти момент инерции полуцилиндра массой *m*, радиуса *a*, длиной *l* (относительно оси, проходящей через центр масс вдоль длины *l*).

Ответ. $I = \dfrac{ma^2}{2}\left(1-\dfrac{32}{9\pi^2}\right).$

7.19. Найти моменты инерции однородного тора массой *M*, радиус окружности в вертикальном сечении тора *r*, радиус образующей окружности *R* (рис. 7.19).

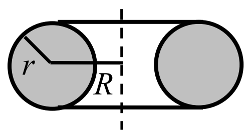


Рис. 7.19

Ответ.

$$I_{x,y} = \frac{1}{2}M\left(R^2+\frac{5}{4}r^2\right);\ I_z = M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right).$$

7.20. Сплошной цилиндр радиусом *R*, вращающийся с угловой скоростью ω, ставят вертикально на шероховатую горизонтальную плоскость. Коэффициент трения μ. Сколько оборотов сделает цилиндр?

Ответ. $N = \dfrac{3}{16\pi}\dfrac{\omega^2 R}{\mu g}.$

7.21. Два одинаковых диска, насаженных на гладкие оси, один из которых вращался с угловой скоростью ω, привели в соприкосновение (рис. 7.21). Найти установившуюся скорость вращения дисков. Какая часть энергии перейдет в тепло?

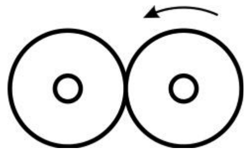


Рис. 7.21

Ответ. $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$, $Q = \dfrac{T_0}{2}$.

7.22. Цилиндрическая банка с жидкостью раскручена вокруг оси симметрии так, что жидкость не успела закрутиться. Как изменится угловая скорость вращения к моменту, когда угловые скорости банки и жидкости уравняются? Сколько энергии перейдет в тепло? Моменты инерции жидкости и пустой банки равны.

Ответ. $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$, $Q = \dfrac{T_0}{2}$.

7.23. Диск радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω_0, привели в соприкосновение с тонкостенным полым цилиндром радиуса $2R$ с внутренней стороны (рис. 7.23). С внешней стороны цилиндр соприкасается с таким же, но изначально неподвижным диском. Диски и цилиндр насажены на гладкие оси. Найти установившиеся скорости вращения дисков и цилиндра. Массы цилиндра и дисков равны.

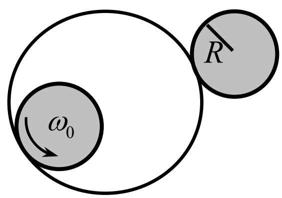


Рис. 7.23

Решение.

Моменты инерции $I_Д = mR^2/2; I_Ц = m(2R)^2 = 4mR^2$. В точке соприкосновения диска и цилиндра возникает сила трения, которая создает момент сил для диска $M_Д = F_{тр}R = I_Д\, d\omega_Д/dt$ и цилиндра $M_Ц = -F_{тр}2R = I_Ц\, d\omega_Ц/dt$. Отсюда мы получаем

$$\frac{I_Д}{R}\frac{d\omega_Д}{dt} = -\frac{I_Ц}{2R}\frac{d\omega_Ц}{dt},$$

что дает $I_Д\omega_Д/R + I_Ц\omega_Ц/2R = \text{const}$. Вторая сила трения (и моменты сил) по аналогии возникает между цилиндром и изначально покоившимся диском, что добавляет в предыдущее уравнение третий член, а константа находится из начальных условий:

$$\frac{I_Д\omega_Д}{R} + \frac{I_Ц\omega_Ц}{2R} + \frac{I_Д\omega_Д}{R} = \frac{I_Д\omega_0}{R}.$$

В конечном состоянии частоты вращения дисков совпадают (но разные по направлению), а у цилиндра $2\omega_Ц = \omega_Д$.

Ответ. $\omega_Д = \dfrac{\omega_0}{4}$; $\omega_Ц = \dfrac{\omega_0}{8}$.

Физический маятник (теория)

Физическим маятником называют твердое тело, совершающее колебания под действием внешних сил вокруг неподвижной оси, не проходящей через его центр масс. В отличие от случая математического маятника, массу такого тела нельзя считать точечной.

Рассмотрим движение физического маятника в поле тяжести. Момент импульса маятника относительно оси вращения изменяется под действием момента силы тяжести, приложенной к центру масс тела:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = \left[\mathbf{r} \times m\mathbf{g}\right],$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, m – масса, r – радиус-вектор от оси вращения к центру масс. Подставляя $\omega = \dot{\varphi}$, записываем проекцию уравнения движения на направление вдоль оси вращения, $I\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi,$ где a – расстояние от оси вращения до центра масс тела, и сделан переход к случаю малых колебаний, $\varphi \ll 1$. Мы получили уравнение гармонических колебаний, из которого следует, что частота малых колебаний физического маятника $\omega = \sqrt{mga/I}.$

Физический маятник (задачи)

7.24. Симметричный крест, состоящий из двух взаимно перпендикулярных тонких однородных стержней длиной L, может колебаться в поле тяжести вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из стержней и перпендикулярной ему. При каком удалении X оси вращения от центра креста период его малых колебаний будет минимален? Найдите минимальное значение периода колебаний креста.

Ответ. $X = \dfrac{L}{\sqrt{12}}$, $T_{\min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g\sqrt{3}}}$.

7.25. Найти частоту малых колебаний тонкостенной сферы вокруг своей хорды в поле тяжести. Каким будет период малых колебаний для шара?

Решение.

Пусть расстояние от точки подвеса до центра сферы x. Момент сил $M = mgx\sin\varphi \approx mgx\varphi = I\, d^2\varphi/dt^2$, где φ – малый угол отклонения хорды от вертикали. Следовательно, частота колебаний $\omega^2 = mgx/I$. Момент инерции относительно точки подвеса находится по теореме Гюйгенса – Штейнера:

$$I = I_{\text{ЦМ}} + mx^2 = \frac{2}{3}mr^2 + mx^2, \quad \text{где } r \text{ – радиус сферы.}$$

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{gx}{\dfrac{2}{3}r^2 + x^2}}$.

7.26. Однородное бревно висит на четырех цепях (рис. 7.26). Треугольники *ACD* и *BMN* равносторонние с длиной стороны *L*. Масса бревна равна *M*. Найти частоту малых горизонтальных колебаний бревна.

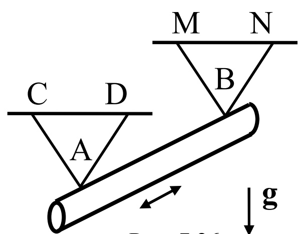


Рис. 7.26

Решение.

Натяжение цепей *T* находим из условия $Mg = 4T{\cdot}\cos 30°$. При смещении бревна из равновесия на расстояние x угол наклона цепей к вертикали составит $\sin\varphi = 2x/\sqrt{3}L$, что вызовет возвращающую силу:

$$F = 2\cdot(2T\cos 30^\circ)\sin\varphi = Mg\sin\varphi = Mg\, 2x/\sqrt{3}L.$$

Отсюда уравнение движения бревна: $M\ddot{x} = -Mg\, 2x/\sqrt{3}L$.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}L}}$.

7.27. Номерок из гардероба представляет собой диск радиусом R, на краю которого имеется отверстие радиусом r. Номерок висит на тонком гвозде. Найти частоту его малых колебаний в своей плоскости.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{3}\dfrac{R^3 - r^3}{R^4 - r^4}}$.

7.28. Однородный круговой обруч массой M радиуса a подвешен в одной из своих точек. Обруч совершает свободные колебания в своей плоскости. Максимальный угол отклонения диаметра обруча от вертикали α ($\alpha \le 90^\circ$). Найти наименьшее и наибольшее значения величины реакции точки подвеса.

Ответ. $T_{\max} = Mg\sqrt{4 + \cos^2\alpha - 4\cos\alpha}$, $T_{\min} = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$.

Плоское движение тел (теория)

В любой момент времени скорость любой точки твердого тела может быть выражена через сумму скорости движения произвольной точки и угловую скорость вращения тела относительно некоторой оси, проходящей через эту точку:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

При этом вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора точки тела.

Вращающееся с частотой ω тело имеет кинетическую энергию вращения

$$E = \frac{I\omega^2}{2}.$$

А кинетическую энергию движущегося и вращающегося твердого тела можно представить как сумму поступательного движения центра масс и вращения тела вокруг центра масс с частотой ω :

$$E = \frac{MV_{\text{ц.м.}}{}^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}.$$

Плоское движение тел (задачи)

7.29. Каким участком сабли следует рубить лозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородным стержнем длиной L.

Ответ. На расстоянии $\dfrac{2}{3}L$ от рукоятки.

7.30. Однородный диск радиусом R, вращавшийся с угловой скоростью ω_0, разбился по диаметру на две равные части. Найти скорости поступательного и вращательного движения осколков.

Ответ. $V_x = \omega R,\ \omega = \omega_0$.

7.31. Определить ускорение скатывания шара с наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α.

Ответ. $a = \dfrac{5}{7} g \sin\alpha$.

7.32. По льду скользят две шайбы, имевшие одинаковые начальные скорости. Одна из них при этом вращается, а другая движется только поступательно. Какая из шайб пройдет большее расстояние? Коэффициент трения не зависит от скорости.

Ответ. Вращающаяся шайба пройдет больший путь.

7.33. Тонкая цепь длины L намотана на сплошной цилиндр, который способен вращаться вокруг закрепленной оси. Найти время разматывания цепи под действием силы тяжести, если в начальный момент с цилиндра свисал конец длиной $L/4$. Массы цепи и цилиндра равны, длина цепи много больше диаметра цилиндра.

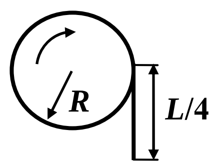


Рис. 7.33

Решение.

Обозначим длину свешивающейся части цепи за $x(t)$. При разматывании цепи через малое время dt изменение кинетической энергии будет разницей между $Mv^2(t+dt)/2 + I\omega^2(t+dt)/2$ и этим же выражением в момент времени t. Потенциальная энергия изменится за счет появления массы Δm снизу цепи и ее исчезновением сверху (на цилиндре): $\Delta E = \Delta m \cdot g \cdot x(t) = \Delta x \cdot g x(t) M/L$. Приравнивая изменения потенциальной и кинетической энергии, с учетом $I = MR^2/2$ и $\omega = v/R$ получаем

$$\frac{g}{L} x(t) \Delta x = \frac{3}{4} \Delta(v^2(t)) .$$

Интегрирование с учетом начальных условий $(x(0) = L/4$, $v(0) = 0)$ дает уравнение

$$\frac{g}{2L}\left(x(t)^2 - \frac{L^2}{16}\right) = \frac{3}{4}v(t)^2.$$

Откуда $v(t) = \sqrt{\left(x^2 - L^2/16\right)2g/3L}$. При этом $v(t) = dx/dt$. Разделяя переменные, получаем

$$\int\limits_{L/4}^{L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - L^2/16}} = \sqrt{\frac{2g}{3L}}\int\limits_0^T dt,$$

где T – искомое время разматывания цепи.

Ответ. $T = \sqrt{\dfrac{3L}{2g}}\ln(4 + \sqrt{15})$.

7.34. Два гладких цилиндра радиуса R прислонены к стенке (рис. 7.34). Из-за того, что нижний цилиндр чуть стронулся вправо по горизонтальной плоскости, верхний стал опускаться по вертикали и система пришла в движение. Найдите конечную скорость нижнего цилиндра.

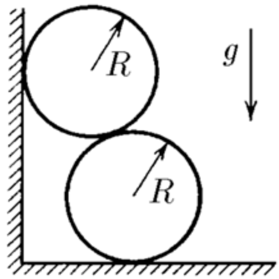


Рис. 7.34

Ответ. $v = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{gR}{3}}$.

7.35. Однородный цилиндр раскрутили вокруг оси и поставили без поступательной скорости на шероховатую горизонтальную плоскость. Ось вращения параллельна плоскости. С какой установившейся скоростью покатится цилиндр? Какая доля энергии цилиндра перейдет в тепло?

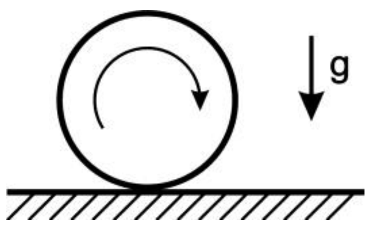


Рис. 7.35

Решение.

В нижней точке цилиндра возникнет сила трения F, которая будет замедлять вращение моментом сил $FR = -I\,d\omega/dt$ и одновременно разгонять цилиндр вправо: $F = m\,dv/dt$. Подставляя второе уравнение в первое с учетом $I = mR^2/2$, получаем $dv = -R/2\; d\omega$. Интегрирование по времени с учетом начальных условий дает $v(t) = R/2\,(\omega_0 - \omega(t))$. Трение исчезнет при условии $v = \omega R$, откуда $\omega = \omega_0/3$.

Ответ. $v = \dfrac{\omega_0 R}{3}$; $Q = \dfrac{2}{3}E_0$.

7.36. Сплошной цилиндр радиуса R раскрутили вокруг оси до угловой скорости ω_0 и затем поместили в угол между стеной и полом. Коэффициент трения μ. Сколько времени цилиндр будет вращаться?

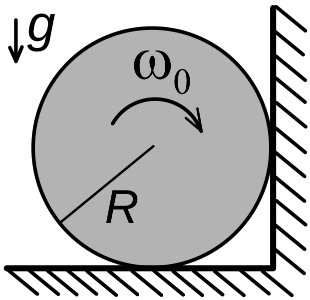


Рис. 7.36

Решение.

В нижней точке цилиндра возникнет сила трения F_1 и сила реакции опоры N, причем $F_1 = \mu N$. В месте касания стены возникнет сила трения $F_2 = \mu F_1$. Так как $F_2 + N = mg$, получаем $F_1 + F_2 = mg\,\mu(\mu+1)\big/\left(\mu^2+1\right)$. Силы трения создают момент сил $(F_1 + F_2)R = -I\,d\omega/dt$, откуда с учетом $I = mR^2/2$ частота вращения:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2(F_1 + F_2)}{mR}t\,.$$

Время остановки T находится из условия $\omega(T) = 0$.

Ответ. $T = \dfrac{\mu^2 + 1}{2\mu(\mu+1)g}R\omega_0$.

7.37. Стержень лежит на двух опорах вблизи концов. Масса стержня M. Одну из опор (левую) убирают, найти давление на оставшуюся опору в первый момент.

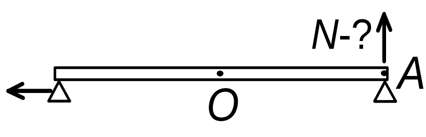


Рис. 7.37

Решение.

Когда левую опору убрали, в центре масс стержня (т. O) возникает момент сил $M_O = N\,L/2 = I_O\,d\omega/dt$. В то же время в точке A момент сил возникает только из-за сил тяготения в центре масс: $M_A = Mg\,L/2 = I_\text{A}\,d\omega/dt$. Так как ω не зависит от выбора точки, получаем $Mg/I_A = N/I_O$. Момент инерции стержня относительно центра $I_O = ML^2/12$, относительно края $I_A = ML^2/3$.

Ответ. $N = \dfrac{Mg}{4}$.

Гироскоп и волчок (теория)

Быстро вращающееся вокруг некоторой оси тело при приложении моментов внешних сил будет циклически менять направление оси вращения в пространстве – прецессировать.

Частота прецессии Ω вращающегося с частотой ω и стоящего на столе под углом к вертикали α волчка находится из уравнения для моментов сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\times\mathbf{F}] = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Так как момент сил имеет направление вдоль вектора $\mathbf{e}_\varphi$, то момент импульса (направленный по $\mathbf{e}_r$) будет сохраняться по модулю $L = I\omega$. Тогда

$$d\mathbf{L} = L\sin\alpha\ d\varphi\ \mathbf{e}_\varphi = M\,\mathbf{e}_\varphi dt,$$

откуда

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L\sin\alpha} = \frac{M}{I\omega\sin\alpha}.$$

В общем случае:

$$\mathbf{M} = I[\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}].$$

Для волчка момент сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\times\mathbf{F}] = mga_\text{ЦМ}\sin\alpha\,\mathbf{e}_\varphi,$$

следовательно $\Omega = \dfrac{mga_\text{ЦМ}}{I\omega}$, где $a_{\text{ЦМ}}$ – расстояние от точки опоры волчка до его центра масс.

В общем случае движение вращающегося тела описывается уравнениями Эйлера:

$$M_x = I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z,$$

$$M_y = I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z,$$

$$M_z = I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y.$$

Гироскоп и волчок (задачи)

7.38. В укрепленную на вертикальной оси тонкую сферическую оболочку массой *M*, радиусом *R* вложен шар массой *M* и радиусом *R*. Шар раскручен до угловой скорости ω под углом α к вертикали (рис. 7.38). Найти установившуюся угловую скорость вращения оболочки и шара, если между ними действует сила трения.

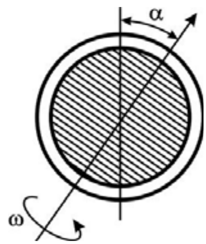


Рис. 7.38

Ответ. $\omega_{\text{уст}} = \frac{3}{8}\omega\cos\alpha$.

7.39. Волчок, имеющий форму диска диаметром 30 см, насаженного посредине оси длиной 20 см, вращается с угловой скоростью 15 оборотов/с вокруг оси симметрии (рис. 7.39). Определить угловую скорость регулярной прецессии волчка.

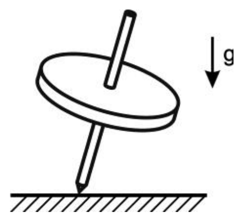


Рис. 7.39

Решение.

Частота прецессии $\Omega = mga_{\text{ЦМ}} \big/ \left(I\omega\right)$, момент инерции диска $I = mR^2/2$, расстояние до центра масс $a_{\text{ЦМ}} = L/2 = 10$ см.

Ответ. $\Omega = \frac{gL}{\omega R^2} \approx 0{,}9$ рад/с.

7.40. Найти момент *M* гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера, если самолет при скорости *u* = 300 км/ч делает поворот радиуса $R = 100$ м. Пропеллер с моментом инерции $I = 7$ кг м^2 делает $N = 1000$ оборотов в минуту.

Ответ. $M = \dfrac{2\pi INu}{R} = 612$ Н·м^2.

ЧАСТЬ 8

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. ЭЛЕМЕНТЫ ОТО

Среди всех возможных систем отсчета инерциальные системы отсчета выделяются с помощью законов динамики. Инерциальные системы – это такие системы, в которых справедливы все три классических закона Ньютона. Третий закон Ньютона явно подчеркивает, что силы – это результат взаимодействия тел. В неинерциальных системах отсчета сохранить все три закона уже невозможно. Если сохранить второй закон, то приходится вводить силы, не удовлетворяющие третьему закону, – *силы инерции*.

Второй закон Ньютона записывается в неинерциальных системах отсчета как $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}}$. Первая составляющая $\mathbf{F}$ есть «настоящая сила» в том смысле, что она является результатом взаимодействия тел. Вторая составляющая – сила инерции $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения системы отсчета. Это фиктивная сила, исчезающая в инерциальных системах отсчета.

Силы инерции бывают разных видов.

1. *Поступательная сила инерции* обусловлена ускоренным поступательным движением с ускорением $\mathbf{a_0}$ неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной и равна $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_0$.

2. Если тело неподвижно во вращающейся системе отсчета, то помимо реальных сил на него действует направленная от оси вращения *центробежная сила инерции* $\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{r}_\perp$.

3. Если же тело движется со скоростью $\mathbf{V}$ относительно вращающейся системы отсчета, то на него действует *сила Кориолиса* $\mathbf{F}_{\text{к}} = 2m\left[\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}\right]$.

Необходимо отметить, что любую задачу можно решать как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета. Выбор той или иной системы отсчета обычно диктуется или постановкой вопроса, или стремлением получить решение возможно более простым путем. При этом часто наиболее удобно пользоваться именно неинерциальными системами отсчета.

Принцип эквивалентности. Тот факт, что силы инерции, как и силы тяготения, пропорциональны массам тел, приводит к важному заключению. Никакие опыты по свободному падению тел в полностью закрытой от внешнего мира лаборатории не могут отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Эйнштейн высказал предположение, что вообще никакими физическими опытами невозможно отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции. Это предположение, возведенное в постулат, и составляет содержание принципа эквивалентности сил тяготения и сил инерции: *все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции*.

Глубокая аналогия между силами инерции и силами тяготения послужила отправным пунктом при построении Эйнштейном общей теории относительности (ОТО).

Исходя из принципа эквивалентности, Эйнштейн предсказал явление *гравитационного смещения спектральных линий*. Пусть монохроматический свет приходит от удаленного источника, причем в пространстве, через которое он распространяется, гравитационного поля нет. Если наблюдатель начнет двигаться навстречу световым лучам с постоянным ускорением $\mathbf{a}$, то частота воспринимаемого света увеличится (эффект Доплера). Допустим теперь, что наблюдатель в инерциальной системе отсчета неподвижен, но в ней имеется однородное гравитационное поле с напряженностью $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$. По принципу эквивалентности гравитационное поле вызовет в точности такое же изменение частоты света, что и в предыдущем случае. *При распространении света по направлению гравитационного поля частота световой волны будет возрастать, а при распространении в противоположном направлении – убывать*. Результат можно обобщить на случай постоянного неоднородного гравитационного поля. В слабом гравитационном поле значение смещения определяется формулой $\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}$, где ω_1 и ω_2 – частота света в точках 1 и 2 соответственно, φ_1 и φ_2 – гравитационный потенциал в этих точках.

Неинерциальные системы отсчета. Элементы ОТО (задачи)

8.1. Каков будет период малых колебаний математического маятника в лифте, опускающемся с постоянным ускорением a?

Ответ. При $a < g$ период равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$. При $a = g$ период становится бесконечным, т. е. маятник качаться не будет. При $a > g$ маятник перевернется и будет колебаться около своего наивысшего положения с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{a-g}}$.

8.2. Каков будет период малых колебаний *T* математического маятника длины *l*, подвешенного в вагоне, свободно скатывающемся по наклонному пути с углом наклона α?

Решение.

Ускорение вагона равно $a = g\sin\alpha$. В системе вагона эффективное ускорение свободного падения равняется $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}$, откуда $g' = \sqrt{g^2 - 2ga\cos(\pi/2-\alpha) + a^2} = g\cos\alpha$. Следовательно, период колебаний маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}.$$

8.3. Какую форму принимает поверхность жидкости в цилиндрическом сосуде при его вращении вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью ω?

Решение.

Во вращающейся системе отсчета K' поверхность жидкости перпендикулярна равнодействующей приложенных к ней сил, т. е. силы тяжести и центробежной силы. В вертикальной плоскости $x'z'$ поверхность жидкости описывается зависимостью $z' = z'(x')$, при этом $\dfrac{dz'}{dx'} = \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{F_{\text{цб}}}{mg} = \dfrac{\omega^2 x'}{g}$. Интегрируя, получаем $z' = \dfrac{\omega^2 x'^2}{2g}$. В лабораторной системе отсчета поверхность жидкости представляет собой параболоид вращения $z = \dfrac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right)$.

8.4. Муфта *A* может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиуса *R*. Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO'. Найти угол θ, соответствующий устойчивому положению муфты.

Решение.

Во вращающейся системе отсчета муфта будет покоиться, если сумма всех сил, действующих на нее, будет иметь нулевую проекцию на касательную к кольцу. Другими словами, условие равновесия есть $mg\sin\theta = F_{\text{цб}}\cos\theta$, откуда следует, что $\sin\theta\left(g-\omega^2 R\cos\theta\right)=0$. Если $\omega^2 R \le g$, то имеется два положения равновесия: $\theta=0$ (устойчивое) и $\theta=\pi$ (неустойчивое). Если $\omega^2 R > g$, то положений равновесия три: $\theta=0$ (неустойчивое), $\theta=\pi$ (неустойчивое) и $\theta=\arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 R}\right)$ (устойчивое).

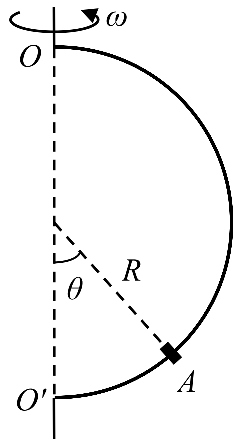


Рис. 8.4

8.5. Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Оцените угол наклона поверхности воды в реке к горизонту на широте φ. Река течет с севера на юг.

Решение.

В системе отсчета, связанной с Землей, поверхность воды в реке перпендикулярна к равнодействующей приложенных к ней сил, т. е. силы тяжести и силы Кориолиса. Сила Кориолиса направлена на запад и по модулю равна $F_k = 2mV\omega\sin\varphi \ll mg$ ($\omega = 2\pi/T \approx 7{,}3\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$). Следовательно, на западном берегу уровень воды выше и угол наклона равен $\theta \approx \mathrm{tg}\theta \approx \dfrac{F_k}{mg} = \dfrac{2V\omega}{g}\sin\varphi \ll 1$.

8.6. На 60° северной широты электровоз массой в 100 т идет с запада на восток со скоростью $v = 72$ км/ч по железнодорожному пути, проложенному вдоль географической параллели данной местности. Найти величину и направление вертикальной и горизонтальной компонент силы Кориолиса, действующей на электровоз.

Решение.

Расположение нужных для решения векторов угловых скоростей и сил показано на рис. 8.6. Вектор скорости поезда перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за чертеж. Направленная вертикально компонента силы Кориолиса $F_R = 2mv\omega\cos\varphi \approx 150$ Н. Направленная на юг горизонтальная компонента силы Кориолиса $F_R = 2mv\omega\sin\varphi \approx 250$ Н, где φ – географическая широта места.

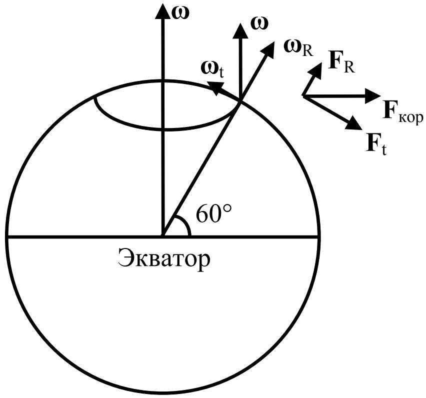


Рис. 8.6

8.7. Тело падает без начальной скорости с высоты 500 м. Принимая во внимание вращение Земли и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько и в какую сторону отклонится тело при падении. Географическая широта места 60°.

Решение.

Так как в данной задаче центробежная и кориолисова силы много меньше силы гравитационного притяжения тела и Земли, то можно считать, что в вертикальном направлении тело движется с ускорением g, тогда $v \approx gt$ и время падения $t \approx \sqrt{2h/g}$. Сила Кориолиса отклоняет вертикально падающее тело к востоку. Ускорение Кориолиса равно $a_{\text{k}} = 2v\omega\cos\varphi \approx 2g\omega\cos\varphi \cdot t$. Интегрируя, найдем, что тело, падая без начальной скорости, отклонилось к востоку на $\Delta x \approx 2g\omega\cos\varphi \cdot t^3/6 \approx 12$ см.

8.8. На каком расстоянии и в каком направлении от орудия упадет снаряд, выпущенный вертикально вверх со скоростью $V_0 = 100$ м/с на широте $\varphi = 60°$, если пренебречь сопротивлением воздуха?

Ответ. Снаряд отклонится на $\Delta x \approx 4V_0^3\omega\cos\varphi/\left(3g^2\right) \approx 50$ см к западу. Результат может показаться неожиданным. При движении вверх кориолисова сила направлена на запад, а при движении вниз – на восток. На первый взгляд кажется, что отклонение к западу должно компенсироваться последующим отклонением к востоку. На самом деле это не так. Когда тело движется вверх, его горизонтальная начальная скорость равна нулю.

В наивысшую точку тело приходит, однако, с западной составляющей скорости, которую оно приобретает под действием кориолисовой силы. Поэтому обратное падение тела начинается с начальной скоростью, направленной на запад. Следовательно, горизонтальная скорость все время направлена на запад и перед ударом о землю обращается в нуль.

8.9. Один из маятников Фуко был установлен в Ленинграде в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98$ м, линейная амплитуда колебаний шара маятника (т. е. наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5$ м. Маятник отпускался из крайнего положения без начального толчка. Определить боковое отклонение шара маятника от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Ленинграда $\varphi = 60°$.

Решение.

Рассмотрим движение маятника в системе отсчета, вращающейся относительно Земли вокруг вертикали рассматриваемого места с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}_в$, где $\boldsymbol{\omega}_в$ – вертикальная составляющая угловой скорости осевого вращения Земли. В этой системе уравнение малых колебаний математического маятника имеет вид $\ddot{\mathbf{r}} + \Omega^2\mathbf{r} = 0$, где $\Omega^2 = g/l$, а $\mathbf{r}$ – смещение маятника из положения равновесия. В начальный момент маятник, вращаясь вместе с Землей, имеет боковую скорость $\omega_в x_0$. Поместим начало координат O в положение равновесия маятника. Ось X направим из точки O к точке ($x = x_0$, $y = 0$), в которой маятник находился в начальный момент. Для движения вдоль оси Y имеем $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. Решая это уравнение при начальных условиях $y_{t=0} = 0$, $\dot{y}_{t=0} = \omega_в x_0$, получим $y = (\omega_в x_0/\Omega)\sin\Omega t$. В среднем положении $\Omega t = \pi/2$, и для бокового отклонения в этом положении наша формула дает $y = \omega_в x_0/\Omega = \omega x_0/\Omega\ \sin\varphi \approx 1$ мм.

8.10. К Z-образной трубке через подвижный подвод того же сечения посередине трубки подается вода со скоростью V (рис. 8.10). Вода вытекает из обоих концов трубки, вызывая ее вращение. Найти угловую скорость вращения трубки, если ее длина $2L$.

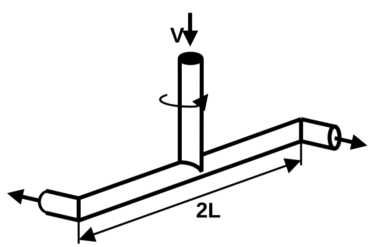


Рис. 8.10

Решение.

В установившемся режиме трубка будет вращаться равномерно. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вместе с трубкой с угловой скоростью Ω. В этой системе отсчета на половину трубки со стороны воды, текущей со скоростью $V/2$, действуют сила Кориолиса $F_{\text{k}} = 2\rho SL\Omega V/2$ и реактивная сила $F_p = \rho S\left(V/2\right)^2$. Трубка в выбранной системе отсчета покоится, и суммарная сила равна нулю. Отсюда получаем ответ: $\Omega = \dfrac{V}{4L}$.

8.11. Рассмотрим две частицы с равными массами *m*, одна из которых обладает зарядом $q > 0$, а другая электрически нейтральна. Частицы помещены в лифт, свободно падающий в поле Земли, причем заряженная частица располагается ниже нейтральной. В лифте существует электрическое поле *E*, направленное вертикально вверх. Получите уравнение, описывающее, как изменяется со временем разность высот между частицами, если учитывать как приливные, так и электрические эффекты. Не противоречит ли принципу эквивалентности наличие приливных сил?

Решение.

Благодаря полю *E* расположенная ниже заряженная частица будет испытывать ускорение $a = qE/m$, направленное вертикально вверх. Относительное ускорение, обусловленное гравитационными силами, равно

$$\frac{GM}{\left(R+z_1\right)^2} - \frac{GM}{\left(R+z_2\right)^2} \approx \frac{2GM}{R^3}\left(z_2 - z_1\right)$$

и направлено вниз (нижняя частица падает быстрее, чем верхняя). Здесь *M* – масса Земли, *R* – расстояние от центра Земли до центра лифта, $z \ll R$ – вертикальная координата частицы, если начало координат выбрать в центре лифта. Если ввести переменную $\eta = z_2 - z_1$, то искомое уравнение будет таким:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} \approx \frac{2GM}{R^3}\eta - \frac{q}{m}E\,.$$

Тот факт, что два члена в правой части кажутся вполне сравнимыми по величине, может поначалу вызвать некоторые опасения. Предположим, однако, что наш эксперимент ограничен коротким промежутком времени *t*. Тогда к концу эксперимента гравитационные силы изменят разность высот

η между частицами на величину $\delta\eta \sim \frac{2GM}{R^3}\frac{t^2}{2}\eta_0$ (поскольку частицы начинают двигаться из состояния покоя, то $\dot{\eta}_{t=0} = 0$). С другой стороны, изменение разности высот, обусловленное электрическим полем, равно $\delta\eta \sim -\frac{qE}{m}\frac{t^2}{2}$. Таким образом, если в достаточной степени ограничить пространственно-временные масштабы нашего эксперимента (t и η_0 взять достаточно малыми), то можно будет пренебречь гравитационными эффектами.

8.12. Во вращающейся системе координат найти выражение для квадрата интервала ds^2 и для квадрата пространственного расстояния dl^2. Чему равно отношение длины окружности к ее радиусу?

Решение.

В неподвижной цилиндрической системе координат (t, r', φ', z') интервал имеет вид $ds^2 = c^2 dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2$. Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут (t, r, φ, z). Если ось вращения совпадает с осями z и z', то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω – угловая скорость вращения. Тогда интервал во вращающейся системе отсчета имеет вид $ds^2 = \left(c^2 - \Omega^2 r^2\right) dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2$. Таким образом, из записи $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ следует, что метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ имеет следующие ненулевые компоненты: $g_{tt} = c^2 - \Omega^2 r^2$, $g_{t\varphi} = -\Omega r^2$, $g_{rr} = g_{zz} = -1$, $g_{\varphi\varphi} = -r^2$.

Пространственное расстояние между двумя бесконечно близкими точками определяется по формуле $dl^2 = \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i dx^j$. Подставляя в эту формулу компоненты метрического тензора, находим, что $dl^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \Omega^2 r^2 / c^2} d\varphi^2 + dz^2$. Это выражение для dl^2 можно получить и проще, рассматривая линейки, разложенные вдоль радиуса и обода вращающегося диска. При переходе от неподвижной системы координат к вращающейся линейки вдоль радиуса не испытывают лоренцова сокращения, а линейки вдоль обода сокращаются в $\gamma = 1 \big/ \sqrt{1 - \Omega^2 r^2 / c^2}$ раз.

Длина окружности в плоскости $z = \text{const}$ (с центром на оси вращения) равна

$$\int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1-\Omega^2 r^2/c^2}}\, d\varphi = \frac{2\pi r}{\sqrt{1-\Omega^2 r^2/c^2}} .$$

Таким образом, отношение длины окружности к ее радиусу во вращающейся системе координат равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\Omega^2 r^2/c^2}} > 2\pi .$$

8.13. Пусть *A*, *B*, *C* – вершины сферического треугольника с углами $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ в них. Вектор из точки *A* параллельно переносится вдоль сторон треугольника снова в вершину *A*. Определить угол поворота вектора.

Ответ. $\delta = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C - \pi$.

8.14. Если на Земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на Солнце, то его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на Земле. Оцените относительную величину $\Delta\omega/\omega$ этого эффекта. В сторону меньших или больших частот происходит смещение?

Решение.

Гравитационный потенциал на поверхности Солнца равен $\varphi_\odot = -G M_\odot / R_\odot \approx -2\cdot 10^{11}$ м^2/с^2, где $M_\odot \approx 2\cdot 10^{30}$ кг и $R_\odot \approx 7\cdot 10^8$ м. На поверхности Земли $\varphi_\oplus = -G M_\oplus / R_\oplus \approx -6\cdot 10^7$ м^2/с^2, где $M_\oplus \approx 6\cdot 10^{24}$ кг и $R_\oplus \approx 6,4\cdot 10^6$ м. Таким образом, численно $\left|\varphi_\odot / c^2\right| \approx 2\cdot 10^{-6} \ll 1$ и $\left|\varphi_\oplus / c^2\right| \approx 7\cdot 10^{-10} \ll 1$, т. е. гравитационное поле на поверхности Солнца и тем более на поверхности Земли можно считать слабым. В слабом гравитационном поле $\omega \approx \omega_0 \left(1 - \dfrac{\varphi}{c^2}\right)$. Тогда

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_\oplus - \omega_\odot}{\omega} \approx \frac{\varphi_\odot - \varphi_\oplus}{c^2} \approx \frac{\varphi_\odot}{c^2} \approx -2\cdot 10^{-6} .$$

Смещение отрицательно, т. е. происходит в сторону меньших частот – это явление называется *гравитационным красным смещением*.

8.15. На поверхности Луны из-за более слабого гравитационного поля время течет быстрее, чем на Земле. Астронавты экспедиции «Аполлон-11» провели на Луне около суток. На сколько секунд они дополнительно постарели за это время по сравнению с жителями Земли?

Ответ. Гравитационный потенциал на поверхности Луны равен $\varphi_{\text{Л}} = -G\dfrac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}} \approx -3\cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$, где $M_{\text{Л}} \approx 7\cdot 10^{22}$ кг и $R_{\text{Л}} \approx 1{,}7\cdot 10^6$ м.

Так как гравитационное поле можно считать слабым, то относительная разность времен равна $\dfrac{\Delta\tau}{\tau} = \dfrac{\tau_{\text{Л}} - \tau_{\oplus}}{\tau} \approx \dfrac{\varphi_{\text{Л}} - \varphi_{\oplus}}{c^2} \approx -\dfrac{\varphi_{\oplus}}{c^2} \approx 7\cdot 10^{-10}$. Если принять τ равным 1 суткам, то $\Delta\tau \approx 6\cdot 10^{-5}$ с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тельнов В. И.* Механика и теория относительности / В. И. Тельнов. Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015. 283 с.

2. *Бельченко Ю. И.* Механика частиц и тел в задачах / Ю. И. Бельченко, Е. А. Гилев, З. К. Силагадзе. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 248 с.

3. *Буховцев Б. Б. и др.* Сборник задач по элементарной физике. М. : Наука, 1974. 416 с.

4. Задачи по физике / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.; под. ред. О. Я. Савченко. Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 1999. 370 с.

5. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 368 с., ил.

6. *Иродов И. Е.* Основные законы механики / И. Е. Иродов. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 1985. 248 с.

7. Лайтман А. Сборник задач по теории относительности и гравитации / А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. М. : Мир, 1979.

8. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов: в 10 т / Л. Д. Ландау. Т. II. Теория поля. 8-е изд., стереот. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 536 с.

9. Сборник задач по общему курсу физики: в 5 кн. Кн. I. Механика / С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, В. А. Угаров, И. А. Яковлев; под ред. И. А. Яковлева. 5-е изд., стер. М. : ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006. 240 с.

10. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики: учеб. пособие для вузов. В 5 т / Д. В. Сивухин. Т. I. Механика. 4-е изд., стереот. М. : ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. 560 с.

11. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности / В. А. Угаров. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 384 с., ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ахметов Тимур Дарвинович,
Болеста Алексей Владимирович,
Еманов Федор Александрович,
Руденко Александр Сергеевич,
Тельнов Валерий Иванович,
Шошин Андрей Алексеевич

ЗАДАЧИ ПО МЕХАНИКЕ
И ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Под редакцией В. И. Тельнова

Редактор Д. И. Ковалева

Подписано в печать 10.10.2016
Формат 60x84/16. Уч.-изд. л. 10,6. Усл. печ. л. 9,9.
Тираж 300 экз. Заказ № 212

Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2